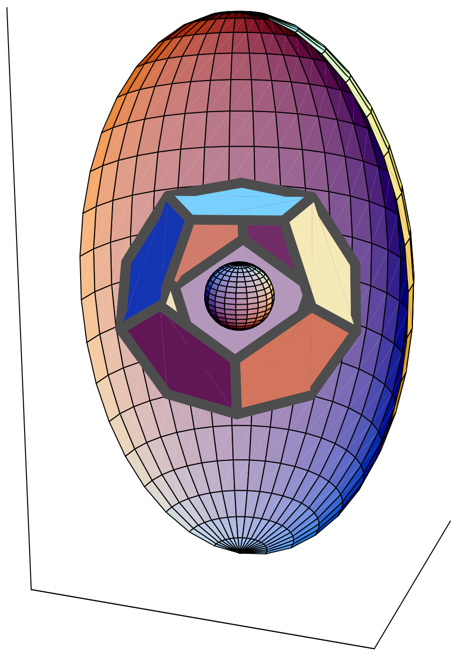
Vom Bildungswert der Mathematik

◇ Eine Artikel–Serie aus den Jahren 1990/91 ◇



Scripta monolingua
Ehemals konzipiert für die Zeitschrift TR 1990

(Elektronische Rekonstruktion mit angepasster Formatierung)

von

Rolf Wirz

HTA Biel–Bienne

Fassungen 1 vom 28.5.1990, rekonstruiert nach Fassung 2 vom 6. 1991 / 19. Dezember 2000

Produziert mit PCTEX auf WIN98.

Weisheit? — Wissen, was wirklich wichtig ist ...
Dummheit? — Tun, was wirklich nicht wichtig ist ...

Adresse:

Berner Fachhochschule
Hochschule für Technik und Architektur Biel
(Früher Ingenieurschule Biel)

Quellgasse 21
Postfach 1180
CH-2501 Biel-Bienne
Tel. (..41) (0)32 / 3216 111

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Vom Bildungswert der Mathematik

Ein Artikel aus den Jahren 1990/91 (elektronische Rekonstuktion der noch vorhandenen Papier–Fassungen 1 und 2)

Von Rolf W. Wirz–Depierre

Dieser Beitrag gliedert sich in zwei Teile:

- ⊘ *Erster Teil: Über Wertung, Umfeld und Wurzeln*
  (Was soll die Mathematik? Woher kommt sie? Wie und wozu ist sie?)
- ⊘ *Zweiter Teil: Das Sakrale in der Mathematik und die Schönheit*
  (Ausdruck im Kleide der Mathematik)

1.1 Erster Teil: Über Wertung, Umfeld und Wurzeln

1.1.1 Umfeld

Was leitet denn eine Wissenschaft wie die Mathematik, was wirkt auf sie, was prägt sie? Was gab ihr ihre heutige Form? Was ist ihr Zweck, ihr Sinn, was soll's damit? Was bringt sie mir, was der Menschheit? — Fragen über Fragen. Ihre Antworten können uns helfen, ein zeitgemässes Verständnis zu entwickeln, ohne das einem bildungspolitischen Urteil die Reife mangelt. Ohne die Weisheit, wenn Bildung fehlt, funktioniert ein Staatswesen nicht human.

Wollen wir nicht Probleme bekommen, so können wir uns eine Wissenschaft nicht vom Menschen losgelöst denken. Der Mensch als Träger scheint notwendig. Als Wesen gebunden an Zeit, Kultur, soziales Umfeld, zeiteigene Technik, an den jeweils gültigen geistigen Überbau, drücken wir auch der Mathematik den in der uns eigenen Zeit gültigen Stempel auf.

Früher als eine Kunst, nur wenigen Auserwählten vorbehalten, hat diese Mathematik heute Einzug gehalten in den elementaren Schulunterricht und plagt durch ihre wesenhafte Strenge die Studenten vor allem technischer und exakt wissenschaftlicher Richtung bis zur Erteilung von karriereverdächtigen Rängen und Würden.

Als heute dem Berufshungrigen wegweisend festgeschriebene Ziele lesen wir: Die Mathematik soll zur Ausbildung beitragen, aber sie soll auch bilden. Bilden, um dem jungen Menschen Urteilsgrundlagen mit auf den Berufs– und Lebensweg zu geben, damit er auf bewussterer und umfassenderer Basis zu entscheiden befähigt sei. Das öffnet ihm einen erweiterten Horizont. So steigen also seine Wahlmöglichkeiten: Er wird freier, unabhängiger, reifer. Er kann umfassenderer Verantwortung tragen. Er wird fähiger, den er wird weiser und nicht nur punktuell schlauer.

> *Der schlaue Fuchs benutzt seine Werkzeuge Schlauheit, Sinne, Mund und Pfoten. Zur Weisheit gelangt er dadurch aber nie.*

Und ausbilden? Genügt hier die Mathematik dem Anspruch der Zeit noch? Da streitet ihr wohl niemand im Ernst den Wert ab. Doch erfüllt sie denn die gewünschten Ziele? Wo liegen allenfalls die Probleme, abgesehen von den denkerischen Hürden? — Ausbildung muss ausgerichtet sein auf den praktischen Bedarf der jeweiligen Generation. Ein grosses Problem ist uns nun darin erwachsen, dass in vielen Gebieten der Moderne die Anwendungsgenerationen sehr kurzlebig geworden sind. Vor allem in und wegen computerverbundener Technik. Der Fortschritt "frisst" seine Väter, Anwendungswissen ist häufig Wegwerfwissen, Anwendergenerationen sind "Wegwerfgenerationen". Ein enormer Prozentsatz der vor zehn Jahren ins Berufsleben getretenen jungen Menschen hat heute den angestammten Beruf wieder gewechselt, und man rätselt, was das wen kostet. Da ertönt die Frage nach dem langfristigen Nutzen der momentan so notwendigen Ausbildung, abgesehen von ihrer Funktion als Pflasterstein auf dem Karrierenweg.

In unserer von der Entwicklung überrollten, desorientierten, wertkritischen Zeit müssen wir daher ernsthaft darüber nachdenken, ob kurzfristige praktische Brauchbarkeit noch der einzige bestimmende Wegweiser für Ausbildung sein darf. Immer wieder tritt es doch angstvoll, in heiliger Verklärung formuliert an uns heran: "Wo kann ich das gebrauchen". — Naiv? Unreflektiert? Gebrauchen auf welcher Stufe? Für den nächsten Job? Fürs Leben? Für eine umfassendere Persönlichkeitsentwicklung? Oder um die nächste Klausur erfolgreich zu bestehen? Gewiss kann, so sehen wir, "gebrauchen" heute nicht mehr nur kurzfristig verstanden sein, denn Berufsblider stehen nicht mehr statisch fix. Sie wandeln sich stets. Daher die These: Ausbildung darf heute nicht mehr von Bildung getrennt dastehen. Ausbildung muss heute immer auch Bildung sein, muss Verantwortung pflanzen, muss auch langfristig dem sich immer schneller wechselnden Umfeld genügen. Mathematik in Fachschulen und Hochschulen darf daher durchaus auch ideelle Züge aufweisen, wie sie früher in den "geistigen Parks" der humanistischen Bildungsstätten hochgehalten worden sind und von da die "geistigen Strassen" geebnet haben, auf denen die technische Entwicklung ja "fahren" konnte.

1.1.2 Wo ankert die Mathematik in unserem Wertgefüge?

Sicher bietet die Mathematik der Wissenschaft und Technik direkt anwendbare Methoden und Verfahren: Sie ist hier dienstleistungsorientiert. Daneben kommt ihr aber auch ein allgemeinbildender Charakter zu: Sie ist Kulturgut, Substanz, die es langfristig zu bewahren und zu entwickeln gilt. Substanz, die einen wesentlichen Teil unserer geistig–kulturellen Wurzeln ausmacht, die das Denken, ja allgemein den Überbau derjenigen Kultur prägt, die wir die "abendländische" nennen, aus der wir unbewusst schöpfen, aus der wir leben.
Vor allem schätzen wir den erzieherischen Wert der Mathematik. Lehrt sie uns doch wie nichts sonst so intensiv Denkmethodik, Denkkonzepte, Denkdisziplin, Spürsinn statt Rezepte. Sie mag vielleicht im Beruf anderen Tätigkeiten weichen müssen. Doch wo dort Exaktheit nicht nur auf der Stufe der Hände und der Maschinen den Erfolg bestimmt, da führt kein Weg an solcher Disziplin und Methodik vorbei.
Mathematik ist uns eine Schule des methodischen Denkens in reinster Ausprägung, denn Beweise sind es, die ihr Wesen prägen: Mathematik ist die Wissenschaft vom Beweisen! Falls wir die Prämissen oder

Axiome akzeptieren und auch an den logischen Schlussregeln nicht zweifeln, so wissen wir gewiss, dass auch den mit diesen logischen Regeln aus den Prämissen hergeleiteten Theorien Wahrheitscharakter zuerkannt werden muss. Da sich die verwendete Logik im allgemeinen nur auf die Form und nicht auf den speziellen Inhalt der behandelten sprachlichen Gebilde stützt (sie ist nur extentional, nicht intentional), können wir gültige mathematische Folgerungen aus mathematisch formulierten Naturgesetzen ziehen. Denn wir sehen, erleben und beschreiben die Natur mit unserem Bewusstsein, nach den Gesetzen unseres Denkens also, aus denen die Gesetze der Logik als Extrakt fliessen. So ist eben der Mensch und seine Realität gemacht: Logik beinhaltet ursprünglich das, was unsere Wahrnehmungs– und Denkprinzipien sind. Logik und äussere Erfahrung, Naturgesetze also, stehen so in Analogie, die tiefer liegt als Kausalität. (Unser vorerst naives Weltverständnis kann uns in solchen Dingen sehr täuschen. Das stellen wir auch fest, wenn wir uns vor Augen halten, dass sogar die in der Mathematik verwendete zweiwertige Logik keinenfalls die einzig mögliche Logik ist.) So vermögen wir zeitlich über die Natur zu herrschen: Wir können von einer Brücke sagen, dass sie hält, bevor wir sie gebaut und ausprobiert haben, rein auf der Basis einer Rechnung. Wir können von einem Kometen sagen, dass er erscheinen wird, lange bevor ein menschlisches Auge ihn erblickt. Die äusseren Planeten hat man gefunden, weil man an dem Orte gesucht hat, den man zuvor anhand von Bahnstörungen anderer Planeten vorausberechnen konnte. . .

> *Wenn von zwei grossen Gelehrten jeder die Wahrheit sagt, beide sich dabei aber widersprechen, so muss dann wohl — um nichts zu riskieren — eben die Wahrheit falsch sein. — Logisch, nicht wahr?*

Mathematik ist also die Disziplin der Denksicherheit. Und zwar ist sie nicht nur mechanisch–reproduktiver Natur, was die gemachten Entdeckungen betrifft. Vielfach haben gerade Intuition, Fähigkeit zur kühnen Konstruktion und Interpretation, also künstlerisches Talent, ja der unmittelbare Schöpfungsakt zu neuen Entdeckungen geführt. Man denke etwa an die Theorie der transfiniten Kardinalzahlen, an die Nicht–Standard Analysis, an die Prädikatenlogik höherer Stufe oder an die Klassenkörpertheorie. Nur wer auf mathematisch niederer Stufe stehengeblieben ist, glaubt an die generelle "berechenbare Natur" von Beweisen und somit an eine generelle nutzbringende Ersetzung des Menschen in der gesamten mathematischen Forschung etwa durch künstliche Intelligenz. Oder er ist ein steckengebliebener Konstruktivist. Stellen wir uns doch vor: Wie wollte man dem Computer das Staunen oder die Unlust beibringen? Wie kann man es erreichen, dass ein Computer an die Machbarkeit einer neuen, bisher verbotenen (doch später als segens– und konsequenzenreich erkannten) Idee glaubt und nicht einfach ein Programm abhaspelt? Wie soll ein Computer Begriffe bilden oder sich Fragen stellen, die durch das kulturelle Umfeld des Menschen bedingt sind, "gesunden Menschenverstand" erfordern und zum Teil religiöse oder philosophische Wurzeln haben, ohne dass ihm vorher ein Mensch durch ein Programm die Angelegenheit beigebracht hat? Die Geschichte der Mathematik lehrt uns, dass jene Wurzeln wesentliche mathematische Entdeckungen angeregt haben.

> *Wenn die Intelligenz künstlich sein kann, muss dann nicht auch die Dummheit künstlich sei können? Und überhaupt, wäre Sokrates intelligent gewesen, hätte er als Weiser von sich behaupten können zu wissen, nach welchem Massstab Intelligenz zu messen sei? Oder wäre er dann vielleicht, da Intelligenz ja künstlich und identisch der natürlichen Intelligenz sein kann, eben künstlich intelligent und dazu massstäblich weise gewesen, so wie eine künstliche Eule?*

1.1.3 Die historische Dimension der Mathematik

In unserer Realität ist alles in der Zeit. Auch das Denken. Und auch platonische, ideale "geistige Realitäten": abstrakte Denkinhalte wie wunderschöne vollkommene Kreise, Geraden, Zahlen etc., von denen wir glauben, dass sie sich in der Zeit nie ändern. Doch sie sind durch uns in der Zeit. Daher hat jedes Ding seine Geschichte. Ein Ding verstehen zu wollen, es einkreisen zu wollen, kann somit kaum gelingen, ohne seine Herkunft einzubeziehen. Also scheint es uns ratsam, auch zur Beurteilung der Mathematik erst etwas ihre Geschichte zu befragen.

Schon Aristoteles nennt Mathematik als eine der theoretischen Wissenschaften. Im Mittelalter dann, in der Scholastik war sie ein wesentlicher Bestandteil der sieben "artes liberales" welche sind: Geometrie, Arithmetik, Astronomie, Harmonielehre sowie auf sprachlicher Seite Rhetorik, Grammatik und Dialektik. Im Gegensatz dazu stehen die "artes mechanicae[1]".

Gehen wir in der Geschichte weiter zurück, noch vor Aristoteles, so stossen wir auf die Pythagoräer, eine aus heutiger Sicht wohl "religiöse" Gemeinschaft mit orphischen Zügen, die mit ihrer Ausstrahlung die vorchristliche antike Welt sicher im philosophischen und wissenschaftlichen Bereich wesentlich geprägt und auf ethischer Seite dem Christentum vieles vorgezeichnet hat. Verschiedene antike Autoren teilen die Pythagoräer auf zwei unterschiedliche Arten in zwei Gruppen ein: Einerseits sind da die Esoteriker (innerer Kreis) und die Exoteriker (äusserer Kreis). Andererseits hat man unterschieden die Mathematiker (diejenigen, die die Mathemata, d.h. die Lerngegenstände Arithmetik, Geometrie, Harmonik und Astronomie pflegten) sowie die Akusmatiker (vgl. [1]). Hier also sind die "Mathematiker" in die Geschichte getreten!

Doch wer waren die Akusmatiker? Über sie schreibt Iamblichos: "Die Philosophie der Akusmatiker besteht aus Sprüchen (Akusmata) ohne Beweis und ohne Begründung. ¡ So und so muss man handeln.¿ ... halten sie doch auch in ihren Kreisen diejenigen für die Einsichtigsten, welche die meisten Sprüche erfasst haben." (Vgl. [1].) Dem geneigten Leser kommt die Frage, ob man der Wahrheit zuliebe nicht hier oder dort die Fachbezeichnung "Mathematik" streichen und dafür "Akusmatik" setzen müsste...

Doch was war vor den Pythagoräern, was war vor Pythagoras? Was hat den Menschen überhaupt dazu gebracht, Mathematik zu treiben? Und wie kommt er zu so hochgeistigen Fragestellungen (als Beispiel möge die höhere Zahlentheorie dienen), die ohne praktischen, ohne ökonomischen Nutzen sind, die aber die grössten Genies der Menschheit fasziniert und beschäftigt haben? Wie soll ein Profaner das verstehen? Oder berühren sich hier etwa die Extrema, Genialität und Verrücktheit?

1.1.4 Die vier Wurzeln mathematischen Handelns

Die praktische Nützlichkeit

Das Argument der Utilitaristen war in der Mathematik wohl nie umstritten. Auf Mathematik basierende Navigation muss bei den Seefahrern und Wüstenreitern der Vorzeit eine lebenserhaltende Technik gewesen sein. Oder man denke an die Wichtigkeit von Kalenderarithmetik oder Buchführungsarithmetik für den Handel. Eines der ältesten bekannten schriftlichen mathematischen Dokumente ist der im British Museum verwahrte Papyrus Rhind, der zurückgeht auf einen Text aus dem mittleren Reich (2000 bis 1800 v.Chr.). Es handelt von der Berechnung von Lohnsummen, Getreidemengen, aber auch Flächeninhalten (vgl. [2]). Von noch vorher sind "statistische Erhebungen" aus der frühsten ägyptischen Geschichte allgemein bekannt. Neben der Arithmetik begegnet uns hier in Ägypten vor allem in den Pyramiden aber exakte Geometrie. Sie scheint das Kind der ägyptischen Harpedonapten (Seilspanner) zu sein, denn im Niltal stand man alljährlich nach der regelmässig wiederkehrenden Überschwemmung vor der Aufgabe, das Land der Felachen neu zu vermessen. Dem Frieden zuliebe... Und heute? Gerade wegen ihrer praktischen Nützlichkeit durchdringt die Mathematik Technik, exakte Wissenschaften, Ökonomie, Sozialwissenschaften und so fort. (Vgl. Abbildung 1 – 3 und Abbildung 4 – 6.)

[1] Heutige Künstler galten vor Beethovens Zeit noch als gewöhnliche Handwerker, die Artes mechanicae ausübten. Sie waren oft nicht einmal selbständit in Zünften organisiert. So waren zu Michelangelos Zeiten in Florenz die Bildhauer bei den Goldschmieden zünftig, die Maler bei den Ärzten und Apothekern. Später wandelten sich die Höfe und auch die Künstler. Die Hofnarren verschwanden — die Rolle musste neu besetzt werden...

1.1.5 Nach dem Nutzen der Überfluss: Das Spiel

Auch Müssigang unter musischer Obhut war oft die Triebfeder zu neuen Erkenntnissen: Das Spiel als Freund — das Spiel als Laster. Diesem Trieb gehorchend konnten die Menschen damals die Zeit, die sie mit Hilfe der Mathematik im Lebenskampf gewannen, der Mathematik wieder opfern, zum persönlichen Ergötzen natürlich. Denksportliche Spiele sind mathematische Spiele. (Vgl. Abbildung 7 und Abbildung 8.) Da gibt es schon aus uralter Zeit das königliche Spiel von Ur, ein Vorläufer des Backgammon (vgl. [3]); oder hier bei uns in Helvetien ein Spieltisch, gefunden in "Colonia ... (Paterna?) Pia Apollinaris Augusta Emerita Raurica"[1] Aus praktisch allen historischen Zeiten sind uns denksportliche Spiele bekannt, vom Schach bis hin zum chinesischen Tangram, Rubik–Würfel, "gesellschaftsfähigen» Computer–Spielen, Logeleien u.s.w. (vgl. [5], [6]). Sogar die mathematische Statistik wäre nicht ohne Wahrscheinlichkeitsrechnung, an deren Beginn Namen wie Fermat, Pascal, Laplace stehen. Denn so wird berichtet: Damals soll ein begeisterter Glückspieler, der Chevalier de Méré, Hilfe gesucht haben bei Pascal ... (vgl. [7]). Das spätere Resultat ist der Begriff der Wahrscheinlichkeit! Und auch: Obwohl durch einige einschlägige Fachhistoriker bestritten, stimmt folgendes nachdenklich: Einige Autoren führen selbst die grosse Arcana des Tarots der Zigeuner (Gipsy, fälschlicherweise für Ägypter gehalten) zurück auf einen Freskenzyklus in einem ägyptischen Tempel in Memphis, welcher angeblich im Buche Tot — so eine Interpretation — beschrieben sein Soll[2] (vgl. [8], [9]). Wenn sich auch mir bekannte Historiker hier nicht einig sind, kann da trotzdem aus alter, damals nicht ausergewöhnlicher Zahlenmystik profanes Spiel geworden sein.

Andere Wurzeln der Mathematik werden so offenbar: Religiöse, später philosophische, die dann hineinführen in die Kunst des Mittelalters und der Renaissance, Kunst, die bis ins nachreformatorische Barokzeitalter im Abendland fast ausschliesslich religiöse Kunst ist. (Vgl. Abbildung 9 – 9) Alte Kunst, dem Bewusstsein des modernen Menschen mit seinen zerfallenen Werten und abgeschnittenen Wurzeln weitgehend fremd, rätselhaft, unverständlich, doch aus dem Urgrund des Fühlens lieb und schön. Diese alte religiöse Kunst war bestimmt durch Harmonieideal, Sakralgeometrie und Zahlenmystik, also durch Mathematik! Verständnislos stehen wir davor, solange uns solche Wurzeln fremd bleiben. Ihre Werte bleiben uns vorenthalten, ungenutzt, ungeachtet, verkannt. (Vgl. Abbildung 12 – 26)

1.1.6 Von den philosophischen zu den religiösen Wurzeln

So wie das Leben mit dem Tode und der Tod mit dem Leben verbunden ist, lassen sich Philosophie und Religion kaum voneinander trennen. Ja, sind sie denn im Ursprung verschieden? Vielleicht kommt sogar den ersten der Urgeschichte bekannten prähistorischen mathematischen Zeugen religiöse Natur zu. Prähistorische Bauwerke lassen sich zum Teil als astronomische Stätten nachvollziehen, ob gekoppelt mit Grabanlagen oder isoliert davon. Man denke dabei z. B. an die drei Belchen um Basel, an Stonehenge, an die Menhire und Tumuli von Carnac (Bretagne) und andere — oder an die allen bekannten Pyramiden Ägyptens. Und da sind es gerade Grabanlagen die uns als erste Kulturzeugen durch die gefundenen Beilagen Kunde von der Vorstellung von einem Jenseits vermitteln. (Vgl. Abbildung 27 – 33) Die Verbindung von Grab und Astronomie, der hochkomplexen harmonischen Uhr "Firmament"! Astronomie erwies sich wohl rasch als Brücke zum Göttlichen: In der unabwendbaren Regelmässigkeit, der Harmonie des Firmaments walten unregelmässig laufende, erst auf Grund mathematischer Zusammenhänge als regelmässig, jedoch eigensinnig erkennbare Planeten, die uns früh schon als Götter überliefert sind. Aus den Bauwerken der Alten spricht durch raffinierte Körper– und Kalendergeometrie eine uralte, hoch entwickelte Arithmetik zu uns. Und der Rätsel bleiben viele: So hat man etwa in den Fundamenten keltischer Tempel Britanniens, die offenbar aus einer Zeit mehr als ein Jahrtausend vor der Lateinisierung des Landes stammen, nicht nur eine gemeinsame, überall in dieser Periode vorhandene megalithische Elle

[1]So der vollständige Name der "zweiten Gründung" des heutigen Augst in der Nordwestschweiz, von Ptolemäus kurz als "Augusta Rauricorum" bezeichnet.

[2]Möglicherweise eines der 42 in der Antike bekannten und wahrscheinlich von verschiedenen Autoren stammenden, dem chaldäischen (?) Mystiker Hermes Tris Megistos zugeschriebenen Werke. Dieser Mann wurde von den alten Griechen identifiziert mit dem Gott Hermes und ebenso mit dem ägyptischen Gott Thot: Tri Mercure Athotis. Bekannt war er in mittelalterlichen Alchemistenkreisen durch die im Original verlorenen Tabula Smaragdina.

gefunden, nein, die elliptischen Grundrisse weisen in ihren Halbachsen Proportionen auf, die komplizierte pythagoräische Zahlentrippel in sich tragen, welche sich höchst unwahrscheinlich "zufällig" entdecken lassen[3] . Das also lange vor der Zeit, aus der uns in jener Gegend eine Schrift bekannt ist. Wie haben die Damaligen, falls ohne Schrift, so komplizierte Rechnungen beherrschen können?

Die Pyramiden Ägyptens sind das Schulbeispiel. Mit Grössenwahnsinn und Herrschaftssucht der Pharaonen lässt sich die überaus aussagekräftige Geometrie der Bauwerke wohl kaum begründen. In unser materialistisch orientierten Zeit vergessen wir schnell, dass die, die uns auf diesem Planet vorausgegangen sind, eigene, ihrer Zeit entsprechende Wertmassstäbe hatten. Und ebenso, dass auch unsere Wertmassstäbe wohl einmal dem Verfall geweiht sind. Und was geschah danach bis heute?

Im Griechentum dann zeigt sich uns die damalige Welt schon durchschaubarer. Der Wille, auf die Kräfte des Denkens, auf den lichten Verstand zu bauen, tritt zu Tage. Und auch die Resultate dieser Haltung: Hochschulen, Akademien entstehen, Wissenschaften blühen auf. Mystisches Weltverständnis muss in vielen Bereichen dem strengen, mathematischen Geist weichen. In der Physik beherrscht man Statik und Mechanik weitgehend: Der grossflächige, durch Recht, Stadtwesen, Strassen, Versorgung und Beamtentum organisierte Staat entsteht und gibt sich "imperialistisch". Rationalität herrscht, das Recht bedient sich der Logik: Alexanderreich, Rom und seine Widersacher, aber auch das Grossreich China. Später im Westen als Folge die Reiche der Byzantiner und der militärisch gelehrigen Germanen, die arabische Expansion, als Reaktion die Reconquista und als Fortsetzung das spanische Weltreich, das im portugisischen, englischen, französischen etc. Schule gemacht hat. Erst seit der 68–er Zeit tauchen bei breiteren Schichten vermehrt wieder Zweifel daran auf, dass das Glück dieses Planeten in einer eher eindimensionalen, nach aussen gerichteten Expansion liegen muss. Man bedenke: Altägypten hat sich so praktisch nie über das Niltal hinausgewagt. 3000 Jahre Geschichte hat es so durchlebt!

Zurück zu den Griechen. Da ist Euklid, ein Sammler mathematischer Erkenntnisse. Doch was war sein Anliegen, seine ideelle Kraftquelle, aus der er schöpfte um sein Werk zu vollbringen? Es war ein philosophisch–religiöses Anliegen! Seine dreizehn Bücher (dreizehn damals eine Zahl voller Bedeutung) stehen beispielhaft für die Methodologie der exakten Wissenschaften, sie sind eine grossangelegte Demonstration der axiomatischen Methode. (Vgl. [10].) im ersten Buch auf Axiomen aufbauend konstruiert Euklid nach den Regeln der Logik die Geometrie, um dann im dreizehnten Buche die fünf platonischen Körper behandeln zu können und zu beweisen, dass es keinen sechsten solchen Körper geben kann! Für den, der Logik, Axiome und Definitionen akzeptiert, ist das Resultat dann Gewissheit. Dass das Werk dann bis fast heute das Lehrbuch der Geometrie geblieben ist, kann wohl schwer als einzige Absicht Euklids gedeutet werden. Für Platon und die Strömung des Denkens, in der er stand, waren diese "kosmischen" Körper grundlegend für den Aufbau der Welt. . . (vgl. [11], [12]).

Zentral erscheint der Wille nach Erkenntnis der regulären Körper mit rationalen Methoden. Doch wozu? — Wir sehen da das griechische Bestreben, die Realität rational erklären zu wollen und die einfachen, idealen Gesetze einer globalen Harmonie gedanklich zu durchdringen, also das sich im Vielfältigen überall manifestierende Wenige, Grundlegende, Ordnende und somit Schöne zu finden, das den Geist ausmacht: den Kosmos im Chaos.

Hier leuchten geistige Realitäten im Zentrum. Ein andermal sind es solche der physikalischen Natur. Es geht um den Kosmos, der nicht vom Religiösen zu trennen war. Und gerade in der Mathematik hat dieser Wille, die Grenzen des hier mathematischen Kosmos abzutasten, die Neuzeit stark befruchtet. Denken wir an Cantor, der es wohl aus theologischen Gründen unternommen hat, die damalige "Chiffer" "unendlich" begrifflich zu verdichten. Das Resultat: Die Theorie der transfiniten Kardinalzahlen. Die eigentliche Mengenlehre also (vgl. [13]). Jetzt wissen wir, dass es Sinn macht, unendlich viele verschiedene Stufen von unendlich zu definieren, in denen man rechnen kann wie mit Zahlen. Entsprechendes gilt

[3] Nach einer mündlichen Ausführung von Prof. B. L. Van der Waerden (Kolloquium in Basel 1978)

auch für die Null (vgl. [14]).

Ein anderes Beispiel aus unserer Zeit für das Interesse an Grenzen wäre Gödel. Eines seiner Resultate war, dass die Menge der wahren Sätze, zu deren Formulierung es einer Logik höherer Stufe als die Prädikatenlogik erster Stufe bedarf, grösser ist als die Menge derjenigen Sätze, die sich in endlich vielen Schritten in dieser Logik auch beweisen lassen (1931) (vgl. [15], [16], ...). Es gibt demnach mathematisch wahre Sätze, zu denen es keinen in derselben logischen Sprache formulierbaren Beweis gibt. Man ist hier an den Grenzen der konstruktiven Vernunft angelangt, an den Grenzen des sprachlichen Kosmos. Erweiterungen, Überwindungen dieser Grenzen sind uns hier nur durch schöpferische Abstraktionen möglich. Was bedeutet eine solche Abstraktion?

Mit welchem Recht kann Herr Professor Pomposus Weihrauch denn behaupten, dass die Realität da beginne, wo gerade sein Denkvermögen noch hinreicht? Richtet sich denn die Ausdehnung der Realität nach dem Denkvermögen von Herr Professor Pomposus Weihrauch?

Als Beispiel wollen wir uns eine Punktmenge der Analysis denken. Wenn wir (so wie auf einem Bildschirm) eine sehr grosse Zahl Punkte hintereinander zeichnen, wird eine Linie sichtbar. Die Gerade lässt sich also analytisch verstehen als nie abbrechender Prozess, in dem ein Punkt nach dem andern entsteht in der Zeit. Dabei wird es uns aber nicht einmal gelingen, einen einzigen Grenzpunkt einer streng monoton wachsenden Folge zu zeichnen, denn keine endliche Zeit reicht dazu. Sie ist so nur "potentiell" vorstellbar. Andererseits können wir uns aber eine Gerade auch "aktual" vorstellen als Ganzes, als Ding an sich, nicht als Prozess, nein, auf einen Blick. Beide Vorstellungen sind von der Qualität der Ansätze her unvereinbar. Doch die Resultate, die Geraden nämlich, können wir für dieselben halten, so rät uns der "gesunde Menschenverstand" . Vom einen Ansatz zum andern gelangen wir nur durch das geistige Wagnis der Abstraktion, schlichtweg gesagt also durch eine Behauptung mit axiomatischem Charakter und niemals durch eine prozesshafte Konstruktion. Ein Computer würde wohl von sich aus niemals zu so etwas fähig sein, denn seine Natur ist prozesshaft, syntaktisch, nicht intentional, auch wenn seine "Intelligenz" noch so künstlich ist. Dem Menschen aber gelingt das "sinnvolle verbotene Denken", das sich dann axiomatisch legitimieren lässt, weil er den Willen zu einer Absicht aufbringen kann, zwei verschiedene Dinge zu identifizieren, zu abstrahieren. Dies, indem ein Aspekt der Gleichheit fällig wird! Und dies infolge "gesunden Menschenverstands", welcher sich bis heute (zum Glück) nicht in Regeln fassen lässt. Der Mensch kann das "Verbotene" eben gerade deswegen denken, weil seine Intelligenz nicht künstlich ist. Sie wird sich also wohl kaum auf die einfachste der Boolschen Algebren, nämlich auf die mit zwei Elementen, reduzieren lassen.

Wäre das Denken eines Computers, etwa einer von Neumann–Maschine, nicht verschiden vom Denken des Menschen, so musste doch der menschliche Geist auch eine Taktfrequenz aufweisen. Hätten wir dann bei einer höheren Taktfrequenz ein Gefühl von "langsamerer" oder vielleicht "schnellerer Gegenwart"?

Auf eine wiederum andere interessante Grenze stossen wir bei "unmöglich berechenbaren Problemen". Was ist damit gemeint? Denken wir uns eine hinreichend komplizierte diophantische Gleichung, die eine sehr grosse Lösung hat. Nun wissen wir, dass es Gleichungen gibt, deren Lösungen grösser sind als alle Koeffizienten der Gleichung. Denken wir uns diese Koeffizienten maximal so gross wie nur irgendwie irgendwo darstellbar, von mir aus mit einem Computer dargestellt, der so gross ist wie das Universum und so lange läuft wie das heute dafür gehaltene "Alter des Universums" mit der physikalisch theoretisch maximal möglichen Geschwindigkeit[4] . Nun also gut: Wir sehen, dass es Gleichungen gibt,

[4] Physikalisch kann keine als Masse oder Energie sich manifestierende Materie je die Lichtgeschwindigkeit überschreiten.

die darstellbar sind, deren Lösungen aber nie berechnet werden können. Da solche Gleichungen Lösungen haben, ist es unmöglich zu beweisen, dass sie keine Lösungen haben. Ein Existenzbeweis für die Lösung müsste wohl aber irgendwie konstruktiven Charakter haben. Nun scheint es einleuchtend, dass es solche Gleichungen mit höheren Potenzen geben wird, wo die Konstruktion aus obigen Gründen die Grenzen des Machbaren sprengt. Solche Probleme sind dann im praktischen Sinne nicht entscheidbar. Diese Betrachtung gewinnt jetzt daher an Relevanz, da wir bei einigen einfachen diophantischen Problemen gar nicht entscheiden können, ob es sich um ein Problem dieser "praktisch unentscheidbaren Klasse" handelt. Wir sind an den Grenzen des "geistigen Kosmos".

Bis ca. 1992 war die folgende Frage interessant: „Handelt sich beim "Fermat–Problem" (grosser Fermatscher Satz) um ein praktisch nicht entscheidbares Problem?“ Pierre Fermat hat bekanntlich in seiner Diophant–Ausgabe die Randbemerkung hinterlassen, dass die Gleichung

$$a^n + b^n = c^n, \quad a, <, c, n \in \mathbb{N}$$

in den natürlichen Zahlen für $n > 2$ keine Lösung habe. Leider sei der Rand zu schmal um seinen "wahrhaft wunderbaren" Beweis zu fassen, berichtet sein Sohn. Seither hat niemand einen anerkannten Beweis oder Gegenbeweis gefunden, obwohl 1908 durch Wolfskehls Testament $100'000$ *Reichsmark als Preis für denjenigen geboten wurden, der diesen "heiligen Gral der Mathematik" findet. Es scheint, dass sich die Mathematiker und ihre Koryphäen mit diesem Problem mehr beschäftigt haben als mit irgend einem anderen — und bei keinem Problem sind so viele Irrtümer, publiziert worden. (Vgl. [17], [18], [19], ...) Für eine sehr grosse Zahl von Spezialfällen hatte man allerdings die Beweise nach und nach gefunden, ohne aber zu wissen, ob die Zahlen, für die man beweisen konnte, dass der grosse Fermatsche Satz richtig war, alle $n \in \mathbb{N}, \ n \geq 3$ abdeckte. Ein sehr weitreichendes Resultat hat z.B. Prof. M. Eichler aus Basel erziehlt. Ca. 1992 dann endlich hat der Engländer Andrew Wilnes den Beweis präsentiert, der von der mathematischer Tiefe und Entwicklungshöhe bestaunenswert ist. Er ist aber den mit den Fachspezialitäten unvertrauten Mitglieder der Zunft vom Verständnis her nicht zugänglich. Nun ist das Problem entschieden — für diejenigen, die den Beweis verstehen.*

1.1.7 Eigentlich sakrale Wurzeln der Mathematik

Kehren wir zurück zu den Pythagoräern. Aristoteles schreibt ihnen folgende Aussprüche zu: "Der Himmel ist Harmonie und Zahl". Oder: "Die Dinge sind durch Nachahmung der Zahl." Kurz: "Alles ist Zahl." Zahl bedeutet hier in diesem Umfeld "rationale Zahl". Wir erfahren da die Vorstellung: Der erfassbare Kosmos ist Harmonie, ausgedrückt durch die rational erfassbare Zahl. Das nicht rational Erfassbare, dem Verstand Verschlossene, das "göttlich" zu Nennende, Nicht–Kalkulierbare, Schicksalhafte also, liegt "über" dem Kosmos.

Das schafft Verständnis dafür, dass eine der Legenden den "Verrat" des pythagoräischen Mathematikers Hippasos so beschreibt: "Die Gottheit zürnte denjenigen, welche Lehren des Pythagoras an die Öffentlichkeit trugen. So sei der Mann als Gottloser im Meer ertrunken, der den Aufbau des Körpers mit zwanzig Ecken verriet, die Tatsache, dass das Dodekaeder... sich einer Kugel einschreiben lässt." ..."Einige sagen auch, dies sei ihm wiederfahren, weil er das Geheimnis des Irrationalen und Inkommensurablen verraten habe." (Iamblichos, vgl. [1].)

Dass das Irrationale im Kosmos existiert, die Harmonie also gestört ist und sich also das Göttliche, das Nicht–Rationale als "Fehler" im Kosmos manifestiert, muss als Schock gewirkt haben.

Es bleibt zu bemerken, dass die antike Überlieferung berichtet, Pythagoras aus Samos habe längere Zeit im Orient verbracht (Iamblichos): "Zweiundzwanzig Jahre weilte er so in Ägypten in den allerheiligsten Gemächern bei Sternkunde und Geometrie und empfing ... die Einweihung in alle Göttermysterien, bis ihn die Krieger des Kambyses gefangennahmen und nach Babylon führten. Dort verkehrte er mit den Magiern..." Zwar diskutiert man heute noch über die Legendenhaftigkeit solcher Berichte, doch andererseits fällt auf: Pythagoras als PHTA–GO–RA bedeutet offenbar in der altägyptischen Sprache sehr viel: PHTA, auch PTAH, soll Gott sein — GO meint Erkenntnis — RA die Sonne, Licht (übertragen: Erleuchtung, Verstand), auch Re (Amon–Ra: Der Sonnengott). Man könnte "Pythagoras" also etwa so verstehen: "Derjenige, der Gott und das Licht (Erleuchtung ...) kennt". Andererseits ist der Name kaum griechisch. Und in Agypten scheinen die Priester über die Geometrie gewacht zu haben, was aber von andern Autoren aus heutiger Zeit relativiert wird, obwohl Totentempel — oder die Pyramiden, weithin sichtbar, mit ihrer nicht zuletzt sakralen Bedeutung eine deutliche Sprache reden. (Meine Frage dazu: Darf man über dreitausend Jahre Geschichte auf Grund einiger wohl zugänglichen, jedoch isolierten und statistisch vielleicht allzu zufälligen Quellen so pauschal urteilen?) Vergessen wir nicht: Im alten Ägypten war Religion und Sakrales aus dem Leben nicht wegzudenken. Da war Einheit. Mir scheint plausibel: Pythagoras stand in der Tradition solcher Einheit von Mathematik, Religion und philosophischem Weltverständnis. Aus dieser Quelle schöpften die Griechen, auch in den Wissenschaften, insbesondere der Mathematik.

In Griechenland bannte aber nicht mehr das Jenseits, das Totenreich des Osiris, das Denken. Der Mensch und sein Schicksal im Diesseits rückten ins Zentrum. Das Theater entstand, da gehörte dem Menschen auch leiblich das Zentrum, das Gesicht wohl noch unter der Theatermaske verborgen. Protagoras lehrte: "Der Mensch ist das Mass aller Dinge." Erstmals finden wir in der Klassik nach Form und Aussage realistisch idealisierte, ganz im leeren Raum stehende Plastiken, Götterbilder in reinster Menschengestalt. Gottgeweihte Tempelbauten und gottdarstellende Kultbilder gehorchen einer strengen sakralen Geometrie, durch die eine Zahlenmystik schimmert, die uns noch in der Kabbalistik begegnet und die offenbar in altägyptischen Mysterien wurzelt, schwer entschlüsselbares Geheimwissen erloschener Kulturen. Uns bleibt der Weg über die symbolhafte Deutung der gebliebenen Zeugen.

Diese sakrale Geometrie lebt dann später einerseits im römischen und byzantinischen Einflussbereich fort, andererseits wird sie vom islamischen und europäischen Mittelalter übernommen und spezifisch ausgeprägt. Der analytische Betrachter versinkt in Staunen vor der geometrischen Fülle der Wunderwerke der Romanik und Gothik, deren sakraler Anspruch jedoch heute kaum noch jemand nachzuempfinden vermag. (Vgl. Abbildung 35 – 38) Wer schon in unserer Zeit weiss den Einfluss des Physiologus abzuschätzen? Dann in der Renaissance beginnt die Profanisierung. Speziell bezüglich des Islams hat eine Arbeit bei Prof. Speiser in Basel gezeigt, dass in der Ornamentik der Alhambra von Granada die Möglichkeiten der endlichen Gruppen voll ausgeschöpft sind. Da der Islam direkte Gottesdarstellungen verbietet, blieb nur der Ausweg über die Geometrie: Sie zeigt so symbolhaft Makrokosmos, Mikrokosmos, Schöpfung... Und das gesteigert bis zur geometrischen Vollkommenheit. (Vgl. Abbildung 39 – 48)

Betrachten wir eine mittelalterliche Kathedrale, so überrascht die Spannung zwischen Strenge und Verspieltheit der Geometrie. In der Fassade lassen sich gleichseitige Dreiecke, Fünfecke, Zehnecke, also harmonische Teilung, Zwölfecke ausmachen. Im Grundriss der Bauwerke oder auch in religiösen Bildern oder besonderen Werken grosser Maler auch späterer Zeit entdecken wir (durch nachempfinden der Konstruktionslinien) den sogenannten "mystischen Leib Christi" eine symbolische Figur aus Dreiecken, Quadraten, Fünfecken, Kreisen. Wieso diese Figuren? Von welcher Bedeutung "reden sie schweigend"? (Vgl. Abbildung 9 – 26)

"Ein Apfel und ein Apfel gibt zwei Äpfel" hat Hänschen gelernt. Ebenso weiss Hänschen nun, nach wiederholten Versuchen die Grenzen der Toleranz auszuloten, dass eine Strafe und eine Strafe zwei Strafen sind, denn das hat er jetzt auch gelernt. Wie merkt nun Hänschen, dass die Zwei bei den Äpfeln dieselbe Zwei ist wie bei den Strafen? Ist Zwei denn etwa das, was wir als Takt oder Rhythmus beim Zählen wahrnehmen, also eigentlich etwas das wir erst tun — und nicht etwas was da schon ist. Denn Hänschen sieht die Äpfel und erfährt die Strafen. Die Zwei dagegen sieht er nicht. Auch spürt er sie nicht, denn das was er spürt, ist der Schmerz beim Schlag auf seinen Hinden.

1.2 Zweiter Teil: Das Sakrale in der Mathematik und die Schönheit

1.2.1 Zum Sakralen in der Mathematik

Eine spezielle sakrale Richtung: Mystische und gnostische Wurzeln der Mathematik

Sokrates wollte Tugend und Wissen verknüpfen. Mit der Aufdeckung ihres Nichtwissens will er die Menschen zur Selbstprüfung und Selbsteinkehr aufrufen. Eine altgriechische Tempelaufschrift lautet in diesem Sinne: "*γνῶτι σεαυτὸν*" — gnoti seauton — ": Gnostik, so sagen wir. Erkennen und Mathematik war aber zur Zeit der Griechen nicht zu trennen. Mit erkennen meinen wir rational erfassen, logisch kombinieren, als stattgefundene Sache, als Tatsache, ins Bewusstsein bringen. Aber auch intuitiv — unmittelbar — meditativ schauen, ja, sprechen in Symbolen. Mathematik lebt von beidem. So mag es nicht erstaunen, dass die Griechen einfache, ideale mathematische Verhältnisse und Figuren fanden (resp. aus andern Kulturen übernahmen) und in gut passender Weise Mensch, Götter und Kosmos in diesem Kleide darstellte. Darin, dass der Mensch nach dieser Geometrie, nach diesen Bildern, wirklich geschaffen ist, liegt das Mysterium. Solche Prinzipien, ausgeprägt als göttliche, ideelle Bilder, verbanden den Menschen mit Gott. (Vgl. Abbildung 51)

Sokrates. "Ich weiss, dass ich nichts weiss." — Ein Gipfel philosophischer Weisheit? — Oder das Problem, Sokrates überhaupt zu verstehen?

Zahlen und geometrische Figuren dienten in Kunst und Religion vieler Kulturen und Epochen als Informationsträger, als Kommunikationsmittel, als Sprache — natürlich als symbolhafte Sprache, nicht vergleichbar mit exakt–wissenschaftlicher resp. "interpersonal exakter" Sprache, dafür aber tiefere seelische Schichten ansprechend, durch das Beispiel belehrend. Wie können wir heute ihren Symbolgehalt ergründen, abgenabelt von diesen Kulturen? Erstaunlicherweise finden sich über alle lokalen Ausprägungen hinweg Gemeinsamkeiten, die mehr vermitteln, als sich sprachlich sagen lässt, die im eigentlich Menschlichen wurzeln, tiefer als die Ratio reichen kann.

Hier eine kurze, unvollständige, (interpretierte Aufzählung) solcher Symbolbeziehungen (vgl. [24], [25]): Im Griechentum wird der Mensch Individuum, ist nicht mehr nur Gruppenmensch. Er ist Einheit, trägt in sich die Zahl des Einen, "göttlichen": Die Eins. Der Mensch aber trägt in sich auch die Symmetrie, also die Zahl zwei, den Dualismus, die Polarität, das Geschlecht etc.. In östlichen Kulturen begegnet uns Yin und Yang. (Vgl. Abbildung 52 und 53) Der Mensch scheint dem Dualismus ausgeliefert: Gut – Böse, Freund – Feind, Krankheit – Gesundheit, vergangen – künftig, warm – kalt, Anfang – Ende, wahr – falsch, trocken – nass, Mann – Weib und so fort. An den Pforten alter Kirchen stehen die klugen und die törichten Jungfrauen. Wir finden uns zwischen den Polen materielle Selbstsucht in Form von Habsucht, Geiz, also gierige Fixiertheit aufs Materielle, Intoleranz einerseits und andererseits lasterhafte

Verschwendungssucht, Verantwortungslosigkeit in materiellen Angelegenheiten, Vernachlässigung, Blindheit gegenüber gesellschaftlichen Erfordernissen und Notwendigkeiten, Unbekümmertheit. In der einschlägigen Sprache: Das "Arimanische" und das "Luziferische" fordern uns zum Kampf ums Gleichgewicht. Salomon wie andere Zeitgenossen aus Zypern und solche aus dem Raum der Phönizier und Philister liessen zwei (eherne) Säulen links und rechts vor der Pforte ihrer Tempel aufstellen (vgl. [26]), damit (eine Interpretation) derjenige, der ins Heiligtum gelangen wollte, die Polarität in der Mitte durchschreiten musste und so dieses Erlebnis ins Bewusstsein drang.

Eins und zwei sind drei, die Einheit in der Polarität, die gegensätzlichen Aspekte des Einen. Die Zahl drei ist wieder Symbol des Göttlichen, der Trinität: Kopf, Rumpf und Extremitäten hat der "gottgeschaffene Mensch", enstprechend Verstand, Gefühl und materiellem Tun oder Geist, Seele und belebtem Körper. Er ist hier Bild Gottes, steht in den wesentlichen Freiheitsgraden Raum, Zeit und Kausalität, benimmt sich dialektisch als Synthese von göttlich Geistigem und Materiellem. Sein Raum hat drei Dimensionen. Er passt in ein gleichseitiges Dreieck. Und sitzend auch in ein rechtwinkliges mit dem kleinsten pythagoräischen Zahlentrippel (3, 4, 5) als Masszahlen! (Vgl. Abbildung 54 – 56) Die Trinität findet sich im Altägyptischen (Osiris, Isis, Horus), im Indischen (Brahma, Vischnu, Shiva), in der griechisch–römischen Welt (die Schicksalsgöttien Moiren oder später Parzen, denen selbst die Götter gehorchen mussten) und auch im Christentum (die drei Personen in einem Gott). Das gleichseitige Dreieck ruht spannungslos: Jeder Eckpunkt hat von jedem andern denselben Abstand. Die Christen stellen darin das "Auge Gottes» dar. Doch die Eckenzahl bleibt endlich, fassbar. Im Gegensatz zum sterblichen Menschen kommt Gott, resp. den Göttern, meist ewiges Leben zu. Für den Menschen und die höheren Lebewesen aber liegt der Gegenpol zum Tod in der Erhaltung der Art, das heisst in der Zeugung, wo der "Lebensfunke springt". Die Zeugung, die als Dialektik interpretiert werden kann, hat wohl daher vielfach göttlichen Charakter. Also die Dreiheit ist es, die den Tod überwindet. Drei musste deswegen wohl göttlich sein. Im Christentum hat Maria "vom heiligen Geist empfangen": Aus Mensch und Gott spriest der Gottmensch. Drei Weise aus dem Morgenland, dem Land der aufgehenden Sonne, sollen an seiner Wiege gestanden haben. Nach zwei mal fünf mal drei Jahren von "Gott als Mensch in der Polarität" dauerte das eigentliche Wirken Christi drei Jahre. Zu dritt sind sie später ans Kreuz geschlagen worden. Dann hat Christus die Polarität, den Tod, am dritten Tag überwunden, ist nach drei Tagen "auferstanden" u.s.w..

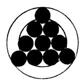
Auch passt der ausgewachsene Mensch im Mittel — was erstaunen mag — mit seitlich ausgestreckten Armen ziemlich genau ins Quadrat. Er trägt also die Zahl vier in sich. (Vgl. Abbildung 57) Vier ist die Zahl der Materie: In der Antike gab es die vier Elemente (sowie die nicht materielle Quinta Essenzia), vier Temperamente, bedingt durch entsprechende Körpersäfte etc.. Es gibt die vier Himmelsrichtungen, vier Jahreszeiten, vier Aggregatszustände (fest, flüssig, gasförmig, plasmatisch entsprechend Erde, Wasser, Luft und Feuer), vier Organisationsstufen der festen Materie: Mineral, Pflanze, Tier, Mensch. Sogar die moderne Physik kennt vier Fundamentalkräfte (Wechselwirkungen) und die Genetik vier Grundbausteine. Ursprünglich gab es aber auch vier Erzengel (Michael, Gabriel, Raphael, Uriel), die in die Schöpfung wirken — im späteren Judentum sind es dann allerdings sieben. Das Quadrat ist spannungsgeladen: Die Eckpunkte haben verschiedene Abstände voneinander. Auch der chinesiche Tempel der Erde hat quadratischen Grundriss. Ja, die aus dem Altpersischen bekannte und von den Römern praktizierte Hinrichtungsmethode der Kreuzigung selbst hat kultische zahlensymbolische Bedeutung: Den Menschen aufs Kreuz, das Symbol der Materie zu heften und da verenden zu lassen, drückt den Willen aus, ihn an die Materie zu binden, ihm das Geistige, das Jenseitige zu verunmöglichen, ihn also härter zu bestrafen als nur durch leiblichen Tod, ihn über das Leibliche hinaus zu töten[5]! Dann kennen wir die vier apokalyptischen Reiter Pest, Krieg, Hunger Tod, Symbole der leiblichen Plagen. Der "Materie" gehört die Ruhe nicht. Das Kreuz gilt den Christen als Mahnzeichen...

[5]Nach einem ehem. mündl. Hinweis von Prof. J. 0. Fleckenstein (ehem. München, Turin und Basel)

Der Mikrokosmos im Makrokosmos — der Mensch im Universum: Begriffe sind zeitbedingt. "Sich die Erde Untertan machen" ist durch die Brille der damaligen Zeit zu verstehen, etwa sakral im altägyptischen oder babylonischen Sinne. Die Erde war nicht der Planet wie in der heutigen Wissenschaft!

Die Zahl fünf: Unsere Extremitäten sind fünfgliedrig. Der Mensch hat Kopf Rumpf, Oberschenkel, Unterschenkel, Fuss, auf dem er geht. Der Kopf hat fünf Öffnungen. Klassisch unterscheiden wir fünf Sinne. Der Mensch passt ins Pentagramm, das den goldenen Schnitt in sich trägt. Und die Proportionen des Menschen sind bis ins Detail harmonisch: Der goldene Schnitt liefert die Geometrie des Menschen. Daher ist fünf die Zahl des Menschen und das Pentagramm sein Symbol. Wir haben zwei mal fünf Finger, mit denen die meisten von uns zählen gelernt haben. Von den alten Ägyptern hat die Antike — und durch sie auch wir — das Zehnersystern geerbt. (Vgl. Abbildung 58 – 61) Der Mensch mit dem Auftrag, das Irdische beherrschen zu lernen, bedeutete den Alten die Ordnung im Kleinen: der Mikrokosmos. Ins Pentagramm gestellt, wie auf alten Bildern sichtbar, berührt er nur mit seinen fünf äussersten Punkten (Füsse, Hände Kopf) den Kreis. Dann gibt es weiter genau fünf platonische Körper in der dem Menschen möglichen Geometrie, der Geometrie des Mikrokosmos…(Vgl. Abbildung 62 – 66) Das Pentagramm war auch das Zeichen der Pythagoräer. Und die jüdisch–christliche Welt kennt zehn Gebote: zwei mal fünf, wie die zehn Ziffern: Eins für jeden Finger, aufgeschrieben auf den zwei Gesetzestafeln des Moses, eine für jede Hand, bewacht im Tempel von zwei Keruben flankiert, inmitten der Polarität. Dann ist zwei mal fünf die Summe der Tetraktys, einer "dreieckigen Zahl": Die Darstellung der Zahlen eins, zwei, drei und vier im gleichseitigen Dreieck (vgl. [25], [27] – [29]).

Die Tetraktys: $l + 2 + 3 + 4 = 2 \cdot 5 = 10$



(Vgl. Abbildung 50)

Bei der Tetraktys schworen die Pytagoräer…So wie von dreieckigen Zahlen, sprachen die Alten auch von rechteckigen und quadratischen Zahlen.

Dann die Zahl sieben: Sie "entsteht" aus dem Materiellen (vier) und dem Göttlichen (drei). Vier nicht–apokryphe Evangelisten kennt das Christentum, die im Materiellen zu Gott, der Trinität, den drei Personen oder Aspekten führen. Sieben ist die Zahl der Schöpfung im jüdisch–christlich–islamischen Bereich, die sieben Tage dauerte. Der Buddismus kennt sieben Himmel. Der Mondzyklus dauert vier mal sieben Tage bis zur materiellen "Neuschöpfung", analog der Monatsregel des weiblichen Geschlechts. Im siebten Lebensjahr kommt der Zahnwechsel, nach wieder sieben Jahren die Pupertät. Neues entsteht. Der Mann ist durch sieben Öffnungen mit dem Makrokosmos verbunden — nicht so die Frau. (Die Acht finden wir z.B. bei Bauwerken eher in der mittelöstlichen Welt, im christlichen Abendland jedoch nur ausnahmsweise wie im Grundriss des Doms zu Achen, in der San Vitale in Ravenna oder in Ottmarsheim bei Basel etc..) Und sieben Chakras kennt die vedische Welt (und ihre Abkömmlinge), die auch als Verbindungen dienen. Weiter: In der Antike gab es sieben Planeten. Daher können wir nachvollziehen, wie sich Galilei mit Problemen beladen hat, als er mit seinem neu erfundenen Fernrohr als erster Mensch neue Himmelskörper entdeckte: Jupitermonde. Das störte diese göttliche Ordnung der Sieben, musste also Irrtum oder "vorn Teufel" sein. Dann weiter. Um einen Tennisball lassen sich auf einem ebenen Tisch lückenlos sechs weitere gleich grosse Bälle gruppieren. Sieben Kreise bilden so eine vollkommene Figur: Sechs Arbeitstage nach aussen und einen Tag nach innen, "wo Gott ruht". (Vgl. Abbildung 67.)

Die Schöpfung gilt auch als göttlich, als vollkommen, als vollendet. Gott wirkt weiter in — aber nicht an — der Schöpfung, er hat die Menschen nicht alleine gelassen. Da gibt es auch noch die sieben Posaunen, die sieben Zornschalen, das Buch mit den sieben Siegeln, später die sieben Erzengel, sieben Todsünden, sieben Kardinaltugenden etc.. Sogar Salomon baute seinen Tempel in sechs Jahren. Im siebten weihte er ihn ein. Sieben Stufen führen zu ihm. Und aus der Titusbeute kennen wir den siebenarmigen Leuchter. Sieben auch war die Zahl der antiken Weltwunder. Sieben ebenfalls die Zahl der Künste des freien Mannes. Eine griechische — und somit unsere — Tonleiter zählt sieben Tonschritte. Das griechische Alphabet sieben Vokale. Oft wird das Leben des Menschen in Siebenjahresperioden eingeteilt.

Ganz anders mit dem Makrokosmos oder Universum. Die Zahl des Kosmos ist die Zwölf. So hat der lichte Tag zwölf Stunden, das Jahr hat zwölf volle Mond–Monate. Doch die Zeitrechnung geht nicht ganz auf, sie hat Fehler. Manchmal passiert es, dass das Jahr dreizehn volle Mond–Monate hat. Das Christentum kennt zwölf Apostel, ein dreizehnter ist "ausgefallen", hat die böse Tat begangen. Den Kosmos können wir nicht ganz rational fassen. Irrationale Längen treten schon in der ebenen Geometrie auf, denken wir an Wurzel aus zwei. Der Kosmos muss daher als nicht ganz vollkommen erschienen sein. In ihm regiert immer noch seine "Mutter", das Chaos — oder auch das Böse. Im Tarot der Zigeuner bedeutet die Karte dreizehn den Tod. Um einen Tennisball im Raum lassen sich zwölf weitere gleich grosse Tennisbälle gruppieren, so dass alle diese zwölf den innern Ball berühren. Jedoch gelingt es nicht, die äussern so zu verteilen, dass sich auch da immer alle Nachbarn touchieren — Wie man auch versucht, es bleibt immer irgendwo eine Lücke: Doch die dreizehnte Kugel kann man unmöglich ohne Gewalt in die noch freie Lücke zwängen. (Vgl. Abbildung 68.) Die Analogie: Um den Meister scharen sich zwölf Jünger, die Symbole des Universums, auch des Tierkreises. Der dreizehnte hat zwar versucht, findet aber seinen Platz nicht. Das Zentrum, das Göttliche ist nicht Teil des Materiellen, des Kosmos. Zwölf ist vier mal drei: Die materielle — unvollkommene — Spur des Göttlichen, das Werk. Und auch das himmlische Jerusalem besitzt zwölf Tore, das alte Israel vor der babylonischen Gefangenschaft zwölf Stämme etc.. Bei Platon hat der Kosmos die Form eines Pentagondodekaeders (zwölf Ecken, Fünfeckflächen), der vollkommenste der regelmässigen Körper: Die Zwölf, der Makrokosmos ausgedrückt durch den Menschen, den Mikrokosmos, die Fünf. Das Quadrat ins Dreidimensionale übertragen hingegen ergibt den Würfel: das Symbol des Festen, der Erde. Die Vier mal die Drei: aus Materie der Kosmos... Das Allerheiligste in Salomons Tempel war würfelförmig. Da hat man die Gesetzestafeln verwahrt. Das Hebräische kannte ursprünglich zweiundzwanzig Konsonantenschriftzeichen: Die drei "Mütter", sieben Doppelkonsonanten und zwölf einfache Konsonanten. Das Göttliche, Vollkommene, die Schöpfung im Kosmos: das Gefäss für die Tora! Und auch im alten Griechentum: Im Homerischen Glauben zählte der olympische Götterkreis zwölf Götter, die wie die Menschen einmal entstanden und deshalb nicht vom Kosmos ausgeschlossen sind. Sie wirken weiterhin in der Welt. Sie sind aber nicht vollständig und alleine: neben ihnen walten auch noch die niederen Gottheiten...

Dann der Kreis. Einen Höhepunkt erleben wir bei Ptolemaios (Ptolemäus): Er war überzeugt, dass der Kreis göttlich sei. Die Planeten konnten sich nur auf Sphären bewegen, wenn dazu auch Epizykeln notwendig wurden. Auf der Sphäre ist kein Punkt vor den andern bezüglich des Zentrums ausgezeichnet: Sie bedeutet Harmonie, Ruhe, Unendlichkeit. Niemand kann die Zahl der Kreispunkte abzählen und endlich fassen so wie die Dinge, die ihn umgeben. So hat auch der chinesische Tempel des Himmels kreisförmigen Grundriss. Und weiter — Die Grundform des Pantheon in Rom, dem Tempel aller Götter, ist die Kugel.

Mit dieser Beleuchtung weniger Zahlen und Formen müssen wir es hier bewenden lassen. Hilfreich zum Verständnis der Symbolik kann ferner sein zu beachten, dass in Antike und Mittelalter als Denkprinzip die Analogie ebenso Wertschätzung genoss wie die Kausalität. (Auch heute steht die Analogie von Modell und Theorie vor kausaler Theorie.) Noch die Frage des Primats: Hat die Geometrie und die Zahlenlehre Mythologien und Religionen geprägt — oder handelt es sich um zufällige Analogien, oder wie sonst liesse sich, wenn überhaupt, die Sachlage rational erhellen? Diese Frage müssen wir hier offen lassen.

Von diesem Hintergrund aus können wir jetzt verstehen, dass schon früh grosse Denker sich anschickten, den Rätseln der einfachen, aber "vollkommen" schönen Geometrie und Zahlenlehre den Schleier zu entreissen, unter dem sich die für uns nur im Lichte der Ratio nachvollziehbare Wahrheit verbirgt. Jene Menschen waren bestrebt, dieses abstrakte Schöne zu schauen, Gewissheit zu erlangen. Und wie schon damals im Griechentum gilt auch heute: Im Zentrum der Wertung des Menschen steht der Mensch. Wir sind uns wichtig. Nach dem Menschen sollen wir das Universum bemessen, ob physikalisch, ethisch oder irgendwie, wo wir Normen fordern. Denn wir geben den Sinn. Wir sind es, die fordern. Daher mag es nicht erstaunen, wenn ich behaupte: Wesentliche Entdeckungen der Mathematik verdanken wir dem frühen Interesse fähiger und geistig reifer Erdenbewohner, Sakralgeometrie und Zahlensymbolik in ihrer Ausprägung am Menschen zu untersuchen. Die erstaunlichen Erkenntnisse aus solchem Unterfangen zeigen, dass Mensch wie Mathematik uns ein Mysterium bleiben, das zu Gnostik führen musste.

1.2.2 Einige Kerngedanken zu den gnostischen Wurzeln der Mathematik

(Wie der Mensch den Kreis quadriert)

Bei den Pythagoräern z.B., die eine religiöse Bewegung waren, bildeten die Mathematiker den inneren Kreis. Arithmetik, Geometrie, Harmonielehre, Astronomie hatten da offenbar religiösen Charakter. Zwar stellen wir heute bei den griechischen Göttern viele menschliche Züge und Schwächen fest. Doch was war zuerst, das Huhn oder das Ei? Haben die Menschen die Götter erfunden und mit menschlichen Zügen versehen, oder hat der irgendwie gedachte Gott — oder die Götter — den Menschen nach seinem (ihrem) Bilde geschaffen? Die Neuzeit überlässt uns hier die Freiheit des Denkens. In der Antike war das anders. Der menschliche Geist musste wohl nach göttlichem Muster sein, ein Bild Gottes, jenes unfassbaren, alles umfassenden Wesens. Und Mathematik — als noch heute die reinste Geisteswissenschaft — musste das Göttliche am reinsten offenbaren. Zum unfassbaren Göttlichen konnte man also näher gelangen, wenn man im Bilde des Göttlichen, im Menschen also, dasjenige ausfindig machen, erkennen und darüber meditieren kann, was dem Göttlichen selbst in reinster erkennbaren Form sich nähert: Das Mathematische!

"Gott würfelt nicht" — davon war noch Albert Einstein überzeugt. Inzwischen haben aber die Physiker den sichtbaren Determinismus über Bord geworfen... Was ist mit dem Rest? (Vgl. [30], [31].)

Und welche Überraschung: Wir finden das Mathematische im Menschen in einer Art, wie es auch der neuzeitliche Verstand nicht zu erklären vermag. Hier bleibt nur das Staunen, das am Ende jeder rationalen Schlusskette stehen muss. Wir gelangen rasch zu Grundfragen, wo der Mensch nur noch feststellen, jedoch nicht mehr vernünftig erklären kann. Da endet das Rationale, das Religiöse beginnt für den, der sich weiter interessiert: In der Antike sicher ein Beweis des Umgreifenden, eine Legitimation des Göttlichen.

Was sind nun solche antike gnostische mathematische Inhalte, die sogar die profanen Mathematiker der Neuzeit ohne deren Wissen in ihrem Forschungsbestreben geleitet haben?

Einmal das Delphische Problem (vgl. [32]): Nach Eratosthenes gelangten die Athener zur Befreiung von der Pest an das Orakel von Delphi. Sie erhielten einen Spruch etwa folgenden Inhaltes: Sie sollen dem in Delphi verehrten Apollo einen kubischen Altar bauen mit doppeltem Inhalt zu einem bestehenden kubischen Altar. Bauen also, also erst konstruieren mit den Werkzeugen der Architekten, die die

Werkzeuge der Geometrie sind: Zirkel und Lineal. Apollo war der Gott des Lichtes, der Wahrheit (der Erleuchtung — Erkenntnis), als Meister der drei mal drei resp. neun Musen aber auch der Gott der Kunst, insbesondere der Musik — der Harmonie. Man hat dann in der Antike allerlei versucht. Mit Zirkel und Lineal alleine ging es nicht. Auch die späteren Mathematiker hat das Problem gefesselt. Doch erst im letzten Jahrhundert gelang es endlich auf den Fundamenten der Theorien von Abel und von Galois (Gruppentheorie, Galoistheorie) zu beweisen, dass dieses Problem der Würfelverdoppelung mit Hilfe von Zirkel und Lineal alleine nicht lösbar ist (vgl. [33]). Was aber zu denken gibt, ist folgendes: Apollo, die Erleuchtung hilft. Es braucht weder Zirkel noch Lineal. Wer die Mathemata auf den Menschen anwendet, erkennt: Der Mensch trägt die Lösung des dephischen Problems in sich in seinen Körperproportionen. Mit seiner Körperhöhe als Seitenlänge, Symbol des Menschen, können wir einen Würfel bauen, den ursprünglichen Altar. Die Höhe seines Körpers mit nach oben gegen den Himmel ausgestrecktem Arm als Seitenlänge ergibt dann im Mittel einen Würfel mit doppeltem Volumen! Sich selbst im Würfel, im Symbol des Irdischen, im Kleide des Materiellen erkennen soll also der Mensch. (Vgl. Abbildung 69.) Dann wird er die Pest besiegen. War das der Sinn des Orakelspruchs? Durch Erkenntnis, Forschung, ist heute auch die Pest weitgehend besiegt. Der Mensch trägt in sich, was sich rationaler Konstruierbarkeit entzieht. Durch ihn tritt das Irrationale, Göttliche in die Welt. Von diesem Problem floss also so viel Energie in die Entwicklung der Mathematik, ohne dass diejenigen, die sich mühten, um den tiefen Sinn der Sache wussten.

Ein anderes Beispiel: Die Quadratur des Kreises. Mit Zirkes und Lineal bleibt es unmöglich, ein Quadrat in einen flächeninhaltsgleichen Kreis zu verwandeln. Auch dies eine Erkenntnis des letzten Jahrhunderts (vgl. [33]). Doch der Mensch trägt die mit rationalen Mitteln so nicht mögliche Quadratur des Kreises in seinen Körperproportionen in sich. Mit seitlich ausgestreckten Armen bildet der ausgewachsene Mensch im Mittel ein Quadrat, das er mit Füssen, Fingern und Kopf berührt. (Vgl. Abbildung 70.) In dieser Stellung können wir aber auch durch Durchstosspunkt der Symmetrieachse durch den Boden und die Endpunkte seiner Fingerspitzen einen Kreis legen. Erstaunlicherweise hat nun dieser Kreis im Rahmen der Messgenauigkeit denselben Flächeninhalt wie das Quadrat: Der Mensch quadriert also den Kreis. Das Irrationale, Göttliche, wird durch ihn so in der Welt offenbar. Die Mathemata auf den Menschen angewandt liefern die Erkenntnis. (Achtung: Auf Leonardos bekannter Skizze mit dem Menschen in Quadrat und Kreis findet sich ein grösserer Kreis, der mit harmonisch proportioniertem Radius. (Vgl. Abbildung 71, . . . und Abbildung **??**, . . .) Es handelt sich um eine Veranschaulichung des vom römischen Schriftsteller Vitruvius angegebenen Proportionsschema des Menschen.) Durch die materielle Erscheinung des Menschen spricht die ideelle Sprache der Geometrie: die Idee des Menschen. Wir staunen wieder. Wir können darüber rätseln, ob ein Problem von Pythagoräern vor uns liegt, die seine Lösung kannten. Beweisen allerdings können wir nichts. Solches Wissen war Geheimnis.

Ebenso die Dreiteilung des Winkels. Auch hier konnte erst im letzten Jahrhundert bewiesen werden: Abgesehen von Spezialfällen kann man allgemein einen Winkel nicht mit Zirkel und Lineal in drei gleiche Teile teilen (vgl. [33]). Doch der Mensch kann es mit seinem Körper tun: Z.B. wenn er schreitet lässt er einen Kreis auf seiner Unterlage abrollen. Die abgerollte Länge lässt sich einfach mit Zirkel und Lineal dreiteilen. Durch wiederaufrollen, d.h. zurückschreiten erhält er den jetzt dreigeteilten Winkel zurück. Zudem lässt sich die Dreiteilung gewisser Winkel am Menschen in ausgezeichneten Ruhestellungen direkt abmessen.

Ein weiteres Problem wäre das der Transzendenz der Zahl Pi und der Konstruierbarkeit des Kreisumfanges mit Zirkel und Lineal. Pi ist transzendent, wie wir heute wissen, nicht konstruierbar als Strecke mit Zirkel und Lineal. Wie die Dreiteilung des Winkels "schafft" aber auch das der Mensch, denn die Quadratur des Kreises — und somit Pi — steckt in den Körperproportionen. . .

Es drängt sich nun die Frage auf: Wieso zeigt gerade der Mensch im Vergleich zu andern Lebewesen so viele mathematische, geometrische Prinzipien und birgt damit solche Geheimnisse? Was ist dabei naturwissenschaftlich, was entwicklungsgeschichtlich erklärbar, was ist uns heute hingegen nicht erklärbar?

Fragen, die keine "wissenschaftliche" Antwort haben.

1.2.3 Von Mathematik und Schönheit

Ein Beispiel der bildenden Künste: "Poseidon", ein ausgewähltes antikes Standbild

Man denke an den Zeitgenossen Vasarely, an Escher, Reuterswärd und andere. Im letzten Jahrhundert war u.a. Böcklin ein grosser Bildrechner. (Vgl. Abbildung 72.) Noch früher Dürer, Holbein, Grünewald. Das kann man zeigen mit Hilfe von Rhöntgentechnik, die Konstruktionslinien sichtbar macht. Oder, was ich für viel eindrücklicher halte, durch Nachkonstruktion anhand von Photographien. Bei Dürer, der als Mathematiker magische Quadrate entdeckt und in seinen Bildern dargestellt hat, wird die Mathematik direkt ablesbar.

Die Geheimnisse eines Kustwerkes lassen den Betrachter sich unmerklich erheben, geben ihm unerklärlich ehrfürchtige Verehrung mit, weil da aus dem Sichtbaren, dem der Ratio aber Verborgenen etwas zu ihm spricht, das er selbst in sich trägt, vielleicht gehemmt in der Entwicklung, doch im Empfinden seines sozialen Wesens verankert.

Betrachten wir Poseidon, gefunden auf dem Grund der Ägäis, wo er seit der Antike geruht haben mag, heute aufgestellt im Nationalmuseum in Athen. (Vgl. Abbildung 51.)

Aus frontaler Sicht ist es mir gelungen, natürlich nach einigem konstruktivem Aufwand, an der Figur gleichseitige Dreiecke, Quadrate, beherrschendes Fünfeck und Zehneck, Kreise etc. auszumachen. Doch oh Überraschung: Die Proportionen des Menschen sind in einem wesentlichen Punkt verletzt! Das Quadrat, in dem Poseidon zweifelserhaben steht, ist zu klein. Oder anders: Mit seiner rechten Hand trifft er die Ecke des Quadrats, mit seiner linken weist er zielend in die Spitze eines grossen Dreiecks und damit über das Quadarat hinaus.

Ein Fehler — oder der Wille des Bildhauers der Antike, der, der mathematischen Symbolik gewiss kundig, so exakt diese Figuren verarbeitet hat? Auf einem riesigen, seiner Körpermitte entlang laufenden Kreise aufgespannt, am Rande der Harmonie des Kreises also, weist diese in Metall, in festeste, edle Materie gegossene Figur mit der zielenden Hand über das Materielle, über das Quadrat hinaus streng ins gleichseitige Dreieck, ins Göttliche. Hier ist ein Gott dargestellt! Fünfeck und Zehneck zeigen ihn symbolhaft im Kleid des Menschen, dem Menschen ein Bild, fest mit dem Boden, der Erde verbunden, im Zentrum die Fruchtbarkeit. Doch der Blick wie auch vielleicht der fehlende, jetzt leicht in ursprünglich richtiger Lage denkbarer Dreizack (Lanze) und die Hand verlassen die menschlichen Symbole, weisen über sie hinaus: Ein wahrhaftes Kunstwerk — könnte man jetzt staunend ausrufen!

Dem antiken Betrachter konnte solche heutige auf Photographie beruhende geometrische "exakte" Analyse nicht möglich sein. Das Werk trägt unsichtbar dem auf exakte Linien der Erscheinungswelt fixierten Verstand die Geometrie und die Zahlensymbolik in sich, unter dem Schleier des Umgreifenden, unbewusst Wirkenden, als Idee doch Erahnbaren. Was einem tief und unwissend, ja ursprünglich ergreift, nennen wir "schön". Den Sinnen verborgen konnte der Betrachter sich dem nicht entziehen, was die sichtbar bleibenden ausgezeichneten Punkte und Linien vom dahinterliegenden Ordnungsprinzip, vom "Kosmos" erzählen. Sie hinterlassen eine Spur des Verstehens, ein Gefühl der Unbestreitbarkeit, dass hier etwas geschieht, etwas Ausserortendliches, ein Fingerzeig des Göttlichen, ehrfurchterregend. Uns mag es heute als Stilmittel erscheinen. Damit vergessen wir die andern Massstäbe anderer Zeiten, wenden die eigenen an und fragen uns kaum, ob sie passen. Das Kustwerk lehrt uns: Das wesentliche Ordnende, der eigentliche Kosmos, bleibt tief hinter dem Sichtbaren verborgen. Hier die Geheimnisse zu lichten bedarf intellektueller Anstrengung. Zur Geometrie gibt es da immer noch keinen Königsweg.

Musik, ein Genuss dem Ohr

Ein Genuss dem Ohr? Oder hat auch sie sich entfernt von der Harmonie, entfernt von Pythagoras? Und wieso Pythagoras?
Unsere Musik ist im Grundaufbau griechisch (vgl. [27], [28]). Ihr Hüter war Apollo, der Hauptgott der Pythagoräer. Ihr Sinn war die Läuterung. Die aus Instrumenten wie Lyra und Flöte erklungenen Melodien bestanden jetzt aus diskreten Tonfolgen mit festen Tonhöhen. Tonleitern: Sie entstammen den Pythagoräern. Pythagoras wird zugeschrieben, er habe die lautquantitativen Beziehungen entdeckt, die wir Intervalle nennen. Die Tonika, der Grundton ertönt durch eine ganze Saite. Auf drei Viertel verkürzt, erklingt die höhere Quart, auf zwei Drittel verkürzt die Quint, beim Halbieren die Oktave. Bis zur temperierten Stimmung, bis zu Werckmeister und Bach waren die Tonverhältnisse unverfälscht, rational. Eine Tonleiter (Oktave) besteht in dieser Musiktradition aus festen Tonschritten, sieben Intervalle an der Zahl, d.h. acht Tönen. Eine solche Oktave entstand aus zwei Tetrachords (Viertonreihen), deren "Ecktöne" feststehen.

Aus der Antike wissen wir zwar von einer Musikschrift (Notenzeichen, z.B. im Museum von Delphi), doch die Interpretation fehlt. Unsere Notenschrift geht aus den frühmittelalterlichen Neumen hervor. Das überlieferte Mittelalter kannte dann nach griechischem Muster erst acht, später zwölf (!) Kirchentonarten: Die fünf Hauptmodi dorisch, phrygisch, lydisch, äolisch (moll) und ionisch (dur), sowie deren Hypo– und Mixo–Arten. Später in der temperierten Stimmung opfert man die reinen, rationalen Tonverhältnisse der Möglichkeit des Tonartenwechsels, des Orchesters also. Wir haben hier den "Musikkosmos": Zwölf etwas verfälschte, nicht mehr rationale Halbtonschritte, (mit dem Endton der Oktave dreizehn Halbtöne), woraus man die aus sieben Tonschritten bestehende jeweilige Tonleiter auswählt, ausschöpft: Die "Harmonie", in der das Musikstück, die "Musikschöpfung" dann Gestalt bekommt. Verzichten wir auf die Halbtonschritte, so gelangen wir zur Pentatonik (drei Ganztonschritte und zwei Anderthalbtonschritte, fünf Tonschritte.). Es wird wohl heute kein Geheimnis mehr sein, dass die Werke vieler grosser Musiker nicht nur musikalisch äusserst schön sind, sondern zudem noch mathematische Vollkommenheit aufweisen: Tonmuster manifestieren algebraische Gesetze. Man denke an Bach oder Chopin (vgl. [34], [35], . . .).

Die verlorene Harmonie

Sind wir Mathematiker oder Akusmatiker? Diese Frage gleicht der Frage nach Stufe, Rang und Würde. Sie geht ins Weltanschauliche. Ein Bildungswert der Mathematik liegt etwa darin, für solche Dinge die Augen zu öffnen, feiner zu sensibilisieren, grössere Freiheit durch tieferes Verstehen zu schenken. So rettet die Mathematik längst vergangene, dem Bewusstsein nicht mehr vertraute kulturelle Werte.

Wohl aus utilitaristischen Gründen, der praktischen Nützlichkeit wegen, sind uns aus den Wurzeln unserer Kultur Arithmetik, Geometrie und noch Astronomie erhalten geblieben. Doch die Harmonie, die vierte der Mathemata? Wir geniessen sie in der Musik, ihre Bedeutung verkennend haben wir sie aber in dem, was als die Moderne gilt, längst zu den Requisiten geworfen, denn sie hat keine praktische Nützlichkeit. Ihre Wurzeln sind ideeller, tief menschlicher, doch leider heute vergessener Natur. Und in den bildenden Künsten, Malerei, Bildhauerei, Architektur? Zumeist dasselbe Bild. Neuartigkeit, Effektenhascherei spricht die Neugier, die Sensationslust, das Surrealistische im Menschen an. Doch wieso muss heute das Können so oft einfach dem "Zufall" überlassen sein, der mathematischen Strenge von Harmonie abgeschworen, z.B. so dass menschliches Einwirken im Kunstwerk auf das Explodierenlassen einer Bombe reduziert ist? Sicher ein interessantes Experiment. Das Dionysische in der Kunst? Freiheit, die nur noch Freiheit ist und keine Kraft mehr zum Willen zu einer Reife aufbringt? Zwar formuliert z.B. J. Beuys das reizende Argument, dass die Kunst nicht mehr in der Materie stecken soll, wohl aber im Werk dadurch, dass dieses den Betrachter dazu bringt, Kunst in sich selbst entstehen zu lassen. Bemerkenswert, der Geist, nicht nur die Hände sollen schaffen. Doch zufällige Gegenstände symbolisieren dem Menschen kein Ideal mehr, das ihm die Richtung auf eine Reife weist. Ich meine dazu: Richtung ist dem Mensch wesentlich, denn seine Existenz erscheint tatsächlich, bedingt durch ein Umfeld und durch eine Entwicklung gerichtet. Er hat zwar die Freiheit, sich für das Gute im Sinne einer Ethik zu entscheiden. Und so wie er dadurch nicht zufällig ist, kann auch nicht zufällig sein, was er als schön, als angenehm, erbauend, als Kunst — im Sinne von etwas Besonderem –empfindet.

Ist der Mensch dem Menschen nun nicht mehr schön, seine Gesetze kein Mass mehr? Muss sich der Mensch und seine Werte auflösen, zerfallen, dem Widersacher des Apollo, dem Dionysos geopfert, dem Rausch, den Drogen, den Trieben? Oder wird etwa das Maschinenhafte mehr und mehr zum Masse des Menschen? Auf wem lasten dann die Folgen? Wählen wir wieder eine Richtung! Wecken wir doch die verlorenen Werte wieder, geben wir ihnen frei Gelegenheit, neu zu erstarken, mit erweitertem Inhalt wieder Wege auf Ziele zu weisen, die das Leben angenehm machen können, wenn sie das Bewusstsein erreichen.

Unbesiegbar scheinende Kulturen sind erloschen — doch die Kultur lebt, denn der Mensch in seiner Welt ist immer noch Mensch mit seinen Gewohnheiten im Kosmos. Die Revolution in Frankreich hat es erfolglos unternommen, z.B. die eingebürgerten Gepflogenheiten der Zeitrechnung über Bord zu werfen. Spätere Revolutionen haben das nicht mehr gewagt. Dafür setzte man den Hebel woanders an. Denken war in vielen Epochen lebensgefährlich, wenn es den Mund verliess. Doch an Mathematik zu zweifeln, sie in Frage zu stellen, ihre Erkenntnisse in den Dreck zu schleudern, das hat noch niemand gewagt, der sich die Achtung bewahren wollte — auch keine Revolution. Denn sie geniesst denselben Respekt wie die Naturgesetze, obwohl sie dem Auge meist verborgen bleibt. Verbinden wir die Mathematik doch auch wieder mit dem Menschen! Das wäre ein Stück kulturelle "Heimat" und Geborgenheit, ein Stück Bildung, Arznei für die Gesellschaft.

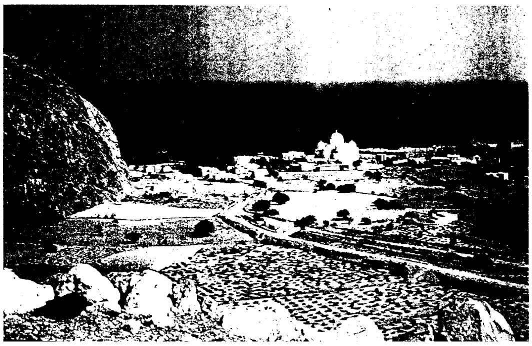
Ausbildung um Geld zu verdienen, als Lebensgrundlage des einzelnen, ist wichtig. Noch wichtiger jedoch ist die Lebensgrundlage der Sippe, des Volkes, der Menschheit. Bedenken wir: Bildung erweist sich als Fundament der Werte und des Urteils von uns Menschen. Wenn aus Bildungsmangel die Werte im Chaos versinken, ist die Richtschnur des Urteilens als Grundlage des Entscheidens — und daran geknüpft die Zukunft unseres Geschlechts — dem Zufall ausgeliefert. Bildung ist daher die Lebensgrundlage der Menschheit, ohne die es für das Weiterleben aller keine Garantie gibt.

Mathematik ist die Wissenschaft auch der Sicherheit, denn Beweise geben absolute Sicherheit. Längst hat sie sich von der Religion getrennt, profanisiert, eingespannt vor dem Wagen anderer Wissenschaften, den alten Idealen abtrünnig, isoliert, die Gesetze des Ganzen der alten Mathemata verachtend. So hat sie den Planeten verändert. Doch die süssen Früchte lassen sich schwer verdauen. Globale ökologische, ökonomische, demographische Ungleichgewichte bedrohen den Zauberlehrling. Wussten die Pythagoräer etwa um das Gesetz, dass Erkenntnis in falschen, unreifen Händen dem Eigennutz, der Perversion dient und zum Schaden aller wird? War das der Grund für die strenge Verwahrung der Geheimnisse? Gewiss kehrt der freigelassene Geist nie mehr freiwillig in die Flasche" zurück. Wir müssen ihn daher dressieren, ihn beherrschen lernen, ihn in das Netz der Verantwortung einbinden. Ein ewiges Gefecht. Verantwortung wird grösser, wenn die Unreife kleiner wird: Bringen wir also wieder mehr Bildung, mehr Bewusstsein für diese ganzheitlichen Zusammenhänge da hinein, wo die Menschen geistig wachsen, wo sie ihr Rüstzeug, ihren modernen Glauben, ihr Vertrauen und viele ihrer Hoffnungen her haben: in den Unterricht! Gross kann er sein und folgenschwer kann er da wirken, der Bildungswert der Mathematik. Denn die heutigen geistigen Kinder der Wissenschaften drückt der Schmerz ob der verlorenen Orientierung, vor Augen die entstandenen Probleme dieses Planeten. Um die Sicherheit alter Wertvorstellungen gebracht, abgenabelt von den alten Ideen, blicken wir nach Delphi, dem antiken Nabel der Welt, wo Apollo als "spiritueller Pate" der Pythagoräer an der Wiege der Wissenschaften das Bewusstsein leitete. Wer will denn meinen, dass beim geistigen "Besuche solcher alter Verwandten" nicht das verlorene Urvertrauen wieder erstarken kann?

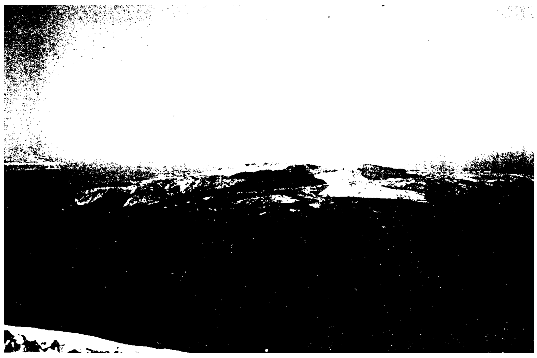
Kapitel 2

Sammlung der Abbildungen und Bildnachweis

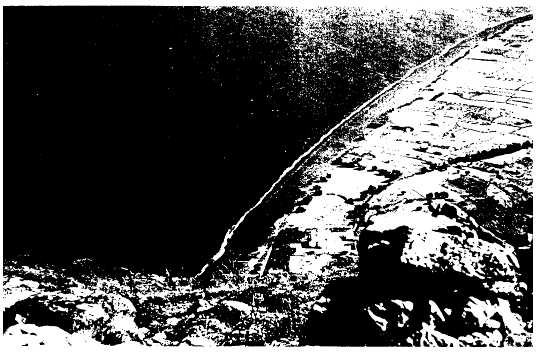
Bildnachweis: Die mit "P" bezeichneten abgebildeten Photos stammen vom Autor aus der Zeit 1965–89. Alle Rechte liegen bem Autor. Dasselbe gilt für die Zeichnungen, sofern kein Bildnachweis beigefügt ist.



P. 1: Blick von Santorini (Ägäis) aufs Meer



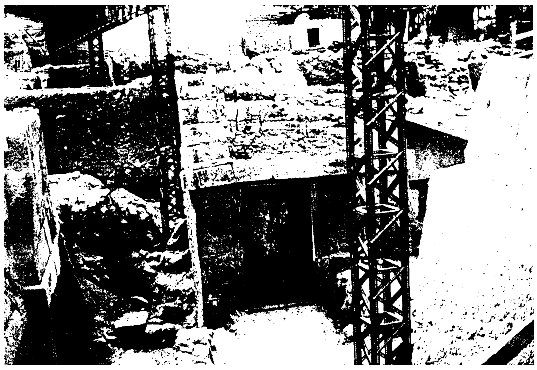
P. 2: Blick von Santorini (Ägäis) aufs Meer



P. 3: Blick von Santorini (Ägäis) aufs Meer

Wie ist man zur Zeit der minoischen Hochblüte (ca. 1700 v.Chr.) von Knossos (bei Heraklion, Kreta) nach Santorini gesegelt, ohne an dieser kleinen Insel vorbeizusteuern und ganz wo anders zu landen? Ohne Präzise Navigation war das unmöglich.

P. 4: Blick in eine minoische Stadt

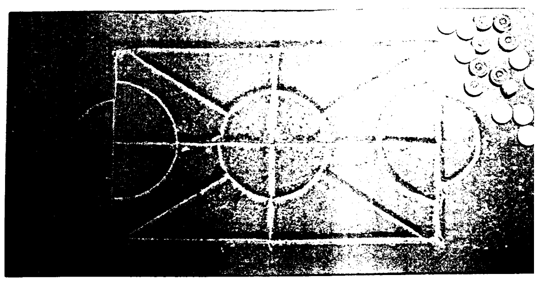


P. 5: Blick in eine minoische Stadt

P. 6: Blick in eine minoische Stadt

Die Vulkaninsel Santorini ist im ca. 1500 v. Chr. buchstäblich explodiert, nur der dünne Kraterrand blieb erhalten. Ähnlich wie in Pompei steigt die alte Zeit heute aus dem Tuff–Gestein. Sieht ein Dorf der Gegenwart anders aus? (Lit. [20])

P. 7: Kopie des königlichen Spiels von Ur.



RÖMISCHER SPIELTISCH

P. 8: Röm. Spieltisch aus Augusta Raurica.

Original des königlichen Spiels von Ur: British Museum, sumerische Abteilung.

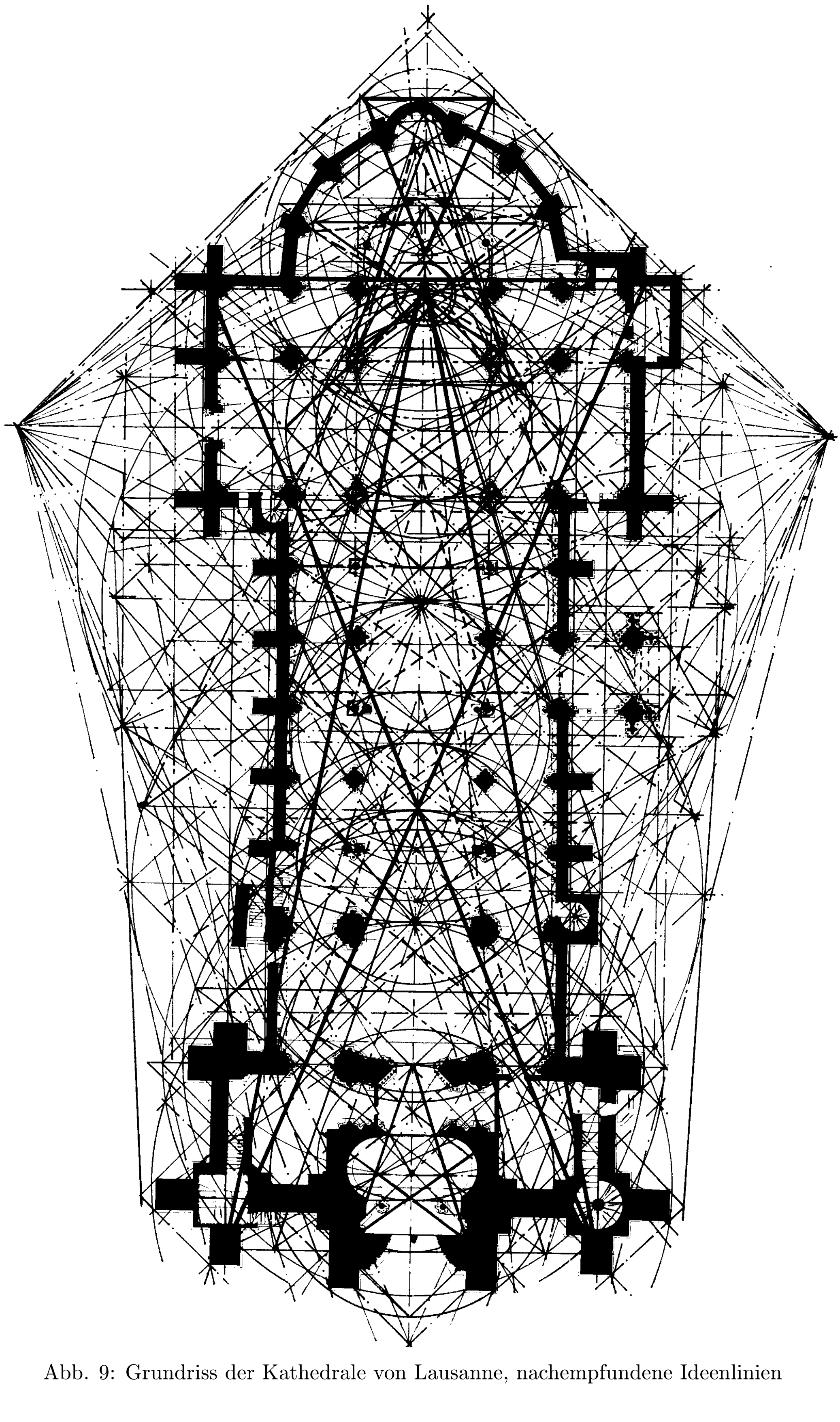


Abb. 9: Grundriss der Kathedrale von Lausanne, nachempfundene Ideenlinien

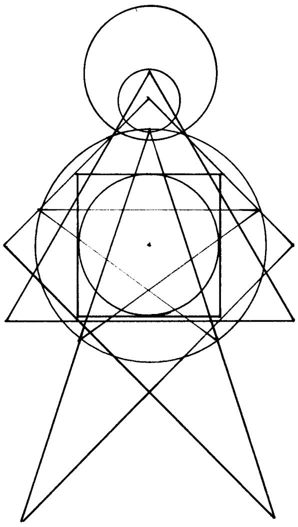


Abb. 10: "mystischer Leib ..."

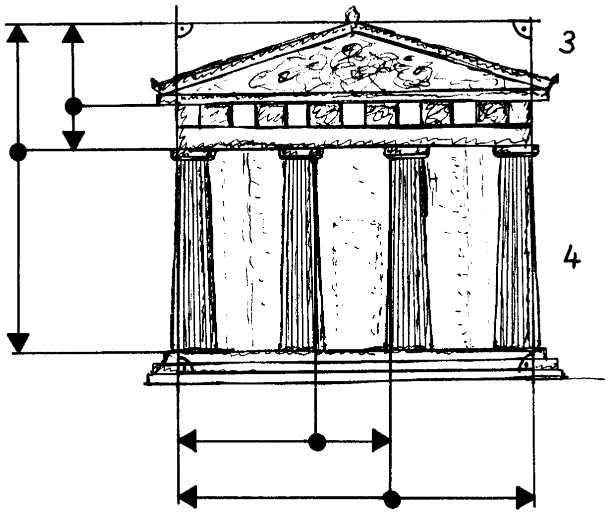


Abb. 11: Harmonische Proportionen, griech. Tempel

Die Konstruktionslinien des "mystischen Leib Christi" im Chor des Grundrisses der Kathedrale von Lausanne: Nach dem „Bauplan des Menschen“: Kreis (Vollkommenheit), Achsialsymmetrie (Parität), gleichseitiges Dreieck (Göttliches), Quadrat (Irdisches) und Pentagramm (Menschliches) sind vereinigt.

P. 12: Holbeins Familienbildnis

P. 13: Kunstmuseum BS, Amerbach–Kabinett

Das Amerbach–Kabinett des Kustmuseums Basel ist die älteste öffentliche Kunstsammlung dieser Erde. Holbein, durch die Reformation in Basel der Aufträge von religiöser Seite beraubt, verliess seine Familie (Kinder aus erster Ehe seiner Frau) und gelangte wohl über die Verbindung Erasmus – Thomas Morus als Hofmaler an den englichen Königshof. Das Bild ist bei seiner kurzzeitigen Rückkehr nach Basel (1528) entstanden. Die Familie blieb in Basel (Lit. [?], [?].) Hohlbeins Freund Amerbach hat die Sammlung der Universität vermacht. Sie wurde im Haus zur Mücke nahe dem Münsterplatz untergrbracht und jeden Sonntag Morgen der Öffentlichkeit zugänglich gemacht.

P. 14: Detail

P. 15: Detail

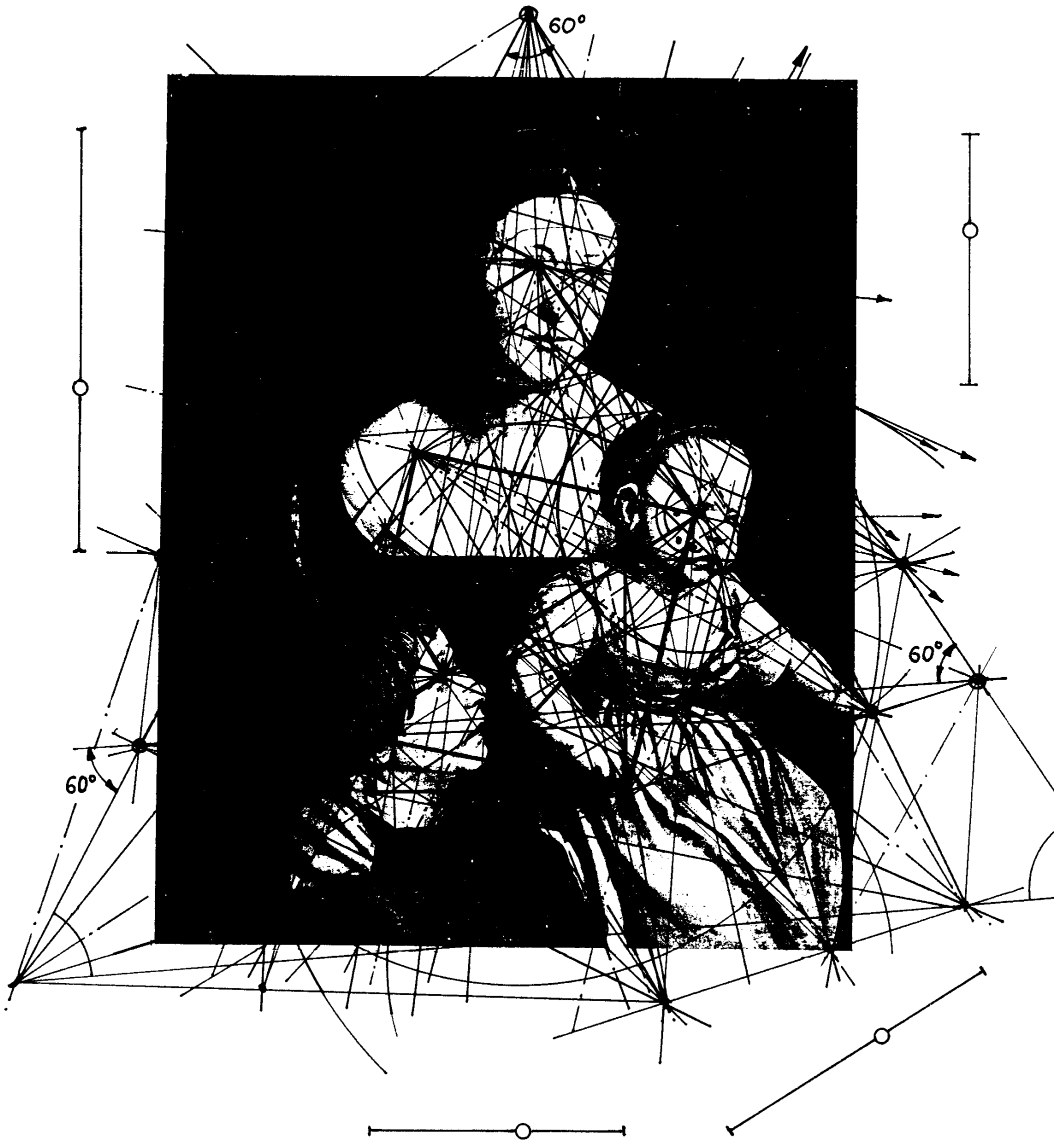


Abb. 16: Holbeins Familienbildnis, nachempfundene Ideenlinien, dunkel

Abb. 17: Holbeins Familienbildnis, nachempfundene Ideenlinien, hell

Nachempfindung der mutmasslichen Konstruktionslinien in Holbeins Familienbild, Zwischenschritt.

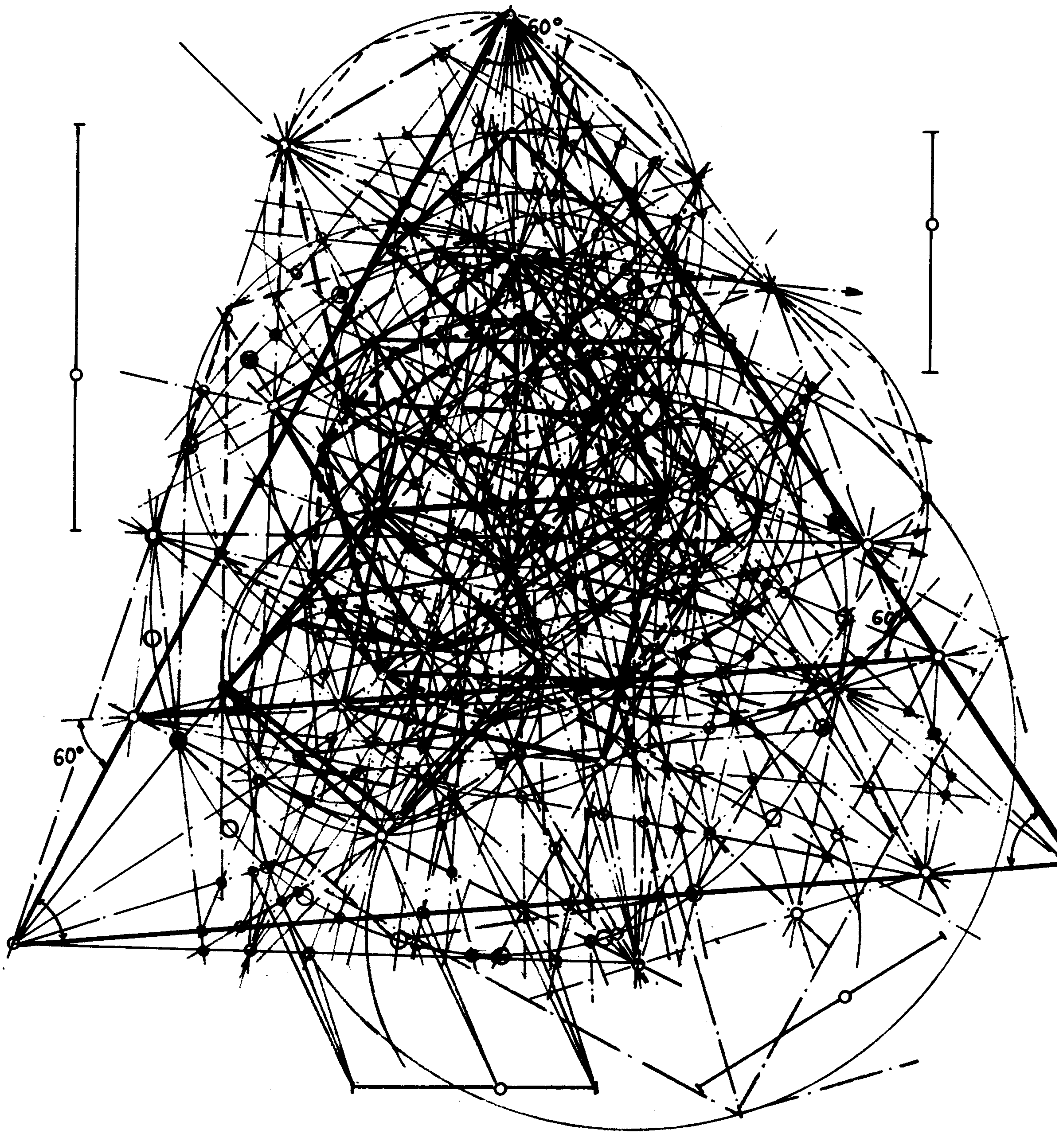


Abb. 18: Holbeins Familienbildnis, nachempfundene Ideenlinien isoliert, oberer Teil

Bei näherem Hinsehen tauchen aus dem Wirrwarr ideale Figuren oder Teile von solchen auf.

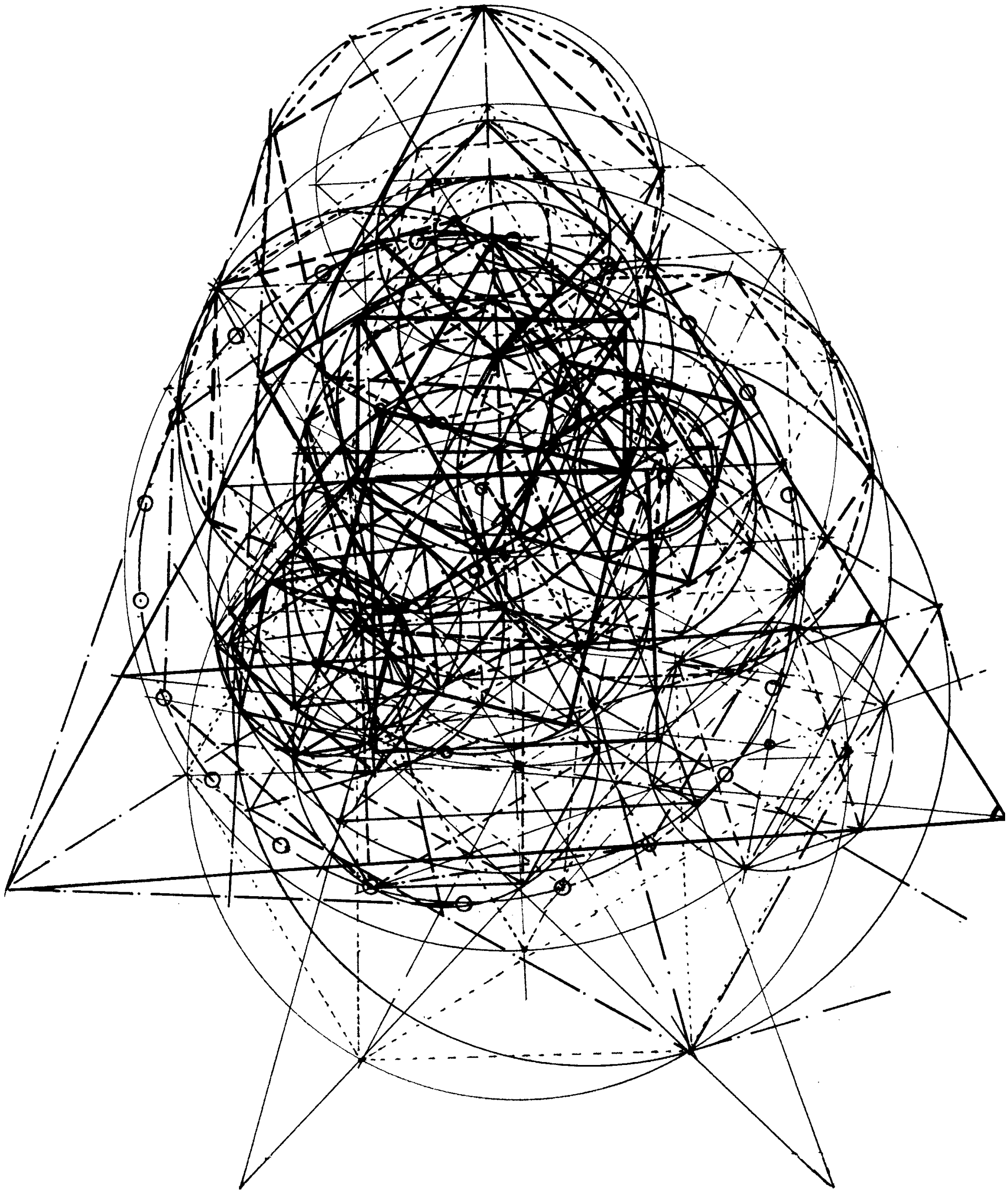


Abb. 19: Holbeins Familienbildnis, wesentliche Ideenlinien, ganzer Teil

Hier sind die Linen von 25 weggelassen, welche nur der Perspektive dienen. Einige regelmässige Figuren sind herausgezeichnet, die vielleicht von Holbein als Idee hinter das Ganze gestellt worden sind.

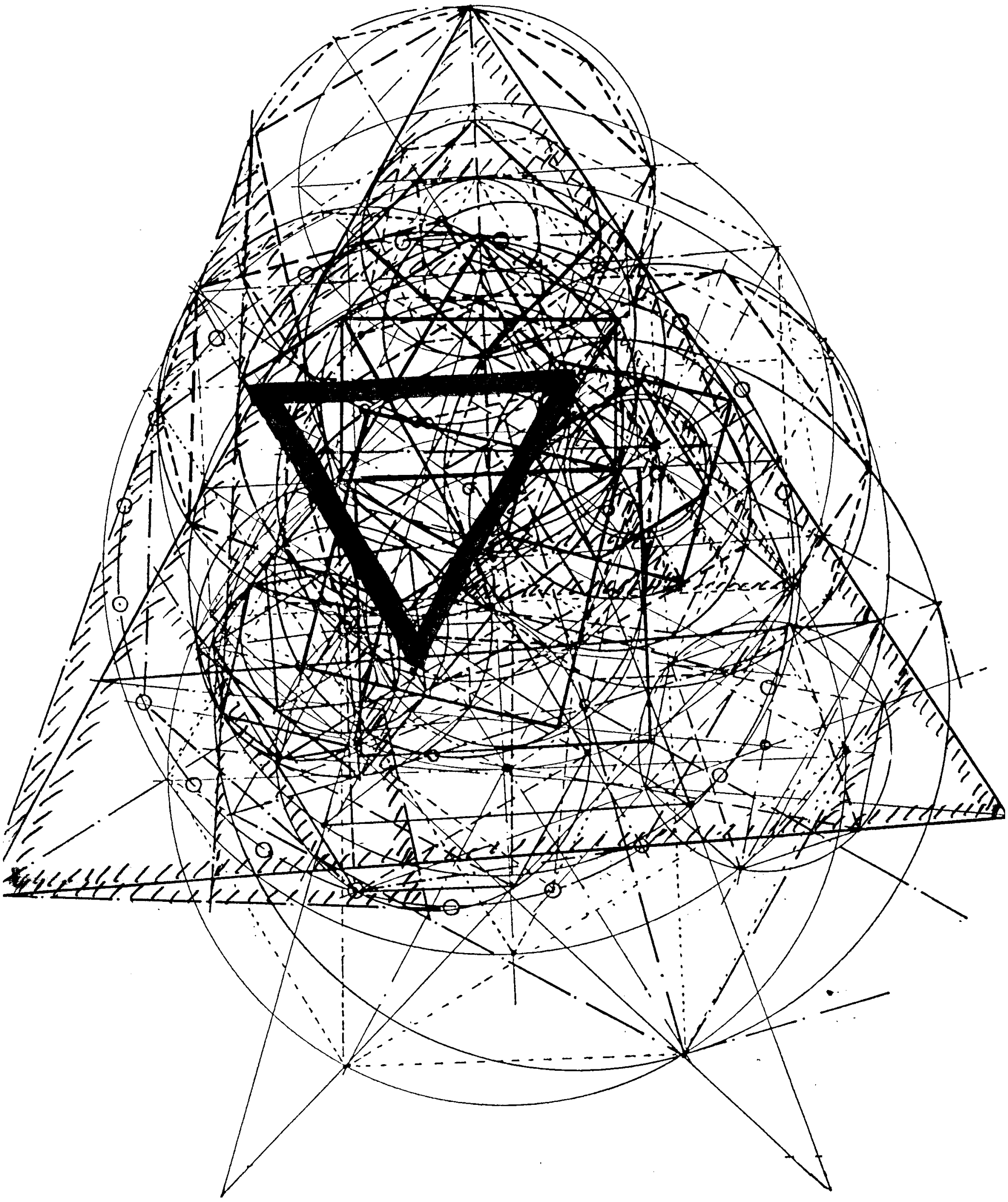


Abb. 20: Holbeins Familienbildnis, wesentliche Ideenlinien, gleichseitige Dreiecke

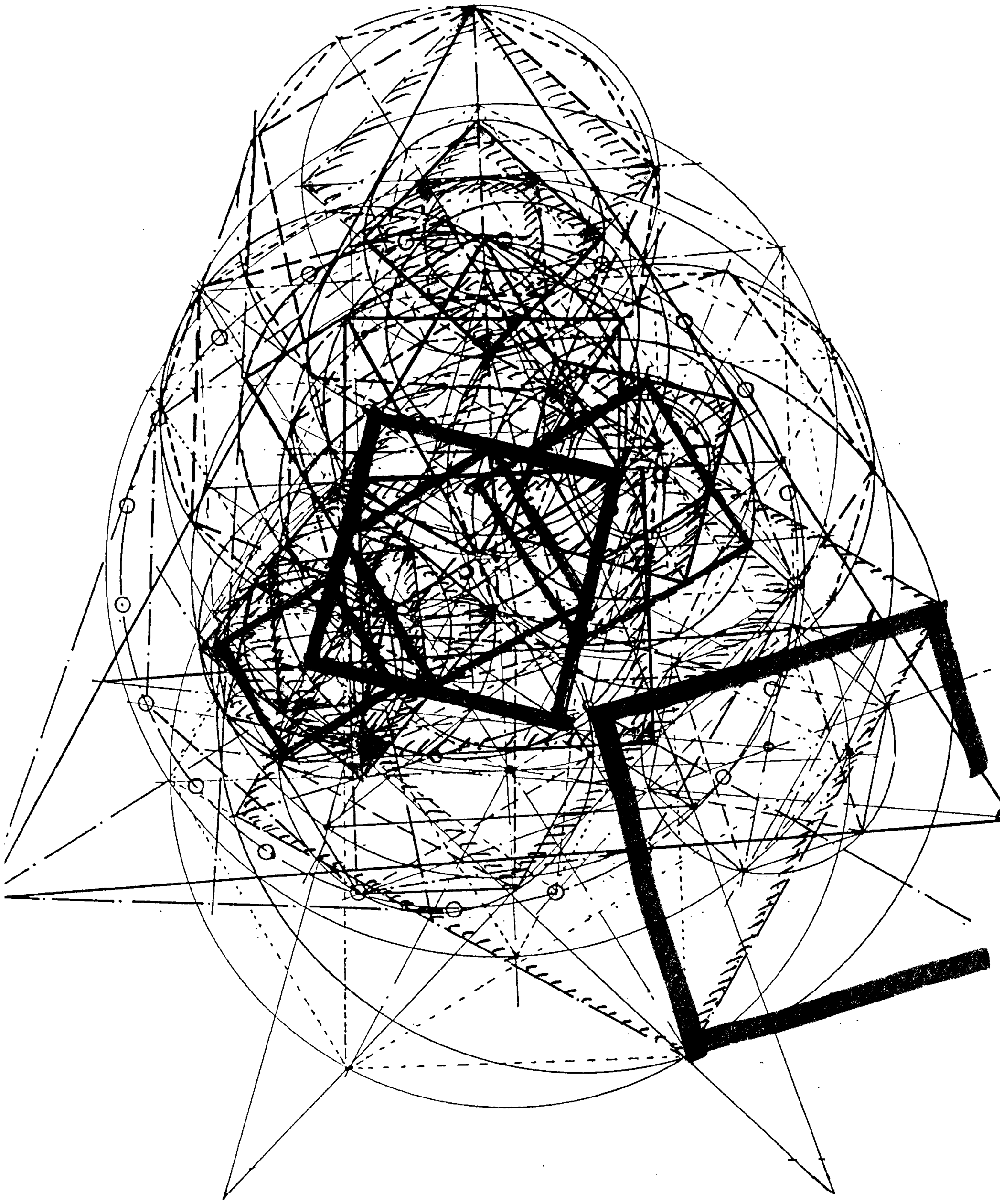


Abb. 21: Holbeins Familienbildnis, wesentliche Ideenlinien, gleichseitige Quadrate

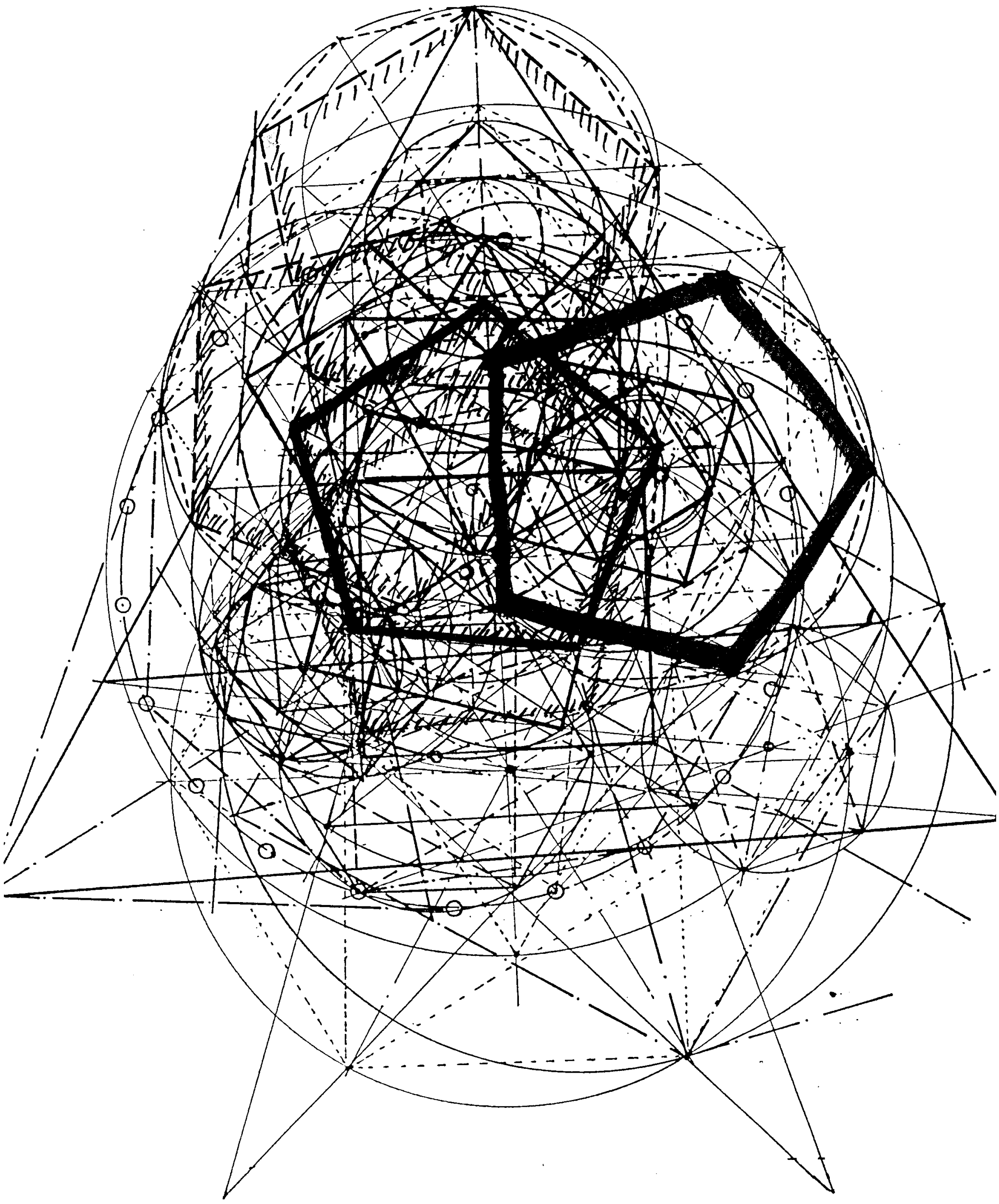


Abb. 22: Holbeins Familienbildnis, wesentliche Ideenlinien, mittlere gleichseitige Fünfecke

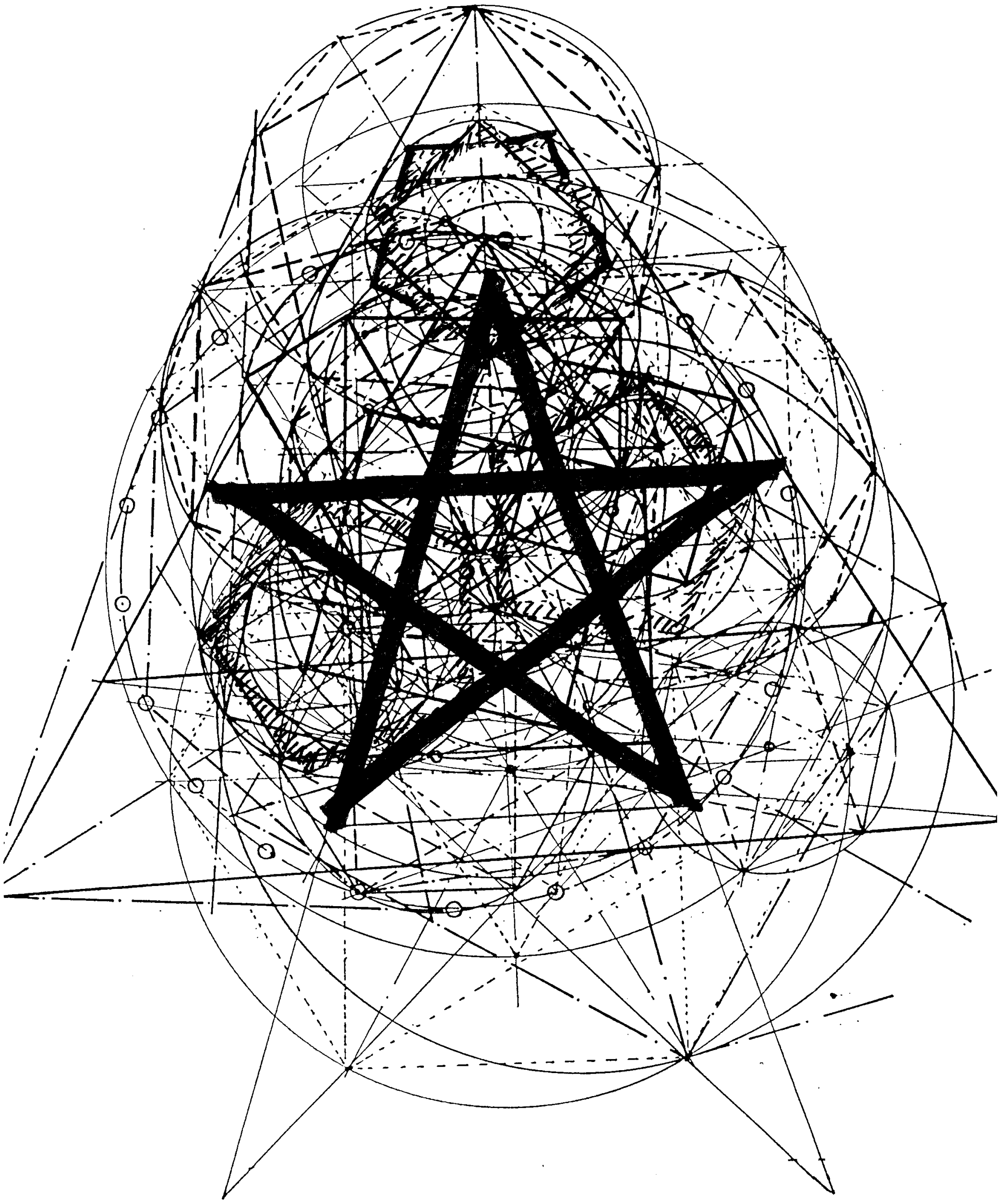


Abb. 23: Holbeins Familienbildnis, wesentliche Ideenlinien, gleichseitige Fünfecke

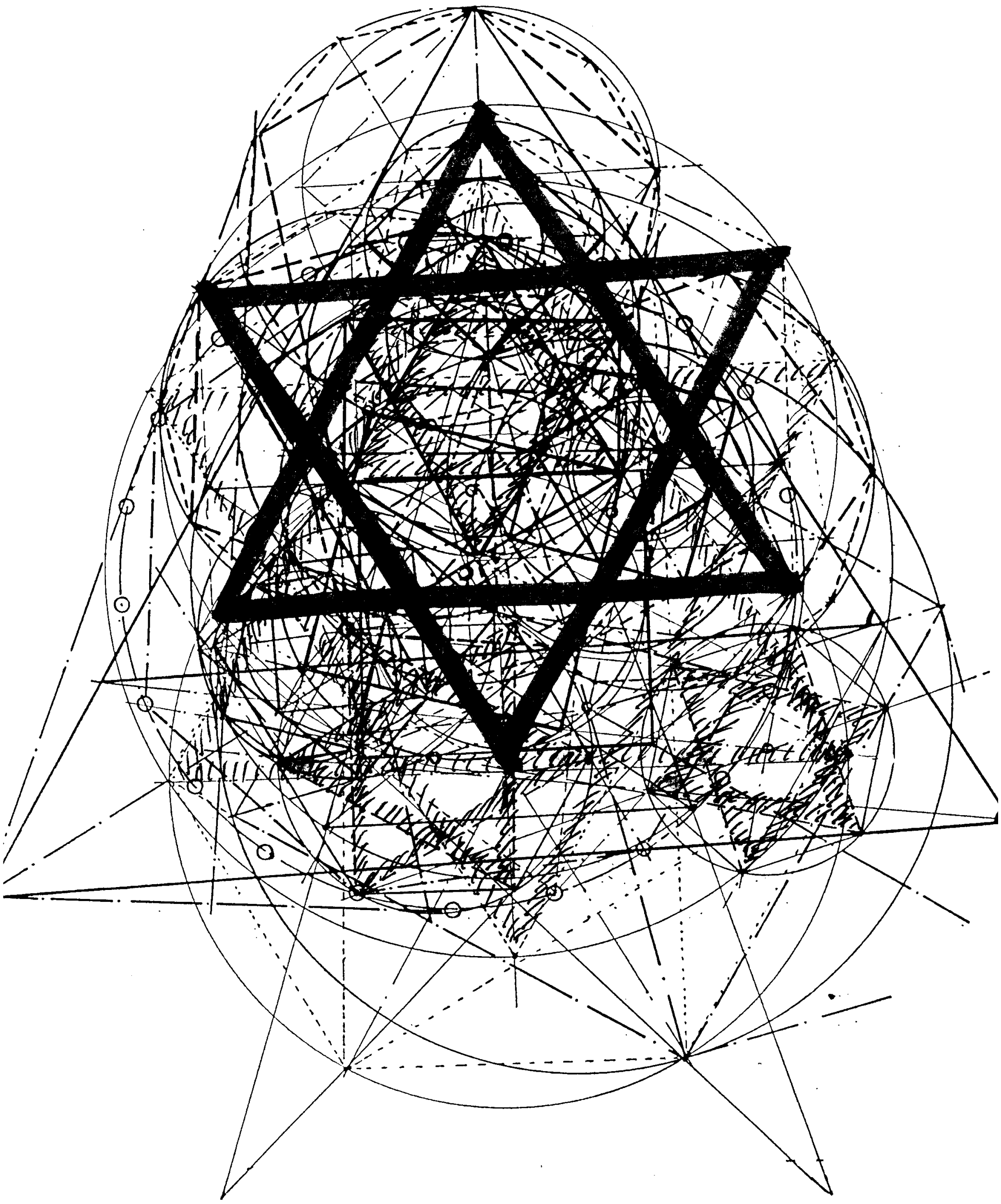


Abb. 24: Holbeins Familienbildnis, wesentliche Ideenlinien, gleichseitige Sechsecke

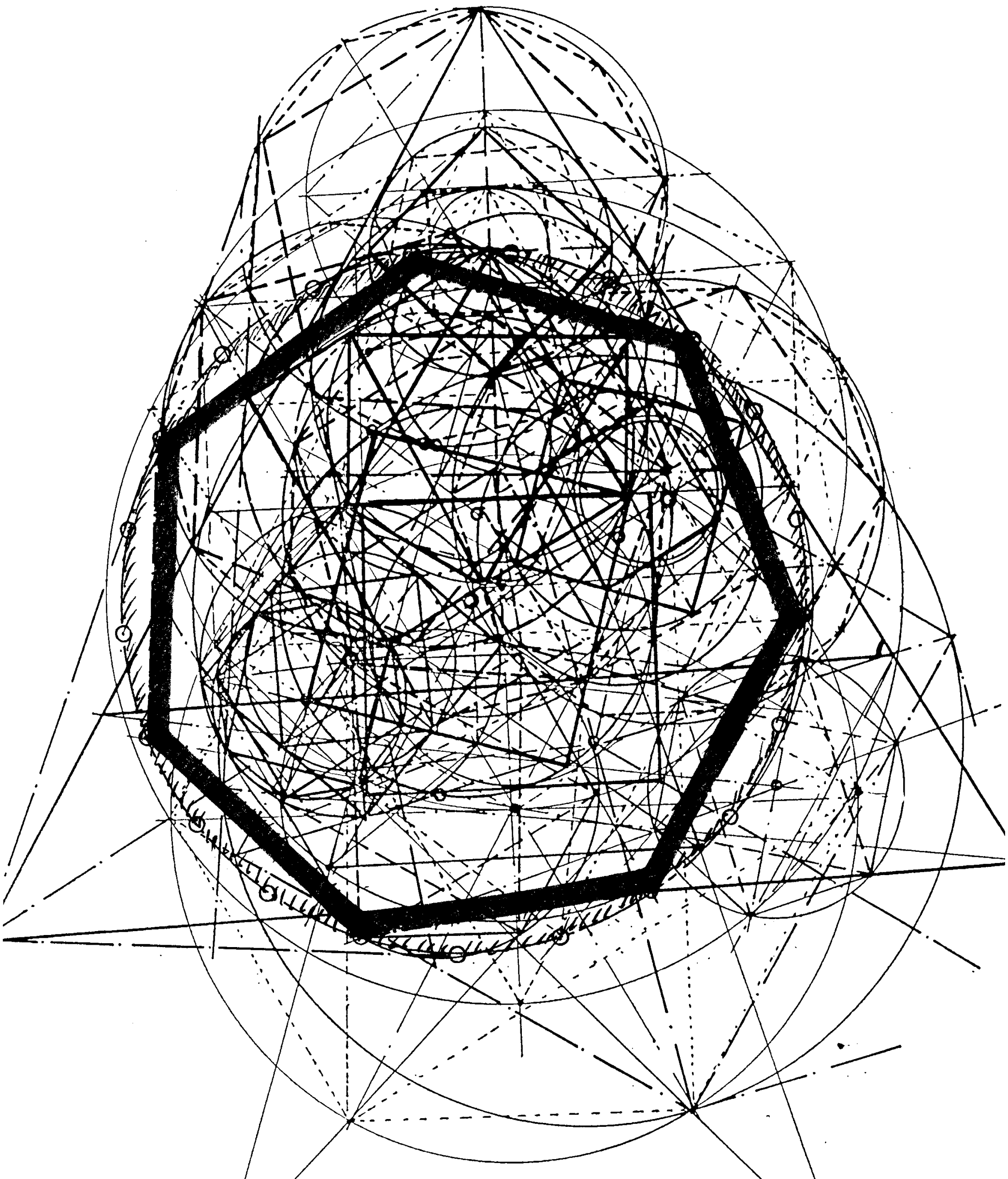


Abb. 25: Holbeins Familienbildnis, wesentl. Ideenlinien: Sieben– u. Einundzwanzigeck

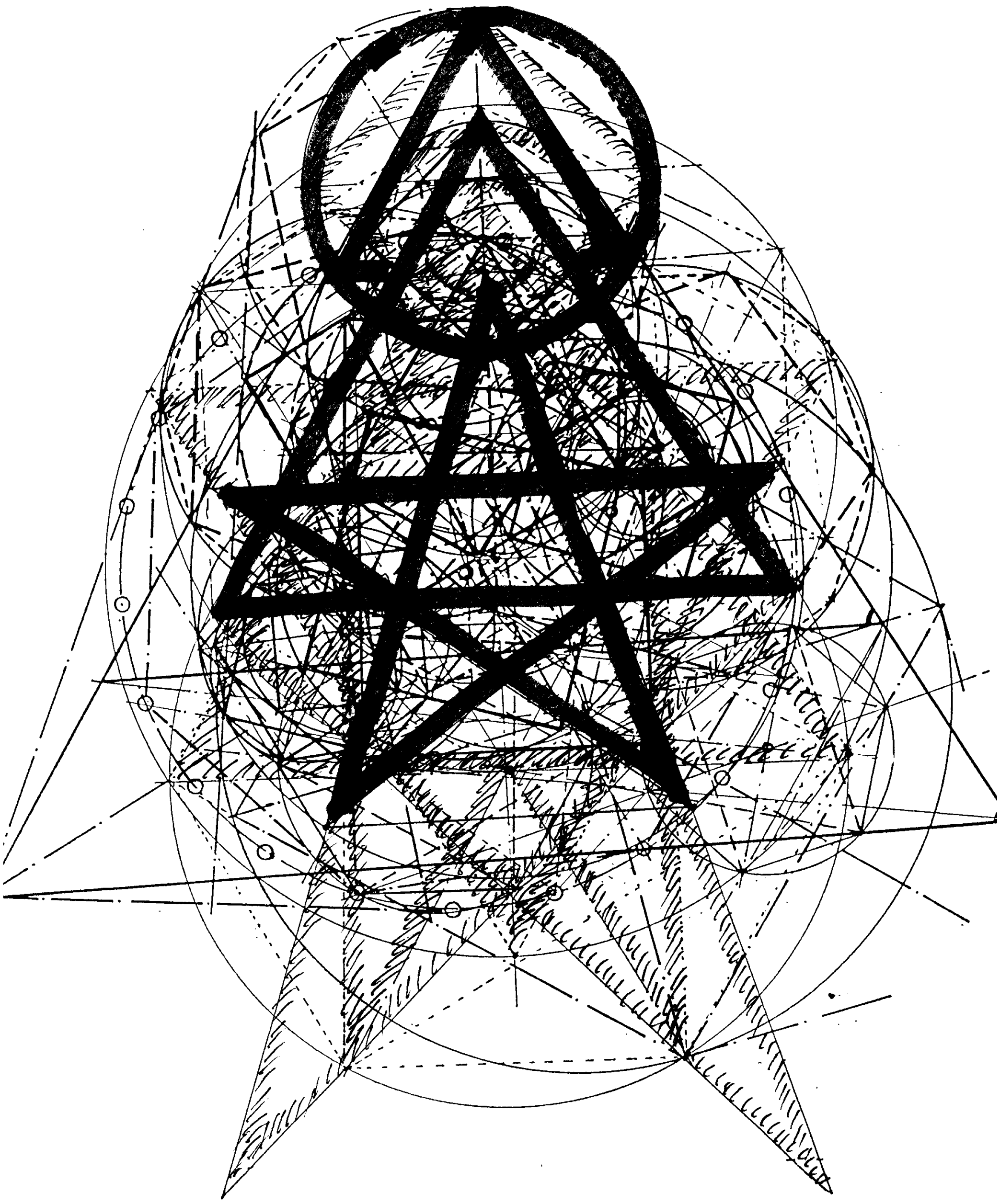
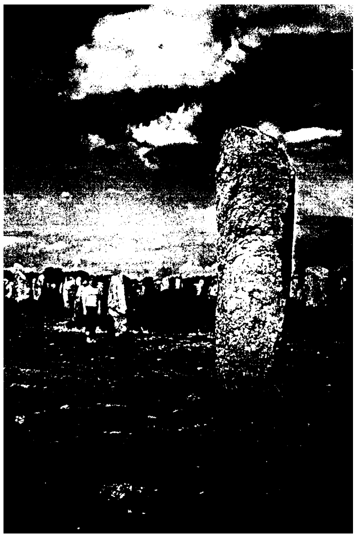


Abb. 26: Holbeins Familienbildnis, wesentl. Ideenlinien: „Mystischer Leib Christi“

Der mystische Leib Christi tritt hervor. Er steht bestimmend hinter dem Bild, das der Altgläubige unter intimer, jedoch profaner Oberfläche, im jetzt reformierten Basel zurückgelassen hat, wo nun niemand mehr religiöse Bilder bestellen wollte und einem Maler das Brot somit knapp wurde. Ist das Bild ein Ausdruck tiefer Religiosität und Segnung der Familie, die Holbein nun zurücklassen und bald dem Schicksal überlassen wird? Oder ist es einfach das Schema der eingeübten, gängigen Madonna–Bilder?


P. 27: Menhire bei Carnac ...


P. 28: ... Carnac (Locmariaquer), Bretagne


P. 29: Menhire bei Carnac ...


P. 30: ... Carnac (Locmariaquer), Bretagne

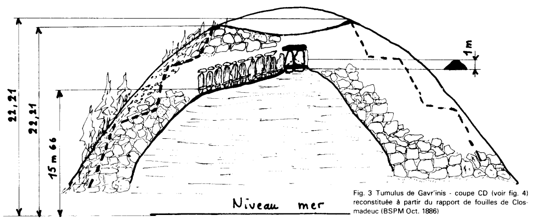
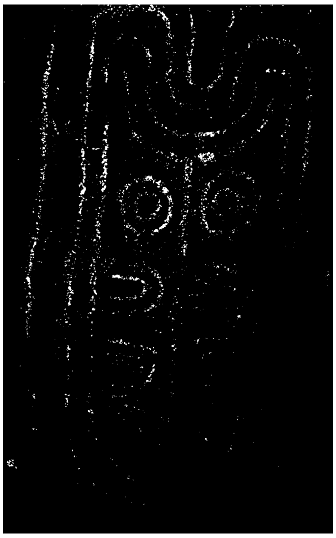


Abb. 31: Tumulus-Stufenpyramide

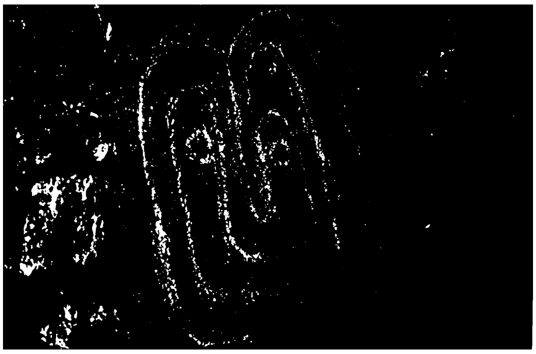

P. 32: Dolmen (Locmariaquer)

Interessanterweise finden wir um die Zeit vor bis während des Pyramidenbaus in Ägypten auch in Westeuropa Stufenpyramiden (3000 – 2500 v.Chr.). Bekannt sind die Stufenpyramiden resp. Tumuli der Insel

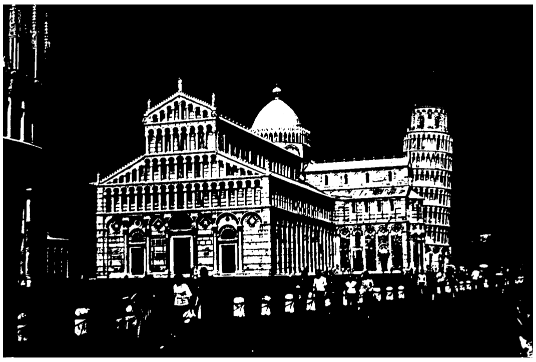
Man und der Insel Gavr'inis bei Locmariaker (Locmariaquer) nahe Carnac, Bretagne, mit einem Basisdurchmesser 52.5 Meter (vgl. Schnittzeichnung, Detail aus dem Bulletin de l'association archeologique Kergal, études et travaux, mai 1977).



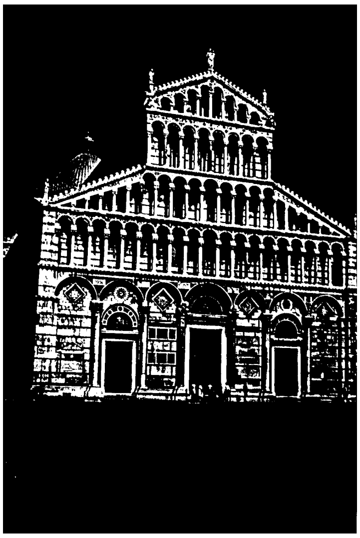
P. 33: Inneres eines Dolmen (Locmariaquer)



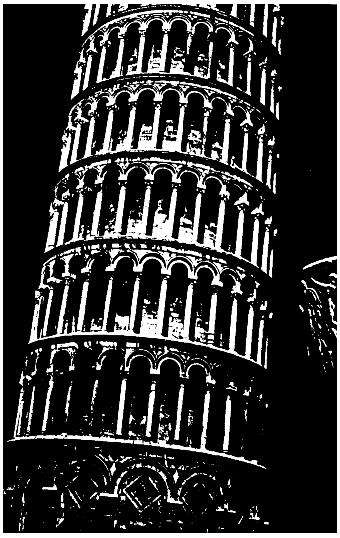
P. 34: Inneres eines Dolmen (Locmariaquer)



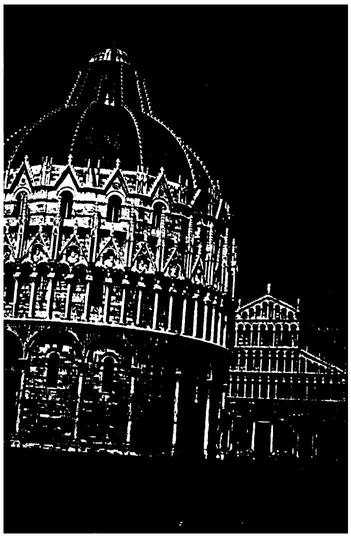
P. 35: Geometrie, Dom von Pisa



P. 36: Geometrie, Dom von Pisa

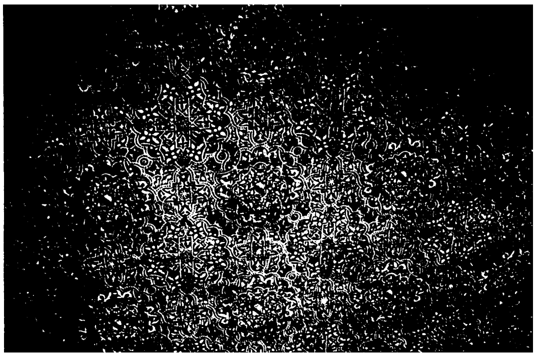


P. 37: Geometrie, Dom von Pisa

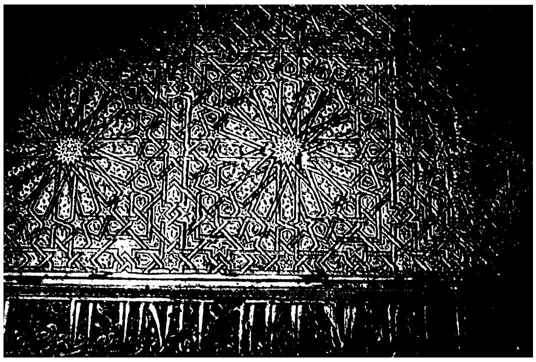


P. 38: Geometrie, Dom von Pisa

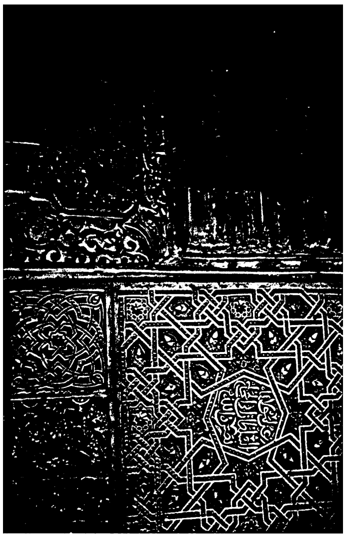
Strenge Geometrie in der romanischen Architektur am Beispiel des Doms von Pisa.



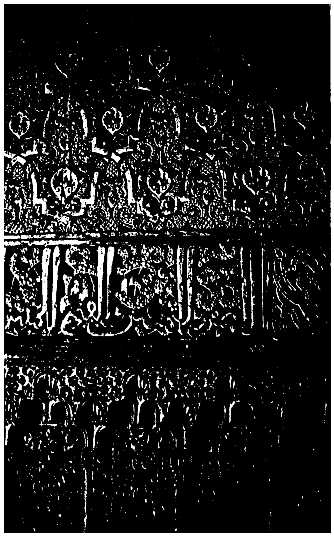
P. 39: Geometrie, Alhambra, Granada



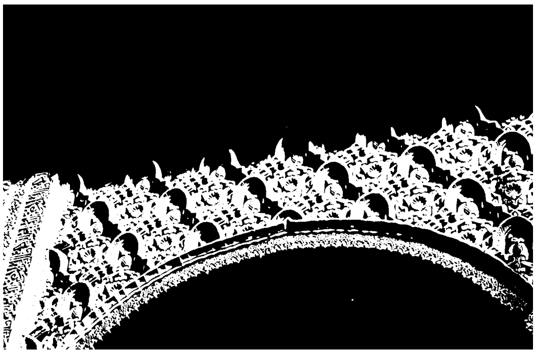
P. 40: Geometrie, Alhambra, Granada



P. 41: Geometrie, Alhambra, Granada

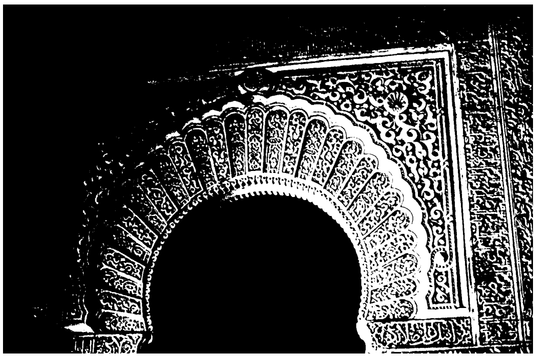


P. 42: Geometrie, Alhambra, Granada



P. 43: Geometrie, Alhambra, Granada

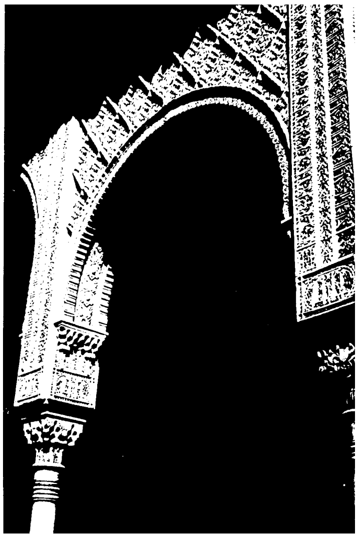
P. 44: Geometrie, Alhambra, Granada



P. 45: Geometrie, Alhambra, Granada

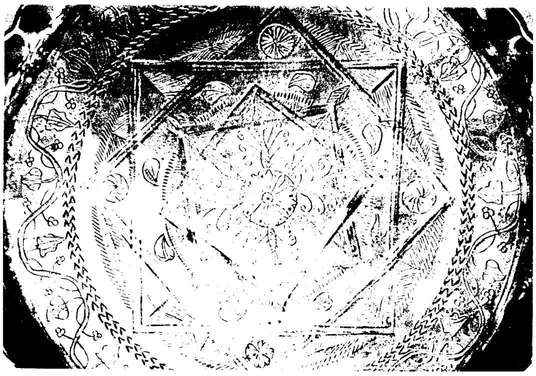
P. 46: Geometrie, Alhambra, Granada

P. 47: Geometrie, Alhambra, Granada



P. 48: Geometrie, Alhambra, Granada

Die strenge Geometrie in der Ornamentik an der Alhambra von Granada schöpft die Gruppentheorie weitgehend aus.



P. 49: Römische Ornamentik

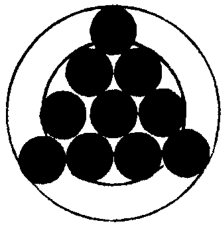
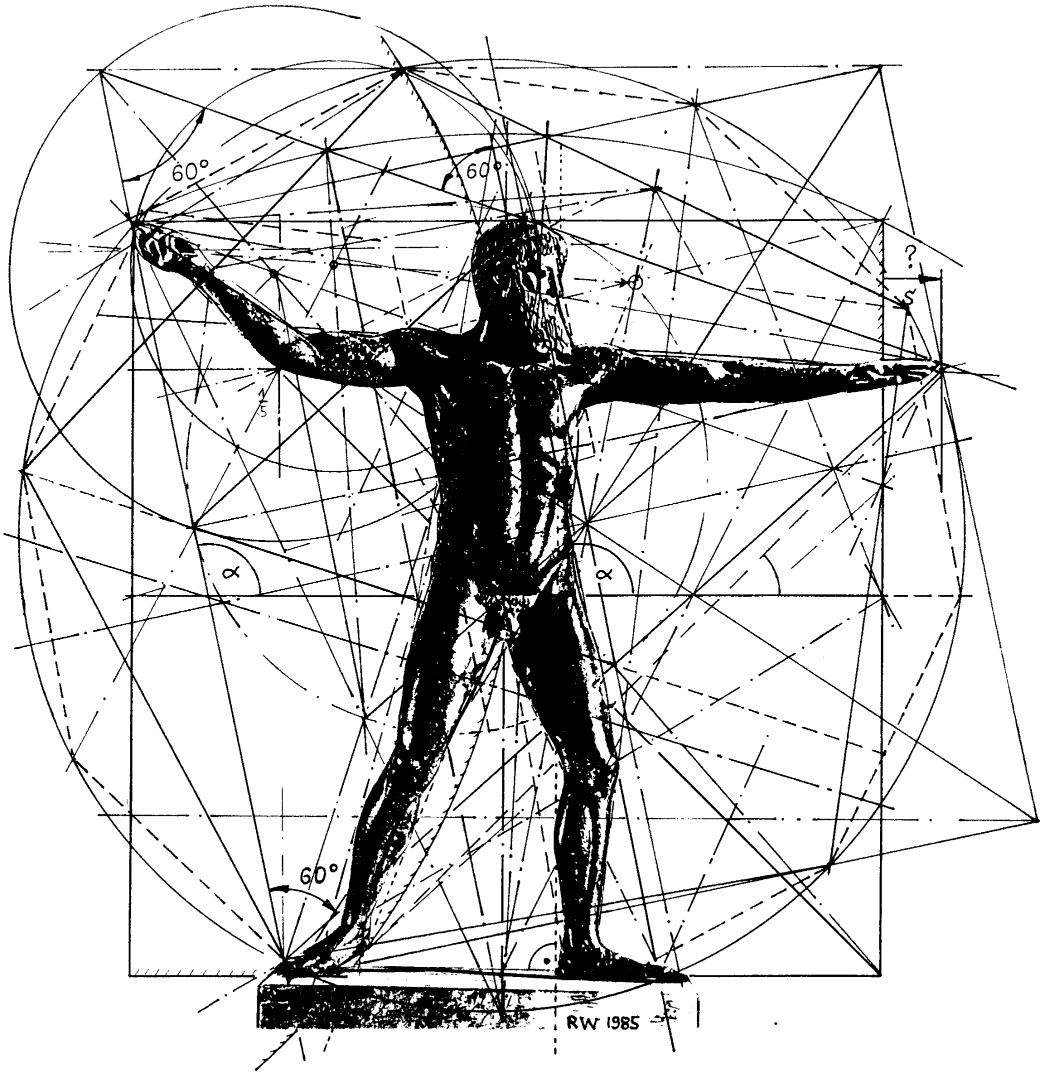
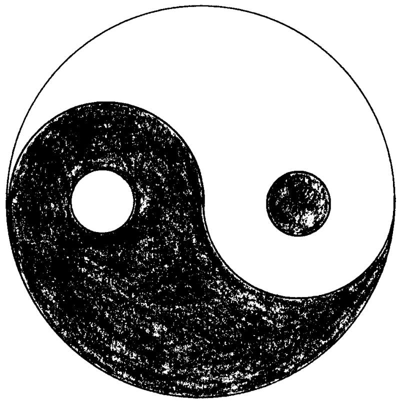


Abb. 50: Tetraktys

Beispiel römischer Ornamentik: Detail aus dem Silberschatz von Augusta Raurica. (Original: Römermuseum Augst, CH.)



P. / Abb. 51: Poseidon (?) im Kleide der Geometrie. Die geometrischen Proportionen des Menschen sind hier an für den Sinn der Plastic entscheidender Stelle verfälscht: Poseidons Hand weist über das Quadrat hinaus in die Spitze des gleichseitigen Dreiecks, das Symbol Gottes. (Bronzestatue gefunden 1926/28 in der Ägäis bei Artemision, dem antiken Bildhauer Kalamis zugeschrieben. (Lit. [36])
(Verwendet wurde eine Photographie des Autors von einem originalgetreun Abguss im der Skulpturenhalle Basel. Das Original befindet sich im griechischen Nationalmuseum Athen.)



P. 52: Yin und Yang …

P. 53: … in der Natur sich offenbarend

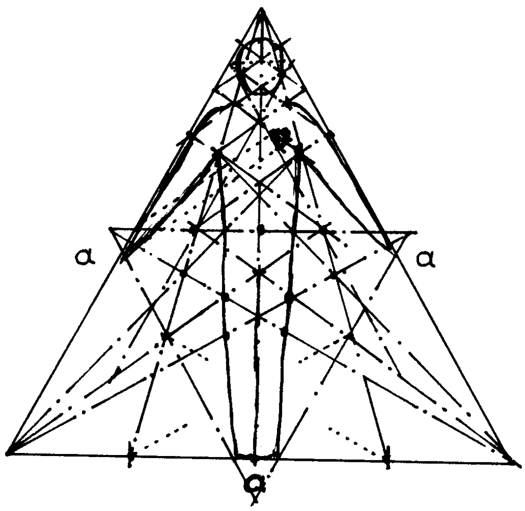


Abb. 54: Der Mensch im Dreieck

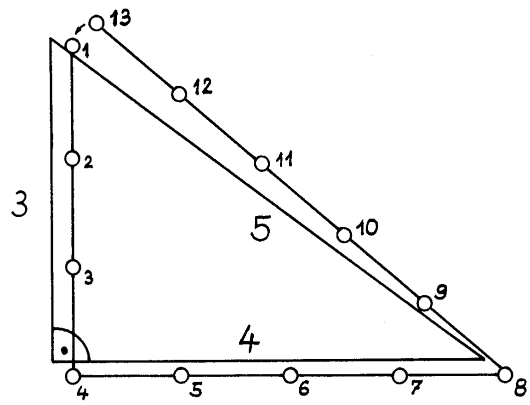


Abb. 55: Pythagoräisches Zahlentrippel

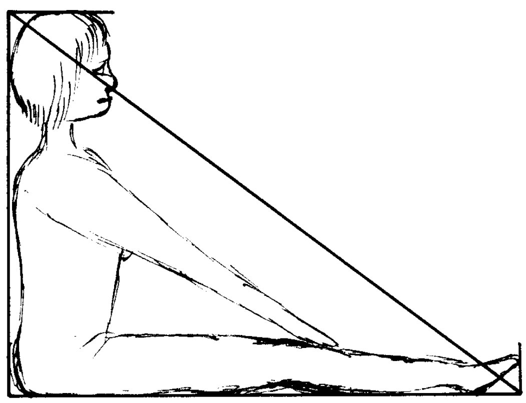


Abb. 56: Mensch und pyth. Dreieck

Fig. oben links: Der Mensch "passt" auch ins gleichseitige Dreieck. Doch zwei Ecken sind ihm vorenthalten.
Fig. oben rechts: $3^2 + 4^2 = 5^2 \rightsquigarrow (3, 4, 5)$ ist ein pythagoräisches Zahlentrippel. Mit einem Seil, in das in gleichen Abständen 13 Knoten geknüpft sind, massen früher die Bauleute den rechten Winkel.
Fig. links: Der ausgewachsene Mensch "passt" ins kleinste pythagoräische Dreieck.

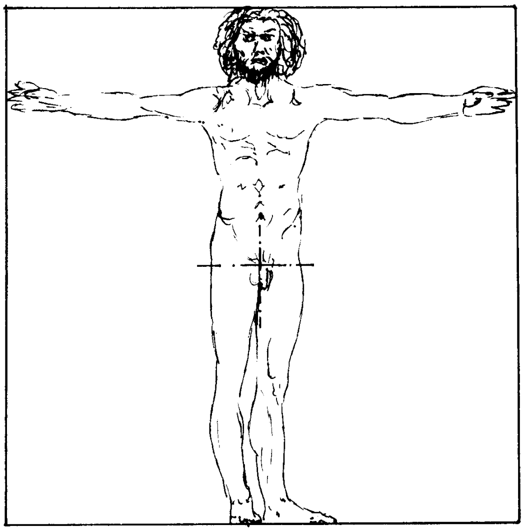


Abb. 57: Mensch und Quadrat

Der "irdische", ausgewachsene Mensch passt im Mittel ziemlich genau ins Quadrat, dem Symbol des Materiellen $\rightsquigarrow$ Körperhöhe = Spannweite. (Die Nachmessung der Behauptung bei zwei Schulklassen von ca. 20–Jährigen (CH) hat die Tatsache bestätigt.)

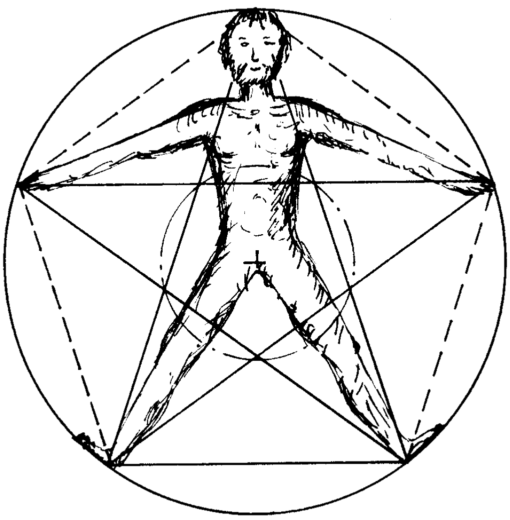


Abb. 58: Der Mensch im Fünfeck

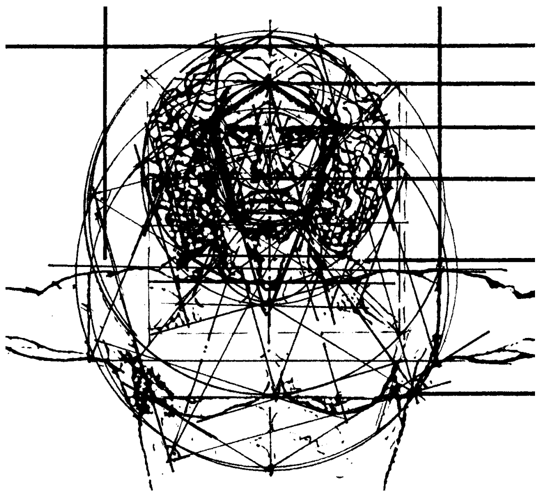


Abb. 59: Kopf, Fünfeck, goldener Schnitt

Der Mensch wie auch das Pentagramm tragen in sich den goldenen Schnitt. Sie stimmen im Bauplan überein. Und der Mensch passt auch ins Pentagramm, das Symbol des Menschen. Diese Figur war auch das Zeichen der Pytagoräer. Sie hielten geheim, dass die Diagonale und die 5–Eck–Seite inkommensurabel sind.

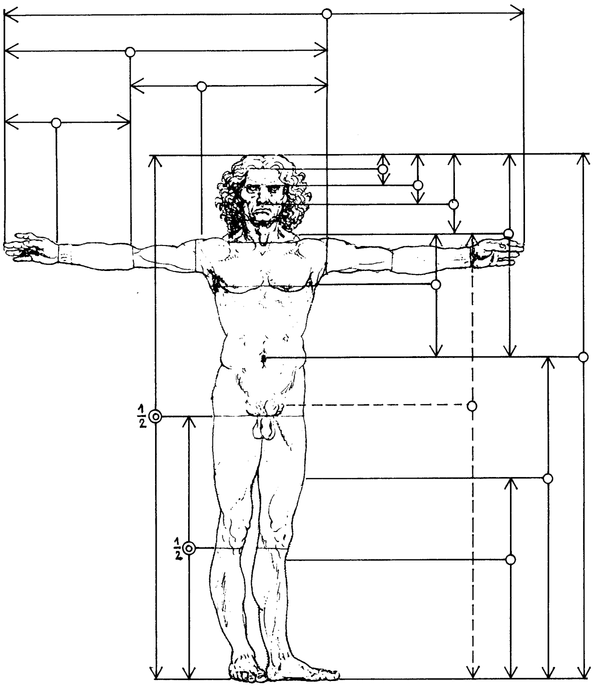


Abb. 60: Mensch und goldener Schnitt

Beispiele von Massen am vollkommen harmonisch gebauten, ausgewachsenen Menschen. Der harmonische Teilpunkt einer Strecke liegt so, dass sich die gesamte Strecke zur grösseren Teilstrecke so verhält wie die grössere Teilstrecke zur kleineren. Ebenso erkennt man Halbierungen.

Pentagramm und goldener Schnitt, goldene Dreiecke:

$a = b + c, \;\; d : a = a : b = b : c,$

$(c + b) : b = b : c$

$\Rightarrow \;\frac{d}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1}$

$\leadsto$ Die harmonische Teilung.

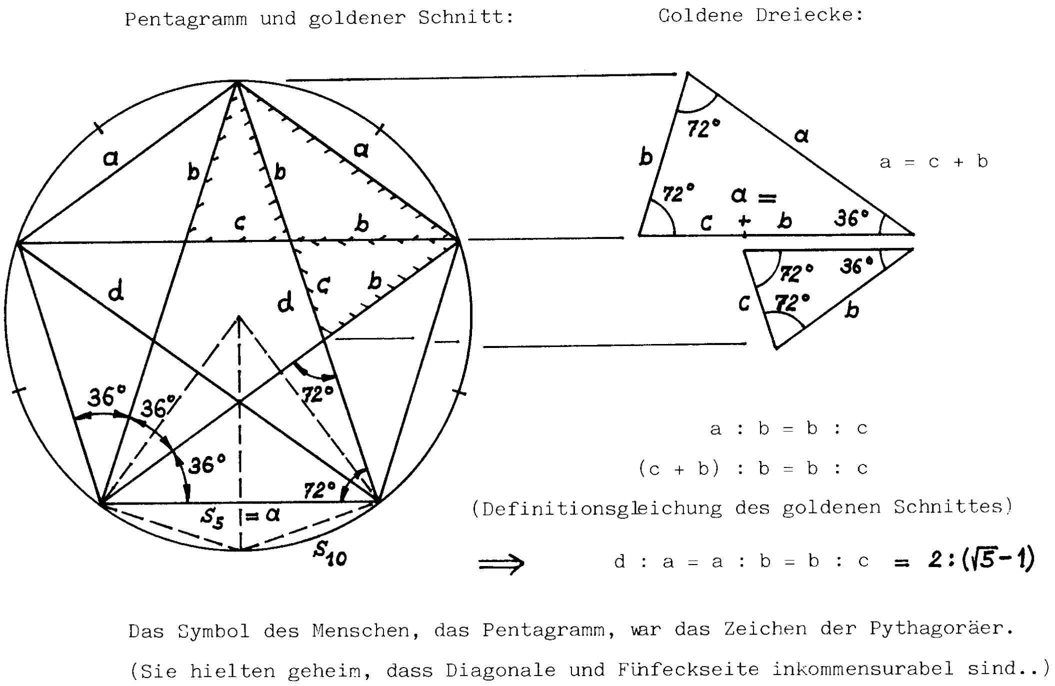


Abb. 61: Fünfeck und goldener Schnitt

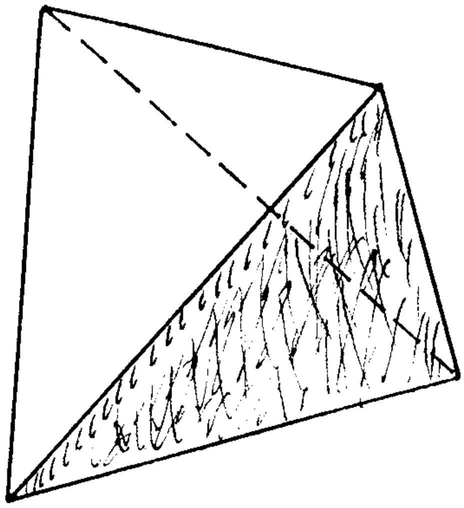


Abb. 62: Ansicht eines Tetraeders

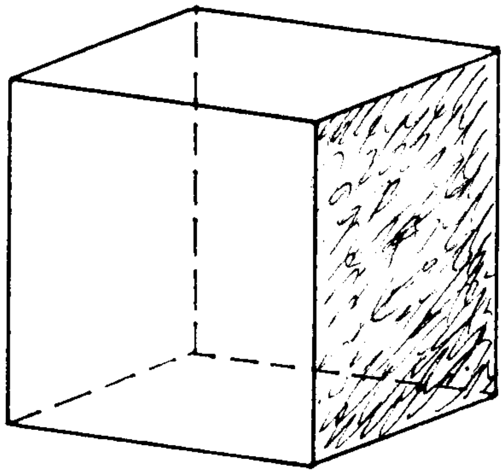


Abb. 63: Ansicht eines Hexaeders

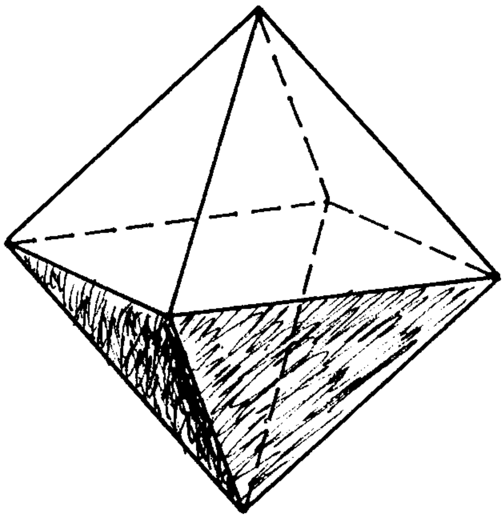


Abb. 64: Ansicht eines Oktaeders

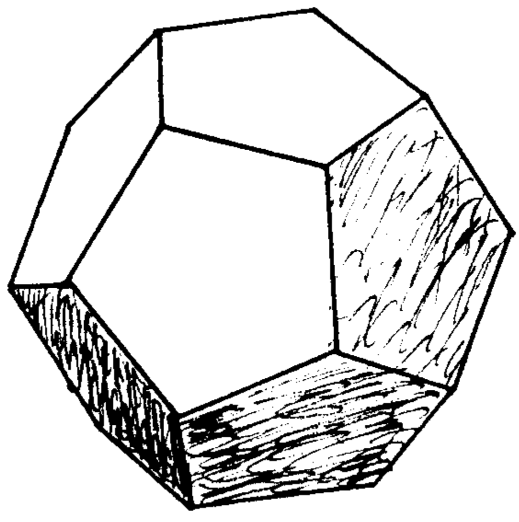


Abb. 65: Ansicht eines Dodekaeders

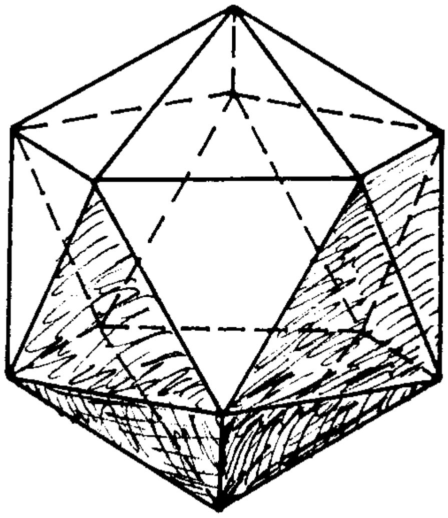


Abb. 66: Ansicht eines Ikosaeders

Im Raume gibt es nur fünf im Sinne von Regelmässigkeit und Symmetrie vollkommene Körper mit lauter gleichen, regelmässigen Seitenflächen: 4–, 6–, 8–, 12– und 20–Flächner.

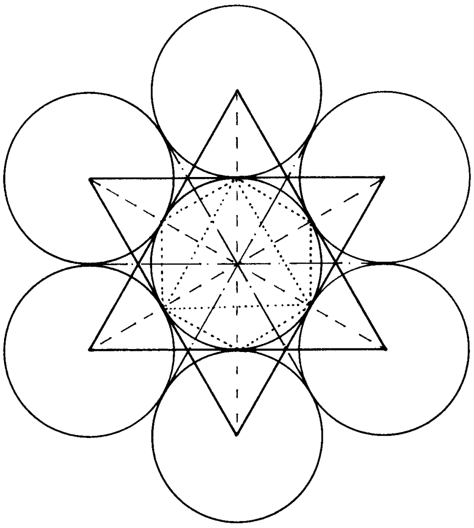
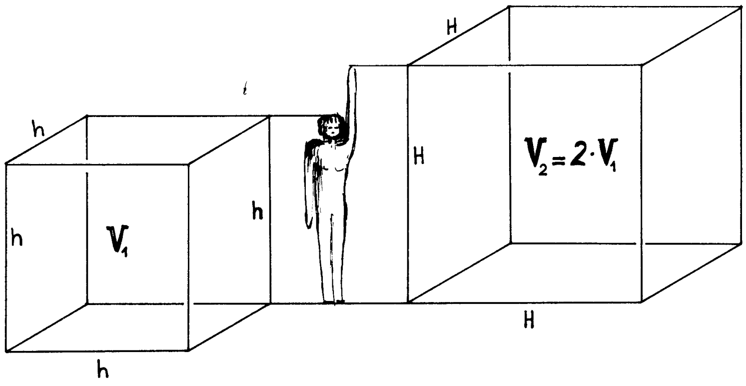


Abb. 67:

Das Sechseck: Das "göttliche Dreieck", die "innere" Welt und sein Spiegelbild, die "äussere" Welt im Kreise, dem Vollkommenen. Harmonie in der ebenen Geometrie.

P. 68:

Im Raume lassen sich zwölf Kugeln um eine dreizehnte gruppieren. Jedoch bleiben immer Lücken, wie man's auch anstellt!



$V_1 = h^3$ $\quad$ $V_2 = H^3 = 2 \cdot V_1$

Abb. 69: Mensch und Kubus–Verdoppelung

Der "vollkommen" geformte Mensch verdoppelt sich selbst als Kubusinhalt, er braucht bloss den Arm hochzuhalten. Doch der Inhalt eines aus gleichen kubischen Bausteinen geformter Kubus lässt sich mit solchen Bausteinen nie verdoppeln.

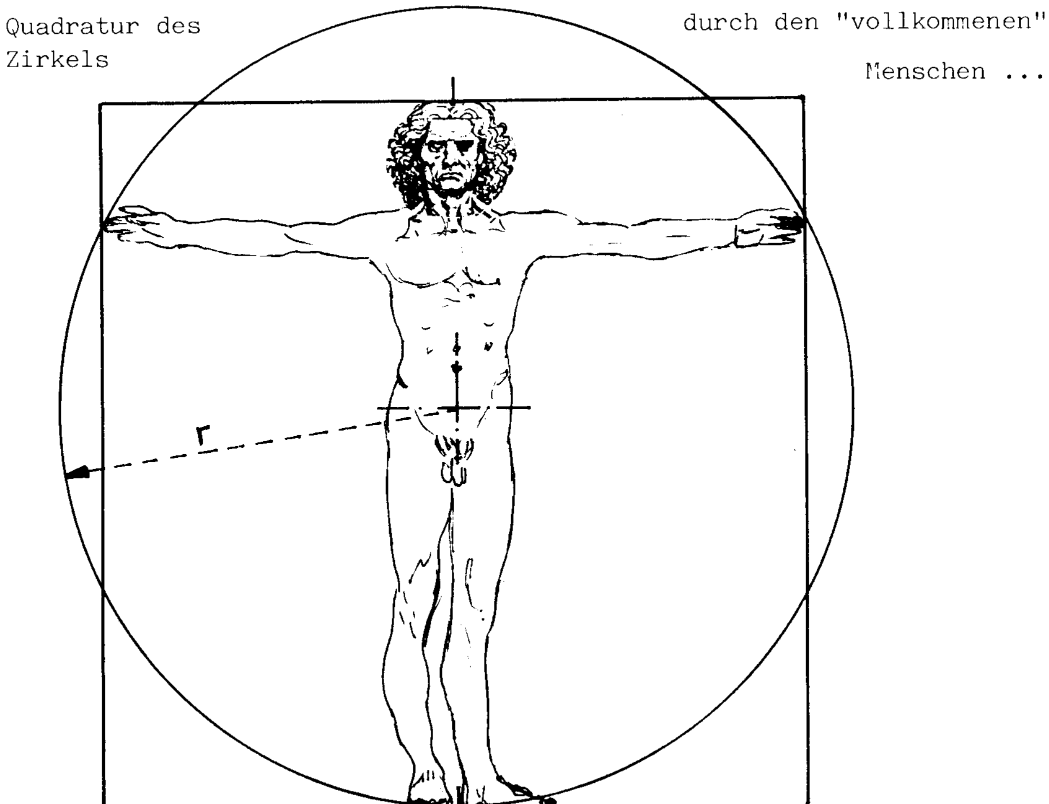
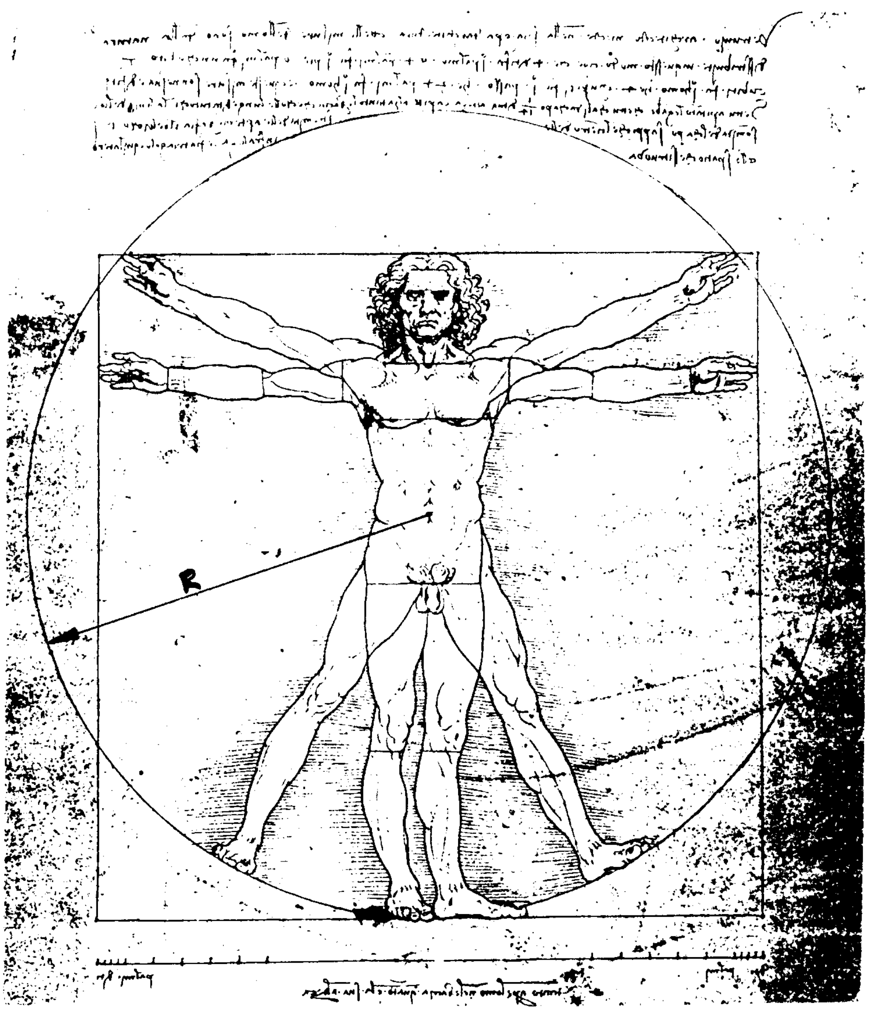


Abb. 70: Der Mensch quadriert den Kreis: Achtung: Leonardos Kreis ist grösser!

(Zur Quadratur des Zirkels durch den vollkommen geformten Menschen: Kreis und Quadrat sind im Rahmen der Messgenauigkeit etwa flächengleich.)



Leonardos grösserer "harmonischer" Kreis

Abb. 71: Der zum Quadrat flächengleiche Kreis ist kleiner!

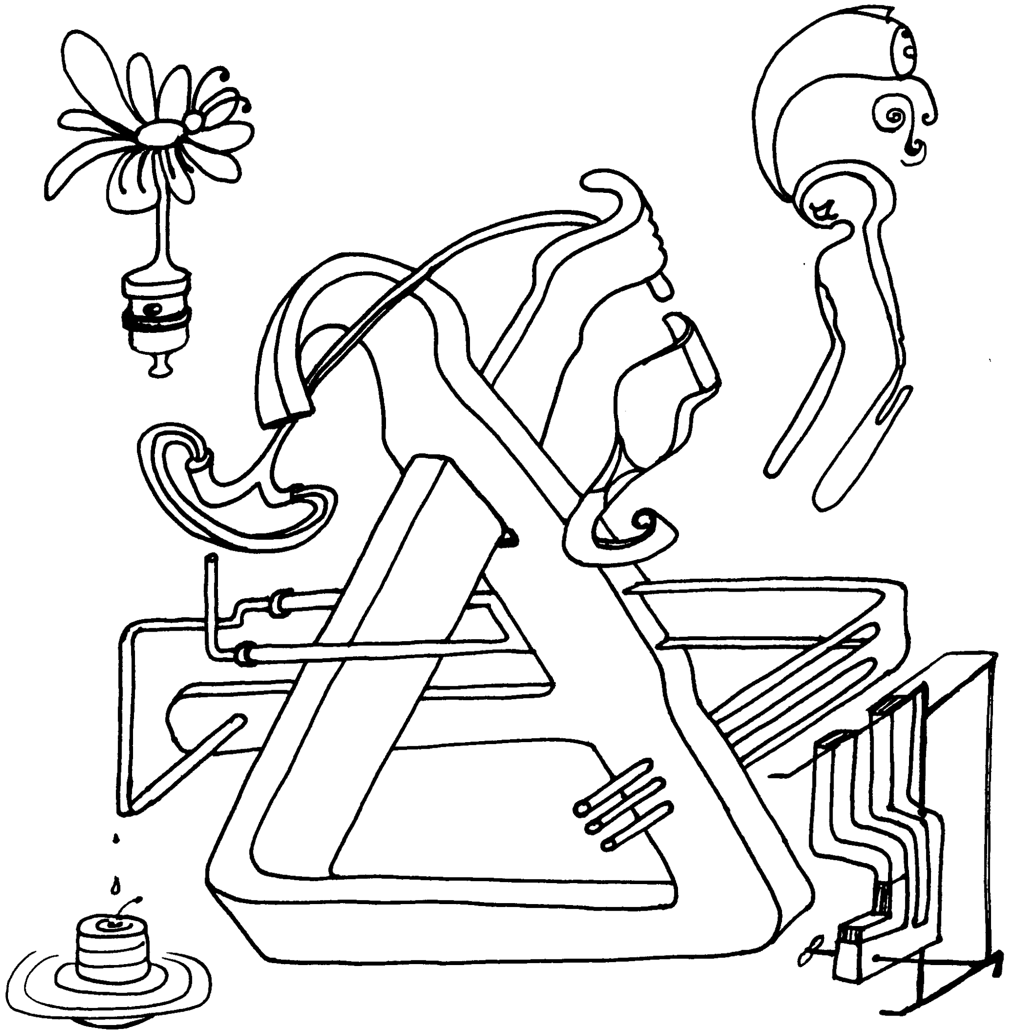


Abb. 72: Die Drei in der Vier in "moderneren" Zeiten ...

Eine gezielte und bewusste Verfälschung der geometrischen Gesetze der Perspektive wird vom Auge akzeptiert, das nur auf einer kleinen Fläche scharf sieht, sich also fixieren muss. Da die Umgebung nur "neblig" vorhanden ist, entsteht Illusion. Mit Mathematik, hier speziell mit Geometrie, lässt sich so spielen. (Zeichnung des Autors, inspiriert von Reutersward, von dem Escher die Ideen kopiert hat.)

Literaturverzeichnis

[1] B.L. Van der Waerden: Die Pythagoreer, Artemis–Verlag 1979

[2] B.L. Van der Waerden: Erwachende Wissenschaft, Birkhäuser–Verlag 1956

[3] Ferderic V. Grunfeld: Spiele der Welt, deutsche Ausgabe: Krüger Verlag 1976

[4] Alex R. Furger: Augster Museumshefte, Nr. 10, Verlag Römermuseum Augst 1989

[5] P. van Delft, J. Botermans: Denkspiele der Welt, deutsche Ausgabe: Heimeran Verlag 1977

[6] Martin Gardener, diverse Titel, diverse deutsche Ausgaben (et al.)

[7] Herbert Meschkowski: Wahrscheinlichkeitsrechnung, Bibliographischen Institut 1968 et al.

[8] Interpretation von W. von Uxkull: Die Einweihung im alten Ägypten, H. Schwab–Verlag 1957

[9] 17 Bücher des Hermes Trismegistos, Neuausgabe der Fassung von 1706: ORA–Verlag 1964

[10] Euklid: Die Elemente (übersetzt von Clemens Thaer), Wissenschaftl. Buchgesellschaft Darmstadt 1980

[11] Platon: Timaios

[12] Vgl. auch z.B. Paul Adam/ Arnold Wyss: Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde Paul Haupt Verlag 1984

[13] Becker: Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung, K. Alber–Verlag 1954 (et al.)

[14] Richter: Ideale Punkte, Monaden und Nichtstandatd–Methoden, Vieweg–Verlag 1982 (et al.)

[15] E. Nagel/ J. R. Newman: Der Gödelsche Beweis, Oldenbourg–Verlag 1979

[16] G. Asser: Einführung in die mathematische Logik (Bd.1–3), Verlag Harri Deutsch 1977 (et al.)

[17] Paul Bachmann: Das Fermatproblem in seiner bisherigen Entwicklung, Springer–Verlag 1919/ Reprint 1976

[18] Helmut Hasse: Zahlenbericht, 1930, Reprint Physica–Verlag 1970

[19] Vandiver, Wahlin: Report of the committee on algebraic numbers; Nat. Ac. of Sci., Bulletin of the Nat. Res. Council Nr 62, Alg. Numb. 11, Washington D.C. 1928

[20] Sp. Marinatos: Some Words about the Legend of Atlantis, Univ. of Athen 1971

[21] G. Duby et al.: Merveilleuse Notre–Dame de Lausanne, Cathédrale Bourgignonne, Ed. du Grand–Pont 1975

[22] G. Schmidt: Kunstmuseum Basel, 150 Gemälde, Verein der Freunde des Kunstmuseums 1973

[23] P.H. Boerlin, C. Geelhaar. T. Falk, F. Meyer, D. Koepplin: Kunstmuseum Basel, Westermann 1980

[24] F.C Endres, A. Schimmel: Das Mysterium der Zahl, Zahlensymbolik im Kulturvergleich Eugen Dietrichs Verlag 1985 (et al.)

[25] E. Bindel: Die geistigen Grundlagen der Zahlen, Fischer Verlag 1983

[26] B. M. Metzger, G. L Collord, D. Goldstein, J Ferguson et al.: Faszinierende Welt der Bibel, deutsch von 1. Meyer, Ex libris Verlag 1988

[27] B. L. van der Waerden: Die Pythagoreer, Artemis–Verlag 1979

[28] Bertrand Russel: Denker des Abendlandes, deutsch Übers. in Verlag Buch und Welt 1970

[29] C. G. Jung et al.: Der Mensch und seine Symbole, Walter–Verlag 1979

[30] Paul Davis: Mehrfachwelten (Entdeckungen der Ouantenphysik), E. Dietrichs Verlag 1981

[31] Roman U. Sexel: Was die Welt zusammenhält, Deutsche Verlags–Anstalt 1982

[32] B.L. van der Waerden: Erwachende Wissenschaft, Birkhäuser–Verlag 1966

[33] B.L. van der Waerden: Algebra I, Springer–Verlag (Heidelberger TB) 1971

[34] D. R. Hofstadter: Klangmuster bei Chopin, Spektrum der Wissenschaft Juni 1982, p. 8

[35] A. K. Dewdney: Der Klang des Rechnens, Spektrum der Wissenschaft Juli 1987, p. 8

[36] M. Andronios: Musée National, Ekdotike Athenon 1975