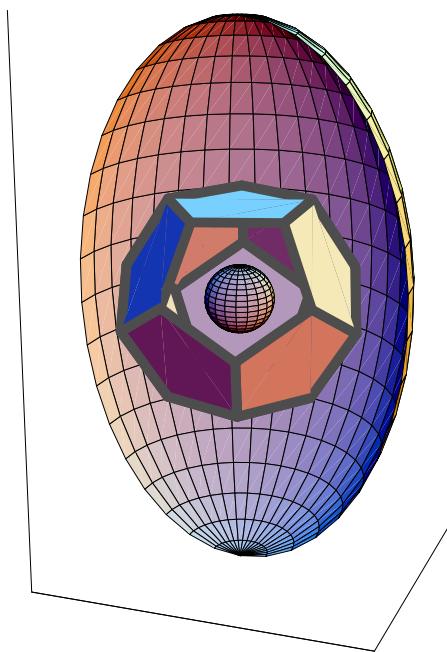


Script ◇ Math ◇ Architektur III
◇ Math.-natw. Weltbilder und Architektur ◇



Scripta monolingua nach dem Inversionsprinzip im 3. Studienjahr

(Auszug aus den Materialien zur Architektur)

von

Rolf Wirz

HTA Biel–Bienne

V.1.4 / Umfang vom 19. März 2003

Produziert mit PCTEX auf WIN98.

Das Auge sieht an die Dinge, der Verstand sieht durch die Dinge, das Herz sieht hinter die Dinge . . .

Auszug aus den Materialien zur Architektur

Adresse:

Berner Fachhochschule
Hochschule für Technik und Architektur Biel
(Früher Ingenieurschule Biel)

Quellgasse 21
Postfach 1180
CH-2501 Biel-Bienne
Tel. (..41) (0)32 / 3216 111
©2003

Inhaltsverzeichnis

1	Mathematik und Architektur im Lichte der Weltbilder	1
1.1	Notizen zu den Ursprüngen unserer Kultur	1
1.1.1	Die Anfänge der kulturellen Zeugnisse	1
1.1.2	Erste Organisationsformen rufen nach ersten mathematischen Fähigkeiten	2
1.1.3	Der prägende Einfluss des Zeitverständnisses und des Kosmos	2
1.1.4	Der Einfluss der umfassenden Geschichte	3
1.1.5	Vorgeschichtliche Zeugen exakter Mathematik	4
1.2	Die Urerfahrungen der Mathematik	5
1.2.1	Die Methode der Modellierung durch Interpretation der Realität	5
1.2.2	Wesentliche Zeitalter mit prägendem Einfluss	6
1.2.3	Bedeutung einiger kulturell häufiger Zahlen	6
1.3	Notizen zu den Ursprüngen unserer Geschichte	20
1.3.1	Keilschrift	20
1.3.2	Hieroglyphen	22
1.4	Zu einigen Grundgesetzen der prägenden Einflüsse	24
1.4.1	Den Menschen prägende Einflüsse	24
1.5	Gliederung von prägenden Einflüssen betreffend die Architektur	26
2	Theorien der Mathematik und Physik mit prägendem Einfluss	29
2.1	Gelehrte der Antike	29
2.1.1	Schule des Pythagoras	29
2.1.2	Platon	29
2.1.3	Aristoteles	29
2.1.4	Euklides	30
2.1.5	Archimedes von Syrakus	30
2.1.6	Erathostenes von Kyrene	30
2.1.7	Ptolemaios	31
2.2	Nachantike, Mittelalter	31
2.2.1	Albertus Magnus	31
2.3	Renaissance, Barock, Mechanik, neue Himmelskörper	31
2.3.1	Kopernikus	31
2.3.2	Galilei	31
2.3.3	Tycho Brahe	32
2.3.4	Jost Bürgi	32
2.3.5	Kepler	32
2.3.6	Descartes	33
2.3.7	Guericke	33
2.3.8	Pascal	33
2.3.9	Huygens	33
2.3.10	Newton	33
2.3.11	Leibniz	34

2.3.12	Bernoullis	35
2.3.13	Euler	35
2.3.14	Coulomb	35
2.3.15	Lavoisier	35
2.3.16	Volta	36
2.3.17	Laplace	36
2.3.18	Gauss	36
2.3.19	Die Entdeckung neuer Himmelskörper	36
2.3.20	Faraday und Maxwell	37
2.3.21	Mayer, Helmholtz, Joule	37
2.3.22	Das Problem des absoluten Raums	38
2.4	Einstein und die Relativitätstheorie	38
2.4.1	Äthertheorie und Konstanz der Lichtgeschwindigkeit	38
2.4.2	Systemzeit und Zeitdilettation	39
2.4.3	Die Lorenzkontraktion	41
2.4.4	Die Unüberschreitbarkeit der Lichtgeschwindigkeit	42
2.4.5	Das Paradoxon der Gleichzeitigkeit	42
2.4.6	Ruhemasse und dynamische Masse	43
2.4.7	Masse und Energie	44
2.5	Materiewellen, Quantentheorie, Kosmologie und Weltbild	45
2.5.1	Dualismus Wellen–Korpuskel	45
2.5.2	Die Unschärferelation	46
2.5.3	Ausblick auf die Teilchenstruktur der Materie	47
2.5.4	Ausblick auf die Kosmologie	47
2.6	Rückblick auf die Ursprünge mathematischer Begriffsbildungen	49

Kapitel 1

Mathematik und Architektur im Lichte der Weltbilder

1.1 Notizen zu den Ursprüngen unserer Kultur

1.1.1 Die Anfänge der kulturellen Zeugnisse

Erste kulturelle Zeugnisse der Menschheit finden sich in den Höhlenmalereien, Knochenschnitzereien und plastischen Zeugnissen (z.B. Lehmeskulpturen) in Norditalien, Süddeutschland, Frankreich und Spanien (z.B. Fumane-Höhle, Schwäbisch-Alp, Chauvet oder Cavernen in der Dordogne, Altamira u.s.w.). Darin ist eine sehr hohe Entwicklungsstufe in der zwei und dreidimensionalen geometrischen Ausdrucksfähigkeit wie auch eines „künstlerischen Empfindens“ derjenigen sichtbar, die die Werke geschaffen haben. Physikalische Altersbestimmungen ergeben ein Alter von maximal bis zu 32'000–36'500 Jahren (Fumane). Vgl. z. B. [?]. Kunstvoll gearbeitete Gegenstände finden sich auch im Raum Deutschland–Österreich etc.. Jüngere Malereien treten auf im Süden bis Sizilien, noch jüngere auch in Nordafrika, das damals noch grün war und Flüsse kannte — und im Osten bis Sibirien. Die ersten kulturellen Zeugnisse des Menschen sind somit auch **Zeugnisse einer geometrischen Vorstellungskraft**. Die Schöpfer der Bildnisse beweisen durch die Werke die Fähigkeit, dreidimensionales Grosswild sehr exakt auf einer zweidimensionalen Höhlenwand abilden oder projizieren zu können, und das in der Dunkelheit der Höhlen bei den damaligen Beleuchtungsmöglichkeiten. Das beweist eindrücklich die geometrische Vorstellungskraft, die bei heutigen Naturvölkern im Experiment auch schon nicht gefunden werden konnte, wie die Forschungsberichte dokumentieren. Man bedenke, dass einer der ersten Überreste einer Sesshaftigkeit und somit einer städtischen Kultur Jericho (Cisjordanien/Palästina/Westbank) ist mit einem vergleichsweise bescheidenen Alter von ca. 7000 Jahren.



Abbildung 2: Terrakotta, Steinzeit



Abbildung 3: Höhlenmalerei, Steinzeit

1.1.2 Erste Organisationsformen rufen nach ersten mathematischen Fähigkeiten

Sesshafte Gemeinwesen rufen nach Organisationsformen, Rechtsordnungen, Staatsgebilden, die die Arbeitsteilung und den notwendigen Handel sowie das Zusammenleben regeln. Es bedarf einer staatlich kontrollierten Moral, dem Gesetz des Zusammenlebens. Die Notwendigkeit der Kommunikation erklärt die Notwendigkeit einer Schrift. Das alles bedingt schon Mathematik: Zählen wird aus verständlichen Gründen notwendig (Mass und Gewicht, Waarenmengen, Grösse von Herden, Zwiebelkonsum beim Pyramidenbau, Anzahl Soldaten etc. etc.). Und ein Kalender wird notwendig, damit Termine überhaupt benutzbar werden. Die Geometrie wird notwendig zur Navigation und Vermessung. (Seefahrt, Karavannenstrassen durch die Wüsten, z.B. die Salzstrassen. Vor allem Salz war lebensnotwendig und wurde schon früh aus den Salzseen des Tschad südlich der Sahara geholt.) Die Geometrie war notwendig für den internen Frieden und somit für den Staat, denn Frieden kann nur herrschen, wenn z.B. nach der alljährlichen Nilüberschwemmung das Land neu vermessen werden kann und sich jeder wieder zufrieden im Besitz seiner Habe sieht. \sim *Harpedonapten*, griech. „Seilspanner“, Feldvermesser. Man findet hier durchaus utilitaristische Beweggründe als einer der Väter aller mathematischen Dinge.

Und weiter zieht das kosmische Geschehen am Himmel den Menschen in seinen Bann, da er diesem restlos ausgeliefert ist. Der Mensch hatte keinen Einfluss auf die Planetenbewegungen! Da war (und ist) der Mensch genauso ausgeliefert wie seinem Schicksal. Hier ruft das religiöse Verhalten des Menschen die Mathematik auf den Plan, da der Verstand noch nicht nach Erklärungen, jedoch schon nach Ordnung verlangt. Zudem war bis in die jüngste Zeit Religion nicht getrennt vom Staat. Je älter die geschichtlichen Quellen, desto mehr offenbaren sie eine Einheit der Sicht der Dinge: Eine Einheit von Staat, Kultur, Religion, Stammesbewusstsein, Sippenbewusstsein. Astronomie wurde nicht nur benutzt zur Navigation oder für den Saatkalender, sondern auch für die Astrologie, die an gewissen Orten noch heute die Staatsentscheide bestimmt. (Z.B. bei den Tibetern. Auch Hitler hatte einen „Hofastrologen“, den Basler Kraft. Oder Kepler: Er war Astrologe bei Rudolf II v. Habsburg in Prag etc.). \sim Die *Notwendigkeit* ist das offensichtliche Schlüsselwort, das ein plausibles und nachvollziehbares Verständnis aus der Sicht vom Hintergrund unserer Zeit her erlaubt.

1.1.3 Der prägende Einfluss des Zeitverständnisses und des Kosmos

Wie erwähnt hat der Mensch auf das kosmische Geschehen am Firmament noch weniger Einfluss als auf das eigene Schicksal: Er ist ausgeliefert. Das kosmische Geschehen, der Rhythmus der Sonne, des Mondes, des Tierkreises, zeigt dazu dem Menschen die Zeit an: Tag und Nacht, Monat, Jahr, Jahreszeiten.

Im Raum kann sich der Mensch mit seinem Körper frei bewegen, in der Zeit kann er das nicht. Da ist er „festgenagelt“ im Moment. Vergangenheit und Zukunft sind ihm nur in seiner erfahrungsgeprägten Vorstellung zugänglich, ohne dass er sich dort frei mit seinem Körper bewegen könnte. Der Mensch ist daher Herr des Raumes, mindestens der quasi ebenen festen Erdoberfläche, jedoch nicht Herr der Zeit. Bezuglich des Raumes trägt der Mensch in seinem Empfinden auch ein dreidimensionales, ruhendes Koordinatensystem mit sich herum: Links-Rechts infolge seiner Symmetrie, vorn-hinten infolge seiner Orientiertheit im Körper und des Gesichtssinns, oben-unten infolge des Gleichgewichtssinns, des aufrechten Ganges, des oben sitzenden Kopfes mit Bewusstseins und der Schwerkraft. Zur Zeit hat er aber nur über die Bewegung Zugang: Z.B. über die Atmung, das Schlagen des Herzens, äussere Bewegungen wie das Fliessen des Wassers, das Wandern der Sonne oder z.B. über eigene Gehbewegungen. Wenn der Mensch schläft, fehlt ihm nachher ein Stück Zeit in der Erinnerung, da er es nicht bewusst erlebt hat.

So wird nachvollziehbar, dass der Mensch schon früh die denkbare Herrschaft über die Zeit in den Bereich des Göttlichen gerückt hat. Planeten wurden Götter, gelenkt vielleicht von einem obersten Gott, auf Erden vertreten durch einen obersten Herrscher, einen Pharaos, einen König, einen Kaiser, einen Pontifex, der den Kalender gab. In der Unantastbarkeit der Zeit mag nun der Grund dafür gelegen haben, dass das kosmische Geschehen, die Rhythmen der Planeten, des Jahres etc. extrem prägend auf die Kultur gewirkt haben. An diesen Rhythmen hat man Zahlenverhältnisse und Vergleichszahlen abgelesen, die rasch sakrale Dimension erhalten haben, sich in Hauptwerken der Architektur und Kunst auf eindrückliche Weise wiederfinden und zudem mathematischen und symbolischen Gehalt haben. Will man somit solche

kulturelle Zeugnisse verstehen, würdigen oder gar restaurieren können, so kann das im Zeichen der Sorgfalt nicht ohne Studium der einschlägigen Symbolik oder der kosmischen Rhythmen geschehen. Zahlen und geometrische Figuren sind hier wichtige Bedeutungsträger, d.h. eine Art Schrift, die zu lesen verstanden sein will.

Wie stark die materielle–geographische Situation auf die Auswahl der dem Menschen wichtigen Aspekte der kosmischen Rhythmen gewirkt hat, kann man erahnen, wenn man als Beispiel den folgenden Vergleich bedenkt: Im alten Ägypten war für die Ackerbau betreibenden Bevölkerung speziell infolge der alljährlich wiederkehrenden Nilüberschwemmungen eine Staatswesen notwendig geworden, damit eine alljährlich wieder neu notwendige Landzuteilung geordnet abgewickelt werden konnte. Die Überschwemmungen kehrten im Jahresrhythmus wieder, was erklärt, dass der altägyptische Kalender an die Jahreszeiten angebunden war und somit Winter– und Sommersonnenwende oder Tag– und Nachtgleiche eine entscheidende Rolle gespielt haben mussten. Wir als kulturelle Erben der griechisch–römischen Antike, welche ihr wissenschaftliches Hauptzentrum in Ägypten (Alexandrien) hatte und das ägyptische Erbe antreten konnte, haben als Konsequenz diesen jahreszeitgebundenen Kalender wie auch das Rechensystem (Dezimalsystem) geerbt. (Die Macht der Pharaonen ging auch an die Cäsaren resp. Kaiser über und setzt sich zum Teil u.a. im Pontifex Maximus heute noch fort. Man denke auch an den Bischofshut (Mitra) als Abkömmling der geteilten Pharaonenkrone.)

Ganz anders in Mesopotamien oder bei den Nomadenvölkern des Ostens, die einen Mondkalender hatten und deren kulturelle Erben auch heute noch einen solchen haben. Im Osten gab es die jährlichen Nilüberschwemmungen nicht. Viehzucht war wichtig. Und bei Aufzucht von Vieh, Trächtigkeit oder Wanderungen durch Wüsten sind die Mondrhythmen oder die hitzelohe Nacht mit ihrem Mond wichtiger als die Jahreszeiten der Ägypter.

1.1.4 Der Einfluss der umfassenden Geschichte für das Verständnis der kulturellen Zeugen — auch in der Architektur

Die heutige Welt verstehen kann nur der, der auch weiß, woher sie kommt, was also die Gründe für ihre heutige Gestalt sind. Das bedeutet die Geschichte der Kultur der Menschen kennen. Was uns aus alten Zeiten überliefert ist, sind schriftliche Zeugnisse und Werke technischer Art in Form von Gegenständen und Bauwerken, die die Zeit überdauert und der Zerstörung getrotzt haben. Sie erlauben ein Bild, das aber immer nur bruchstückhaft sein kann, da der grösste Teil der Zeugnisse ja fehlt.

Kultur verstehen — oder gebildet sein, heisst also auch weitgehend die Geschichte kennen, die Gründe und den Urgrund kennen, den Entstehungsweg nachvollziehen können, Verständnis haben können.

Welche Werke haben die Zeit am unbeschadetsten überdauert, sodass wir aus ihnen heute diese Geschichte erfahren können? Die einen Werke verdanken ihre heutige Existenz wohl dem Zufall, die andern aber ihrer Grösse und Mächtigkeit, ihrer Potenz. Man denke an die Pyramiden. Wer wollte sie schon abtragen? Wieder andere sind von Schlamm, Vulkanasche, vom Meer, von Wüste u.a. überdeckt worden und haben dort bis in die heutige Zeit eine Spur hinterlassen, wenn das ihre Potenz zuliess. Denn nur harte, edle Materialien überdauern in unwirtlichen Gegenden. Noch andere haben überdauert, weil sie derart in die Kultur eingeschmolzen wurden, dass sie zum Alltäglichen gehörten — und noch gehören, ohne dass mancher heute noch verstehen kann, warum das so gekommen ist. Es ist einfach so, basta.

Diese genannte Potenzen sind da entstanden, wo die Konzentrationskräfte am stärksten waren, wo am meisten Arbeitskraft vereinigt werden konnte, wo der Wille am mächtigsten war. Der Wille ist aber am mächtigsten, wenn es dem Menschen ans Innerste, Lebendigste geht, ans Religiöse also. Oder wenn er unter extremer Bedrohung aus Angst handelt, also ausgeliefert ist einer andern Macht, z.B. einem Staatsgebilde, das diese Macht verkörpert. Daher sind die alten Zeugnisse häufig auch religiöse Zeugnisse oder Zeugnisse der Macht, wie wir heute zum Teil sehr genau wissen.

Diese Zeugnisse verstehen bedeutet also, dass wir uns erst bemühen müssen, die Weltsicht von damals, als man die Zeugnisse schuf, zu verstehen. Zu verstehen, was den Menschen beeindruckt hat und wieso er sich dann so verhalten hat, dass seine Zeugnisse eben diese Form haben, die wir heute ablesen können.

1.1.5 Vorgeschichtliche Zeugen exakter Mathematik

Dass vorgeschichtlich schon beachtliche Kenntnisse mathematischer Art vorhanden waren, erfahren wir durch Reste von Bauwerken oder die archäologische, die vorgeschichtliche Forschung und auch durch Volkskundegeschichtliches. Abgesehen von Stonehenge und ähnlichen impressionanten Bauten, die offensichtlich sehr genaue Observatorien waren, (Stonehenge: Bauphasen um 3300 v. Chr. und um 1800 v. Chr., vgl. z.B. [?]), finden sich z. B. in Großbritannien Fundamentreste von megalithischen Bauwerken, vielleicht Tempeln, die doch mathematische Rätsel aufgeben. Ebenso in der Gegend von Bayern (mit modernen Methoden aus dem Bereich Physik, Chemie und Biologie). Man findet elliptische Grundrisse (Pfahllöcher etc.) mit Ellipsen, deren Halbachsen zusammen mit der Hypotenuse Pythagoreische Zahlentripel bilden, die man sehr unwahrscheinlich zufällig finden kann. Die Bauwerke waren nach astronomischen Hauptrichtungen ausgerichtet (z.B. zur Ermittlung der Sonnenwende). Zudem steckt in Britannien vermutlich in allen ein gemeinsames Grundmass, eine „megalithische Elle“. Hatte man etwa damals eine Schrift, von der kein Zeugnis mehr vorhanden ist?

Interessanterweise fand man in jüngster Zeit namentlich im bayrischen Raum mit Hilfe von aus der Biochemie resp. der Physik stammenden Methoden Zeugen noch größerer astronomisch ausgerichteter Bauwerke ähnlicher Art.



Abbildung 4: Stonehenge mit Sonne

Sehr eindrücklich sind die Resultate von Forschungen volkskundlicher und linguistischer Art sowie die Verbindung mit Resultaten der experimentellen Urgeschichte und Archäologie. Die unten gezeigten Bilder des Belchendreiecks, der Situation von Basel und ein Ausschnitt des rekonstruierten antiken Stadtplans von Augusta Raurica (in der Nähe vom gallischen Basel) sprechen Bände. (Lit.: Vgl. [?]. „Belchen“ scheint keltisch zu sein, seine Verwendung ist in historischer Zeit nicht bekannt.) Waren keltische Druiden Pate gestanden bei der Gründung dieser Kolonie für römischen Bürger?

Interessant ist, dass der Name „Belchen“ eine unverkennbare sprachliche Verwandtschaft mit „Belenus¹“, dem keltischen (gallischen) Sonnengott hat. Interessant ist weiter, dass die Belchen- und die Blauengerade (vgl. Abbildung Seite 5) sich etwa im heutigen Basler Münster schneiden, einem Gebiet also, das nachweislich schon zu römischer Zeit besiedelt war und innerhalb des Murus Gallicus liegt (Gallische Stadtmauer, an der sogar Brandspuren gefunden worden sind — der Auszug der Helvetier und dann die Rückkehr auf Geheiss Cäsars nach der Niederlage bei Bibracte?). Interessant ist weiter, dass der römische Name der Stadt „Basilea“ auf griechisch Sinn macht: Es bedeutet „Königin“ (die Griechen kolonisierten bis ins Rhoental). Tatsächlich sind auf dem Gebiet der ehemaligen Glasfabrik unweit des Münsterhügels auch keltisch-gallische Gräber mit sehr reichen Goldbeigaben (Halsring etc.) entdeckt worden, die auf hohe Würdenträger deuten (vgl. stehende Ausstellung im Historischen Museum Basel). Die Harmonie, mit der sich sichtlich die prähistorischen Gallier oder Kelten mit den Beziügen des Kosmos und der Landschaft verbunden haben, hinterlässt noch heute einen grossen Eindruck! Man bedenke,

¹ übersetzt mit „hell“, glänzend“

dass die Region während der letzten Eiszeit wahrscheinlich nicht vergletschert war, dass also weit vor 10'000 Jahren dort Menschen leben konnten, als grosse Gebiete Helvetiens noch unter dickem Eis steckten.

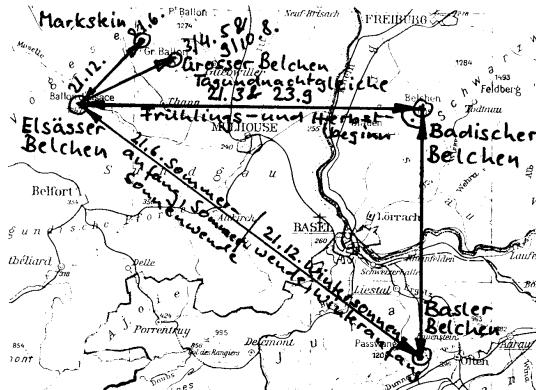


Abbildung 5: Belchendreieck

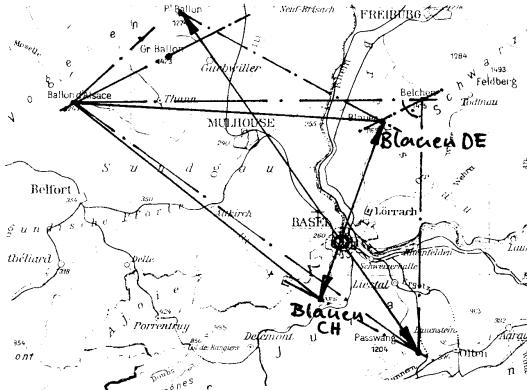


Abbildung 6: Blauendreieck und Lage von Basel

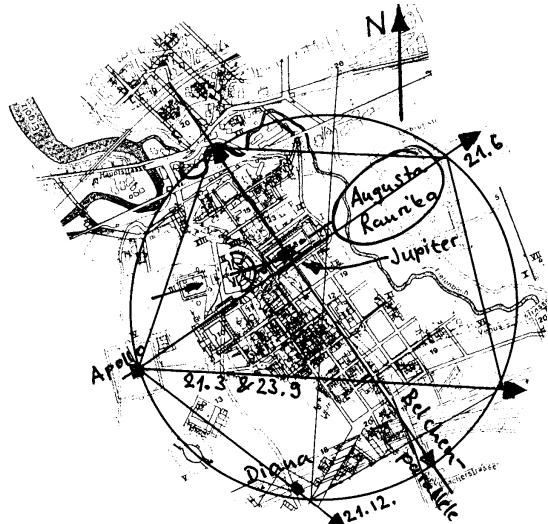


Abb. 7: Plan v. Augusta Raurica

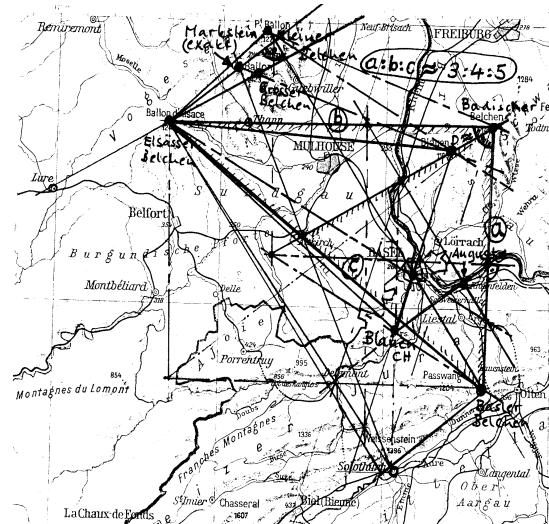


Abb. 8: Weiter im Belchensystem ...

1.2 Die Urfahrungen der Mathematik

1.2.1 Die Methode der Modellierung durch Interpretation der Realität

Es ist nicht sehr schwierig, sich in die damalige Welt einzufühlen, denn die Natur und deren Realität haben sich nicht geändert. Durch „nachfühlen“, oder durch nachempfinden gelingt es uns, zu einer Sicht der Dinge zu gelangen, die eine nachvollziehbare Erklärung für erste mathematische Impressionen liefert, die heute noch unsere Kultur bestimmen und die man bisher meist als gegeben übernahm, ohne sie zu hinterfragen. Wir wollen daher die damals wie heute wirkende Realität durch die Brille der damaligen Möglichkeiten betrachten, interpretieren und so die heutigen Zeugen nachmodellieren.

Da gibt es doch Zahlen in unserer Kultur, die ständig wieder auftauchen, die eigenartigerweise ihre Stellung behaupten und scheinbar kaum erklärbar sind. Da gibt es doch 7 Wochentage, obwohl wir im 10-er-System rechnen. Zudem gibt es 12 Monate statt 10, 7 Bundesräte in der Schweiz (?) statt 10 ??), 2 mal 12 Buchstaben im alten griechischen und lateinischen Alphabet, 12 Halbtöne in einem Abschnitt der Tonleiter u.s.w. Zwar hat man während der französischen Revolution versucht, alles auf das 10 zu eichen,

doch ohne Erfolg. Nachher war wieder die alte Jahresordnung da. Und während der russischen Revolution hat man nicht mehr versucht, die Umstellung aufs 10-er-System in kulturellen Dingen durchzusetzen. Man war weiser geworden. Was hat nun wohl den Menschen bewogen, gewisse Zahlen mehr zu benutzen als andere? Die Einsicht in die Gründe ist nicht schwierig, denn die offensichtlichen Gründe sind immer noch da. Der Jahreslauf ist geblieben. Die Art der Fortpflanzung der Lebewesen ist geblieben. Der Sternhimmel über uns ist geblieben. Die Planeten sind noch da. Die Sonne scheint heute wie damals. Die alten Gebäude stehen noch da, wenn auch stark dezimiert.

1.2.2 Wesentliche Zeitalter mit prägendem Einfluss

Betrachtet man z.B. Bauwerke oder andere Zeugen der Hauptleistungen vergangener Zeitalter, so fällt das immer wiederkehrende Vorhandensein gewisser Zahlen, Zahlenkombinationen, Proportionen und gewisser geometrischer Figuren, Muster oder Körper auf. Die Fachhistoriker reden hier von Zahlemystik und Sakralgeometrie. Der Scheinwerfer der Geschichtsschreibung weist auf die alten Bewohner Mesopotamiens, später die Babylonier sowie die alten Ägypter mit ihren imposanten Bauwerken und Tempelanlagen und ihrem eher mystischen Weltbild. Diese Tradition der Zahlen und der Geometrie setzt sich fort bei den Pythagoräern, die als Haupptgott Apollo verehrt haben, den Gott des Lichtes, auch der Erkenntnis, der Künste, der Musik. Der Einfluss von Pythagoras auf Platon ist unverkennbar. (Platon galt oder gilt als wichtigster Philosoph, je nach Schule. Ihm folgen die Strömungen des Mittel- und Neuplatonismus, z.B. Plotin, 205 –?. Platon ist der Schöpfer der Ideenlehre. Wichtig ist das Höhlengleichnis.) Hier im Griechentum setzt die rationale Erkenntnis ein, die aber die Mystik und das Primat der Religion nicht verdrängen kann. Sie ist jener untergeordnet. Bekannt ist z.B. das delphische Problem: Es sollte mit Zirkel und Lineal, mit den Werkzeugen der Geometrie, dem Apollo ein kubischer Altar gebaut werden, der zu einem gegebenen Altar exakt doppelten Inhalt hat: Das Problem der Kubusverdoppelung ist gestellt, aber zu Ehren des Apoll. Die Bewegung der Pythagoräer hat sich bis in die Spätantike gehalten. Über das wirkliche Ende oder ein verstecktes Fortbestehen wissen wir wenig. Sicher ist jedoch, dass Kaiser Theodosius der Große gegen 400 n.Chr. das Christentum zur Staatsreligion erklärte und sämtliche heidnischen Kulte verboten hat. Vielleicht parallel oder vielleicht in Verbindung mit dem Pythagoräertum hat sich die spätantike Gnosis (→ Gnostiker) entwickelt (von $\gamma\nu\tilde{\omega}\tau\iota\sigma\varepsilon\alpha\nu\tau\delta\nu$, gnoti seauton, d.h., „Mensch erkenne dich selbst“, dem Spruch über dem Eingang zum Tempel des Hauptgottes der Pythagoräer in seinem Hauptheiligtum Delphi.). Und in weiterem Sinne auch parallel dazu entstand die jüdische Kabbalistik. Das Erbe dieser Strömungen finden wir in der sakralen Geometrie und der Zahlsymbolik der Bauwerke des folgenden abendländischen Mittelalters bis zum Spätbarock, dem eigentlichen Höhepunkt und Abschluss der Weiterentwicklung der antiken Baukunst. Dabei ist der Einfluss der Vermittlung der antiken Kultur über die Araber in Spanien unverkennbar. In der Geistesgeschichte folgt auf das Mittelalter, das Zeitalter des Glaubens dann das Zeitalter der Ratio, der Aufklärung, die später dann in Extreme wie Materialismus, extremer Liberalismus und als Folge die Weltkriege führt oder abgleitet. Es erfolgt also eigentlich ein Bruch in der Entwicklung. In der Stilgeschichte drückt sich das durch Klassizismus, Neo-Stile oder Übernahme von Elementen anderer Kulturen aus, jedoch kaum durch Entwicklung. In der politischen Geschichte wird der Bruch parallel durch die amerikanische und die französische Revolution und deren Folgen vollzogen. Erst die Entdeckung neuer Materialien und Techniken führen wieder zu einem Entwicklungsschub. Jedoch in viele verschiedene Richtungen, also gesamthaft eigentlich ziellos, eher weg vom Kosmos, ins Chaos. Doch war das vielleicht immer so. Was überlebt hat, ist eben der Kosmos.

1.2.3 Bedeutung einiger kulturell häufiger Zahlen

Hier geht es darum, zu ergründen, wieso in vielen kulturellen Bereichen gewisse Zahlen so häufig immer wieder vorkommen. Wir wollen hier speziell über die 1, die 2, 3, 4, 5, 7, 10, 12, 13, 24, 28 und 360 nachdenken. Die Bedeutung weiterer Zahlen wollen wir dann darauf stützen.

Vorgängig ist es wichtig, sich daran zu erinnern, wie man sich die Entstehung der Zahlen gedacht hat. Heute denkt man sich ja die natürlichen Zahlen wie Perlen auf einer Schnur aufgebaut. Auf die 1 folgt die 2, auf n folgt der Nachfolger $n + 1$, so in alle Ewigkeit. Daher ist es nicht schwierig, sich vor der 1 die 0 zu denken, und davor die -1 u.s.w.. Diese Vorstellung war aber nicht immer üblich. In der Antike war

die 0 nicht als Zahl akzeptiert. Wieso? Man dachte sich die 1 als Einheit, vielleicht als „Kuchen“ oder als Erde in Form einer Scheibe. (Denn ursprünglich war die Erde, die Welt des Menschen also, wie eine Scheibe, aufgeteilt zwischen den Völkern. Das Nichts ist dem durch die Sinne dirigierten Menschen nicht erfahrbar, die Null war also kein Thema.) Die 2 kann man daraus gewinnen, indem man den Kuchen zweiteilt, also 2 Stücke fabriziert. Die 3 genauso, indem man 3 Stücke fabriziert u.s.w.. So kommt man auch zu jeder natürlichen Zahl. Aber nicht zur 0. Denn die 12 kann nicht in kein Stück geteilt werden. Aber wieso ist denn die Bedeutung der 1 als „Kuchen“ so wichtig? Das soll nun erklärt werden.

Wichtig für die Architektur: *Die alte Zahlsymbolik und Sakralgeometrie hat als Randgebiet der Mathematik und ihrer Geschichte eine grosse Bedeutung für jene, die den Beruf eines Architekten ausüben. Denn ohne die einschlägige Bildung ist es nicht möglich, Projekte zu einem guten Ende zu führen, in denen z.B. die Restauration oder Erhaltung alter Bauwerke mit ihren oft noch vorhandenen eingebauten Kunstwerken oder Landschafts- und Kultur-Bezügen eine Rolle spielen. Da hört man dann oft das Schimpfwort „Tod-Restauration“. Man bedenke z.B., dass ca. 90 Prozent der Menhire und Dolmen, die aus Quellen vergangener Jahrhunderte ersichtlich sind, später als sinnlose „Hindernisse“ von Bauern und Architekten abgeräumt wurden, verloren für immer. Oder Ende des 19. Jahrhunderts bis Mitte des zwanzigsten Jahrhunderts hat man in schweizer Städten oft ganze mittelalterliche Quartiere sowie grössere, weiterum bekannte Kunstwerke abgerissen (Bsp.: Basler Totentanz!), um Platz zu machen für die „moderne Zeit“ und die Grösse ihrer Kunst, die heute, gar nicht sehr viel später, oft als Schandfleck empfunden wird, betitelt mit Ausdrücken wie „Kaiser Wilhelm-Architektur“ oder „Hitler-Architektur“. Die hier zum grossen Teil von Architekten begangene Kulturzerstörung hat hierzulande bekanntlich oft mehr Verluste bewirkt als im nahen Ausland die Weltkriege... Will man alte Werke beurteilen, so muss man sie auch durch die Brille ihrer Zeitbedingungen zu betrachten verstehen. Man muss also die Zeit und das Denken der Zeit kennen und nicht die heutige Denkweise überstülpen. Wichtig ist nun, dass man sich vor Augen hält, dass bis ins Barockzeitalter die Menschen eine Einheit der Weltsicht hatten. Alles war verbunden, verwoben, ganzheitlich wahrgenommen — im Gegensatz zu heute, wo jedes Ding losgelöst von den andern, also analytisch betrachtet wird. Bis ins Barockzeitalter gab es auch den homo universalis, der alles studiert hatte, so wie er noch von Goethe im Faust beschrieben wird. Vielleicht war Leibniz der letzte Universalgelehrte. Nachher beginnt die Zeit der Fachleute, der Spezialisten. Vorher waren aber Philosophie, Mathematik, Astronomie, Religion u.s.w. verwoben, waren ein Aspekt einer einzigen Sache, der Gelehrsamkeit. Daher konnte man nicht bauen, ohne die Religion zu kennen, nicht gestalten, ohne die Zahlsymbolik zu kennen u.s.w.. Und daher werden uns heute all diese Dinge beim Studium der älteren Weltsicht wieder begegnen müssen.*

Die Bedeutung der Eins

Seit Proagoras, dem Sophisten, sieht sich der Mensch als Mass aller Dinge. Vorher war vielleicht der Staat oder die Sippe das Mass aller Dinge, weil sie resp. er das Überleben garantierte. Nun begreift sich der gebildete Mensch als Individuum. Er trennt sich geistig von der Herde, hat Bewusstsein von seinem Bewusstsein, ist Einheit. Im Griechentum sind die Götter nach der Gestalt und den Eigenschaften des Menschen geformt, sind Bilder des Menschen. Im Juden- und Christentum ist der Mensch Bild Gottes, Einheit, unteilbar. Denn nur materielle Einheiten lassen sich teilen und wieder zusammenfügen, das Lebendige, der Mensch nicht: Er ist mehr als die Summe zweier Teile, die durch zerschneiden entstehen, denn er hat neben dem Bewusstsein noch das Leben, das sich nicht teilen lässt. Genauso ist es mit den alten Göttern. Z. B. im alten Ägypten. Der Luftgott Shu trennt Himmel und Erde, die Götter Nut und Geb. Der Sonnengott Re fährt täglich auf seiner Barke über den Himmel, wird mit allen Gestirnen dann von Geb abends verschluckt und morgens wieder ausgespuckt. Dann ist er wieder der selbe Gott, zwar neu geboren, doch keineswegs ein anderer. Hier greift ein Hauptgedanke. Die Sonne ist tagsdarauf keine

andere Sonne. Sie ist nur neu wieder da, ist aber kein anderes Exemplar einer Gattung, ist Individuum, Einheit, eben göttlich. Ebenso Mond und die andern antiken Planeten. Oder auch die Sternbilder. Die Eins als Einheit wird zum Begriff des göttlichen, was dann im Eingottglaube des Abraham oder des Echnaton gipfelt. Auch versteht sich der Mensch als Wesenseinheit, der in vielem die Eins verkörpert: Er hat einen Kopf, einen Verstand, ein Gefühl, ein Wille, nicht zwei. Er will nur einem Herrn dienen, hat ein Herz, einen Magen, ein Streben nach Glück, ein verlorenes Paradis u.s.w.. Und vor allem hat er nur ein Kopf, ein Hirn und einen Mund, mit dem er spricht.

Eins ist die Zahl der Einheit, des Individuums, des lebendigen, mit unteilbarem Bewusstsein begabtem Un teilbarem, das die Erde bevölkert.

Im geometrischen Ausdruck finden wir die Eins symbolisiert durch den Kreis oder die Kugel. Man denke an den Pantheon, den Tempel Roms für alle Götter des Reiches, der als Kirche die Zeit überdauert hat: Er hat die Grundform einer Kugel, in der alle Götter Heimstatt finden. (Diese Toleranz kannte Rom!) Oder an den Tempel des Himmels in Peking, dessen Grundform der Kreis ist. Oder an die Rundtempel in Delphi, Epidauros oder Rom (Vesta). Oder man denke an die Romanik: Der Chor, wo das göttliche aufbewahrt wurde, war rund. Die Kirche sonst jedoch rechteckig. Oder die Rundbogen oberhalb der Türen. Da ist praktisch immer Christus, also Gott dargestellt, während ausserhalb die Heiligen und Könige etc. stehen. In romanisch/gothisch angelegten „Tempelbezirken“ finden wir oft das runde (manchmal auch acht–bis mehreckig–rundliche) Paptisterium vor dem rechteckigen Dom mit dessen runden Apsen (vor dem Eintritt ins Leben, das hier vor dem runden, dem Göttlichen steht). Hier findet die Taufe statt: Das Göttliche tritt in den Menschen ein. Ein eindrückliches Beispiel ist Pisa. Zudem sind die steinernen Taufbecken offensichtlich aus demselben Grunde oft kreisrund (manchmal auch acht–bis mehreckig, jedenfalls praktisch nie quadratisch oder rechteckig). Und interessanterweise ist das in der römischen Kirche zur Kommunion verwendete Brot (Hostie), das Christus beherbergen soll, meist kreisrund. Ebenso sind dies auch die immer wieder abgebildeten Heiligscheine verstorbener Gestalten oder von Christus, ganz im Gegensatz zu den quadratischen Scheinen in den Abbildungen der lebenden Kirchenstifter des Mittelalters.

Der Kreis ist auch die Form der Pupillen des Menschen, durch die seine „Seele spricht“ und die Welt erblickt. Sein wahres Wesen zeigt sich also im Kreis. Und weiter: Nach der Sintflut erschien als Zeichen der Regenbogen, kreisförmig. Ptolemaios war überzeugt, dass der Kreis göttlich sei. Die Planeten konnten sich daher nur auf Sphären bewegen, wenn dazu auch Epizykeln notwendig waren. Aristoteles berichtet über den Philosophen Xenophanes (ca. 565–470 v.Chr.), dass dieser überzeugt gewesen sei, dass es nur einen Gott geben dürfe und dass dieser allseitig gleichartig, also Kugelgestalt haben müsse, wie die Seifenblasen. Die Kugel ist auch die Grundform der Erde selbst, von der schon die Antike wusste, der Sonne und Planeten, der Volvox–Algen–Kolonien u.s.w..

Die Bedeutung der Zwei

Die Zwei entsteht durch die Teilung der Eins, wird geboren aus der Eins, womit die Polarität angezeigt ist. Der Mensch trägt sie in sich durch seine Symmetrie. Er hat zwei Augen und sieht jetzt damit die so verstandene nachparadisische Realität durchaus dual. Es ist seine Sicht, sein Erkennen – oder es liegt a priori in der Natur der Dinge. Da gibt es die dual gebaute DNS in den Bausteinen des Lebens; es gibt Licht und Schatten, Verstand und Dummheit, Gott und Teufel, Himmel und Hölle, Leben und Tod, Wachheit und Schlaf, Adam und Eva, Weib und Mann, links und rechts, oben und unten, warm und kalt, Freund und Feind, Kain und Abel (interpretierbar als sesshaft und Nomade), Stadt und Land, Isaak und Ismail, gefällig und ungefällig, rein und unrein, Jakob und Esau, Sonnenaufgang und Sonnenuntergang, gut und schlecht, u.s.w.. Durch die Erkenntnis (des Objekts durch das vom Objekt getrennte Subjekt Mensch) fällt der Mensch aus der Einheit in die Polarität, die in der Welt draussen regiert. Und in den alten Tempel des Salomon schritt man zwischen zwei ehrernen Säulen durch: Die Polarität musste erlebt werden.

Auch hat der Mensch zwei Hirnhälften, die eher rational denkende meist linke Hälften und die eher dem Gefühl und der Intuition zugeordnete rechte. Zudem hat der Mensch zwei Augen und zwei Ohren, jedoch nur einen Mund, damit er mehr zusehe und zuhöre als schwatze (wie der Lehrer den Schülern ab und zu zu verstehen geben muss). Interessanterweise sind die Glieder, mit denen der Mensch die Welt begreift,

betastet, besieht und höhrt dual angeordnet.

Zwei ist die Zahl der Polarität. Geometrisch gibt es dazu die Symbolfigur des Yin und Yang (zwei Fische bei der Begattung) oder allgemein die Symmetrielinien in beliebigen Figuren. Ältere Sakralbauten haben praktisch ausschliesslich zentrale symmetrischen Grundriss, von dem nur aus baugeschichtlichen oder finanziellen Gründen abgewichen wurde.

Die Bedeutung der Drei

Aus der Polarität, der Zwei, dem Weiblichen und Männlichen, entsteht durch die Zeugung ein Drittes: das Kind. Darauf beruht das Prinzip der Fortpflanzung bei den höheren Lebewesen, in der höheren Natur. So wird der Welt der Mensch erhalten und damit dem Menschen die Welt, so wird der Tod überwunden. Oft wird im Kind auch noch die Manifestation des göttlichen Funkens gesehen.

Interessant ist es hier zu bemerken, dass der Mensch den persönlichen Tod durchaus akzeptiert. Jeder weiss, dass er einmal sterben muss, und selten jemand macht sich desswegen grosse Sorgen. Dass aber die Sippe, die Herde sterben müsste, ist den Menschen der grösste Gräuel, denn die Sippe garantiert das Fortleben in der Erinnerung über den Tod hinaus, und die Liebe zu den Kindern ist oft stärker als die Eigenliebe, sodass sich oft Individuen den Kindern opfern. Die Angst vor dem kollektiven Tod drückt sich aus in den Anti-Bewegungen der Neuzeit: Anti-Atomkraft, Anti-Armee, Anti-Massenvernichtungswaffen u.s.w.. Jedoch nicht Anti-Extremsportarten, nicht Anti-Töff-Fahren, nicht Anti-Pflanzengifte, nicht Anti-Verkehr u.s.w., obwohl im Verkehr oder als Folge von Giften (auch Rauch) schon um viele Zehnerpotenzen mehr Menschen gestorben sind als bei Unfällen z.B. mit Atomkraftwerken. Wenn also der Tod des Individuums auch extrem viel häufiger ist als der kollektive Tod, so ist er doch nicht so schrecklich. (Wenn es jedes Jahr wieder vielleicht 500 Verkehrstote gibt, beachtet das kein lebendiger Mensch. Wenn es aber einmal in fünfzig Jahren in einem einzigen Moment (kollektiv) nur hundert Tote gibt, gibt es auch in allen Medien nichts anderes mehr zu berichten.) Dieses Verhalten scheint alt und dem Menschen angeboren. Schon Macchiavelle rät seinem Fürsten (Lit. „In Principe, Der Fürst“), dass er im Falle eines Konfliktes nach vorhandener Anschuldigung ruhig das Oberhaupt einer Sippe hinrichten lassen dürfe, denn damit habe er keine Rache zu fürchten. Nur eines dürfe er keines falls und nie und nimmer: Nämlich nachher dem Sohn des Oberhauptes das Erbe streitig zu machen. Denn dann habe er die ganze Sippe gegen sich und müsse, ja muss befürchten, schliesslich bekriegt und liquidiert zu werden! Denn das bedroht die Existenz und die Kontinuität der Sippe und kann tödlich enden.

Im alten Ägypten kennen wir entsprechend die Trinität Osiris, Isis und das Horuskind. Das Christentum kennt entsprechend den Vater-Gott, den heiligen Geist und den Sohn, eben Christus, dessen Geburtsfest wir heute an Weihnachten feiern, dem altägyptischen Fest der Geburt des Horus. Interessant ist es zu wissen, dass nach der Völkerwanderung Westeuropa (ausserhalb der gebliebenen römisch-lateinischen christlichen Inseln, z.B. die Gegend von Augst-Basel, wo es immer noch einen Bischof gab) rechristianisiert worden ist von Irland aus, d.h. von irischen Mönchen. Das keltische Irland ist aber vorgängig von koptischen (ägyptischen) Mönchen christianisiert worden, die dort in ihren wiederentdeckten Gräbern ägyptische Symbole hinterlassen haben — und offenbar auch ein gutes Stück ägyptische Kultur ins Christentum getragen haben.

Entsprechend ist es mit Brahma, Vischnu und Shiva im Hinduismus. Oder griechisch-römisch: Die drei über allem stehenden Schicksalsgötter (Moiren, später Parzen).

In der Steigerung findet das Prinzip der Drei in tote Materie, lebendige Welt und göttliche Prinzipien ihren Ausdruck. Auch in die Wissenschaften hielt das Prinzip Einzug: Denken wir an das Dreigestirn Aristoteles als Schüler des Platon und dieser als Schüler des Sokrates. Man findet das Prinzip auch in der belebten Natur: Insektenkörper bestehen aus Caput, Thorax und Abdomen. Oder beim Menschen: Auf und zwischen dem Zweiseitigen (Extremitäten: Beine und Arme sowie Ohren) findet sich der eine Kopf und Rumpf. Zu den Funktionen der beiden Hirnhälften, zu Logik und Induition (Denken und Gefühl) manifestiert sich im Menschen ein Drittes: Der Wille. Erst denken, fühlen und wollen machen den Menschen aus. Ein willenloser Mensch ist wie eine Maschine, die nur noch läuft — oder nicht mehr läuft. Ohne Willen wird der Mensch zum Sklaven. Der Wille wird oft für göttlich gehalten. Erst er macht den Menschen zum Menschen.

Im Pflanzenreich finden wir Wurzel, Stamm und Krone beim Baum etc.. Oder auch Blüten mit drei

Blütenblätter. Drei ist auch die Zahl der Grundfarben (rot, blau, grün). Im Christentum kennt man die drei Weisen aus dem Morgenland, die sich in Astronomie und Astrologie offenbar auskannten und vom nahenden König kündigten. Christus predigte drei Jahre, dreimal krähte der Hahn und dann lag Christus drei Tage lang im Grab. Ebenso feiern wir Weihnachten drei Tage nach dem Wintersonnenwendfest, dem Tag der tiefsten Dunkelheit des Jahres. Zwei mal drei Tage später ist das Fest der beiden Johannes, des Apostels und des Evangelisten. $4 \cdot 3 = 12$ Tage vergehen zwischen dem 25. 12 und inklusive dem 6.1.. Dann kommen die drei Magier (Weise, Könige) aus dem Morgenland. In der Mitte liegt der Beginn des Januars: Der antike Gott Janus mit den zwei Gesichtern hinten und vorn blickt hier in die Vergangenheit und in die Zukunft. Und ein mal drei Tage nach dem Sommersonnenwendfest das Fest des Johannes des Täufers. (Interessant ist es zu bedenken, dass das jenseitsgerichtete Christentum ursprünglich keine Feste besass und solche irdische auch nicht benötigt hat. Nach und nach musste man sich jedoch trotzdem solche verschaffen, um den im spätromischen Volke tief verankerten heidnischen Kulten entgegenzutreten.)

Die Griechen kennen entsprechend das Prinzip der Dialektik: These, Antithese, Synthese. Damit geht es weiter durch neue Paarungen und neuer Zeugungen zu neuen Synthesen. In der Genesis ist dieses Prinzip gespiegelt: Das eine (Gott) zeugt die Polarität (Adam und Eva). Nun sind es drei: Der Zustand ist paradiesisch. Drückt sich etwa diese Spiegelung den Davidstern aus? — Beim Menschen steht zu den beiden Symmetriehälften der eine Rumpf mit Kopf. Diese drei machen das Individuum, das eine aus. Bei der Staatsmacht kennt man in der Neuzeit die Gewaltendreiteilung: Legislative, Exekutive und Justiz. (Eine Ausnahme bildet auch hier die Schweiz, wo das Problem der Unabhängigkeit der Justiz (Verfassungsgerichtsbarkeit) noch immer nicht richtig gelöst ist. Die Akzeptanz neuzeitlicher Prinzipien hat hier schon immer etwas länger gedauert. Beispiele sind die Verbrennung der „letzten Hexe“ (Anna Göldin in Zug), die Ablehnung des gregorianischen Kalenders an gewissen Orten über Jahrhunderte (die letzten in Westeuropa sind zwei Gemeinden der Ostschweiz nach der französischen Revolution!) oder die letzten, die das Frauenstimmrecht eingeführt haben (am Schluss Appenzell durch Gerichtsurteil) sowie die momentan noch andauernde Ablehnung gewisser internationaler Organisationen...) Noch während einem grossen Teil der römischen Kaiserzeit war der Kaiser Gott und die Staatsmacht somit göttlich. Im Mittelalter kannte man die drei freien Stände: Freie Bauern und Bürger, Adlige und Klerus. Die Handwerker durchliefen die Stufen Lehrling, Geselle und Meister. Solche „mittelalterliche Prinzipien“ haben sich im universitären Bildungsbereich oder in den Kirchen z.T. bis heute gehalten.

Bemerkung:

Auf dem Prinzip der Verbindung von Gott und Staat über dem Individuum — oder auch des Gottesstaats — liess sich gut herrschen. Die beiden Mächtigen sind oben, der einzelne klein, unten. Rom hat die Welt erobert, indem es den Völkern die Götter klaute und diese nach Rom, ins Pantheon brachte, dem Tempel aller Götter des Reiches mit der Grundform einer Kugel, der Einheit. Darauf haben die Völker nach Rom gebetet und waren friedlich. Und noch heute träumen viele von der Pax romana. Die Ironie der Geschichte: In zwei Fällen hat das nicht funktioniert: Bei den Juden und den Christen, denn da gab es keinen Gott zu klauen. Titus, ein Sohn aus Aventicum, hat den Judenstaat erobert und zerstört. Mit dem Tempelschatz konnte man in Rom das Kolosseum finanzieren. Die Juden waren zerstreut bis durch Herzog am ersten Zionistenkongress in Basel, nicht weit von Aventicum, der Judenstaat wieder auferstand. Bei den Christen lief es anders: Diese wurden so mächtig und das Gottkaisertum gleichzeitig so schwach, dass Konstantin nichts weiteres mehr übrigblieb als das Christentum zuzulassen und de facto das Gottkaisertum so abzuschaffen, worauf es schliesslich unter Theodosius als Reichsreligion eingesetzt wurde. Der Kaiser war nicht mehr Gott, doch die Macht über die Oberhoheit des Römischen Kultes in den Händen des Pontifex maximus blieb — und zwar bis auf den heutigen Tag. Er ist wohl der letzte römische Beamte im Amt mit einem Titel, den schon Augustus geführt hat. Und ein grosser Teil der Menschheit betet immer noch nach Rom. Das Prinzip des Römerreiches hat das Römerreich überdauert und ist lebendig geblieben. Kultur dauert.

Drei ist die Zahl der Zeugung, des göttlichen Funkens. Man nennt drei die göttliche Zahl. Geometrisch drückt sich die Drei im Dreieck aus: Man denke an das Gibeldreieck der antiken Tempel, in dem die Götter dargestellt waren, also wohnten — oder auch an die Darstellung des Auges Gottes. Auf den alten

Altären der römischen Kirche stand oft der Triptichon, der dreiflügelige Altar. Im Buddhismus kennt man die drei Fahrzeuge auf dem Weg zur Erleuchtung. Die alte Ordnung in Europa kannte drei Stände, war also gottgegeben. (Ein vierter war vogelfrei.)

Die Bedeutung der Vier

Die Verdoppelung der Polarität, der Zwei, führt zur Vier. Die Vier tritt uns in der Natur vor allem im Jahreslauf entgegen: Keimen und Wachstum, Blüte und Fortpflanzung, Frucht und Versamung, dann Rast und Ruhe. Der Zyklus ist in den Breiten der antiken und westlichen Kultur bestimmend für Frühling, Sommer, Herbst und Winter. Noch bei den Römern begann das Jahr mit dem Frühlingsanfang (so ist September der siebte, Oktober der achte, November der neunte und Dezember der zehnte Monat). Parallel finden wir die antiken Elemente und heutige Aggregatzustände Erde (fest), Wasser (flüssig), Luft (gasförmig) und Feuer (plasmatisch), die die Zustandsformen des Materiellen beschreiben. Die alte Psychologie kennt vier Temperamente. Von diesen Dingen sind wir unmittelbar betroffen. Denn wird im Frühjahr nicht gesät, so kann man im Herbst nicht ernten. Hunger ist die Folge. Das Überleben ist in Frage gestellt. Dazu gibt es auch die vier Himmelsrichtungen (Winde), vier Dimensionen von Raum und Zeit, in die der Mensch eingebunden ist, die vier Grundqualitäten der räumlichen Geometrie, in der der Mensch ja lebt (Punkt, Gerade, Ebene Raum), die vier Teile des spätrömischen Reiches, die vier Beine, auf denen die meisten Landtiere auf der Erde stehen, die meistens vier Seiten der Häuser, Wohnungen oder Zimmer der Menschen und auch der meisten Tempel. Die vier Ecken der Türen, Fenster, Eingänge, Ausgänge u.s.w.. Weiter: Im alten Testament des frühen Judentums sind vier Erzengel genannt: Michael, Gabriel, Raphael und Uriel. Das Christentum kennt analog vier Evangelisten. Der Mensch durchschreitet und bearbeitet die Erde mit Hilfe seiner vier Extremitäten. Auch die ersten eindrücklichen Kristallformen sind viereckig (würfelartig): Der Pyritwürfel. Im Jahreslauf kennen wir zudem die vier ausgezeichneten Stellungen der Sonne: Die beiden Solstitionen und Äquinoktien.

Vier ist die Zahl der Materie. Die zugehörige geometrische Figur ist das Quadrat oder das Rechteck. Der untere Teil der antiken Tempel, wo der Mensch seinen Eingang hat, ist — ausser bei Rundtempeln — immer rechteckig. Sogar das Pantheon hat einen rechteckigen Vorbau und weicht nicht von diesem Schema ab. Auch passt der Körper des Menschen exakt ins Quadrat: Bei seitlich ausgestreckten Armen ist die Spanne praktisch exakt der Körperhöhe des stehenden Menschen von Fuss bis Scheitel. Statistische Abweichungen sind klein und mitteln sich aus. In vielen bedeutenden Kirchen existiert im Zentrum die Vierung (z.B. Dome v. Florenz, Siena, Petersdom in Rom u.s.w.). Über dem irdischen, materiellen Quadrat unten erhebt sich die kugelähnliche Kuppel, die den Himmel zeigt (oft ist sie noch entsprechend ausgemalt, z.B mit dem Pantokrator, einer Himmelfahrtszene oder einer Szene im Himmel). Im ehemals byzantinischen Raum ist diese Art der Sakralbauten noch ausgeprägter. Die Grundform ist oft ein Kreuz mit Vierungskuppel. Solche Kirchen heißen daher *Kreuzkuppelkirchen*. Man denke an die Apostelkirche, die Kapnikarea oder die Agii Theodori in Athen oder die Ekatontapiliani auf Paros. Auch die Altäre waren zu allen Zeiten oft viereckig, manchmal sogar kubisch, als Zeichen des Irdischen (manchmal auch rund, jedoch selten). Ursprünglich sind darauf die irdischen Dinge geopfert worden. Der Buddhismus kennt z.B. die vier edlen Wahrheiten von der Entstehung des Leidens. Auch störten vier Übel die kosmische Ordnung, der der Mensch ja so ausgeliefert war und somit Chaos hereinbrach: Die ursprünglich wohl unvorhersehbaren Sonnenfinsternisse, Mondfinsternisse, ein etwaiger dreinehzehnter Vollmond im Jahr und unvorhersehbare Kometen waren somit Unglückskünder. Es mag nachvollziehbar sein, welchen Eindruck diese Ordnung, dieser Kosmos¹, machte und wie erschreckend es war, wenn etwas diese Ordnung störte und das Chaos² die Oberhand gewann. Diese Sichtweise der Unglückskündung blieb bis in die jüngste Zeit, z.B. als 1949 ein Komet den Tibetern ein Unglück ankündigte: Der chinesische Einmarsch (vgl. z.B. [?]).

Ein weiteres Symbol der vier oder der Materie ist das Kreuz. Schon in alten Zeiten bedeutete ans Kreuz schlagen an die Materie heften und da verenden lassen um den Gekreuzigten auch geistig, also über den Tod hinaus zu töten. Die Schweiz trägt das Symbol auf der Flagge, eine Erbschaft vom Christentum. Dieses Symbol ist hier das gemeinsame Dach der Zwinglianer, Calvinisten, Katholiken und vieler

¹Kosmos: Griech. Ordnung

²Chaos: Griech. Unordnung

Freikirchen. Es setzt sich fort im roten Kreuz.

Vier ist auch die Zahl der leiblichen, also materiellen Plagen: Wir kennen vier apokalyptische Reiter: Pest, Krieg, Hunger, Tod. Auch das Paradies auf Erden endete, als zu den drei (Gott, Adam, Eva) sich ein Viertes (die Schlange) gesellte und aktiv wurde. Die Vier ist heute auch die Zahl der genetischen Grundbausteine. Zudem sah Aristoteles vier Ursachen alles Seienden: Stoff (Materie / *causa materialis*), Form (Geometrie, Zustandsform... / *causa formalis*), die Wirkungsursache (Wille / *causa efficiens*) und die Zweckursache (Absicht, Ziel / *causa finalis*)

Interessanterweise ist die Ausbreitung des rationalen, griechischen Geistes auf eigenartige Weise auch mit der Vier verbunden: Nach dem in geistigen Sphären beheimateten Philosophen-Dreigestirn Sokrates, Platon und Aristoteles schreitet der gelehrige Schüler des Aristoteles, der Vierte, kein geringerer als Alexander der Grossen nämlich, zur Tat auf der harten Erde: Er erobert die damalige Welt von Griechenland über Ägypten und Persien bis zum Indus und verbreitet so den griechischen Geist, die Ratio. Manche Gelehrte erklären, dass das im jugendlichen Bewusstsein geschah, der Menschheit ein besseres Denken zu bringen und in der Einheit durch das einmalige Opfer die persische Bedrohung und den griechischen Zwist zu überwinden. Das Ereignis hat die Welt gewiss sehr nachhaltig verändert.

Die Bedeutung der Fünf

Die Fünf ist die Zahl des Menschen, denn sie tritt bei ihm an wichtigen Stellen auf und bestimmt auch seine Proportionen. Wir haben an jeder Hand fünf Finger, an jedem Fuss fünf Zehen, im Kopf fünf grössere Einlassöffnungen und sind gewachsen nach den Proportionen des goldenen Schnittes, der am regelmässigen Fünfeck abgreifbar ist. Und die Fünf tritt auch auf in der Formel zur Berechnung des Verhältnissen des goldenen Schnittes. Der Körper gliedert sich der Länge nach in den gegen den Himmel gerichteten Kopf, den Rumpf, Oberschenkel, Unterschenkel, Füsse, auf denen man steht.

Im Pflanzenreich tritt die Fünf uns bei manchen Blüten entgegen. Man denke an die wilden Rosen (Urrose, Hagenbutte), mit ihren fünf Blütenblättern. Und der junge Mensch besitzt vier mal fünf Milchzähne... Fünf ist auch die Zahl der platonischen Körper (alle Winkel und Kanten gleich, alle Flächen regelmässige n -Ecke.) Die Fünf finden wir auch in der Erweiterung der vier Elemente durch ein geistiges Prinzip: die quinta Essenzia, umgangssprachlich „Quintessenz“. Fünf ist vier plus eins.

Die geometrische Figur, die die Fünf symbolisiert, ist das Pentagramm oder das regelmässige Fünfeck, das durchaus einen Bezug zur materiellen Realität hat: Wenn man nämlich mit einem Papierstreifen statt mit einer Schnur einen gewöhnlichen Knoten macht und diesen dann etwas flach drückt, entsteht das regelmässige Fünfeck. Das Pentagramm war das Erkennungszeichen der Pythagoräer. Fünf ist auch die Zahl der Hauptmodi des Kosmos der Tonarten: Dorisch, phrygisch, lydisch, äolisch (moll) und ionisch (dur). Dazu kommen die Hypo- und Mixo-Tonarten. Auch keltische Druiden sollen es benutzt haben. Später wurde ihm Zauberwirkung zugeschrieben, je nach Sekte gute oder schlechte. So bannt auch Faust den Teufel, indem er ein Pentagramm auf die Schwelle zeichnet. Oder an mittelalterlichen Kirchen findet sich oft an der Tür oder in ihrem Bereich das Pentagramm, offenbar um das Böse zu bannen. In der Gotik liefert das Pentagramm oft den Grundriss der zentralen Teile einer Kathedrale, als Grundschemata einer abstrakten Figur, die die Fachleute heute den „mystischen Leib Christi“ nennen. Auf mittelalterlichen Bildern wird Christus oft mit einer Rose dargestellt, dem Symbol des Menschen. Die Rose ist so auch zum Symbol der Rosenkreuzer geworden... Und der Buddhismus kennt die Wahrheit des Leidens als fünffaches Haften am Irdischen.

Weiter finden wir das Pentagramm als Fünfsterne z.B. auf amerikanischen — und früher auch rot auf sowjetischen Flugzeugen. In der amerikanischen Flagge z.B. sind fünfzig solche Sterne vereint, für jeden Staat einen, neben den dreizehn Balken für die ersten Staaten, die Neu-England-Staaten, die die Revolution gemacht haben. Auch in andern Flaggen sehen wir dieses Symbol. Eingang in die Flaggen hat es wohl über die amerikanische Revolution gefunden, wo, wie später auch in der französischen Revolution auch, die damaligen Maurer-Logen eine gewisse Rolle spielten, die die alte Symbolik bewahrt haben. Später ist das Pentagramm zum Zeichen der Liberalen geworden, wodurch es in die russische Revolution gelangt ist. Denn diese war ursprünglich eine liberale Revolution, bevor der Kommunismus Oberhand nahm.

Die Bedeutung der Sechs

Bei der Sechs wird es erstmals schwierig, in der menschennahen Natur sprechende Beispiele zu finden. Zwar haben Insekten sechs Beine, doch zu den Insekten hat der Mensch keine seelsiche, affektive Beziehung. Sie berühren nur seinen ordnenden Verstand. Der Mensch vertilgt die Insekten mit Agrochemie-Giften in grossen Mengen, ohne dabei Mitleid zu empfinden. Der Mensch hat nie Insekten gepflegt. Er verarbeitet ihre Körper sogar zu Schmuck und trägt sie am Hals. Zur Biene hat der Mensch allerdings eine Beziehung: Sie liefert ihm Nahrung. Die Bienenwaben sind sechseckig. Sie lassen sich dicht packen. Und auch die schönen Bergkristalle, oder die Basaltsäulen. Auch Blüten mit sechs Blütenblätter existieren.

Die Sechs erhalten wir aber aus der Spiegelung der Drei wie oben beschrieben. Im Davidstern (regelmässiges Sechseck) ist die Sechs zum Symbol geworden. Die Sechs ist auch die Anzahl der Arbeitstage in der Schöpfungsgeschichte. Sechs ist auch die Zahl der Regenbogenfarben des einzelnen Regenbogens (rot, orange, gelb, grün, blau, violett), die das weisse Licht ausmachen. Die Verbindung, die Sieben, hier das Lila (purpur), fehlt im einzelnen Regenbogen. In maurischen Ornamenten ist sie wieder aufgeblüht und hat Kunstgeschichte gemacht, parallel zur Acht. Sechs ist die Zahl des Göttlichen und seiner Antithese, seiner Umkehrung — und auch die Zahl der Flächen im Würfel.

Sechs gilt als die vollkommene Zahl, denn bei ihr ist die Summe der Teiler gleich dem Produkt ihrer Teiler ($6 = 1 + 2 + 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$).

Die Bedeutung der Sieben

Über dem Menschen „wölbt“ sich der Sternenhimmel, der wie oben erwähnt so wichtig war. Was sahen die Alten dort oben? — Sicher die Fixsterne, die den Menschen vielleicht wie Löcher in einer grossen Kugel, der Sphäre, erschienen sind, durch die das ausserhalb lodernde Weltenfeuer durchflackert. Die sichtbaren Sterne konnte man gruppenweise zu Bildern vereinigen und so identifizieren. Sie blieben relativ zueinander fix. Doch diese Ordnung wurde durchkreuzt von den immer, nach festen Gesetzen wiederkehrenden Wandelsternen, den Planeten. Wie konnten Löcher in einer Sphäre wandern und keine Spur hinterlassen, durch die das Weltenfeuer brechen konnte? Das konnten nur Götter sein. Und als solche wurden sie in vielen Kulturen verehrt. Sieben waren es an der Zahl: Sonne, Mond, Merkur, Venus, Mars, Jupiter, Saturn. Vor der Erfindung des Fernrohrs im Barockzeitalter kannte man nur diese. Sie bewegten sich rhythmisch auf dem Fixsternhimmel im Zodiac, im Tierkreis. Auf sie war Verlass. Sie brachten zusätzlich Ordung in den Lauf der Zeit, dem der Mensch ausgeliefert ist. Wichtig für die Zeitzählung waren Sonne und Mond. Sie sind die grossen an Mass und sind auch etwa gleich gross unter sich (Finsternisse!). Die Sonne beherrscht den Tag, das Diesseits und ist heller, lässt sich aber schlechter positionieren am Fixsternhimmel. Der Mond beherrscht die Nacht, das Dunkel, das Jenseits, den Schlaf, den kleinen Bruder des Todes. Er ist nicht so hell, dafür aber günstiger zum Positionieren und Ablesen. Sieben ist aber auch die Zahl der wirklichen Regenbogenfarben. Denn die siebte Farbe, das Purpur (oder Lila) entsteht, wenn gleichzeitig zwei Regenbogen erscheinen, einer über dem andern, die so nahe beisammenliegen, dass das Ende des Rots des einen auf das Ende des Violetts des andern zu liegen kommt und sich die Farben mischen.

In der griechisch-römischen Antike bis ins Barockzeitalter ordnete man den Planeten Sphären zu, die sich unabhängig bewegten: Die sieben Planetensphären. Aussen war die achte Sphäre, die Fixsternsphäre. Heute gibt es die sieben Planetengötter nicht mehr. Dafür kennt das Christentum aber die sieben Erzengel (Archangeloi): Michael, Gabriel, Samael, Raphael, Zachariel, Anael, Oraphiel (Uriel). Dazu kennt es aber auch die sieben Todsünden und die sieben Kardinaltugenden. Denken wir auch an die sieben Künste des freien Mannes, die sieben Vokale des griechischen Alphabets, die sieben Zornschalen, die sieben Plagen, das Buch mit den sieben Siegeln, die sieben Chakras u.s.w.. (Die sieben Künste des freien Mannes (artes liberales) sind das Trivium (Rhetorik, Grammatik, Dialektik) und das Quadrivium (mitin die Mathemata des Pythagoras: Arithmetik, Geometrie, Astronomie, Harmonik). Dagegen stehen die mechanischen Künste (artes mechanicae).)

Es ist bekannt, dass im alten Ägypten eine Planetenastrologie entstand, in Mesopotamien jedoch eine Tierkreisastrologie, die dann später verschmolzen. Bedenken wir, dass die Genesis (1. Buch Moses) nach dem Exodus aus Ägypten entstand. Die Schöpfungsgeschichte zählt im Vergleich sieben Tage, sechs Arbeitstage und einen Ruhetag. Sieben ist daher auch die Zahl der Schöpfung. Sie ist gleich drei plus vier,

also die göttliche Trinität vereint mit der materiellen Welt. Die Schöpfung ist vollkommen, denn die Zahl der Planeten ist unveränderlich — ausser, wenn, oh Unglück, ein Komet erscheint. Auch Salomon baute seinen Tempel in sechs Jahren. Im siebten ruhte er. Die Sieben als Zahl der Planeten ist auch die Zahl der Wochentage, die Planetengötter geweiht waren. (Die Namen erkennt man heute noch: Sonntag, Montag, Mardi (Mars), Mercredi (Merkur), Giovedi (Giove (Jovem), Jupiter), Venerdi (Venus), Saturday (Saturn).) Die Sieben war dem Apollo geweiht, von dem manche Dinge erzählt werden, die die Sieben betreffen. In den auf Pythagoras zurückgehenden Tonleitern gibt es sieben wiederkehrende Ganztonsschritte. Z.B. bei Dur (äolisch) drei plus vier, durch einen Halbtontschritt verschmolzen (von \bar{c} bis c : $c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow f \rightarrow g \rightarrow a \rightarrow h \rightarrow c$). Der Mensch hat entsprechend der Himmelssphäre sieben Öffnungen im Körper, durch die er Stoff und Töne aufnimmt oder abgibt. Im jüdischen Tempel stand der siebenarmige Leuchter. Ebenso ist Sieben die Zahl der (antiken) Weltwunder. Man redete zwar von weiteren Weltwundern, da es weitere Bauwerke auf Erden gab, die weltwunderverdächtig waren. Das „achten Weltwunder“ z.B. war die Mole des Polykrates (Zeit des Pythagoras) in Pythagorion auf Samos, die heute noch imposant den Hafen säumt. (Polykrates liess auch in der damaligen Zeit der Bronze-Werkzeuge den 1.2 km langen, mannshohen Tunnel durch den Kalksteinberg meisseln, um so eine Wasserleitung zu bauen — Zustände, die die Flucht des Pythagoras nach Ägypten verständlich machen.) Es gibt aber auch die sieben Zwerge und bei uns die sieben Bundesräte. In Grimms Märchen erscheint überhaupt die Zahl sieben oft: Neben den Zwergen gibt es die sieben Geisslein, die sieben Schwäne und die sieben Raben. Der erwachsene Mensch besitzt vier mal sieben Zähne, bevor er die „Weisheit“ erlangt, d.h. die Weisheitszähne bekommt. Geometrisch ist das regelmässige Siebeneck das Symbol der Sieben. Wenn man aber um einen Kreis sechs weitere Kreise geschlossen gruppiert, so erhält man mit sieben Kreisen eine regelmässige Figur, die geschlossen ist. Sieben Kreise bilden hier eine Einheit.

Die Bedeutung der Acht

Zwei mal die Vier oder viermal die Zwei ergibt die Acht. Die Acht finden wir eher in maurisch–arabisch–byzantinischen Raum verkörpert als im Westen. Das Oktogon ist Grundriss nur weniger sakraler Bauten im Abendland: Z.B. der Dom Karls des Grossen in Achen (Karl sollte die Tochter des byzantinischen Kaisers heiraten), San Vitale in Ravenna (byzantinischer Einfluss) und die Klosterkirche der Antoniterinnen von Ottmarsheim am Rhein bei Mühlhausen oder Basel. Achteckige Bauwerke begegnen uns auch ab und zu in Paptisterien (Beispiel: Florenz). Der achtseitige Grundriss kann übrigens aus dem Grundriss der im byzantinischen Raum verbreiteten Kreuzkuppelkirche einfach dadurch gewonnen werden, dass man aussen Sekanten ans Kreuz legt, die Mauer diesen Sekanten entlang führt und so die nach innen führenden längern Mauern verkürzt. Das ergibt mehr Innenraum, weniger Mauerwerk, jedoch mehr Dach.

Acht ist auch die Zahl der Beine der Spinnen. Aber auch die Zahl der Pfade zur Aufhebung des Leidens im Buddhismus. Die Acht war die Anzahl Sphären mit der Fixsternsphäre. Im Babylonischen war sie schon bedeutsam, wo es sieben Höllen, aber acht Paradiese gab. Im Islam tragen acht Engel den Thron Gottes. Acht ist auch die Zahl der geteilten Windrichtungen und des Inhalts des Kubus, der der Einheitskugel umschrieben werden kann, also der „Wohnung“ der Kugel. Die Kaaba (arab. Würfel) in Mekka, das zentrale Heiligtum des Islam und Ziel von Pilgerfahrten, das der schwarze, einst „vom Himmel (aus dem Paradies) gefallene Stein“ (Meteorit) beherbergt, ist würfelförmig. Er hat acht Ecken – gleichviele Ecken wie z.B. auch der Felsendom (Moschee) auf dem Tempelberg in Jerusalem im Grundriss. Andererseits findet man in Athen auf der römischen Agora noch den achtseitigen, 12 Meter hohen Turm der Winde. Er zeigt die acht Windrichtungen mit den acht Windgöttern Athens: Boreas, Kaikias, Apeliotes, Euros, Notos, Lips, Zephiros und Skiros. Im 1. vorchristlichen Jahrhundert soll er vom Astronomen Andronikos Kyrrhestes errichtet worden sein. Er hat im Innern eine Wasseruhr beherbergt, die es erlaubt haben soll, die Stunden abzulesen. Unter den Friesen kann man heute noch die Überreste von Sonnenuhren sehen. Das Dach bildet eine achtseitige Pyramide. Acht bedeutet hier offensichtlich die Windrose mit ihren Zwischenrichtungen. Interessanterweise sind die Kanzeln in christlichen Kirchen oft achtseitig: Damit das verkündete Wort sich in alle acht Windrichtungen ausbreitet? Oder ein Paptisterium wie auch ein Taufstein: Acht ist Sieben plus eins, in die Schöpfung soll hier der Geist einkehren.

Neben den sieben Fixsternsphären gab es nach dem aristotelischen und ptolemäischen Weltbild etwa bis zu Kepler die acht Sphäre, die Fixsternsphäre, durch deren Löcher man das Weltenfeuer flackern sah.

Alle Sphären aber drehten um die Erde in ihrem Zentrum. Da zur Aufrechterhaltung der Drehbewegung und zur zeitweiligen Rückwärtsbewegung (resp. die Epizyklen der Planeten) keine Kraft ersichtlich war, gab es nur eine Erklärung: Gott selbst musste die Kraft liefern. Weil die Planetenbewegung eine Tatsache ist, hatte man damit einen „Gottesbeweis“. Wer daher am geozentrischen Weltbild zweifelte, stellte somit die Grundlage des Glaubens in Frage, musste also ein Ketzer sein oder handelte unter Eingebung des Teufels. Vor diesem Hintergrund sind die Hexenprozesse gegen Gelehrte wie Giordano Bruno oder Galilei verständlich. Galilei wurde erst um die Jahrtausendwende rehabilitiert...

Die Bedeutung der Neun

Zur Neun ist es schwierig, in der Natur eindrückliche Beispiele zu finden. Neun ist drei mal drei. Odysseus war neun Jahre unterwegs, Christus starb zur neunten Stunde. Das Christentum kennt neun Engelhierarchien (nach Dionysius Areopagita, Schüler des Paulus). Die zehnte Stufe ist dann der Mensch. Im indo-germanischen und nördlichen Bereich ist die neun bedeutender (neun dunkle Monate etc.).

Die Bedeutung der Zehn

Zehn ist das abgerundete Ganze: Wir haben zehn oder zweimal fünf Finger, wo sich einfach abzählen lässt und zehn Zehen. Zehn ist die Grundzahl des Dezimalsystems in dem schon die alten Ägypter rechneten. Unsere Kultur kennt heute zehn Ziffern, die aber aus dem indisch-arabischen Kulturraum stammen und die griechische und lateinische Ziffernschreibweise verdrängt haben. Schuld daran mögen vielleicht die Übersetzungsschulen Toledos im Mittelalter sein. Die kulturelle Bedeutung der Zehn ist aber älter als der Kontakt zwischen Muselmanen resp. Mauren und Christen.

Nach dem Exodus aus Ägypten übergab Gott auf dem Berg Sinai die zehn Gebote. Bekannt sind auch die zehn Plagen im alten Ägypten, als der Pharao das Volk Israel nicht ziehen lassen wollte. Im alten Judenstaat waren auch die zehn ausländischen Städte bekannt, wo es jüdische Minderheiten gab. Zehn ist zudem die Zahl der Tetraktys, einer „dreieckigen Zahl“: Auf vier Steinen liegen drei, auf den drei dann zwei, auf den zwei dann einer. Bei ihr schworen die Pythagoräer. Man kann die Figur von drei Seiten her betrachten: Sie ändert die Gestalt nicht. Zehn ist die vollkommene Zahl. Der kabbalistische Sefiroth-Baum (Baum des Lebens) besteht aus zehn Elementen. An Engel-Hierarchien mit dem Menschen gibt es zehn. Zehn ist auch sieben plus drei (Schöpfung und göttlich). Als geometrische Figur steht das regelmässige Zehneck, in dem auch der goldene Schnitt steckt.

Interessant ist auch die Zehn im Kirchenjahr. Vierzig oder vier mal zehn Tage nach Ostern ist Auffahrt: Nach altem Denken die „pythagoräische“ Vollkommenheit auf Erden, der materiellen Welt. Und wieder zehn Tage später, wieder eine Vollkommenheit weiter ist Pfingsten, Pentecoste. Man beachte „pente“, griechisch fünf. Griechisch, denn das Zentrum des Römerreiches zur Zeit der Einführung des Christentums war nicht Rom, sondern Konstantinopolis, die Polis, die Stadt des Konstantin des Grossen, das spätere Byzanz (Istanbul nach der Eroberung durch die Türken). Der im heutigen Nisch (Naissus) geborene Konstantin, der anfänglich in Trier residierte, war es ja, der das Christentum zugelassen hat (Edikt von Mailand).

Die Bedeutung der Elf

Elf war wahrscheinlich die ursprüngliche Tierkreiszahl. Eines der Zeichen steht immer hinter der Sonne. Elf sind „sichtbar“. Auch sind elf Jünger „intakt“ geblieben. Weiter ist es schwierig, auf beeindruckende Weise die Elf in der Natur abzulesen.

Interessantes aus der Gegenwart: Am 11.9.2001 fand der Angriff auf das World trade center statt. Exakt $9 \cdot 11 = 99$ Tage später meldeten die Medien (mit Betonung der 99) das Ende von Al Kaida in Afghanistan: Tora Bora war erobert. Er erwächst jetzt die Frage, ob jemand hier den „Krieg der Symbole“ führt. Vielerorts beginnt die Fasnacht am 11.11.. 11 ist auch die „Solothurnerzahl“.

Die Bedeutung der Zwölf

Normalerweise zeigt das Jahr zwölf Vollmonde und Neumonde resp. zwölf Mondphasen. Doch manchmal sind es — oh Unglück — dreizehn Vollmonde. Vollmonde und Tierkreis harmonieren dann nicht mehr: Es herrscht Chaos! Die alten Babylonier und Juden rechneten nach Monden (Mondkalender). Da von Vollmond zu Vollmond ca. 28 Tage vergehen, gleich wie beim Zyklus der Frau, war mit dem Mond ein Rhythmus gegeben, der die Kalenderzeit bestimmte. Zwar ist die Einteilung des Tierkreises (Zodiac) in zwölf Sternbilder nicht logisch abzuleiten, doch wenn der Vollmond der Taktgeber ist, so wandert die Sonne im Takt des Mondes in zwölf Stationen im Jahr durch den Fixsternhimmel. Der Tierkreis musste so in zwölf Abschnitte eingeteilt werden. Der schon in uralten Zeiten bekannte Tierkreis muss also recht beeindruckt haben. Die Babylonier entwickelten eine Tierkreastrologie. Am Tierkreis war ablesbar, dass sich die Fixsternsphäre täglich einmal über der Welt, der Erde drehte und dass je nach Jahreszeit andere Tierkreisbilder am Abend im Zenit stehen. Pro Jahr kommen alle Tierkreisbilder einmal dran, eines nach dem andern, rhythmisch. Und dann sah man die Planeten, d. h. die Wandelsterne. Seit der geschichtlichen Zeit waren bis in jüngste Jahre nur deren sieben bekannt. Wobei der Mond, damals einer der Planeten, im Jahr wie erwähnt meistens zwölf, manchmal aber auch dreizehn mal die bekannten Phasen durchlief, synchron den Frauen: Der Mond musste gewiss weiblich sein (ausser im Deutsch). Dann die Kometen, die unvorhersehbaren, die den kosmischen Rhythmus störten. Und dann noch die Sonnen- und Mondfinsternisse, ursprünglich wohl auch unvorhersehbar, was wiederum die kosmische Ordnung störte, der der Mensch ja so ausgeliefert war. Es mag nachvollziehbar sein, welchen Eindruck diese Ordnung, dieser Kosmos¹, machte und wie erschreckend es war, wenn etwas diese Ordnung störte und Chaos² hereinbrach. Chaos konnte sein: Ein Komet, ein 13. Vollmond, eine Sonnenfinsternis, eine Mondfinsternis. Das hat Unglück bedeutet. Diese Sichtweise blieb bis in die jüngste Zeit, z.B. als 1949 ein Komet den Tibetern ein Unglück ankündigte: Der chinesische Einmarsch (vgl. z.B. [?]).

Das Jahr hatte also zwölf Mondmonate, Israel (Jacob, der sein Weib aus Mesopotamien hat hohlen müssen) zwölf Stämme. Einer (Joseph), oh Unglück, das sich zum Glück wandelte und dann wieder zum Unglück, wurde nach Ägypten verkauft. Jesus hatte zwölf Jünger. Und oh Unglück, eigentlich waren es dreizehn, denn einer musste ausgewechselt werden (Judas, Paulus). Das Christentum kennt zwölf Patriarchen, die Tonleitern des Pythagoras zwölf Halbtonschritte, aus der sieben Töne ausgewählt werden. Auch die Anzahl der Tonarten, heute Kirchentonarten genannt, waren abschliessend zwölf. Der lichte Tag hat entsprechend zwölf Stunden, ein rundes „Dutzend“. Zwölf ist vier mal drei oder drei mal vier (göttlich in allen Winden) oder auch sieben plus fünf (Schöpfung und Mensch). Das himmlische Jerusalem hat Zwölf Tore. Das alte hebräische Alphabet hat zweiundzwanzig Konsonantenschriftzeichen: Die drei Mütter, die sieben Doppelkonsonanten und die zwölf einfachen Konsonanten. Zwölf ist die Zahl des Kosmos, der jedoch nicht vollkommen ist, da er wie beschrieben manchmal gestört wird. Geometrisch findet die Zwölf ihre Entsprechung im regelmässigen Zwölfeck.

Zwölf ist auch eine „Eckzahl“ im Rechensystem der alten Babylonier, die offenbar im sechziger System gerechnet haben. Fünf mal zwölf ist sechzig, der Mensch im Kosmos. Noch heute rechnen wir mit dem Dutzend und kaufen z.B. die Eier (die alten Fruchtbarkeitssymbole der Artemis) in Halbdutzendschachteln.

Interessant ist dazu noch folgendes Phänomen der geometrischen Natur: Klebt man um einen Tennisball im Zentrum (Meister) weitere Tennisbälle, die sich nachbarlich sowie das Zentrum berühren sollen, so gelingt es, genau zwölf Tennisbälle zu einen zentralen anzuordnen. Doch die Packung ist nicht ganz dicht. Es ist noch Platz vorhanden. Doch ist es unmöglich, einen Dreizehnten zerstörungsfrei zu plazieren! Zwölf ist auch die Zahl der Kanten im Würfel.

Bemerkenswert ist noch ein Phänomen aus der deutschen Sprache (wie auch aus gewissen andern Sprachen): Für die Zahlen eins, zwei, drei bis zwölf haben wir eigene Zahlwörter. Aber ab dreizehn (und nicht ab zehn nach der Art unseres Positionssystems) werden die Zahlwörter zusammengesetzt.

Eine interessante Anmerkung: Ein Mondmonat dauert etwa 29.5 Tage. Das Mondjahr dauert demnach $12 \cdot 29.5 = 354$ Tage, Das Sonnenjahr dagegen etwa $365 + \frac{1}{4}$ Tage. Da ein angebrochener Tag auch zählt, sind es 366 Tage. Das *ideale Jahr* liegt in der Mitte und hat 360 Tage. Zwischen Mond- und Sonnen-

¹Kosmos: Griech. Ordnung

²Chaos: Griech. Unordnung

jahr liegen die 12 geweihten oder heiligen Nächte, beginnend mit Weihnachten (Plural!) und endend mit Epiphania (d.h. „von oben“, das Dreikönigsfest). Dazwischen beginnt der Januar: Janus, zweigesichtig, blickt voran und zurück.

Man muss wissen, dass Christi Geburt erst seit dem Jahr 354 an Weihnachten (25. Dezember) gefeiert wird. Weihnachten war für die Christen erst eine heidnische Unsitte (um diese Zeit ist das altägyptische Fest der Geburt von Horus, dem Sohn von Isis und Osiris). Erst wurde die Geburt Christi nicht gefeiert. Dann begann man sie trotzdem zu feiern: Erst im März, dann im April, dann im November, und heute ist es im Dezember.

Die Bedeutung der Dreizehn und weiterer Zahlen

Die Dreizehn wurde bereits erwähnt. Im Tarotspiel bedeutet sie der Tod: das Unglück.

In der Natur ist es nun schwierig, weitere einleuchtende Beispiele für die Dreizehn und weitere Zahlen zu finden. Interessant ist noch das kleinste pythagoräische Zahlentripel: Einen rechten Winkel können wir bekanntlich mit einer Schnur wie folgt herstellen: Wir knüpfen dreizehn Knoten mit gleichen Abständen. Dann erhalten wir zwölf Abstände. Legen wir den ersten und den dreizehnten Knoten aufeinander, so können wir ein gleichmässiges Zwölfeck oder ein rechtwinkliges Dreieck spannen mit den Seitenlängen drei, vier und fünf. Berechnen wir die Harmonie des Zwölfecks umgekehrt wieder auf, so erhalten wir wieder dreizehn Knoten im unharmonischen, zerlegten Zustand.

Weiter gibt es neben den fünf vollkommen regelmässigen platonischen Körpern dreizehn halbregelmässige archimedische Körper. (Noch weniger regelmässig sind dann die 92 Johnsonkörper.)

Wir besprechen nur noch kurz die folgenden Zahlen, obwohl es noch viele interessante gibt:

Die Bedeutung der Einundzwanzig

Als Produkt von drei und sieben, dem Göttlichen in der Schöpfung, ist die Einundzwanzig interessant. Ist es Zufall, dass im gregorianischen (heutigen) Kalender der Frühlingsanfang (Jahresbeginn in der Antike, Frühjahrsäquinoktium) auf den 21. März, der Sommeranfang (Sommersolstitium, längster Tag) auf den 21. Juni und der Winteranfang (Wintersolstitium, kürzester Tag) auf den 21. Dezember gesetzt wurde? Und dass nach dieser in der Realität stattfindenden tiefsten Nacht dann im im Kirchenkalender drei Tage vergehen (drei, „das Göttliche wirkt“) bis zum heiligen Abend (Weihnachten), wo dann das „Licht der Welt“ in dieser tiefen Finsternis zu leuchten beginnt, d.h. die Geburt Christi gefeiert wird?

Die Bedeutung der Zweiundzwanzig

Die Zweiundzwanzig ist wegen ihrer Symbolik bedeutsam. Als ursprüngliche Zahl des hebräischen Alphabets ist sie uns schon begegnet. Auch wird sie im Zusammenhang mit der hermetischen Tradition (nach dem (?) chaldäischen Mystikers Hermes Tris Megistos, dem Schöpfer der Tabula Smaragdina) erwähnt. Die Zahl taucht dann in der grossen Arcana, den 22 bedeutenden Karten des heutigen Tarotspiels auf. Die Zahl ist auch die Anzahl der Schöpfungswerke, der Bücher des alten Testaments und der Tugenden Christi. Auch kennt das Avesta zweiundzwanzig Gebete.

Die Bedeutung der Vierundzwanzig

Vierundzwanzig als zwölf plus zwölf ist die Zahl der Stunden des lichten Tages und der Nacht, also des heutigen vollen Tages mit seiner Polarität. Es ist auch die Zahl der Vollmonde und Neumonde (Halbmonde) im Jahr, wenn nicht ein Unglück geschieht. Die Babylonier haben die Vierundzwanzig zu einer Grundzahl des Systems gemacht, in dem sie gerechnet haben. Und die alte Elle wurde nach vierundzwanzig Fingerbreiten bemessen. Auch kannte das griechische und ebenso das ursprüngliche lateinische Alphabet vierundzwanzig Buchstaben. (Im Latein gibt es das W und die Unterscheidung I-J nicht.) Auch hat man in der alten, noch nicht temperierten Stimmung, wo z.B. fis und ges noch nicht dasselbe waren, eben nicht zwölf sondern vierundzwanzig Halbtönschritte. Wenn man jetzt weiß, dass die alten Griechen die Zahlen durch Buchstaben ausgedrückt haben, versteht man, dass Musik Klang gewordene Zahl bedeutet. (Den

Pythagoräern schreibt Aristoteles die folgenden Aussprüche zu: "Der Himmel ist Harmonie und Zahl". Oder: "Die Dinge sind durch Nachahmung der Zahl." Kurz: "Alles ist Zahl." Zahl bedeutet hier, in diesem Umfeld, "rationale Zahl".) Pythagoras sah in der Vierundzwanzig die Gesamtheit der Glieder des Himmels. Weiter: Das hebräische Alphabet soll ursprünglich zweieinhalb Buchstaben gehabt haben (Elf Tierkreiszeichen.) Doch heute sind es ohne die Füllbuchstaben und die Varianten an Wortenden auch vierundzwanzig.

Vierundzwanzig als zwei mal zwölf (Stunden!) ist die Zahl der grossen Harmonie zwischen Himmel und Erde. Die Zahl tritt in der Apokalypse auf. Dort erscheinen die vierundzwanzig Ältesten, die die doppelte Harmonie der Priester und Könige verkörpern.

Die Bedeutung der Achtundzwanzig

Achtundzwanzig ist die ungefähre Anzahl Tage im Monat von Vollmond zu Vollmond. Ebenso ist es die Anzahl Tage des Zyklus der Frau. Das mag beeindruckt haben. Zudem ist Achtundzwanzig gleich vier mal sieben: Die Schöpfung in allen Winden. Die Übergänge von Vollmond zu Halbmond zu Neumond zu Halbmond zu Vollmond lassen sich wohl unterscheiden. Die Tage eines solchen Übergangs (oder Phase) harmonierte mit der Planetenzahl. Das ergibt die Woche. Die vier Phasen des Mondes sind vollkommen. Der Mond wandert in einem Zyklus auch durch achtundzwanzig Sterngruppen.

Achtundzwanzig ist die Mondzahl. Das arabische Alphabet kennt achtundzwanzig Buchstaben, in denen der Koran, d.h. „Gottes Wort“, aufgezeichnet ist.

Es gilt auch: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$. Das ist die „Summe aller Tage“.

Interessanterweise gibt es auch genau 28 einfache konvexe Körper aus regelmässigen Vielecken (d.h. Körper, die nicht durch einen einzigen Schnitt wieder in regelmässige Teilkörper zerlegbar sind).

Die Bedeutung der Dreissig

Dreissig hat eine symbolische Bedeutung. Moses und Christus begannen ihr öffentliches Wirken mit dreissig. Judas verriet Christus um dreissig Silberlinge.

Die Bedeutung der Dreunddreissig

Dreunddreissig hat ebenso eine symbolische Bedeutung, vielleicht auch als drei mal elf. Christus lebte dreunddreissig Jahre. Im islamischen Paradies ist dreunddreissig das ideale Alter. Dantes Divina Commedia besteht aus hundert Gesängen: vierunddreissig resp. dreunddreissig plus einer über die Hölle, dreunddreissig über das Fegefeuer und dreunddreissig über den Himmel.

Die Bedeutung der Vierzig

Vierzig hat ebenfalls symbolische Bedeutung. Wer kennt nicht Ali Baba und die vierzig Räuber? Wie war das mit dem vierzig-tägigen Regen bei der Sintflut? Christus fastete vierzig Tage lang in der Wüste, Die Zeit vom Exodus bis zur Erbauung des Salomonischen Tempels beträgt zwölf Generationen zu vierzig Jahren, das Volk Israel wanderte vierzig Jahre in der Wüste, Moses weilte vierzig Tage auf dem Berg Sinai, Christus ruhte vierzig Stunden im Grabe. Etc. etc.. Vierzig ist die Zahl des Wartens, der Vorbereitung. Wir können die Zahl symbolisch deuten als zehn mal vier, also die pythagoräische Vollkommenheit auf Erden — ohne den Menschen, ohne die Vollendung. Das Warten auf die Vollendung findet statt. Zwischen und inklusive Ostern und Pfingsten liegen vierzig Tage.

Es lassen sich noch sehr viele Beispiele anführen, vor allem aus dem Islam. Man kann vierzig symbolisch ausdeuten als vier mal zehn gleich acht mal fünf — oder auch als achtundzwanzig plus zwölf. Dies sei hier dem Leser überlassen.

Die Bedeutung der Sechzig

Sechzig ist eine der zentralen Zahlen antiker Zahlensysteme: Wir kennen sechzig Sekunden pro Minute, sechzig Minuten pro Stunde. Sechzig ist die erste grosse Einheit oder Grundzahl des babylonischen Zahlensystems. Sie ist die Zahl des höchsten Gottes der Babylonier, des Himmelsgottes Anu. Mit dem Zirkel teilen wir den vollen Kreis in sechs gleiche Winkel zu je sechzig Grad. Das gleichseitige, „göttliche“ Dreieck besitzt drei sechzig-Grad Winkel. Sechzig ist drei mal fünf mal vier: Das Göttliche im Menschen auf Erden (in der Welt, der Materie).

$60 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \rightsquigarrow$ „Der Mensch in der Welt, die Welt in Gott“.

Die Bedeutung der Dreihundertsechzig

Dreihundertsechzig ist die Anzahl Tage im Idealjahr. Das Sonnenjahr ist im Gegensatz zum Mondjahr schwierig festzustellen, da man nicht einfach Vollmonde zählen kann, sondern ziemlich exakte astronomische Beobachtungen machen muss (Sonnenwenden, d.h. Solstitionen (die beiden Johanni-Feste im Kirchenjahr) und Tag-und-Nachtgleiche, Äquinoktien, Frühlings- und Herbstopunkt.). Dreihundertsechzig ist drei mal zehn mal zwölf: Vollkommen mal das Göttliche im Kosmos. Noch heute verwenden wir gerne die Einteilung des vollen Winkels in dreihundertsechzig Grad oder „Tage“, wie man jetzt sagen könnte. Pro Tag rückt die Sonne um etwa ein Grad vorwärts im Tierkreis. Die Stunde hat entsprechend noch heute zehn mal dreihundertsechzig Sekunden. ($10 \rightsquigarrow$ ägyptisch, $10 \cdot 360 = 60 \cdot 60 = 3600 \rightsquigarrow$ babylonisch)

Die Bedeutung weiterer kulturgeschichtlich und architektonisch interessanter Zahlen soll hier aus Gründen des Rahmens nicht weiter diskutiert werden. Ebenso die Ausweitung und Aufbrechung der ruhenden Formen des Kreises und der regelmässigen n -Ecke in der Barockzeit, die der Mensch wohl als Ausweitung des Bewusstseins verstanden hat. Interessant ist, dass im Spätbarock dann auch konsequenterweise die Ellipse in den Spielformen der Architektur auftaucht, nachdem sie den Kreis resp. die Sphäre im naturwissenschaftlichen Weltbild verdrängt hatte. Denn waren bei Kopernikus die Planetenbahnen noch Kreise, so sind diese bei Kepler jetzt Ellipsen, die in den Keplerschen Gesetzen genau beschrieben werden. Eindrückliche Beispiele von Anwendungen der Ellipse in der Architektur gibt es viele (vgl. z.B. ??). In diesem Zusammenhang sei auch auf die „Perle des Spätbarock“ oder Rokoko hingewiesen: die Wieskirche in Bayern, wo die Ellipse auch andeutungsweise vorliegt. (Als Beispiel aus dem antiken Hellenismus ist das Kolosseum bekannt.) Man sieht, dass die Weltsicht auf die Architektur prägend wirkt.

Das Weltbild spiegelt sich in den Ausdrucksformen der Architektur.

Ausgedehntes Bildmaterial: Vgl. Materialien zur Architektur.

Kurze Übersicht

Zahl	Symbolgehalt
1	Einheit
2	Polarität
3	Göttliche Zahl
4	Materie
5	Mensch
6	Vollkommenheit
7	Schöpfung
:	:
10	Abgerundetes Ganzes
12	Kosmos
13	Unglück, Tod
24	grosse Harmonie
28	Mondzahl
40	Warten
60	1. grosse Einheit
360	Idealjahr
:	:

1.3 Notizen zu den Ursprüngen unserer Geschichte

Das was wir Geschichte nennen, beginnt mit dem Vorhandensein erster schriftlicher Zeugnisse, d.h. von Dokumenten.

1.3.1 Keilschrift

Erste schriftliche Zeugnisse stammen aus der Bronzezeit, ca 3300 v. Chr.. In Mesopotamien kennen wir die sumerischen Stadtstaaten Kisch und Ur. Im südlichen Babylonien, zwischen Euphrat und Tigris (Mesopotamien, heute Irak) lebte das Kulturvolk der Sumerer. Dort tauchte die Keilschrift auf Tontafeln auf. Die Menschen schrieben und rechneten, indem sie mit dreikantigen Griffeln Keile und Winkel in den weichen Ton drückten. Diese Schreibart der Sumerer wurde dann von ganz Babylonien übernommen. Diese Schrift heisst **Keilschrift**. Ein Keil bedeutet 1, ein Winkel 10. Das Positionssystem ist auf der Grundzahl 60 aufgebaut \sim **Hexagesimalsystem**. Die unten wiedergegebenen Darstellungen sind dem alten Basler Rechnungsbuch des 5. Schuljahres (Progymnasium, Realschule) entnommen. Mache Dir zur Übung einige eigene Rechenbeispiele!

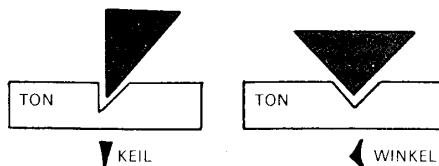


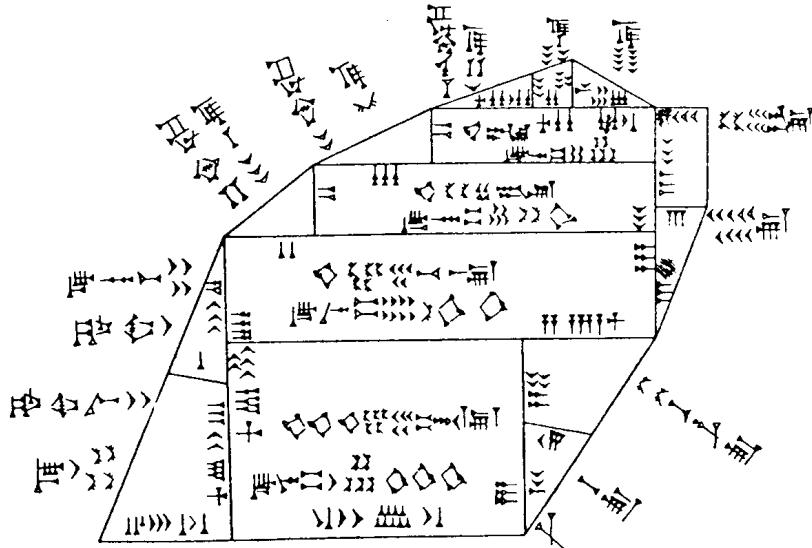
Abbildung 9: Keilschriftschreiben

1	5	8	20	22
2	6		30	36
3		9	40	
4	7		50	59
		10		

Abbildung 10: Babylonische Zahlenbeispiele

60^3	60^2	60	EINER	
		74		
	60	14		
		123		
	120	3		
		212		
	180	32		
		733		
	720	13		
		6 325		
	3600	25		
		216 000		
	2700	36		
		39 600		
		780		
				256 416

Abbildung 11: Babylonisches Positionssystem



Babylonischer Felderplan mit Flächenangaben

Abbildung 12 (Plan)

1.3.2 Hieroglyphen

In Ägypten vereinigt Menes Unter- und Oberägypten. Um ca 3000 v. Chr. oder früher beginnt die Hieroglyphenschrift. In Kleinasien, Kreta und Griechenland beginnt die frühminoische Zeit.

Eines der ältesten bekannten schriftlichen mathematischen Dokumente ist der im British Museum verwahrte Papyrus Rhind, der zurückgeht auf einen Text aus dem mittleren Reich (2000 bis 1800 v.Chr.). Da geht es um die Berechnung von Lohnsummen, Getreidemengen, aber auch Flächeninhalten, also um Mathematik. Ein anderer solcher Papyrus ist als Moskauer Papyrus bekannt. Von noch früher wissen wir von statistischen Erhebungen aus der frühsten ägyptischen Geschichte (Zwiebelstatistik beim Pyramidenbau...).

Die nachfolgend wiedergegebenen Darstellungen sind wiederum dem alten Basler Rechnungsbuch des 5. Schuljahres (Progymnasium, Realschule) entnommen. Mache Dir zur Übung wiederum einige eigene Rechenbeispiele!

Die ägyptische Zahlschrift

Bestimmt hast du schon auf Abbildungen die in Stein gemeisselten, bildähnlichen Zeichen der alten Ägypter gesehen. Diese Zeichen werden **Hieroglyphen** genannt. Aus ihnen setzt sich die „Denkmal“-Schrift zusammen, wie sie auf Säulen, Grabplatten und Tempelwänden zu finden ist. Die Hieroglyphenschrift ist älter als die Keilschrift; um 3200 v.Chr. wurde sie im altägyptischen Reich schon verwendet.

Wie sah nun die Zahlschrift der alten Ägypter aus, und was fingen sie damit an?

Die Rechenfähigkeit des Pharaonenvolkes war beachtlich. Schon im 2. vorchristlichen Jahrtausend besaß es Rechenbücher. Die Ägypter kannten das Bruchrechnen und wagten sich an anspruchsvolle mathematische Probleme heran. Die Geometer mussten jedes Jahr nach der Überschwemmung des Nils das Land neu vermessen und berechnen. Die Astronomen hatten schon vor über 6000 Jahren das Kalenderjahr zu 365 Tagen bestimmt. Die Gebildeten rechneten schriftlich, indem sie die Zahlzeichen auf Papyrus malten. Der einfache Mann benützte das Rechenbrett, eine Art Zahlrahmen. Die Zahlzeichen bestanden zum Teil aus Bildern:

1	1
10	10
100	aufgerolltes Palmblatt
1 000	Lotosblume
10 000	
100 000	Kaulquappe
1 000 000	

Die Kaulquappe gilt als Begriff für „viel“, da im Überschwemmungsbereich des Nils unzählige davon vorkamen.

Abbildung 13: Ägyptische Zahlen

Die altägyptischen Zahlen werden von rechts nach links geschrieben. Damit die Übersichtlichkeit nicht leidet, werden nie mehr als vier Zeichen zu einer Gruppe zusammengefasst.

$$\begin{array}{r} 0000 \text{ IIII} \\ 00 \text{ I} \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{r} 0000 \text{ 00 IIII} \\ \text{I} \end{array} = 65$$

Im Gegensatz zu den Babylonien rechneten die Pharaonen und ihre Untertanen im Zehnersystem.

$$\begin{array}{r} 00 \text{ II} \\ \text{I} \end{array} \quad 22 \quad \begin{array}{r} 000 \text{ IIII} \\ \text{III} \end{array} \quad 37$$

$$\begin{array}{r} 0000 \text{ IIII} \\ \text{I} \text{ IIII} \end{array} \quad 59 \quad \begin{array}{r} 0000 \text{ III} \\ \text{I} \end{array} \quad 143$$

$$\begin{array}{r} \text{QI} \\ \text{I} \end{array} \quad 101 \quad \begin{array}{r} \text{I} \text{ IIII} \\ \text{I} \end{array} \quad 1004$$

Welches Zahlzeichen kannten die Ägypter offensichtlich nicht?

$$\begin{array}{r} \text{Q} \text{ IIII} \text{ QQQQ} \text{ QQQQ} \\ \text{Q} \text{ I} \text{ Q Q} \text{ QQQQ} \text{ Q IIII} \end{array}$$

$$2 \cdot 100\,000 + 5 \cdot 10\,000 + 6 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 10 + 6 = 256\,416$$



Inscription am Horustempel von Edfu (Oberägypten)

Abbildung 14: Zahlenrechnen

1.4 Zu einigen Grundgesetzen der prägenden Einflüsse auf den Menschen und daher auch auf die Architektur

1.4.1 Den Menschen prägende Einflüsse

Allgemeine prägende Einflüsse

Einflüsse, die die Denkweise, das Verhalten, das Gestalten des Menschen und somit die Architektur beeinflussen, sind vielfältiger Art. Will man eine Liste anlegen, so fallen einem sofort eine Serie von Einflüssen

ein, die in ihrer Wirkung mehr oder weniger stark und im Einzelfall gewiss auch durchaus verschieden sind:

Landschaft, politische Situation, Familiensituation, soziale Situation, Herkunft, persönliche Biographie, Geschichte, generelle wirtschaftliche Situation, Zukunftsperspektiven, persönliche Vermögenssituation, Alter, „Intelligenz“, Kreativität, persönliche Kraft und Energie, Gesundheit, Bildung und Ausbildung, Weltsicht, Weltbild, Menschenbild, u.s.w.. Einige dieser Faktoren sind kennzeichnend für das einzelne Individuum, andere für Gruppen, Familien, Dorfgemeinschaften, Landschaften, größere politische oder in ihrer Eigenart sich unterscheidende Verbände resp. Volksgemeinschaften, wieder andere sind kennzeichnend für ganze Generationen oder Kulturen. Als Beispiele von Positionierungen seien deren zwei genannt; das eine aus der Geographie, das andere aus der Philosophie.

Seitenblick auf die Lehren der Geographie

In der Anthropogeographie gibt es viele Entwicklungsstadien sowie Ausprägungen von Lehren und damit Ansichten. Man mag darüber streiten wie man will. Ein in einem gewissen Sinne prägender Einfluss der Landschaft auf den Menschen, der sie bewohnt, kann nicht bestritten werden. Wir halten daher fest:

Die Landschaft übt einen mehr oder weniger stark prägenden Einfluss auf den Menschen aus, der sie bewohnt.

Darauf gestützt behaupten manchmal böse Zungen, dass die in den engen Tälern ganze Bergwände vor dem Kopfe hätten...

Die Sichtweise im Marxismus

Karl Marx hat sich vor allem für die sozialen Aspekte des menschlichen Seins interessiert. Aus dieser Visierrichtung heraus ist der folgende Satz aus der marxistischen Theorie zu verstehen:

Das soziale Sein bestimmt das Bewusstsein.

Man kann für oder gegen den Marxismus sein, ihn annehmen oder ablehnen. Einen gewissen Kern Wahrheit im letzten Zitat kann man aber schwerlich leugnen.

Prägende Einflüsse auf Generationen oder Kulturen

Überlegt man sich, was nicht nur das Individuum, die Familie, Sippe oder gar die Talschaft prägt, was also einen weitreichenderen, allgemeineren Einfluss ausübt, so kommt man neben größeren Landschaftsräumen auf langandaurende politische Situationen, Geschichte, Weltbild und auch auf das Menschenbild; dies sind alles bestimmende Einflüsse, welche sich über größere Zeitabschnitte zu halten vermochten. Als Konsequenz verstehen wir, dass u.a. das kosmische Geschehen am Firmament, infolge der beschränkten Wahrnehmungs- und Messmöglichkeiten, während **Jahrtausenden** das Bewusstsein bestimmt haben muss. Denn es gibt der Zeit den Takt und kann vom Menschen nicht beeinflusst, jedoch überall auf dem Planeten wahrgenommen werden. Dieses Geschehen drückt sich durch Rhythmen und somit durch Zahlen aus, die daher prägend auch auf die Architektur gewirkt haben müssen.

Später hat sich das Weltbild dann verändert — und damit auch die prägenden Einflüsse auf die Architektur.

Das kosmische Geschehen drückt sich durch Rhythmen und somit durch Zahlen aus, die daher auch prägend die Architektur gewirkt haben müssen.

Später hat sich das Weltbild dann verändert — und damit auch die prägenden Einflüsse auf die Architektur.

1.5 Gliederung von prägenden Einflüssen betreffend die Architektur

In groben Zügen kann man folgendes Bild zeichnen:

Prähistorische und grosse Teile der vorgriechischen Periode: Mystisches Weltverständnis. Grosser Einfluss haben kosmischen Rhythmen und der dabei wichtigen Zahlen. (Entwicklung von Zahlensymbolik und Sakralgeometrie). Diese Zeit ist eingangs besprochen worden. Einige Autoren tun die damalige, durchaus nachvollziehbare Sichtweise als Aberglaube ab, weil sie nicht mehr mit unserem heutigen Weltverständnis auf der rationalen Ebene widerspruchlos zu vereinbaren ist. Im Zentrum dieser Weltsicht steht z.B. im alten Ägypten eher das Jenseits und nicht das Diesseits. Im Gegenzug gibt es aber auch heutige, moderne Autoren, die die heutige, technische Sichtweise und unseren Fortschrittsglauben als Aberglaube abtun, weil der Erfolg, der momentane Vorteil daraus durch einen langfristigen z.B. ökologischen oder psychohygienischen Nachteil erkauft werden muss, der in der Zerstörung des Planeten, dem psychosozialen Ungleichgewicht der Gesellschaft und dem Schwarzpeterprinzip gipfelt.

Ältere griechischen Periode, Pythagoräer: „Alles ist Zahl.“ Grosse Wichtigkeit rationaler Zahlenverhältnisse unter Übernahme des Althergebrachten.

Griechischen Klassik, Protagoras und später: „Der Mensch ist das Mass aller Dinge.“ Grosse Wichtigkeit des Masses des Menschen, speziell des goldenen Schnittes. Das Diesseits rückt vermehrt ins Zentrum.

Bemerkung: Die griechische Zeit ist auch die „Zeit der Polis“, wo historisch sichtbar Demokratie geboren wurde, und gleichzeitig die „Zeit der Ratio“. Erstmals in der Geschichte wird beobachtbar, wie das vernunftsmässige Denken quasi Allgemeingut wird, also „ins Volk geht“. Mit „Volk“ ist hier natürlich das Volk der freien Bürger gemeint, das hier nicht mehr einer Priesterklasse oder der Klasse der herrschenden Häuser auf Gedeih und Verderb ausgeliefert ist. Es ist die Zeit der Philosophen, deren durchaus eigenständige „Weltbilder“ uns zum Teil schriftlich überliefert sind.

Römertum, Riesenreich: Rom war in der besser bekannten Zeit erst Republik, dann beginnend mit Cäsar und Augustus Kaiserreich. „Rom hat gesprochen, die Sache ist erledigt.“ → Grosse Wichtigkeit der Grösse, des Riesenhaften, des Übersteigerten, der Macht: Riesenstädte, Verkehrswege, Variantenreichtum, auch Toleranz. Mächtige Architektur (Kaiserpälatze!), erdrückend, gewaltbezeugend.

Frühmittelalter, Christentum: Das Weltbild ist nur symbolhaft zu verstehen, die Städte werden wieder klein, es muss wieder missioniert werden. Die Bauten werden kleiner und symboltragend (Romanik). Der Mensch tritt aus dem Zentrum, der Blick richtet sich eher nach innen oder ins Jenseits. Das Mittelalter wird oft als Zeitalter des Glaubens interpretiert. Bestimmte symboltragende Zahlen und Figuren werden zentral. Der goldene Schnitt als Proportion des Menschen bleibt weiterhin wichtig.

Hoch- und Spätmittelalter: Das Reich organisiert sich wieder, die Wirtschaft blüht wieder, das Weltbild ist nur symbolhaft zu verstehen: Grössere Bauten, Riesenbauten, „Jahrtausendwerke“: Gotische

Dome und Kathedralen, symboltragend, mächtig, erdrückend, gewaltbezeugend. Der Mensch ist ein Nichts gegen die Gewaltigkeit Gottes, ausgedrückt durch die Gewalt der sakralen Bauten: Die Macht gehört der Kirche. Im Zentrum steht der Glaube. Wie in der Romanik: Bestimmte symboltragende Zahlen und Figuren sind zentral. Der goldene Schnitt als Proportion des Menschen bleibt weiterhin wichtig.

Renaissance: Das Reich ist wieder organisiert, die Kultur sprüht auf andere Kontinente über, in Westeuropa (Spanien) werden die Muslime besiegt. In Osteuropa aber fällt 1453 Konstantinopel (Byzanz) nach der Schwächung durch einen Kreuzzug an die Muslime: Die Orthodoxie ist besiegt. Griechische Gelehrte wandern nach Italien. Der Kontakt mit der Antike wird intensiviert und neue Techniken entstehen. Wir erleben eine Rückbesinnung auf die Antike und ihre Kult. Anbruch zu neuem Wissen (erste grosse Entdeckungen wie Buchdruck, Schwarzpulver (Kanonen!), Verbreitung antiker Schriften, Verbreitung von Universitäten, private Gelehrsamkeit). Der Mensch rückt wieder ins Zentrum, ja er ist sogar formgebend. Grössere, jedoch gut gegliederte, organisierte Bauten, antike Ideale, zentrale Ideen; nicht nur staatliche, sondern auch private, bürgerliche Macht. Die sakralen Bauten streben nicht mehr derart in die Höhe. Sie machen eher den Eindruck einer Behausung des Menschen, wenn auch teils einer grossen, mächtigen. Die ehemaligen Wanderhöfe sind auch weitgehend sesshaft geworden, oft in Städten. Palastbauten zeigen die Macht der neuen Reichen auch profan in grosser Gewalt.

Barock: Die Reichsidee tritt zurück. Einzelne Königreiche sind mächtig. Es geht in Richtung Nationalstaat. Die theoretischen Wissenschaften und das Weltbild entwickeln sich erstmals über die Antike hinaus und werden auch von ihr z.T. unabhängig. (Galilei, Kepler ~ Keplersche Gesetze). Erstmals werden neue Himmelskörper entdeckt (Galilei, Jupitermonde). In der Architektur wird neben dem Kreis die Ellipse wichtig. In einzelnen Königreichen wird auch die Architektur sehr mächtig — Barockschlösser sind riesenhaft, machtstrotzend und auch von den Stadtschlössern unabhängig. Die alten Formen beginnen sich aufzulösen, der Kreis wird geöffnet, analog zum Vorgang im Weltbild.

Die Neuordnung der Welt als Einschnitt: Aufklärung, siegreiche Revolutionen, neue Ordnung.

Die Aufklärung und deren Folgeepochen mit ihren neuen Staatsphilosophien führen teils zu einer Abschaffung der alten Ständeordnung (nach und nach auch der Leibeigenschaft und der Sklaverei — abgesehen von Überbleibseln: Kasten in den Armeen, in den Religionen, in den Bildungssystemen). Resultat ist eine politische Neugestaltung. 1776 USA: Unabhängigkeitserklärung, Menschenrechtserklärung (Leben, Freiheit, Eigentum resp. Streben nach Glück), 1789 Frankreich (Freiheit, Gleichheit, Brüderlichkeit), Widerstandsform „aufgeklärter Absolutismus“ in Preussen, k.o.k.-Monarchie u.s.w. (vorerst religiöse Toleranz, teils Humanität, teils Kosmopolitismus). Die alten festen ständischen, weltanschaulichen, politischen und religiösen Schranken fallen. Doch die neue Ordnung endet zum Teil in der Perversion und im Chaos. Eine tragbare Form muss erst erlitten werden. Zuviele Hitzköpfe und festgefahrene Wenigdenker halten ihre Vernunft für die grösst mögliche. Freiheit und Toleranz sind Möglichkeiten, aber keine Sicherheiten, sind nicht unbedingt mehr materielles Wohlergehen.

Auch in den bildenden Künsten hat das Geschehen seine Entsprechung: Die alten Werte und die alte Ordnung aus dem Erbe Roms und der Griechen muss dem Neuen Platz machen. Oft ist es aber das Chaos und nicht eine auf geistigen Fundamenten ruhende neue Ordnung, das der alten Ordnung weicht. (Freiheit wird als Hofarrentum interpretiert.)

Klassizismus, Romantik, Jugendstil u.s.w.: Die Reichsidee ist in ihrer alten Form begraben. Einzelne Reiche sind mächtig. Der Nationalstaat tritt stärker hervor. Aussereuropäische Einflüsse treten verstärkt auf. Die theoretischen Wissenschaften und das Weltbild geraten in Bewegung. Als Konsequenz der Theorien von Newton, Leibniz und anderen wird die Physik mechanistisch, repetitiv. Langsam entsteht die Chemie, die erst durchaus nur mechanistisch ist. Die Industrie blüht. Mechanische Energie wird verfügbar. In diesem Zuge verschwindet die Sklaverei und die Leibeigenschaft. Die Architektur wird auch eher mechanistisch-repetitiv — oder gar industriell. Im Jugendstil fährt der asiatische Einfluss

in die europäische Architektur ein. Die Stilrichtungen beginnen sich jetzt zu trennen oder sind lokal ausgeprägt. Analoges geschieht in den Wissenschaften: Man trennt jetzt Physik, Mathematik u.s.w. in unabhängige Gebiete auf, die sich für sich weiterentwickeln. Die Gesamtsicht geht mehr und mehr verloren, denn die Stoffmenge ist zu gross.

Interessant ist die Beobachtung, dass sich zwei entgegengesetzte Tendenzen unterscheiden lassen. Da ist einmal die Tendenz zur Auflösung (Einbruch aussereuropäischer Einflüsse, Romantik, Verinnerlichung, Pietismus, Jugendstil, Auflösung der strengen Formen, organische Baustile u.s.w.). Andererseits finden wir die gegenteilige Tendenz: Die Verhärtung und Verkargung oder Übersteigerung (Klassizismus und Neostile, strenge, karge, funktionelle Stile, Ökonomie contra Ästhetik, reine Funktionalität, Kargismus (karge Strenge, Ablehnung von allem Überflüssigen bis zuf Verbissenheit)

Interessant ist auch die experimentelle Beobachtung, wie der Mensch beim Betrachten eines alten, unförmigen und eines neuen, kargen Gebäudes reagiert. Er bleibt oft mit seinen Augen forschend undträumend lange Zeit am Handgeformten hängen, während er das karge strenge Gebäude in wenigen Sekunden erfasst und dann gelangweilt einen anderen Blickfang sucht. Seine Aussagen machen dann deutlich, dass er sich unwohl und kalt fühlt.

Aktuelle Epochen, „Moderne“: Analog dem Individuum ist jetzt der Nationalstaat individuell ausgebildet. Oft halten diese Nationalstaaten ihre Individuen auch gefangen, so wie die Individuen ihrerseits ihre Ideen gefangen halten. Im Weltbild wirkend Relativitätstheorie, Quantenphysik und Kosmologie „bewusstseinsverändernd“ oder gar chaotisch. Das Atom wird spaltbar, das Leben auf Erden zerstörbar. Andererseits wird das Leben durch die Genetik machbar, veränderbar. Machbarkeitsglaube und Machbarkeitsgrenzen geraten in Zwist. Entwicklungen stossen an ihre Grenzen. Die Bäume wachsen doch nicht in den Himmel — und falls „doch“, so wirken sie oft zerstörend. Die Suche nach neuen Gemeinsamkeiten beginnt (gemeinsame Menschenrechte, UNO etc.). Eine neue Sorgfalt und Achtung sind gefragt. Auch in der Architektur „jagen sich die Stile“, sie wirkt als Ganzes oft chaotisch. Ihre Gemeinsamkeit ist häufig die Andersartigkeit, das sich Abmühen nach „Originalität“ — und in letzter Konsequenz dann die Gefangenheit in den eigenen Ideen, in einer gewissen Sicht erfahrbar als Ideenlosigkeit — und manchmal somit wieder nur der Ausdruck von Gewalt. Wie drückt sich die Suche nach neuen Gemeinsamkeiten aus? Sind solche Gemeinsamkeiten über dem untersten, lebenserhaltenden Niveau im heutigen Kampf der Weltbilder überhaupt noch möglich, wenn jeder sein eigenes Weltbild für das einzige mögliche hält und auf alles Fremde nur mit Angriff reagiert?

Kapitel 2

Theorien der Mathematik und Physik mit prägendem Einfluss

Hier geht es um den Problemkreis der Entwicklung von Mathematik, Physik und Weltbild sowie um einige Entdeckungen, die das Weltbild verändert haben. Dies mag ein Anstoss sein zum Nachdenken über deren Einfluss auf das gestalterische Tun, Denken und Empfinden in den „bildenden Künsten“.

2.1 Gelehrte der Antike

Hier sind kurz diejenigen Gelehrten aufgeführt, die für die in unserem Rahmen besprochenen Weltbilder besonders wichtig sind.

2.1.1 Schule des Pythagoras

Pythagoras lebte ca. 580–500 v. Chr. Er ist der Gründer des Ordens der Pythagoräer. Aus diesen Kreisen stammt die Entdeckung der pythagoräischen Zahlentriplett sowie die Tatsache der Existenz inkommensurabler Strecken. Damit waren die irrationalen Zahlen entdeckt.

2.1.2 Platon

Platon lebte ca. 429–348 v. Chr. Er gilt als einer der wesentlichsten Philosophen der Geschichte. Sein Lehrer war Sokrates, sein Schüler Aristoteles. Er ordnet das Reich der Erkenntnisse: Da gibt es die sinnlich-sichtbaren Dinge, daneben aber das Reich der Ideen, wo die mathematischen Begriffe einzuordnen sind. Die Mathematik ist ein bedeutendes Mittel zur Erforschung des Reiches der Ideen, welche durch den Staat gefördert werden müsste. Damit ist die wahrnehmbare Realität eingeteilt in die sinnlich wahrnehmbare, äussere Realität und die geistige Realität, das heisst das Reich der Ideen.

2.1.3 Aristoteles

Aristoteles (384–322 v. Chr.) war ebenfalls einer der wesentlichsten Philosophen. Auf ihr stützten sich lange Zeit die Naturwissenschaften. Er gilt auch als Vater der Logik. Er stellte fest, dass schwere Körper schneller fallen als leichte Körper. Es ist auch offensichtlich, dass eine leichte Vogelfeder nicht so rasch zu Boden fällt wie eine Bleikugel. Für Fragen nach dem Luftwiderstand und nach der Existenz des Vakuums war die Zeit damals noch nicht reif.

Für Aristoteles war die Erde das Zentrum des Kosmos; sie war klein und ruhend. Um sie bewegten sich die Planeten auf Kreisbahnen. Von Aristoteles kennen wir auch die Lehre der vier Elemente. Interessanterweise hat Geist (griech. „pneuma“) auch die Bedeutung des Elementes Luft. Das fünfte Element ist die „quinta Essenzia“. Den Elementen sind die Platonischen Körper zugeordnet worden.

2.1.4 Euklid von Alexandria

Euklid lebte um 300 v. Chr. Er hat in seinen Elementen (13 Bücher) ein Sammelwerk mathematischen Wissens zusammengetragen, das erstmals in der Wissenschaftsgeschichte nach der Methode der strengen Axiomatik aufgebaut ist. Ziel des Werkes ist es, aus wenigen plausiblen Grundannahmen (Definitionen, Axiomen und Postulaten) heraus streng logisch-deduktiv zu zeigen, dass es an regelmässigen Körpern nur die bekannten fünf platonischen Körper gegen kann. (Definitionen sind Begriffserklärungen, Axiome sind allgemeine plausible Aussagen, die am Beginn einer Theorie stehen, und Postulate sind z.B. Aussagen über Möglichkeiten von Konstruktionen.)

Bei Euklid wird offenbar, dass es kein Naturgesetz gibt, welches besagt, dass jede Sicht der Realität einfach zu sein hat. Denn ohne seine Elemente gab es keine Lösung des Problems der platonischen Körper. Und eine einfachere Lösung war nicht zu haben, auch für den König nicht...

Euklid wagte es seinem König Ptolemaios zu sagen, dass es keinen Königs weg zur Geometrie gibt. Noch heute hört man oft die Frage des Königs aus dem Munde von Zeitgenossen: „Kann man das nicht einfacher machen?“

Ein Schüler fragte den Euklid, was er denn verdienen könne, wenn er diese Dinge lerne. Euklid soll darauf einen Sklaven gerufen haben mit der Aufforderung: „Gib ihm drei Obolen; der arme Mann muss Geld verdienen mit dem was er lernt.“

Frei übersetzt heisst das: „Sind sie jemand, oder arbeiten sie für Lohn?“ Noch heute hört man oft die Frage des Schülers aus dem Munde von Zeitgenossen: „Wo kann man das gebrauchen?“

An den beiden Fragen an Euklid hat sich seit ca. 2000 Jahren nichts geändert. Sie stehen am Tor zur Schule der Bildung des Denkens. Der König ging wohl von der Idee aus, dass sich die Schwierigkeiten der Realität nach seinem Massstab zu richten hätten: Eine Mischung von Hochmut und Paranoia. Auch den Schüler hat die Idee geleitet, dass sein momentanes Denkiveau die Beurteilungsgrundlage des Sinnes der Dinge sei. Daher hat er gewagt zu urteilen: Er hat sich darauf für befähigt gefühlt, die Brauchbarkeit und daher die Güte einer Sache einsehen zu können, ohne sich die dafür notwendigen methodischen Denkkompetenzen und Erfahrungsgrundlagen angeeignet zu haben. Da liegt der Schluss nicht weit, dass alles, was nicht sofort als brauchbar erkennbar ist, daher schlecht sein muss. Speziell also wäre eine Denkschule schlecht...

Interessant in diesem Zusammenhang ist die Zielsetzung der hierzulande aus den Nöten der industriellen Revolution um ca. 1750 geborenen Volksschule: Lesen, schreiben, rechnen sind die vielgepriesenen grossen Kulturleistungen. Die Ausbildung des Denkens fehlt (z.B. Ausbildung von Kompetenzen wie Ziele setzen, urteilen und beurteilen, Massstäbe hinterfragen...). Sie war dem Gymnasium vorbehalten, gehörte nicht in die Schule des Volks...

2.1.5 Archimedes von Syrakus

Archimedes lebte ca. 287–212 v. Chr. Er gilt bei uns als Vater der technischen Hochschulen. Noch erhaltene Schriften sind: Methodenlehre, Quadratur der Parabel (einfache Integration!!), über Kugel und Zylinder, über Spiralen, über Konoide und Sphäroide, das Buch der Lemmata, die Konstruktion des regulären Siebenecks, die Sandzahl, vom Gleichgewicht ebener Flächen, von den schwimmenden Körpern (Gesetz des Archimedes!), teilw. über Kreismessung (Abschätzung von π).

2.1.6 Erathostenes von Kyrene

Erathostenes lebte von ca. 276 – 194 v. Chr. und war u.a. Leiter der Bibliothek in Alexandria. Bekannt ist das Sieb des Erathostenes zur Auffindung der Primzahlen, seine Lösung des delischen Problems

(Kubusverdoppelung, mit Zirkel u. Lineal alleine nicht möglich) und seine Berechnung des Erdumfanges. (Die Erde ist keine Scheibe mehr, sondern sie ist eine Kugel.)

2.1.7 Ptolemaios

Ptolemäus (ca. 90–160 n Chr.) war der Lehrer des geozentrischen „ptolemaischen“ Weltbildes, das bis zu Kopernikus (ca. 1500) weit verbreitet war. Ptolemäus wusste schon, dass die Planeten manchmal langsamer und manchmal schneller laufen. Sonne und Mond bewegten sich auf Kreisbahnen, die Sonne in der Ekliptik. Um die Planetenbewegungen zu erklären, genügten Kugelsphären nicht mehr. Da griff die Epizyklentheorie: Die Planeten bewegten sich auf Kreisbahnen um einen jeweils zentralen Punkt der grossen Planetensphären. Man war also gezwungen, Sphären auf den Sphären einzuführen.

2.2 Nachantike, Mittelalter

Vor dem Zusammenbruch des Römerreiches im Westen war der Hauptschauplatz der Kultur der östliche Teil des Römerreiches mit den Zentren Alexandria und Athen. In diesem Teil der Welt wurde die Kultur auch weiterhin „bewahrt“, wenn auch nicht unbedingt sehr viel weiter entwickelt. Im Westen hingegen lief nicht mehr viel auf mathematisch–naturwissenschaftlichem Gebiet. Das Feld gehörte der Theologie und der Scholastik. Erst im Hoch- und Spätmittelalter begann der Kontakt mit der Antike wieder, zur Hauptsache über die spanischen Mauren. Wegen unseres Rahmens verzichten wir hier darauf, auf einzelne Gelehrte einzugehen. Wichtig ist der Einfluss des Falls von Byzanz 1453: Der Einfluss griechischer Gelehrter begann in Italien zu wirken...

2.2.1 Albertus Magnus

Albertus Magnus (1193 – 1280 zu Köln), Dominikaner, Provinzial, Bischof von Regensburg, Scholastiker, Lehrer an europäischen Hochschulen. Er war der grosse Lehrer und Verbreiter des Aristoteles und Kenner der Naturwissenschaften. Heimlich soll er bereits damit begonnen haben zu experimentieren: Die Natur wird hier befragt auf der Grundlage des Glaubens an die Erfahrung, im Gegensatz zur Befragung der Schrift auf der Grundlage des Glaubens an die Schrift. Er war Lehrer des Ulrich von Strassburg und des Thomas von Aquin.

2.3 Renaissance, Barock, Mechanik, neue Himmelskörper

In der Renaissance beginnt wieder stärker die Beschäftigung mit Geometrie, vor allem der Malerei (Perspektive) wegen. Erwähnenswert sind die Schriften von Pacioli (De Divina Proportione, 1509) und Albrecht Dürer (1471–1528, Proportionenlehre, 1528).

2.3.1 Kopernikus

Nikolaus Kopernikus lebte von 1473–1543. Er propagierte das heliozentrische Weltbild, wagte aber sein Werk zu Lebzeiten nicht zu veröffentlichen. Im Zentrum des Kosmos steht die Sonne. Erde und Planeten kreisen auf Kreisbahnen um sie. Der Mond läuft auf einer Kreisbahn um die Erde. Kopernikus fand offenbar auch Sätze der Geometrie und der Trigonometrie.

2.3.2 Galilei

Galileo Galilei lebte von 1564–1642. Er stellte zum Fallgesetz des Aristoteles ein Gedankenexperiment an, das in einen Widerspruch mündet: Lassen wir einen leichten, langsam fallenden Körper fallen und anschliessend einen schweren, schneller fallenden Körper auf exakt derselben Bahn, so muss der schwerere, schnellere den leichteren, langsameren bald einmal einholen. Weil der leichtere langsamer ist, muss er den

schwereren und schnelleren beim Zusammenstoss abbremsen. Das heisst, dass beide Körper dann zusammen (zusammenklebend) langsamer sind als der schnellere Körper. Andererseits ist das Ganze dann aber schwerer als der anfängliche, schwerere Körper. Somit muss das Ganze auch schneller fallen. Somit fällt das Ganze zugleich langsamer und schneller! Dieser Widerspruch lässt sich dadurch beseitigen, dass man das Fallgesetz des Aristoteles verwirft. Aristoteles anzuzweifeln war damals jedoch eine gefährliche Sache!

Galilei fand auch das heute bekannte Fallgesetz. Lässt man eine Kugel eine schiefe Ebene herunterrollen, so nimmt ihre Geschwindigkeit linear zu. Die Geschwindigkeitszunahme pro Zeitdifferenz ergibt eine Konstante: Die Beschleunigung ist gefunden. Mit diesem Begriff beginnt für die Wissenschaftshistoriker die Neuzeit, denn erstmals ist hier etwas theoretisch gedacht worden, das die Antike noch nicht konnte: Mit Hilfe des abstrakten Begriffs der Geschwindigkeit (Verhältnis von Weg- zu Zeitdifferenz) ist ein neuer abstrakter Begriff definiert worden, die Beschleunigung nämlich als Verhältnis von Geschwindigkeitsdifferenz zu Zeitdifferenz. Das hier eingegangene Prinzip der doppelten Abstraktion scheint der Antike fremd gewesen zu sein.

Von Galilei stammt auch der Trägheitssatz. Ohne Einwirkung einer äusseren Kraft bleibt ein Körper im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung. Systeme, in denen dieser Satz gilt, heissen Inertialsysteme.

Weiter hat Galilei sein Fernrohr erfunden und damit erstmals in der Weltgeschichte neue Himmelskörper entdeckt, nämlich die Jupitermonde. Der damalige, dem geozentrischen Weltbild verhaftete Klerus hat diese Interpretation jedoch abgelehnt: Das was er da sähe in seinem Fernrohr, das sei nur Dreck, bekam er zu hören. Bekannt ist auch der Galileiprozess vor der Inquisition. Im mittelalterlichen Weltbild mit den Planetensphären sah man Gott als Energielieferanten, der die Bewegungen der Sphären aufrecht erhielt. Damit war ein Existenzbeweis Gottes gegeben. Wer das Weltbild anzweifelte, entzog der darauf gebauten Sicherheit die Grundlage. Das musste Gotteslästerung sein...

Von Galilei ist auch die Einsicht überliefert, dass die geraden Zahlen und die natürlichen Zahlen sich bijektiv aufeinander abbilden lassen, sie also gleichmächtig sind. (Galileische Paradoxie.)

2.3.3 Tycho Brahe

Tycho Brahe (1546 - 1601) beobachtete einen Kometen (1577) und einen neuen Stern (1572, Super Nova). Seine astronomischen Messungen übertraffen erstmals den antiken Ptolemaios an Genauigkeit. Die Zeit ist bei Tycho auf die Minute und der Ort (Winkel) auf die Viertelminute genau festgehalten.

2.3.4 Jost Bürgi

Der „Ostschweizer“ Jost Bürgi (1552 – 1632) gilt als einer der Erfinder der Logarithmentafeln. Er konstruierte im Umfeld des Hofes von Kaiser Rudolf II von Habsburg in Prag eine Uhr mit bisher in unserer Geschichte nie gekannter Genauigkeit, die offensichtlich die genauen Messungen des Tycho Brahe ermöglicht hat. (Das Prinzip dieser Uhr ist erst an der Schwelle zum 21. Jahrhundert wieder rekonstruiert worden.)

2.3.5 Kepler

Johannes Kepler aus Württemberg lebte von 1571–1630. Neben seiner Theorie der Kegelschnitte und seiner Fasslehre stammen von ihm die drei „Keplerschen Gesetze“, die er aufgrund der Messungen von Tycho Brahe mit Hilfe der Rechnungen von Jost Bürgi begründen konnte::

1. Die Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet.
2. Flächensatz: Der Leitstrahl von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiteinheiten gleiche Flächen.
3. Für die grosse Halbachse und die Umlaufzeit zweier Planeten gilt: $\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = \text{const.}$

(Keplers Mutter wollte man noch als Hexe verbrennen.)

2.3.6 Descartes

René Descartes (Kartesius) lebte von 1596–1650. Er ist als Mathematiker und als Philosoph zu würdigen (Cartesianismus). Von ihm stammt die analytische Geometrie. Geometrische Gebilde werden hier durch Gleichungen beschrieben.

Als Philosoph gab er den „empirischen positiven (d.h. mathematischen) Wissenschaften“ die methodischen Grundlagen. Er rät uns zu folgenden methodischen Kartinalprinzipien:

1. Hege keine vorgefasste Meinung. Halte physikalisch nur für wahr, was auch eingesehen ist.
2. Zerlege ein Problem in Teilprobleme, die als solche für sich lösbar sind. (Grundlage der Aufteilung der heutigen Wissenschaften!)
3. Gehe bei der Erklärung einer Naturgegebenheit immer vom einfachsten Modell aus, solange dich nicht die Messungen zwingen, ein komplizierteres Modell anzunehmen.
4. Spezielles einfachstes Modell: Die Naturgesetze sind im Universum vermutlich überall die gleichen.

2.3.7 Guericke

Otto von Guericke lebte von 1602–1686. Er ist der Entdecker des Luftdrucks (Magdeburger Halbkugeln!).

2.3.8 Pascal

Blaise Pascal lebte von 1623–1662. Er ist gross in der Philosophie, der Mathematik und der Physik. In der Mathematik ist er bekannt als Geometer, als Wegbereiter der Infinitesimalrechnung und der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von ihm stammt das Prinzip der vollständigen Induktion. In der Physik stammt von ihm das Pascalsche Gesetz in der Hydromechanik: In einer idealen Flüssigkeit oder einem solchen Gas ist der Druck bei Vernachlässigung der Schwerkraft überall gleich.

2.3.9 Huygens

Christian Huygens lebte von 1629–1695. Er entdeckte den Impulssatz, baute die erste Pendeluhr nach dem heutigen Prinzip (Leonardo da Vinci hatte allerdings sich damit auch schon befasst) und behandelte Kurven.

Heute formuliert man den Impulssatz so:

$$\text{Sei } \vec{p} = \sum m_i \cdot \vec{v}_i$$

↪ In einem abgeschlossenen System bleibt der Gesamtimpuls \vec{p} konstant.

2.3.10 Newton

Isaak Newton lebte von 1642–1727. In der Mathematik ist er neben Leibniz (und Jakob Bernoulli) der Erfinder der Infinitesimalrechnung (Fluxionsrechnung). Von Newton stammt die Bewegungsgleichung $F = m \cdot a$ (für die Erde $F = m \cdot g$), das Wechselwirkungsgesetz: *Actio = Reactio* (Kräfte treten immer paarweise und entgegengesetzt auf) sowie das Gravitationsgesetz: $F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$. (Werk „Philosophia naturalis principia mathematica“.) Als Idealisierung verwendet man in der Newtonschen Mechanik statt Massen als vereinfachte Modelle Massepunkte, die in der Realität allerdings nicht existieren.

1665 hatte Newton die Idee, dass die Schwerkraft auch für Erde und Mond vorhanden sein könnte. Das Gravitationsgesetz lässt sich im Idealfall einer Kreisbahn eines Planeten (z.B. Erde) via Zentripetalkraft sehr einfach aus dem 3. Keplerschen Gesetz ableiten:

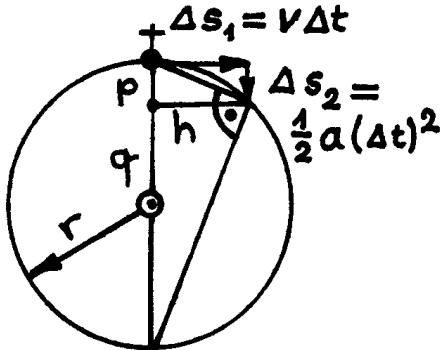


Abb. 15: Bewegung der Erde um die Sonne

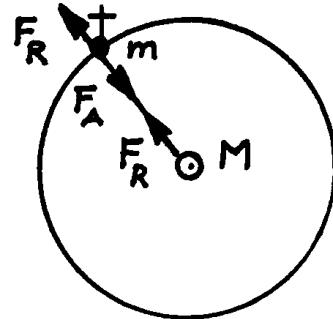


Abb. 16: Erde, Sonne und Kräfte

Z.B. die Erde bewegt sich um die Sonne mit einer gleichförmigen absoluten Geschwindigkeit v . Aus Symmetriegründen wirkt immer dieselbe Zentripetalbeschleunigung a und dieselbe Zentripetalkraft F . Wegen der gekrümmten Kreisbahn gehört zum tangentialen Weg $\Delta s_1 = v \cdot \Delta t$ der Weg zum Zentrum $p = \Delta s_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (\Delta t)^2$. Wegen dem Höhensatz $h^2 = p \cdot q$, $h = \Delta s_1$, $p = \Delta s_2$, $q = 2r - p = 2r - \Delta s_2$ gilt somit:

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot (\Delta t)^2 \cdot (2r - \frac{1}{2} \cdot a \cdot (\Delta t)^2) = (v \cdot \Delta t)^2 \Rightarrow a \cdot r - \frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot (\Delta t)^2 = v^2$$

$$\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow a \cdot r = v^2 \Rightarrow a = \frac{v^2}{r} \sim F = m \cdot a = m \cdot \frac{v^2}{r} \text{ (Zentripetalkraft)}.$$

Wegen dem 3. Keplergesetz ist nun für Planeten $\frac{T^2}{r^3} = \text{const.} = c(M) \Rightarrow T^2 = c(M) \cdot r^3$

Die Umlaufgeschwindigkeit ist $v = \frac{U}{T} = \frac{2\pi r}{T}$

$$\Rightarrow F = m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot \frac{(2\pi r)^2}{T^2 \cdot r} = m \cdot 4\pi^2 \cdot \frac{r}{T^2} = m \cdot 4\pi^2 \cdot \frac{r}{r^3 \cdot c(M)} = \frac{4\pi^2}{c(M)} \cdot \frac{m}{r^2} = c_1(M) \cdot \frac{m}{r^2}$$

Denkt man sich für einen Moment die Erde fix und die Sonne beweglich um die Erde (Relativbewegung), so hat die Sonne dieselbe Winkelgeschwindigkeit bezüglich der Erde wie vorher die Erde bezüglich der Sonne hatte. Bei gleichem Radius führt das auf dieselbe Geschwindigkeit und auch auf dieselbe Kraft, allerdings bei anderer Masse M . Lässt man auch hier das 3. Keplergesetz mit einer andern Konstante gelten, so folgert man wie oben:

$$F = c_2(m) \cdot \frac{M}{r^2} \sim c_1(M) \cdot m = c_2(m) \cdot M = c_3 \cdot m \cdot M := G \cdot m \cdot M \Rightarrow F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \sim \text{Gravitationsgesetz}$$

Aus dem Gravitationsgesetz wiederum gewinnen wir:

$$F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} = m \cdot 4\pi^2 \cdot \frac{r}{T^2} \Rightarrow \frac{r^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{4\pi^2} \text{ (Kepler-Konstante).}$$

2.3.11 Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz lebte von 1646–1716. Er gilt als der letzte Universalgelehrte, der das gesamte Wissen seiner Zeit beherrschte. U.a. war er der Gründer der Preussischen Akademie der Wissenschaften in Berlin. In der Mathematik wie auch in der Philosophie (als Lehrer der „besten aller möglichen Welten“ — im nichtmaterialistischen Sinne) ist er einer der Grossen, die nicht nur Sätze, sondern Methoden entdeckt haben. Er hat gewisse unendliche Reihen berechnet und ist auf dieser Grundlage zur Infinitesimalrechnung gekommen (unabhängig von Newton, fast gleichzeitig, vielleicht etwas später). Neben Arbeiten in der formalen Logik ist er der Entdecker der Dualzahlen. Auch hat er an der ersten mechanischen Rechenmaschine gearbeitet, gedacht zur Ermittlung der Planetenbahnstörungen. Für ihn war Gottes Bau der Welt so gut, dass sie nun alleine funktioniert. Seine philosophische Monadenlehre hat sich in der Non-Standardanalysis als fruchtbar erwiesen.

2.3.12 Bernoullis

Jacob I. Bernoulli lebte von 1654–1705. Er stand im Briefwechsel mit Leibniz. Es wird erzählt, dass er Leibnizes Unterlagen verloren habe und daher die Infinitesimalrechnung nacherfinden musste, um bei der Beantwortung von Leibnizes Fragen das Gesicht zu wahren. Er hat die Infinitesimalrechnung weiterentwickelt, die Polarkoordinaten eingeführt und viele Kurven bearbeitet. Mit ihm beginnt die Bernoulli-Dynastie in der Mathematik.

Sein Bruder Johann I. (1667–1748) hat mit Erfolg auf dem gleichen Gebiet Grosses geleistet. Von ihm stammen Bezeichnungen wie „Integral“. Johann I. war der Lehrer von Euler.

Daniel Bernoulli (1700–1784) befasste sich mit Kettenbrüchen, trigonometrischen Funktionen und anderem mehr. Daneben gilt er aber als der Begründer der theoretischen Physik. Von ihm stammt z.B. das Strömungsgesetz (Bernoulligleichung), das eine zum Energiesatz analoge Form hat:

$$\rho \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 + p = \text{const.}$$

Daniel Bernoulli befasste sich bereits mit der Herzleistung des Menschen (Mensch als „Strömungsmaschine“?).

2.3.13 Euler

Leonard Euler lebte 1707–1783. Man sagt, dass er mehr Mathematikseiten geschrieben habe, als je ein bekannter Schriftsteller Romanseiten. An der Herausgabe seines Gesamtwerkes (Opera omnia) wird immer noch gearbeitet (momentan ca. 80 Bände). Euler hat auf praktisch allen Gebieten der Mathematik Grosses geleistet. Von ihm stammen geometrische Sätze, die Variationsrechnung, die Eulersche Zahl, die Eulersche Konstante, das Eulersche Multiplikationsverfahren zur Lösung von Differentialgleichungen, das Eulersche Prinzip der kleinsten Wirkung, die Eulerschen Differentialgleichungen in der Mechanik (Kreiseltheorie!), die Eulersche Formel für die komplexe Exponentialfunktion u.s.w., u.s.f..

Eine Anektote: Euler arbeitete damals gerade am russischen Hof, als Diderot zu Besuch war. Man erzählte Diderot, dass Euler einen „algebraischen Beweis Gottes“ habe. Diderot, der angeblich nichts von Mathematik verstand, eilte hin. Da dozierte Euler:

„Monsieur, es gilt $\frac{a+b^n}{n} = x$. Also existiert Gott. Antworten Sie!“

Diderot soll das — so wird erzählt — einleuchtend gefunden haben.

2.3.14 Coulomb

Charles Augustin Coulomb lebte 1736–1806. 1784 fand er das nach ihm genannte Gesetz der Elektrostatik. Elektrisch geladene Körper üben aufeinander Kräfte aus, die sich nach einer zum Gravitationsgesetz formal gleichen Formel berechnen lassen.

2.3.15 Lavoisier

Antoine Laurent de Lavoisier (1743–1793) gilt als der Begründer der modernen, messenden Chemie und als Entdecker des Sauerstoffes. Damit war die Luft – Pneuma – Geist – entgeistet, denn Luft hat mit Verbrennung zu tun. Lavoisier hat offenbar herausgefunden, dass Diamanten aus Kohlenstoff bestehen, denn er konnte zeigen, dass sie verbrannt werden konnten. Diese bei Hofe in Versailles demonstrierten Diamantenverbrennungen haben den Marktweiberzug ausgelöst, der als der Beginn der französischen Revolution gilt. — Bei Hofe verbrennen sie die Diamanten, während das Volk nichts zu essen hat! Lavoisier starb durch die Guillotine.

2.3.16 Volta

Alessandro Volta lebte 1745–1847. Ihm verdanken wir die Erfindung der Batterie (1801). Napoleon hat ihn unterstützt. Damit war jetzt die schon vorher bekannte Elektrizität jederzeit für Experimente greifbar. Mit Ausnahme der Herzschen Wellen (Radiowellen) und Dingen wie der Transistor war die gesamte Elektrizitätslehre (insbesondere die Elektrodynamik) in weniger als 100 Jahren aufgebaut. Die Erfindungen waren gemacht und es ging nur noch um die technische Perfektion. Man sieht, dass wenn sich einmal ein neues Tor geöffnet hat, das neu erreichbare Gebiet dann sehr rasch erobert ist.

2.3.17 Laplace

Pierre Simon Laplace lebte von 1749–1827. Sein Hauptwerk ist die 5 bändige *Traité de méchanique céleste*. Darin hat er die Stabilität des Sonnensystems bewiesen. (Behandlung der Bahnstörungen.) Von Napoleon auf Gott angesprochen, soll er geantwortet haben, dass er diese Hypothese nicht brauche.... Von ihm ist die Idee des „Laplaceschen Dämons“ bezeugt (Uhrenmacheruniversum): Ein Geist, der in einem gegebenen Moment alle Kräfte, Geschwindigkeiten und Positionen aller Teilchen im Universum kennen würde, könnte auf alle Zeiten jeden Zustand voraussagen (Determiniertheit).

2.3.18 Gauss

Karl Friedrich Gauss lebte von 1777–1855. Er hat den Hauptsatz der Algebra bewiesen, die komplexen Zahlen zu einem Abschluss gebracht, die Theorie der quadratischen Formen entwickelt, das Theoremum Aureum bewiesen (Reziprozitätsgesetz der quadratischen Reste), Beiträge zur Konstruierbarkeit von n –Ecken geleistet, den Hauptsatz der Funktionentheorie (bekannt als Satz v. Cauchy) gefunden, die Methoden der kleinsten Quadrate gefunden, eine nichteuklidische Geometrie entdeckt (Unbeweisbarkeit des Parallelenaxioms!). Von ihm stammen Entdeckungen in der Differentialgeometrie (Gaußsche Krümmung!) u.s.w. Berühmt wurde Gauss aber eher in der Astronomie als in der Mathematik. Er hat als erster auf Grund von Bahnstörungen die Position eines neuen Himmelskörpers vorausberechnet, den man dann so entdecken konnte. Die Theorie hat nun über das Experiment gesiegt.

2.3.19 Die Entdeckung neuer Himmelskörper

Galilei

Galileo Galilei (vgl. oben): Erste Entdeckung neuer Himmelskörper (Jupitermonde).

Herschel

Friedrich Wilhelm Herschel (beim Hanovranerkönig Gregor III. von England): 1781 Entdeckung des ersten neuen Planeten, des Uranus.

Gauss, Piazzi

Die Titus–Bodesche Regel (empirische Regel) gibt folgendes Bild der ungefähren Planetenentfernungen in 0.1 AE :

Merkur	$0 + 4$	$=$	4
Venus	$3 + 4$	$=$	7
Erde	$6 + 4$	$=$	10
Mars	$12 + 4$	$=$	16
?? (Lücke)	$24 + 4$	$=$	28
Jupiter	$48 + 4$	$=$	52
Saturn	$96 + 4$	$=$	100
Uranus	$192 + 4$	$=$	196

Die Titus–Bodesche Reihe weist eine Lücke auf. Es war also naheliegend, nach einem Objekt Ausschau zu halten, das diese Lücke schliesst. In der Neujahrsnacht 1801 hatte dann der Italiener Piazzi ein kleines Objekt entdeckt, das sich bewegte und das er später wieder verlor. Zufällig erhielt Gauss davon Nachricht. Gauss hatte eine Methode entwickelt, mit deren Hilfe sich auf der Grundlage von wenigen Beobachtungen und viel Mathematik die gesamte Bewegung errechnen liess. Das führte zur ersten mathematischen Positionsverhersage der Geschichte der Wissenschaften. Das Objekt ist dann so wiedergefunden worden. Es ist der Planetoid Ceres. Heute kennt man ca. 2000 (oder mehr) Planetoiden. Sie bilden ungefähr einen Gürtel in einer Ebene, haben alle etwa die gleiche Bewegungsrichtung und bewegen sich auf nahezu Kreisbahnen.

Bessel, Leverrier, Galle

Friedrich Bessel vermutete um 1840 aufgrund von Uranusbahnstörungen die Existenz eines weiteren Planeten. J.J. Leverrier versuchte auf dieser Grundlage eine mathematische Positionsbestimmung. 1846 fand in Berlin J.G. Galle nach diesen Daten den Neptun.

Tombaugh

1930 entdeckte der Amerikaner C. W. Tombaugh durch Zufall ausserhalb der Neptunbahn einen weiteren Planeten, den Pluto.

Neuste Entdeckungen

Seit einigen Jahren (gegen Ende des 20. Jahrhunderts) weiss man, dass der Pluto ein Doppelplanet ist. Zudem fand man in den letzten Jahren Planeten, die zu anderen Sonnensystemen gehören. Wir sind nicht das einzige Planetensystem.

2.3.20 Faraday und Maxwell

Michael Faraday lebte 1791–1867. Von ihm stammt der Feldbegriff, formuliert für elektrische und magnetische Felder (Griesskörnerversuch, Einsenfeilspäne). Seine experimentellen Befunde wurden von James Clerk Maxwell (1831–1879) ca. 1856 in den vier Maxwellgleichungen mathematisch gefasst (Differentialgleichungen mit mehreren Variablen).

Zum dabei verwendete Feldbegriff: Ein Feld ist z.B. im Raum eine Funktion auf den Raumpunkten als Definitionsbereich mit Wertebereich z.B. Vektoren. So wird z.B. jedem Raumpunkt als Funktionswert eine Kraft (Vektor) zugeordnet. Der Feldbegriff ist später auch auf die Gravitation ausgedehnt worden.

2.3.21 Mayer, Helmholtz, Joule

Robert Mayer (1814–1878) erkannte bereits 1840 den Energiesatz. Hermann von Helmholtz (1821–1894) hat ihn im Jahre 1847 ausformuliert. James Prescott Joule (1818–1889) entdeckte die wechselseitige Umwandlung der Energieformen. Sei U die „innere Energie“. Heute formulieren wir für ein abgeschlossenes System:

$$E = m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} m \cdot v^2 + U = \text{const.}$$

2.3.22 Das Problem des absoluten Raums

Noch Leibniz und Kant haben an den „absoluten Raum“ geglaubt, d.h. den „durchwegs erfüllte Ort oder der Ort aller Örter“ (nach Leibniz). Für sie stand ausser Zweifel, dass die euklidische Geometrie die einzige mögliche Geometrie des Raumes ist. Diese Vorstellung wurde durch die Entdeckung nicht-euklidischer Geometrien (Gauss, Lobatschevsky 1829, Bolay 1832 u.s.w.) ausgeräumt. Unter dem Eindruck der Vorstellung des absoluten Raumes mit einem Ursprung eines Koordinatensystems ist der Streit nach dem Zentrum der Welt (Kopernikus, Kepler, Galilei, geozentrisches und heliozentrisches Weltbild) verständlich. Ansätze zur Vorstellung höherdimensionaler Räume finden sich schon beim bernischen Mathematiker Ludwig Schläfli (1814 – 1896).

2.4 Einstein und die Relativitätstheorie

2.4.1 Äthertheorie und Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Um ca. 1900 glaubten viele, dass die Physik in den wesentlichsten Teilen vollendet sei. Man rätselte noch über den Aufbau der Atome. Auch ging man davon aus, dass im Universum ein ruhender „Weltäther“ als Trägermedium existiere, durch den sich die Himmelskörper bewegen und in dem sich z.B. auch die elektrischen und magnetischen Felder ausbreiten. Lichtwellen begriff man als Ätherwellen. Viele Begriffe der Physik zeugen noch von der Äthervorstellung, unter deren Herrschaft sie entstanden sind. Man denke z.B. an den magnetischen Fluss: Das Magnetfeld fliesst durch den Äther. Dieser ruhende „Weltäther“ konnte man als ausgezeichnetes Inertialsystem begreifen, auf das man die gesamte „Newton'sche Physik“ beziehen konnte. (In einem Inertialsystem gilt das Trägheitsgesetz.)

Man dachte damals wohl insgeheim, nicht mehr fern von der absoluten Wahrheit über das Universum zu sein. 1905 erschien dann Albert Einsteins Schrift „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“. (Einstein: 1879–1955.) Danach wurde wieder alles anders. Es war wieder einmal klar, wie problematisch „absolute und endgültige Wahrheiten“ sind. Man muss immer damit rechnen, dass die Grenzen des Erkennbaren erweitert werden könnten. Die Sache hatte Jahre später auch extreme politische Folgen: Die Existenz der Atombombe führte zum Gleichgewicht des Schreckens. (Masse wurde in Energie umwandelbar)

Ausgangspunkt zur neuen Betrachtungsweise war eine genauere Analyse der Begriffe Raum und Zeit. Um im Wissen weiterzukommen, suchte man vor 1900 experimentell zu klären, mit welcher Geschwindigkeit sich die Erde durch den Äther bewegt. Die elektrostatischen beziehungsweise brechungsoptischen Versuche von Fizeau (1860), Amscart (1872) und Raileigh (1902) brachten kein Resultat. 1886 gelang es Michelson und Morley , die Lichtgeschwindigkeit c auf der Erde in verschiedene Richtungen zu messen. Bewegte sich die Erde mit der Geschwindigkeit durch den Äther und das Licht mit der Geschwindigkeit c , so müsste in Bewegungsrichtung der Erde durch den Äther die Geschwindigkeit $c_1 = c - v$ und in entgegengesetzter Richtung die Geschwindigkeit $c_2 = c + v$ herauskommen. Das Resultat des heute mit moderneren Mitteln wiederholbaren Versuches ist jedoch, dass $c_1 = c_2$ ist: Die Lichtgeschwindigkeit ist auf der Erdoberfläche in alle Richtungen immer gleich gross. (Anderswo hatte man nicht gemessen...)

Wie sollte man sich das nun erklären? Durch eine Rückkehr zum geozentrischen Weltbild? — Etwa mit dem Postulat, dass es ja die Erde sein muss, die im Zentrum steht und daher als Konsequenz im Äther ruht? — Einstein schlug eine andere Idee vor. Den Äther hat noch niemand gemessen. Seine Existenz ist ein Postulat, ein Axiom. Wieso sollte man es nicht mit einem gegenteiligen Axiom versuchen, nämlich mit der Annahme, dass der Äther gar nicht existiert? Die Konsequenz daraus wäre, dass es gar kein ausgezeichnetes Inertialsystem gibt (wo der Trägheitssatz gilt). Jedes soche wäre demnach gleichberechtigt. Einerseits wäre das das einfachste Modell im Sinne von Descartes. Andererseits müsste man andernfalls ein Auszeichnungsprinzip haben, etwa ein Minimalprinzip. c ist aber offensichtlich in keinem System minimal, sondern in jedem System gleich. Die Konsequenz ist das von Einstein *postulierte* Prinzip (Axiom):

Relativitätsprinzip: *Die Naturgesetze nehmen in allen Inertialsystemen dieselbe Form an.*

Bei gleichförmig bewegten Inertialsystemen ist keines vor dem andern ausgezeichnet:
 ~> Spezielle Relativitätstheorie.

Bei beschleunigten Inertialsystemen ist keines vor dem andern ausgezeichnet:
 ~> Allgemeine Relativitätstheorie.

Das „geozentrische Weltbild“ hat sich nun ins Innere des Menschen verlegt. Nur er ist „hier und jetzt und einzig“. (Der Mensch ist kein „Herdentier“ mehr.) Diese Welt existiert so wie sie ist, hier und jetzt, weil es eben jetzt den Menschen gibt, der das wahrnimmt — und nicht umgekehrt gibt es den Menschen, weil die Welt eben gerade „zufällig“ jetzt so ist. Aussen im materiellen Bereich haben wir uns aber vom geozentrischen Weltbild verabschiedet.

Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ist jetzt als Konsequenz aus dem Relativitätsprinzip begreifbar. Sie hat im Vakuum in jedem Inertialsystem etwa den Wert $c \approx 300'000 \text{ km/s}$.

Es ist wichtig zu beachten, dass die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit wohlverstanden nur auf der Erdoberfläche festgestellt worden ist. Einsteins Vermutung war es, dass die Gültigkeit dieses Prinzips überall angenommen werden kann. Bis heute hat man dazu keine Widersprüche gefunden.

2.4.2 Systemzeit und Zeitdilettation

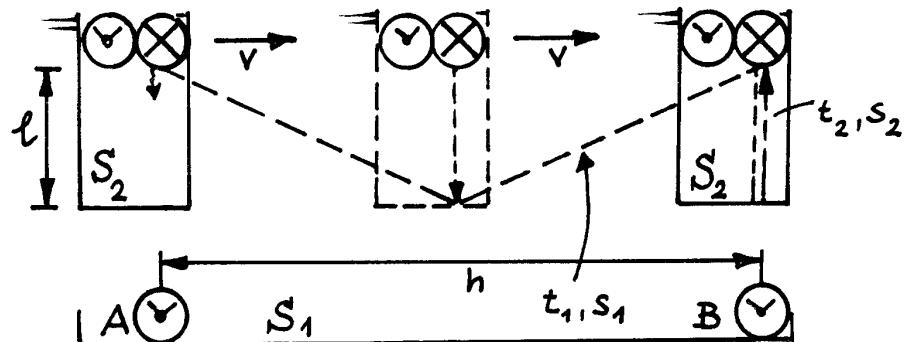


Abbildung 17: Gedankenexperiment zur Zeitdilettation

Wir machen jetzt ein Gedankenexperiment. Wir gehen davon aus, dass wir als Bezugssysteme zwei Inertialsysteme S_1 und S_2 haben, die sich gegeneinander horizontal mit gleichbleibender Geschwindigkeit v bewegen. Im System S_2 befindet sich ein senkrecht stehender, im System ruhender Zylinder der Höhe l , der unten verspiegelt ist und in dem oben eine Blitzlampe angebracht ist. Offensichtlich bewegt sich der beschriebene Zylinder im System S_1 mit der Geschwindigkeit v . Im Zylinder (bewegtes System S_2) sei eine Uhr angebracht, mit der sich die Laufzeit t_2 eines Lichtblitzes messen lässt, der den Zylinder nach unten durchläuft, dort gespiegelt wird und wieder oben ankommt. Der Blitz wird losgelassen, wenn sich das System S_2 am Ort eines Beobachters A im System S_1 vorbeibewegt. Für den halben Lichtweg finden wir im System S_2 :

$$l = c \cdot t_2, \quad t_2 = \frac{l}{c}$$

Im ruhenden System S_1 wird ebenfalls die Laufzeit des Lichtblitzes gemessen. Bei der Aussendung des Blitzes befindet sich der Zylinder beim Beobachter A im System S_1 und bei der Registrierung der Rückkehr des Blitzes beim Beobachter B im System S_1 . Wir gehen davon aus (Annahme), dass A und B vorher mit synchron gehenden Uhren ausgerüstet worden sind. Die von A und B festgestellte Laufzeit des Blitzes sei t_1 . Ein im System S_1 ruhender Beobachter C muss feststellen, dass sich der Zylinder während der Laufzeit des Blitzes aus seiner Sicht um die Distanz $h = v \cdot (2t_1)$ horizontal verschoben hat. Dabei ist t_1 die Zeit, die das Licht braucht um ebenfalls den *halben* Weg zurückzulegen. Aus der Sicht von C ergibt sich für den *halben* Lichtweg nach Pythagoras:

$$\begin{aligned} s_1 = c \cdot t_1 &= \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + l^2} = \sqrt{\left(\frac{2t_1 v}{2}\right)^2 + l^2} \Rightarrow c^2 t_1^2 = t_1^2 v^2 + (c \cdot t_2)^2 \\ &\Rightarrow t_2 = \frac{1}{c} \sqrt{t_1^2 \cdot (c^2 - v^2)} = t_1 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \end{aligned}$$

Konsequenz: Die Zeit ist systemabhängig!

$$t_2 = t_1 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}, \quad \frac{t_2}{t_1} = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}, \quad v \neq 0 \Rightarrow t_1 \neq t_2$$

Da die Zeit systemabhängig ist, redet man auch von der **Eigenzeit**. Wichtig ist auch die Feststellung, dass für den Beobachter in S_2 sich das System S_1 bewegt, er aber in Ruhe ist (Relativität). t_2 ist im allgemeinen kleiner als t_1 .

Konsequenz: Im bewegten System S_2 vergeht weniger Zeit als im ruhenden System S_1 . In System S_2 ist auch der Lichtweg kürzer als im System S_1 . Die Lichtgeschwindigkeit ist aber in beiden Systemen dieselbe.

Für das Experiment sind drei Uhren nötig: Eine im System S_2 und zwei im System S_1 . Dass die Sache auch mit materiellen Uhren klappt, zeigen die Experimente. Das sensationelle Ergebnis ist erstmals 1938 gemessen worden. Eine denkwürdige Konsequenz ist das **Zwillingsparadoxon**. Der Effekt ist angeblich auch bei den Mondflügen im Größenbereich von Mikrosekunden gemessen worden. Der Effekt ist heute mit Atomuhren in Flugzeugen messbar.

Noch ein Beispiel aus Elementarteilchenphysik (CERN, 1959): Myonen haben beim Zerfall eine Halbwertszeit von $\tau = \tau_2 = 1.52 \mu\text{s}$. Die Halbwertszeit ist messbar (Intensität!). Die Myonen bewegen sich nun mit $v = 0.99942 c$ im Speicherring. Für sie gilt in ihrem System die Halbwertszeit $\tau = \tau_2$. Für den Beobachter aussen ist dann $\tau_1 = \frac{\tau_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \approx 44.6 \mu\text{s}$, was mit der Beobachtung übereinstimmt. (\sim Problem: Schnelle, beim Zerfall entstehende Teilchen können weit gelangen. Z.B. zur Erde, wenn sie in den oberen Luftsichten zerfallen...)

Interessant ist der Fall eines Photons, das mit Lichtgeschwindigkeit fliegt. Für ein solches Teilchen gilt $v = c$. Daraus folgt $t_2 = t_1 \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c}\right)^2} = 0$. Das heisst: Die Systemzeit eines solchen Photons ist immer 0. Es wird also auf dem Lichtweg zwischen Aussendung und Ankunft um die Zeit 0 „älter“!

Bemerkung: Für fixes t_1 und $v \rightarrow c$ geht $t_2 \rightarrow 0$. Für $v \rightarrow c$ und fixes t_2 muss aber $t_2 \rightarrow \infty$ gehen.

2.4.3 Die Lorenzkontraktion

Nach Definition ist $c = \frac{s}{t} = \text{const.}$, unabhängig vom System. Da t nun systemabhängig ist, muss dies auch für die Weglänge s gelten, sonst wäre ja eben c systemabhängig.

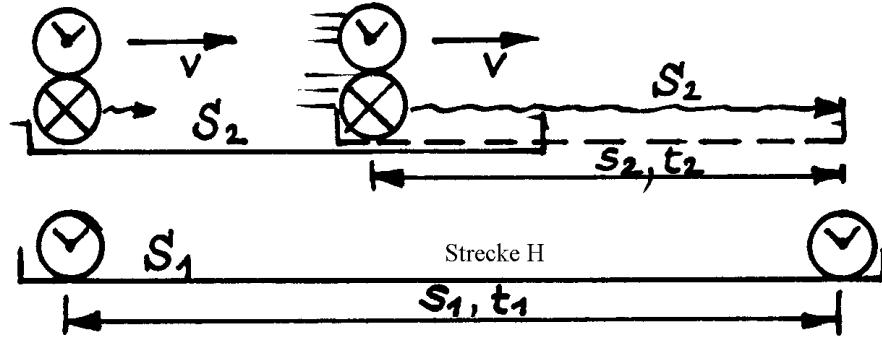


Abbildung 18: Gedankenexperiment zur Lorenzkontraktion

In einem Gedankenexperiment lassen wir nun wieder einen Beobachter in einem Inertialsystem S_2 an einem System S_1 vorbeifliegen, während nun in S_2 ein Lichtblitz in horizontaler Richtung losgelassen wird. Für den Beobachter in S_2 braucht das Licht für ein Wegstück H , das für ihn die Länge s_2 hat, die Zeit t_2 . Der Beobachter in S_1 hat aber für H die Strecke s_1 gemessen und registriert jetzt die Zeit t_1 . Beide Beobachter können die für sie geltenden Streckenlängen nach der Formel „Weglänge gleich Geschwindigkeit c mal Zeit“ berechnen. Wegen der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in beiden Systemen gilt daher:

$$c = \frac{s_1}{t_1} = \frac{s_2}{t_2} \Rightarrow s_2 = s_1 \cdot \frac{t_2}{t_1} = s_1 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

Lorenzkontraktion: Für einen Beobachter in einem mit der Geschwindigkeit v vorbeifliegenden Inertialsystem S_2 , in dem der Beobachter ruht, ist eine Strecke s_1 gegenüber der von S_1 aus wahrgenommenen Realität verkürzt:

$$s_2 = s_1 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

Dieser Effekt ist beobachtbar z.B. bei der Kontraktion des elektrischen Feldes schnell fliegender Teilchen (Spurenexperimente in Blasekammern...).

Weiter gilt in diesem Experiment: $v_1 = \frac{s_1}{t_1} = \frac{s_1 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{t_1 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{s_2}{t_2} = v_2$

Geschwindigkeiten können aber auch systemabhängig sein, wie ein weiterer Ausbau der Theorie zeigt.

Interessant ist auch hier wieder der Fall eines Photons, das mit Lichtgeschwindigkeit fliegt. Für ein solches Teilchen gilt $v = c$. Könnte man auf einem solchen Teilchen reiten, so würde man sich als ruhender Beobachter in S_2 vorkommen und die Strecke H zwischen Aussendungsort und Ankunftsplatz des Photons (System S_1) überwinden. Die Länge dieser Strecke würde man als der besagte Beobachter infolge der

Lorenzkontraktion verkürzt wahrnehmen. Wie lange ist jetzt die Strecke für einen als Beobachter? Aus obiger Formel folgt mit der Länge $s_1(H)$ im System S_1 : $s_2 = s_1(H) \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2} = 0$. Das heisst: Die Wegstrecke, die das Photon auf seinem „Flug“ zu überwinden hat, ist vom Photon aus gesehen immer 0! Für ein Photon im Vakuum (Lichtgeschwindigkeit c) existieren also gar keine Distanzen und somit gar keine Wege! Alles ist „unendlich nahe“.

2.4.4 Die Unüberschreitbarkeit der Lichtgeschwindigkeit

Die Quadratwurzel $\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2} \geq 0$ ist nur für $v \leq c$ eine reelle Zahl. Daher gilt:

Unüberschreitbarkeit der Lichtgeschwindigkeit: v kann nie grösser sein als c .

Diese Tatsache wird sichtbar anhand von Experimenten mit Beschleunigern.

2.4.5 Das Paradoxon der Gleichzeitigkeit

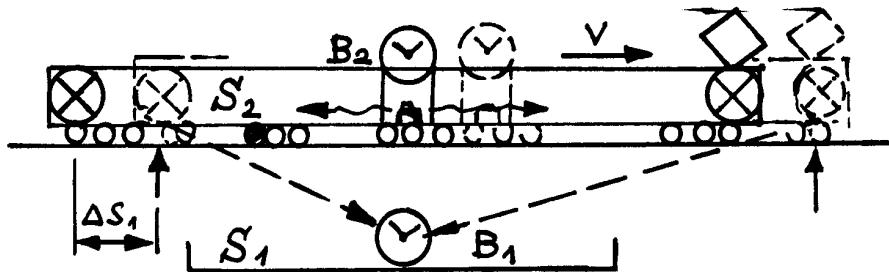


Abbildung 19: Gedankenexperiment zur Gleichzeitigkeit

Wir stellen uns einen langen Eisenbahnzug vor, der unser Inertialsystem S_2 bildet. Er hat die im System gemessene Länge $2s_2$. In seiner Mitte sitzt ein Beobachter B_2 . Vorn und hinten ist der Zug mit je einer Blitzlampe ausgerüstet, die B_2 gleichzeitig zünden kann. Wenn B_2 den Knopf drückt, geht das Signal mit Lichtgeschwindigkeit zu den beiden Lampen. Es braucht dazu die Zeit $t_2 = \frac{s_2}{c}$. Beide Lampen senden dann einen Blitz aus, den B_2 wiederum nach der Zeit t_2 registriert, beide Blitze natürlich gleichzeitig. Nun fährt der Zug mit grosser, aber gleichbleibender Geschwindigkeit nach Osten an einem Beobachter B_1 vorbei, der wiederum sich in einem Inertialsystem S_1 befindet. B_2 drückt genau dann den Knopf der Blitzlampen, wenn er sich exakt auf der Höhe von B_1 befindet. In dem Moment sei angenommen, dass B_1 von B_2 nur um eine minimale Distanz voneinander entfernt sind, sodass die Zeit um einander wahrzunehmen vernachlässigbar klein ist. Für B_1 beträgt die Länge des Zuges $2s_1 = 2 \frac{s_2}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$. Auch für B_1 sitzt B_2 in der Mitte des Zuges.

Für B_1 beträgt die Zeit des Signals vom Knopf bis zur Lampe $t_1 = \frac{t_2}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$. Während dieser Zeit bewegt sich der Zug für ihn um die Strecke $\Delta s_1 = v \cdot \Delta t_1 > 0$ nach Osten. Im Moment wo jeweils die Lampe aufleuchtet, befindet sich daher die westliche Lampe für B_1 in der Distanz $d_1 = s_1 - \Delta s_1$ und die östliche Lampe in der Distanz $d_2 = s_1 + \Delta s_1$. Wegen $\Delta s_1 > 0$ ist daher $d_1 < d_2$. Die Zeiten, die die beiden Blitze bis zu B_1 brauchen, sind daher verschieden. Es gilt daher:

$$t_{1,1} = \frac{d_1}{c} < \frac{d_2}{c} = t_{1,2}$$

Konsequenz: Was von B_2 gleichzeitig wahrgenommen wird, kann für B_1 als ungleichzeitig erscheinen. Der Begriff der Gleichzeitigkeit ist daher systemabhängig!

Das hat Anwendungen z.B. beim Dopplereffekt. Beispiel: Rotverschiebung der Spektrallinien fliehender, sehr entfernter Sterne.

2.4.6 Ruhemasse und dynamische Masse

Was passiert mit einer Masse m , wenn man sie mit konstanter Beschleunigung a beschleunigt? — Es gilt $v = a \cdot t \leq c = a \cdot t_0$. Für $a = 10 \text{ m/s}^2$ beträgt dann t_0 etwa eine Zeit in der Größenordnung eines Jahres. Eine grösse Geschwindigkeit als c kann nicht sein. Was muss somit passieren?

Weil t systemabhängig ist, muss bei gleichmässiger Beschleunigung wegen $a = \frac{v}{t}$ auch a systemabhängig sein. Es gilt hier:

$$a_2 = \frac{v}{t_2} = \frac{v}{t_1 \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} = a_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

$$\Rightarrow a_1 = a_2 \cdot \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}$$

Wenn für einen Beobachter in S_2 die Beschleunigung konstant ist, muss sie daher für einen Beobachter in S_1 abnehmen. Das könnte man sich durch die Annahme erklären, dass eine Widerstandskraft gegen die Beschleunigung auftritt. Wegen $F = a \cdot m$ kann man daher vermuten, dass bei gleichbleibender Kraft F und abnehmender Beschleunigung a für den Beobachter B_1 die Masse zunehmen müsste:

$$F = a_1 \cdot m_1 = a_2 \cdot \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2} \cdot m_1 = a_2 \cdot m_2 \Rightarrow m_1 = \frac{m_2}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

Kann das stimmen?

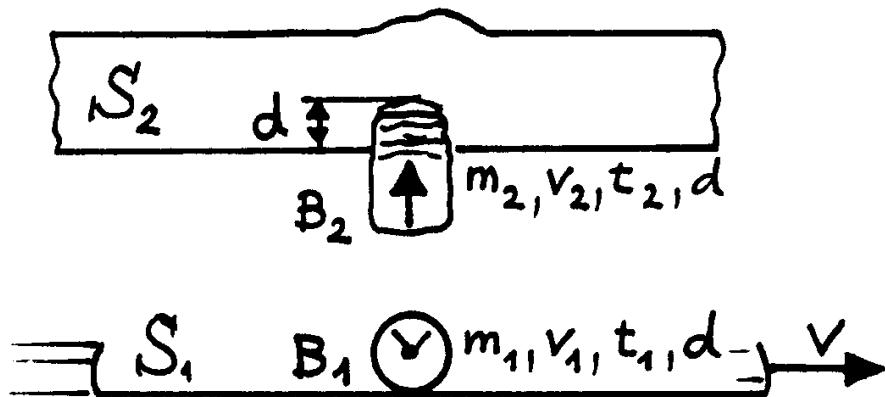


Abbildung 20: Gedankenexperiment zur dynamischen Masse

Wir machen wiederum ein Gedankenexperiment. In einem System S_2 fahre ein Auto der Masse m_2 mit der Geschwindigkeit v_2 senkrecht in Richtung Norden in eine Wand. Dabei wird der Impuls $p_2 = v_2 \cdot m_2$ auf die Wand übertragen und schlägt dabei ein Loch der Tiefe d , die als Mass für den Impuls gelten soll. Ein fast mit Lichtgeschwindigkeit v nach Osten vorbeifliegender Beobachter B_1 (System S_1) registriert eine etwas andere Situation: Einerseits fühlt er sich in Ruhe, das System S_2 mit dem Crash-Auto ist für

ihn in Bewegung. Andererseits ist die Lochtiefe d für den vorbeifliegenden Beobachter B_1 dieselbe wie für einen Beobachter B_2 im System S_2 , da für beide der Abstand zur Wand nicht ändert und beide sich in Nordrichtung nicht bewegen. Der Impuls muss daher in beiden Systemen derselbe sein: $p_1 = m_1 \cdot v_1 = p_2 = m_2 \cdot v_2$. Nun ist

$$v_1 = \frac{d}{t_1}, \quad v_2 = \frac{d}{t_2} = \frac{d}{t_1 \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \Rightarrow v_1 = \frac{v_2}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

Wegen $m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2$ muss daher gelten:

$$m_2 = m_1 \cdot \frac{v_1}{v_2} = m_1 \cdot \frac{v_2}{v_2 \cdot \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} = \frac{m_1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

Nach dem Gefühl des „vorbiefliegenden“ Beobachteten B_1 ist S_1 in Ruhe. Er erfährt das System mit dem Crash-Auto als in Bewegung befindlich. $m_1 := m_0$ nennen wir daher die **Ruhemasse**, die in einem anderen bewegten System nach der folgenden Gleichung zu $m_2 := m'$ wächst:

$$m' = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

m' heisst die **dynamische Masse**. Auch diese Formel ist experimentell geprüft.

2.4.7 Masse und Energie

Wenn auf eine frei bewegliche Masse m ständig eine Kraft F wirkt, so wird die Masse nach der Formel $F = a \cdot m$ durch die Beschleunigung a beschleunigt. Wir bezeichnen hier die dynamische Masse mit m und die Ruhemasse mit m_0 . Wir betrachten vorerst einmal nur kleine Geschwindigkeiten v . Ohne uns mal gross um die letzte Sauberkeit zu kümmern, versuchen einmal rein explorativ mit kleinen Grössen zu rechnen. Die kinetische Energie der Masse nimmt dann nach der folgenden Formel zu: $dE_{kin} = F \cdot ds$ (dE, ds „infinitesimal“ klein, entstanden gedacht aus $\Delta E, \Delta s$). Die Kraft F ist in der Physik im allgemeinen Fall die Impulsänderung pro Zeit, d.h. die Ableitung des Impulses $p = m \cdot v$ nach der Zeit t :

$$\begin{aligned} F &= \frac{dp}{dt} = \frac{d(m \cdot v)}{dt} = \frac{dm}{dt} \cdot v + m \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{dm}{dt} \cdot v + m \cdot a \\ \Delta E_{kin} &= \int_0^s F \, ds = \int_0^s \left(\frac{dm}{dt} \cdot v + m \cdot a \right) \, ds = \int_0^s \frac{dm}{dt} \cdot v \, ds + \int_0^s m \cdot a \, ds = \int_0^s \frac{dm}{dt} \cdot v \, ds \frac{dt}{dt} + \int_0^s m \cdot \frac{dv}{dt} \, ds \\ &= \int_0^t \frac{dm}{dt} \cdot v \frac{ds}{dt} \, dt + \int_0^v m \cdot \frac{ds}{dt} \, dv = \int_0^t \frac{dm}{dt} \cdot v^2 \, dt + \int_0^v m \cdot v \, dv = \int_{m_0}^m v^2 \, dm + \int_0^v m \cdot v \, dv \end{aligned}$$

Nun rechnet man:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \Rightarrow v = c \cdot \sqrt{1 - (\frac{m_0}{m})^2} \Rightarrow \frac{dv}{dm} = \frac{c \cdot m_0}{m^3 \sqrt{1 - (\frac{m_0}{m})^2}} \text{ und } v \cdot \frac{dv}{dm} = \frac{c^2 m_0^2}{m^3} \Rightarrow dm = \frac{v m^3}{c^2 m_0^2} dv$$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \Delta E_{kin} &= \int_{m_0}^m v^2 dm + \int_0^v m \cdot v dv = \int_{m_0}^m v^2 dm + \int_{m_0}^m \frac{c^2 m_0^2}{m^2} dm = \int_{m_0}^m (c \cdot \sqrt{1 - (\frac{m_0}{m})^2})^2 + \frac{c^2 m_0^2}{m^2} dm = \\ &= \int_{m_0}^m (c^2 \cdot (1 - (\frac{m_0}{m})^2) + \frac{c^2 m_0^2}{m^2}) dm = c^2 \cdot \int_{m_0}^m (1 - (\frac{m_0^2}{m^2}) + \frac{m_0^2}{m^2}) dm = c^2 \cdot \int_{m_0}^m dm = c^2 \cdot (m - m_0) = \Delta m \cdot c^2 \end{aligned}$$

Wir erhalten also hier eine aus der Literatur sehr, sehr bekannte Formel:

$$Es \ gilt: \quad \Delta E_{kin} = \Delta m \cdot c^2 = (m - m_0) c^2 \quad \rightsquigarrow \quad m = m_0 + \frac{E_{kin}}{c^2}$$

Masse ist also Energie! Das zeigt sich bei der Kernspaltung oder der Atomexplosion infolge Kettenreaktion! Der **Massedefekt** Δm ist proportional der oft äusserst grossen freigesetzten Energie: $\Delta E = (m - m_0) c^2$. Daher können wir allgemein Masse und Energie als äquivalente Begriffe ansehen und daher auch der **Ruhemasse** m_0 die **Ruheenergie** $E_0 = m_0 \cdot c^2$ zuordnen. Das Experiment zeigt, dass Massen vollständig in Energie umsetzbar sind. Z.B. beim Zusammenstoss eines Teilchen mit seinem Antiteilchen (1932 schon beobachtet!). Die **gesamte Energie** bewegter Materie ist:

$$E_g = E_{kin} + m_0 \cdot c^2 = m \cdot c^2$$

Umgekehrt ist Energie immer auch Masse, auch wenn sie in einem Feld steckt (Feldenergie). So haben auch Photonen eine Energie und somit eine Masse. Auf Licht wirkt daher auch das Gravitationsgesetz. Ist die Gravitationskraft so gross, dass Licht aus einem Stern nicht mehr entfliehen kann, so spricht man von einem **schwarzen Loch**.

2.5 Materiewellen, Quantentheorie, Kosmologie und Weltbild

2.5.1 Dualismus Wellen–Korpuskel

Was ist die Natur des Lichtes? Betrachten wir die Lichtbrechung (z.B. beim Übergang von Luft in Glas). Diese lässt sich durch Wellen erklären. Man spricht von der **Wellennatur** des Lichtes.

1888 beobachtete Heinrich Hertz, dass mit UV-Licht bestrahlte Metalloberflächen Elektronen aussenden (Photoeffekt). Heinrich Lenard konnte später zeigen, dass die kinetische Energie der Elektronen unabhängig ist von der Lichtintensität. Das lässt sich nicht mit Lichtwellen als elektromagnetische Wellen erklären. Es gilt $E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = h \nu - W$. W ist eine Materialkonstante, ν die Lichtfrequenz und h das Planksche Wirkungsquantum. (Max Plank war 1900 erstmals auf h gestossen.) 1905 gelang es Albert Einstein in seinem Artikel „Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt“ die Ergebnisse zu deuten: Er ging von der Annahme aus, das Licht bestehe (parallel zu seiner Wellennatur) aus **Photonen (Korpuskeln)** der Energie $E = h \nu$ (Planksches Gesetz). Damit war die Dualität Welle–Korpuskel geboren. Dafür erhielt Einstein 1921 den Nobelpreis. Der scheinbare Widerspruch lässt sich nur lösen, wenn man tiefer in die Physik eindringt (Wahrscheinlichkeitsinterpretation, Wellenpaket etc.).

Da Energie und Masse äquivalent sind, kann man jetzt die Photonenmasse berechnen:

$$E = h \nu = m c^2 = (m_0 + \frac{E}{c^2}) c^2$$

Daraus folgt, dass die Ruhemasse des Photons $m_0 = 0$ sein muss. Daher muss auch die Ruheenergie des Photons $E_0 = m_0 \cdot c^2 = 0 \cdot c^2 = 0$ sein! Wir fassen das bisher über das Photon Gesagte zusammen:

Konsequenz: Ein Beobachter, den wir in Gedanken auf einem Photon zwischen Aussendungsort und Ankunftszeit reiten lassen, muss feststellen, dass die Übermittlungszeit, die Länge des Übermittlungsweges, die Ruhemasse und die Ruheenergie für ihn alle 0 sind. Das heißt, dass das Photon aus dieser Sicht gar nicht in Erscheinung tritt oder gar nicht existiert. Es ist nur für einen Betrachter ausserhalb des Teilchens durch seine Ankunft wahrnehmbar. Seine Realität kann immer nur durch seine Ankunft wahrgenommen werden, nie aber unterwegs! Damit wird das heimliche Postulat der bedingungslosen Existenz alles physikalisch Wahrnehmbaren in Frage gestellt resp. relativiert.

Da Photonen eine Masse haben, müsste sie auch einen Impuls $p = m v = m c$ haben. Für diesen gilt mit der Wellenlänge λ und $c = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \nu$:

$$p = m c = \frac{E}{c^2} \cdot c = \frac{\nu \cdot h}{c^2} \cdot c = \frac{\nu \cdot h}{c} = \frac{c \cdot h}{c \cdot \lambda} = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow p = \frac{h}{\lambda}$$

1923 stellte Prinz Louis de Broglie die Hypothese auf, dass diese Wellen–Korpuskel–Dualität auch für Elektronen gelten. Tatsächlich gelang es dann, die Wellennatur der bisher als Korpuskel bekannten Elektronen (Träger der Elementarladung) auch experimentell durch Beugungerscheinungen nachzuweisen (Clinton Davisson, George Thompson). Interessant ist, dass Vater Joseph Thompson den Nobelpreis für den Beweis der Teilcheneigenschaft der Elektronen und Sohn George Thompson 30 Jahre später den Nobelpreis für den Beweis der Welleneigenschaften der Elektronen bekommen hatte!

Man kann das Prinzip von de Broglie auch auf andere Materiearten anwenden und z.B. nach der Formel $E = m c^2 = h \nu = h \frac{c}{\lambda}$ aus der Masse m eines Stückes Materie die Wellenlänge λ oder die Frequenz ν bestimmen.

2.5.2 Die Unschärferelation

Z.B. bei Elektronen und anderen Teilchen zeigt es sich, dass die Teilchenbahnen wegen den Beugungseffekten nur mit der Genauigkeit der de-Broglie–Wellenlänge festlegbar ist. Speziell bei Elektronen ist es nicht möglich, einen Strahl zu erzeugen, in dem die Teilchen einen genau bestimmten Ort (z.B. Durchgangsort durch eine Lochblende mit festgelegter Öffnung) und eine genau bestimmte Geschwindigkeit haben. Werner Heisenberg formulierte die Gegebenheiten mathematisch in den **Unschärferelationen**:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq h, \quad \Delta E \cdot \Delta t \geq h$$

Solche Gesetze schränken die Genauigkeit der Berechenbarkeit des Ablaufs von Naturvorgängen ein. Vor allem aber werden die oben gemachten Überlegungen für $t_2 = 0$ und $s_2 = 0$ bei einem Lichtquant wieder relativiert.

Heisenberg (1901-1976) fiel an der Abschlussprüfung in Physik fast durch. Zusammen mit Max Born und Pascual Jordan entwickelte er 1926 die Quantentheorie (heute Quantenmechanik). 1927 stellte er die Unschärferelation auf. 1932 erhielt er den Nobelpreis. Ein Beitrag stammt auch von Schrödinger (Wellenmechanik), der 1933 den Nobelpreis erhielt.

Schon Immanuel Kant hat von der philosophischen Seite her gefolgert, dass ein Subjekt nie ganz Objekt der Erkenntnis sein kann. Objektive Erkenntnis ist immer nur in einem eingeschränkten Rahmen von Voraussetzungen und Begriffen möglich. Entfernt man den Rahmen, so fällt man ins Bodenlose. Kant unterscheidet zwischen „meiner Welt“, der subjektiv wahrgenommenen Welt also, und „der Welt an sich“,

der so gedachten objektiven Welt, die in letzter Konsequenz sich der Wahrnehmung immer entzieht. Kant zeigt so die **Grenzen der Erkenntnis**. Heisenberg hat nun Grenzen der Erkenntnis in der Mikrowelt der physikalisch messbaren Größen mit einem mathematisch formulierten Gesetz sichtbar gemacht. Damit werden diese Größen als gut gemeinte Begriffsbildungen entlarvt, deren Sinnhaftigkeit bei genauerem Studium an Grenzen stösst.

2.5.3 Ausblick auf die Teilchenstruktur der Materie

Demokrit postulierte schon in der Antike, dass sich die Materie aus Atomen (unteilbaren Teilchen) zusammensetzt.

Dalton (bekannt als der erste Chemiker, Bierbrauer) fand das Gesetz der konstanten und multiplen Proportionen, was auf kleinste Einheiten schliessen lässt.

1885 entdeckte der Gymnasiallehrer **Balmer** aus Basel die Balmer-Serie (Spektrallinienserie im Wasserstoff). Damit beginnt die **Atomphysik**.

1909 entdeckte Ernest **Rutherford** den Atomkern aufgrund von Streuexperimenten. Sein Atommodell hat die Struktur eines Planetensystems (Kern, kreisende Elektronen).

Nach Niels **Bohr** (ca. 1913) ist die nächste Verfeinerung des Atommodells benannt. In ihm können sich die Elektronen nur auf bestimmten Bahnen bewegen, die eine sogenannte „Quantenbedingung“ erfüllen (**Quanten** sind kleinste Einheiten). Bei stehenden Elektronenwellen ist der Bahnumfang ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge. Man spricht schon von der Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens, die zeitlich nicht ändert. Wegen der Unschärferelation verliert das Modell für kleine Bahnen aber den Sinn. In der nächsten Verfeinerung operiert man mit dem Begriff des Orbitals. Ein Bereich mit hoher Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons heisst Orbital \leadsto **Orbitalmodell**.

In der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts ist klar geworden, dass die Atome eine innere Struktur besitzen. Man hat dann nach und nach entdeckt, dass die Teilchen, welche diese innere Struktur ausmachen (z.B. Kern: Protonen und Neutronen) wieder eine innere Struktur haben. Auf diese Weise gelangt man zu den Elementarteilchen, welche man sich heute wiederum aus den Quarks aufgebaut denkt. Das Atom, das Unteilbare, ist also teilbar geworden — zum Nutzen und zum Schaden der Menschen, wie man auch aus den nie endenden Energiediskussionen weiss.

2.5.4 Ausblick auf die Kosmologie

Heute wissen wir aus den Beobachtungen und ihren plausibelsten Erklärungshypothesen auf der Grundlage der Physik und der Mathematik sehr viel über das für uns vorläufig unerreichbar ferne Weltall. Die wichtigsten Punkte seien hier zusammengefasst:

1. Es gibt noch andere Sonnensysteme, die Planeten besitzen. Wir sind nicht die einzigen.
2. Sterne oder Sonnen haben eine beschränkte Lebensdauer. Sie haben eine Geburt aus einer Gaswolke und später einmal einen Tod als weisser Zwerg, Neutronenstern oder als schwarzes Loch.
3. Unsere Sonne ist in der Klassifikation im Herzsprung–Russel–Diagramm (Spektraltyp–Temperatur–Beziehung) ein G5 –Stern im mittleren Lebensalter. Später wird sie sich einmal zu einem roten Riesen ausdehnen und dann auch die Erdbahn mitsamt der Erde schlucken, bevor die später dann kollabiert.
4. Viele Sterne als Gruppe können Sternhaufen diverser Art bilden. Sternhaufen bilden wiederum lokale Haufen und dann Galaxien diverser Art. Wir gehören zur Galaxie der Milchstrasse, die noch niemand von aussen gesehen hat. Dass die Milchstrasse eine Galaxie ist, wurde von Becker in Basel durch Abstandsvermessungen an sehr vielen Sternen festgestellt. Im Diagramm werden so Spiralarme sichtbar. Wir sind also in einer Spiralgalaxie zuhause.
5. Viele Galaxien bilden Galaxienhaufen. (Wir gehören zum Virgo–Haufen.) Man kann auch Superhaufen finden. Schliesslich bildet das Ganze den Kosmos.

6. Je entfernter eine Galaxie ist, desto stärker sind die Spektrallinien ins Rote verschoben. Mit Hilfe des Doppler-Effektes erklärt man die Rotverschiebung durch eine Fluchtbewegung. Die Fluchgeschwindigkeit kann man berechnen. Das Hubbelsche Entfernungsgesetz sagt, dass die Fluchgeschwindigkeit mit dem Abstand etwa proportional zunimmt. Grenzgeschwindigkeit ist aber die Lichtgeschwindigkeit. Auf diese Weise kommt man zum Begriff des Radius des Universums.
7. Rechnet man aus dem Radius des Universums und der Fluchgeschwindigkeit c die Fluchtzeit zurück, so kommt man zum Begriff des Alters des Universums. An den Beginn stellt man den Urknall.
8. Die Frage, ob sich das Universum in alle Ewigkeit ausdehnen wird — oder ob es einmal wieder in sich zusammenfallen wird, letztlich also auch eine Frage nach der kinetischen und der potentiellen u.s.w. Energie — ist in den letzten Jahren beantwortet worden: Das Universum wird sich immer ausdehnen und somit ausdünnen. (Doch inzwischen gibt es schon wieder eine Verfeinerung der Theorie die besagt, dass sich das Universum nach dem Ausdünnen wieder zusammenziehen wird und vermutlich dann wieder kollabiert.)
9. Ein Blick an das Firmament ist für uns immer ein Blick in die Vergangenheit. Denn das Licht, dass im Moment in unser Auge fällt, war während der Zeit $t = \frac{s}{c}$ unterwegs, kommt also aus der Vergangenheit. Diese Vergangenheit ist umso ferner, je weiter das Licht herkommt. Wäre es seit dem Urknall unterwegs, so müsste man also den Urknall sehen, und dies in allen Richtungen! Das aber geht leider nicht, weil damals die physikalischen Realitäten anders waren. Es gab insbesondere noch keine Sterne und Galaxien, die Licht ausgesendet haben, denn diese haben sich erst später gebildet. Will man diese Dinge verstehen, so muss man sich tiefer in die Theorie einarbeiten.
10. Die Frage, ob nicht neuere Messungen und feinere Beobachtungen uns irgendwann einmal zu einem verfeinerten Modell des Universums zwingen, ist von der Natur der Frage her eine immer ungelöste Frage. Denn wir kennen immer nur die Resultate der Messungen der Vergangenheit mit Bestimmtheit, nie aber die Resultate der Messungen der Zukunft.
11. Alle diese Einsichten sind nicht möglich aufgrund direkter Wahrnehmung. Es handelt sich immer um Deduktionen mit Hilfe der Mathematik aus Modellen resp. Axiomensystemen (Axiome sind hier physikalische Annahmen). Sie stimmen nur solange, wie auch die Mathematik stimmt und auch die richtige Mathematik ist für den betrachteten Fall — und auch nur solange als die Axiome gültig sind. Vor allem ist die Annahme, dass überall die gleichen Naturgesetze gelten, ein Axiom, das bisher nur auf der Erde resp. in der näheren Sonnenumgebung überprüfbar war.
12. Wer mehr über diese Dinge erfahren und auch mitreden will, der hat ein Studium vor sich. Jedoch ist kaum bestreitbar, dass mit dem Alter, der Grösse, der Masse und der künftigen Ausdünnungsdauer des Universums auch die Grenzen der makroskopischen physikalischen Welt sichtbar gemacht sind. Auch hier stellt sich schliesslich die Frage der Sinnhaftigkeit der Begriffsbildungen des Mikrokosmos bei der Anwendung auf den Makrokosmos.

Dem Architekten sollte nun die folgende Frage sehr wichtig sein: Wie tangieren diese Weltansichten bewusst oder unbewusst die Architektur? — Eines kann der Architekt sicher nie, nämlich aus der Realität austreten. Er ist immer irgendwie ein Kind seiner Zeit, tangiert von den Weltbildern, die zu seiner Zeit gehören.

Zentral im aktuellen Weltbild ist die Erkenntnis und die Bezifferbarkeit der Grenzen des physikalischen Makro- und auch des Mikrokosmos vor dem Hintergrund der bereits abgesteckten Grenzen der Erkenntnis und der Begrifflichkeit (im Vergleich zu den „Chiffren“ Jaspers). Dabei mutet es seltsam an, des gerade jetzt, in dieser unseren Zeit, auch die Grenzen des Menschen auf dem Planeten Erde ins Scheinwerferlicht der Aktualität treten: Bewusst geworden sind ebenso die ökologischen Grenzen, die Grenzen der Verdreckung, der Ernährbarkeit, der Reserven, des Wohlstandes, des Wachstums, die Grenzen der Abgrenzbarkeit diverser Kulturen, und die Grenzen der Beschränkbarkeit von Konflikten vor dem Abgrund zur totalen Vernichtung und so fort.

Ausgedehntes Bildmaterial: Vgl. Materialien zur Architektur.

2.6 Rückblick auf die Ursprünge mathematischer Begriffsbildungen

Man kann sich nun rückblickend fragen, wie der Mensch denn dazu gekommen sein mag, überhaupt mathematische Begriffe wie Zahlen, oder geometrische Objekte, zu bilden. Sicher ist die Entwicklungsstufe solcher Begriffsbildungen kulturabhängig. Jedoch kennen wir vermutlich keine Kultur, die keinen Ansatz etwa zum Zahlbegriff entwickelt hat, obwohl je nach Nutzen der beobachtbare Fortschritt gross oder klein ist. Am Polarkreis z.B., wo die Menschen im ständigen Kampf gegen Kälte und Eis nur wenige Dinge ansammeln konnten und immer nur wenige Tiere zum Essen gejagt hatten, denn viele konnten sie nicht schleppen, kennt man teils in den Sprachen nur Ausdrücke für die ersten Zahlen. Weitere, grössere Zahlen waren ja nutzlos. In unseren Breiten dagegen war es nützlich, wenn auch vorerst nur theoretischer Art, sogar unendliche Mächtigkeiten zu denken und damit zu arbeiten. Der Mensch hat also die mathematischen Begriffe bedarfsabhängig entwickelt.

Es ist gut vorstellbar — und aus Plausibilitätsgründen auch zu vermuten, dass der Mensch die mathematischen Grundbegriffe vorerst aus der Wahrnehmung abgeleitet hat. Geometrische Grundgebilde wie Punkt, Gerade, Kreis, Ebene, Raum beruhen aus dieser Sicht auf dem Gesichtssinn und der Fähigkeit der Bewegung, des Durchschreiten des Raumes und der daraus folgenden Uferfahrungen. Symmetrie hätte daher seine begrifflichen Wurzeln im Gleichgewichtssinn sowie in der durch den Gesichtssinn gegebenen Fähigkeit zum Vergleich. Zahlen wiederum haben in dieser Sichtweise ihren Geburtsort im Rhythmus, z.B. gegeben durch die Atmung oder den Herzschlag. Andererseits vielleicht auch im Gesichtssinn: Infolge der Fähigkeit zur Unterscheidung von Objekten, also infolge der Urteilsfähigkeit, oder infolge der Fähigkeit zur Zusammenfassung, zum „Zusammensehen“ von Objekten oder auch in der Fähigkeit zur abfolgeartigen Identifikation von Dingen. Historisch gesehen mag der Prozess der Teilung einer Einheit, oder einer Sache, zu den natürlichen Zahlen geführt haben bevor der Prozess des ständigen Anreichens oder Weiterschreitens zentral wurde, wie etwa bei Perlen auf einer Schnur ohne Ende. Das kann die späte Entdeckung der Null als Zahl erklären. Teilen ist zudem moralischer als anhäufen.

Jedoch der Schritt vom prozesshaften zählen gewonnenen Unendlichen, der Schritt also vom Unendlichen von der Art der natürlichen Zahlen zum Unendlichen hin von der Art der Mächtigkeit der reellen Zahlen zwischen 0 und 1, kann nicht aus der endlichen materiellen physikalischen Welt begründet werden, denn diese bleibt immer endlich. Unendliche Mächtigkeiten verschiedener, unvergleichbarer Stufen

zu erkennen wie etwa die erwähnten natürlichen Zahlen oder reellen Intervalle, bedarf neu des Willens zur Abstraktion, zur Bildung neuer Begriffe, aufgrund eines reifen Urteils. Ebenso reicht die Hoffnung ins Unendliche, wenigstens zeitlich. Ähnlich verhält es sich mit unendlich ausgedehnten Gebilden in der Geometrie (Geraden, Ebenen u.s.w.) und unendlich fernen Gebilden in der projektiven Geometrie. Wille, Urteil und Modell mögen in der endlichen Welt gereift sein, doch reicht die Erkenntnis der verschiedenen Unendlichkeiten dann durch den Prozess der Abstraktion über diese endliche Welt hinaus in eine andere, nicht mehr durch das Endliche abschliessend begründbare Begriffswelt, die daher keine materielle mehr sein kann. Man mag sie, sofern man will, eine Welt der geistigen Objekte oder Realitäten nennen. Durch den Tatbeweis steht jedoch fest, dass der Mensch durch Abstraktion den Sprung in eine höhere Organisationsform schafft, die in der materiellen Wirklichkeit nach heutigem Wissensstand keine physikalische Entsprechung mehr findet. Oder doch? Und wenn ja, dann wo?

Neugierig machen einem diese Fragen allemal, und staunen können wir über die Resultate. Wir erfahren hier etwas über die Grenzen unserer Erkenntnismöglichkeiten, wir schreiten, doch noch halbwegs begreifend, ins „Umgreifende“. Weiter kommen wir dort nur, wenn wir uns keine Bilder mehr machen, die ja immer aus der materiellen, physikalischen Erfahrungswert entlehnte Bilder sind; wenn wir also abstrakt, abstrahiert vom Bildhaften, nach unseren Möglichkeiten nur noch formal, weiterschreiten im Vertrauen auf das schon errichtete Fundament...

ENDE