Uebungen ▮ Exercices

3. Algebraische und symbolische Stärken ▮ Forces algébriques et symboliques

Die Gliederung dieses Kurses folgt in groben Zügen dem Buch von Nancy Blachman: A Practical Approach.... Hinweis: Kapitel 3 lesen!
▮ L'articulation de ce cours correspond à peu près à celle du livre de Nancy Blachman: A Practical Approach....
Indication: Lire le chapitre 3.

Run mit WIN+*Mathematica* Version 5.2
▮ Testé avec *Mathematica* version 5.2+WIN

Aufgabe 1 ▮ Problème 1

(a)

Löse folgende Gleichung: ▮ Résous l'équation suivante:

```
In[1]:= Solve[x^2 + 2x + 1 == 0]

Out[1]= {{x → -1}, {x → -1}}
```

(b)

Löse folgende Gleichung: ▮ Résous l'équation suivante:

```
In[2]:= Solve[ax^2 + bx + c == 0,x]

Out[2]= {{}}
```

(c)

Löse folgende Gleichung: ■ Résous l'équation suivante:

```
In[3]:= Solve[{x + y== 5, 2x + 6y == 23}]
```

Out[3]= $\left\{\left\{x \to \frac{7}{4},\ y \to \frac{13}{4}\right\}\right\}$

Aufgabe 2 ■ Problème 2

(a)

Faktorisiere das Polynom 1-x^n. Entdeckst Du ein Gesetz?
■ Factorise le pôlynome 1-x^n. Découvres-tu une loi?

```
In[4]:= Do[Print[1 - x^n,"==",Factor[1 - x^n]],{n, 2, 9}]
```

$1 - x^2 == -(-1+x)\,(1+x)$

$1 - x^3 == -(-1+x)\,(1+x+x^2)$

$1 - x^4 == -(-1+x)\,(1+x)\,(1+x^2)$

$1 - x^5 == -(-1+x)\,(1+x+x^2+x^3+x^4)$

$1 - x^6 == -(-1+x)\,(1+x)\,(1-x+x^2)\,(1+x+x^2)$

$1 - x^7 == -(-1+x)\,(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)$

$1 - x^8 == -(-1+x)\,(1+x)\,(1+x^2)\,(1+x^4)$

$1 - x^9 == -(-1+x)\,(1+x+x^2)\,(1+x^3+x^6)$

(b)

Faktorisiere das Polynom 1-x^11
■ Factorise le pôlynome 1-x^11.

```
In[5]:= Factor[1 - x^11]
```

Out[5]= $-(-1+x)\,(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10})$

(c)

Faktorisiere das Polynom 1-x^...... (Zahl einsetzen!)
■ Factorise le pôlynome 1-x^...... (Mettez un nombre!)

```
In[6]:= Factor[1 - x^13]
```

Out[6]= $-(-1+x)\,(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10}+x^{11}+x^{12})$

Aufgabe 3 ▮ Problème 3

(a)

Mache mit "Apart" eine Partialbruchzerlegung:
▮ Fais avec "Apart" une décomposition d'une fraction rationelle en éléments simples:

```
In[7]:= Apart[x/(x^2 + 5x + 6)]
```

Out[7]= $-\frac{2}{2+x}+\frac{3}{3+x}$

(a)

Mache mit "Apart" eine Partialbruchzerlegung:
▮ Fais avec "Apart" une décomposition d'une fraction rationelle en éléments simples:

```
In[8]:= Apart[(2x + 7)/(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)]
```

Out[8]= $\frac{5}{(1+x)^3}+\frac{2}{(1+x)^2}$

Aufgabe 4 ▮ Problème 4

(a)

Vereinfachung trigonometrischer Funktionen: Setzt Trig->True:
▮ Simplifications de fonctions trigonométriques: Mettez Trig->True:

```
In[9]:= Expand[Cos[x] Cos[y] + Sin[x] Sin[y],Trig->True]

Out[9]= Cos[x] Cos[y] + Sin[x] Sin[y]

In[10]:= Factor[Cos[x] Cos[y] + Sin[x] Sin[y],Trig->True]

Out[10]= Cos[x - y]
```

(b)

Vereinfachung trigonometrischer Funktionen: Setzt Trig->True:
▮ Simplifications de fonctions trigonométriques: Mettez Trig->True:

```
In[11]:= Expand[Cos[x] Sin[y] + Sin[x] Cos[y],Trig->True]

Out[11]= Cos[y] Sin[x] + Cos[x] Sin[y]
```

```
In[12]:= Expand[Cos[x] Sin[y] + Sin[x] Cos[y],Trig->True]

Out[12]= Cos[y] Sin[x] + Cos[x] Sin[y]
```

(c)

Vereinfachung von Exponentialfunktionen: Setzt Trig->True:

■ Simplifications de fonctions exponentielles: Mettez Trig->True:

```
In[13]:= Expand[E^(-I x) + E^(I x),Trig->True]
```

Out[13]= $e^{-i x} + e^{i x}$

```
In[14]:= Factor[E^(-I x) + E^(I x),Trig->True]
```

Out[14]= $e^{-i x} (1 + e^{2 i x})$

Aufgabe 5 ■ Problème 5

(a)

Generiere mit "Array" eine 2 x 2-Matrix mit den Elementen b[i, j]:

■ Génère avec "Array" une matrice 2 x 2 avec les éléments b[i, j]:

```
In[15]:= Clear[b]; m = Array[b,{2,2}]

Out[15]= {{b[1, 1], b[1, 2]}, {b[2, 1], b[2, 2]}}
```

(b)

Invertiere und Transponiere m:

■ Invertis et transforme m:

```
In[16]:= Inverse[m]
```

Out[16]= $\left\{\left\{\frac{b[2,2]}{-b[1,2]\,b[2,1]+b[1,1]\,b[2,2]}, -\frac{b[1,2]}{-b[1,2]\,b[2,1]+b[1,1]\,b[2,2]}\right\}, \left\{-\frac{b[2,1]}{-b[1,2]\,b[2,1]+b[1,1]\,b[2,2]}, \frac{b[1,1]}{-b[1,2]\,b[2,1]+b[1,1]\,b[2,2]}\right\}\right\}$

```
In[17]:= Transpose[m]

Out[17]= {{b[1, 1], b[2, 1]}, {b[1, 2], b[2, 2]}}
```

(c)

Generiere mit "Array" eine 2 x 2-Matrix mit den Elementen c[i, j]:

■ Génère avec "Array" une matrice 2 x 2 avec les éléments c[i, j]:

```
In[18]:= Clear[c]; n = Array[c,{2,2}]

Out[18]= {{c[1, 1], c[1, 2]}, {c[2, 1], c[2, 2]}}

In[19]:= MatrixForm[n]

Out[19]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} c[1,1] & c[1,2] \\ c[2,1] & c[2,2] \end{pmatrix}$$

(d)

Berechne m n und m.n . Was ist der Unterschied?

▮ Calcule m n et m.n . Quelle est la différence?

```
In[20]:= m n

Out[20]= {{b[1, 1] c[1, 1], b[1, 2] c[1, 2]}, {b[2, 1] c[2, 1], b[2, 2] c[2, 2]}}

In[21]:= m.n

Out[21]= {{b[1, 1] c[1, 1] + b[1, 2] c[2, 1], b[1, 1] c[1, 2] + b[1, 2] c[2, 2]},
          {b[2, 1] c[1, 1] + b[2, 2] c[2, 1], b[2, 1] c[1, 2] + b[2, 2] c[2, 2]}}

In[22]:= MatrixForm[m n]

Out[22]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} b[1,1]\,c[1,1] & b[1,2]\,c[1,2] \\ b[2,1]\,c[2,1] & b[2,2]\,c[2,2] \end{pmatrix}$$

```
In[23]:= MatrixForm[m.n]

Out[23]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} b[1,1]\,c[1,1]+b[1,2]\,c[2,1] & b[1,1]\,c[1,2]+b[1,2]\,c[2,2] \\ b[2,1]\,c[1,1]+b[2,2]\,c[2,1] & b[2,1]\,c[1,2]+b[2,2]\,c[2,2] \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 ▮ Problème 6

(a)

Integration eines Ausdrucks:

▮ Intégration d'une expression:

```
In[24]:= w = 1/(x^3 + 1)
```

Out[24]= $\frac{1}{1+x^3}$

```
In[25]:= u = Integrate[1/(x^3 + 1),x]
```

Out[25]= $\frac{\text{ArcTan}\left[\frac{-1+2x}{\sqrt{3}}\right]}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\text{Log}[1+x] - \frac{1}{6}\text{Log}[1-x+x^2]$

(b)

Differenziere das Resultat:
■ Différencie le résultat:

```
In[26]:= v = D[%,x]
```

Out[26]= $\frac{1}{3\,(1+x)}-\frac{-1+2\,x}{6\,(1-x+x^2)}+\frac{2}{3\,\left(1+\frac{1}{3}\,(-1+2\,x)^2\right)}$

(c)

Hat man nun wieder den ursprünglichen Ausdruck?
■ A-t-on de nouveau l'expression d'origine?

```
In[27]:= Together[v]
```

Out[27]= $\frac{1}{(1+x)\,(1-x+x^2)}$

```
In[28]:= v=ExpandAll[Together[v]]
```

Out[28]= $\frac{1}{1+x^3}$

```
In[29]:= w === v
```

Out[29]= True

Aufgabe 7 ■ Problème 7

(a)

Exakter Wert eines Integrals :
■ Valeur exacte d'une intégrale:

```
In[30]:= Integrate[x y^2,{x,0,1},{y,0,Sqrt[1-x]}]
```

Out[30]= $\frac{4}{105}$

(a)

Exakter Wert eines Integrals :
■ Valeur exacte d'une intégrale:

```
In[31]:= Integrate[y Exp[x^2],{x,0,1},{y,0,Sqrt[x]}]
```

Out[31]= $\frac{1}{4}\,(-1+e)$

Aufgabe 8 ▮ Problème 8

(a) Potenzreihenentwicklung ▮ Développer des séries de puissances

```
In[32]:= Series[E^x ,{x, 0, 12}]
```

Out[32]= $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}+\frac{x^7}{5040}+\frac{x^8}{40320}+\frac{x^9}{362880}+\frac{x^{10}}{3628800}+\frac{x^{11}}{39916800}+\frac{x^{12}}{479001600}+O[x]^{13}$

(b) Potenzreihenentwicklung ▮ Développer des séries de puissances

```
In[33]:= Series[1/(1 - x),{x, 0, 8}]
```

Out[33]= $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+O[x]^9$

(c) Potenzreihenentwicklung ▮ Développer des séries de puissances

```
In[34]:= Series[1/(1 - x)^2, {x, 0, 10}]
```

Out[34]= $1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+7x^6+8x^7+9x^8+10x^9+11x^{10}+O[x]^{11}$

(d) Potenzreihenentwicklung ▮ Développer des séries de puissances

```
In[35]:= Series[f[x], {x, 0, 10}]
```

Out[35]= $f[0]+f'[0]\,x+\frac{1}{2}f''[0]\,x^2+\frac{1}{6}f^{(3)}[0]\,x^3+\frac{1}{24}f^{(4)}[0]\,x^4+\frac{1}{120}f^{(5)}[0]\,x^5+\frac{1}{720}f^{(6)}[0]\,x^6+\frac{f^{(7)}[0]\,x^7}{5040}+\frac{f^{(8)}[0]\,x^8}{40320}+\frac{f^{(9)}[0]\,x^9}{362880}+\frac{f^{(10)}[0]\,x^{10}}{3628800}+O[x]^{11}$

Aufgabe 9 ▮ Problème 9

(a) Interessante Potenzreihenentwicklung ▮ Développement intéressant de séries de puissances

```
In[36]:= Series[1/(1 +  x) ,{x, 0, 7}]
```

Out[36]= $1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-x^7+O[x]^8$

(b) Interessante Potenzreihenentwicklung
▮ Développement intéressant de séries de puissances

```
In[37]:= Series[1/(1 - 2x),{x, 0, 8}]
```

Out[37]= $1+2x+4x^2+8x^3+16x^4+32x^5+64x^6+128x^7+256x^8+O[x]^9$

(c) Interessante Potenzreihenentwicklung
▮ Développement intéressant de séries de puissances

```
In[38]:= (1+ 2x + 3x^2) Series[1/(1 - x^3), {x, 0, 8}]
```

Out[38]= $1+2x+3x^2+x^3+2x^4+3x^5+x^6+2x^7+3x^8+O[x]^9$

Aufgabe 10 ▮ Problème 10

(a)

Probleme mit Integration:

▮ Problème d'intégration

```
In[39]:= Integrate[1/(1 + Sin[x]^2 Sqrt[Pi^2 + x]),{x,-2,2}]
```

Out[39]= $$\int_{-2}^{2}\frac{1}{1+\sqrt{\pi^2+x}\,\mathrm{Sin}[x]^2}\,dx$$

(b)

Näherung durch Integration einer Potenzreihe:

▮ Approximation par l'intégration d'une série de puissances:

```
In[40]:= Clear[s];
         s = Series[1/(1 + Sin[x]^2 Sqrt[Pi^2 + x]),{x,0,8}]
```

Out[41]=
$$\begin{aligned}
&1-\pi x^2-\frac{x^3}{2\pi}+\left(\frac{1}{8\pi^3}+\frac{\pi}{3}+\pi^2\right)x^4+\left(1-\frac{1}{16\pi^5}+\frac{1}{6\pi}\right)x^5+\\
&\left(\frac{5}{128\pi^7}-\frac{1}{24\pi^3}+\frac{1}{4\pi^2}-\frac{2\pi}{45}+\left(-\frac{1}{8\pi^3}-\frac{\pi}{3}\right)\pi-\pi\left(\frac{1}{8\pi^3}+\frac{\pi}{3}+\pi^2\right)\right)x^6+\\
&\left(-\frac{7}{256\pi^9}+\frac{1}{48\pi^5}-\frac{1}{45\pi}+\frac{-\frac{1}{8\pi^3}-\frac{\pi}{3}}{2\pi}+\right.\\
&\quad\left.\left(\frac{1}{16\pi^5}-\frac{1}{6\pi}\right)\pi-\left(1-\frac{1}{16\pi^5}+\frac{1}{6\pi}\right)\pi-\frac{\frac{1}{8\pi^3}+\frac{\pi}{3}+\pi^2}{2\pi}\right)x^7+\\
&\left(\frac{21}{1024\pi^{11}}-\frac{5}{384\pi^7}+\frac{1}{180\pi^3}+\frac{-1+\frac{1}{16\pi^5}-\frac{1}{6\pi}}{2\pi}+\frac{\frac{1}{16\pi^5}-\frac{1}{6\pi}}{2\pi}+\frac{\pi}{315}+\right.\\
&\quad\left(-\frac{5}{128\pi^7}+\frac{1}{24\pi^3}+\frac{2\pi}{45}\right)\pi+\left(-\frac{1}{8\pi^3}-\frac{\pi}{3}\right)\left(-\frac{1}{8\pi^3}-\frac{\pi}{3}-\pi^2\right)+\\
&\quad\left.\pi\left(-\frac{5}{128\pi^7}+\frac{1}{24\pi^3}-\frac{1}{4\pi^2}+\frac{2\pi}{45}-\left(-\frac{1}{8\pi^3}-\frac{\pi}{3}\right)\pi+\pi\left(\frac{1}{8\pi^3}+\frac{\pi}{3}+\pi^2\right)\right)\right)x^8+O[x]^9
\end{aligned}$$

Verwandlung in einen verwertbaren Ausdruck (O[...] weglassen)

■ Transformation en une expression utilisable (omettre O[...])

```
In[42]:= sn = Normal[s]
```

Out[42]=
$$\begin{aligned}
&1-\pi x^2-\frac{x^3}{2\pi}+\left(\frac{1}{8\pi^3}+\frac{\pi}{3}+\pi^2\right)x^4+\left(1-\frac{1}{16\pi^5}+\frac{1}{6\pi}\right)x^5+\\
&\left(\frac{5}{128\pi^7}-\frac{1}{24\pi^3}+\frac{1}{4\pi^2}-\frac{2\pi}{45}+\left(-\frac{1}{8\pi^3}-\frac{\pi}{3}\right)\pi-\pi\left(\frac{1}{8\pi^3}+\frac{\pi}{3}+\pi^2\right)\right)x^6+\\
&\left(-\frac{7}{256\pi^9}+\frac{1}{48\pi^5}-\frac{1}{45\pi}+\frac{-\frac{1}{8\pi^3}-\frac{\pi}{3}}{2\pi}+\right.\\
&\quad\left.\left(\frac{1}{16\pi^5}-\frac{1}{6\pi}\right)\pi-\left(1-\frac{1}{16\pi^5}+\frac{1}{6\pi}\right)\pi-\frac{\frac{1}{8\pi^3}+\frac{\pi}{3}+\pi^2}{2\pi}\right)x^7+\\
&\left(\frac{21}{1024\pi^{11}}-\frac{5}{384\pi^7}+\frac{1}{180\pi^3}+\frac{-1+\frac{1}{16\pi^5}-\frac{1}{6\pi}}{2\pi}+\frac{\frac{1}{16\pi^5}-\frac{1}{6\pi}}{2\pi}+\frac{\pi}{315}+\right.\\
&\quad\left(-\frac{5}{128\pi^7}+\frac{1}{24\pi^3}+\frac{2\pi}{45}\right)\pi+\left(-\frac{1}{8\pi^3}-\frac{\pi}{3}\right)\left(-\frac{1}{8\pi^3}-\frac{\pi}{3}-\pi^2\right)+\\
&\quad\left.\pi\left(-\frac{5}{128\pi^7}+\frac{1}{24\pi^3}-\frac{1}{4\pi^2}+\frac{2\pi}{45}-\left(-\frac{1}{8\pi^3}-\frac{\pi}{3}\right)\pi+\pi\left(\frac{1}{8\pi^3}+\frac{\pi}{3}+\pi^2\right)\right)\right)x^8
\end{aligned}$$

Jetzt kann man integrieren:

■ Maintenant on peut intégrer:

```
In[43]:= Integrate[sn,{x,-2,2}]
```

Out[43]= $4+\frac{7}{3\pi^{11}}-\frac{10}{189\pi^7}+\frac{2008}{2835\pi^3}-\frac{128}{3\pi}-\frac{944\pi}{405}+\frac{704\pi^2}{63}+\frac{4864\pi^3}{63}+\frac{1024\pi^4}{9}$

Numerisch: ■ Numériquement:

```
In[44]:= N[%]
```

Out[44]= 13570.3

Aufgabe 11 ▮ Problème 11

(a) Differentialgleichung ▮ Equation différentielle
y'(x) - y(x) tan x = x

```
In[45]:= DSolve[y'[x] - y[x] Tan[x]== x, y[x], x]

Out[45]= {{y[x] → C[1] Sec[x] + Sec[x] (Cos[x] + x Sin[x])}}
```

(b) Differentialgleichung ▮ Equation différentielle
y'(x) + y(x) tan x = sec(x)   (secans)

```
In[46]:= DSolve[y'[x] + y[x] Tan[x]== Sec[x], y[x], x]

Out[46]= {{y[x] → C[1] Cos[x] + Sin[x]}}
```

(c) Differentialgleichung ▮ Equation différentielle
y'(x) = y(x)
mit Randwertbedingung
▮ avec condition de valeur au bord
y'(0)=1

```
In[47]:= Clear[y];
         DSolve[{y'[x] == y[x] , y'[0] == 1}, y[x], x]
```

Out[48]= $\{\{y[x] \to e^{x}\}\}$

(d) Differentialgleichung ▮ Equation différentielle
y''''(x) - k^4 y(x) = 0
(Vibration eines Strahls ▮ Vibration d'un rayon)

```
In[49]:= DSolve[y''''[x] - k^4 y[x] == 0, y[x], x]
```

Out[49]= $\{\{y[x] \to e^{-k x} C[2] + e^{k x} C[4] + C[1] \operatorname{Cos}[k x] + C[3] \operatorname{Sin}[k x]\}\}$

(b) Differentialgleichung ▮ Equation différentielle
y'(x) + y(x) tan x = sec(x)   (secans)

```
In[50]:= DSolve[y'[x] y[x] + x^2 == x, y[x], x]
```

Out[50]= $\left\{\left\{y[x] \to -\frac{\sqrt{3 x^2 - 2 x^3 + 6 C[1]}}{\sqrt{3}}\right\}, \left\{y[x] \to \frac{\sqrt{3 x^2 - 2 x^3 + 6 C[1]}}{\sqrt{3}}\right\}\right\}$

"Putzmaschine" einsetzen

Employer la "machine de nettoyage"

```
In[51]:= (* Old Form: Remove["Global`@*"] *)

In[52]:= Remove["Global`*"]
```