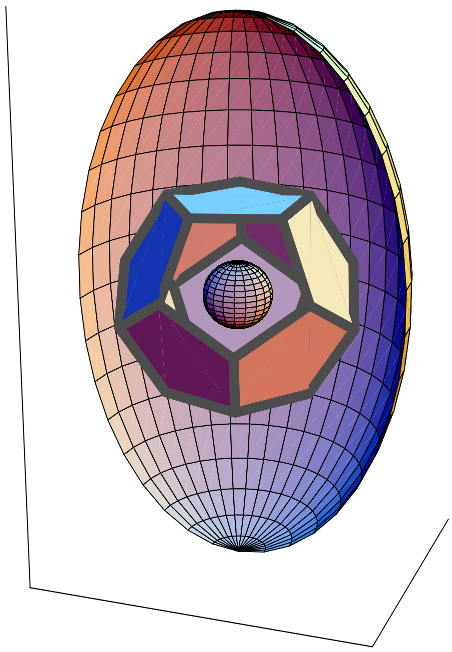
◇ Testmaterial und Anleitungen ◇
◇ Mathematik Bau und Architektur ◇
◇ Physik Holz ◇
◇ Bachelor (und Diplom) ◇



von

Rolf Wirz

Berner Fachhochschule — BFH — AHB

Ausgabe vom 9. Juli 2012, Version 1.4.0 / d

Mit klickbaren Links

WIR1 /2007/2008/2009/2010/2011/2012/LaTex/BuchTestsMathBau.TEX

Produziert mit PCTeX unter Win XP. Einige Graphiken sind auch mit *Mathematica* entstanden.

Der Mensch hat dreierlei Wege, um zu lernen:
Erstens durch Nachdenken, das ist der edelste;
zweitens durch Nachahmen, das ist der leichteste;
drittens durch Erfahrung, das ist der bitterste.

(Nach Konfuzius)

Arithmetik und Geometrie geben die Wahrheit über die Dinge ...

... Lasst keinen meine Werke lesen, der nicht Mathematiker ist ...

Leonardo da Vinci

Aktuelle Adresse des Autors (2007):

Rolf W. Wirz-Depierre
Prof. für Math.
Berner Fachhochschule (BFH), Dep. AHB und TI
Pestalozzistrasse 20
Büro B112 CH–3400 Burgdorf/BE
Tel. ++41 (0)34 426 42 30 / intern 230
Mail: Siehe http://rowicus.ch/Wir/indexTotalF.html unter „Koordinaten von R.W.“
Alt: Ingenieurschule Biel (HTL), Ing'schule des Kt. Bern, Fachhochschule ab 1997) // BFH HTA Biel // BFH TI //

Inhaltsverzeichnis • Table des matières

0.1 Einführung

0.1.1 Gegenstand

Bei dieser Sammlung handelt es sich um Material, welches in den Jahren ab 2004 für das Diplom- oder Bachelorstudium Bau resp. ab 2006 für das Bachelorstudium in auf freien Entwurf ausgerichteter Architektur entstanden ist.

Klickbare Links zu Skripten:

http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html (Skript–Download)

Die Lösungen zu den Aufgaben sind mit *Mathematica* produziert worden. Aus Kapazitätsgründen ist normalerweise neben dem Quellencode auch der Output im PDF–Format in Tabellenform abgespeichert. Siehe dazu unter den Links:

http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/Problems.html

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

0.1.2 Gliederung

---

(1) Einführung

(2) Stoffprogramme für Bau und Architektur ab 2003

(3) Modulprüfungen und Vordiplome

(4) Material für die Abteilung Bau (Tests und Unterlagen)

(5) Material für die Abteilung Architektur

Bemerkung: Im Jahr 2003 wurden die Abteilungen Bau und Architektur der Fachhochschulen für Technik, Informatik und Architektur in Bern, Biel und Burgdorf neu strukturiert und in Burgdorf konzentriert. Das bedeutete ein Neubeginn. Daher sind die älteren Stoffprogramme des Autors vom Standort Biel hier nicht mehr berücksichtigt.

Kapitel • Chapitre 1

Stoffprogramme Bau, Architektur und Holz seit 2003

1.1 Allgemeines

Die Varianten der Stoffprogramme wind sehr umfangreich. Dies ist die Konsequenz aus ihrer Vielfalt infolge der ab 2003 anfänglichen jährlichen Neuorganistation und des Ringens um eine Neuausrichtung vor allem der Architektur. Daher sind sie hier nicht gesondert wiedergegeben. Die nachstehend angegebenen Links führen den Leser zum jeweiligen Programm. Unterlagen und Skripts findet man speziell unter

http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html.

Für die Abteilung Bau, Mathematik ersieht man das Programm aus

http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KursBauUebersicht.pdf.

Für die Abteilung Holz, Physik konsultiere man

http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Hilfen/Hilfen.htm.

1.2 Beispiel 2010/11

1.2.1 Bau

Bachelor Bau Mathematik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_B1a_09.htm

Bachelor Bau Mathematik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_B1a_10.htm

Bachelor Bau Statistik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_B2a_Stat_09.htm

Bachelor Bau Statistik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_B2a_Stat_10.htm

Bachelor Bau Informatik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_B2a_Inform_09.htm

Bachelor Bau Informatik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_B2a_Inform_10.htm

Bachelor Architektur, Holz und Bau Specials:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_ABH_Spec_09.htm
Bachelor Architektur, Holz und Bau Specials:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_ABH_Spec_10_2.htm

1.2.2 Architektur und Specials

Bachelor Architektur, Holz und Bau Specials:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_ABH_Spec_09.htm

Bachelor Architektur, Holz und Bau Specials:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_ABH_Spec_10_2.htm

1.2.3 Holz

Bachelor Holz Grundlagen der Physik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_H1_Phys_09.htm

Bachelor Holz Grundlagen der Physik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_H1_Phys_10.htm

Bachelor Architektur, Holz und Bau Specials:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_ABH_Spec_09.htm

Bachelor Architektur, Holz und Bau Specials:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_ABH_Spec_10_2.htm

1.3 Beispiel 2009/10

1.3.1 Bau

Bachelor Bau Mathematik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_B1a_09.htm

Bachelor Bau Mathematik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_B1a_10.htm

Bachelor Bau Statistik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_B2a_Stat_09.htm

Bachelor Bau Statistik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_B2a_Stat_10.htm

Bachelor Bau Informatik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_B2a_Inform_09.htm

Bachelor Bau Informatik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_B2a_Inform_10.htm

Bachelor Architektur, Holz und Bau Specials:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_ABH_Spec_09.htm
Bachelor Architektur, Holz und Bau Specials:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_ABH_Spec_10.htm

1.3.2 Architektur und Specials

Bachelor Architektur Stützkurs Mathematik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_A1_09_GeomArch.htm

Bachelor Architektur, Holz und Bau Specials:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_ABH_Spec_09.htm

1.3.3 Holz

Bachelor Holz Grundlagen der Physik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_H1_Phys_09.htm

Bachelor Architektur, Holz und Bau Specials:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_ABH_Spec_09.htm

1.4 Beispiel 2008/09

1.4.1 Bau

Bachelor Bau Mathematik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_B1a_08.htm

Bachelor Bau Statistik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_B2a_Stat_08.htm

Bachelor Bau Informatik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_B2a_Inform_08.htm

Bachelor Architektur, Holz und Bau Specials:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_ABH_Spec_08.htm

1.4.2 Architektur und Specials

Bachelor Architektur Stützkurs Mathematik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_A1_08_Stuetz.htm

Bachelor Architektur, Holz und Bau Specials:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_ABH_Spec_08.htm

1.5 2007/08

1.5.1 Bau

Bachelor Bau Mathematik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_B1a_07.htm

Bachelor Bau Statistik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_B2a_Stat_07.htm

Bachelor Bau Informatik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_B2a_Inform_07.htm

Bachelor Architektur, Holz und Bau Specials:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_ABH_Spec_07.htm

1.5.2 Architektur und Specials

Bachelor Architektur Stützkurs Mathematik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_A1_07_Stuetz.htm

Bachelor Architektur, Holz und Bau Specials:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_ABH_Spec_07.htm

1.6 Beispiel 2006/07

1.6.1 Bau

Bachelor Bau Mathematik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_B1a_06.htm

Bachelor Bau Statistik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_B2a_06.htm

Diplom Bau Computeralgebra:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_B3a_06.htm

Diplom Bau Modul Messen:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_B3a_06.htm

1.6.2 Architektur

Bachelor Architektur Mathematik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_A1_06.htm

Bachelor Architektur Mathematik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_A2_06.htm

Diplom Architektur Mathematik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_A3_06.htm

1.7 Beispiel 2005/06

1.7.1 Bau

Bachelor Bau Mathematik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_B1a_05.htm

Diplom Bau Mathematik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_B2a_05.htm

1.7.2 Architektur

Bachelor Architektur Mathematik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_A1_05.htm

Diplom Architektur Mathematik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_A2_05.htm

Diplom Architektur Mathematik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/work_A3_05.htm

Bachelor Architektur Mathematik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/workA1p_05.htm

1.8 Beispiel 2004/05

1.8.1 Architektur

Diplom Architektur Mathematik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/workA1a_04.htm

Diplom Architektur Mathematik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/workA2a_04.htm

http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/workA3a_04.htm

Diplom Architektur Mathematik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/workA1p_05.htm

Diplom Architektur Mathematik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/workA2p_04.htm

Diplom Architektur Mathematik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/workA1aSt_04.htm

1.9 Beispiel 2003/04

1.9.1 Architektur

Diplom Architektur Mathematik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/workAV03_1.htm

Diplom Architektur Mathematik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/workAV02_1.htm

Diplom Architektur Mathematik:
http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/KlassenAktuell/workAV01_1.htm

Kapitel • Chapitre 2

Modulprüfungen und Vordiplome

2.1 Prüfungsserien

Nachstehend sind die Modulprüfungsserien und Vordiplomserien in Mathematik der Abteilungen Bau Architektur und sowie der Abteilung Holz in Physik seit 2003 wiedergegeben. Die Originale sowie die Lösungen findet man unter

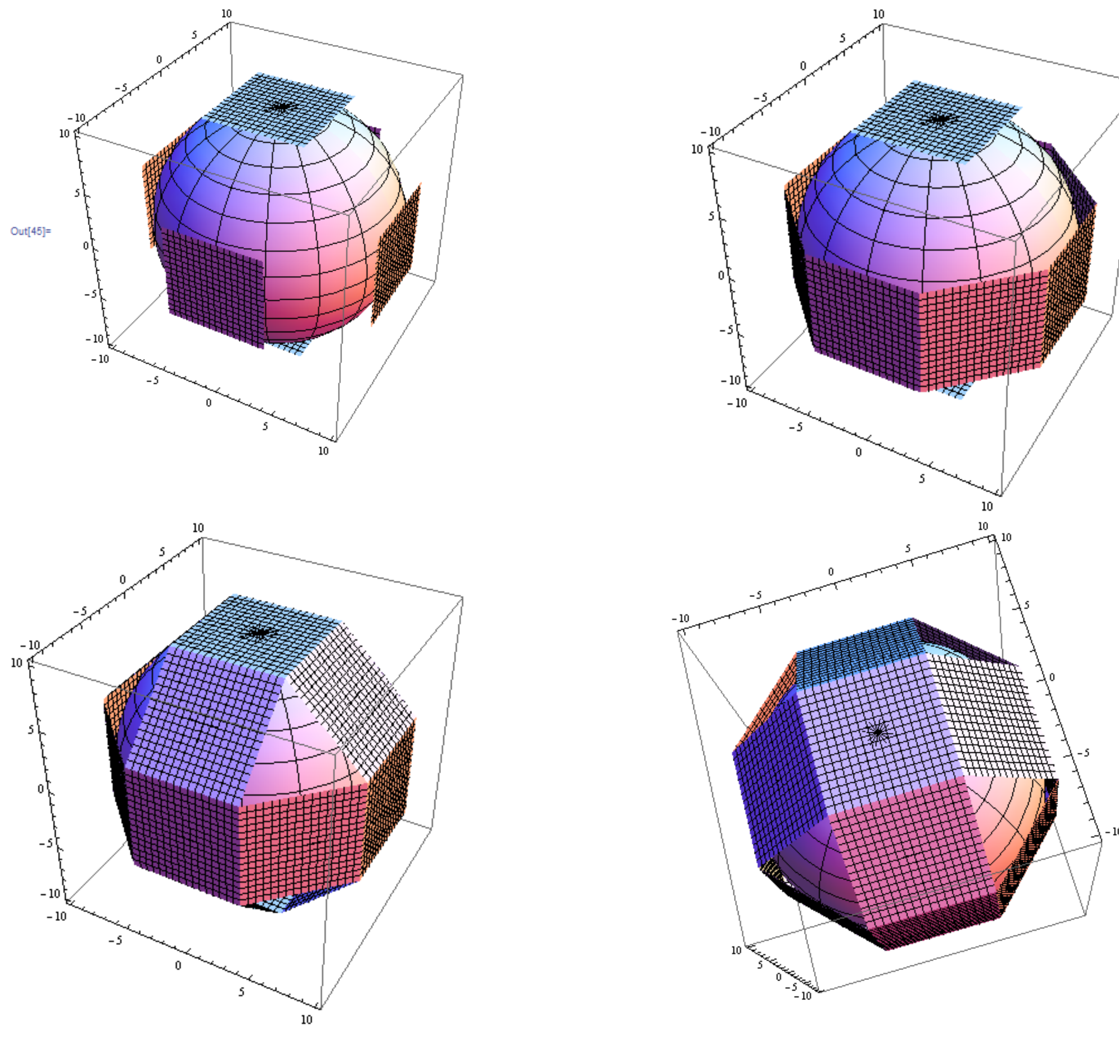
http://rowicus.ch/Wir/VDs/VDs.html

Berner Fachhochschule, Hochschule für Architektur, Bau und Holz, Fachbereich Bau, Burgdorf, 06.07.2012

2.2 Modulprüfung in Mathematik II 2012 Klasse B 11 / B1

Viel Glück !

Erwartet werden die Lösungen von ca. $3-5$ Aufgaben aus der folgenden Serie. Alle Teilaufgaben einer Aufgabe geben gleichviele Punkte (je 3).



Bilder zu Problem 1

(1) **(9 Punkte)**

Gegeben ist eine Kugel mit Zentrum = Ursprung eines Koordinatensystems und Radius $r = 10$. Wie in den obigen Bildern gezeigt, werden an die Kugel an den Durchstosspunkten der Koordinatenachsen achsenparallele quadratische Flächen angebracht. Die Schnittlinien dieser Flächen z.B. mit der (x, y)–Ebene bilden ein regelmässiges Achteck. Entsprechendes gilt für alle Quadrate. Mit diesem Wissen lassen sich die Positionen der einzelnen Eckpunkte der Quadrate einfach berechnen. Zwischen den Quadraten bilden sich so acht Dreiecke, wovon in jedem Oktanten des Koordinatensystems je eines liegt.

(a) Berechne die Koordinaten der Eckpunkte desjenigen Dreiecks, welches im 1. Oktanten liegt. (Hinweis: Hier sind bei allen drei Punkten alle Koordinaten ≥ 0. Es genügt, einen Eckpunkt zu berechnen. Für die andern Eckpunkte erhält man die Koordinaten dann mit Hilfe einer Symmetrieüberlegung.)

(b) Berechne den Flächeninhalt eines der Dreiecke.
(*Hinweis:* Alle Dreiecke sind kongruent.)

(c) Berechne den Abstand des Schwerpunktes eines Dreiecks vom Zentrum und entscheide damit, ob die Dreiecke die Kugel berühren.

(d) Berechne die Grösse der Oberfläche O_{QD}, welche durch alle Quadrate und alle Dreiecke gebildet wird und berechne damit das Verhältnis $O_{QD} : O_K$, wenn O_K die Kugeloberfläche bedeutet.

(e) Berechne den Inhalt des Körpers, welcher durch die Quadrate und die Dreiecke definiert ist.

(2) **(27 Punkte)**

Durch die Punkte $P_1(2,\ 3,\ 5)$ und $P_2(1,\ 2,\ 6)$ ist eine Gerade g gegeben. Eine weitere Gerade q wird durch die Punkte $Q_1(-2,\ -3,\ -5)$ und $Q_2(-3,\ -1,\ z)$ definiert.

(a) Berechne den kürzesten Abstand zwischen g und q, wenn $z = -2$ gilt.

(b) Wie gross muss die z–Koordinate gewählt werden, wenn der kürzeste Abstand zwischen g und q den Wert 10 haben soll?

(c) Wieviele Lösungen gibt es in der letzten Teilaufgabe?

(3) Sei $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Matrix A definiert eine Abbildung, welche $g:\ \vec{x}(t) = t \cdot \vec{v}_1$ als Fixpunktgerade hat und welche den Vektor $\vec{v}_2$ in $\vec{v}_2\,' = -\,\vec{v}_2$ sowie $\vec{v}_3$ in $\vec{v}_3\,' = -2\,\vec{v}_3$ und $\vec{v}_4$ in $\vec{v}_4\,' = \vec{v}_4 + \vec{v}_4$ abbildet.

(a) Berechne die Matrix A.

(b) Sei $\overrightarrow{OQ} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4$. Berechne das Bild $\overrightarrow{OQ}\,'$ von $\overrightarrow{OQ}$ bei der Abbildung mit A.

(c) Berechne das Bild $\overrightarrow{OQ}\,''$ von $\overrightarrow{OQ}\,'$ bei der Abbildung mit $A + A^T$.

(4) $$M = \begin{pmatrix} -27 & 24 & -20 & 2 \\ -32 & 29 & -24 & 2 \\ -6 & 6 & -5 & 0 \\ -40 & 36 & -32 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \; \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \; \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne die Eigenwerte von M.

(b) Untersuche, ob die Eigenvektoren zu einem gegebenen Eigenwert von M immer senkrecht auf den Eigenvektoren zu einem gegebenen anderen Eigenwert von M stehen.

(c) Berechne die Eigenwerte von M^{-1}.

(d) Wie verhalten sich die Eigenvektoren von M^{-1} zu jenen von M?

(e) Berechne die Eigenwerte von M^T.

(f) Wie verhalten sich die Eigenvektoren von M^T zu jenen von M?

(g) $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3,\ \vec{v}_4$ definieren zusammen eine Matrix „W“, welche mit O zusammen einen 4D–Spat definiert. Berechne den Inhalt „$Inh(W)$“ und auch denjenigen des Bildspats „$Inh(M \cdot W)$“.

(h) Berechne die Determinante von M und vergleiche das Resultat mit $\dfrac{Inh(M \cdot W)}{Inh(W)}$.

(5) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist der Richtungsvektor einer Geraden g durch O. Der Punkt $Q(-1,\,0,\,4)$ wird um $\varphi = +\dfrac{\pi}{6}$ um die Achse g gedreht (im Sinne einer Rechtsschraube in Richtung $\vec{a}$). Man kann nun die Drehmatrix finden, indem man mit Hilfe von $\vec{a}$ ein lokales „Rechts-Orthonormalsystem“ $\vec{a}_e$, $\vec{b}_e$, $\vec{c}_e$ konstruiert und dazu die Matrix M aufschreibt, welche $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ auf $\vec{a}_e$, $\vec{b}_e$, $\vec{c}_e$ abbildet. Die Drehmatrix setzt sich nun aus M^{-1}, $D_{(\varphi,\vec{e}_1)}$ und M zusammen, wobei $D_{(\varphi,\vec{e}_1)}$ die Matrix ist, welche die Drehung um φ um die erste Achse beschreibt.

(a) Berechne die Matrix $D_{(\varphi,\vec{e}_1)}$ numerisch.

(b) Berechne das lokale Rechts–Orthonormalsystem und bilde damit die Drehmatrix um die Achse: $A = M \cdot D_{(\varphi,\vec{e}_1)} \cdot M^{-1}$.

(c) Berechne den gedrehten Bildpunkt Q' von Q.

(6) Gegeben sind die Punkte

$$P_1(0;\,1;\,1),\;\; P_2(1;\,0;\,-1),\;\; P_3(1;\,1;\,1),\;\; P_4(2;\,6;\,1),\;\; P_5(-1;\,5;\,8),\;\; P_6(-2;\,12;\,0).$$

(a) Berechne eine Matrix G, welche P_1 in P_4 und P_2 in P_5 und P_3 in P_6 abbildet.

(b) Wenn man den Punkte P_1 um $\varphi = +32^o$ um die z–Achse dreht, erhält man den Punkt P_7. (Durch die Drehung wird die positive x–Achse in Richtung positive y–Achse bewegt.) Erstelle die Drehmatrix D_φ numerisch.

(c) Berechne $G\cdot \overrightarrow{OP}_7$ (mit Hilfe von D_φ und G).

(7) Gegeben sind die komplexen Zahlen $a = 2 + 3\,i$ und $b = 3 - 2\,i$.

(a) Löse die Gleichung $a \cdot \bar{z} = b$ und stelle damit z in der Form $z = Re(z) + i\,Im(z)$ dar.

(b) Untersuche, ob es sich bei der Mutiplikation mit z in der letzten Teilaufgabe um eine Drehung handelt. Wenn ja, so bestimme den Drehwinkel φ.

(c) Fertige von $\mathbb{C}$ eine Skizze an mit dem Einheitskreis sowie den Punkten a, $\bar{a}$ und $w = \dfrac{1}{a}$.

(d) Löse die Gleichung $(z + b)^4 = w$. Die Lösungen bilden eine Geometrische Figur. Berechne den Schwerpunkt resp. das Zentrum dieser Figur.

WIR1-12

— ENDE —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Architektur, Bau und Holz, Fachbereich Bau, Burgdorf, 03.02.2012

2.3 Modulprüfung in Mathematik 2012 Klasse B 11 / B1

Viel Glück !

Erwartet werden die Lösungen von etwa 2 bis 4 Aufgaben aus der folgenden Serie. Alle Teilaufgaben einer Aufgabe geben gleichviele Punkte (je 3).

(1) **(9 Punkte)**

Sei $f(x) = (((a_4\,x + a_3)\,x + a_2)\,x + a_1)\,x + a_0$

(a) Berechne die 3. Ableitung von $f(x)$ von Hand (einfachste Form angeben).

(b) Welche Beziehung zwischen welchen Koeffizienten kann man aufstellen, wenn die 3. Ableitung von $f(x)$ an der Stelle $x = 1$ gleich 0 ist?

(c) Wie gross ist $\lim\limits_{n\to\infty}\left((1+\frac{1}{n})^{n\,x}\right)$ für $x = \pi$ exakt?

(2) **(27 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = (\frac{x}{4} - \sin(x^2))^2 + e^{-x^2}, \quad I = D_f = [-\pi,\, \pi]$$

$$h(x) = x\, e^{-x^2} + \frac{1}{2}\sin(x)\cos(x), \quad D_h = I$$

(a) Erstelle eine saubere Skizze des Graphen von f im Intervall I.

(b) Berechne von Hand die Ableitungsfunktion von f und vereinfache den erhaltenen Ausdruck so weit wie möglich.

(c) Bestimme von Hand die Steigung des Graphen für $x = 0$.

(d) Bestimme numerisch die erste Extremwertstelle von f links neben dem Ursprung.

(e) Bestimme den Grenzwerte $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{1+x}\,h(x)$, falls dieser Wert existiert.

(f) Berechne von Hand die Stammfunktion von $h(x)$.

(g) Berechne von Hand $\int\limits_0^1 h(x)\,dx$.

(h) Bestimme numerisch die Approximation von f durch das Taylorpolynom $p_{0,3}(x) = P_3(x)$ vom Grade 3 mit dem Zentrum $x_0 = 0$.

(i) Bestimme rechnerisch den ersten Wendepunkte vom $h(x)$ links neben dem Ursprung.

(3) **(18 Punkte)**

Die Funktion $\cosh(x)$ ist bekanntlich durch die Beziehung $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ definiert. Sei weiter $f(x) = 4 - 2\,\cosh(x)$. (Hier alle Resultate numerisch angeben!)

(a) Skizziere den Graphen von $f(x)$.

(b) Rotation: Berechne die Nullstellen $f(x)$ und bezeichne mit x_1 und x_2 die beiden Nullstellen links und rechts der y–Achse. Sei $I = [x_1,\ x_2]$.

(c) Berechne die y–Koordinate des Schwerpunkts der Fläche über I.

(d) Berechne das Rotationsvolumen, wenn $f(x)$ über I um die x–Achse rotiert wird.

(e) Berechne die Kurvenlänge der Funktionskurve über I.

(f) Berechne den Oberflächeninhalt des Rotationskörpers über I.

(4) **(12 Punkte, doppelte Punktzahl pro Teilaufgabe)**

Gegeben ist die Funktion

$$z = f(x, y) = (4 - x)\,x + (6 - y)\,y^2,\ \ x \in I_x = [0,\,4],\ \ I_y = y \in [0,\,6].$$

Sei weiter $z = h(x) = f(x, 6)$ und $z = g_a(x) = a\,x$.

(a) Wie gross muss a gewählt werden, damit die Gerade $z = g_a(x)$ die Fläche zwischen I_x und $h(x)$ exakt halbiert?

(b) Die Graphen von h und g_a schneiden sich in $S = S_a(x_0)$. Bei welchem x_0 ist der abolute Inhalt des Dreiecks maximal gross, welches gegeben ist durch den Ursprung O, den Punkt $P = P(x_0,\ g_a(x_0))$ sowie den Schnittpunkt $S_a(x_0)$?

(c) Berechne allfällige Minima und Maxima der Fläche von $z = f(x, y)$ im oben angegebenen Definitionsbereich.

— ENDE —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Architektur, Bau und Holz, Fachbereich Bau, Burgdorf, 06.09.2011

2.4 Modulprüfung in Mathematik 2011 Klasse B 10 / B1

Viel Glück !

Erwartet werden die Lösungen von etwa 4 bis 5 Aufgaben aus der folgenden Serie. Alle Teilaufgaben einer Aufgabe geben gleichviele Punkte (je 3).

(1) **(27 Punkte)**

Gegeben ist die Matrix $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne die Determinante der Matrix M sowie diejenige von $M + M$.

(b) Begründe damit, ob die Inverse M^{-1} der Matrix existiert.

(c) Berechne die inverse Matrix M^{-1}, falls sie existiert.

(d) Berechne die Inverse der Matrix M^T, falls sie existiert.

(e) Gibt es eine Beziehung zwischen M^{-1} und $(M^T)^{-1}$? Wenn ja, welche?

(f) Berechne exakt die Determinante von:
$M^{-1} \cdot M^{-1} \cdot M^{-1} \cdot M^{-1} \cdot M^{-1} \cdot M^{-1} \cdot M^{-1} := (M^{-1})^7$

(g) Bilde den Punkt $P_0(2, 5, 8)$ mittles M in P_1 ab, d.h. bilde den Vektor $\overrightarrow{OP_0}$ in $\overrightarrow{OP_1}$ ab. Bilde danach P_0 mittles M^{-1} in P_2 ab. Berechne P_1 und P_2 sowie $|\overline{P_1P_2}|$.

(h) Berechne nun diejenige Matrix in Zahlen und auch abstrakt, welche P_2 in P_1 abbildet.

(i) Berechne die vorhandenen reellen Eigenwerte λ_k und die zugehörigen Eigenvektoren (numerisch, mit $z = 1$).

(2) **(27 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{(2\,e^{-(x-4)^2}) - 1}{x\,(x+5)}, \quad I = D_f = [-7, 7].$$

(a) Erstelle eine saubere Skizze des Graphen im Intervall I.

(b) Bestimme den Steigungswinkel des Graphen für $x = -1$ und Zeichne diesen Winkel in die Skizze ein.

(c) Bestimme Nullstellen und Polstellen im Intervall I und zeichne diese Stellen in die Skizze ein.

(d) Bestimme rechnerisch die Extremwertstellen im Intervall I und zeichne diese Stellen in die Skizze ein.

(e) Bestimme rechnerisch die Wendepunkte im Intervall I, falls vorhanden, und zeichne diese Stellen in die Skizze ein.

(f) Bestimme die Grenzwerte von $f(x)$ für $x \to \infty$ und für $x \to -\infty$.

(g) Bestimme numerisch die Approximation von f durch das Taylorpolynom $p_{4,3}(x) = P_3(x-4)$ vom Grade 3 mit dem Zentrum $x_0 = 4$.

(h) Berechne damit numerisch $A_1 = \int\limits_3^5 p_{4,3}(x)\,dx$.

(i) Sei $A_2 = \int\limits_3^5 f(x)\,dx$. Ermittle die ersten 4 Ziffern von $d = |A_2 - A_1|$.

(3) **(12 Punkte)**

Gegeben sind mit $x \in [x_1, x_2] = [0, \pi]$ und $y \in [y_1, y_2] = [0, \frac{3\pi}{2}]$ die 3 Funktionen:

$$
\begin{aligned}
f_1(x,y) &= \cos(x+y) \\
f_2(x,y) &= \cos(x) + \sin(y) \\
f_3(x,y) &= \cos(x)\,\sin(y)
\end{aligned}
$$

(a) Skizziere die zugehörigen 3D–Graphen.

(b) Berechne $A_1(y) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f_1(x,\, y)\,dx$, $A_2(y) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f_2(x,\, y)\,dx$ sowie $A_3(y)$ entsprechend.

(c) Berechne $V_1 = \int\limits_{y_1}^{y_2} A_1(y)\,dy = \int\limits_{y_1}^{y_2}\int\limits_{x_1}^{x_2} f_1(x,\, y)\,dx\,dy$ sowie V_2 und V_3 entsprechend.

(d) Untersuche rechnerisch, wo $f_2(x,y)$ im gegebenen Bereich minimal ist.

(4) **(12 Punkte)**

Mit Hilfe von 4 Stangen mit je einer Länge von $4\,m$ wird ein pyramidenförmiges Zelt über einem quadratischen Grundriss errichtet, das die Seitenlänge x_4 an der Basis aufweist. Zu diesem Zweck werden die 4 Stangen in die Ecken des Quadrates gestellt und oben, das heisst über der Mitte des Grundrissquadrates, an den Stangenenden zusammengebunden.

(a) Bestimme mit Hilfe der Differentialrechnung wie gross x_4 gewählt werden muss, damit das Zelt einen maximalen Volumeninhalt V_4 aufweist.

(b) Berechne V_4 numerisch.

(c) Bestimme mit Hilfe der Differentialrechnung wie gross entsprechend x_3 gewählt werden muss, damit das Zelt einen maximalen Volumeninhalt V_3 aufweist, wenn die Zeltform diesmal ein nicht reguläres Tetraeder darstellt mit 3 gleichschenkligen Dreiecken als Seitenflächen, d.h. wenn also nur drei Stangen oben zusammengebunden sind.

(d) Berechne V_3 numerisch.

(5) **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{2}\,(x-2)(x+3)\,e^x$.

(a) Berechne die kürzeste Distanz des Punktes $P(2;\,2)$ zum Graphen von f.

(b) Berechne[1] die Länge der Kurve $h(x) = f(x)\cdot e^x,\;\; x \in [0,\,2]$.

(c) Berechne[1] die Länge der Kurve $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ \sqrt{1+t} \end{pmatrix},\;\; t \in [0,\,2]$.

(d) Berechne die Länge der kürzesten Verbindung der Geraden
$g:\, \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $q:\, \vec{w}(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + (s+1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(6) **(21 Punkte)**

Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},\; \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\; \vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$. Diese Vektoren sind Eigenvektoren einer Matrix M mit den Eigenwerten $\lambda_a = 2,\;\lambda_b = -1,\;\lambda_c = 3$.

(a) Berechne die Matrix M.

(b) Löse die Gleichung $M\cdot M - M^T\cdot X\cdot M + M = E$. (D.h. berechne X.)

(c) Wir schreiben: $M\cdot M := M^2,\;\; M^2\cdot M := M^3$ usw. und sei $Q = ((M^{-1})^{50})^T$.
Berechne $10^{39}\cdot\det(Q)$.

(d) Sei $U = M^5$. Berechne das Bild $U\cdot\vec{v}$ des Vektors $\vec{v} = \vec{b} + x\cdot\vec{b} - x^2\cdot\vec{b} - x^3\cdot\vec{b}$.

(e) Sei $D(\varphi,\,z) =$ Drehmatrix, die einen Vektor um die z–Achse um den Winkel φ dreht, wobei bei positivem φ die positive x–Achse in Richtung positive y–Achse gedreht wird. Schreibe $D(\varphi,\,z)$ als 3×3–Matrix auf.

(f) Berechne die Eigenwerte von $M^{-1}\cdot D(\varphi,\,z)\cdot M$. Für welche φ sind diese reell?

(g) Der Ursprung O sowie die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bilden eine Ebene Φ. Berechne die Spiegelungsmatrix S für die Spiegelung an Φ und bestimme damit den Bildpunkt von A mit $\overrightarrow{OA} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$.

[1] Exakt oder, falls die Rechnerleistung ausreicht, numerisch.

(7) **(9 Punkte)**

Gegeben sind die Funktionen
$f(x) = x \cdot \cos((x + x^2) \cdot \pi) - x \cdot x^x$ und $h(x) = 2\,x \cdot \sin(x^2 + 1) + x \cdot e^{2\,x^2} + \cos(x) - x\,\sin(x)$.
Berechne nachvollziehbar **von Hand**:

(a) Die Ableitung $f\,'(x)$.

(b) Die exakte Steigung sowie den Steigungswinkel α des Graphen von f für $x = 1$.

(c) Die Stammfunktion von h.

— ENDE —

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen **Ausschluss von der Prüfung** (0 Punkte) zur Folge. Speziell dürfen **mobile Telefone** und PDA's nicht ins Prüfungszimmer mitgebracht werden.
- Für die Schrift ist **dokumentechtes Schreibgerät** zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne leicht nachvollziehbare **Herleitung** werden nicht akzeptiert. ($\leadsto$ 0 P.)
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die **Abweichung** der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 1% betragen.
- Resultate sind doppelt zu **unterstreichen**.
- Ungültige Teile sind sauber **durchzustreichen**.
- Pro Aufgabe ist wenn möglich ein neues Blatt zu verwenden. Die **Rückseiten** der Schreibblätter müssen **leer** bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung, eigene Notizen), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro mit „Aufgabe“ bezeichnetes Problem ist die angegebene Anzahl von Korrekturpunkten möglich. Die Gesamtzahl der erreichten Korrekturpunkte wird anschliessend linear in die nach Reglementen skalierten Normpunkte oder Transferpunkte umgerechnet, welche in die Modulnote einfliessen.
- Die **maximal** mögliche Korrektur–Punktzahl wird auf der Grundlage der maximal erreichten oder der durchschnittlich erreichten Korrektur–Punktzahl definiert.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Architektur, Bau und Holz, Fachbereich Holz, Biel, 14.06.2011

2.5 Modulprüfung in Physik 2011 Klassen Bachelor Holz

Viel Glück !

Alle Teilaufgaben einer Aufgabe geben in der Regel gleich viele Punkte.

(1) **(6 Korrekturpunkte)**

Für einen neuen Ofentyp hat man in dessen Innerm bezüglich einem von der Herstellerfirma definiertem Koordinatensystem für die Erhitzung des Brennraumbodens empirisch eine Formel gefunden. Die pro Zeiteinheit beim Betrieb erzeugte Wärme (Wärmeleistung) berechnet man bei der Firma nach folgender Art:

$$P(x,\, y) = +C_0 \cdot 2\, e^{-k(x+y)} - C_0 \cdot 0.35, \quad -0.05 \leq x \leq 1.05, \quad -0.05 \leq y \leq 1.05$$

x und y sind hier in Dezimeter $[dm]$ einzusetzen. Dabei wird die Einheit dm von dem Term $k = 0.86/dm$ wieder neutralisiert. Daher dürfen wir in der Rechnung die Einheit dm weglassen. C_0 (in $[W]$) ist ein Koeffizient, der vom Brennstoff abhängt. Er wird hier nicht numerisch beziffert.

(a) Berechne im Punkt $(x_0 \pm \Delta x,\, y_0 \pm \Delta y) = (1.00 \pm \Delta 0.05, 1.00 \pm \Delta 0.05)$ den Wert $P_0 = P(x_0,\, y_0)$ sowie den linearen Fehler ΔP_0 von P_0. Dabei ist das „lineare“ Fehlerfortpflanzungsgesetz zu verwenden.

(b) Berechne den Wert Wärmeleistung P an der Stelle $P(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y)$. Was ist hier bemerkenswert?

(2) **(6 Korrekturpunkte)**

An einem Berghang mit $\alpha = 60^o$ Neigung gegen die Horizontale wird ein Baum gefällt. Ein Lehrling, welcher dabei sein darf, möchte nun wissen, mit welcher Geschwindigkeit die Baumspitze auf den Boden des Abhangs prallt. Die anwesenden Fachleute nennen Erfahrungswerte, doch ein ebenfalls anwesender Ingenieur lässt solche Schätzungen „aus dem hohlen Bauch“ nicht gelten. Mit gewissen vereinfachenden Modellannahmen gelingt es ihm, rechnerische Resultate zu gewinnen. Er trifft dabei die folgenden Annahmen: Vereinfacht hat der Baum eine Zylinderform mit $30\, cm$ Durchmesser und $12\, m$ Länge. Die spezifische Dichte ρ wird zu $0.9\, kg/dm^3$ angenommen. Der Baum steht genau vertikal und wird dann ebenerdig horizontal abgesägt. Darauf fällt er ohne Widerstand. Die Äste werden in diesem einfachen Modell vernachlässigt.
Aufgabe: Rechne die nachfolgend beschriebenen dazu ähnlichen Beispiele durch!

(a) Wie gross ist die Aufprallgeschwindigkeit des oberen Baumendes im einfachen Falle, wo der Waldboden statt geneigt horizontal ist? ($\alpha = 0^o$.) (3 P.)

(b) Wie gross ist die Aufprallgeschwindigkeit des oberen Baumendes in dem Falle, wo der Baum auf einem um $\alpha = 60^o$ gegen die Horizontale geneigten Abhang fällt? (Eine der Varianten nach oben oder unten kann gewählt werden.) (2 P.)

(c) Wie gross ist die Aufprallgeschwindigkeit des oberen Baumendes in dem Falle, wo der Baum nach unten an eine beinahe senkrechte Felswand knallt unter der Annahme, dass der Drehpunkt beim Fallen fix bleibt? (1 P.)

(3) **(9 Korrekturpunkte)**

An einem 13.7 m langen lackierten Draht von 1.5 mm Durchmesser misst man einen Widerstand von etwa $(1.00 \pm 0.05)\,\Omega$.

(a) Um welches Material könnte es sich bei dem Draht handeln?

(b) Wie lange muss ein solcher Draht sein, damit eine 10 A–Sicherung nicht gleich „durchbrennt“, wenn man ihn mit seinen beiden Enden an eine 230 V–Steckdose anschliesst? (Man gehe hier von der Voraussetzung aus, dass der Widerstand mit der Temperatur nicht ändert.)

(c) Die folgende Aufgabe lässt sich lösen, wenn man dazu ein geeignetes Gesetz in der mitgebrachten Literatur findet. α ist beim gegebenen Draht der Temperaturkoeffizient für den Widerstand: $\alpha = 6.57 \cdot 10^{-3}\,K^{-1}$, $1\,K \widehat{=} 1^o\,C$, $T_0 = 293.16\,K \widehat{=} 20^o\,C$. Um wieviel Prozent vom Widerstand R_0 bei $20^o\,C$ steigt der Widerstand des Drahtes, wenn sich die Temperatur um $1^o\,C \widehat{=} 1\,K$ erhöht und der Widerstand linear von der Temperatur abhängt?

(4) **(12 Korrekturpunkte)**

Ein Sprinter, der 100 m in 10 sec schafft, nimmt auf dem 10 m langen horizontalen Sprungbrett eines Sprungturms Anlauf und springt mit seiner vollen Geschwindigkeit von 10 m/sec vom Turm horizontal ab ins Wasser. Das Sprungbrett befindet sich 10 m über der Wasseroberfläche. Daher rechnen wir mit einer Höhe des Schwerpunktes des Sprinters von 0.90 m über dem Sprungbrett.

(a) Wie lange muss das Schwimmbecken bei der über dem Wasser gegebenen Sprungbrettlänge mindestens sein, wenn der Sprinter (Schwerpunkt) auf derselben Bahn wie in der Luft noch maximal 4 m ins Wasser eintaucht und von der Endlage seines Schwerpunkt dazu noch ein Sicherheitsabstand von 4 m bis zum Beckenrand addiert werden muss? (Der Wasserwiderstand ist in der Rechnung zu vernachlässigen.)

(b) Mit welcher Geschwindigkeit taucht der Sprinter bei seinem Sprung ins Wasser ein?

(c) Wieviele Prozent der kinetischen Energie beim Eintauchen stammt aus seiner Eigenleistung infolge seines Sprints, wenn der Mann eine Masse von 75 kg besitzt?

(d) Jemand hat die Idee, vorne neben dem Sprungbrett ein sehr hohes Wasserfass zu installieren, aus dem ganz unten horizontal ein Wasserstrahl austritt. Wie hoch müsste der Wasserstand im Fass sein, damit der Wasserstrahl an derselben Stelle eintaucht wie der Sprinter? (Reibungswiderstände sollen nicht berücksichtigt werden.)

(5) **(18 Korrekturpunkte)**

Ein Brückenspringer zeigt auf einer Waage eine Gewichtskraft von $686\,N$ (samt den Kleidern). Seine Körpergrösse beträgt $1.80\,m$. Nun springt er aus dem Stehen an einem Seil gesichert von einer $114.8\,m$ hohen Brücke. Das auf der Höhe der Brücke angebundene Seil zeigt im unbelasteten Zustand eine Länge von $76.8\,m$. Nach dem Sprung aus dem Stehen nähert er sich dem Boden nach einer glaubhaften Schätzung bis auf ca. $6.0\,m$, gemessen ab dem Kopfende des Springers.

(a) Berechne die Geschwindigkeit des Mannes in dem Moment, wo das Seil gerade gestreckt ist unter der Annahme, dass sein Schwerpunkt sich $0.9\,m$ unter dem Seilende befindet und dass der Luftwiderstand vernachlässigbar ist.

(b) Welches ist die kinetische Energie des Mannes in dem Moment, wo sich das Seil gerade zu spannen beginnt?

(c) Wie gross ist die Federkonstante des Seils, wenn es als Feder betrachtet wird?

(d) Berechne den Elastizitätsmodul bei einem Seil von $2\,cm$ Durchmesser.

(e) Welche maximale Zuglast muss das Seil aushalten?

(f) Berechne, falls dies nun möglich ist, die Höhe des Kopfendes (Scheitels) des an den Füssen am Seil hängenden Mannes über dem unten fliessenden Wasser nach dem Sprung im Zustand des Stillstands nach dem Ausschwingen.

(6) **(9 Korrekturpunkte)**

Vier Widerstände $R_1 = 200\,\Omega$, $R_2 = 200\,\Omega$, $R_3 = 300\,\Omega$, $R_4 = 400\,\Omega$ sind parallel geschaltet und an einer Spannungsquelle von $230\,V$ angeschlossen.

(a) Berechne den Strom in diesem Stromkreis. Beurteile anschliessend, ob eine $800\,W$–Sicherung diesem Stromkreis standhält — oder ob im anderen Falle vielleicht eine $1000\,W$–Sicherung genügt.

(b) Wie gross muss ein zu R_1 in Serie geschalteter Widerstand R_5 sein, damit die Leistung im Stromkreis $574\,W$ beträgt?

(c) Kann man einen zu R_1 in Serie geschalteten Widerstand R_5 derart wählen, dass die Leistung im Stromkreis $570\,W$ beträgt?

(7) **(6 Korrekturpunkte)**

Ein Kompressorbehälter hat ein Volumen von $120\,l$. Der Druck aussen und daher auch der Druck im geöffneten Behälter wird zu Beginn (d.h. vor der Kompression) mit $1\,bar$ angegeben. Die Temperatur im Behälter und ebenso die Aussentemperatur beträgt $20^o\,C$. Wir rechnen dabei mit einer Luftdichte von $1.204\,kg/m^3$.
Nun wird durch den Kompressor Luft in den Behälter gedrückt. Am Manometer liest man schliesslich einen Überdruck von $12\,bar$ ab. Das Einfüllen geschieht auf eine langsame Art, so dass die Temperatur konstant bleibt.

(a) Wieviele Liter Luft bei Normaldruck mussten in den Behälter gepresst werden, um diesen Überdruck erreichen zu können?

(b) Wie gross ist die Gewichtskraft der Luft im Behälter?

(8) **(4 Korrekturpunkte)**

Trockener Beton hat bei $20^o\,C$ eine spezifische Wärmekapazität von $0.84\,kJ\,kg^{-1}\,K^{-1}$. Bei trockenem Holz liegt der Wert etwa bei $2.5\,kJ\,kg^{-1}\,K^{-1}$. Dabei liegt Kiesbeton mit einer Dichte von $2.0\,kg/dm^3$ vor und dazu Holz mit einer Dichte von $0.7\,kg/dm^3$. Es soll damit ein Norm–Klotz von $1\,kg$ Masse im Verbund von Beton und Holz fabriziert werden, der die gleiche Dichte wie Wasser hat mit einer spezifischen Wärmekapazität von $1.00\,kJ\,kg^{-1}\,K^{-1}$. %

(a) Berechne, wieviele Masse–Teile in Prozent vom ganzen Klotz bei den vorgegebenen Bedingungen aus Holz und wieviele aus Beton sein müssen. (3 P.)

(b) Beantworte auf der Grundlage des Resultats die Frage, ob es überhaupt möglich ist, einen solchen Norm–Klotz zu konstruieren. (1 P.)

— ENDE —

Conditions:

- ⊘ Tous les problèmes sont à résoudre soi–même. Un comportement qui n'est pas honnête a comme conséquence **l'exclusion** immédiate **de l'examen** (0 points). Spécialement les **téléphones mobiles** et les PDA ne doivent pas être amenés dans la salle d'examen.
- ⊘ Pour écrire il faut un **moyen ineffaçable**. Le crayon est accepté seulement pour les dessins et les esquisses.
- ⊘ On demande une représentation claire et propre de la déduction de la solution avec l'indication des idées et des résultats intermédiaires. Les résultats sans la **déduction** ne sont pas acceptés.
- ⊘ Lors de l'utilisation de fractions décimales, le résultat exact et le résultat présenté ne doivent pas **différer** de plus de 1%.
- ⊘ Les résultats sont à **souligner** doublement.
- ⊘ Les parties non valables sont à **tracer** de manière propre et nette.
- ⊘ Pour chaque problème, il faut utiliser une nouvelle feuille. Les **versos des feuilles** doivent rester **vides**. Peut-être elles ne seront pas corrigées! ($\rightsquigarrow$ 0 p.)
- ⊘ **Moyens permis:** Dossiers de cours version abrégéé (résumé, notes), livres de formules, calculatrices, papier et écritoire.
- ⊘ **Points:** Par devoir nommé "problème", un certain nombre de points de correction est possibles. Le nombre total des points de correction possibles est ensuite transféré de façon linéaire d'après l' échelle réglementée dans des points de transfert standardisés qui font partie de la note de module.
- ⊘ Le nombre des points de correction maximal est calculé sur la base du nombre maximal atteint et aussi du nombre moyen des points atteints.

Haute école spécialisée bernoise, architecture, bois et génie civil
Filière bachelor technique du bois, Bienne 14.06.2011

2.6 Examen de module en physique 2011 Classes bachelor bois

Bonne chance !

Tous les problèmes partiels d'un problème donnent le même nombre de points de correction.

(1) **(6 points ce correction)**

Pour un nouveau modèle de four, on a trouvé empiriquement une formule pour le chauffage du fond de la chambre de combustion par rapport à un système de coordonnées défini par l'entreprise. L'entreprise calcule la chaleur produite par unité de temps (donc la puissance thermique) à l'exploitation d'après la manière suivie:

$$P(x,\, y) = +C_0 \cdot 2\, e^{-k(x+y)} - C_0 \cdot 0.35, \quad -0.05 \leq x \leq 1.05, \quad -0.05 \leq y \leq 1.05$$

Ici x et y sont à utiliser en décimètres $[dm]$. L'unité dm est ainsi neutralisée par le terme $k = 0.86/dm$. Par conséquent nous pouvons omettre l'unité dm dans le calcul. C_0, dans $[W]$, est un coefficient qui dépend du combustible. Ici, il n'est pas donné numériquement.

(a) Calcule dans le point $(x_0 \pm \Delta x,\, y_0 \pm \Delta y) = (1.00 \pm \Delta 0.05, 1.00 \pm \Delta 0.05)$ la valeur $P_0 = P(x_0,\, y_0)$ ainsi que l'erreur linéaire ΔP_0 de P_0. Ici on demande l'application de la loi de propagation "linéaire" des erreurs.

(b) Calculer la valeur de la puissance thermique P à la place $P(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y)$. Qu'est–ce qui est remarquable ici?

(2) **(6 points ce correction)**

À un versant d'une montagne avec une pente (déclivité) de $\alpha = 60^o$ par rapport à l'horizontale, un arbre est abattu. Un apprenti, à qui on a permis d'y assister, voudrait maintenant savoir avec quelle vitesse la pointe de l'arbre heurte le sol de la pente. Les experts présents donnent des valeurs empiriques qu'un ingénieur aussi présent ne laisse pas valoir comme "appréciations spontanées". Avec les suppositions de modèle simplificatrices et certaines, il réussit à gagner des résultats arithmétiques. Il échafaude l'hypothèse suivante: On peut simplifier la forme de l'arbre en cylindre avec $30\, cm$ de diamètre et $12\, m$ de longueur. La densité spécifique ρ est supposée d'être $0.9\, kg/dm^3$. La position d'arbre est exactement verticale. L'arbre est scié à sa base horizontalement. Il tombe sans résistance. Dans ce modèle simple, les branches sont négligées.
Problème: Calculer consécutivement les différents problèmes semblables décrits en bas!

(a) Combien grande est la vitesse d'impact de la pointe de l'arbre dans le cas simple, où le sol de la forêt est horizontal? ($\alpha = 0^o$) (3 p.)

(b) Combien grande est la vitesse d'impact de la pointe de l'arbre dans le cas où l'arbre tombe sur une pente penchée à $\alpha = 60^o$ contre l'horizontale?
(Choisir une des possibilités: Vers le haut ou vers le bas.) (2 p.)

(c) Combien grande est la vitesse d'impact de la pointe de l'arbre dans le cas où l'arbre surplombant une falaise presque verticale tombe vers le bas (le pivot reste fixe pendant le déclin)? (1 p.)

(3) **(9 points ce correction)**

À un grand fil métallique laqué d'une longueur de $13.7\,m$ et d'un diamètre de $1.5\,mm$, on mesure une résistance d'environ $(1.00 \pm 0.05)\,\Omega$.

(a) De quel matériau est-ce qu'il pourrait s'agir dans le cas du fil métallique?

(b) Quelle longueur est-ce qu'un tel fil métallique doit avoir afin qu'un fusible de $10\,A$ ne saute pas immédiatement, si on joint les deux bouts du fil à une prise de courant de $230\,V$. (Sous la condition que la résistance ne change pas avec la température.)

(c) On peut résoudre le problème suivant, si on trouve une formule convenable dans la littérature amenée. Au fil métallique donné, α est le coefficient de température pour la résistance: $\alpha = 6.57 \cdot 10^{-3}\,K^{-1}$, $1\,K \hat{=} 1^o\,C$, $T_0 = 293.16\,K \hat{=} 20^o\,C$. A quel pourcentage de la résistance R_0 à $20^o\,C$ est–ce que la résistance du fil métallique monte, si la température s'élève de $1^o\,C \hat{=} 1\,K$ et si la résistance dépend de la température de façon linéaire?

(4) **(12 points ce correction)**

Un sprinter qui fait $100\,m$ dans $10\,sec$, prend l'élan sur le grand tremplin horizontal de $10\,m$ de longueur d'un plongeoir et saute horizontalement avec sa pleine vitesse de $10\,m/sec$ de la tour dans l'eau. Le tremplin se trouve à $10\,m$ au–dessus de la surface de l'eau. Par conséquent nous calculons avec une hauteur du centre de gravité du sprinter de $0.90\,m$ sur le tremplin.

(a) Quelle longueur est-ce que la piscine doit avoir au moins avec la longueur du tremplin indiquée et si le sprinter (centre de gravité) plonge encore $4\,m$ dans l'eau et s'il faut additionner encore $4\,m$ de distance de sécurité depuis la position finale du centre de gravité jusqu' au bord du bassin? (La résistance de l'eau est à négliger dans le calcul.)

(b) Avec quelle vitesse est–ce que le sprinter plonge dans l'eau après son saut?

(c) Combien pour cent de l'énergie cinétique, lors de l'immersion, provient de son effort personnel à la suite de son sprint si l'homme a une masse de $75\,kg$?

(d) Quelqu'un a l'idée d'installer un tonneau d'eau très haut à côté de la pointe du tremplin à la base duquel sort un rayon d'eau de façon horizontale (niveau tremplin). Quelle hauteur doit avoir le niveau de l'eau dans le tonneau, afin que le rayon d'eau touche l'eau à la même place que le sprinter? (Les résistances de friction ne doivent pas être considérées.)

(5) **(18 points ce correction)**

Un sauteur de pont montre sur une balance une force de poids de $686\,N$ (avec les vêtements). Sa taille s'élève à $1.80\,m$. Maintenant, en se tenant debout, il saute sans élan du pont d'une hauteur de $114.8\,m$ assuré par une corde. La corde, attachée à la hauteur du pont, montre non chargée une longueur de $76.8\,m$. Après le saut en position debout, l'homme s'approche du sol jusqu'à environ $6.0\,m$, mesuré du sommet de la tête du sauteur et selon une appréciation crédible.

(a) Calculer la vitesse de l'homme au moment où la corde est exactement allongée sous la supposition que le centre de gravité de l'homme se trouve à $0.9\,m$ sous la fin de la corde et que la résistance de l'air soit négligeable.

(b) Quelle est l'énergie cinétique de l'homme au moment exact où la corde commence à se tendre et à s'allonger?

(c) Combien grande est la constante de la corde si on la considere comme ressort?

(d) Calculer le module d'élasticité d'une corde de $2\,cm$ de diamètre.

(e) Quel charge de traction maximale est–ce que la corde doit tenir (ou supporter)?

(f) Calculer la hauteur du sommet du crâne de l'homme suspendu aux pieds à la corde au–dessus–de l'eau (de la rivière) après le saut à l'arrêt du mouvement (ç.v.d. après cesser d'osciller), si c'est possible.

(6) **(9 points ce correction)**

Les quatre résistances $R_1 = 200\,\Omega,\ R_2 = 200\,\Omega,\ R_3 = 300\,\Omega,\ R_4 = 400\,\Omega$ sont branchées de façon parallèle et connectées à une source de tension de $230\,V$.

(a) Calculer le courant dans ce circuit. Juger ensuite si un fusible de $800\,W$ résiste à ce circuit — ou si un fusible de $1000\,W$ suffira peut–être dans l'autre cas.

(b) Combien grande une résistance R_5 branchée en série avec R_1 doit–elle être, afin que la puissance dans le circuit soit $574\,W$?

(c) Est-ce qu'on peut choisir une résistance R_5 branchée en série avec R_1 de façon que la puissance mesurée dans le circuit soit $570\,W$?

(7) **(6 points ce correction)**

Un réservoir de compresseur contient un volume de $120\,l$ d'air. Ici, on sait qu'au commencement (avant la compression) la pression dehors et aussi dans le réservoir ouvert est de $1\,bar$. La température aussi bien dans le réservoir que dehors est de $20^o\,C$. Nous calculons avec une densité de l'air dehors de $1.204\,kg/m^3$.
Maintenant, à l'aide du compresseur, on presse de l'air dans le réservoir. Au manomètre, on lit une surpression de $12\,bar$. Le processus de remplissage est réalisé de manière lente pour que la température reste constante.

(a) Combien de litres d'air à pression normale ont dû être comprimés dans le réservoir pour pouvoir atteindre cette surpression?

(b) Combien grande est la force de poids de l'air dans le réservoir?

(8) **(4 points ce correction)**

Le béton sec à $20^o C$ a une capacité thermique spécifique de $0.84\, kJ\, kg^{-1}\, K^{-1}$. Quant au bois sec la valeur est environ de $2.5\, kJ\, kg^{-1}\, K^{-1}$. Ici, on a du béton de gravier avec une densité de $2.0\, kg/dm^3$ et du bois avec une densité de $0.7\, kg/dm^3$. Avec cela, il faut fabriquer un bloc normal de jonction de béton et de bois avec une capacité thermique spécifique de $1.00\, kJ\, kg^{-1}\, K^{-1}$ qui a la même densité que l'eau. Pour cela, examine un produit d'une masse de $1\, kg$.

(a) Calculer, aux conditions données, en pourcentage combien de parties de da masse de tout le bloc normal doivent être en bois et combien doivent être en béton. (3 p.)

(b) Décider à la base du résultat trouvé, s'il est possible de construire un tel bloc normal. (1 p.)

— FIN —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Architektur, Bau und Holz, Fachbereich Bau, Burgdorf, 15.09.2010

2.7 Modulprüfung in Mathematik 2010 Klasse B 09 / B1

Viel Glück !

Erwartet werden die Lösungen von etwa 4 bis 5 Aufgaben aus der folgenden Serie. Alle Teilaufgaben einer Aufgabe geben gleichviele Punkte (je 3).

(1) **(27 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{(e^{2x} - 1)}, \quad I = D_f = [-5, 5].$$

(a) Erstelle eine saubere Skizze des Graphen im Intervall I.

(b) Bestimme den Steigungswinkel des Graphen für $x = -1$.

(c) Bestimme Nullstellen und Polstellen im Intervall I.

(d) Bestimme rechnerisch die Extremwertstellen im Intervall I.

(e) Bestimme rechnerisch die Wendepunkte im Intervall I.

(f) Bestimme die Grenzwerte von $f(x)$ für $x \to \infty$ und für $x \to -\infty$.

(g) Bestimme numerisch die Approximation von f durch das Taylorpolynom $p_{3,-3}(x)$ vom Grade 3 mit dem Zentrum $x_0 = -3$.

(h) Berechne damit numerisch $A_1 = \int\limits_{-4}^{-2} p_{3,-3}(x)\, dx$.

(i) Sei $A_2 = \int\limits_{-4}^{-2} f(x)\, dx$. Ermittle die ersten 4 Ziffern von $d = |A_2 - A_1|$.

(2) **(9 Punkte)**

Gegeben sind die Funktionen:
$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= 1 + \sin(x+y) \\ f_2(x,y) &= 1 + \sin(x\,y) \\ f_3(x,y) &= 1 + \sin(x) + \sin(y) \\ f_4(x,y) &= 1 + \sin(x)\,\sin(y) \end{aligned}$$

(a) Ermittle die 3D–Graphen und entscheide, welche Funktion das beste Modell einer Eierschachtel ergibt. Entscheide ebenso, welche Funktion das beste Modell für Wellblech ausmacht.

(b) Berechne $V_1 = \int\limits_{-2\pi}^{2\pi} \int\limits_{-2\pi}^{2\pi} f_3(x,\, y)\, dx\, dy$ und $V_2 = \int\limits_{-2\pi}^{2\pi} \int\limits_{-2\pi}^{2\pi} f_4(x,\, y)\, dx\, dy$. Entscheide damit, ob V_1 oder V_2 das grössere Volumen ist.

(c) Berechne für beide Funktionen beim Wert $x = 0$ die Weglänge auf der Funktionsfläche längs der y–Achse von $y_1 = -2\,\pi$ bis $y_2 = +2\,\pi$. Welche Weglänge ist grösser?

(3) **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion $h(x,\, r) = \sqrt{100 - x^2} - r$ über $I = [6,\, -6]$. Lässt man $h(x,\, r)$ über I um die x–Achse rotieren, so erhält man bei geschickter Wahl von r eine Säule. Stellt man diese Säule senkrecht, so bemerkt man, dass sie in der Mitte am dicksten und an den Enden am dünnsten ist, was sicher bei dicken Leuten zu Diskussionen über den rechten Geschmack Anlass gibt. (r ist im Moment Parameter.)

(a) Skizziere die Säule für $r = 7$ und für $r = 8$. Was stellt man fest?

(b) Sei $A(r)$ der Flächeninhalt der Grund– oder Deckfläche, falls die Säule senkrecht steht. Das Volumen $V(r)$ kann als Mass für ihr Gewicht und $q(r) = V(r)/A(r)$ als Mass für den Gewichtsdruck auf die Grundfläche interpretiert werden. Berechne $q(7)$ sowie $q(8)$.

(c) Berechne dasjenige r, für welches $q(r) = 25$ gilt, falls das möglich ist.

(d) Bestimme den Oberflächeninhalt der Säule ohne die Grund– und Deckfläche für $r = 7$.

(4) **(21 Punkte)**

Der Ursprung O und die Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ bestimmen die Ebene Φ.

Dazu sei $P = P(-1,\, 2,\, 3)$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Konstruiere die Spiegelungsmatrix S für die Spiegelung an Φ.

(b) Spiegele damit P, d.h. berechne den Bildpunkt P_1.

(c) Konstruiere die Drehmatrix $D(\varphi)$ mit $\varphi = \dfrac{\pi}{5}$ in der Grundebene (um die z–Achse).

(d) Drehe damit P_1 um O, d.h. berechne den Bildpunkt P_2.

(e) Spiegele den Punkt P_2 mittels S zurück, d.h. berechne den Bildpunkt P_3.

(f) Konstruiere eine Projektionsmatrix, mit der ein Punkt auf Φ projiziert werden kann. (Man überlege sich dazu, was die Projektion mit der Spiegelung zu tun hat und wie man die Eigenwerte der Speigelungsmatrix abändern müsste, um eine Projektion zu erhalten.)

(g) P_4 sei die Projektion von P_3. Bereche P_4.

(5) **(27 Punkte)**

Die drei Vektoren $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ werden in der gegebenen Reihenfolge zu einer Matrix A zusammengefasst.
Ebenso fasst man die Vektoren $\vec{b}_1 = 2 \cdot \vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ in der gegebenen Reihenfolge zu einer Matrix B zusammen.

(a) Berechne die Eigenwerte von A.

(b) Berechne die Eigenwerte von B.

(c) Gibt es zwischen den Eigenwerten der beiden Matrizen Gemeinsamkeiten? Falls ja: Welche?

(d) Gibt es zwischen den Eigenvektoren der beiden Matrizen Gemeinsamkeiten? Falls ja: Welche? (Nummerierung beachten, dezimal!)

(e) Berechne die Eigenwerte von $A \cdot B$ und auch diejenigen von $B \cdot A$.

(f) Berechne die Summen der Eigenwerte von A, B, $A \cdot B$, $B \cdot A$ und untersuche damit, ob irgendwo ein Zusammenhang besteht.

(g) Berechne die Produkte der Eigenwerte von A, B, $A \cdot B$, $B \cdot A$ und untersuche damit, ob irgendwo ein Zusammenhang besteht.

(h) Berechne die Determinanten von A, B, $A \cdot B$, $B \cdot A$ und untersuche damit, ob ein Zusammenhang zu der vorhergehenden Teilaufgabe besteht.

(i) Gegeben ist der Punkt $Q(0, -2, 2)$. Sei $\overrightarrow{OP_1} = A \cdot \overrightarrow{OQ}$ und $\overrightarrow{OP_2} = B \cdot \overrightarrow{OQ}$. Berechne $\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$. Erkläre das Resultat.

(6) (4 **unabhängige Aufgaben, 24 Punkte)**

(a) Löse die folgende Matrixgleichung ($X = ?$) unter der Annahme, dass alle Matrizen regulär seien:

$$B \cdot (B + X) \cdot B + B = B \cdot B^T + E - B^{-1}$$

(b) $U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

i. Berechne U_1^2, U_1^3, U_1^4. Was fällt auf?

ii. Berechne $U_1^2 \cdot U_1^2$, $U_1^3 \cdot U_1$ und $U_1 \cdot U_1^4$. Was fällt auf?

(c) Gegeben sind die Gleichungssysteme $U_2 \cdot \vec{x} = \vec{b}_1$ und $U_2 \cdot \vec{x} = \vec{b}_2$ mit

$$U_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & -3 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

i. Untersuche, ob eines der beiden Systeme lösbar ist und berechne dann allenfalls die Lösung(en).
ii. Berechne die Ordnung (= Dimension(Urbildraum)) der beiden Systeme.
iii. Berechne in etwaigen Fällen, dann wenn Lösungen vorhanden sind, die Dimension des Lösungsraumes (=Dimension(Kern)).
iv. Berechne den Rang der Matrix U_2.
(*Hinweis:* Den Rang kann man entweder direkt berechen. Man kann aber auch obige Resultate zur Hilfe nehmen und den Rangsatz anwenden.)

(d) Gegeben sind zwei Geraden:

$$g_1: \ \vec{v_1}(t) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_2: \ \vec{v_2}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Schneiden sie sich? — Berechne ihren Abstand, falls sie sich nicht schneiden.

(7) **(Zusatzaufgabe, 18 Punkte)**

Durch $A = A(3;\, 1;\, 4)$ ist die Achse $\overline{OA}$ gegeben. Sei $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$. Dazu kennt man noch $P_1 = P_1(2;\, 0;\, 4)$.

(a) Wähle den Vektor $\vec{b} = \vec{e}_1$ und konstuiere mit $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ sowie $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{c}$ zwei Vektoren, welche senkrecht auf $\vec{a}$ stehen. Berechne damit die Einheitsvektoren $\vec{e}_a$, $\vec{e}_c$, $\vec{e}_d$ für die Richtungen $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, numerisch und schreibe danach die Resultate so auf, dass sie beim Korrigieren sofort sichtbar sind.

(b) Konstruiere eine Matrix M, welche $\vec{e}_1$ in $\vec{e}_a$ abbildet und $\vec{e}_2$ in $\vec{e}_c$ sowie $\vec{e}_3$ in $\vec{e}_d$.

(c) Bilde mit Hilfe von M^{-1} den Ortsvektor $\overrightarrow{OP_1}$ in $\overrightarrow{OP'}_1$ ab.

(d) Konstruiere zwei Matrizen, welche $\overrightarrow{OP'}_1$ um die $\vec{e}_1$–Achse (mit Blick Richtung O) in $\overrightarrow{OP'}_2$ um den Winkel $\dfrac{2\,\pi}{3}$ und $\overrightarrow{OP'}_2$ um $\dfrac{2\,\pi}{3}$ in $\overrightarrow{OP'}_3$ drehen.

(e) Bilde $\overrightarrow{OP'}_2$ und $\overrightarrow{OP'}_3$ wieder mit M zurück ab in $\overrightarrow{OP_2}$ und $\overrightarrow{OP_3}$. Damit erhält man eine Dreieckspyramide $OP_1P_2P_3$ mit der Spitze in O. Berechne P_2 und P_3.

(f) Berechne das Volumen der Pyramide, falls es existiert.

— ENDE —

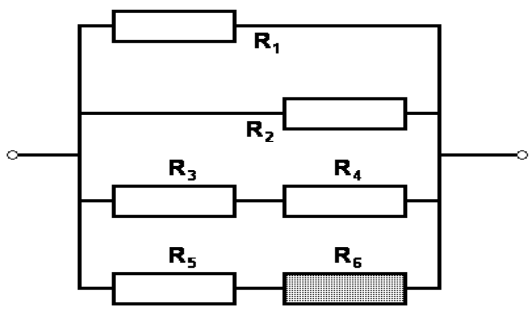
Berner Fachhochschule, Hochschule für Architektur, Bau und Holz, Fachbereich Holz, Biel, 17.06.2010

2.8 Modulprüfung in Physik 2010 Klassen Bachelor Holz

Viel Glück !

Alle Teilaufgaben einer Aufgabe geben gleich viele Korrektur–Punkte.

(1) **(15 Korrekturpunkte)**



Gegeben ist eine Schaltung wie im Bild ersichtlich. R_6 ist zwischen $0\,\Omega$ und unendlich (Unterbruch).

Es gilt:
$R_1 \pm \Delta R_1 = R_2 \pm \Delta R_2 = R_3 \pm \Delta R_3 = R_5 \pm \Delta R_5 = 2.00\,\Omega \pm 0.05\,\Omega$,
$R_4 \pm \Delta R_4 = 10.00\,\Omega \pm 0.15\,\Omega$.

(a) Wie gross ist der Gesamtwiderstand R_{total}, wenn $R_6 \pm \Delta R_6 = R_4 \pm \Delta R_4$ ist?

(b) Berechne den möglichen Fehler (Toleranz) ΔR_{total}.

(c) Wie gross muss R_6 gewählt werden, damit R_{total} minimal wird? ($R_{total} = ?$)

(d) Wie gross muss R_6 gewählt werden, damit R_{total} maximal wird? ($R_{total} = ?$)

(e) Kann man R_6 so wählen, dass $R_{total} = 2.8\,\Omega$ ist? Falls das möglich ist, wie gross muss man dann R_6 wählen?

(2) **(9 Korrekturpunkte)**

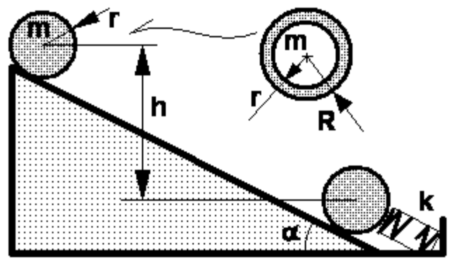
Beim Holzfällen in der Wildnis des sehr wilden Westens entdeckt ein Arbeiter einen grossen, schönen Vogel, welcher oben auf dem zu fällenden Baum sitzt. Der Arbeiter möchte diesen Vogel nach Hause nehmen und ihn ausstopfen lassen, wie das früher bei seinem Grossvater üblich war. So beschliesst er, den Vogel abzuschiessen. Mit seiner Kleinkaliber–Waffe trifft er jedoch nur hart am Vogel vorbei. Das verwendete Projektil hat eine Masse von $2.6\,g$ und die Waffe eine Abschussgeschwindigkeit von $340\,m/s$ mit einem Abschusswinkel von 45^o gegen die Horizontale. Der Luftwiderstand soll hier vernachlässigt werden.

(a) Welche Höhe erreicht das Projektil maximal über der Horizontalen, wenn man annimmt, dass in diesem Bereich mit $g = 9.81\,m/s^2$ gerechnet werden kann?

(b) Die nächst gelegene bewohnte Gegend ist $20\,km$ entfernt. In welcher horizontalen Distanz vom Abschussort schlägt das Projektil in die Erde?

(c) Wie gross ist die Energie der Kugel beim Einschlag in den Boden?

(3) **(15 Korrekturpunkte)**



Ein zylindrischer Körper der Masse $m = 1\,kg$ mit $r = 2\,cm$ rollt eine schiefe Ebene hinunter ohne zu rutschen. Dabei vermindert sich seine Höhe über dem Boden um $h = 1.5\,m$. Der Neigungswinkel der Ebene α ist 30^o. Für einen Vollzylinder ist das Trägheitsmoment $J = \frac{1}{2}\,m\,r^2$.

(a) Berechne die Rotationsenergie des Zylinders beim Auftreffen unten.

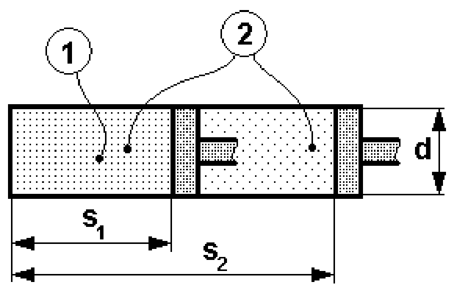
(b) Berechne die Drehzahl (Anzahl Umdrehungen pro Minute) beim Auftreffen.

(c) Berechne die Zeit vom Wegrollen bis zum Auftreffen.

(d) Die Rotationsenergie wird beim Auftreffen durch Reibung „vernichtet". Mit der kinetischen Energie jedoch wird eine Druckfeder gespannt. Berechne die Federkonstante, wenn dabei eine $20\,cm$ lange Feder um $4\,cm$ verkürzt wird.

(e) Berechne die Rotationsenergie beim Auftreffen unten, wenn der Zylinder durch einen Hohlzylinder mit dem Innendurchmesser $r = 2\,cm$ und ebenfalls der Masse $m = 1\,kg$ ersetzt wird.

(4) **(6 Korrekturpunkte)**



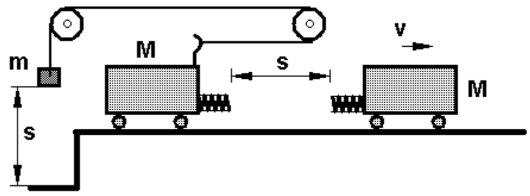
Im gezeigten Zylinder mit dem Kolben in den 2 Positionen (1) und (2) ist Stickstoff eingeschlossen. Der Innendurchmesser des Zylinders ist $d = 5.0\,cm$, die Innenlänge in der Position (1) ist $s_1 = 10.0\,cm$. In dieser Position herrscht ein Innendruck von $1.0\,bar$ und eine Temperatur von $18.0^o\,C$.

Der Kolben ist gegen aussen stark isoliert, der Zylinder jedoch nicht. Er ist aus Kupfer.

(a) Der Zylinder mit arretiertem, also nicht beweglichem Kolben wird nun in kochendes Wasser von $100^o\,C$ gelegt. Berechne den sich dabei einstellenden Innendruck im Zylinder, wenn das Gas die Temperatur des Wassers angenommen hat.

(b) Jetzt wird der Kolben entriegelt, so dass er sich bewegen kann. Er wird gleichzeitig so positioniert, dass er aus dem Wasser ragt. Aussen am Kolben herrscht ein Druck von $1\,bar$, der sich jetzt auch innen einstellt, da sich der Kolben bewegen kann. Die Temperatur im Inneren bleibt jedoch die Wassertemperatur. Berechne s_2.

(5) **(12 Korrekturpunkte)**



Die Versuchsvorrichtung im Bild zeigt zwei Wagen mit den Massen von je $M = 5\,kg$. An den Wagen sind Federn angebracht, so dass die Stösse elastisch sind. Über Umlenkrollen ist der eine Wagen mit einer Masse $m = 2\,kg$ verbunden, welche an einem Seil $s = 2.00\,m$ über dem Boden schwebt.

Wenn man diesen Wagen rollen lässt, so klinkt das Seil am Wagen eine äusserst minime Zeitspanne vor dem Moment aus, zu welchem m auf dem Boden auftrifft. Unmittelbar danach stösst der genannte Wagen mit dem zweiten Wagen elastisch zusammen.

(a) Berechne die Zeit t welche vergeht, bis m auf den Boden auftrifft.
(b) Berechne die kinetische Energie von m beim Auftreffen auf dem Boden.
(c) Berechne die Geschwindigkeit des zweiten Wagens unmittelbar nach dem Stoss.
(d) Berechne die kinetische Energie des zweiten Wagens unmittelbar nach dem Stoss.

(6) **(18 Korrekturpunkte)**

Unabhängige Aufgaben:

(a) Eine Masse $m = 1.00\,kg$ fällt aus $1\,m$ Höhe in Achsenrichtung auf einen Nagel, welcher aus einem Brett genügend weit herausragt. Nach dem Aufschlag ist der Nagel um $2.0\,cm$ tiefer ins Brett eingedrungen. Welche mittlere Kraft hat hier maximal auf den Nagel gewirkt, wenn die fallende Masse auf der Länge dieser $2.0\,cm$ auf $v = 0\,m/s$ verzögert worden ist?
(b) Welche Stromstärke ist bei einer Spannung von $230\,V$ am Tauchsieder mindestens notwendig, um einen Liter Wasser von $20^o\,C$ innerhalb einer halben Minute gerade zum Kochen ($100^o\,C$) zu bringen?
(c) Ein Satellit mit der Masse $m = 892\,kg$ hat eine Umlaufzeit um die Erde von $6.4\,Stunden$. Wie hoch über den Meeresniveau kreist der Satellit, wenn seine Bahn als kreisförmig angenommen wird?
(d) Mit einer Stimmgabel wird in einem horizontalen Rohr (in Luft) eine stehende Welle erzeugt, welche an den Orten der Bäuche Mehl aufwirbelt. Man misst so einen Knotenabstand von $s = 25\,cm$. Welche Frequenz hat die Stimmgabel? ($v_{Schall} \approx 337\,m/s$.)
(e) In Fuente del Mar zeigt eine Temperaturmeßserie an einer Oberfläche die Funktion $\vartheta(t, \vartheta_1, \vartheta_2) = \vartheta_1 + \vartheta_2\,\sin(\frac{2\pi\,t}{24})$, $\vartheta_1 = 20.5^o\,C \pm 0.3^o\,C$, $\vartheta_2 = 2.6^o\,C \pm 0.3^o\,C$. Die Zeit t in Stunden wurde mit Hilfe von Mittelwerten ermittelt. Man hat den Standardfehler von $\pm 1\,h = \pm 1\,Std.$ Angenäherter Fehler $\Delta\vartheta$ für $t = 18\,h \pm 1\,h = \,?$ — Kommentar?
(f) In einen Brunnen, der in $1\,m$ Wassertiefe eine horizontale Ausflussöffnung hat, fliesst durch eine Röhre ständig Wasser nach. Der Röhrendurchmesser ist gleich dem Ausflusslochdurchmesser. Wie gross muss die Wassergeschwindigkeit in der Einflussröhre oben mindestens sein, damit die Wasserhöhe im Brunnen nicht abnimmt?

— ENDE —

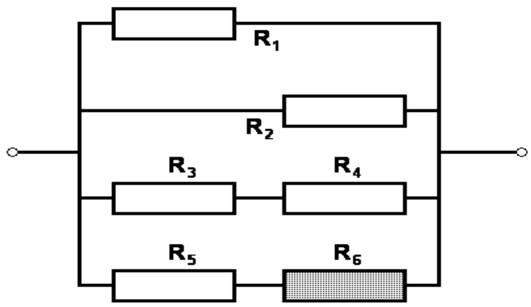
Haute école spécialisée bernoise, architecture, bois et génie civil
Filière bachelor technique du bois, Bienne 17.06.2010

2.9 Examen de module en physique 2010 Classes bachelor bois

Bonne chance !

Tous les problèmes partiels d'un problème donnent le même nombre de points de correction.

(1) **(15 points ce correction)**



Soit donné un montage de résistances comme on voit dans l'image. R_6 est entre $0\,\Omega$ et infini (déconnecté). Il vaut:

$$R_1 \pm \Delta R_1 = R_2 \pm \Delta R_2 = R_3 \pm \Delta R_3 = R_5 \pm \Delta R_5 = 2.00\,\Omega \pm 0.05\,\Omega,$$
$$R_4 \pm \Delta R_4 = 10.00\,\Omega \pm 0.15\,\Omega.$$

(a) Quelle est la valeur de la résistance totale R_{total} pour $R_6 \pm \Delta R_6 = R_4 \pm \Delta R_4$?

(b) Calculer l'erreur possible (tolérance) ΔR_{total}.

(c) Quelle est la valeur de R_6 pour laquelle R_{total} devient minimale? ($R_{total} = ?$)

(d) Quelle est la valeur de R_6 pour laquelle R_{total} devient maximale? ($R_{total} = ?$)

(e) Est–ce qu'on peut choisir R_6 de façon que $R_{total} = 2.8\,\Omega$? Si celà est possible, quelle valeur est–ce qu'on doit choisir pour R_6?

(2) **(9 points ce correction)**

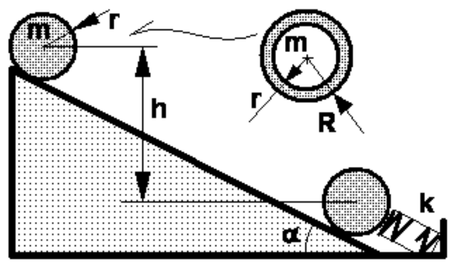
À l'occasion du travail des bûcherons dans le Far West, un ouvrier découvre un grand, bel oiseau qui est assis en haut sur un arbre qu'on va abattre. Un ouvrier aimerait prendre cet oiseau à la maison et voudrait le faire empailler selon la coutume de son grand–père. Ainsi il décide de tirer sur l'oiseau. Avec son arme de petit calibre, il le rate de peu. Il a appliqué un projectile qui a une masse de $2.6\,g$. L'arme permet une vitesse initiale de $340\,m/s$. L'angle de d'inclinaison est 45^o, mesuré de l'horizontale. Ici, la résistance de l'air est à négliger.

(a) Quelle est la hauteur maximale atteinte par le projectile au dessus de l'horizontale si on suppose qu' on peut calculer avec $g = 9.81\,m/s^2$?

(b) La région habitée la plus proche est éloignée de $20\,km$. A quelle distance horizontale de la place de tir le projectile entre–t–il dans la terre?

(c) Quelle est la valeur de l'énergie du projectile au moment où il touche le sol?

(3) **(15 points ce correction)**



Un corps cylindrique de la masse $m = 1\,kg$ avec le rayon $r = 2\,cm$ roule vers le bas d'une plaine oblique sans glisser. A cette occasion, la hauteur par rappport au sol se réduit de $h = 1.5\,m$. L'angle α d'inclination de la plaine est 30^o. Pour un cylindre plein, le moment d'inertie est $J = \frac{1}{2}\,m\,r^2$.

(a) Calculer l'énergie de rotation du cylindre au moment de frapper le bas.

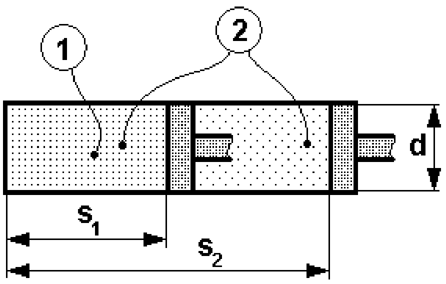
(b) Calculer le nombre de tours (tours par minute) au moment de frapper le bas.

(c) Calculer le temps du départ jusqu'à l'arrivée.

(d) Au moment de frapper le sol, l'énergie de rotation est "annihilée" par le frottement. Avec l'énergie cinétique cependant un ressort de compression est tendu. Calculer la constante du ressort si un ressort d'une longueur de $20\,cm$ est raccourci de $4\,cm$.

(e) Calculer l'énergie de rotation au moment de frapper le bas, si le cylindre est remplacé par un cylindre vide au diamètre intérieur $r = 2\,cm$ et à la masse $m = 1\,kg$.

(4) **(6 points ce correction)**



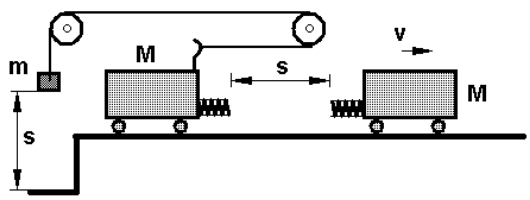
Dans le cylindre montré avec le piston dans les 2 positions (1) et (2) se trouve de l'azote. Le diamètre intérieur du cylindre est $d = 5.0\,cm$, la longueur intérieure dans la position (1) est $s_1 = 10.0\,cm$. Dans cette position il y a une pression intérieure de $1.0\,bar$ et une température de $18.0^o\,C$.

Vers l'extérieur, le piston est fortement isolé, le cylindre cependant ne l'est pas. Il est en cuivre.

(a) Le cylindre avec le piston arrêté, ç.v.d. pas mobile, est mis dans de l'eau bouillante de $100^o\,C$. Calculer la pression intérieure du cylindre quand le gaz aura atteint la température de l'eau.

(b) Maintenant le piston est déverrouillé pour qu'il puisse bouger. Il est positionné de façon qu'il émerge de l'eau. Ainsi on a une pression de $1\,bar$ sur le piston, pression qui s'établit aussi à l'intérieur du cylindre, parce que le piston peut bouger. La température à l'intérieur cependant reste la température d'eau. Calculer s_2.

(5) **(12 points ce correction)**



Dans l'image, le dispositif d'expériences montre deux voitures avec des masses de $M = 5\,kg$ par voiture. Aux voitures on a placés des ressorts pour que les coups (joints) soient élastiques.

L'une des voiture est connectée par des galets de détournement avec une masse $m = 2\,kg$, qui est suspendue à un cordage $s = 2.00\,m$ au dessus du sol. Si on fait rouler cette voiture, le cordage se détache de la voiture un instant minime avant le moment où m tombe sur le sol. Immédiatement après cela, la voiture en question heurte de façon élastique la deuxième voiture.

(a) Calculer le temps t qui s'écoule jusqu'à ce que m tombe sur le sol.

(b) Calculer l'énergie cinétique de m au moment que m frappe le sol.

(c) Calculer la vitesse de la deuxième voiture immédiatement après le choc.

(d) Calcule l'énergie cinétique de la deuxième voiture immédiatement après le choc.

(6) **(18 points ce correction)**

Quelques problèmes indépendants:

(a) Une masse $m = 1.00\,kg$ tombe de la hauteur d'$1\,m$ sur un clou dans la direction de l'axe. Le clou dépasse suffisamment la planche dans laquelle il est planté. Après le heurt, le clou a encore pénétré de $2.0\,cm$ dans la planche. Quelle force moyenne maximale a fait effet sur le clou si la masse tombante a été retardée sur $2.0\,cm$ à $v = 0\,m/s$?

(b) Quelle intensité du courant est au moins nécessaire à une tension de $230\,V$ au chauffe-liquide pour faire bouillir ($100^o\,C$) un litre d'eau de $20^o\,C$ dans une demi–minute?

(c) Un satellite avec la masse $m = 892\,kg$ a une période autour de la terre de $6.4\,heures$. A quelle hauteur au–dessus du niveau de la mer est–ce que le satellite tourne, si l'orbite est regardée comme circulaire?

(d) Dans un tube horizontal (dans l'air) on produit une onde stagnante à l'aide d'un diapason. L'onde soulève de la farine aux lieux des bombements. Ainsi on mesure un espace de noeud de $s = 25\,cm$. Quelle est la fréquence du diapason? ($v_{son} \approx 337\,m/s$.)

(e) A Fuente del Mar, une série de mesurements de température à une surface mène à la fonction $\vartheta(t, \vartheta_1, \vartheta_2) = \vartheta_1 + \vartheta_2 \sin(\frac{2\pi t}{24})$, $\vartheta_1 = 20.5^o\,C \pm 0.3^o\,C$, $\vartheta_2 = 2.6^o\,C \pm 0.3^o\,C$. Le temps t (en heures) a été déterminée à l'aide de moyennes. On a l'erreur standard de $\pm 1\,h$. Calculer l'erreur approchée pour $t = 18\,h \pm 1\,h$. — Commentaire?

(f) Dans une fontaine, l'eau coule constamment par une conduite d'en haut. La fontaine a à $1\,m$ de profondeur un trou d'écoulement horizontal. La conduite et le trou d'écoulement ont le même diamètre. Quelle est la vitesse nécessaire de l'eau qu'il faut avoir dans la conduite de l'afflux afin que la hauteur de l'eau ne diminue pas dans la fontaine?

— FIN —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Arch., Bau u. Holz, FB Bau, Burgdorf, 07.09.2009

2.10 Modulprüfung in Mathematik 2009 Klasse B 08 / B1

Viel Glück !

Erwartet werden die Lösungen von etwa 4 Aufgaben aus der folgenden Serie. Alle Teilaufgaben einer Aufgabe geben gleichviele Punkte.

(1) **(18 Punkte)**

(a) **(10 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \ln(2\,x + e) + \frac{2\,x + 2}{x + 2}.$$

i. Erstelle eine saubere Skizze des Graphen im Intervall $I_1 = [0,\,2]$.
ii. Zeichne in die Skizze die Sehne zwischen den Endpunkten des Graphen ein beim gegebenen Intervall I_1 und bestimme dazu rechnerisch den Steigungswinkel dieser Sehne im Bogenmass.
iii. Zeiche in die Skizze auch die Tangente bei $x = 1$ ein und bestimme rechnerisch den Steigungswinkel dieser Tangente im Bogenmass.
iv. Bestimme, um wieviele Prozente von der Sehnensteigung die Tangentensteigung grösser oder kleiner ist als die Sehnensteigung.
v. Bestimme rechnerisch einen allfälligen Schnittpunkt der gegebenen Sehne mit der gegebenen Tangente. Zeichne allenfalls eine zweite Skizze, in der der eventuelle Schnittpunkt sichtbar gemacht ist.

(b) **(8 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = -|x|^3 + 8 \;\text{ mit }\; y = f(x) \geq 0$$

Zwischen der x–Achse und dem Graphen liegt ein achsenparalleles Rechteck mit möglichst grossem Flächeninhalt F.

i. Erstelle eine saubere Skizze des Graphen und eines möglichen Rechtecks, wie es etwa zu erwarten ist.
ii. Bestimme rechnerisch den Flächeninhalt A des Funktionsgraphen über der x–Achse.
iii. Bestimme die x–Koordinaten, welche notwendig sind um das Rechteck eindeutig anzugeben.
iv. Bestimme den Flächeninhalt F des Rechecks und das Verhältnis dieses Inhalts zum Flächeninhalt $A = \int\limits_{y\geq 0} f(x)\,dx$.

(2) **(15 Punkte)**

Mit Hilfe der folgenden Funktion wird versucht, die Form der Mantellinie eines gegebenen liegenden Fasses zu modellieren:

$$m(x) = \cos\left(\frac{1}{2-x^2}\right), \quad I_2 = [-1,\, 1].$$

Hier wird $m(x)$ zur Erzeugung des Modells um die x–Achse rotiert.

(a) Erstelle eine saubere Skizze des Graphen der Mantellinie des Rotationskörpers.

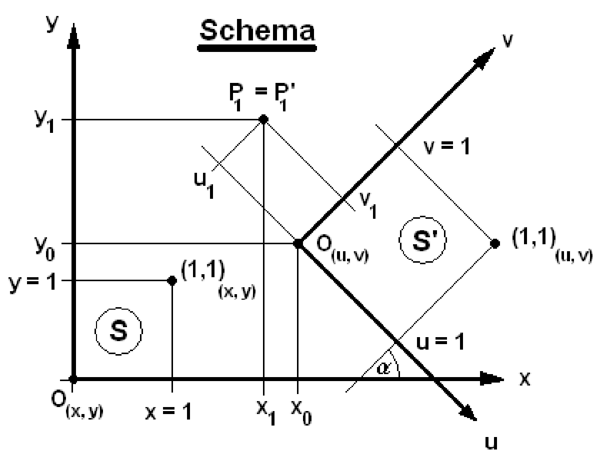
(b) Berechne eine vernünftige numerische Näherung der Länge der durch $m(x)$ über I_2 gegebenen Mantellinie.

(c) Berechne eine vernünftige Näherung des Mantelflächeninhalts des Rotationskörpers (ohne die beiden Deckflächen, Rotation von m um die x–Achse).

(d) Berechne eine vernünftige Näherung des Volumeninhalts dieses Rotationskörpers.

(e) Wie gross müsste der Radius eines Zylinders mit dem gleichen Volumeninhalt und derselben Höhe wie beim Fass sein? Wieviel Prozent des Maximalradius des Fasses beträgt dieser Zylinderradius?

(3) **(15 Punkte)**



Im Viertelkanton Hinterfelden in Strumpfland, einem Viertweltstaat der nicht zur UNO gehört, verwendet man immer noch zwei Koordinatensysteme. Ein altes, noch aus der Kolonialzeit stammendes und anderswo vergessenes $(u,\, v)$–System und ein modernes $(x,\, y)$–System im Metermass. Das $(x,\, y)$–System nennen wir **S** und das $(u,\, v)$–System nennen wir **S'**. Das eine System geht aus dem andern durch Parallelverschiebung und Drehstreckung hervor. Die Einheiten lassen wir vorerst weg.

Wir können somit den Ansatz machen:

$$\vec{u} := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x,\, y) \\ v(x,\, y) \end{pmatrix} = \lambda \cdot D_\varphi \cdot (\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}) = \lambda \cdot D_\varphi \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)$$

Dabei sind u und v die Koordinaten eines gegebenen Punktes in **S'** und x und y die Koordinaten desselben Punktes in **S**. D_φ ist eine noch zu bestimmende Drehmatrix:

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Die Werte von φ, λ, x_0 und y_0 sollen aus gegebenen Mustermessungen von Punkten in beiden Koordinatensystemen bestimmt werden. Wir kennen die Koordinaten des Ursprunges von $O_{S'}$ im System **S** mit den Werten x_0 und y_0:
$O_{S',(x,y)} = (x_0,\, y_0) = (44.36,\, 36.85)$. Dabei ist $O_{S,(x,y)} = (0,\, 0)$ (resp. $= (0.00,\, 0.00)$).

Weiter kennt man die Koordinaten des geometrischen Punktes $P_1 = P_1{}'$ im jeweils zugehörigen System. Diese sind speziell vermessen und am Boden durch eine Marke gekennzeichnet worden. Es gilt:
$P_{1,S} = (x_1,\, y_1) = (28.96,\, 43.92))$, $P_{1,S'} = (u_1,\, v_1) = (7.32,\, 12.88))$.

(a) Bestimme $\vec{x}_0$.

(b) Bestimme λ und φ.

(c) Bestimme damit die Transformation $\vec{u} = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \lambda \cdot D_\varphi \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)$.
Fertige dazu auch eine Skizze an.

(d) Berechne die Bilder der folgenden Punkte
$P_{2,S} = (x_2,\, y_2) = (10.00,\, 20.00)$ und $P_{3,S} = (x_3,\, y_3) = (18.57,\, 24.24)$.

(e) Berechne das Urbild des Punktes $P_{4,S'} = P(u_4,\, v_4) = (28.00,\, 15.00)$.

(4) **(24 Punkte)**

Eine Abbildung ist gegeben durch die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 19 & -4 & -6 \\ 12 & -4 & -6 \\ 16 & -17 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Bilde mit B die folgenden Vektoren ab: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Was fällt dabei auf bezüglich der Richtungen der Vektoren?

(b) Untersuche, ob die Menge $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ eine Basis bildet.

(c) Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix B.

(d) Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix B^{-1}, falls möglich.

(e) Bilde mit B den Vektor $\alpha\,\vec{v}_1 + \beta\,\vec{v}_2 + \gamma\,\vec{v}_3$ ab.

(f) Konstruiere eine Matrix C, welche dieselben Eigenvektoren wie B besitzt, deren Eigenwerte jedoch so geardet sind, dass durch C eine Projektion in Richtung $\vec{v}_3$ auf die Ebene $\Phi = \Phi(O, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$ gegeben ist. ($O =$ Ursprung.)

(g) Bilde mit C die Punkte $P_1(1,1,1)$, $P_2(4,4,4)$, $P_3(5,12,20)$ ab.

(h) Berechne die Distanz d von P_1 zur Gerade $g(P_2, P_3)$ und die Distanz d' des Bildes $P_1{}'$ zu $g'(P_2{}', P_3{}')$. Um welchen Faktor verkürzt sich die Distanz beim Projizieren?

(5) **(14 Punkte)**

Durch die Alpen wird ein $40\,km$ langer Tunnel gegraben, welcher beim Ausbruch einen Querschnitt hat, der durch die folgende Funktion gegeben ist:

$$q(x) = -\frac{1}{2}\left(e^{3\,x/10} + e^{-3\,x/10}\right) + 10,\;\; q(x) \geq 0.$$

Die zu $q(x)$ gehörigen Masse sind in Metern zu verstehen.

(a) Berechne die Nullstellen von $q(x)$ numerisch und damit den Definitionsbereich $D_q = I_5$ der Randkurve für den Tunnelquerschnitt.

(b) Berechne den Querschnitsflächeninhalt des Tunnels in m^2.

(c) Berechne das Ausbruchvolumen in m^3, wenn zwei parallele „Röhren" ausgebrochen werden.

(d) Das Ausbruchvolumen wird draussen in Form von Pyramiden abgelagert, welche die Abmessungen der Cheops–Pyramide haben: Ursprüngliche Höhe $146.6\,m$, mittlere Länge $230.3\,m$. Wieviele solche Pyramiden wird es geben, wenn zwei „Röhren" ausgebrochen werden? (Zu ganzen Anzahlen runden.)

(e) Ein verrückter Planer möchte mit diesem Material eine Hohlkugel von einem Kilometer Aussendurchmesser formen. Wie gross würde dann die Wandstärke werden, wenn man das Volumen des Bindemittels nicht berücksichtigt?

(f) Entwickle zur vereinfachten Berechnung $q(x)$ in eine Potenzreihe $p(x)$ mit dem Zentrum $x_0 = 0$ bis und mit Gliedern der Ordnung 6.

(g) Studiere den Fehler $|q(x) - p(x)|$ im Intervall D_q graphisch. Für welche x (numerisch) wird der Fehler maximal und wie gross ist dieser Fehler dann?

(6) **(12 Punkte)**

(a) Löse die Differentialgleichung $y\,'(x) = \dfrac{x^2}{2} \cdot y(x),\;\; y(0) = 1$ und berechne $y(1)$.

(b) Der Graph des Polynoms $p(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ geht durch die Punkte $P_1(-2;0),\;\; P_2(0;1)$ und hat in P_2 ein relatives Minimum. In $P_3(-1;p(-1))$ existiert ein lokales relatives Maximum. Berechne, falls möglich, die Koeffizienten und damit den Steigungswinkel der Tangente in P_1 in Grad.

— ENDE —

Berner Fachhochschule, Hochschule für Architektur, Bau und Holz, Fachbereich Bau, Burgdorf, 08. 09. 2008

2.11 Modulprüfung in Mathematik 2008 Klasse B 07 / B1

Viel Glück !

Erwartet werden die Lösungen von 4 Aufgaben aus der folgenden Serie. Alle Teilaufgaben geben gleichviele Punkte.

(1) **(24 Punkte)**

(a) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = (x+1)\,\ln(\frac{x+1}{2}) - 1.$$

i. Erstelle eine saubere Skizze des Graphen.
ii. Bestimme die allfälligen reellen Nullstellen numerisch (4 Stellen genügen).
iii. Bestimme den Steigungswinkel der Tangente für $x = 0$ im Bogenmass.
iv. Untersuche, ob $f(x)$ irgendwo eine horizontale Tangente aufweist und berechne die x–Werte der allfällig gefundenen solchen Stellen exakt.

(b)

$$h(t) = \int\limits_{-5}^{t} (4\,x^3 - 2\,x^2 + t\,x - 5)\,dx$$

i. Erstelle eine saubere Skizze des Graphen.
ii. Bestimme die allfälligen reellen Nullstellen numerisch (4 Stellen genügen).
iii. Bestimme den Steigungswinkel der Tangente für $t = 0$ im Bogenmass.
iv. Untersuche, ob $h(t)$ irgendwo eine horizontale Tangente aufweist und berechne die t–Werte der allfällig gefundenen solchen Stellen numerisch.

(2) **(15 Punkte)**

$$f(x,y) = e^k\,\cos(\frac{x}{\pi}) + \cos(\frac{y}{\pi}),\ \ G = [-1,\,1] \times [-1,\,1]$$

(a) Erstelle eine saubere Skizze des Graphen für $k = 0$.

(b) Bestimme das exakte Volumen zwischen der (x,y)–Ebene und der Funktionsfläche über G in Abhängigkeit von k.

(c) Wie gross muss k gewählt werden, damit dieses Volumen auf 1 normiert werden kann?

(d) Bestimme für $k = 0$ die x– und die y–Koordinate des höchsten Punktes auf der Funktionsfläche, den man erreichen kann, wenn man sich in der Projektion in G längs der Geraden $y = 2\,x - \frac{1}{2}$ bewegt. %

(e) Bestimme das Volumen zwischen der (x, y)–Ebene und der Funktionsfläche von $h(x, y) = \cos((x+y)^2 + (x-y)^2)$ über der Kreisscheibe mit Zentrum in O und dem Kreisradius $r = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$.

(3) **(15 Punkte)**

Ein Gebäude G mit viereckigem, aber nicht rechteckigem Grundriss ragt bei den Koordinaten $A_1(0,0,0)$, $B_1(2,0,0)$, $C_1(3,4,0)$ und $D_1(0,3,0)$ aus dem Boden. Die Koordinatenzahlen kann man als Dekameter verstehen, wenn einem das die Sache damit vereinfacht. Oben ist ein pultartiges Dach mit den Eckpunkten $A_2(0,0,\frac{1}{2})$, $B_2(2,0,\frac{2}{3})$, $C_2(3,4,1)$ und $D_2(0,3,z)$. Φ sei die ebene Dachfläche.

(a) Erstelle eine saubere Skizze.

(b) Berechne z.

(c) Berechne den Inhalt von Φ.

(d) Berechne das Gebäudevolumen V_G.

(e) Wie ändert sich V_G, wenn man alle Grundrisskoordinaten verdoppelt?.

(4) **(12 Punkte)**

Gegeben ist Gerade $g: \ \vec{v} = \vec{0} + t \cdot \vec{x}_1$ mit $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}$ sowie die Punkte $P_1(6,-3)$, $P_2(7,2)$.

(a) Konstruiere die Spiegelungsmatrix $S(g)$ für die Geradenspiegelung an g.

(b) Spiegle damit die Punkte, d.h. berechne die Bildpunkte Q_1 und Q_2.

(c) Berechne den Inhalt des Dreiecks $\triangle OP_1Q_1$.

(d) Berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrix $S(g)$. Welcher interessante Zusammenhang ist hier sichtbar?

(5) **(18 Punkte)**

Sei $A = A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = B_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne $A_3 \cdot A_3$ und $B_3 \cdot B_3$. Versuche daraus allgemeine Gesetze für derartige $n \times n$–Matrizen A_n und B_n abzulesen.
Dabei ist $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ und $B_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Berechne $A_3 \cdot A_3 \cdot A_3$ und $B_3 \cdot B_3 \cdot B_3$. Wie steht es hier mit allgemeinen Gesetzen für entsprechende $n \times n$–Matrizen?

(c) Berechne $A_3 \cdot B_3$, $B_3 \cdot A_3$, $A_3 \cdot A_3 \cdot B_3 \cdot B_3$ und $A_3 \cdot A_3 \cdot A_3 \cdot B_3 \cdot B_3 \cdot B_3$. Ist hier etwas bemerkenswert?

(d) Berechne $A_3^{-1} \cdot B_3^{-1}$ und $B_3^{-1} \cdot A_3^{-1}$. Welche der Formeln $A_3^{-1} \cdot B_3^{-1} = B_3^{-1} \cdot A_3^{-1}$ oder $A_3^{-1} \cdot B_3^{-1} = (B_3^{-1} \cdot A_3^{-1})^T$ ist hier richtig?

(e) Löse die Gleichung (d.h. berechne X), falls möglich:

$$A_3 \cdot B_3 \cdot A_3 = B_3 \cdot X \cdot B_3$$

(f) Löse die Gleichung (d.h. berechne X), falls möglich:

$$(B_3^{-1} - A_3^{-1}) \cdot X = A_3 + B_3$$

(6) (Zusatzaufgabe) **(4 Punkte)**

Gesucht ist eine Funktion, mit der man das logistische Wachstum des CO_2–Gehalts der Atmosphäre in Prozent modellieren könnte. Bekanntlich wird ja heutzutage sehr über den Anstieg dieses Gehalts diskutiert. Man hat sich entschlossen, eine Funktion aus den folgenden drei Typen auszuwählen und danach die Massstäbe der Achsen sowie die Lage des Graphen an die Gegebenheiten der tatsächlich vorhandenen Jahreszahlen anzupassen. Welchen der Typen würde man wählen, falls überhaupt einer passt? (Begründung!)

(a) $f(t) = e^{2\,t+2}$

(b) $f(t) = 100\,e^{-\frac{2\,\arctan(5-t)}{\pi}-1}$

(c) $f(t) = 100\,e^{\sin\left(\frac{t}{5}\right)-1}$

— ENDE —

2.12 (Weitere Modulprüfungen und Vordiplomprüfungen 2003 — 2007)

Auf den folgenden Seiten findet man die Prüfungen samt dem „Vorbau“.

Modulprüfung
2007
Klasse B 06 / B1
Mathematik

Zeit: 120 Minuten

WIR1-2007/ 20 /Burgdorf/ V223
Di 31.8.07/ Zeitfenster 13:30–16:00

Bedingungen:

- ⊘ Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung (Note F) zur Folge. Speziell dürfen mobile Telefone und PDA's nicht ins Prüfungszimmer mitgebracht werden.
- ⊘ Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- ⊘ Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- ⊘ Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- ⊘ Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- ⊘ Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- ⊘ Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- ⊘ Pro Aufgabe ist wenn möglich ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- ⊘ **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- ⊘ **Punkte:** Pro mit „Aufgabe“ bezeichnetes Problem ist die angegebene Anzahl von Punkten möglich.
- ⊘ Ziel: Wenn an einer vollen Prüfung mehr als die bezeichnete Anzahl n Aufgaben gegeben sind, können n Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollten.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Architektur, Bau und Holz, Fachbereich Bau, Burgdorf, 31. August 2007

Modulprüfung in Mathematik 2007 — Klasse B 06 / B1

Viel Glück !

Löse die folgenden Aufgaben:

(1) **(15 Punkte)**

Die folgenden Teilaufgaben werden unabhängig voneinander gleich bewertet:

(a) Differenziere von Hand und ermittle das Polynom und die Zahl:

$$S(x)\,' = (\sum_{k=1}^{1000} \frac{1}{k}\, x^k)\,' = \text{„Polynom“} =_{|_{x=1}} \text{„Zahl“} = \,?$$

(b) Untersuche von Hand, ob die folgende Identität gültig ist:

$$(\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2)_x\,' = \frac{d}{d\,x}\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \equiv \cos(x)$$

(c) Zeige von Hand mittels partieller Integration:

$$\int (-k + x + 1)\, e^x\, dx = e^x(x-k) + C$$

(d)

$$u(x,k) := \frac{\partial\left(\mathit{ln}\,(x\sqrt{x}) - \mathit{ln}\left(x\sqrt{x-k}\right)\right)}{\partial x}$$

i. Berechne $u(x,k)$ von Hand, $x \in D_{u,k}$.

ii. Berechne anschliessend daraus $\lim\limits_{x\to k} u^{-1}(x,k)$ sowie

iii. $\lim\limits_{x\to k^2} u^{-1}(x,k)$.

(e) Sei $eSin(x) := e^x\, \sin(x)$ und $eCos(x) := e^x\, \cos(x)$.
Untersuche von Hand, ob die folgenden Formeln richtig sind:

$$\int\int eSin(x)\, dx\, dx = -\frac{1}{2} eCos(x) + C_1\, x + C_2, \quad \int\int eCos(x)\, dx\, dx = \frac{1}{2} eSin(x) + C_1\, x + C_2$$

(2) **(15 Punkte)**

Durch die Punkte $A(2;0)$, $B(7;1)$ und $C(5;4)$ wird ein Dreieck $D_1 = \triangle(A,B,C)$ sowie eine Gerade $g = \overline{AB}$ bestimmt.

(a) Berechne den Schwerpunkt S von D und damit den Abstand der Schwerlinie durch S und B vom Ursprung.

(b) Berechne mit Hilfe des Flächenprodukts oder des Vektorprodukts den Flächeninhalt F von D.

(c) Das Dreieck D wird um den Ursprung um $\alpha = 30^o$ im Gegenuhrzeigersinn gedreht. Bestimme die Drehmatrix und berechne damit die neue Lage des Schwerpunkts S_1.

(d) Das Dreieck D wird an der Geraden g gespiegelt. Dadurch erhält man das gespiegelte Dreieck $D_2 = \triangle(A_2, B_2, C_2)$. Berechne die Lage der gespiegelten Punkte S_2 sowie C_2.

(e) Das Dreieck D_2 wird in Richtung der x–Achse um den Faktor 2 gestreckt. Die y–Koordinaten bleiben dabei unangetastet. Der dadurch erhaltene Schwerpunkt S_3 des gestreckten Dreiecks D_3 wird an g zurückgespiegelt. Berechne die Koordinaten des so erhaltenen Punktes S_4.

(3) **(15 Punkte)**

Ein Architekt plant ein Gebäude mit rechteckigem Grundriss und einem Zeltdach oder Turmdach (Pyramidendach). Die Dachecken sollen dabei exakt auf die Aussenfläche einer imaginativen Halbkugel zu liegen kommen, bei der der Kugelmittelpunkt mit der Mitte des Gebäudegrundrisses zusammenfällt. Der Kugelradius beträgt 4 *nee* (narchibirische Erz–Ellen; die Einheiten können bei den Rechnungen weggelassen werden).
Wir bezeichnen die Gebäudelänge mit a, die Breite mit b und die Höhe bis zur Dachtraufe (Regenrinne) mit h. Infolge des Konzepts fällt die Spitze des Pyramidendachs mit dem höchsten Punkt der Halbkugel zusammen (Höhe 4 *nee*).

(a) Berechne h als Funktion von a und b.

(b) Berechne darauf Gebäudevolumen V als Funktion von a und b.

(c) Bestimme a und b so, dass das Gebäudevolumen maximal gross wird.

(d) Für die nächste Überlegung verändern wir die Betrachtungsweise. Wir nehmen an, dass das Gebäudevolumen V konstant $= 20$ nee^3 sei und dass das Gebäude nicht mehr in eine Halbkugel passen müsse, dass aber die Form mit Pyramidendach sowie Gesamthöhe $H = r = 4$ *nee* bestehen bleiben. Berechne bei dem gegebenen Volumen und dem gegebenen r die Länge h als Funktion von a und b.

(e) Bestimme bei dem gegebenem Volumen a und b so, dass jetzt die Gebäudeoberfläche $F(a,b)$ minimal wird. (h folgt hier aus a und b und muss daher nicht bestimmt werden.)
Hinweis: Falls die notwendigen Ableitungen und damit die Gleichungen zur Bestimmung von a und b etwas komplex werden, kann das Minimum auch graphisch approximativ bestimmt werden, indem man den Graphen $F(a,b)$ und in diesem geeignete Schnitte betrachtet. Symmetrieüberlegungen und Vermutungen können dabei hilfreich sein.

(4) **(15 Punkte)**

Ein turmartiges Gebäude hat die Form

$$f(x,y) = 50 - x^2 - y^2,\ \ (x,y) \in [-5,\ 5]^2,\ \ f(x,y) \geq 0.$$

(a) Skizziere die Gebäudeform. Trage k_1, k_2, k_3, k_4 als Bezeichnungen für die gebogenen Kanten an den seitlichen senkrechten ebenen Flächen ein.

(b) Berechne den Volumeninhalt des Gebäudes.

(c) Berechne die Längen der Bögen k_i.

(d) Berechne den Inhalt einer der vier kongruenten seitlichen senkrechten Flächen.

(e) Berechne approximativ den Inhalt der krummen Dachfläche.

(5) **(12 Punkte)**

Zusatzaufgabe:

(a) Gegeben seien die beiden Funktionen $f : (x,a) \longmapsto f(x,a) = a\,x^n,\ \ n \in \mathbb{N}$
und $h : (x,b) \longmapsto h(x,b) = 2 - b\,x^2.$

Für $x = 2$ gilt $f(x) = h(x)$.

i. Berechne daraus $b = b(a)$ und damit $h(x, b(a)) = h_1(x,a)$

ii. Berechne den Inhalt der Fläche zwischen f und h über dem Intervall $[0,\ 2]$.

iii. Entscheide, für welche n die Ableitung des Flächeninhalts als Funktion von a gleich 0 sein kann (Bedingung für ein Extremum).

(b) Berechne die Eigenwerte und Eigenfunktionen von

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

i. Für welche $a \in \mathbb{R}$ existieren zwei verschiedene Eigenwerte?

ii. Sei $a = 5$. Was ist das Bild der Geraden $\vec{v}(t) = t \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{5}\right) \\ 1 \end{pmatrix}$?

iii. Wir bilden mittels A den Vektor $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{5}\right) \\ 1 \end{pmatrix}$ ab, $a = 5$. Berechne das Bild der y–Koordinate dieses Vektors. Was ist das Bemerkenswerte an diesem Bild?

— ENDE —

Vordiplomprüfung 2. Jahr
2006
Klasse B 04 / B2
Mathematik

Zeit: 180 Minuten

WIR1-2006/ 22 /Burgdorf/ V223
Fr 15.9.06/ 08:30–11:30

Bedingungen:

- ⊘ Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- ⊘ Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- ⊘ Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- ⊘ Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- ⊘ Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- ⊘ Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- ⊘ Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- ⊘ Pro Aufgabe ist wenn möglich ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- ⊘ **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- ⊘ **Punkte:** Pro mit „Aufgabe“ bezeichnetes Problem sind 12 Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt — oder wenn weitere Angaben fehlen.
- ⊘ Ziel: Wenn an einer vollen Prüfung mehr als 4 Aufgaben gegeben sind, können 4 Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollten.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Architektur, Bau und Holz, Fachbereich Bau, Burgdorf, 15. September 2006

Vordiplomprüfung in Mathematik 2006 Klasse B 04 / B2

Viel Glück !

Löse die folgenden Aufgaben:

(1) **(15 Punkte)**

Gegeben ist $f(x,y) := \sqrt{x^2+y^2}\, e^{(\frac{-\sqrt{x^2+y^2}}{2})}$, $\sqrt{x^2+y^2} = r$. Diese Funktion f kann man auch als Funktion $h(r,\varphi)$ auffassen. Es gilt dann $h(r,\varphi) = \sqrt{r^2}\, e^{(\frac{-\sqrt{r^2}}{2})}$, $\sqrt{r^2} = |r|$. Daher können wir die Funktionsfläche (Graph) in $\mathbb{R}^2$ auch als Rotationsfläche verstehen.

(a) Skizziere den Graphen für $x, y \in [-2, 2]$ oder $r \in [0, 2]$. (Wenn r statt x, y benutzt wird, zeigt der Graph eine Rotationsfläche. Dann werden die Ecken abgeschnitten, was hier nichts ausmacht.)

(b) Untersuche die Frage, was bei $x = y = r = 0$ für eine Situation passiert: Hat man eine Spitze oder hat man eine gewöhnliche Tangente in Richtung x sowie y (oder alternativ in Richtung r)? (Bestimme zur Beantwortung der Frage die Ableitungen und davon den Grenzwert für x, y resp. $r \to 0$.)

(c) Bestimme die maximale Höhe der Fläche für $r \in [0, 2]$.

(d) Bestimme den Gradienten der Funktion für $x = y = 1$.

(e) Bestimme approximativ den Flächeninhalt über der Region $[1 \leq x \leq 2] \times [1 \leq y \leq 2]$.

(2) **(12 Punkte)**

(a) Gegeben ist die komplexe Zahl $w = 3 - i$. Berechne diejenige Lösung z_k von $(z - w)^5 = 6 - 9\,i$, welche vom Ursprung den kürzesten Abstand hat.

(b) Sei $w_0 = w$, $w_1 = \frac{1}{|w|}w$, $w_2 = \frac{1}{|w|}\bar{w}$, $w_3 = \frac{1}{w}$. Berechne w_1, w_2, w_3 und untersuche die gegenseitige Lage und Grösse der beiden Strecken $\overline{w_0 w_2}$ und $\overline{w_1 w_3}$.
Hinweis: Berechne jeweils die Differenz der involvierten komplexen Zahlen. Normiere diese Differenz.

(c) Erstelle eine genaue Skizze der komplexen Ebene mit den Zahlen w_0, w_1, w_2, w_3. Zeichne als Referenzfigur den Einheitskreis in die Skizze ein. Was stellt man fest?

(d) Welches geometrische Gesetz im Zusammenhang mit dem Übergang von w zu $\frac{1}{w}$ kann hier vermutet werden?

(3) **(12 Punkte)**

(a) Berechne von Hand die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$2\,y(x) + y''(x) = \cos(x)$$

und erläutere dabei die Lösungsmethode.

(b) Berechne die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$2\,y(x) - y'(x) + y''(x) = \cos(x).$$

(c) Berechne die spezielle Lösung der Differentialgleichung

$$2\,y(x) - y'(x) + y''(x) = \cos(x)$$

mit den Randbedingungen $y(0) = 0, \;\; y'(0) = 0$.

(d) Skizziere die eben gefundene spezielle Lösung für $x \in [0, 12]$.

(e) Berechne approximativ den Funktionswert der gefundenen speziellen Lösung bei $x \approx 2.75558$.

(4) **(12 Punkte)**

(a) Bestimme die Potenzreihenentwicklungen $p_s(x)$ von $\sin(x)$ und $p_c(x)$ von $\cos(x)$ bis und mit zu den Gliedern der Ordnung 10 (Polynome vom Grad ≤ 10). *Das Zentrum der Entwicklung für alle Teilaufgaben ist $x_0 = 0$.*

(b) Bestimme graphisch approximativ das Intervall auf der x–Achse mit Zentrum 0, in dem $|p_s(x) - \sin(x)| \leq 0.01$ gilt.

(c) Differenziere $p_s(x)$ nach x. Wie weicht das Resultat von $p_c(x)$ ab und wieso?

(d) Bestimme mit Hilfe von $p_s(x)$ und $p_c(x)$ die Potenzreihenentwicklung $p_{s+c}(x)$ von $\sin(x) + \cos(x)$ bis und mit zu Gliedern der Ordnung 10. Bestimme ebenfalls die Potenzreihenentwicklung von $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ bis und mit zu Gliedern der Ordnung 10. Vergleiche das Resultat mit $p_{s+c}(x)$. Was kann man daraus ersehen?

(e) In der Nähe von $x = 0$ ist $\frac{p_s(x)}{x}$ eine Näherungsformel für $\frac{\sin(x)}{x}$. Skizziere die beiden Funktionen in einem Diagramm mit dem Ausschnitt $x \in [-1, 1]$ und $y \in [0, 1]$. Kann man die beiden Kurven im Diagramm unterscheiden?

(f) Ermittle aus den Resultaten eine Näherungsformel für eine Stammfunktion von $\frac{\sin(x)}{x}$, welche für $x \in [-1, 1]$ anwendbar sein soll.

(5) **(12 Punkte)**

Eine Matrix M bildet den Vektor $\vec{e}_1$ in den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ab, den Vektor $\vec{e}_2$ in den Vektor $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und den Vektor $\vec{e}_3$ in den Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. $(\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ etc..)

(a) Berechne M.

(b) Berechne die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sowie die normierten Eigenvektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ der Matrix M.

(c) Berechne das Produkt der Eigenwerte und vergleiche dieses Produkt mit der Determinante von M. Was könnte man vermuten?

(d) Berechne das charakteristische Polynom von M und vergleiche die Koeffizienten mit dem Produkt der Eigenwerte sowie der Summe der Eigenwerte.

(e) Berechne das Bild des Vektors $\frac{1}{\lambda_1}\,\vec{x}_1 + \frac{1}{\lambda_2}\,\vec{x}_2 + \frac{1}{\lambda_3}\,\vec{x}_3$ bei der Abbildung mit M. Was fällt auf am Resultat?

(6) **(15 Punkte)**

Gegeben ist eine Ebene Φ durch die Punkte $P_1(0,0,4)$, $P_2(0,6,0)$, $P_3(3,0,0)$. Der Punkt $Q_1(2,8,0)$ wird an Φ gespiegelt. Der gespiegelte Punkt ist Q_2. Berechne

(a) den Spiegelpunkt Q_2 sowie den Mittelpunkt der Kugel, welche Q_1 als Nordpol und Q_2 als Südpol hat,

(b) das Volumen des Körpers $P_1P_2P_3Q_2$,

(c) den Flächeninhalt $P_1P_2P_3$,

(d) den Winkel $\angle(Q_1P_1Q_2)$,

(e) den Abstand der Kugelachse Q_1Q_2 vom Ursprung.

(7) Die folgenden beiden elementaren Aufgaben sind unabhängig. **(Je 6 Punkte)**

(a) Ein Brückenbogen hat die schöne Form einer Sinuslinie $f(x) = sin(x)$, $x \in [0, \pi]$. Berechne den Flächeninhalt des grössten Trapezes, das man zwischen diese Sinuslinie und die x–Achse einpassen kann und ebenso den Inhalt der Fläche zwischen Trapez und Sinuslinie.

(b) Ein Feuerwehrmagazin hat eine Höhe von 10 m. Darin werden die Schläuche zum Trocknen aufgehängt. Der Grundriss ist $4 \times 4\ m^2$. Die Eingangstür vorne hat eine Höhe von 2.50 m. Nun will man eine Leiter maximaler Länge bestellen, welche von vorne gerade noch zur Tür hinein geschoben und hochgestellt werden kann. Wie lang darf diese Leiter höchstens sein? (Der Weg von vorne verläuft rechtwinklig zur Wand mit der Tür und ist gerade genügend breit, sodass die Leiter bequem transportiert werden kann.)

— ENDE —

Modulprüfung 2
2006
Klasse B 05 / B1
Mathematik

Zeit: 120 Minuten

WIR1-2006/ 21 /Burgdorf/ B152
Di 27.6.06/ 09:15–11:15

Bedingungen:

- ⊘ Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- ⊘ Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- ⊘ Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- ⊘ Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- ⊘ Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- ⊘ Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- ⊘ Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- ⊘ Pro Aufgabe ist wenn möglich ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- ⊘ **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- ⊘ **Punkte:** Pro mit „Aufgabe" bezeichnetes Problem sind 12 Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt — oder wenn weitere Angaben fehlen.
- ⊘ Ziel: Wenn an einer vollen Prüfung mehr als 4 Aufgaben gegeben sind, können 4 Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollten.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Architektur, Bau und Holz, Fachbereich Bau, Burgdorf, 27. Juni 2006

Modulprüfung in Mathematik 2006 — Klasse B 05 / B1

Viel Glück !

Löse die folgenden 4 Aufgaben:

(1) **(12 Punkte)**

Gegeben sind die Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

sowie die Gleichung $A \cdot X \cdot B = M$.

(a) i. Berechne die Determinanten von A, B, M.
   ii. Was kann man im Falle, wo die Determinante von A ungleich 0 ist, über die Determinante von X sagen?
   iii. Wann ist die Determinante von A gleich 0?

(b) Berechne X allgemein in den Fällen, wo die Determinante von A ungleich 0 ist. Stelle dann das Resultat explizit dar für $a = 3$

(c) Was gilt für die Lösung X im Falle, wo die Determinante von A gleich 0 ist? (*Hinweis:* Vergleiche $A \cdot X$ und $M \cdot B^{-1}$ elementweise.)

(2) **(12 Punkte)**

Ein horizontal in eine Wand eingemauerter Träger mit quadratischem Querschnitt $d \cdot d$ und der Länge L ist mit einer konstanten Streckenlast sowie dazu mit einer Gegenkraft am freien Ende belastet. Weiter kennt man die Formel $y''(x) = -\dfrac{m(x)}{E \cdot I}$, wobei I das axiale Trägheitsmoment und E das Elastizitätsmodul ist.

(a) Berechne aus dem angegebenen Zusammenhang eine nicht numerische Formel für die Biegelinie, wenn man ein Koordinatensystem mit den Randbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$ und positivem x sowie y nach unten annimmt mit dem Ursprung an der Mauer.
Hinweis: Für das von der Streckenlast herrührende Moment ist $-q_1\,(L-x)^2$, $q_1 = \dfrac{q}{2}$, zu setzen und für das von der Gegenkraft herrührende Moment $+F_1\,(L-x)$.

(b) Es soll jetzt gelten: $d = 6\ cm$, $L = 4\ m$, $E = 210000 N/mm^2$. Die Streckenlast rührt von einer totalen Masse von 800 kg her. Die Gegenkraft beträgt 500 N. Berechne mit diesen Angaben die maximale Auslenkung und skizziere die Biegelinie.

(c) Berechne nun die Tangentensteigung am Ende des gebogenen Balkens in Altgrad.

(3) **(12 Punkte)**

(a) Gegeben sind die Vektoren $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ sowie die Faktoren $k_1 = 1,\ \ k_2 = 4,\ \ k_3 = -2$

i. Berechne die Matrix M, welche $\vec{v_1}$ in $k_1 \cdot \vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ in $k_2 \cdot \vec{v_2}$ und $\vec{v_3}$ in $k_3 \cdot \vec{v_3}$ abbildet.

ii. Was sind die Eigenwerte und die Eigenvektoren von M?

(b) Gegeben ist die Matrix $M = \begin{pmatrix} -8 & \frac{9}{2} \\ -24 & 13 \end{pmatrix}$

sowie die Gerade $g:\ \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

i. Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren. Entscheide, ob die Abbildung eine Fixgerade hat, auf der die Punkt alle in sich selbst übergehen.

ii. Untersuche, ob es einen Wert t_0 gibt, für den $\vec{v}(t_0) = M \cdot \vec{v}(t_0)$ gilt. Berechne allenfalls $\vec{v}(t_0)$.

iii. Berechne die Bilder $M \cdot \vec{v}(0)$ zu $\vec{v}(0)$ und $M \cdot \vec{v}(1)$ zu $\vec{v}(1)$. Damit ist die Bildgerade g_M resp. $M \cdot \vec{v}(t)$ bestimmt. Untersuche nun, ob die Vektoren $M \cdot \vec{v}(0) - \vec{v}(0)$ sowie $M \cdot \vec{v}(1) - \vec{v}(1)$ oder allgemein $M \cdot \vec{v}(t) - \vec{v}(t)$ etwas mit den Eigenvektoren zu tun haben.

(4) **(12 Punkte)**

Gegeben sind die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ sowie die Gerade

$g:\ \vec{v}_g(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u} \leadsto$ Projektionsrichtung, $\{\lambda\, \vec{a} + \mu\, \vec{b}\} \leadsto$ Ebene.

(a) Projiziere die Gerade g auf die durch den Ursprung und die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ definierte Ebene Φ, indem du die Punkte resp. Vektoren $\overrightarrow{OP_1} = \vec{v}_g(0)$ und $\overrightarrow{OP_2} = \vec{v}_g(1)$ auf Φ projizierst $\leadsto$ Gerade $g\,'$, Punkte $P_1\,'$, $P_2\,'$. (Nur die beiden Punkte sind zu berechnen.)

(b) Drehe anschliessend die Gerade g mit Hilfe der gewonnenen Punkte um $+30^o$ um die z–Achse $\leadsto$ (Gerade $g\,''$, Punkte $P_1\,''$, $P_2\,''$). (Nur die beiden Punkte sind zu drehen.)

(c) Berechne und vergleiche die Abstände von $g, g\,'$ und $g\,''$ vom Ursprung.

(d) $P_1\,', P_2\,', P_1\,'', P_2\,''$ spannen ein Tetraeder auf. Berechne das Volumen.

(5) **(6 Punkte)**

Zusatz: (Falls eine der regulären Aufgaben nicht gelöst werden kann.)

Sei $M = \begin{pmatrix} -16 & 17 & -16 \\ -48 & 58 & -64 \\ -24 & 31 & -36 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne das Polynom $p(\lambda) = \det(M - \lambda E)$.

(b) Ersetzt anschliessend alle Koeffizienten a_k durch $(a_k \cdot E)$ sowie λ durch M. Dabei ist λ^3 durch $M \cdot M \cdot M := M^3$ und λ^2 durch $= M \cdot M \; = M^2$ zu ersetzen. Berechne den entstehenden Ausdruck. (*Hinweis:* Es muss eine spezielle Matrix herauskommen.)

— ENDE —

Modulprüfung
2006
Klasse B 05 / B1
Mathematik

Zeit: 120 Minuten

WIR1-2006/ 25 /Burgdorf/B 152
Fr 24.2.06/10.25-12.05

Bedingungen:

- ⊘ Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- ⊘ Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- ⊘ Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- ⊘ Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- ⊘ Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- ⊘ Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- ⊘ Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- ⊘ Pro Aufgabe ist wenn möglich ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- ⊘ **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- ⊘ **Punkte:** Pro mit „Aufgabe“ bezeichnetes Problem sind 12 Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt — oder wenn weitere Angaben fehlen.
- ⊘ Ziel: Wenn an einer vollen Prüfung mehr als 4 Aufgaben gegeben sind, können 4 Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollten.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Architektur, Bau und Holz, Fachbereich Bau, Burgdorf, 24. Februar 2006

Modulprüfung in Mathematik 2006 — Klasse B 05 / B1

Viel Glück !

Löse die folgenden 4 Aufgaben:

(1) **(18 Punkte)**

Zeige die Berechnungen der Lösungen von Hand. Erkläre die Schritte:

(a) $f(x) = x^2 + 0.5\,\sin(x)$
   i. $f'(x) = \,?$
   ii. $f'(x)|_{x=1} = \,?$
   iii. $f'(x)|_{x=1} =$ Steigung der Kurve $\Rightarrow$ Steigungswinkel $\alpha = \,?$
   iv. $f''(x)|_{x=1} = \,?$

(b) $f(x) = \left(\sqrt[4]{\left(x^{3/4}-3\right)^3}\right)^5 \rightsquigarrow f'(x) = \,?$

(c) $f(x) = -4\,x^2 \sin\left(2 - 3\,x^2\right) \rightsquigarrow f'(x) = \,?$

(d) $f(x) = \dfrac{x\,ln\left(\frac{x}{1-x}\right)}{1-x} \rightsquigarrow f'(x) = \,?$

(e) $f(x) = 4\,e^{-x}\cos\left(2 - e^x\right) \rightsquigarrow f'(x) = \,?$

(f) $f(x) = x^2 + a\,\sin(x) + \dfrac{2}{x} \rightsquigarrow \int\limits_1^{e^2} f(x)\,dx = \,?$

(2) **(12 Punkte)**

Gegeben sind zwei Kurve durch $f_1(x) = x^5$ und $f_2(x) = x^{1/5}$ über dem Intervall $I = [0, 1]$. f_1 und f_2 schliessen über I eine Fläche A_0 ein. Die damit gegebene Figur sei ebenfalls mit A_0 bezeichnet.

(a) Skizziere die Figur A_0.

(b) Zwischen die beiden gegebenen Kurven f_1 und f_2 wird nun eine dritte Kurve $f_3(x) = x^a$ gelegt mit $a > 0$.
Bestimme a so, dass f_3 die Figur A_0 in zwei inhaltsgleiche Teilfiguren A_1 (oben) und A_2 (unten) zerlegt. (Zeichne darauf f_3 in der Skizze ein.)

(c) Wie in der letzten Teilaufgabe wird nun zwischen die beiden gegebenen Kurven f_1 und f_2 eine weitere Kurve $f_4(x) = x^a$ gelegt mit $a > 0$.
Bestimme diesmal a so, dass f_4 die Figur A_0 in zwei Teilfiguren A_3 (oben) und A_4 (unten) zerlegt, deren Flächeninhalte sich wie $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} : 1$ verhalten (goldener Schnitt). (Zeichne darauf f_4 ebenfalls in die Skizze ein.)

(3) **(15 Punkte)**

Gegeben sind zwei Funktionen $f(x) = e^{-x}\left(x^2-1\right)$ und $p(x) = ax^2 + bx + c$.

(a) Bestimme die Parameter a, b, c von p so, dass $p(x)$ dieselben Nullestellen hat wie $f(x)$. Zudem soll $p(x)$ für $x = -1$ die gleiche Tangentensteigung haben wie $f(x)$. (Skizziere jetzt die beiden Kurven!)

(b) Bestimme das Verhältnis der beiden Flächeninhalte A_f und A_p zwischen der x–Achse und den Kurven $f(x)$ bzw. $p(x)$ bezüglich dem Intervall $I = [-1, 1]$.

(c) Anhand der Skizze könnte man glauben, dass die Kurve $f(x)$ für $x = 0$ einen Wendepunkt hat. Untersuche, ob diese Vermutung stimmt. (Das Resultat ist zu belegen.)

(d) Die Parabel $p(x)$ wird um die x–Achse rotiert. Berechne das Rotationsvolumen bezüglich dem Intervall $I = [-1, 1]$.

(e) Berechne numerisch anngenähert die Bogenlängen von f und p bezüglich dem Intervall $I = [-1, 1]$. Was ist das Verhältnis der grösseren zur kleineren Länge?

(4) **(15 Punkte)**

Die Funktion $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2 + dx + e}$ soll als Näherungsmodell der geometrischen Form eines Hügels dienen. Die Hügelkurve soll nun so in ein Koordinatensystem eingepasst werden, dass bei $x = -2$ und bei $x = 2$ je eine Nullstelle liegt und die Kurve dazu bei $x = 0$ ein Maximum besitzt. Bei $x = -1$ gibt es ferner eine Tangente mit der Steigung 1. Bei $x = 1$ hat die Tangente die Steigung -1. Zudem ist $f(0) = 2$.

(a) Berechne die Parameter a, b, c, d, e.
Hinweis: Man kann die Rechnung enorm vereinfachen, wenn man berücksichtigt, dass die gegebenen Werte auf eine gerade Funktion führen müssen und daher gewisse Parameter 0 sein müssen!
Skizziere die Kurve!

(b) Berechne jetzt die Partialbruchzerlegung der Funktion $f(x)$.

(c) Stelle die Funktion $f(x)$ durch eine Potenzreihe mit dem Mittelpunkt $x = 0$ dar.
Hinweis: Wenn man die Partialbruchzerlegung der Funktion $f(x)$ betrachtet, so kann man darin als wesentlicher Teil eine geometrische Reihe entdecken.

(d) Berechne mit Hilfe des Hinweises in der letzten Teilaufgabe den Konvergenzradius der gewonnenen Potenzreihe.

(e) Verwende als Näherung nur das Taylorpolynom vom Grade 4. Was sind dann die gemachten Fehler an der Stelle $x = 0.5$ und $x = 0.9$?

(5) **(8 Punkte)**

Zusatz: (Falls eine der regulären Aufgaben nicht gelöst werden kann.)

(a) Suche die Potenzreihenentwicklung von $f(x) = \arctan(x)$ mit $x_0 = 0$. Verwende nur die Glieder bis $n = 10$. Ausgehend von der Tatsache, dass $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1, \quad \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ ist, kann man mit dem gewonnenen Taylorpolynom die Zahl π annähern. Berechne diese Näherung und entscheide, wieviele Stellen mit den Taschenrechner so exakt berechnet werden können.

(b) Auf dem Lumpenberg bei Riesenschluren am Äquator steht ein 100 Meter hoher und oben offener Turm, gleich einem Kamin, mit einem inneren quadratischen Grundriss von 10 mal 10 Metern. Auf einer Seite ist ein Eingang angebracht, welcher so breit wie der Turm, aber nur 2 Meter hoch ist. Der Eingang ist so tief gehalte, damit sich die Riesen beim Eintritt vor der Kunst im Turm verneigen müssen. Vor dem Turm ist der Parkplatz. Dieser verläuft exakt horizontal, fast 250 Meter weit in alle Richtungen. Links und rechts des Turms steht je im Abstand von 5 m vom Turm eine 20 m hohe Tanne. Im Turm soll nun an der hintern Wand der grösste ebene Spiegel der Welt angebracht werden, so breit wie die Wand wohlverstanden. Damit soll nach der Meinung der dort lebenden Riesen die Sonne in den Turm gelockt werden. Der Spielgel soll sie spiegeln und dann unten wieder herauszulocken. Im Innern des Turms ragen in der Mitte der linken und rechten Seitenwand 1 Meter über dem Boden je ein Bolzen von 3 cm Durchmesser 50 cm in den Raum hinein. Wie breit und hoch kann dieser Spiegel aus einem Stück maximal sein, wenn er durch den Eingang geschoben werden muss und maximalen Flächeninhalt haben soll? (Mache dir erst eine Skizze! Die Spiegeldicke soll man vernachlässigen.) Und wie weit wird es maximal gelingen, die Sonne herauszuspiegeln (Wanddicke des Turms 70 cm.)

— ENDE —

Vordiplom 2, 2004

Klasse AV02-1

Mathematik

Zeit: 180 Minuten

WIR1-2004/10/Bu-Atelier/Mo 6.9.04/0800

Bedingungen:

- ⊘ Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- ⊘ Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- ⊘ Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- ⊘ Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- ⊘ Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- ⊘ Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- ⊘ Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- ⊘ Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- ⊘ **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- ⊘ **Punkte:** Pro Aufgabe sind 12 Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt.
- ⊘ Ziel: Wenn an einer vollen Prüfung mehr als 6 Aufgaben gegeben sind, können 6 Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollten.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Architektur, Bau und Holz Biel und Burgdorf,
6. September 2004

Vordiplomprüfung 2 in Mathematik 2004 Klasse AV02-1

Viel Glück !

Löse die folgenden 6 Aufgaben:

(1) **(15 Punkte)**

Zeige die Berechnungen der Lösungen von Hand. Erkläre die Schritte:

(a) $f(x) = 4\,x^4 + 5\,x^5 - 6\,x^6 + x^0 - \dfrac{2}{x^2}$

i. $f'(x) = ?$

ii. $f'(x)|_{x=1} = ?$

iii. $f'(x)|_{x=1} =$ *Steigung der Kurve* $\Rightarrow$ *Steigungswinkel* $\alpha = ?$

iv. $f''(x) = ?$

(b) $f(x) = 4\,x^4 + 5\,x^5 - 6\,x^6 + x^0 - \dfrac{2}{x^2}$

i. $\int f(x)\,dx = ?$

ii. $\int\limits_1^2 f(x)\,dx = ?$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{\sin(\frac{x}{3} - 3)^2}$

i. $f'(x) = ?$

ii. $\int f(x)\,dx = ?$

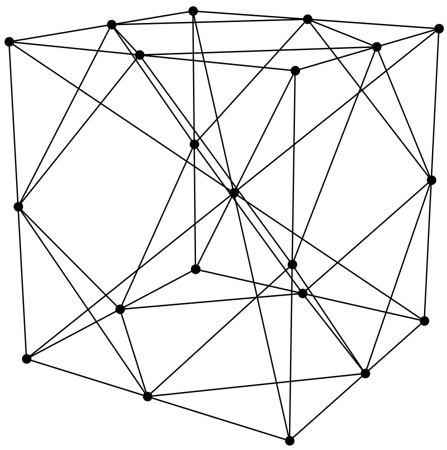
(d) $f(x) = \dfrac{1}{x\,(x+2)\,(x-2)}$

i. $\int\limits_3^5 f(x)\,dx = ?$

ii. $\int\limits_3^\infty f(x)\,dx = ?$

(e) $f(x) = 7\ln(x) - \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^{3x}} \rightsquigarrow \int\limits_1^e f(x)\,dx = ?$

(2) **(12 Punkte)**



Gegeben ist ein Würfel der Kantenlänge $s = 1$. Durch die Verbindung benachbarter Kantenmittelpunkte entsteht an jeder Ecke nach aussen je ein nicht reguläres Tetraeder (vgl. Abbildung).

(a) Berechne das Volumen eines Tetraeders an einer Würfelecke. (Die Herleitung der Formel wird bewertet).

(b) Berechne das Volumen des Restkörpers, welcher durch wegschneiden der Tetraeder vom Würfel entsteht.

(c) Berechne die Oberfläche dieses Restkörpers.
(Die Herleitung der Formel wird bewertet).

(d) Um welche Körperart handelt es sich beim Restkörper?

(3) **(12 Punkte)**

Hans und Max wollen sich ein Bild von der Umgebung machen, in der sie eine Überbauung am Rande einer Stadt planen wollen. Max startet vom Hotel aus zur Stadterkundung zu Fuss mit etwa gleichmässiger Geschwindigkeit in flachem Gelände. 50 Minuten später startet Hans vom Hotel aus zur selben Tour, ebenfalls mit etwa gleichmässiger Geschwindigkeit. Nach 12 km holt Hans Max ein (nach der bis jetzt zurückgelegten Strecke s_1). Nach weiteren 50 Minuten ist Hans 1 km weiter als Max.

(a) Skizziere die Funktionen für $s_{Max}(t) = v_{Max} \cdot t$ und $s_{Hans}(t) = v_{Hans} \cdot t$ soweit es die Angaben schon erlauben.

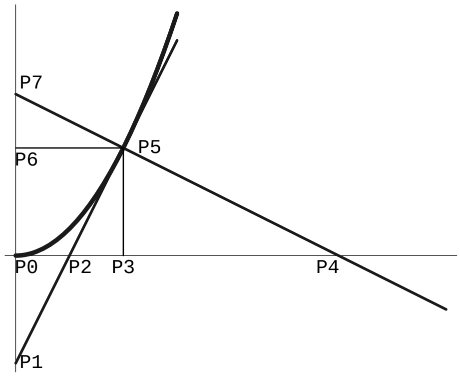
(b) Berechne v_{Max} und v_{Hans}.

(c) Mit welcher Geschwindigkeit $v_{Hans,2}$ müsste Hans gehen, um Max schon auf halber Strecke s_1 einholen zu können? (Kommentar zu $v_{Hans,2} : v_{Hans}$?)

(d) Wir ersetzen Hans und Max durch quaderförmige Becken A und B. Statt Geschwindigkeit haben wir dann Sinkgeschwindigkeit bei auslaufendem Wasser. An Stelle von km müssen wir jetzt die Sinkhöhe in cm verrechnen. Wie gross wäre dann v_A und v_B?

(4) **(12 Punkte)**

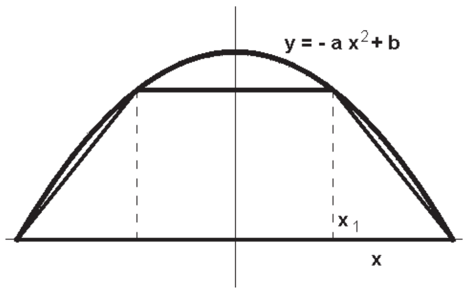
In der Skizze sehen wir die Funktion $f(x) = a\,x^2,\ x \geq 0$. In $P_5(x_0, y = a\,x_0^2)$ sind die Tangente und die Normale gezeichnet. Es entstehen Punkte $P_0 \ldots P_7$, welche Dreiecksflächen resp. Flächen definieren, deren eine Begrenzungslinie der Parabelbogen oder die gezeichneten Geradenstücke sind.
Wir verwenden folgende Bezeichnungen für die Flächen(mache eine Skizze!):



$(P_0P_5P_6P_0) \rightsquigarrow A_1,$
$(P_0P_3P_5P_0) \rightsquigarrow A_2,$
$(P_0P_1P_2P_5P_0) \rightsquigarrow A_3,$
$(P_0P_5P_7P_6P_0) \rightsquigarrow A_4.$

(a) Berechne die folgenden Verhältnisse der Flächeninhalte ($P_3 = P_3(x_0, 0)$).
   i. $A_1 : A_2 = ?$
   ii. $A_4 : A_3 = ?$
(b) Untersuche den Einfluss von a auf die Flächenverhältnisse.
(c) Gibt es ein x_0, für das $\overrightarrow{P_1P_4} \perp \overrightarrow{P_2P_7}$ ist? (Hinweis: Skalarprodukt.)

(5) **(12 Punkte)**



In einer Stadt steht eine Stadtbahnbrücke mit parabelförmigen Brückenbögen. Unter einem solchen Parabelbogen soll eine trapezförmige Halle gebaut werden mit ebenen Wänden und ebener Decke (vgl. nebenstehende Skizze). Für die Parabel nehmen wir folgende Funktion an:

$$y = f(x) = -a\,x^2 + b$$

Die gemessenen Werte für a und b sind aus der Bogenhöhe 10 $Meter$ und der Bogenbreite auf Bodenniveau 20 $Meter$ zu bestimmen. Vorne und hinten (Stirnseiten) sind die Wände vertikal und bündig zur Brücke. Die Stirnseiten der Halle werden verglast.

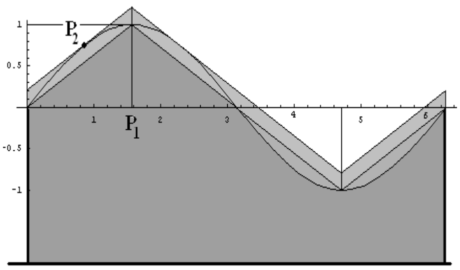
(a) $a,\ b\ = ?$

(b) Berechne die x–Koordinate x_1 des rechten oberen Punktes des Trapezes, so dass die einfallende Lichtmenge maximal ist (grösstmöglicher Stirnflächeninhalt) $\rightsquigarrow\ \ x_1 = ?$ (Der Lösungsweg muss sichtbar sein.)

(c) Berechne das ungenutzte Restvolumen zwischen Brücke und Halle im Bogen, in dem die Halle steht. (Die Brückenbreite h ist als Parameter einzusetzen.)

(6) **(12 Punkte)**

Nebenstehende Skizze zeigt ein Haus von der Seite. Das aus drei Pultdächern zusammengesetzte Dach ist um eine Sinuslinie in einem Koordinatensystem wie folgt konstuiert: Die Sehne durch die Punkte $(0;0)$ und $(\frac{\pi}{2};1)$ wird parallel nach oben verschoben, sodass eine Tangente an die Sinuslinie im Punkte P_2 des Giebelgesims entsteht (vgl. nebenstehende Skizze). P_1 hat die Koordinaten $(\frac{\pi}{2};0)$.



(a) Berechne die Stirnfläche des Giebelgesims im gegebenen Koordinatensystem.

(b) Jedes der drei Stücke des Gesims soll je aus einem Kupferblech gefertigt werden. Die drei Stücke werden bei der Montage mit Kunststoff verbunden. Berechne die totale Länge und die Breite des zu bestellenden rechteckigen Blechbandes, wenn das Band der Länge nach in drei Stücke geteilt wird. Dabei wird kein Verschnitt berechnet, ausser an den Enden. (Mache dazu eine Skizze.)

— ENDE —

Vordiplom 2, 2003

Klasse B2

Mathematik

Zeit: 180 Minuten

WIR2003/12/RIIc/Mo 8.9.03/0800

Bedingungen:

- ⊘ Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- ⊘ Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- ⊘ Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- ⊘ Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- ⊘ Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- ⊘ Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- ⊘ Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- ⊘ Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- ⊘ **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- ⊘ **Punkte:** Pro Aufgabe sind 12 Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt.
- ⊘ Ziel: Wenn an einer vollen Prüfung mehr als 6 Aufgaben gegeben sind, können 6 Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollten.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Architektur Biel, 8. September 2003

Vordiplomprüfung 2 in Mathematik 2003 Klasse B2

Viel Glück !

Löse die folgenden <u>6</u> Aufgaben:

(1) **(15 Punkte)**

Zeige die Berechnungen der Lösungen von Hand. Erkläre die Schritte:

(a) $f(x) = 2\,x^4 + 5\,x^0 - 4\,x^2 + x - \dfrac{1}{x}$

i. $f'(x) = \,?$

ii. $f'(x)|_{x=1} = \,?$

iii. $f''(x) = \,?$

(b) $f(x) = 2\,x^4 + 5\,x^0 - 4\,x^2 + x - \dfrac{1}{x}$

i. $\int f(x)\,dx = \,?$

ii. $\int\limits_1^2 f(x)\,dx = \,?$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{cos(\frac{x}{2} - 1)^2}$

i. $f'(x) = \,?$

ii. $\int f(x)\,dx = \,?$

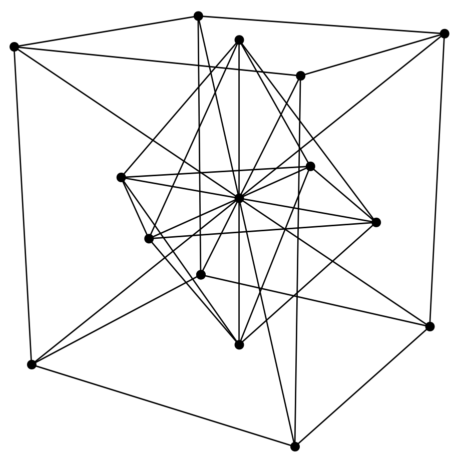
(d) $f(x) = \dfrac{1}{x\,(x-1)\,(x+1)}$

i. $\int\limits_3^5 f(x)\,dx = \,?$

ii. $\int\limits_3^\infty f(x)\,dx = \,?$

(e) $f(x) = 4\,\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^{2x}} \leadsto \int\limits_\pi^e f(x)\,dx = \,?$

(2) **(12 Punkte)**



Gegeben ist ein Würfel der Kantenlänge $s = 1$ mit eingeschriebenem Oktaeder (vgl. Abbildung).

(a) Leite eine Formel für den Winkel α zwischen zwei Raumdiagonalen des Würfels her und berechne den Winkel.

(b) Im Würfel ist ein Oktaeder derart eingeschrieben, dass die Oktaederecken mit den Mittelpunkten der Würfelseitenflächen zusammenfallen (vgl. Abbildung oben). Leite eine Formel für den Winkel β zwischen zwei benachbarten Oktaederseitenflächen her und berechne den Winkel.

(c) Suche eine Beziehung zwischen α und β. Was ist der Zusammenhang zur Dualität von Würfel und Oktaeder?

(d) Leite folgende Verhältnisse exakt her:

i. Inhalt des Volumens des Würfels : Inhalt des Volumens des Oktaeders ?

ii. Inhalt einer Seitenfläche des Würfels : Inhalt einer Seitenfläche des Oktaeders ?

(3) **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion $f_a(x) = (x - a) \cdot x^2$.

(a) Skizziere die Funktion für $a = 1 \rightsquigarrow f_1(x)$.

(b) Berechne für beliebiges a den Funktionswert für $x = a$. Berechne an dieser Stelle dann die Ableitung $f'_a(x)$ sowie den Steigungswinkel der Tangente.

(c) Wie muss a gewählt werden, so dass der Steigungswinkel der Tangente für $x = a$ im Bogenmass gleich $\pi/4$ ist?

(d) Berechne für beliebiges a die Lage eines allfälligen relativen Minimums von $(x_1, f_a(x_1))$.

(e) Berechne für beliebiges a den Flächeninhalt A unter der Kurve von $f_a(x)$ zwischen $x = 0$ und $x = a$.

(f) Was ist bemerkenswert am Verhältnis $A : f_a(x_1)$?

(4) **(12 Punkte)**

Wir betrachten die Funktionen $g_a(x) = a - x^2$ und $h_a(x) = a - x^4, \;\; a > 0$.

(a) Berechne die Nullstellen von $g_a(x)$ und $h_a(x)$ und skizziere die Graphen für ein beliebig gewähltes a. (Interessant für die Skizze wäre z.B. die Wahl $a = 16$.)

(b) Die Graphen von g_a und h_a werden zwischen ihren jeweiligen Nullstellen um die x–Achse rotiert. Berechne die beiden entstehenden Volumeninhalte V_g und V_h der Rotationskörper.

(c) Berechne $a = a_0$ so, dass $V_g = V_h$ gilt.

(d) Berechne das Verhältnis der beiden rotierten Flächeninhalte unter den Kurven von g_a und h_a.

(5) **(12 Punkte)**

Wir betrachten $f(x, a, b) = x^2 + a\,x + b$ und dazu

$$\vec{v}_1(x, a, b) = \begin{pmatrix} x \\ f(x, a, b) \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v}_2(x, a, b) = \begin{pmatrix} x + 1 \\ f(x + 1, a, b) \end{pmatrix}.$$

(a) Skizziere $f(x, 1, 1)$ sowie $\vec{v}_1(-0.5, 1, 1)$ und $\vec{v}_2(-0.5, 1, 1)$.

(b) Berechne das Skalarprodukt $s(x, a, b) := \langle \vec{v}_1(x, a, b), \vec{v}_2(x, a, b) \rangle$.

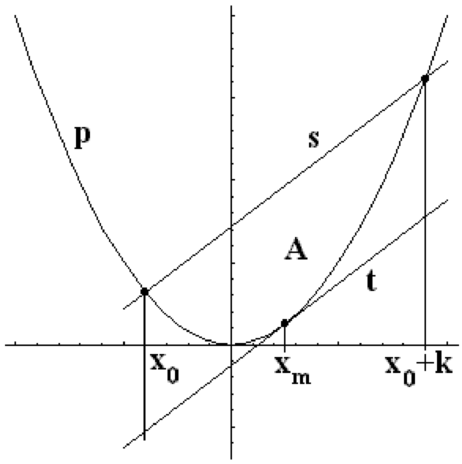
(c) Skizziere den Graphen von $s(x, 1, 1)$.

(d) Suche mit Hilfe der Differentialrechnung allfällige Extrema und Wendepunkte von $s(x, 1, 1)$.

(e) Unteruche, ob es einen Wert x so gibt, dass $\vec{v}_1(x, 1, 1) \perp \vec{v}_2(x, 1, 1)$ gilt.

(f) Unteruche, ob es einen Wert x so gibt, dass $\vec{v}_1(x, a, 0) \perp \vec{v}_2(x, a, 0)$ gilt.

(6) **(12 Punkte)**



Gegeben ist die Funktion $p(x) = a\,x^2$ sowie die Werte x_0 und k (vgl. Abbildung). Durch die Punkte $P_1(x_0/p(x_0))$ und $P_2((x_0+k)/p(x_0+k))$ wird die Gerade s ($\rightsquigarrow$ Sehne $\overline{P_1P_2}$) gelegt. Diese hat die Steigung $m = m(x_0)$, welche von der Wahl von x_0 abhängt.
Sei t diejenige Tangente an die Parabel p, die die gleiche Steigung $m = m(x_0)$ hat wie $s(x)$.

(a) Berechne die Funktionsgleichung der Sehne $s(x) = m\,x + b = m(x_0)\,x + b(x_0)$.

(b) Berechne die Koordinaten des Punktes $P_3(x_m/p(x_m))$ desjenigen Punktes, in dem die Tangente die gleiche Steigung $m = m(x_0)$ wie die Sehne s hat.

(c) Berechne die Funktionsgleichung der Tangente $t(x) = m\,x + c = m(x_0)\,x + c(x_0)$.

(d) Berechne den Inhalt der eingeschlossenen Fläche A zwischen der Kurve p und der Sehne s (von x_0 bis $x_0 + k$). Untersuche, wie der berechnete Flächeninhalt ändert, wenn x_0 verändert wird.

(e) Berechne den Inhalt der eingeschlossenen Fläche zwischen der Sehne s und der Tangente t (Trapezfläche T von x_0 bis $x_0 + k$). Untersuche, wie der berechnete Flächeninhalt ändert, wenn x_0 verändert wird.

(f) Berechne das Verhältnis der Flächeninhalte von T und A. Untersuche, wie das berechnete Verhältnis ändert, wenn x_0 verändert wird.

— ENDE —

2.13 Link zu den Lösungen

Siehe unter dem URL

http://rowicus.ch/Wir/VDs/VDs.html.

Kapitel • Chapitre 3

Übungsmaterial für die Abteilung Bau

Material für Mathematik an der Abteilung Bau

Nachstehend ist in loser Folge Übungsmaterial eingebracht. Der Zusammenhang zwischen den Blättern bedarf einer mündlichen Erläuterung.

3.1 Übungen — Selbststudium Mathematik ◇ B2 Spezial 1

Thema: Matrizen, Eigenwerte, Eigenvektoren

(1) Gegeben sind die Matrizen $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Konstruktion der Matrix M^T:
Berechne damit die Matrix $R = M^T \cdot D \cdot (M^T)^{-1}$.

(b) Berechne mit HIlfe der obigen Faktorisierung von R auf einfache Weise R^{10}.

(c) Berechne von R den Rang, den Kern, die Determinante, das charakteristische Polynom und die Spur (Spur = Summe der Diagonalelemente). Berechne auch die Spur von D.

(d) Berechne auf einfache Weise die Inverse von R.

(e) Berechne das Eigensystem (Eigenwerte und Eigenvektoren) von R. Vergleiche die Werte mit den eingangs gegebenen Daten. Was sieht man?

(f) Bilde mit R die Vektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ab. Was sind die Bilder?

(g) Bilde mit R^{-1} die Vektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ab. Was sind die Bilder?

(h) Bilde mit R den Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ab. Was ist das Bild?

(i) Bilde mit R sowie auch mit R^{-1} die Eigenvektoren ab. Was sind die Bilder?

(j) Wähle als Basis die Eigenvektoren von R. Stelle den Vektor $\vec{x}$ in dieser Basis dar. $\vec{x} = k_1\,\vec{v}_1 + k_2\,\vec{v}_2$. Was ist das Bild?

(2) Gegeben sind die Matrizen $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.
Löse dieselben Detailaufgaben wie oben.

(3) Gegeben sind die Matrizen $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.
Löse dieselben Detailaufgaben wie oben.

3.2 Gruppenarbeiten zum Thema „lineare Abbildungen“

3.2.1 Themen

- ⊘ Anwendungen der Eigenwerttheorie und geometrische Beispiele für Abbildungen
- ⊘ Beispiel Populationsdynamik
- ⊘ Spannungstensor
- ⊘ Biegelinie
- ⊘ Helmert-Transformationen (Vermessung)

3.2.2 Gruppenbildungen

- ⊘ Etwa gleich grosse Gruppen
- ⊘ Gruppenbildung im Auftrage des Klassenchefs

3.2.3 Anforderungen

- ⊘ Zusammenfassung der benötigten mathematischen Definitionen und Sätze
- ⊘ Beschreibung der Methode(n)
- ⊘ Darstellung von aussagekräftigen Lehrbeispielen
- ⊘ Abgabe in „Schönschrift“ (Handschrift reicht) zur Abgabe an die Klasse
- ⊘ Kurzvortrag, Rahmen 15 bis 20 Minuten (Begrenzung nach oben wesentlich)

Bewertung

Wie 1/3 Prüfung. Zu vergeben sind total 25 Punkte. Diese werden je nach erbrachten Leistungen und Resultaten aufgeteilt auf die Gruppen.

Massstab

Die Beste Gruppe gibt das Mass für A.

Zeitrahmen und Termine

Nach mündlicher Information.

Mai 07 Wir1

3.3 Fragebogen für eine Umfrage

(Statistik mit abhängigen und unabhängigen Ereignissen, Sachgebiet Verkehr)

Antwort bitte ankreuzen resp. Zahlen(bereich) notieren:

Nr.	**Fragen**		
	Statistische Fragen		
1.1	Sind Sie bereit, an einer Umfrage betreffend Verkehr	Ja	Nein
	teilzunehmen?		
1.2	Geschlecht der befragten Person	F	M
1.3	Altersklasse in 10 Jahren		
1.4	Ländliche – städtische Wohnumgebung	L	S
	Umfrage		
2.1	Sind Sie mit dem Verkehrsnetz hierzulande zufrieden?	Ja	Nein
2.2	Leiden Sie unter Stau?	Ja	Nein
2.3	Lassen Sie (resp. Ihre nächste Auto fahrende Person) ihr	Ja	Nein
	Auto zuhause, wenn Sie (resp. Ihre nächste Auto fahrende		
	Person) Stau erwarten?		
2.4	Soll man aus gegebener Notwendigkeit das Autobahnnetz	Ja	Nein
	vergrössern oder andere Strassenerweiterungen bauen?		
2.5	Glauben Sie, dass weitere Strassen den Verkehr gesamthaft	Ja	Nein
	erhöhen?		
2.6	Glauben Sie, dass Strassen und neue Strassen	Ja	Nein
	wirtschaftlichen Nutzen bringen?		
2.7	Glauben Sie, dass Sie (resp. Ihre nächste Auto fahrende	Ja	Nein
	Person) bei weniger vorhandenen Strassen weniger fahren		
	würden		

(Ziel der Untersuchung: Auffinden von Vermutungen von Abhängigkeiten.)

20.12.2006 Wir1

3.4 Hinweise zum Modul Messen, Wochen 1 und 2

3.4.1 Experiment „Zugversuch im Labor“

Experiment: Mit Hilfe einer Zugmaschine werden im Labor einige sinnvolle Messwerte beim Zerreissen von Messstäben aufgenommen.

(1) Versuche das Material der einzelnen Stäbe qualitativ einzuordnen: Holzarten, Trockenheit, Faserverlauf, Gruppeneinteilung u.s.w.

(2) Erfasse die wesentlichen Dimensionen der einzelnen Stäbe.

(3) Erfasse die Messresultate in einer Urliste und stelle diese geeignet graphisch dar. Erfasse dabei auch die Messfehler.

(4) Erfasse die wesentlichen Kenngrössen der Messresultate: Mittelwert(e), Standardabweichung(en), Trennung in Gruppen, ev. Korrelationen u.s.w.

(5) Überlege dir eine sinnvolle statistische Auswertung. Dazu musst du dir erst Reihe von sinnvollen Fragestellungen überlegen.

3.4.2 Experiment „Abfüllversuch“

Experiment: Es werden in mehreren Durchgängen etwa gleichgrosse Kartonrollen in etwa gleich grosse Schachteln zufällig abgefüllt. Dabei wird die Anzahl Rollen gezählt, die in den Schachteln Platz finden, wenn die Schachtel exakt voll ist, d.h. keine Rolle über den Rand herausragt und somit der Deckel richtig schliessen kann.

(1) Erfasse erst die Anzahl der Rollen, die beim exakten bestmöglichen Einpassen in der Schachtel Platz finden (Maximalzahl).

(2) Erfasse bei mehreren Durchgängen die Anzahl der Rollen, die beim zufälligen Einfüllen in der Schachtel Platz finden. Erfasse die Messresultate in einer Urliste und stelle diese geeignet graphisch dar. Erfasse dabei auch die Messfehler.

(3) Erfasse die wesentlichen Kenngrössen der Serie der Messresultate: Mittelwert(e), Standardabweichung(en). Überlege dir auch, ob die Toleranzen von Rollen und Schachteln die Resultate beeinflussen können.

(4) Erfasse die Messresultate in einer Urliste und stelle diese geeignet graphisch dar. Was ist hier die Bedeutung von Messfehlern?

(5) Erfasse die wesentlichen Kenngrössen der Messresultate: Mittelwert(e), Standardabweichung(en), Trennung in Gruppen, u.s.w.

(6) Überlege dir eine sinnvolle statistische Auswertung. Dazu musst du dir erst Reihe von sinnvollen Fragestellungen überlegen (Kreativität gefordert!).

(7) Was ist der Unterschied bei diesem Experiment in Vergleich zum vorhergehenden Experiment?

(8) Was ist von der nachfolgenden Aussage zu halten? - „In den Raum gehen 68.42 plus minus 0.38 Personen. Der Raum ist kühlbar auf minus 54 Grad Celsius.“

3.4.3 Experiment ,,Vermessung“

Experiment: Auf einem Platt Papier A3 (oder grösser) wird mit Hilfe eines Lineals, eines Transporteurs (Winkelmesser) sowie mit Hilfe der folgenden Angaben möglichst exakt ein Dreieck gezeichnet: Seite a = 26.41cm, Seite b = 34.54 cm, Winkel $\gamma = 124.38^o$. Ein Zirkel wird nicht verwendet.

(1) Beurteile und erfasse für deine Zeichnung die Toleranzen für die Eingangsgrössen, nachdem du die Zeichnung erstellt hast.

(2) Berechne die Seite c (Cosinussatz) sowie die restlichen Winkelmasse.

(3) Berechne für deine Zeichnung die Toleranzen für die Seite c sowie die restlichen Winkelmasse (Fehlerfortpflanzungsgesetz). Überlege dir dabei auch, welche Eingangsgrösse für das Resultat dominant ist.

(4) Erfasse in der Gruppe in einer Urliste alle die gemessenen und berechneten Werte, die nicht für jedermann gleich fixiert sind.

(5) Stelle die Resultate graphisch dar.

(6) Überlege dir, welche statistischen Kenngrössen sich aus dem Material sinnvoll gewinnen lassen.

(7) Überlege dir, ob man mit Hilfe statistischer Werkzeuge die Güte der Toleranzen verbessern kann. Speziell soll dabei die gerechnete Toleranz untersucht werden.

Wir1 07

3.5 Modul Messen

Tag 1 (6.3.07) Einführung:

Versuchsplanung, Auswertung, Statistik, Praxis

Tag 2 (13.3.07) Bearbeitung:

Fehlerrechnung (Praxisbeispiele), Norm, Statistisches

Notizen:

Wir1 07

Zugversuch im ML 15:
Zug von Stäben bis zum Bruch, begleitende Messsungen
1. Versuchsplanung:
1.1. Versuchstyp
1.2. Materialarten
1.3. Vorausmessungen (Dimensionen)
2. Ausführung
2.1. Messungen während dem Versuch
2.2. Konzept der Auswertung
3. Art des statistischen Vorgehens (deskriptiv, explorativ, affirmativ. . .)
3.1. Berechnungen von Kenngrössen
3.2. Vermutungen
3.3. Schätzungen
1. . . . .
1.1. . . . .
1.2. . . . .
1.3. . . . .
1.4. . . . .
1.5. . . . .
1.6. . . . .
1.7. . . . .
1.8. . . . .
2. . . . .
2.1. . . . .
2.2. . . . .
2.3. . . . .
2.4. . . . .
3. . . . .
3.1. . . . .
3.2. . . . .
3.3. . . . .
3.4. . . . .
3.5. . . . .
3.6. . . . .
3.7. . . . .
. . . .

Abfüllversuch:
1. Versuchsplanung:
1.1. Versuchstyp
1.2. Materialarten
1.3. Vorausmessungen (Dimensionen)
2. Ausführung
2.1. Messungen während dem Versuch
2.2. Konzept der Auswertung
3. Art des statistischen Vorgehens (deskriptiv, explorativ, affirmativ. . .)
3.1. Berechnungen von Kenngrössen
3.2. Vermutungen
3.3. Schätzungen
1. . . . .
1.1. . . . .
1.2. . . . .
1.3. . . . .
1.4. . . . .
1.5. . . . .
1.6. . . . .
1.7. . . . .
1.8. . . . .
2. . . . .
2.1. . . . .
2.2. . . . .
2.3. . . . .
2.4. . . . .
3. . . . .
3.1. . . . .
3.2. . . . .
3.3. . . . .
3.4. . . . .
. . . .

Zeichnungsversuch:
1. Versuchsplanung:
1.1. Versuchstyp
1.2. Materialarten
1.3. Vorausmessungen (Dimensionen)
2. Ausführung
2.1. Messungen während dem Versuch
2.2. Konzept der Auswertung
3. Art des statistischen Vorgehens (deskriptiv, explorativ, affirmativ...)
3.1. Art des statistischen Vorgehens (deskriptiv, explorativ, affirmativ...)
3.2. Berechnungen von Kenngrössen
3.3. Vermutungen
Schätzungen
1. ....
1.1. ....
1.2. ....
1.3. ....
1.4. ....
1.5. ....
1.6. ....
1.7. ....
1.8. ....
2. ....
2.1. ....
2.2. ....
2.3. ....
2.4. ....
3. ....
3.1. ....
3.2. ....
3.3. ....
3.4. ....
....

3.6 Auswertung 1 Zugversuch Modul Messtechnik:

Festzuhalten sind neben der „obligaten“ Versuchsbeschreibung:

(1) Dokumentation der Bruchstellen (Photographie oder Skizze)

(2) Kraft oder Spannung beim ersten Einknick

(3) Kraft oder Spannung beim Bruch (Riss)

(4) Dehnung beim Bruch (Riss) u.s.w.

(5) Dokumentation von statistischen Kenngrössen (Mittelwert, Standardabweichung, Spanne u.s.w., Ausreisser)

(6) Spezielle Bemerkungen wie "was ist passiert beim einritzen eines Stabesöder "beim Nassmachen"

(7) Gruppenvergleiche (Fichte-Buche. . . .)

Die Daten sind zu finden in:

P:\Publik_Studenten\FBB\Allg\B1a-B2a-B04\Modul_Messtechnik

Einfügen einer TRA-Datei in EXCEL:

(1) EXCEL öffnen.

(2) Ein neues Arbeitsblatt muss geöffnet sein.

(3) Z.B. Feld A1 anklicken. Dann oberste Menüleiste:

- ⊘ Daten
- ⊘ Externe Daten importieren
- ⊘ Daten importieren
- ⊘ Dateityp Älle Dateien (*.*)"wählen, Ordner und TRA-File auswählen wie gewohnt
- ⊘ Öffnen wählen
- ⊘ Dateikonvertierungsassistent wird aktiviert, auf mehrmals auf "Weiteründ dann auf Fertigstellen"klicken
- ⊘ Am Schlusse auf ÖK"klicken
  - =========> Nun werden die Daten eingefügt. Man sieht Material, Kraftmaximum, Bruchkraft, Standardkraft, Standardweg, Zeit sowie Dreiergruppen von Zahlen für die Positionierung der Kurvenpunkte

Weitere Daten:
Zuggeschwindigkeit 2 mm/s

Wir1 07

Fichte	Zeit bis Bruch in s	Zugfestigkeit	Bemerkung
1	–	95.53	
2	–	81.93	
3	76	83.57	schrägfasrig
4	61	54.82	stark schrägfasrig
5	83	73.83	längsfasrig
6	-	58.48	schräg + längs
7	71	59.15	
8	93	83.29	genetzt
Buche	Zeit bis Bruch in s	Zugfestigkeit	Bemerkung
1	102	115.65	
2	124	156.61	
3	131	169.96	
4	120	142.20	
5	137	162.85	
6	147	196.08	
7	108	125.03	Mit Messer wenig
			geschnitten, Bruch
			beim Schnitt
8	081	88.47	genetzt

3.7 Übungen in Statistik ◇ B2 ◇ I / 01 ◇

---

(1) Installiere die Statistik–Software **R** auf deinem privaten PC („R is a free software environment for statistical computing and graphics“.)
Link: `http://www.r-project.org/`

(2) Lade ab der Seite `http://rowicus.ch/Wir/Scripts/restricted/MasterIndex.html` unter Gruppe (9), Statistik–Pakete („Intern“, mit dem dir bekanntem Passwort) ein Skriptum zur „Einführung in R“ herunter und **studiere** die Funktionsweise von R. (Es sind hier mehrere Möglichkeiten zur Auswahl gestellt. Nicht alle haben immer dieselben Vorlieben.)

(3) Nimm 5 Würfel und würfle 50 mal. Falls du keine Würfel auftreiben kannst, so sollst du mit Hilfe eines Mathematik-Programms eine Routine schreiben, die das Würfeln simuliert.

(a) Schreibe die gewürfelten Summen auf. (Z.B. Strichliste.)

(b) Mache eine Klasseneinteilung mit maximal 10 Klassen.

(c) Stelle das Resultat graphisch dar.

(d) Berechne die relativen Klassenhäufigkeiten.

(e) Berechne den Mittelwert und den Klassen–Mittelwert. Ebenso die Varianzen und Streuungen.

(f) Kommentar?

3.8 Übungen in Statistik ◇ B2 ◇ I / 02 ◇

(1) Links:

Rohdaten Abfüllversuch (.txt):
http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/Statistik/RohdatenAbfuellversuch_2008.txt

Rohdaten Abfüllversuch (.pdf):
http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/Statistik/RohdatenAbfuellversuch_2008.pdf

Explorative Auswertung Abfüllversuch (.pdf):
http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/Statistik/Abfuellversuch_2008.pdf

Explorative Auswertung Abfüllversuch (.nb):
http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/Statistik/Abfuellversuch_2008.nb

Interpretiere und kommentiere die vorhandene explorative Auswertung und versuche selbst in der Sache zu übersichtlichen und aussagekräftigen Darstellungen der Daten zu gelangen.

3.9 Übungen in Statistik ◇ B2 ◇ I / 03 ◇

(1) Kommentar zur Statistik und zur Darstellung?

(2) Berechne die Anzahl Möglichkeiten, 30 Studierende auf 30 Plätze zu setzen! Vergleiche die Zeit, welche es braucht um alle Sitzordnungen im 10–Sekunden–Takt auszuführen, mit dem Alter des Universums ($13.5 \cdot 10^9$ Jahre)!

(3) Berechne die Anzahl Möglichkeiten, einen Bildschirm mit 1000×1000 Pixel mit $2 \cdot 10^6$ Farben zu kolorieren!

(4) Berechne die Anzahl Möglichkeiten, beim Jassen 9 Karten aus 36 Karten zu ziehen (Ausgabe)!

(5) Gegeben sind die Punkte $\{(-3, 1), (-2, 0), (-1, 2), (0, -1), (1, 2), (2, 0), (3, 1), (4, 0)\}$. Lege die beste Ausgleichsgerade durch diese Punkte und mache einen Residuenplot!

Kapitel • Chapitre 4

Tests für die Abteilung Bau

4.1 Testsserien

Es folgen Tests für die 1. Bachelor–Klasse und für die 1. und 2. Diplomklasse. . .

4.2 Test ◇ B1–11/12–01 ◇

- ⊘ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
- ⊘ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen können korrigiert werden.
- ⊘ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
- ⊘ Aus Korrekturtechnischen Gründen bitte nicht auf die Rückseite der Blätter schreiben. Zudem dokumentechtes Schreibzeug verwenden.
- ⊘ Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.
- ⊘ (**„Exakt“** heisst „ohne Dezimalbrüche“ im Resultat.)

(1) Vereinfache so weit wie möglich: $I = ([-7, 6) \cap (-4, 8]) \cup \overline{(-\infty, 1)} = \,?$

(2) Vereinfache von Hand **exakt** und so weit wie möglich

$$\ln(\ln(e^c)) + \ln(\ln(e^{2\,c})) + (\sqrt[\sqrt{3}]{\frac{c^{\sqrt{8}}}{c^{\sqrt{2}}}})^{\sqrt{2}} = \,?$$

(3) $f(x) = 2\,x^2 + 3\,b\,x + 48 = 0$ soll genau eine Lösung haben. Berechne b **exakt** von Hand.

(4)

$$\begin{array}{rcl} 3\,y + z & = & 56 \\ z - w & = & 42 \\ |x| + w & = & 0 \\ 2\,x + y & = & 14 \end{array}$$

Berechne mögliche Lösungen von Hand **exakt**.

(5) Verwandle von Hand in einen gekürzten gemeinen Bruch: $23.71467467\overline{467}\ldots$

(6) Berechne die Lösungen der Gleichung **exakt** von Hand:

$$(1 - \log_{12}(\log_{12}(x)))\,(\log_4(\log_3(x)) + 1) = 0$$

(7) Löse von Hand **exakt** die Gleichung:

$$0 = \ln^2(x) + \ln(x^5) + 6$$

(8) Löse von Hand **exakt**:

$$\sqrt{|s^2 + 2|} = 1$$

WIR1 11/12

4.3 Test ◇ B1–11/12–02 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden.
◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♣ Wenn eine Aufgabe nicht lösbar oder $\mathbb{L} = \{\}$ ist, muss dies erwähnt werden.
♡ **Alle Aufgaben geben gleich viele Punkte — löse so viele wie möglich!**

(1) (a) Berechne von Hand nachvollziebar die Ableitung von

$$f_1(x) = (x-1)(x+1)(x^2-1) + 3\,x^3 + 6\,x^2 + 3\,x$$

Hinweis: Erst in ein Polynom umformen.

(b) Berechne von Hand nachvollziebar die Ableitung von

$$f_2(x) = \sin(e^x - 1)\,\sinh(x)$$

(c) Berechne von Hand nachvollziebar die Ableitung von

$$f_3(x) = \frac{(x+1)(x+3)}{x^2-1}$$

(d) Berechne von Hand nachvollziebar die Ableitung von

$$f_4(x) = (3\,x)^{2\,x}$$

(e) Berechne von Hand nachvollziebar $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{4\,(x^3+1)}{5\,(x+1)} - \dfrac{e^{(x+1)}-1}{x^2-1}$

(2) Im Punkt P_0 auf der positiven x-Achse hat die Funktion $f_5(x) = x\,\sin(x)$ ($x \in I = [0, \pi]$) den Tangentensteigungswinkel $\alpha = 35^o$. Dort schneideten sich die Graphen von $f_5(x)$ und $f_6(x) = a\,x^2$.

(a) Berechne P_0.

(b) Berechne a.

(3) Es soll die Gleichung $e^x = \cos(x) + 2$ für $x \geq 0$ numerisch gelöst werden. Um dies auszuführen sucht man die Nullstellen der Funktion $f_7(x) = e^x - \cos(x) - 2$ mit Hilfe des Newton-Verfahrens. Führe das Verfahren mit dem Startwert $x_0 = 1$ wie folgt durch: Berechne mit dem Taschenrechner $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$. Stelle das Resultat in einer Tabelle übersichtlich dar.

%

(4) Gegeben sind die Funktionen $f_8(x) = \frac{1}{2}\,(x-2)\,(x-3)\,(x+4)$ und

$$f_9(x) = (x-2)\,(x-b)\,(x-5).$$

(a) Für welche Werte von b haben die beiden Funktionen 0, 1, 2 oder 3 Schnittpunkte, falls dies überhaupt möglich ist?

(b) Berechne die Extremwertstellen des Graphen von $f_8(x)$.

(c) Berechne den / die Wendepunkte des Graphen von $f_8(x)$.

(d) Berechne die Punkte des Graphen von $f_8(x)$, in denen die Tangentensteigung den Wert $\frac{\pi}{4}$ besitzt.

(5) Untersuche, ob es auf der Parabel $f_{10}(x) = x^2$ zwei Punkte P_1 und P_2 gibt, welche mit dem Ursprung O ein gleichseitiges Dreieck bilden.

(a) Berechne die Punkte P_1 und P_2, falls sie existieren.

(b) Berechne die Tangentensteigung in P_1, falls P_1 existiert.

(6) Durch den Graphen von $y = f_{11}(x) = 20 - 10\cosh(x)$ ist für $y \geq 0$ ein Brückenbogen gegeben, welcher die x–Achse in x_1 und x_2 schneidet, $x_1 < x_2$.

(a) Bestimme die Schnittpunkte x_1 und x_2 des Bogens mit der x–Achse und stelle die Situation in einer gefälligen Skizze dar.

(b) Die Punkte $Q_1(x) = (x_1;\, 0)$, $Q_2(x) = (x;\, f_{11}(x))$ und $Q_3(x) = (x;\, 0)$ bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei $Q_3(x)$. Bestimme x derart, dass das Dreieck maximalen Inhalt hat.

(7) Gegeben ist ein Feuerwehrturm zum Aufhängen von nassen Schläuchen, welcher in der Mitte eines grossen, ebenen Platzes steht und auch noch als Reklamesäule dient. Der Turm ist $12\,m$ hoch, hat einen Innengrundriss von $3 \times 3\,m^2$ und vorne eine rechteckige Eingangstür der Höhe $2.5\,m$. Die Türbreite entspricht der Turmbreite. Ein Ingenieur wird damit beauftragt, exakt auszurechnen wie lang eine Leiter aus einem Stück maximal sein darf, damit man sie noch durch die Tür in den Turm einführen und darin senkrecht aufstellen kann. Löse diese Aufgabe ebenfalls! (Skizze!)

WIR1 11

Viel Glück!

4.4 Test ◇ B1–11/12–03 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden.
◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$

(a) Berechne $\vec{x} = (2\,B - A) \cdot \vec{v}$.

(b) Berechne $\vec{x}$ in $(2\,B + A) \cdot \vec{x} = \vec{v}$. Ist $\vec{x}$ eindeutig bestimmt?

(2) Gegeben sind zwei Ebenen:

$$\Phi_1 :\ \vec{v}_1(\lambda, \mu) = \overrightarrow{OA_1} + \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_2 :\ \vec{v}_2(\nu, \sigma) = \overrightarrow{OA_2} + \nu\,\vec{c} + \sigma\,\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Weiter kennt man noch den Punkte $Q(-5; -6; 8)$.

(a) Berechne den kleinsten Schnittwinkel zwischen Φ_1 und Φ_2 in Grad.

(b) Berechne den Fusspunkt des Lots (Senkrechte) von Q auf Φ_1.

(c) Berechne den Abstand des Punktes Q von Φ_2.

(d) Ermittle die Distanz von Q zur Schnittgeraden $\Phi_1 \cap \Phi_2$.

(3) Gegeben ist die Matrix $A(r) = (\vec{a}_1(r),\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3) = \begin{pmatrix} r & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

(a) Berechne nachvollziehbar von Hand die Determinante von $A(r)$.

(b) Untersuche, ob es einen Wert für r gibt, für den $A(r) = 0$ ist.

(c) Wie muss r gewählt werden, damit $\{\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3\}$ linear unabhängig ist?

(d) Wähle r (falls möglich) so, dass der durch $\{\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{a}_3\}$ definierte Spat den Volumeninhalt 1 besitzt.

(4) Gegeben ist ein achsenparalleler Würfel mit der Kantenlänge s, dem ein Oktaeder eingeschrieben wird. (Die Ecken des Oktaeders sitzen in den Mitten der Würfelflächen.)

(a) Berechne ersichtlich das Volumenverhältnis von Würfel und Oktaeder.

(b) Berechne für $s = 2$ die Distanz zweier gegenüber liegender Oktaederflächen.

(c) Berechne ersichtlich den Winkel zwischen zwei Oktaederflächen in Grad.

(5) Gegeben sind die Punkte $P_1(5;\,0)$, $P_2(4;\,1)$, $P_3(3.5;\,2)$, $P_4(2;\,6)$, $P_5(-1;\,5)$. Die Paare $(P_1,\,P_2)$, $(P_2,\,P_3)$, $(P_3,\,P_4)$, $(P_4,\,P_5)$ definieren zusammen mit O jeweils ein Parallelogramm.

(a) Berechne den Flächeninhalt des Gebildes.

(b) Wenn man den Punkte P_5 um $\varphi = 34.7^o$ dreht, erhält man den Punkt P_6. Erstelle die Drehmatrix D_φ numerisch.

(c) Berechne P_6 mit Hilfe von D_φ.

(6) Gegeben sind die Zahlen $z_1 = 1 - 2\,i$, $z_2 = -2 - 3\,i$, $z_3 = -1 - 5\,i$.

(a) Berechne $w_1 = 5\,z_1^2 - \dfrac{z_2}{z_3}$ in der Form $a + i\,b$.

(b) Berechne alle fünften Wurzeln aus z_1 und stelle die Resultate in einer gut lesbaren Skizze dar.

(c) Berechne die Summe aller vorhin berechneten fünften Wurzeln.

(7) Gegeben sind die Punkte $A(2,\,1,\,0)$, $B(3,\,8,\,0)$, $C(-1,\,-3,\,5)$, $D(6,\,-9,\,4)$.

(a) Stelle die vier Punkte in einer Skizze dar und ermittle, ob diese Punkte ein Tetraeder bilden (Begründung).

(b) Berechne den Oberflächeninhalt des Tetraeders, falls es existiert.

(8) Durch den Punkt $M(2,\,1,\,5)$ und $r = 4$ ist eine Kugel definiert. Im Punkte $T(1,\,-0.5,\,z)$ mit $z < 5$ ist die Tangentialebene Φ an die Kugel gegeben. Berechne den Durchstosspunkt von Φ mit der x–Achse, falls dieser existiert.

WIR1-12

Viel Glück!

4.5 Test ◇ B1–11/12–04 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden.
◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

(1) $$M = \begin{pmatrix} 7 & -10 & 4 \\ 8 & -11 & 4 \\ 8 & -10 & 3 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne die Eigenwerte von M.
(b) Berechne die Eigenvektoren von M.
(c) Berechne die Eigenwerte von M^{-1}.
(d) Berechne die Eigenvektoren von M^{-1}.
(e) Berechne die Eigenwerte von M^T.
(f) Berechne die Eigenvektoren von M^T.
(g) $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ definieren zusammen mit O ein Parallelogramm „Par“. Berechne den Inhalt „$Inh(Par)$“ und auch denjenigen des Bildparallelogramms „$Inh(M \cdot Par)$“.
(h) Berechne die Determinante von M und vergleiche das Resultat mit $\dfrac{Inh(M \cdot Par)}{Inh(Par)}$.

(2) Die Matrix A definiert eine Abbildung, welche die Fixgerade $g: \ \vec{x}(t) = t \cdot \vec{v}_1$ hat ($\vec{v}_1$ wie in der letzten Aufgabe) und welche den Vektor $\vec{v}_2$ ($\vec{v}_2$ wie in der letzten Aufgabe) in $\vec{v}_2\,' = -2\,\vec{v}_2$ sowie $\vec{w} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ in $\vec{w}\,' = 3\,(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)$ abbildet.

(a) Berechne die Matrix A.
(b) Sei $\overrightarrow{OQ} = 2\,\vec{v}_1 - 3\,\vec{v}_2$. Berechne das Bild $\overrightarrow{OQ}\,'$ von $\overrightarrow{OQ}$ bei der Abbildung mit A.
(c) Berechne das Bild $\overrightarrow{OQ}\,''$ von $\overrightarrow{OQ}\,'$ bei der Abbildung mit A.

(3) Gesucht ist eine Matrix B, welche einen Vektor an der durch $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ sowie O gegebenen Ebene orthogonal spiegelt.

(a) Berechne B.
(b) Bilde mit B den Punkt $P(5; 4, 2)$ ab.
(c) Sei $B^2 = B \cdot B, \ B^{k+1} = B^k \cdot B$. Berechne B^{100}.

(4) Löse die Matrixgleichung nach X auf und vereinfache, falls dies möglich ist.

$$(U^{-1} \cdot W)^{-1} \cdot (U^{-1} \cdot W) \cdot X \cdot W^T - E = (((U^{-1})^T \cdot W^T)^{-1})^T$$

%

(5) Gegeben sind die Punkte

$$P_1(5;\,0;\,1),\;\; P_2(4;\,1;\,-1),\;\; P_3(3.5;\,2;\,10),\;\; P_4(2;\,6;\,1),\;\; P_5(-1;\,5;\,8),\;\; P_6(-2;\,12;\,0).$$

(a) Berechne eine Matrix G, welche P_1 in P_4 und P_2 in P_5 und P_3 in P_6 abbildet.

(b) Wenn man den Punkte P_1 um $\varphi = +12^o$ um die x–Achse dreht, erhält man den Punkt P_7. (Durch die Drehung wird die positive y–Achse in Richtung positive z–Achse bewegt.) Erstelle die Drehmatrix D_φ. numerisch.

(c) Berechne P_7 mit Hilfe von D_φ.

(d) Bilde mit Hilfe von G den Punkt P_7 ab.

WIR1-12

Viel Glück!

4.6 Test ◇ B1–10/11 –01 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu **doppelt** unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden.
♢ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen **Strich** zu trennen.
♣ Wenn eine Aufgabe **nicht lösbar** oder $\mathbb{L} = \{\}$ ist, muss dies erwähnt werden.
♡ **Alle Aufgaben geben gleich viele Punkte.**
♠ Z.B. nach dem Schema: Richtig $\rightsquigarrow$ 2 P / etwas ist brauchbar $\rightsquigarrow$ 1 P / sonst 0 P.

(1) Verwandle $\dfrac{2.18989\overline{898}\ldots}{19.79797\overline{979}\ldots - 18.97979\overline{797}\ldots}$ schrittweise von Hand in einen gemeinen Bruch.

(2)

$$\begin{array}{lcl} |3\,\lambda\,x| - w & = & 0 \\ 4\,y - 2\,z + w & = & 14 \\ y + 2\,z + w & = & 56 \\ 3\,y - 4\,z & = & 40 \end{array}$$

Berechne mögliche Lösungen von Hand exakt. Bezeichne die dabei verwendete Methode. $\lambda =$ Parameter, x, y, z, w unbekannt. Untersuche, wie viele Lösungen vorhanden sind.

(3) Berechne (vereinfache) wenn möglich exakt von Hand (so weit wie möglich):

$$x = \ln\left(\sqrt{\frac{e^{3\,(\ln(e^2)+\ln(e^6))}}{e^{\ln(3)}}}\right)$$

(4) Berechne von Hand exakt (so weit wie möglich):

$$x = \sqrt[3]{e^{(\frac{1}{2}\,\ln(2)+\ln(32))}} \cdot ((\sqrt[3]{e})^2)^{\ln(8)}$$

(5) Untersuche von Hand, für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ der folgende Ausdruck in $\mathbb{R}$ definiert ist:

$$A = \ln(\sqrt[4]{a}) - \frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{1}{b - \sqrt{b^2 - a^2}}\right) + \frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{b}{a} + \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 1}\right)$$

(6) Von einem ebenen Dreieck kennt man den Winkel $\gamma = 32^o$ sowie die daran angrenzenden Seiten $a = 5.886$ und $b = 2.159$. Berechne die fehlende Seite c und die fehlenden Winkel α und γ und nenne jeweils die verwendeten Sätze der Geometrie, Trigonometrie oder Goniometrie.

(7) Löse die Gleichung von Hand mit Hilfe der notwendigen Regeln und schreibe das Resultat so kurz wie möglich:

$$\frac{\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a\,b} + \frac{1}{b^2}} \cdot 4^{4\,(x+1)} \cdot 6^{-3\,x} \cdot 4^{-4} = 3^{2-x}$$

%

(8) Gegeben ist die Gleichung $y^2 - x^2 = 1$ (*). Setze $u = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}}$ und $v = \dfrac{x-y}{\sqrt{2}}$ und berechne damit $x = \ldots$ und $y = \ldots$ Setze dann $x = \ldots = x(u,\, v)$ und $y = \ldots = y(u,\, v)$ in die Gleichung (*) ein und vereinfache den Ausdruck so weit wie möglich von Hand. Was findet man damit für eine Gleichung für u und v? (Um welche bekannte Kurve handelt es sich?)

(9) Vereinfache so weit wie möglich von Hand:

$$\frac{(x - 3\,y)\,(2\,b + \frac{2}{3}\,a)}{(\frac{1}{9}\,a^2 + b^2 + \frac{2}{3}\,a\,b)\,(x^3 - 27\,y^3)}$$

(10) Berechne α und β mit dem Rechner und entscheide, welcher Winkel grösser ist, falls beide Winkel existieren! (Alles im Bogenmass!)

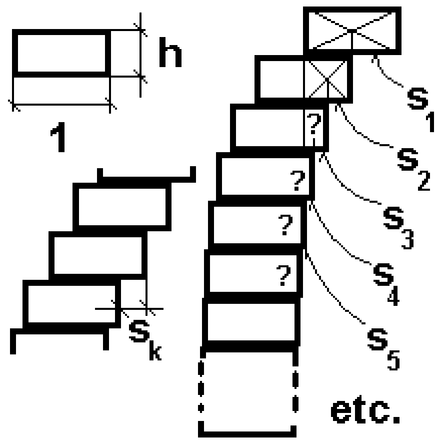
$$\alpha = \arcsin(\frac{\tan(1)}{10} \cdot \cos(\sin(\cos(1)))),\;\; \beta = \arccos(\cot(1) \cdot \sin(\cos(\sin(1))))$$

WIR1 10

4.7 Test ◇ B1–10/11–02 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu **unterstreichen**.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden.
◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen **Strich** zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte. DP = doppelte Punktzahl.**

(1) Ein Ziegelstein $Nr.\,1$ mit konstantem Querschnitt und der Länge 1 sowie der Höhe h wird auf einen zweiten Ziegelstein $Nr.\,2$ mit denselben Massen (wie in der Skizze gezeigt) positioniert, so dass er um die Frei–Strecke s_1 über den ersten Zeigelstein nach vorne in die Luft hinaus ragt und gerade nicht hinunter fällt. Die Gruppe $Nr.\,1\,\&\,2$ wird danauch auf einen ebensolchen Ziegelstein $Nr.\,3$ gelegt, wobei jetzt $Nr.\,2$ die $Nr.\,3$ um die Frei–Strecke s_2 überragt. $Nr.\,1\,\&\,2$ sollen auch nicht fallen. Danach wird die Gruppe $Nr.\,1\,\&\,2\,\&\,3$ auf $Nr.\,4$ gelegt, wobei jetzt die Frei–Strecke s_3 ist und so weiter.



(a) Berechne $s_1,\ s_2,\ s_3,\ \ldots,\ s_k,\ \ldots$ **DP !**

(b) Berechne $S := s_1 + s_2 + s_3 + \ldots = \sum\limits_{k=0}^{\infty} s_k$

(2) (a) $f(x) = x \cdot \sin(x) + \dfrac{x}{\sin x}$. Berechne von Hand exakt und vereinfache so weit wie möglich:

i. $f\,'(x)$ ii. $f\,'(x)\big|_{x=\frac{\pi}{2}}$ ($\leadsto$ $x = \dfrac{\pi}{2}$ einsetzen.)

(b) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$. Berechne von Hand exakt und vereinfache so weit wie möglich:

$$\int\limits_1^e f(x)\,dx = ?$$

(c) $f(x) = x^e$. Berechne von Hand exakt und vereinfache so weit wie möglich:

i. $\int\limits_1^t f(x)\,dx = ?$ ii. $\dfrac{d\int\limits_1^t f(x)\,dx}{dt} = ?$

(d) $f(x) = \dfrac{x+4}{(x+2)(x+6)}$, $[-1,\,1]$.

i. Skizziere den Graphen.

ii. Zeige von Hand die Berechnung der Partialbruchzerlegung.

iii. Leite die Partialbruchzerlegung vor Hand ab, setze danach $x = 0$.

iv. Bereche die Tangentensteigung an der Stelle $x = 0$ und daraus den Steigungswinkel in Grad.

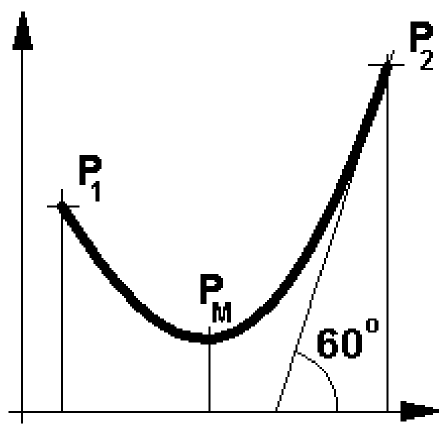
v. Berechne von Hand mit Hilfe der Partialbruchzerlegung $\int\limits_{-1}^{w} f(x)\,dx$.

(3) Gegeben: $f(x) := a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$

mit $P_1 = P_1(1;\,6)$, $P_2 = P_1(6;\,9)$.

Der Steigungswinkel der Tangente bei P_2 beträgt 60^o.

Berechne P_3. **DP !**



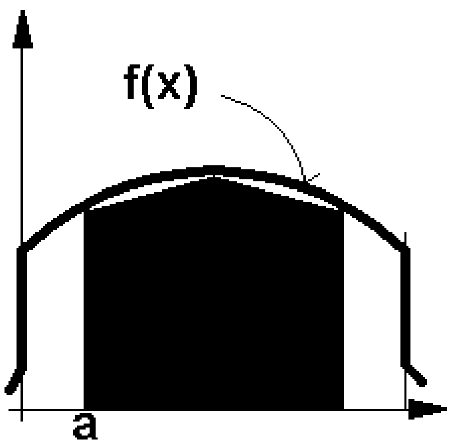
(4) Gegeben: Kettenlinie

$f(x) = c\,\cosh(\dfrac{x-x_0}{c}) + y_0$ mit

$c = -4$, $x_0 = 10$, $y_0 = 30$

(a) Die Funktion beschreibt einen Brückenbogen über $I = [0,\,20]$. Skizziere den Bogen.

(b) Gesucht sind die Masse der maximal grossen Querschnittsfläche eines Schiffes (schwarz in der Skizze), so dass das Schiff gerade noch knapp unter der Brücke durchkommt. Dabei genügt es, den Wert $x = a$ (Skizze) zu bestimmen. **DP !**

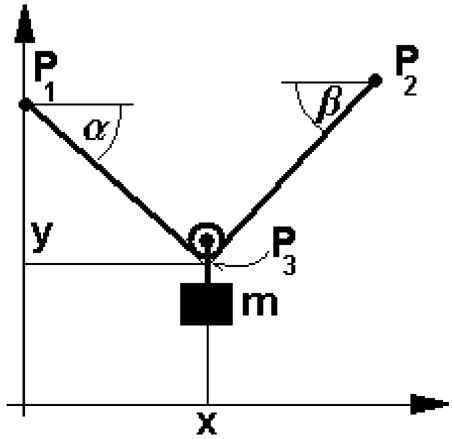


(5) Über eine Rolle wird an einem Drahtseil eine Masse m bewegt (siehe Skizze). Bekannt sind die Punkte $P_1 = P_1(0;\,10)$ und $P_2 = P_2(8;\,12)$ sowie die Seillänge $L = 11$. P_3 hat die Koordinaten x und $f(x)$, also $P_3 = P_3(x;\,f(x))$.

(a) Berechne $y = f(x)$ über $I = (0,\ 8)$.

(b) Suche das Minimum von $f(x)$ in I.

(c) Kontrolliere, ob für gefundene das Minimum von $f(x)$ die Vermutung $|\alpha| = |\beta|$ richtig ist.



(6) Der Graph der Funktion $h(x) = \sin^2(x) + \dfrac{1}{4}\cos(10\,x)$ wird über dem Intervall $I = [0,\, 2\,\pi]$ um die x–Achse rotiert.

(a) Skizziere den Graphen der Mantellinie des Rotationskörpers.

(b) Berechne die Kurvenlänge des Graphen (Dezimalzahl).

(c) Berechne den Inhalt des Rotationskörpers (Dezimalzahl).

(d) Berechne die Manteloberfläche des Rotationskörpers (Dezimalzahl).

(7) Gegeben ist eine Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2 + (x-2)^2 + (y+1)^2$ sowie ein Weg, der durch die Projektion $g(x, y) = (x+10) + (y-6)^2 - 25 = 0$ in der Grundebene beschrieben wird.

(a) Berechne die Extremalstellen von f.

(b) Berechne den tiefsten Punkt des Weges auf der Funktionsfläche.

(8) Berechne die Lösung, falls möglich:

$$y\,'(x) = \frac{x^3}{y(x)},\quad y(1) = 1$$

(9) Gegeben ist $f(x) = a_0 + a_1\,\dfrac{x}{1!} + a_2\,\dfrac{x^2}{2!} + a_3\,\dfrac{x^3}{3!} + a_4\,\dfrac{x^4}{4!} + r(x)\cdot x^5$ sowie $g(x) = \cos(x)$.

An der Stelle $x = 0$ soll gelten:
$f(0) = g(0),\ \ f\,'(0) = g\,'(0),\ \ f\,''(0) = g\,''(0),\ \ f^{(3)}(0) = g^{(3)}(0),\ \ f^{(4)}(0) = g^{(4)}(0)$

(a) Versuche daraus die Koeffizienten a_k von f zu berechnen.

(b) Skizziere f und g und bestimme graphisch den Punkt x_1 auf der positiven x–Achse, an dem der Wert $f(x_1)$ vom Wert $g(x_1)$ um mehr als 0.5 abweicht (so genau wie graphisch möglich).

Viel Glück! WIR1 010/11

4.8 Test ◇ B1–10/11–03 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden.
◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

(1) Löse die folgende Matrixgleichung ($X = ?$) unter der Annahme, dass alle Matrizen regulär sind:

$$A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot M \cdot X \cdot A \cdot A = A^{-1} \cdot A \cdot M^{-1} \cdot A \cdot A^{-1} \cdot A + E$$

(2) Gegeben sind zwei Ebenen:

$$\Phi_1 : \ \vec{v}_1(\lambda, \mu) = \overrightarrow{OA_1} + \lambda \ \overrightarrow{A_1B_1} + \mu \ \overrightarrow{A_1C_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_2 : \ \vec{v}_2(\nu, \sigma) = \overrightarrow{OA_2} + \nu \ \overrightarrow{A_2B_2} + \sigma \ \overrightarrow{A_2C_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Weiter kennt man noch die Punkte $Q_1(10; -10; 12)$, $Q_2(-5; -6; 8)$.

(a) Berechne das Volumen des Tetraeders, welches gegeben ist durch A_1, B_2, C_1, Q_2.

(b) Berechne den Abstand des Punktes Q_2 von Φ_2.

(c) Berechne die Durchstosspunkte D_1, D_2, D_3 der Schnittgeraden s von Φ_1 und Φ_2 mit den drei Koordinatenebenen.

(d) Ermittle die Distanz der Durchstosspunkte Q_3, Q_4 der Geraden $\overline{Q_1Q_2}$ mit den Ebenen Φ_1, Φ_2.

(e) Berechne den Winkel $\angle(Q_1OQ_2)$.

(3) Gegeben ist die Matrix $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne die Determinante der Matrix M sowie diejenige von $M + M$.

(b) Begründe damit, ob die Inverse M^{-1} der Matrix existiert.

(c) Berechne die inverse Matrix M^{-1}, falls sie existiert.

(d) Berechne die Inverse der Matrix M^T, falls sie existiert.

(e) Gibt es eine Beziehung zwischen M^{-1} und $(M^T)^{-1}$? Wenn ja, welche?

(f) Berechne exakt die Determinante von:
$M^{-1} \cdot M^{-1} \cdot M^{-1} \cdot M^{-1} \cdot M^{-1} \cdot M^{-1} \cdot M^{-1} := (M^{-1})^7$ %

(g) Bilde den Punkt $P_0(2,5,8)$ mittles M in P_1 ab, d.h. bilde den Vektor $\overrightarrow{OP_0}$ in $\overrightarrow{OP_1}$ ab. Bilde danach P_0 mittles M^{-1} in P_2 ab. Berechne P_1 und P_2.

(h) Berechne nun diejenige Matrix in Zahlen und auch abstrakt, welche P_2 in P_1 abbildet.

(4) Gegeben sind die Gleichungssysteme

(a)

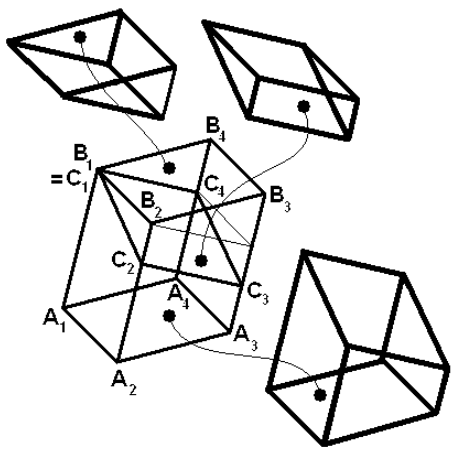
$$\begin{aligned} 3x+3y+4z &= 2 \\ x+2y-z &= 1 \\ 4x+2y+10z &= 2 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 3x+3y+4z &= 2 \\ x+2y-z &= 1 \\ 4x+2y+10z &= 5 \end{aligned}$$

Demonstriere damit den Gauss–Jordan–Algorithmus und finde jeweils die allgemeine Lösung und dazu jeweils die Dimension von $\mathbb{L}$!

(5) Gegeben sind die Punkte $A_1 = O$, dazu $A_2 = (4; -2; -1)$, $A_4 = (1; 5; 2)$ sowie $B_1 = (2; 1; 10)$.
Damit ist ein Spat mit den Eckpunkten $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4$ bestimmt.
Die Punkte $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4$ entstehen durch einen Schnitt des Spates mit einer Ebene Φ. Dabei gilt $B_1 = C_1$, $|\overline{A_4C_4}| = 0.8 \cdot |\overline{A_4B_4}|$, $|\overline{A_2C_2}| = 0.7 \cdot |\overline{A_2B_2}|$.



(a) Berechne die restlichen Eckpunkte des Spats $A_3,\ B_2,\ B_3,\ B_4,\ C_2,\ C_3,\ C_4$. Schreibe die Werte übersichtlich in eine Tabele.

(b) Berechne das Spatvolumen.

(c) Berechne das abgeschnittene Volumen mit den Eckpunkten $B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4$.

(d) Wieviel % macht das abgeschnittene Volumen vom Gesamtvolumen des Spats aus?

(6) Gegeben sind die Punkte $A_1 = (-1; 0; 1)$, $A_2 = (4; -2; -1)$, $A_3 = (1; 5; 2)$, $A_4 = (2; 1; 10)$ sowie die Matrix $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne die Koordinaten der Punkte auf den Geraden durch $\overline{A_1A_2}$ und $\overline{A_3A_4}$, die den kürzesten Abstand voneinander haben.

(b) Berechne das Volumen des Körpers mit den Eckpunkten $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$.

(c) Die Ortsvektoren der Punkte $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$ werden mittels der Matrix M abgebildet. Berechne den Volumeninhalt des entstehenden Körpers. WIR1-11

Viel Glück!

4.9 Test ◇ B1–09/10–01 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu **doppelt** unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden.
◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen **Strich** zu trennen.
♣ Wenn eine Aufgabe **nicht lösbar** oder $\mathbb{L} = \{\}$ ist, muss dies erwähnt werden.
♡ **Alle Aufgaben geben gleich viele Punkte.**
♠ Z.B. nach dem Schema: Richtig $\rightsquigarrow$ 2 P / etwas ist brauchbar $\rightsquigarrow$ 1 P / sonst 0 P.

(1) Verwandle $80.4285714285\overline{714285}\ldots$ schrittweise von Hand in einen gemeinen Bruch.

(2)

$$\begin{array}{lcl} |2\,\lambda\,x|+w & = & 0 \\ 2\,x+y & = & 14 \\ 3\,y+z & = & 56 \\ z-w & = & 42 \end{array}$$

Berechne mögliche Lösungen von Hand exakt.
Bezeichne die dabei verwendete Methode.
$\lambda =$ Parameter, x, y, z, w unbekannt.

(3) Seien alle Parameter oder Variablen grösser als 1. Vereinfache so weit wie möglich von Hand. Das Resultat soll exakt sein (kein Dezimalbruch):

$$\frac{4}{\ln(x)}\,\log_x\!\left(\frac{x}{x^{\log_2(x)}}\cdot a^{\log_2(x)}\right) - 8\,\log_2(4^{\log_2(a)})\,\frac{\log_2(16)}{\log_2(a)} + 12\,\log_2((\log_4(16))^{\log_2(8)})$$

(4) Berechne die möglichen Lösungen der Gleichung von Hand so exakt wie möglich:

$$\sqrt{(1-\log_{10}(\log_{10}(y)))\,(1+\log_{10}(\log_{10}(y)))} = 0$$

(5) Löse die folgende Gleichung von Hand, falls möglich:

$$(\ln(u))^2 + \ln(\sqrt{u}) - 9 = \ln(e\cdot u)$$

(6) Untersuche, ob das folgende Gleichungssystem eine Lösung hat und berechne diese wenn möglich:

$$\left|\begin{array}{lcl} \sin^2(x\cdot 17^{1-5^0}) + e^{\sin(3\,\pi)} & = & \frac{11011}{10000} - \cos^2(x) \\ (x\cdot e^{\ln(y)})^2 & = & 2 \end{array}\right|$$

(7) Löse die Gleichung von Hand mit Hilfe der Potenzierungsregeln und schreibe das Resultat so kurz wie möglich:

$$4^{2\,(x-1)}\cdot 6^{3\,x}\cdot 8^{-1} = 3^{4-2\,x}\cdot 4^{3-3\,x}$$

(8) Für welche u hat das System $y=(x-2)(x+3)$, $\dfrac{1}{2}\,x = y-u$ genau eine Lösung?

(9) Vereinfache so weit wie möglich von Hand:

$$\frac{\sqrt[3]{y^{-2}-x^{-2}}\cdot\sqrt[3]{(x-y)^9}}{\sqrt{\sqrt[3]{x^2-y^2}\cdot(y^{-1}-x^{-1})}\cdot\sqrt[2]{x^3}}\cdot\frac{x}{x-y}$$

WIR1 09

4.10 Test ◇ B1–09/10–02 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu **unterstreichen**.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden.
♢ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen **Strich** zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

(1) (a) i. Berechne von Hand und vereinfache so weit wie möglich:

$$f(x) = \left(\frac{1}{5}\,x^5 + \frac{1}{4}\,x^4 + \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{2}\,x^2 + x - 1\right) \;\Rightarrow\; f\,'(x)\cdot(x-1) = \,?$$

ii. $\dfrac{df(x)}{dx} =\Big|_{x=1}$? ($x = 1$ einsetzen.)

iii. Berechne den Steigungswinkel α von f im Punkt $P(1; f(1))$ in rad.

(b) i. Leite die folgenden Funktionen an der Stelle $x = 0$ ab: $f_1(x) = \ln(3\,x^2 + 1)$, $f_2(x) = e^{a\,x}$, $f_3(a) = e^{a\,x}$, $f_4(x) = e^{2\,a}$, $f_5(x) = \tan(x+1) + \sin(x^2)$.
Berechne damit $f_1'(x) + f_2'(x) + f_3'(x) + f_4'(x) + f_5'(x)$ an der Stelle $x = 0$ und $a = 1$.

ii. Sei jetzt $a = 2$. Untersuche so, welche der Funktionen $f_1, \ldots, f_5$ bei $x = \pi$ den grössten berechenbaren Steigungswinkel hat und wie gross dieser ist in rad.

(c) Zeige die Berechnung der Ableitung von Hand und vereinfache so weit wie möglich:
$g_1(x) = \dfrac{e^{(2\,x)}}{x^2 - 1} + x\,cos(x^2) \;\Rightarrow\; g_1'(0) = \,?$

(d) Zeige die Berechnung der Ableitung von Hand und vereinfache so weit wie möglich:
$g_2(x) = \dfrac{-1}{(x-1)(x+2)} \;\Rightarrow\; g_2'(0) = \,?$

(2)

$$f(x) = x\,(x-1)\,(x-3)\,(x-6) + 40$$

(a) Schreibe $f(x)$ als Polynom.

(b) Skizziere die Funktion über $D_f = [-1,\,7]$.

(c) Berechne den Steigungswinkel der Tangente für $x = 0$ und für $x = 6$ in Grad.

(d) Berechne Minima und Maxima von $f(x)$ mit Hilfe der Differentialrechnung (Dezimalzahlen).

(e) Suche den(die) Wendepunkt(e) von $f(x)$ mit Hilfe der Differentialrechnung (Dezimalzahlen).

(f) Untersuche, ob f in $D_f = [-1,\,7]$ Nullstellen besitzt und berechne diese allenfalls (Dezimalzahlen).

(3)

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

(a) Linearisiere $f(x)$ bei $x_0 = 0$. D.h. berechne $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Vereinfache so weit wie möglich.

(b) Berechne den Fehler zwischen dem richtigen Funktionswert und der Linearisierung bei $x = 0.1$. Wie gross ist der Fehler in Prozent vom richtigen Funktionswert?

(4) Berechne den Flächeninhalt (Dezimalzahl) zwischen den Graphen der Funktionen $f(x) = x\,(x-1)\,(x-3)\,(x-6)$ und $h(x) = -12\,x\,(x-3)$ über dem Intervall $I = [0,\,3]$.

(5) (a) Berechne den Schwerpunkt in y-Richtung der Funktion $f(x) = x\,\sin(x)$ (Dezimalzahl) über dem Intervall $I = [0,\,\pi]$ und skizziere die Funktion sowie die Schwerpunktskoordinate in y-Richtung möglichst exakt.

(b) Berechne den Schnittpunkt der Tangente an den Graphen durch $(\frac{\pi}{2},\, f(\frac{\pi}{2}))$ mit der y–Achse und skizziere die Situation (Dezimalzahl).

(6) Der Graph der Funktion $h(x) = -12\,x\,(x-3)$ wird über dem Intervall $I = [0,\,3]$ um die x–Achse rotiert. Berechne:

(a) Die Kurvenlänge des Graphen (Dezimalzahl).

(b) Den Inhalt des Rotationskörpers (Dezimalzahl).

(c) Die Oberfläche des Rotationskörpers (Dezimalzahl).

(7) Berechne die Lösung, falls möglich:

$$y'(x) = \frac{\cos(x)}{y(x)}, \quad y(0) = 0$$

(8) Berechne das Resultat exakt, falls möglich: Auf einen Würfel mit dem Volumeninhalt 1 wird ein zweiter mit 1/3 des Inhalts des unteren Würfels gestellt. Darauf wiederum ein dritter mit 1/3 des Inhalts des zweiten Würfels, darauf ein vierter mit 1/3 des Inhalts des dritten Würfels und so fort in alle Ewigkeit. Wie gross ist der Inhalt aller dieser Würfel zusammen? Und wie hoch wird der so erzeugte Würfelturm?

(9) Ein freistehender, zylindrischer Wassertank wird auf einer Seite durch eine aufgesetzte Halbkugel abgeschlossen. Der gesamte Inhalt beträgt $4000\,m^3$. Wie gross muss man den Radius wählen, wenn die Oberfläche minimal sein soll, um den Wärmeaustausch zu minimieren?

(10) Eine Emissionsquelle A stösst doppelt so viele gesundheitsgefährdende Schadstoffe aus wie eine andere Quelle B, welche $5\,km$ weit entfernt liegt. Zwecks Überwachung soll auf der Linie zwischen den beiden Stationen eine Messstation gebaut werden. Die durch jede Station erzeugte Belastung nimmt mit dem Abstand von der Station im Quadrat ab. (Da bei jeder Station der Schadstoffdurchfluss durch jede Halbkugel um die Station konstant ist.) Wie weit von A entfernt baut man die Station, wenn die Schadstoffbelastung dort minimal sein soll?

Viel Glück! WIR1 09/10

4.11 Test ◇ B1–09/10–03 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden.
◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

(1) Löse die folgende Matrixgleichung ($X = ?$) unter der Annahme, dass alle Matrizen regulär sind und dass $M + M^T = A^{-1} \cdot A^T,\;\; X \cdot X = X^2$ gilt:

$$(A \cdot X \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot X \cdot A^{-1}) + A^T \cdot X \cdot A^{-1} = M - A^{-1} + M^T + A \cdot X^2 \cdot A^{-1}.$$

(2) Gegeben sind 2 Geraden, welche als Näherungen für die Lage von zwei Drahtseilen gelten:
$g_1:\ \vec{v}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $g_2:\ \vec{v}_2(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.
Das höher gelegene Seil soll eine Seilbahn aufnehmen, das tiefer gelegene Seil ist eine elektrische Leitung. Daher soll man den kürzesten Abstand der beiden Seile, und damit der Geraden berechnen. Führe die Berechung durch.

(3) Gegeben ist eine Ebene $\Phi:\ \vec{v}(\lambda,\mu) = \overrightarrow{OA} + \lambda\ \overrightarrow{AB} + \mu\ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.
Dazu kennt man noch den Punkt $Q(10; -10; 12)$

(a) Berechne das Volumen des Tetraeders, welches gegeben ist durch A, B, C, Q.
(b) Berechne daraus den Abstand des Punktes Q von Φ.
(c) Berechne den Lotfusspunkt L von Q auf Φ.
(d) Berechne den an L gespiegelten Punkt Q' zu Q.
(e) Berechne den Winkel $\angle(QAQ')$.

(4) Ein Punkt P_0 liegt in der Ebene $\Phi_1:\ 3\,x + 4\,y - 5\,z - 12 = 0$ und ebenfalls in der Ebene $\Phi_2:\ -4\,x + 5\,y + 3\,z + 12 = 0$. Zudem soll P_0 vom Punkt $Q(1, 2, 10)$ einen minimalen Abstand haben. Bestimme P_0 numerisch.

(5) Gegeben sind die Gleichungssysteme

(a)

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2\,x + 3\,y + 4\,z &= 1 \\ x + 2\,y + 3\,z &= 1 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2\,x + 3\,y + 4\,z &= 2 \\ x + 2\,y + 3\,z &= 1 \end{aligned}$$

Demonstriere damit den Gauss–Jordan–Algorithmus und finde jeweils die allgemeine Lösung und dazu jeweils die Dimension von $\mathbb{L}$!

%

(6) Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & x & 2 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. %

(a) Für welche Werte von x existiert die Inverse von A?

(b) Berechne $(A \cdot B)$.

(c) Berechne $(3 \cdot A^{-1} \cdot B)$ für $x = \dfrac{1}{3}$.

(d) Berechne $(3 \cdot B \cdot A^{-1})$ für $x = \dfrac{1}{3}$.

(e) Berechne $(B \cdot A \cdot B \cdot A^{-1})$ für $x = 1$.

(f) Berechne $(B \cdot B^T \cdot A \cdot A^T)$ für $x = 1$.

(g) Berechne $((B^{-1} \cdot A^{-1})^T)^{-1}$ für $x = 1$.

(7) Gegeben ist die Matrix $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Bilde den Punkt $P_0(5, 8)$ mittles M ab, d.h. bilde den Vektor $\overrightarrow{OP_0}$ ab. Drehe dann den Bildpunkt P_1 um -12^o um den Ursprung. Bilde danach den durch die Drehung erhaltenen Bildpunkt P_2 mittels M^{-1} ab.

(a) Berechne die Matrix für die gesamte Abbildung numerisch.

(b) Berechne den Bildpunkt P_3 der gesamten Abbildung.

(8) Gegeben ist ein Dreieck durch die Punkte $P_1(1; 1; 0)$, $P_2(1; 0; 1)$, $P_3(0; 1; 2)$. Damit ist eine Ebene Φ definiert. g ist die Normalengerade durch den Schwerpunkt S des Dreiecks.

(a) Berechne einen Richtungsvektor $\vec{v}$ mit der Länge 1 von g numerisch.

(b) Berechne den Punkt $P_4 \in g$ mit der z–Koordinate $z = 15$.

(c) Konstruiere eine Matrix M, welche den Vektor $\vec{e}_1$ auf $\vec{v}$, den Vektor $\vec{e}_2$ auf $\overrightarrow{P_1P_2}$ und den Vektor $\vec{e}_3$ auf $\overrightarrow{P_1P_3}$ abbildet.

(d) Bilde mit Hilfe von M den Vektor $\overrightarrow{OP_1} + 2\ \overrightarrow{P_1P_2} + 2\ \overrightarrow{P_1P_3}$ ab.

(e) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle(P_1P_2P_3)$.

(f) Die Vektoren $\overrightarrow{OP_k}$, $k = 1, 2, 3$ werden mit dem zugehörigen Faktor k gestreckt. Berechne den Flächeninhalt des entstehenden neuen Dreiecks.

Viel Glück!

WIR1 10

4.12 Test ◇ B1–08/09–01 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden.
◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♣ Wenn eine Aufgabe nicht lösbar oder $\mathbb{L} = \{\}$ ist, muss dies erwähnt werden.
♡ **Alle Aufgaben geben gleich viele Punkte.**

(1) Verwandle schrittweise von Hand in einen gemeinen Bruch: $145.2797878\overline{78}\ldots$

(2) Seien alle Parameter oder Variablen grösser als 1. Vereinfache so weit wie möglich von Hand. Das Resultat soll exakt sein (kein Dezimalbruch):

$$\log_5(10^{\log_5(c)})\,\frac{\log_5(100)}{\log_5(c)} + \log_x\left(\frac{x}{x^{\log_5(c)}}\cdot c^{\log_5(x)}\right)$$

(3) Berechne mögliche Lösungen der Gleichung so exakt wie möglich:

$$(1-\log_5(\log_5(x)))\,(1+\log_5(\log_5(x))) = 0$$

(4) Löse das folgende Gleichungssystem, falls dies möglich ist:

$$\left|\begin{array}{ccc} 8 & = & y^{\log_2(\sqrt{x})} \\ \log_2(x+2)+\log_2(x-5) & = & \log_2(x+5)+\log_2(2-x) \end{array}\right|$$

(5) Löse die Gleichung:

$$\ln^3(x) + \frac{\ln(x^6)}{6} = -6\,\ln(x)$$

(6) Löse die Gleichung:

$$2^{3\,(x-1)}\cdot 3^{2\,x}\cdot 5^{1+2\,x} = 4^{6-3\,x}$$

(7) Für welche u hat $9+8\,u+8\,x\,u+9\,x^2=0$ genau eine Lösung?

(8) Löse:

$$\frac{\sqrt{x^2+4}+6\,x+2}{\sqrt{x+2}} = 0$$

(9) Löse:

$$|s-2|\,|s+2| = 6+s$$

(10) Löse mit Hilfe des Gauss–Verfahrens für $a=15$ und $a=16$.:

$$4\,x+2\,y-5\,z=0,\;\; 2\,x-3\,y=6,\;\; 32\,x-24\,y-a\,z=8$$

(11) Schreibe die nachfolgende Menge so kurz wie möglich:

$$M=\{x\in\mathbb{Z}\mid \text{Es gibt eine Zahl } y\in\mathbb{N}:\; x^2+y^2=(x-y)(x+y)\}$$

$$(\; M=\{x\in\mathbb{Z}\mid (\exists_{y\in\mathbb{N}}:\; x^2+y^2=(x-y)(x+y))\}\;)$$

WIR1 08

4.13 Test ◇ B1–08/09–02 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden.
♢ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♣ Wenn eine Aufgabe nicht lösbar oder $\mathbb{L} = \{\}$ ist, muss dies erwähnt werden.
♡ **Alle Aufgaben geben gleich viele Punkte — löse so viele wie möglich!**

Test mit vielen Kurzaufgaben

(1) Berechne von Hand nachvollziebar die Ableitung von

$$f_1(x) = (x-1)(x+1)(x^2+1) + 4\,x^3 + 3\,x^2 + 2\,x$$

Hinweis: Erst in ein Polynom umformen.

(2) Berechne von Hand nachvollziebar die Ableitung von

$$f_2(x) = \sin(x)\, e^x\, \cosh(x)$$

Hinweis: Erst $e^x \cosh(x)$ *vereinfachen,* $\cosh(x) = \ldots$

(3) Berechne von Hand nachvollziebar die Ableitung von

$$f_3(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{x^2-1}$$

(4) Berechne von Hand nachvollziebar die Ableitung von

$$f_4(x) = \cos(\cos(x))$$

(5) Berechne von Hand nachvollziebar die Ableitung von

$$f_5(x) = \cos(\cos(\cos(x)))$$

(6) Berechne von Hand nachvollziebar die Ableitung von

$$f_6(x) = (2\,x)^{3\,x}$$

(7) Berechne von Hand nachvollziebar die Ableitung von

$$f_7(x) = x^3\, \ln(|x^3|)$$

(8) Berechne den Punkt auf der x-Achse, wo die Funktion $f_8(x) = 2\,sin(2\,x)$ $(x \in I = [0,\, \pi])$ den Tangentensteigungswinkel $\alpha = 30^o$ hat.

%

(9) Es soll die Gleichung $e^{-x} = 2\,x^3 - 4$ numerisch gelöst werden. Um dies auszuführen sucht man die Nullstellen der Funktion $f_9(x) = e^{-x} - 2\,x^3 + 4$ mit Hilfe des Newton-Verfahrens. Führe das Verfahren mit dem Startwert $x_0 = 1$ wie folgt durch: Berechne mit dem Taschenrechner $x_1,\ \ x_2,\ \ x_3,\ \ x_4$.

(10) Die Funktionskurve von

$$f_{10}(x) = \sqrt{4 - x^2},\ \ x \in [0,\, 2]$$

zeigt einen Halbkreis im 1. Quadranten. Ermittle diejenige Zahl x_m so exakt wie möglich, für die das Dreieck mit den Eckpunkten $(0;0)$, $(x_m;0)$, $(x_m; f_{10}(x_m))$ einen maximalen Flächeninhalt aufweist. Skizziere die Situation in sauberer Art.

(11) Die Funktion $f_{10}(x)$ wird jetzt manipuliert, sodass daraus die neue Funktion

$$f_{11}(x) = \sqrt{4 - (\frac{1}{2}\,x)^2}$$

entsteht. Ermittle den dazugehörigen Definitionsbereich $[0,\, x_{rechts}]$ sowie diejenige Zahl x_M so exakt wie möglich, für die das Dreieck mit den Eckpunkten $(0;0)$, $(x_M;0)$, $(x_M; f_{11}(x_M))$ einen maximalen Flächeninhalt aufweist. Skizziere die Situation in sauberer Art.

(12) Gegeben ist die Funktion

$$f_{12}(x) = x^2$$

sowie ein Punkt x_1 auf der positiven x–Achse. Berechne in x_1 die Ableitung von $f_{12}(x)$ und damit die Geradengleichung der Tangenten $t_{x_1}(x)$. Die Nullstelle von $t_{x_1}(x)$ auf der x–Achse sei x_0. Frage: In welchem Verhältnis teilt x_0 das Intervall $[0,\, x_1]$?

(13) Gegeben ist die Funktion

$$f_{13}(x) = \sin(x)$$

über dem Intervall $[0,\, \pi]$. Berechne den Flächeninhalt des Rechtecks mit dem grössten Flächeninhalt, welches eine Kante mit der x–Achse gemeinsam hat und die Sinuskurve von unten berührt. (Numerisch, Genauigkeit: 4 Stellen exakt hinter dem Dezimalkomma resp. dem Dezimalpunkt.)

(14)

$$f_{14}(x) = (x-1)(x-2)(x+3)(x+5)$$

Lese die Nullstellen ab und berechne allfällige Wendepunkte. Skizziere damit den Graphen.

(15) Gegeben ist ein Feuerwehrturm zum Aufhängen von nassen Schläuchen, welcher in der Mitte eines grossen, ebenen Platzes steht und auch noch als Reklamesäule dient. Der Turm ist $12\,m$ hoch, hat einen Innengrundriss von $3 \times 3\,m^2$ und vorne eine rechteckige Eingangstür der Höhe $2.3\,m$. Die Türbreite entspricht der Turmbreite. Ein Ingenieur wird damit beauftragt, exakt auszurechnen wie lang eine Leiter aus einem Stück maximal sein darf, damit man sie noch durch die Tür in den Turm einführen und darin senkrecht aufstellen kann. Löse diese Aufgabe ebenfalls! (Skizze!)

WIR1 08

4.14 Test ◇ B1–08/09–03 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden.
♢ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

(1) Löse die folgende Matrixgleichung ($X = ?$) unter der Annahme, dass alle Matrizen regulär sind:

$$M \cdot (E - X) \cdot M^{-1} + M - A \cdot M = A \cdot M^T - 3\,M$$

(2) Gegeben ist eine Gerade $g: \ \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Berechne den Abstand des Punktes $Q(3; 10; 14)$ von g.

(3) Gegeben ist eine Ebene $\Phi: \ \vec{v}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne den Abstand des Punktes $Q(3; 10; 14)$ von Φ.

(b) Berechne den Lotfusspunkt von Q auf Φ.

(4) Gegeben sind die vier Punkte $P_1(1; 1; 0)$, $P_2(-1; 2; 2)$, $P_3(-3; -2; 3)$, $P_4(1; 1; 4)$. Dadurch ist ein Streckenzug mit den Seitenvektoren $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_2P_3}$, $\overrightarrow{P_3P_4}$ definiert. In P_4 wird nun der Pfeil $\frac{1}{2}\ \overrightarrow{P_1P_2}$ angefügt. Dadurch erhält man den Punkt P_5. In P_5 setzt man dann den Pfeil $\frac{1}{2}\ \overrightarrow{P_2P_3}$ an, wodurch P_6 erhalten wird. In P_6 setzt man dann den Pfeil $\frac{1}{2}\ \overrightarrow{P_3P_4}$ an, wodurch P_7 erhalten wird. Genauso verfahren wir nun von P_7 weg mit den Pfeilen $(\frac{1}{2})^2\ \overrightarrow{P_1P_2}$, $(\frac{1}{2})^2\ \overrightarrow{P_2P_3}$, $(\frac{1}{2})^2\ \overrightarrow{P_3P_4}$, womit wir P_8, P_9, P_{10} erhalten. Von P_{10} geht es nun in der selben Art mit $(\frac{1}{2})^3\ \overrightarrow{P_1P_2}$, $(\frac{1}{2})^3\ \overrightarrow{P_2P_3}$, $(\frac{1}{2})^3\ \overrightarrow{P_3P_4}$ weiter und so fort. Zu welchem Punkt gelangt man, wenn man schliesslich bis und mit den Pfeilen $(\frac{1}{2})^{99}\ \overrightarrow{P_1P_2}$, $(\frac{1}{2})^{99}\ \overrightarrow{P_2P_3}$, $(\frac{1}{2})^{99}\ \overrightarrow{P_3P_4}$ ansetzt?

(5) Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - y + z &= 1 \\ x - y - z &= 0 \end{aligned}$$

Demonstriere damit den Gauss–Jordan–Algorithmus und finde die Lösung!

%

(6) Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Berechne $(B^{-1} \cdot A^{-1})^T$.

(7) Gegeben ist die Matrix $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Bilde den Punkt $P_0(4;7)$ mittles M ab (Vektor $\overrightarrow{OP_0}$ abbilden). Drehe dann den Bildpunkt P_1 um $+32^o$ um den Ursprung. Bilde danach den durch die Drehung erhaltenen Bildpunkt P_2 nochmals mittels M ab. Berechne damit den Bildpunkt P_3 der gesamten Abbildung.

(8) Gegeben ist ein Dreieck durch die Punkte $P_1(1;1;0)$, $P_2(1;0;2)$, $P_3(0;2;3)$. Damit ist eine Ebene Φ definiert. Vom Ursprung aus zieht man einen Strahl g durch den Schwerpunkt S des Dreiecks. Gesucht ist ein Punkt P_4 auf g, welcher nicht auf der selben Seite von Φ wie der Ursprung liegt, sodass die durch $\triangle P_1P_2P_4$, $\triangle P_2P_3P_4$ und $\triangle P_3P_1P_4$ definierte Oberfläche einen zweimal so grossen Inhalt hat wie das Dreieck $\triangle P_1P_2P_3$.

(9) Gegeben sind die Geraden

$$g_1 : \ \vec{v}_1(t_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } g_2 : \ \vec{v}_2(t_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Stelle fest, ob die beiden Geraden windschief sind.

(b) Berechne allenfalls ihren Abstand.

(10) Gegeben ist eine Kugel mit dem Radius $r = 2$ um den Ursprung. An die Kugel wird eine Tangentialebene gelegt, welche die Achsen des Koordinatensystems in den Punkten $x_0 = a$, $y_0 = a$, $z_0 = a$ mit $a > 0$ schneidet.

(a) Berechne a.

(b) Berechne die Koordinaten des Tangentialpunktes T auf der Kugel.

(c) Berechne die Winkel zwischen der Geraden $\overline{OT}$ und den Koordinatenachsen.

Viel Glück!

WIR1 09

4.15 Test ◇ B1–08/09–04 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden.
◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

(1) Integriere von Hand:

(a) Zeige die einzelnen Schritte bei der Integration von Hand: $\int x \cdot e^{-x}\, dx = \,?$

(b) Zeige die einzelnen Schritte bei der Integration von Hand: $\int\limits_1^2 \frac{x+1}{(x+2)\,x}\, dx$

(2) Für die Funktion $f(x) = 1 + \sin(x)\, e^{-x^2}$ soll eine Näherung in Form eines Taylorpolynoms $p(x)$ von Grade 2 in einer Umgebung mit Zentrum $x = 0$ gefunden werden.

(a) Berechne diese Näherung mit Hilfe der Potenzreihen von $\sin(x)$ und e^z und setze $z = -x^2$.

(b) Berechne mit dem gefundenen Polynom eine Näherung für $\int\limits_0^{0.2} p(x)\, dx$. Ist diese Näherung brauchbar?

(3) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ und der Punkt $x_0 = 2$ auf der x–Achse. Berechne den Konvergenzradius der Taylorreihe von $f(x)$ mit Zentrum $x = x_0$.

(4) Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = \sin(x) + \cos(y)$. Gesucht ist die Richtungsableitung und der Steigungswinkel in Grad im Punkt $(x_0,\, y_0) = (2, 1)$ in Richtung des Vektors $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(5) Versuche, die nachfolgende Differentialgleichung nach der Separationsmethode zu lösen: $y\,'(x) = \frac{x^2}{e^y}$ unter der Bedingung $y(1) = 1$.

(6) Eine liegende Säule wird nach der Form der Kurve $f(x) = \frac{1}{x},\; x \in [2, 6]$ modelliert. Die Form der Säule entsteht dann dadurch, dass man die Kurve um die x–Achse rotieren lässt.

(a) Berechne die Mantelkurvenlänge der Säule numerisch.

(b) Berechne den Inhalt der Mantelfläche (Rotationsfläche) numerisch.

(c) Berechne des Volumeninhalt der Säule.

Viel Glück!

WIR1 08/09

4.16 Test ◇ B1–07/08–01 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden.
♢ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Aufgaben geben gleich viele Punkte.**

(1) Verwandle in einen gemeinen Bruch: $32.81468468\overline{468}\ldots$

(2) Seien alle Parameter oder Variablen grösser als 1. Vereinfache so weit wie möglich:

$$\log_3(2^{\log_4(b)})\,\frac{\ln(9)}{\ln(b)} - \log_x\left(\frac{x}{x^{\ln(a)}}\cdot a^{\ln(x)}\right) + 1$$

Ersetze anschliessend noch b durch die eulersche Zahl e.

(3) Berechne die Lösungen der Gleichung:

$$(1-\log_{10}(\log_{10}(x)))\,(\log_4(\log_3(x))+1) = 0$$

(4) Löse das folgende Gleichungssystem:

$$\left|\begin{array}{lcl} 10 & = & y^{\log_{10}(\sqrt{y})} \\ \log_{10}(x+2)+\log_{10}(x-5) & = & \log_{10}(x-1)+\log_{10}(2-x) \end{array}\right|$$

(5) Löse die Gleichung:

$$0 = \ln^2(x) + \ln(x^5) + 6$$

(6) Löse die Gleichung:

$$3^{4\,(x-1)}\cdot 2^{3\,x}\cdot 4^{1-2\,x} = 5^{5-2\,x}$$

(7) Für welche u hat $18 + 16\,u + 16\,x\,u + 32\,x^2 = 0$ genau eine Lösung?

(8) Löse:

$$\frac{\sqrt{x^2+4}-x+2}{x-2} = 0$$

(9) Löse:

$$|s^2-2| = 12$$

(10) Löse nach Gauss:

$$2\,a_1 + 5\,a_2 - 3\,a_3 = 0,\;\; 4\,a_1 - 2\,a_2 = 6,\;\; 4\,a_1 - 4\,a_2 + a_3 = 7$$

(11) Schreibe die nachfolgende Menge so kurz wie möglich:

$$M = \{x\in\mathbb{N} \mid (\text{Es gibt zwei Zahlen } y,z\in\mathbb{N}:\; x^2+y^2=z^2) \text{ und } (x,y,z\in\mathbb{P})\}$$

$$(\; M = \{x\in\mathbb{N} \mid (\exists_{y,z\in\mathbb{N}}:\; x^2+y^2=z^2)\;\wedge\;(x,y,z\in\mathbb{P})\}\;)$$

Hinweis: Pythagoräische Zahlentripel haben alle die Form:
$x = n^2 - m^2,\;\; y = 2\,n\,m,\;\; z = n^2+m^2,\;\; n,m\in\mathbb{N}.$ WIR1 07/08

4.17 Test ◇ B1–07/08–02 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden.
◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

(1) (a) Berechne von Hand:

$$\frac{d\left(5x^5+4x^4+3\,x^3+2x^2+x+1+c+x^{-1}\right)}{dx}=\,? \qquad \text{(c=}const.\text{)}$$

(b) $$\frac{d\left(\ln(x\,sgn(x))+e^x+\tan(x)\right)}{dx}=\,? \qquad \text{(Betrachte } sgn(x) \text{ als Konstante!)}$$

(c) $$\frac{d\left(\ln(\pi\,x)\,x^2+\sin(x)\right)}{dx}=\,?$$

(d) $$\frac{d\left(\frac{e^x}{x}-\cos(x)\ln(x)\right)}{dx}=\,?$$

(e) $$\frac{d\left(\sin\left(3\,e^x\right)+2\,e^{-x^3}\right)}{dx}=\,?$$

(2)

$$f(x)=x^3-3x^2-x+3$$

(a) Suche die Nullstellen von $f(x)$.
(b) Schreibe $f(x)$ als Produkt mit Hilfe der Nullstellen (Linearfaktoren).
(c) Berechne den Steigungswinkel der Tangente für $x=0$ und für $x=2$ in Grad.
(d) Suche Minima und Maxima von $f(x)$.
(e) Suche die Monotoniebereiche von $f(x)$.
(f) Suche die Wendepunkt(e) von $f(x)$.
(g) Skizziere den Graphen und trage die gefundenen Punkte ein.

(3)

$$f(x)=x^4-1$$

(a) Linearisiere $f(x)$ bei $x_0=1$. D.h. $f(x)\approx f(x_0)+f\,'(x_0)(x-x_0)$.
(b) Berechne den Fehler zwischen dem richtigen Funktionswert und der Linearisierung bei $x_1=1.1$. Wie gross ist der Fehler in Prozent vom richtigen Funktionswert?

%

(4)

$$f(x) = 0.1\,x + cos(x)$$

(a) Approximiere die 1. positive Nullstelle dieser Funktion mit Hilfe der Newton-Methode. Starte mit $x_1 = 1.5$.

(b) Wieviele Iterationsschritte sind notwendig, bis sich im nächsten Schritt die 5. Stelle hinter dem Komma nicht mehr ändert?

Viel Glück!

WIR1 07/08

4.18 Test ◇ B1–07/08–03 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden.
◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

(1) Integriere von Hand:

(a) $\int (x^3 - 2\,x^2) \cdot \ln(x)\, dx = \,?$

(b) $\int\limits_0^1 \dfrac{a}{(x+1)(x+3)}\, dx = 1 \;\Rightarrow\; a = \,?$

(c) Bestimme c so, dass das Integral 0 ist: $\int\limits_{-2}^{3} (x+2)\cdot x \cdot (x-3) + c\,x\, dx.$

(d) $\int\limits_1^3 (\cos(x)\, e^{\sin(x)} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}})\, dx = \,?$

(2) Berechne mit Hilfe der Potenzreihe von e^x eine Näherung für $\int\limits_0^x (e^{(t^2)} - 1)\, dt$ ($x_0 = 0,\;\; n = 10$).

(3) Berechne den Konvergenzradius von

$$f(x) = \cos(x) + 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^3 x + \left(\frac{8}{9}\right)^6 x^2 - \left(\frac{8}{9}\right)^9 x^3 + \left(\frac{8}{9}\right)^{12} x^4 - \ldots \pm \ldots$$

(4) Beantworte die nachfolgenden Fragen:

(a) Was ist die Richtungsableitung einer Funktion $f(x,y)$ in einem Punkt $P_0(x_0,y_0)$ in Richtung $P_1(x_1,y_1)$?

(b) Was ist der Gradient einer Funktion $f(x,y)$ in einem Punkt $P_0(x_0,y_0)$?

(c) Sei $f(x,y) = 2 + x\,(x-2)\,(x+4) - (y^2-1)$. Berechne die Richtungsableitung von $f(x,y)$ für $P_0(1,2)$ in Richtung $Q_0(4,-4)$.

(d) Suche allfällige Extrema von $f(x,y)$ und begründe plausibel, ob es sich um ein Minimum oder um ein Maximum handelt.

(5) (a) Löse die Differentialgleichung $y''(x) + y(x) = 0$ unter den Bedingungen $y(0) = 2$ und $y'(0) = 1$.
Hinweis: Lösungen von Gleichungen 2. Ordnung der Art $y''(x) \pm y(x) = 0$ setzen sich zusammen aus Funktionen der Art $\sin(a\,x)$, $\cos(b\,x)$ und $e^{c\,x}$. Probiere zuerst mit möglichst einfachen Koeffizienten a, b, c.

(b) Löse die Differentialgleichung 1. Ordnung $y'(x)\cdot(x+3) = \dfrac{x}{(y(x))^3}$.
Verwende die Separationsmethode. Benenne die Integrationskonstante mit C.

%

(6) Einfache Anwendungen (nachdem die Aufgaben von der 1. Seite bearbeitet worden sind): (Die Einheiten dürfen hier weggelassen werden.)

(a) Berechne von der Fläche $f(x) = 8 - x^3$ zwischen $x = 0$ und $x = 2$ das Flächenträgheitsmoment I_y durch Integration.

(b) Berechne von der Fläche $f(x) = 8 - x^3$ zwischen $x = 0$ und $x = 2$ das Flächenträgheitsmoment I_x durch Integration.

(c) Berechne alsdann auch das mit I_y und I_x verbundene polare Trägheitsmoment.

(d) Linkfrage: Erkläre kurz und prägnant die begriffliche Bedeutung des aus der Physik stammenden Begriffs „Trägheitsmoment“ und dessen Sinn auch in der Physik.

(7) Einfache Anwendungen (nachdem die Aufgaben von der 1. Seite bearbeitet worden sind):

Die Funktion $f(x) = e^{-x}$ wird zwischen $x = 0$ und $x = 5$ um die x–Achse rotiert. Dadurch entsteht eine Mantelfläche eines horizontal umgelegten Kühlturm eines thermischen Kraftwerks. (Die Einheiten sind nicht genannt. Sie dürfen hier weggelassen werden.)

(a) Berechne die Mantelkurvenlänge numerisch.

(b) Berechne den Inhalt der Mantelfläche (Rotationsfläche) numerisch.

(c) Berechne den Volumeninhalt des Kühlturms.

(d) Kann $f(x)$ als vereinfacht gerechnete Biegelinie eines mit Einzelkräften belasteten Balkens in Frage kommen? (Kurze Begründung.)

(8) Einfache Anwendungen (nachdem die Aufgaben von der 1. Seite bearbeitet worden sind):

Eine anfangs ruhende kugelförmige Masse der Grösse $1\,kg$ wird $t_1 = 1$ Sekunde lang mit der gemessenen Beschleunigung $a(t) = \cos(t)\,m/s^2$ horizontal beschleunigt. (Die Einheiten dürfen hier jetzt weggelassen werden.)

(a) Berechne den Impuls p nach der Zeit t_1.

(b) Linkfrage: Erkläre soweit möglich den in der Physik wichtigen Begriff „Impuls“ sowie den Zusammenhang zum Begriff der Kraft.

(c) Berechne die in dieser Zeit zurückgelegte Weglänge $s(t_1)$.

(d) Linkfrage: Berechne für diese Bewegung die umgesetzte potentielle Energie W von der Wegmarke $s_0 = 0$ bei $t = 0$ bis zu s_1 bei t_1.

(9) Zusatz (wenn alles sonst gelöst):

$$y' = \frac{y - 2\,x + 1}{y - 1} \rightsquigarrow \quad \text{Richtungsfeld?}$$

Viel Glück!

WIR1 07/08

4.19 Test ◇ B1 05/06 1 ◇

Wichtig: Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen. Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen können korrigiert werden. Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen. Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte. („Exakt" heisst „ohne Dezimalbrüche" im Resultat.)

(1) (a) $I = ([-6,6) \cap (-4,7]) \cup \overline{(-\infty,0)} = \,?$

(b) $f_1(x) = \sqrt{x},\ \ M = D_{f_1} \setminus I = \,?$ (Mengendifferenz)

(c) Skizziere $g(x) = \sqrt{5-x}$ auf M.

(2) Vereinfache von Hand exakt und so weit wie möglich

$$\left(\sqrt[\sqrt{3}]{\frac{b^{\sqrt{8}}}{b^{\sqrt{2}}}}\right)^{\sqrt{2}} + \ln(\ln(e^b)) + \ln(\ln(e^{2\,b})) = \,?$$

(3) (a) $f_2(x) = 25\,x^2 + 4\,b\,x + 16 = 0$ soll genau eine Lösung haben. $\Rightarrow\ b = \,?$

(b) $\sqrt{x^4+9} = x^2+1$. Berechne x von Hand und setze diese x sowie b in $y = f_2(x)$ ein. $y =$ (jeweils) ?

(4)

$$\begin{array}{lcl} 2\,x_1 + x_2 & = & 7 \\ 3\,x_2 + x_3 & = & 28 \\ x_3 - x_4 & = & 21 \\ x_4 + |x_1| & = & 0 \end{array}$$

Berechne mögliche Lösungen von Hand exakt.

(5) Gegeben ist der Kegelschnitt $\dfrac{(x-u)^2}{4} + \dfrac{(y-v)^2}{9} = 1$ mit dem Mittelpunkt $M(1;1)$. Von $P_0(1;0)$ aus wird eine Gerade mit der Steigung 1 gezogen. Berechne allfällige Schnittpunkte der Geraden mit dem Kegelschnitt.

(6) Skizziere die Graphen und beurteile, ob die Funktion gerade, ungerade oder periodisch ist.

(a) $f(x) = \dfrac{3\,x+2}{x+1},\ \ D_f \subseteq [-4,4]$

(b) $f(x) = -e^{-x} + 4 + \cos(x),\ \ D_f = [-5,15]$

(c) $f(x) = x \cdot \sqrt{x^2+16},\ \ D_f \subseteq [-10,10]$

(7)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\,n^2 + 3\,n + 1}{5\,n^2} = \,? \text{ (exakt)}$$

4.20 Test ◇ B1 06/07 1 ◇

Wichtig: Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen. Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen können korrigiert werden. Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen. Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte. („Exakt“ heisst „ohne Dezimalbrüche“ im Resultat.)

(1) Berechne die 1. Ableitung von Hand. (Schritte für die Herleitung notieren!): 6P

(a) $f_1(t) = a_5\, t^5 + 3\, t^4 + 2\, x^2 + a_2\, t^2 - 8\, t - 11$ (kein Schreibfehler!)

(b) $f_2(x) = \tan(x) - e^x + e^{-x} - \dfrac{1}{2\, x}$

(c) $f_3(x) = \cos(x) - ln(\pi\, x)\, \sqrt{x}$

(d) $f_4(x) = \sin(x)\, ln(x) - \dfrac{e^x}{x}$

(e) $f_5(x) = \sin(3\, e^x) + 2\, e^{-x^3}$

(f) $f_6(x) = \arcsin(-\sin(x)) \rightsquigarrow\ f'(x) = ?$ (Setze dann $x = 1$ und rechne auf drei Stellen hinter dem Komma genau.)

(2) Berechne die Nullstellen, Extremalstellen und Wendepunkte der Funktion 6P

$$f(x) = (x - 2)\, x\, (x + 1)\, (x + 2) - 2$$

auf zwei Stellen hinter dem Komma genau und trage die Koordinaten in eine Funktionsskizze ein.

(3) Gegeben sei die Funktion $y = f(x) = x^5$. Im Punkte $P_0(x_0; y_0)$, $y_0 = f(x_0)$ auf dem Graphen dieser Funktion wird die Tangente $t(x)$ gezeichnet, welche die x-Achse im Punkte $P_1(x_1; 0)$ und die y–Achse im Punkte $P_2(0, y_2)$ schneidet. Weiter schneidet die Normale $n(x)$ zu $t(x)$ durch P_0 die x-Achse im Punkte $P_3(x_3; 0)$ und die y–Achse im Punkte $P_4(0, y_4)$. Weiter sei $X_0 = X(x_0; 0)$

(a) Berechne den Inhalt des Dreiecks $P_1X_0P_0$ für $x_0 = 2$.

(b) Berechne den Inhalt des Dreiecks OP_2P_1 für $x_0 = 2$.

(c) Berechne den Inhalt des Dreiecks OP_4P_3 für $x_0 = 2$. 6P

(4) Berechne aus drei Stellen hinter dem Komma genau die Extremalstellen und Wendepunkte der Funktion

$$f(x) = x \cdot \sin(x), \quad x \in [0, 3\, Pi]$$

und trage die Resultate in eine Funktionsskizze ein. 4P

(5) Berechne exakt und von Hand (Schritte zeigen):

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4\, x + tan(2\, x)}{\sin(x)}$

(b) $\lim\limits_{x \to 1} \alpha\, \dfrac{x^3 + x^2 - 2 + ln(x - 1)}{\pi\, x^3 - \pi}$ 4P

WIR1 06/07

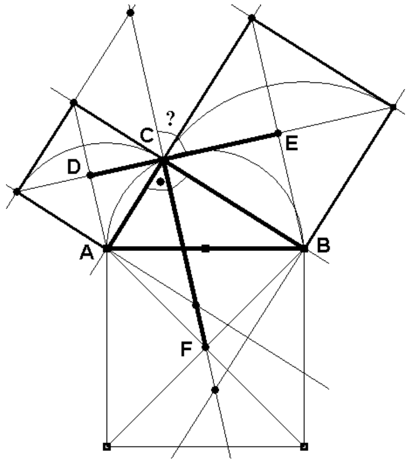
4.21 Test ◇ B1 05/06 1 S2◇

Hinweis: *Eine Aufgabe kann nur dann bewertet werden, wenn der Lösungsgang ersichtlich ist. Der Lösungsgang muss auf dem Blatt festgehalten sein. Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet. Zu einer Aufgabe gehört immer auch eine Skizze!*
Vektoralgebra– und Geometrie, Determinanten

(1)

(a) Berechne allgemein den Winkel zwischen $\overline{DE}$ und $\overline{CF}$.

(b) Berechne allgemein den Quotienten $q = \frac{\overline{DE}}{\overline{CF}}$.



(2) (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\leadsto$ Berechne $\det(A)$ nach Sarrus.

(b) A wird so erweitert, dass die folgende Matrix entsteht:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & x & ln(123851) & e^{9876} \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & y & \tan(200) & c\,\pi \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$ $\leadsto$ Berechne $\det(B)$ von Hand exakt.

(c) Eine 10×10–Matrix C hat folgende Zeilen:

1. Zeile: $\vec{v}^T + 0 \cdot \vec{a}^T$
2. Zeile: $\vec{v}^T + 1 \cdot \vec{a}^T$
3. Zeile: $\vec{v}^T + 2 \cdot \vec{a}^T$
4. Zeile: $\vec{v}^T + 3 \cdot \vec{a}^T$

. . . u.s.w.

Kann man aus diesen Angaben schon den Wert der von $\det(C)$ ermitteln? Berechne diesen Wert, falls das möglich ist!

(3) Gegeben sind die Punkte $A(12; 10; 0)$, $B(9; 7; 12)$, $C(-2; 2; 8)$.

(a) Zeige, dass das Dreieck ABC gleichschenklig–rechtwinklig ist.

(b) Suche einen Punkt D so, dass ein Quadrat $ABCD$ entsteht.

(c) Suche einen Punkt S so, dass die Figur $ABCDS$ eine quadratische Pyramide ist mit dem Volumen $V = 1944$ und der Spitze S (2 Lösungen).

(4) Gegeben ist eine Kugel $K: \; x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 8 = 0$ und eine Ebene Φ durch die Koordinaten $A(-1; 9; 8)$, $B(1; 10; 10)$, $C(-5; 5; 8)$.
M sei dabei der Kugelmittelpunkt. O ist der Ursprung des Koordinatensystems.

(a) Berechne den Punkt der Kugel K, welcher von der Ebene Φ den kürzesten Abstand d hat.

(b) Berechne diesen Abstand d.

(c) Berechne die Punkte C und D auf der Geraden $g(A, B)$ durch A und B, die in jenen Tangentialebenen an K liegen, welche senkrecht auf g stehen.

(d) Berechne M.

(e) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks AMO.

Viel Glück!

4.22 Test ◇ B1 05/06 2 ◇

Wichtig: Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen. Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen können korrigiert werden. Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen. Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte. („Exakt“ heisst „ohne Dezimalbrüche“ im Resultat.)

(1) Berechne die Ableitung (Schritte notieren!):

(a) $f_1(x) = a_4\,x^4 + 2\,x^3 + a_2\,x^2 + 5\,x - 6$

(b) $f_2(x) = \cos(x) - e^x + \dfrac{1}{x}$

(c) $f_3(x) = \sin(x)\,\sqrt{x} - ln(\pi\,x)$

(d) $f_4(x) = \sin(x)\,e^{-x} - \dfrac{x}{ln(x)}$

(e) $f_5(x) = \cos(2 + e^x) - e^{-x^2}$

(f) $f_6(x) = x^x$, *Hinweis:* $x^x = e^{ln(x)\cdot x}$

(2) $h(x) = 3\,x^2 - 4\,\alpha\,x + 1$

(a) Skizziere die Funktion für $\alpha = 2$.

(b) Berechne α so, dass der Graph von h die x–Achse unter einem Winkel von 45^o schneidet.

(c) Berechne α so, dass der Graph von $h_1(x) = x\,h(x)$ einen Wendepunkt bei $x = \dfrac{1}{2}$ hat.

(3) Berechne (Schritte zeigen):

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 1} (x-1)ln(x-1) + \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$

(4) Berechne die Extremalstellen und Wendepunkte der Funktion

$$f(x) = |(x^2 - 9)|\,|(x+3)|,\;\; x \in [-5, 4]$$

(5) Berechne die Extremalstellen und Wendepunkte der Funktion

$$f(x) = (\sinh(x-3) - 10)^2,\;\; x \in [-1, 7]$$

(6) Sei $f(x) = \arcsin(\cos(x))$. Skizziere die Graphen von:

(a) $f(x),\;\; x \in [-10, 10]$

(b) $f'(x),\;\; x \in [-10, 10]$

WIR1

4.23 Test ◇ B1 05/06 2 ◇

Wichtig: Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen. Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen können korrigiert werden. Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen. Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte. („Exakt" heisst „ohne Dezimalbrüche" im Resultat.) Wichtig: Immer eine Skizze.

(1) $f(x) = 5\,x^3 - 2\,x^2 + x - 6$

- (a) Bestimme den Steigungswinkel α in $x = 0$.
- (b) Bestimme einen Ort mit gleicher Steigung wie in $x = 0$ (falls möglich).
- (c) Bestimme den Wendepunkt.

(2) $f(x)$ wie oben. Bestimme eine Funktion g mit $f(x) = g'(x)$

(3) $f(x) = e^{-x^2}$. Suche Minima, Maxima und Wendepunkte (falls welche existieren).

(4) $f(x) = x^2$. In $P_0(x_0, y_0 = x_0^2)$ wird an die Kurve die Tangente $t(x)$ und die Normale $n(x)$ gezogen. t schneidet die x-Achse in P_1 und die y-Achse in P_2, n schneidet die y-Achse in P_3. Dazu haben wir die Punkte $X_0(x_0, 0)$ und $O(0, 0)$. Berechne die Flächeninhalte der Dreiecke $P_0P_1X_0$, P_2P_1O und $P_2P_0P_3$.

(5) Berechne die Ableitungen:

- (a) $f(x) = \cos(x) \cdot \sin(2\,x)$
- (b) $f(x) = \cos(x) - 2\,\sin(x)$
- (c) $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{\sin(x)}$
- (d) $f(x) = \sin(\cos(\tan(x)))$
- (e) $f(x) = (x^4 + 1)(x^2 - 1) + 1$

(6) Ein Tunnelprofil soll durch die Punkte $(0, 10)$ und $(5, 0)$ gehen und zudem symmetrisch zur y–Achse sein. Bei $x = 3$ hat die Profilkurve den Steigungswinkel 45^o gegen die negative x–Achse, bei $x = 5$ entsprechend 80^o. Frage: Kann man diese Kurve durch ein Polynom vom Grad 6 beschreiben?

(7) $f(x) = x \cdot \sin(\dfrac{1}{x})$. Fragen: Wo ist die Funktionskurve stetig? Ist f beschränkt? Ist f gerade?

(8)
- (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^n}{ln(n) + e3\,n} + \dfrac{n^2}{e^n} = ?$
- (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(e^{(x-1)} - 1)\,\sin(x)}{x - 1} = ?$

WIR1

4.24 Test ◇ B1 06/07 2 ◇

Pro Teilaufgabe je 3 Punkte

---

(1) Berechne ohne Rechner:

(a) $\int\limits_0^{2\pi} (2 + \cos(x) - \sin(x))\, dx = ?$ (Skizze: Was wird berechnet?)

(b) $\int\limits_2^{-2} \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 3\,x^2 + 2\,x - 4\, dx = ?$

(c) $g(t) := \int\limits_0^1 (t^2 + 2\,t) \cdot e^x\, dx$ $\rightsquigarrow$ $t_0 =$ Minimumstelle von $g(t)$, $t_0 = ?$

(d) $\int\limits_0^{\pi} a\, \cos(2\,x\,\pi - \frac{\pi}{2})\, dx = ?$

(e) $\int\limits_1^{e} x^3 \ln(u \cdot x)\, dx = ?$

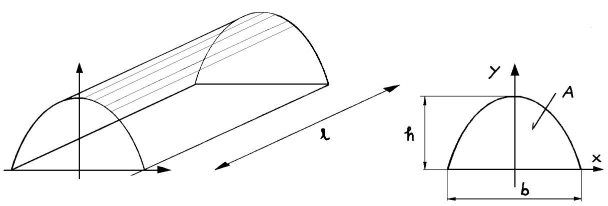
(f) $\int\limits_2^{4} \frac{3\,x}{x\,(x-1)\,(x+1)}\, dx = ?$

(g) $\int\limits_0^{1} x \cdot e^{-x^2}\, dx = ?$

(2) $f(x) = 2\,e^{-(x-1)^2}$. Berechne das Integral $\int\limits_0^{1.5} f(x)\, dx$ numerisch (Rechner erlaubt):

(a) Mit der Rechtecksmethode, 8 Intervalle, Funktionswert immer rechts nehmen.
(b) Mit der Trapezmethode, 8 Intervalle.
(c) Wie gross ist die Differenz der beiden Resultate?

(3)



Die Funktion $f(x) = a\,x^4 + h$ mit $f(0) = h$ und $f(-\frac{b}{2}) = f(\frac{b}{2}) = 0$ beschreibt den Querschnitt eines Tunnels nach nebenstehender Skizze.

Es ist $h = 3.5\,m$, $b = 6.5\,m$ und $l = 20\,km$.

(a) Berechne $f(x)$. Erstelle eine genaue Skizze des Tunnelprofils.
(b) Berechne das auszubrechende Volumen beim Tunnelbau.
(c) Wie ist bei gleichem a die Höhe h zu ändern, damit sich das auszubrechende Volumen verdoppelt? (Achtung: Mit h ändert auch b!)

Fortsetzung: Rückseite!

(4) Wir kennen die Ableitung $f'(x) = \dfrac{x^3}{4} - 3\,x$ einer unbekannten Funktion $f(x)$, von der wir jedoch wissen, dass $f(0) = 5$ ist.

(a) Berechne $f(x)$. Skizziere $f(x)$ über $I = [-5, 5]$.

(b) Berechne die Extremwertstellen von $f(x)$, an denen die Tangente horizontal ist.

(c) Berechne die Nullstellen von $f(x)$.

(d) Berechne allfällige Wendepunktstellen von $f(x)$.

(e) Berechne $\int\limits_{-2}^{2} f(x)\,dx$.

(5) Gegeben ist $2(x-y)^2 + 3xy^2 - 5(x+2y)$.

(a) Berechne $grad(f(x))$.

(b) Berechne einigermassen genau Stellen, wo $grad(f(x)) = 0$ gilt.

(c) In der Grundebene ist die Projektion des Weges $g(x, y) = 2\,x - 1 - y = 0$ gegeben. Berechne mit der Lagrange–Methode diejenigen Punkte, wo er Weg ein Maximum oder ein Minimum erreicht.

Viel Glück!

WIR

4.25 Test ◇ B1 06/07 2 S2◇

Hinweis: *Eine Aufgabe kann nur dann bewertet werden, wenn der Lösungsgang ersichtlich ist. Der Lösungsgang muss auf dem Blatt festgehalten sein. Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet. (Zu einer Aufgabe gehört wenn möglich eine Skizze!)*

(1) (a) Berechne für die Funktion $f(x) = \sin(x)$ im Punkte $(x, y) = (\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$ die Krümmung und den Krümmungsradius.

(b) Skizziere dem Graphen und zeichne den Krümmungskreis und seinen Mittelpunkt in der Skizze ein.

(c) Wie lässt sich die Lage des Mittelpunktes beschreiben?

(2) Ein Balken mit quadratischem Querschnitt und der Seitenlänge $s = 5\ cm$ ist an einer senkrechten Mauer an der Stirnseite in horizontaler Lage befestigt nach der Art eines Sprungbretts. Die aus der Mauer nach rechts herausragende Länge beträgt $2\ m$. Weiter ist $E = 210000 N/mm^2$. Der Balken ist weiter gleichmässig belastet mit einer totalen Masse von $700\ kg$. Der Ursprung des Koordinatensystems legen wir auf die Biegelinie am Ausdrittsort aus der Wand.

(a) Berechne die Funktionsgleichung der Biegelinie. (Die Einheiten sind hier anzugeben.)

(b) Berechne die mit Hilfe der gefundenen Gleichung die Durchbiegung am Balkenende.

(3) Von einer linearen Abbildung g kennt man folgende Angaben: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$g(\vec{v}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ g(\vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ g(\vec{v}_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnd die Abbildungsmatrix.

(b) Bilde den Punkt $P(1; 1; 1)$ ab.

(c) Berechne den Inhalt des Bildes des Einheitswürfels.

(4) Die Punkte des Raumes werden normal auf die Ebene OAB projiziert. Anschliessend wird der ganze Raum und damit auch die Ebene um die z–Achse um 30^o gedreht. In der Grundebene ist damit eine positive Drehung gegeben. Es gilt: $A = A(1; 1; 2)$, $B = B(-1; 1; 1)$.

(a) Berechne die Abbildungsmatrix für die gesamte Abbildung (Projektion, anschliessend Drehung).

(b) Berechne das Bild des Punktes $P(1; -1; -1)$

(c) Berechne die Eigenwerte der Matrix.

(5) Die Spannung $\vec{s}$ im Punkte P eines belasteten Körpers bezüglich der Ebene F mit dem Normaleneinheitsvektor $\vec{n} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist durch $\vec{s} = T\,\vec{n}$ gegeben. Dabei ist $\vec{s} = \begin{pmatrix} 4000 \\ 900 \\ -1200 \end{pmatrix}$.

Weiter ist $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ die nicht normierte Hauptspannungsrichtung zu $\sigma_1 = 3000$.

$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ ist die nicht normierte Hauptspannungsrichtung zu $\sigma_2 = 0$.

(a) Berechne mit diesen Angaben, falls möglichm die Matrix T.

(b) Berechne die dritte fehlende Hauptspannungsrichtung und die Hauptspannung σ_3.

(c) Was würde passieren, wenn gelten würde: $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$?

Viel Glück!

4.26 Test ◇ B1 05/06 3 ◇

---

(1) Gegeben sind die beiden Funktionen $f(x) = -\dfrac{x^2}{2}+x+6$ und $g(x) = 2\,x^2+x-6$. Skizziere die Graphen und berechne den Inhalt der von den Graphen eingeschlossenen Fläche zwischen den Schnittpunkten.

(2) Gegeben ist $f(x) = 2 - \sin(\pi x)$. Skizziere den Graphen und berechne den Inhalt der vom Graphen und der x–Achse eingeschlossene Fläche über dem Intervall $[0, 2]$ exakt.

(3) Zeige die Berechnung Stammfunktion von $f(x) = -\sinh(15 - 30\,x)$ von Hand. Integriere damit die Funktion über das Intervall $(-20.0, 20.0)$.

(4) Lässt sich von der Funktion $f(x) = \dfrac{\sqrt{-x}}{x^{2/15}}$ eine Stammfunktion bestimmen? Falls dies möglich ist: Kann man diese Stammfunktion skizzieren (Plot)? — Was ist dazu zu bemerken?

(5) Integriere die Funktionen $f(x) = \dfrac{7}{256}(x-1)^5-\dfrac{5}{128}(x-1)^4+\dfrac{1}{16}(x-1)^3-\dfrac{1}{8}(x-1)^2+\dfrac{x-1}{2}+1$ und $g(x) = \sqrt{x}$ über dem Intervall $[0, 1]$. Vergleiche die numerischen Resultate. Skizziere anschliessend die beiden Funktionen. Was sagen die Werte der Integrale auf Grund der Skizze aus?

(6) $f(x) = -\dfrac{1}{1 + \cos^2(x + \alpha)}$. Zeige die Berechnung der Stammfunktion von $f(x)$ von Hand. Berechne damit $\int\limits_{-\alpha}^{0} f(x)\,dx$.

(7) Zeige die Partialbruchzerlegung von $f(x) = \dfrac{-3x^3 + 3x^2 - x + 1}{x^2 - x}$. Berechne mit dem Resultat die Stammfunktion von $f(x)$.

(8) Integriere von Hand: $\int x^2 ln(x)\,dx$.

(9) Integriere von Hand: $\int \cos(x)\,\sin(\sin(x))\,dx$.

(10) Integriere von Hand: $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\sin(x)} \cos(x)\,dx$.

(11) Bei dieser Aufgabe genügen numerische Resultate. Der Weg zu den Resultaten muss aber dokumentiert sein!

(a) Berechne die Länge der Kurve $y = e^x$ zwischen $x = 0$ und $x = 1$.

(b) Die Kurve $y = e^x$ wird um die x–Achse rotiert. Berechne das Rotationsvolumen zwischen $x = 0$ und $x = 1$.

(c) Berechne das Rotationsvolumen von $y = e^x$ zwischen $-\infty$ und $x = 0$.

(d) Berechne die Mantelfläche des Rotationskörpers zwischen $x = 0$ und $x = 1$.

(e) Berechne die Mantelfläche des Rotationskörpers zwischen $-\infty$ und $x = 0$.

WIR1

4.27 Test ◇ B1 06/07 3 ◇

Wichtig: Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden.
Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.

(1) (a) Berechne die Potenzreihenentwicklungen bis zum n–ten Glied:
$f_1(x) = e^{-x^2}$, $x_0 = 0$, $n = 8$. Dabei soll die Potenzreihenentwicklungen von e^x verwendet werden. (Das Vorgehen muss gut sichtbar gezeigt werden.)

(b) Berechne approximativ mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung bis zum n–ten Glied:
$\int\limits_{-2}^{2} f_1(x)\,dx = \,?$

(c) Berechne die Potenzreihenentwicklungen bis zum n–ten Glied:
$f_2(x) = \cos(x^2) + e^{x^2}$, $x_0 = 0$, $n = 8$. Dabei sollen die Potenzreihenentwicklungen von e^x sowie von $\cos(x)$ verwendet werden. (Das Vorgehen muss sichtbar sein.)

(d) Berechne von Hand die Potenzreihenentwicklungen bis zum n–ten Glied:
$f_3(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $n = 6$.

(e) Berechne den Konvergenzradius der Potehnzreihen von $f_3(x)$, $x_0 = 1$

(f) Berechne den Konvergenzradius der Potehnzreihevon $f_4(x) = ln(x) - \sin(x)$, $x_0 = 1$.
(Es darf hier auch ein Plausibilitätsargument verwendet werden.)

(g) Berechne den Grenzwert von Hand: $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{8} + \frac{1}{27} - \frac{1}{16} + \frac{1}{81} \pm \ldots$

(2) Gegeben sind im Raum die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 mit
$$\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{OP_3} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{OP_4} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne den Volumeninhalt des Tetraeders (P_1, P_2, P_3, P_4).

(b) Berechne den Inhalt der Oberfläche des Tetraeders (P_1, P_2, P_3, P_4).

(c) Berechne den Schwerpunkt des Tetraeders (P_1, P_2, P_3, P_4).

(d) Berechne den Abstand des Punktes P_4 von der Ebene $\Phi(P_1, P_2, P_3)$.

(3) (a) Gegeben sind die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 wie in der letzten Aufgabe. Durch P_1, P_2 und P_3 wird eine Ebene Φ_1 definiert. Durch P_4 sowie die Richtungsvektoren
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eine Ebene Φ_2 gegeben. Entscheide mittels gut gegliederter Rechnung, ob Φ_1 und Φ_2 zusammenfallen, parallel sind oder sich schneiden.

(b) Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ werden in die Grundebene projiziert $\leadsto$ $\vec{a}\,'$, $\vec{b}\,'$. Allsdann wird $\vec{a}\,'$ in der Grundebene durch Rechtsdrehung senkrecht gestellt. $\vec{b}\,'$ hingegen wird nur um 12^o nach rechts gedreht. $\leadsto$ $\vec{a}\,''$, $\vec{b}\,''$.

i. Berechne $\vec{a}\,''$.

ii. Berechne den Winkel zwischen $\vec{a}\,''$ und $\vec{b}\,''$.

iii. Berechne $\vec{b}\,''$.

(4) Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Löse die Matrixgleichung $A^T \cdot X \cdot B = A$. (Herleitung der Formel zeigen!)

(b) Berechne die Inverse von A von Hand.

(5) (a) Berechne die Determinante der Matrix $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ von Hand.

(b) Entscheide, ob die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear abhängig sind.

(c) Berechne die Determinante der Matrix $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ von Hand.

(6) Zusatzaufgabe:

Finde die Lösung von $f\,''(t) + f(t) = 0,\;\; f(0) = 2,\;\; f\,'(0) = 0$.
(Vielleicht gelingt es hier, eine Lösung zu erraten und dann das Resultat zu verifizieren.)

4.28 Test ◇ B1 06/07 3 ◇

Wichtig: Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden.
Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.

(1) (a) Berechne die Potenzreihenentwicklungen bis zum n–ten Glied:
$f_1(x) = e^{x^3},\ \ x_0 = 0,\ \ n = 8$. Dabei soll die Potenzreihenentwicklungen von e^x verwendet werden. (Das Vorgehen muss gut sichtbar gezeigt werden.)

(b) Berechne approximativ mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung bis zum n–ten Glied:
$\int\limits_{-2}^{2} f_1(x)\,dx = \,?$

(c) Berechne die Potenzreihenentwicklungen bis zum n–ten Glied:
$f_2(x) = \sin(x^2) + e^{-x^3},\ \ x_0 = 0,\ \ n = 8$. Dabei sollen die Potenzreihenentwicklungen von e^x sowie von $\sin(x)$ verwendet werden. (Das Vorgehen muss sichtbar sein.)

(d) Berechne von Hand die Potenzreihenentwicklungen bis zum n–ten Glied:
$f_3(x) = \sqrt[3]{x},\ \ x_0 = 1,\ \ n = 6$.

(e) Berechne den Konvergenzradius der Potehnzreihen von $f_3(x),\ \ x_0 = 1$

(f) Berechne den Konvergenzradius der Potehnzreihevon $f_4(x) = ln(x) - \cos(x),\ \ x_0 = 1$.
(Es darf hier auch ein Plausibilitätsargument verwendet werden.)

(g) Berechne den Grenzwert von Hand: $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} \pm \ldots$

(2) Gegeben sind im Raum die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 mit

$$\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \ \overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},\ \ \overrightarrow{OP_3} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix},\ \ \overrightarrow{OP_4} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne den Volumeninhalt des Tetraeders (P_1, P_2, P_3, P_4).

(b) Berechne den Inhalt der Oberfläche des Tetraeders (P_1, P_2, P_3, P_4).

(c) Berechne den Schwerpunkt des Tetraeders (P_1, P_2, P_3, P_4).

(d) Berechne den Abstand des Punktes P_4 von der Ebene $\Phi(P_1, P_2, P_3)$.

(3) (a) Gegeben sind die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 wie in der letzten Aufgabe. Durch P_1, P_2 und P_3 wird eine Ebene Φ_1 definiert. Durch P_4 sowie die Richtungsvektoren
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eine Ebene Φ_2 gegeben. Entscheide mittels gut gegliederter Rechnung, ob Φ_1 und Φ_2 zusammenfallen, parallel sind oder sich schneiden.

(b) Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ 10 \\ -7 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ werden in die Grundebene projiziert $\leadsto$ $\vec{a}\,'$, $\vec{b}\,'$. Allsdann wird $\vec{a}\,'$ in der Grundebene durch Rechtsdrehung senkrecht gestellt. $\vec{b}\,'$ hingegen wird nur um 12^o nach rechts gedreht. $\leadsto$ $\vec{a}\,''$, $\vec{b}\,''$.

i. Berechne $\vec{a}\,''$.

ii. Berechne den Winkel zwischen $\vec{a}\,''$ und $\vec{b}\,''$.

iii. Berechne $\vec{b}\,''$.

(4) Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Löse die Matrixgleichung $A^T \cdot X \cdot B = A$. (Herleitung der Formel zeigen!)

(b) Berechne die Inverse von A von Hand.

(5) (a) Berechne die Determinante der Matrix $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ von Hand.

(b) Entscheide, ob die Vektoren $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear abhängig sind.

(c) Berechne die Determinante der Matrix $F = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ von Hand.

(6) Zusatzaufgabe:

Finde die Lösung von $f\,''(t) - f(t) = 0,\ \ f(0) = 2,\ \ f\,'(0) = 0$.
(Vielleicht gelingt es hier, eine Lösung zu erraten und dann das Resultat zu verifizieren.)

Es folgen Tests für die letzte 2. Diplomklasse. . .

4.29 Test ◇ B2 05/06 1a Üb ◇

Wichtig: Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen. Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen können korrigiert werden. Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen. Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte. („Exakt“ heisst „ohne Dezimalbrüche“ im Resultat.) Wichtig: Immer eine Skizze. Alle Teilaufgaben geben gleichviele Punkte.

(1) Die Resultierende von zwei Kräften $\vec{F}_1$ von 30 N mit Richtung $\vec{k}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{F}_2$ von 40 N mit Richtung $\vec{k}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ soll in drei Komponenten zerlegt werden, die parallell zu den Richtungen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ sind. Berechne die Länge der Zerlegungskomponente in Richtung $\vec{a}$.

(2) Die Kugel $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-3)^2 = 36$ schneidet die (x, y)–Ebene in den Punkten P_1, P_2 mit der x–Koordinate 3. P_1 definiert mit dem Kugelmittelpunkt eine Gerade. Berechne den Abstand dieser Gerade von P_2.

(3) Gegeben ist eine Ebene Φ durch die Punkte $P_1(0, 0, 3)$, $P_2(0, 6, 0)$, $P_3(5, 0, 0)$. Ein Punkt $Q_1(2, 4, 0)$ wird an Φ gespiegelt. Berechne

(a) den Lotfusspunkt $S \in \Phi$ beim Spiegeln,

(b) den Spiegelpunkt Q_2,

(c) das Volumen des Körpers $Q_1P_1P_2P_3Q_2$,

(d) den Flächeninhalt $P_1P_2P_3$,

(e) den Winkel $\angle(Q_1P_1Q_2)$.

(4) Gegeben ist die Fläche $f(x, y) = \sin(x + y)$ mit $x, y \in [0, \pi]$.

(a) Skizziere die Fläche in einer Falschperspektive.

(b) An der Stelle $(x, y) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ wird die Tangentialebene konstruiert. Berechne den Punkt, in dem diese Ebene die z–Achse durchstösst.

(c) Berechne den Flächeninhalt der Funktionsfläche f.

(d) Berechne die Länge des Randes der Fläche.

4.30 Test ◇ B2 05/06 1b ◇

Wichtig: Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen. Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen können korrigiert werden. Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen. Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte. („Exakt" heisst „ohne Dezimalbrüche" im Resultat.) Wichtig: Immer eine Skizze.

(1) Eine Kraft von 30 N in Richtung $\vec{F} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ soll in drei Komponenten zerlegt werden, die parallell zu den Richtungen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind. Berechne die Längen der Zerlegungskomponenten.

(2) In welchem Winkel schneiden sich die Ebenen
$\Phi:\ 2\,x + 3\,y - z = 2$ und $\Psi:\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$?

(3) Spiegle den Punkt $P(4; 4; 6)$ an der Ebene $\Phi:\ 2\,x + 3\,y - z = 2$. Das ergibt den Punkt P'. Welchen Abstand von der Geraden $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat der Punkt P'?

(4) Die Kugel $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 25$ schneidet die (x, y)–Ebene in einem Punkt P mit der x–Koordinate 2. g sei die Schnittgerade der Tangentialebene an die Kugel in P mit der (x, y)–Ebene. Berechne die Schnittpunkte von g mit den Achsen.

(5) $\kappa:\ \vec{v}(u) = \begin{pmatrix} u \\ u \\ -u^2 + 9 \end{pmatrix}$, $u \in [-3, 3]$, ist eine Kurve im $\mathbb{R}^3$.

(a) Skizziere die Kurve.

(b) Berechne für einen beliebigen Punkt die Richtung des Tangentenvektors $\vec{v}$.

(c) Berechne die Kurvenlänge.

(d) Berechne für jeden Punkt der Kurve ein „begleitendes Dreibein". Damit sind drei Vektoren gemeint: Der Tangentenvektor $\vec{a}$ (normiert auf 1), ein dazu senkrechter Vektor $\vec{b}$ (normiert auf 1), und ein Vektor $\vec{c}$, der zu den vorherigen beiden senkrecht ist (normiert auf 1). Achtung: Für $\vec{b}$ bestehen Freiheiten. Nütze sie aus!

(e) Bilde mit Hilfe der Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ einen Kreis $\vec{\kappa}(\varphi) = \vec{b}\,\sin(\varphi) + \vec{c}\,\cos(\varphi)$ für jeden Punkt der Kurve (abhängig von u). So entsteht ein Schlauch. Berechne die Oberfläche des Schlauchs. (Diese Aufgabe könnte etwas Arbeit geben! Zum Üben ist das aber gut!)

WIR1

4.31 Test ◇ B2 05/06 1 ◇

Wichtig: Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen. Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen können korrigiert werden. Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen. Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte. („Exakt" heisst „ohne Dezimalbrüche" im Resultat.) Wichtig: Immer eine Skizze. Alle Teilaufgaben geben gleichviele Punkte.

(1) Die Resultierende von zwei Kräften $\vec{F}_1$ von 30 N mit Richtung $\vec{k}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{F}_2$ von 40 N mit Richtung $\vec{k}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ soll in drei Komponenten zerlegt werden, die parallell zu den Richtungen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ sind. Berechne die Länge der Zerlegungskomponente in Richtung $\vec{a}$.

(2) Die Kugel $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-3)^2 = 36$ schneidet die (x, y)–Ebene in den Punkten P_1, P_2 mit der x–Koordinate 3. P_1 definiert mit dem Kugelmittelpunkt eine Gerade. Berechne den Abstand dieser Gerade von P_2.

(3) Gegeben ist eine Ebene Φ durch die Punkte $P_1(0, 0, 3)$, $P_2(0, 6, 0)$, $P_3(5, 0, 0)$. Ein Punkt $Q_1(2, 4, 0)$ wird an Φ gespiegelt. Berechne

(a) den Lotfusspunkt $S \in \Phi$ beim Spiegeln,

(b) den Spiegelpunkt Q_2,

(c) das Volumen des Körpers $Q_1P_1P_2P_3Q_2$,

(d) den Flächeninhalt $P_1P_2P_3$,

(e) den Winkel $\angle(Q_1P_1Q_2)$.

(4) Gegeben ist die Fläche $f(x, y) = \sin(x + y)$ mit $x, y \in [0, \pi]$.

(a) Skizziere die Fläche in einer Falschperspektive.

(b) An der Stelle $(x, y) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ wird die Tangentialebene konstruiert. Berechne den Punkt, in dem diese Ebene die z–Achse durchstösst.

(c) Berechne den Flächeninhalt der Funktionsfläche f.

(d) Berechne die Länge des Randes der Fläche.

WIR1

4.32 Test ◇ B2 05/06 2 ◇

Wichtig: Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen. Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen können korrigiert werden. Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen. Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 4 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Berechne $C = A^2$ und $M = 2(A + B) - 3(A^T - B^T)^T + 5(C - 2A)$.

(b) Berechne F so, dass $A \cdot F \cdot B = E$ gilt.

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 4 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

(a) Berechne $\det(A)$ von Hand.

(b) Berechne $\det(7 \cdot A)$.

(c) Berechne $\det(A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot \ldots \cdot A^{-1})$ (hundert Faktoren) $:= \det((A^{-1})^{100})$.

(3) Gegeben sind zwei Matrizen $A = (a_{ik})$ und $B = (b_{ik})$ mit $a_{ik} = i + k$ und $(b_{ik}) = i - k + 2$ (mit $i, k = 1, 2, 3$). Berechne $A \cdot B$ und $B \cdot A$ sowie $A \cdot B + B \cdot A$.

(4) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ x & 4 & x^2 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

Untersuche, für welche x die Inverse von A nicht existiert.

(5) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Löse $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit Hilfe des Gauss-Algorithmus. Zeige den Lösungshergang. Entscheide, ob es eine, keine oder unendlich viele Lösungen gibt und untersuche, was die Dimension der Lösungsmenge ist.

(6) $f(x, y) = x^2 + 2\,y^2 + 4\,x - 2\,y + 3$

(a) Berechne im Punkt $P(3; 2)$ die Richtung der grössten Höhenzunahme (Einheitsvektor angeben!).

(b) Berechne im Punkt $P(3; 2)$ die Tangentensteigung in Richtung $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(c) Berechne die Koordinaten der Punkte (des Punktes) in der Grundebene, in dem die Funktionswerte extrem sind.

(7) Durch eine Matrix M wird $\vec{e}_1$ in den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ abgebildet, $\vec{e}_2$ in den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_3$ in den Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne M.

(b) Berechne die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und Eigenvektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ von M.

(c) Berechne das Bild des Vektors $\lambda_1\,\vec{x}_1 + \lambda_2\,\vec{x}_2 + \lambda_3\,\vec{x}_3$ bei der Abbildung mit M.

4.33 Test ◇ B2 05/06 3a ◇

Hinweis: *Eine Aufgabe kann nur dann bewertet werden, wenn der Lösungsgang ersichtlich ist. Die DGL sind von Hand zu lösen. Der Lösungsgang muss auf dem Blatt festgehalten sein. Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet.*

(1) Gegeben ist die Differentialgleichung $y' = x\,y^3$.

(a) Welche Ordnung hat diese DGL?

(b) Um welchen Typ DGL handelt es sich hier? (Linear, mit konstanten oder nicht konstanten Koeffizienten u.s.w. . .)

(c) Skizziere einige Isoklinen.

(d) Skizziere grob mit Hilfe der Isoklinen das Richtungsfeld.

(e) Berechne die allgemeine Lösung.

(2) Gegeben ist die Differentialgleichung $y'(x)\,y(x) = \,cos(x)$.

(a) Für welche $(x; y(x))$ ist der Existenz- und Eindeutigkeitssatz verletzt?

(b) Löse die Differentialgleichung für die Anfangsbedingung $y(0) = 4$.

(3) Gegeben ist die Differentialgleichung $y + 4\,x + x\,y' = 0$.

(a) Berechne die allgemeine Lösung der DGL.

(b) Untersuche, ob es in der Lösungsmenge eine Gerade geben kann. Falls ja, so schreibe die Funktionsgleichung der Geraden auf.

(4) Gegeben ist die Differentialgleichung $y'' - y' + y = e^{-x}$.

(a) Berechne die allgemeine Lösung.

(b) Eine Lösung geht durch $(0; 0$ im Sinne von $y(0) = 0,\;\; y'(0) = 0$.
Wie gross ist dann $y(1)$?

4.34 Test ◇ B2 05/06 3b ◇

Hinweis: *Eine Aufgabe kann nur dann bewertet werden, wenn der Lösungsgang ersichtlich ist. Alle Aufgaben werden gleich bewertet.*

(1) Berechne die Lösung mit dem kleinsten Abstand von O:

$$w = 2 - i, \;\; (z - w)^4 = 2 + i$$

(2) (a) $z = i \cdot \pi, \;\; 3 \cdot e^{(2\,z)} = \,?$

(b) $z = i \cdot \pi + 1, \;\; 3 \cdot e^{(2\,z)} = \,?$

(c) $z = i \cdot \pi, \;\; \cos(z) + \sin(z) = \,?$ (num.)

(d) $z = -i \cdot \pi, \;\; \cos(z) - \sin(z) = \,?$ (num.)

(3) (a) Berechne und skizziere $z = 3 + 2\,i$ und $w = \dfrac{1}{z}$ mitsamt dem Einheitskreis.

(b) $\dfrac{(4 + 2\,i) \cdot (2 - 4\,i)}{(4 - 3\,i)} = \,?$

(c) $\dfrac{(4 + 2\,i) \cdot (2 - 4\,i)}{(3 + 4\,i)} = \,?$

(4) $z_1 = 1, \;\; z_2 = -1, \;\; z_3 = 2 - i, \;\; z_4 = 2 + i, \;\; z_5 = -2 + i, \;\; z_6 = -2 - i.$

(a) $f(z) = (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_6) = a_6\, z^6 + a_5\, z^5 + \ldots + a_1\, z + a_0$
$a_6, a_5, a_4, \ldots, a_0 = \,?$

(b) Setze $z^2 = w \;\Rightarrow\; f(z) = f(w^{(\frac{1}{2})} := g(w)$
Berechne die Nullstellen von $g(w)$. $\quad (g(w) = 0 \;\Rightarrow\; w = \,?)$

(5) Reserve: $\quad h(z) = \dfrac{z^{12} - 1}{2\,z - 2}$

(a) $\lim\limits_{z \to 1} h(z) = \,?$

(b) $h(-1), h(i), h(-i) = \,?$

Viel Glück!

WIR1

4.35 Link zu den Lösungen

Hinweis zu den nachstehenden Lösungen: Die Lösungen sind aus Praktikabilitätsgründen mit *Mathematica* produziert worden. In den bald 20 Jahren, in denen der Autor dieses Verfahren anwendet, ist so eine riesige Sammlung von Aufgabenlösungen entstanden, siehe z.B. unter

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Die Lösungen sind unter „Bau“ nach Jahren und Serie gekennzeichnet aufgeführt.

Kapitel • Chapitre 5

Material für die Abteilung Architektur

Material für Mathematik und verwandte Gebiete an der Abteilung Architektur

Nachstehend ist ein Auszug aus einem Print–Out für die Architektur wiedergegeben:

Kapitel • Chapitre 6

Organisatorisches bei Bedarf

Kurze Übersicht

(1) Organisation, Rahmen

(2) Stoff

(3) Ziel, Weg, Methoden, Feedback, Team

(4) Übungen, Selbststudium

(5) Lerntechnik, Arbeitstechnik, Selfmanagement

(6) Rechte und Pflichten des Studenten und der Schule

(7) Prinzipien, Grundsätze

(8) Rechner, Computer, Mathematiksoftware

(9) Semesterorganisation Mathematik (Anzahl Noten, Prüfungsreglement, Prüfungsplan, Prüfungsrahmen, erlaubte Unterlagen, formale Anforderungen, Benotungskriterien, Benotung der Übungen und Projekte, Arbeitsnachweismappe, Klassensprecher, Klassenbetreuer, Kopierchef, Sprechstunden)

(10) Hilfsmittel (Bibliothek, Taschenrechner, Mathematiksoftware, Literatur)

(11) Zeitplanung

(12) Einführung: Über das Wesen der Mathematik

- (a) Beispielhafte Beweise
- (b) Wieso beweisen?
- (c) Modell und Wirklichkeit
- (d) Geschichtlicher Rahmen und Auftrag

Kapitel • Chapitre 7

Kurs 1 (1. Jahr)

7.1 ◇ Eintrittstest ◇ Math. ◇ Arch. ◇

7.1.1 ◇ Eintrittstest ◇ Math. ◇ Arch. ◇ Entscheid .... ◇

Name: ______________________, ______________________ Datum: ______________________

Ich möchte sowieso den Stützkurs besuchen und verzichte daher auf diesen Test: ◯

Hinweis: Der Stützkurs zielt auf das Niveau der technischen Berufsmatur. Am Semesterende findet **für alle** Studierenden des Moduls „Gestalten und Modellieren" ein **Abschlusstest in Mathematik** statt, der im Rahmen des für den Stützkurs anfallenden Aufwandes anteilmässig zur **Modulnote beiträgt**. Studierende des genannten Moduls, welche vom Stützkurs befreit werden, machen diesen Schlusstest ebenfalls. Alle diese Studierende haben heute schon automatisch die Verrechnungsnote 1 eingetragen. Diese Verrechnungsnote kann durch den Abschlusstest nach eigenem Ermessen verbessert werden. Andernfalls bleibt sie 1.

Befreiung vom Stützkurs: Dieser Eintrittstest ergibt die Grundlage für den Entscheid betreffend Befreiung vom Sützkurs: Wer sehr gute Resultate erzielt, bekommt vom Dozenten den Vorschlag zur Befreiung. Der bzw. die Studierende muss auf dieser Grundlage über die Nichtteilnahme am Unterricht selbst entscheiden. Wer vom Dozenten keine Empfehlung zur Befreiung bekommt und mit ihm auch keine persönlichen Abmachungen betr. Unterrichtsbesuch getroffen hat, gilt für die Schlussprüfung als abgemeldet. Die Note bleibt damit 1 (Diese Anordnung ist Voraussetzung für eine geordnete Durchführung eines Stützkurses.)

Testpraxis: Bei den nachstehenden Fragen werden für richtige Ankreuzungen positive Punkte erteilt und für falsche Ankreuzungen negative Punkte. Nach dem gleichen Muster werden die Punkte bei selbst berechneten Resultaten erteilt.

7.1.2 ◇ Zur Orientierung: Kursunterlagen Stützkurs ◇

Als Unterlagen sowie Studienliteratur für den Stützkurs werden die für die BMS geschaffenen und anerkannten Werke von Peter Frommer/ Kurt Studer verwendet:

(1) Peter Frommer/ Kurt Studer: Mathematik für Mittelschulen, Algebra, Sauerländer-Verlag 2005, ISBN 3-0345-0169-2
(Zugehörige Lösungen: ISBN 3-0345-0170-6)

(2) Peter Frommer/ Kurt Studer: Mathematik für Mittelschulen, Geometrie, Sauerländer-Verlag 2006, ISBN-10: 3-0345-0034-3 / ISBN-13: 978-3-0345-0034-0
Zugehörige Lösungen: ISBN-10: 3-0345-0150-1 / ISBN-13: 978-3-0345-0150-7

Literaturliste siehe unter: *http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/LiteraturAktuell.html*
(**Diese Internet–Adresse bitte notieren!**)

7.1.3 ◇ Beispiele zu Beantwortung der Testfragen ◇

Hier einige Beispiele:

(1) $\otimes\, 3+4=7$ (Aussage **richtig**, Antwort: **Kreuz** im Kreislein!)

(2) $\bigcirc\ 3+4=2$ (Aussage **falsch**, **kein Kreuz** anbringen!)

(3) $\otimes\, 3^2+4^2=5^2$ (Aussage richtig, Kreuz!)

(4) $\bigcirc\ 3^2+4^2\neq 5^2$ (Aussage falsch, kein Kreuz!)

7.1.4 ◇ Testfragen Eintrittstest Architektur ◇

Kreuze die richtigen Aussagen so wie in den obigen Beispielen im jeweiligen Kringel resp. Kreislein an:
(Korrektur mit Schablone $\rightsquigarrow$ Kreuz in den Kreis setzen!!!)

Die Testfragen werden aus organisatorischen Gründen nicht herausgegeben.

Der Dozent gibt den Studierenden im Anschluss an den Test gerne mündlich zu speziellen Anliegen Auskunft.

%

⊘ **Notizen:**

WIR1

Wird erst bei der Korrektur ausgefüllt:

Anzahl Kreuze:. . . . .

Richtige Kreuze:. . . . .

Falsche Kreuze:. . . . .

7.2 Bemerkungen zu Zahlendarstellung in Computern, Datenformaten und Vektorgrundlagen

---

Nach den Grundlagen des ECTS–Systems muss man bei uns auf eine Unterrichtslektion ca. eine bis vier Stunden Selbststudium rechnen. Damit sind Übungen, eigenständige Erarbeitung von Teilen des Stoffes, Prüfungsvorbereitungen, Arbeit mit Computerprogrammen u.s.w. gemeint. (1 ECTS entspricht 30 Stunden Arbeit. Bei 7 Lektionen z.B. entstehen so pro Lektion zusätzlich drei bis dreieinhalb Stunden Arbeit.)

Aufgabe: Bearbeite dieses Blatt 1, indem du dir dafür einen Studienplan bis zur nächsten Lektion machst. Halte diesen Studienplan dann auch ein.

Wichtig: Die Lösungen der folgenden Aufgaben sind aufzubewahren und an die Schlussprüfung mitzubringen. Sie werden da gebraucht!

(1) Stoffgruppe 1: Zahlendarstellung in Computern, Speicheraufwand, p-adische Zahlensysteme. . .

(a) Ein heute üblicher Computer speichert die Daten intern im Arbeitsspecher flüchtig durch Schalterstellungen (Transistoren als Schalter verwendet) oder in Festspeichern (Festplatten und anderen Speichermedien, z.B. durch Magnetisierung von kleinen Bereichen, durch Lasermarkierungen u.s.w.). Dadurch sind jeweils zwei Zustände möglich: „Strom fliesst oder nicht", „magnetisiert oder nicht" u.s.w.. Diese Zustände kann man durch die Zahlen 0 und 1 symbolisieren. Damit ist eine Übersetzung der physikalischen Situation in Zahlen möglich. Wegen den beiden möglichen Ziffern kommt hier das Dualzahlensystem (Binärsystem) im Gegensatz zum üblichen Dezimalsystem zur Anwendung (Positionssysteme, Ziffern erhalten ihren Wert durch ihre Position).
Beispiele:

$$\begin{aligned} 54362 &= 5\cdot 10^5 + 4\cdot 10^3 + 3\cdot 10^2 + 6\cdot 10^1 + 2\cdot 10^0 \\ &= 1\cdot 2^{15} + 1\cdot 2^{14} + 0\cdot 2^{13} + 1\cdot 2^{12} + 0\cdot 2^{11} + 1\cdot 2^{10} + 0\cdot 2^9 + 0\cdot 2^8 + 0\cdot 2^7 + 1\cdot 2^6 \\ &\qquad +0\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 = 1101010001011010_2 \end{aligned}$$

$$1.3 = 1\cdot 10^0 + 3\cdot 10^{-1} = 1\cdot 2^0 + 0\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2} + \ldots = 1.010011001100110011_2$$

Ein Speicherplaz im Computer, der eine der beiden Ziffern 0 oder 1 aufnehmen kann, nennen wir **Bit**. In 8 Bits können wir daher $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 2^8 = 256$ verschiedene Schriftzeichen abspeichern (ASCII-System). Um die Ziffern 0, 1 bis 9 mit Vorzeichen und eventuell den Dezimalpunkt abzuspeichern genügen 4 Bits, was dann $2^6 = 16$ Speichermöglichkeiten entpricht. 4 Bits nennen wir ein **Halbbyte**, 8 Bits ein **Byte**. In 2 Bytes haben wir 65536 Speichermöglichkeiten, etwa die ganzen Zahlen von -32767 bis 32767 (Datentyp Integer in diversen Programmiersprachen). Für reelle Gleitkommezahlen (Datentyp Real) werden oft 8 Bytes, d.h. 16 Halbbytes verwendet, was dann etwa 15 Ziffern Platz bietet. Wichtig sind diese Überlegungen hier für die Speicherung grosser grahisch erzeugter Datenmengen, etwa bei Fotos und zum Verständnis der verschiedenen Graphikformate.

(b) In einer **Pixelgraphik** (z.B. Photo) werden zu jedem Pixel in der formatabhängigen Art Farbwerte abgespeichert, was normalerweise zu sehr grossen Datenmengen führt, die beim Übermitteln (z.B. Internet) oft unbrauchbar lange Übermittlungszeiten verursachen. Daher sind Kenntnisse in den einzelnen Graphikformaten wichtig. Im Gegensatz zur Pixelgraphik werden in der **Vektorgraphik** nicht Pixel, sondern Rechenanweisungen zur Berechnung der vorhandenen Kurven abgespeichert, was viel weniger Platz benötigt. Vektorgraphiken werden dann durch Vektoroperationen, Kurvenberechnungen u.s.w. manipuliert. Bei den Pixelgraphiken dagegen kommen Mengenoperationen zur Anwendung.

(c) Wichtig beim Speicherplatzbedarf sind die zur Anwendung kommenden Farbmodelle, z.B.

  i. **HSV** (**„Hue“** d.h. Farbe (eine Zahl für die Farbe). „Saturation“ d.h. Sättigung, „Value“ d.h. Wert. „Value“ wird auch manchmal in der bezeichnerenden Weise „Brightness“ d.h. Helligkeit genannt, das Farbmodell heißt dann entsprechend HSB).

  ii. **RGB** (Red, Gree, Blue). Bildschirm! Jeder der drei Farbanteile wird durch eine Zahl (Intensitätsstufe) festgelegt (z.B. 8 Bits).

  iii. **CMYK** (Cyan, Magenta, Yellow, Schwarz als Schlüsselfarbe (Key)). Jeder er Anteile wird wiederum durch eine Zahl definiert. Dieses System ist wichtig in der Drucktechnik, da mit diesen Farben (Cyan (spezielles Blau), Magenta (spezielles Rot), Yellow (spezielles Gelb), Schwarz (spezielles Schwarz) gegenüber von Weiss) die besten Ergebnisse erzeugt werden können.

(d) Beispiel zur Grösse einer Pixelgraphik:

Gegeben sei ein **BMP**–Bild (RGB) mit 1’024 mal 768 = 786’432 Bildpunkte (Pixel, ehemals etwa VGA–Bildschirm). 1’024 mal 768 ergibt 786’432 Bildpunkte (Pixel). Im RGB–Modell mit 8 Bit für die Farbe Rot ($2^8 = 256$ Intensitätsstufen), 8 Bit für die Farbe Grün und 8 Bit für die Farbe Blau ergibt das $8 + 8 + 8 = 24$ notwendige Bits, also $2^{24} = 16'777'216$ verschiedene Farben. Der Speicherbedarf ist dann mindestens die Pixelzahl 786432 mal 24, d.h. $786432 \cdot 24 = 18874368$ Bit, was 2359296 Bytes oder 2.304 kByte resp. 2.25 MByte entspricht. Also: Achtung vor zu grossen Bildern! (2^8 Bit sind ein Byte, $2^10 = 1024$ Bytes sind ein kByte u.s.w., denn bei der Speicherverwaltung zählt das Dualsystem. 786’432 mal 24 Bit ergibt 18’874’368 Bit Speicherbedarf. 18’874’368 Bit $\hat{=}$ 2’359’296 Byte = 2’304kByte = 2.25MByte.

Beim **JPEG**–Format (internettauglich) erfolgt eine Komprimierung, indem Pixelmengen mit gleichen Farben zusammengefasst werden. Die Farbspeicherung wird dadurch kleiner. Doch Achtung vor der Veränderung der Pixelzahl (d.h. bei einer Grössenveränderung des Bildes!).

Beim **GIF**–Format (internettauglich) wird die Anzahl Farben auf 256 beschränkt, was die meisten Leute sowieso nicht merken. (Achtung Patentschutz!)

Beim **TIFF**–Format kommt das Farbmodell CMYK zur Anwendung. In diesem Format ist eine verlustfreie Komprimierung möglich.

Weitere Formate siehe Literatur.

(e) **Aufgabe:** Beschaffe dir im Internet Literatur zu den Farbmodellen und Komprimierungen und schreibe eine Zusammenfassung.

Link 1:

`http://www.smarttrain.at/reframe/kompression_frame.htm`

Link 2:

`http://goethe.ira.uka.de/seminare/redundanz/`

Link 3: Selber suchen.

(2) Vektorrechnung:

(a) Schreibe eine Zusammenfassung über Vektorrechnung Teil 1 (Schema: Begriffe, Beziehungen, Anwendungsbeispiele). Inhalt: Stoffbereich Vektorbegriff, Addition, Multiplikation mit Skalar, Gesetze, lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit, Basis, Dimension, Darstellung von Vektoren in Koordinatensystemen, Länge, Rechengesetze in Koordinatensystemen. Link z.B.

`http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html   Skript Algebra`

oder eigene Literatur.

(b) Deute ein gefärbtes Pixel aus einer Pixelgraphik als Vektor. Welche Dimension ist bei dieser Betrachtung angebracht?

(c) Zeichne in der Darstellungsweise einer Isometrie (Falschperspektive) einen Würfel mit einer Ecke im Punkte $A(3; 2; 1)$. Ein Kantenvektor ist $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Ein zweiter Kantenvektor hat die Richtung von $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$. Ein drittet Kantenvektor steht natürlich senkrecht auf den ersten beiden und hat die Richtung so, dass die erste Koordinate negativ wird.
Zeichne einen zweiten Würfel, den man erhält durch Verschiebung des ersten Würfels um $\vec{v_1}$ plus den Raumdiagonalenvektor des Würfels durch A. Mache im Bild die jeweiligen vorderen Flächen sichtbar.
Zeichne einen dritten Würfel, der wie folgt entsteht: Interpretiere die drei Kantenvektoren als Basisvektoren eines neuen Koordinatensystems. Drehe den Würfel dann um 120^o in der Richtung des Gegenuhrzeigersinns im neuen Koordinatensystem um $\vec{v_1}$ und zeichne den Bildwürfel. Falls du diese Teilaufgabe noch nicht lösen kannst, so vertage dies auf später — oder frage bei Gelegenheit den Dozenten.

7.3 Das Problem der Streckungen, Translationen und Drehungen von Punkten und Vektoren

---

Einen Vektor um einen Faktor $\lambda \in \mathbb{R}$ strecken heisst, dass man den zugehörigen Pfeil oder den damit gegebenen Ortsvektor um diesen Faktor zu strecken hat. So ist $-3\,\vec{v}$ dann 3 mal so lang wie $\vec{v}$ und entgegengesetzt gerichtet.

Eine Verschiebung oder Translation eines Vektors $\vec{v}$ um einen Vektor $\vec{a}$ bedeutet, dass man mit der Vektoraddition $\vec{w} = \vec{v} + \vec{a}$ einen neuen Vektor $\vec{w}$ bestimmt. Dabei werden die Koordinaten von $\vec{v}$ und $\vec{a}$ addiert.

In der Ebene kann man einen Punkt oder einen Ortsvektor eindeutig mit einen gegebenen Winkel um den Ursprung drehen. Im Raum ist das aber anders: Eine Drehung im Raum muss durch eine Drehachse festgelegt werden. Eine Achse ist durch zwei Punkte gegeben.

(1) Drehungen: Wir projizieren den dreidimensionalen Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ in eine der drei Grundebenen und erhalten dort im Zweidimensionalen: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$. Diese Vektoren kann man z.B. um den Ursprung drehen. Erst studieren wir die Drehungen an einfachsten Beispielen:

(a) Drehen wir $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ um 30^o oder $\frac{\pi}{6}$ im Gegenuhrzeigersinn, so erhalten wir den Vektor $\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.866025 \\ 0.5 \end{pmatrix}$. Drehen wir hingegen $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ um diesen Winkel, so finden wir $\begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.866025 \end{pmatrix}$. Drehen wir die Summe $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, so erhalten wir die Summe $\begin{pmatrix} \sqrt{3} - 1/2 \\ 1/2 + \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$.

(b) Allgemein ist das Resultat einer Drehung des Vektors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ um α der Vektor $\begin{pmatrix} \cos(\alpha)\,x - sin(\alpha)\,y \\ \sin(\alpha)\,x + cos(\alpha)\,y \end{pmatrix}$

(c) Drehen wir daher die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ um 30^o oder $\frac{\pi}{6}$ im Gegenuhrzeigersinn, so erhalten wir näherungsweise die Vektoren $\begin{pmatrix} -0.767949 \\ 5.33013 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1.33013 \\ 7.69615 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1.26795 \\ 6.19615 \end{pmatrix}$

(2) Aufgabe: Mache dir von der Sache eine Skizze (Kontrolle!). Ist alles so richtig?

(3) Drehe den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ um die z–Achse um 60^o, das Resultat dann um die x–Achse um 45^o und das neue Resultat wieder um die z–Achse um -60^o. Was bekommt man? Kontrolliere das Resultat mit Hilfe einer Skizze (Selbstkontrolle ist in der Praxis wichtig!).

(4) Halte in einer Zusammenfassung deine Erkenntnisse über Drehungen fest.

(5) Suche im Werk „Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik“ in den Teilen 1.1 bis 1.3 Anwendungen für deinen Beruf, die dir persönlich wichtig sind und halte diese in einer Zusammenfassung fest.

7.4 Zerlegung von Vektoren, Anwendung des Skalarprodukts

---

(1) Rechenregeln für Vektoren — (wie heissen sie?):

(a) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

(b) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

(c) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

(d) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

(e) $\lambda\,(\mu\,\vec{a}) = (\lambda\,\mu)\,\vec{a}$

(f) $\lambda\,(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\,\vec{a} + \lambda\,\vec{b}$

(2) Vektorlänge (3-dimensional):

$$l = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Aufgabe:

Gegeben: $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $|\vec{v}| = ?$

(3) Aufgabe:

Gegeben sind die Kräfte $\vec{F_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{F_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ sowie ein Dreibein aus Metall mit den Beinrichtungen (Ortsvektoren) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Kräfte werden auf das Dreibein dort übertragen, wo die Beine zusammengschweisst sind. (Skizze!) Berechne die Längen der Komponenten der Resultierenden $\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$ in Richtung der Beine.

Rückseite!

(4) Skalarprodukt in einem Orthonormalsystem im $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_3 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|\, \cos(\varphi) = |\vec{a}| \cdot b_a$$

b_a ist die Länge der Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$.

(5) Regeln für das Skalarprodukt — (wie heissen sie?):

(a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

(b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \;\Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

(c) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

(d) $\lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b}$

(6) (a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \varphi = ?, \;\; b_a = ?$

(b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ z \end{pmatrix}, \;\; b_a = 2 \;\Rightarrow\; z = ?$

(7) Gegeben ist ein Würfel im Raum mit der Kantenlänge 1. Gesucht sind die Projektionslängen der Kantenvektoren auf eine der Raumdiagonalen. (Skizze, Rechnung!)

(8) Gegeben ist ein reguläres Tetraeder T_1 im Raum. Aus den Seitenmittelpunkten wird wieder ein Tetraeder T_2 gebildet. Von jeder Ecke von T_1 zu den nächstgelegenen Ecken von T_2 sind drei Linien möglich. Diese werden gezogen. So entstehen vier „Zacken", welche mit T_2 einen Stern bilden. Berechne die Zackenhöhe im Verhältnis zur Höhe von T_1 sowie das Sternvolumen im Verhältnis zum Volumen von T_1.

7.5 Flächenprodukt, Vektorprodukt

---

(1) Senkrecht stellen eines ebenen Vektors — (nachlesen in der Literatur):

(a) Ablesbar an einer Skizze: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}_\perp = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$
(Vektoren und Koordinatenachsen bilden kongruente Dreiecke.)

(b) **Bsp.:** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}_\perp = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Löse eigene ähnliche Beispiele und kontrolliere sie mittels einer Skizze.

(2) Flächenprodukt — (nachlesen in der Literatur):

(a) Mit Hilfe des Skalarprodukts sieht man: Die durch zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bestimmte Parallelogrammfläche berechnet sich
$A = |\vec{a}| \cdot h = |\vec{a}_\perp| \cdot |\vec{b}_{\vec{a}_\perp}| = \vec{a}_\perp \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1\, b_2 - a_2\, b_1 := [\vec{a}, \vec{b}]$

(b) **Bsp.:** $A = [\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}] = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$. Löse eigene ähnliche Beispiele.

(3) Vektorprodukt — (nachlesen in der Literatur):

Das Vektorprodukt definieren wir für dreidimensionale Vektoren (im Raum). Zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist das Vektorprodukt $\vec{n} := \vec{a} \times \vec{b}$ gegeben durch einen Vektor $\vec{n}$, welcher senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht. Für die Orientierung gilt die Korkzieherregel: Von $\vec{a}$ nach $\vec{b}$ drehen. Dann zeigt $\vec{n}$ in die Bewegungsrichtung des Korkziehers (Rechtsschraube). Die Länge von $\vec{n}$ ist gleich dem Flächeninhalt des durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bestimmten Parallelogramms.

Berechnung: $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} := \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2\, b_3 - a_3\, b_2 \\ a_3\, b_1 - a_1\, b_3 \\ a_1\, b_2 - a_2\, b_1 \end{pmatrix}$

Wie man sieht, sind die Komponenten Flächenprodukte der in die Grundebenen projizierten Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

$A = |\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$. Löse eigene ähnliche Beispiele.

Rückseite!

(4) Bsp.: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ \vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \ A = 3\sqrt{6} \approx 7.34847$

(5) Regeln für das Flächen- und Vektorprodukt — (nachlesen in der Literatur):

(a) $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$

(b) $[\lambda \vec{a}, \vec{b}] = \lambda\, [\vec{a}, \vec{b}]$

(c) $[\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{c}]$

(d) $[\vec{a}, \vec{b}] = 0 \ \Leftrightarrow \vec{a} \| \vec{b}$

(e) $[\vec{a}, \vec{b}] = \pm |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \ \Rightarrow \ \vec{a} \perp \vec{b}$

(f) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

(g) $\overrightarrow{\lambda\, a} \times \vec{b} = \lambda\, \vec{a} \times \vec{b}$

(h) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

(i) $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \ \Leftrightarrow \vec{a} \| \vec{b}$

(6) $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \ \overrightarrow{OB} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$. Berechne die Distanz von B zu $\overline{OA}$

Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$

Länge des Normalenvektors = Parallelogramminhalt:
$F = |\vec{n}| = \sqrt{(-1)^2 + 7^2 + 9^2} = \sqrt{131} \approx 11.4455$

$$F = |\vec{a}| \cdot h, \ \ |\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6} \approx 2.44949 \ \Rightarrow \ h = \frac{F}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{131}}{\sqrt{6}} \approx 4.67262$$

Löse eigene ähnliche Beispiele.

(7) Suche in der Literatur gelöste Beispiele zum Flächen- und Vektorprodukt. Versuche sie zu verstehen. Notiere jede Beispiele, welche besonders interessant scheinen.

7.6 Spatprodukt, Abstände

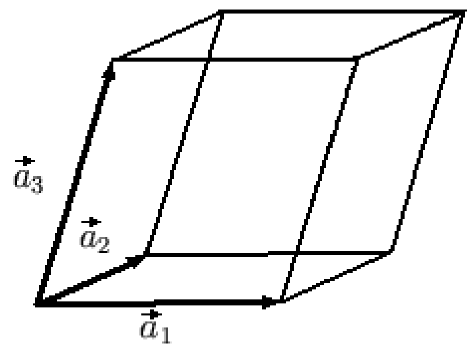
---

(1) Spatprodoukt — (nachlesen in der Literatur):

(a) Ein durch durch vier Punkte im Raum, im zu betrachtenden Fall daher durch den Ursprung und drei linear unabhängige Vektoren gebildetes „räumliches Parallelogramm" nennen wir

Spat oder **Parallelepiped**.

Im entsprechenden 2–dimensionalen Fall hätten wir es mit einem Parallelogramm zu tun.



(b) Das Spatvolumen erhalten wir aus Grundflächeninhalt A mal Höhe h:
$V = A \cdot h = |\vec{a}_1 \times \vec{a}_2| \cdot \vec{a}_3$ (Vektor– und Skalarprodukt).
Dabei ist $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \vec{n}$ der Normalenvektor auf $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ mit $|\vec{n}| = A$.
$\leadsto \; V = |\vec{n}| \cdot h = |\vec{n}| \cdot |(\vec{a}_3)_{\vec{n}}| = \vec{n} \cdot \vec{a}_3 = (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \vec{a}_3$.

Dieses Volumen kann auch negativ sein, denn es ist ein Skalarprodukt $(\vec{n} \cdot \vec{a}_3)$. Vertauscht man die Reihenfolge der Vektoren, so ändert sich eventuell der Umlaufsinn dieser Vektoren. Oder man beginnt mit anderen zwei dieser drei Vektoren um die Grundfläche A zu definieren. $|V|$ kann daher damit nicht ändern. Bloss das Vorzeichen von V könnte wechseln.

(c) Zur Berechnung des Spatprodukts $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} := [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ kann man die Regel von **Sarrus** verwenden:

$$\left|\begin{array}{ccccccccc} a_1 & & b_1 & & c_1 & & a_1 & & b_1 \\ & \searrow & & \rlap{\searrow}\nearrow & & \rlap{\searrow}\nearrow & & \nearrow & \\ a_2 & & b_2 & & c_2 & & a_2 & & b_2 \\ & \nearrow & & \rlap{\searrow}\nearrow & & \rlap{\searrow}\nearrow & & \searrow & \\ a_3 & & b_3 & & c_3 & & a_3 & & b_3 \end{array}\right| \quad \text{mit} \quad \overset{+}{\searrow}, \quad \overset{-}{\nearrow}$$

(d) **Bsp.:** $[\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\8\\0\end{pmatrix}] = 1\cdot5\cdot0 + 4\cdot8\cdot3 + 7\cdot2\cdot6 - 3\cdot5\cdot7 - 6\cdot8\cdot1 - 0\cdot2\cdot4$
$= 27$

(2) Abstandsberechnungen — (nachlesen in der Literatur):

(a) Durch vier Punkte O, A, B, C sind drei Vektoren $\overrightarrow{OA}= \vec{a}, \overrightarrow{OB}= \vec{b}, \overrightarrow{OC}= \vec{c}$ und damit ein Spat gegeben. Will man den Abstand des Punktes C von der Fläche (O, A, B) wissen, so kann man die Formel $V = A \cdot h \;\Rightarrow\; h = \dfrac{V}{A} = \dfrac{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$ benutzen.

(b) In obigem Beispiel erhält man damit $h = 3\sqrt{\dfrac{3}{2}} \approx 3.67423$

(3) Regeln — (nachlesen in der Literatur):

Die Regeln für das Spatprodukt kann man aus den Regeln für das Vektorprodukt und das Skalarprodukt gewinnen. Sie werden daher hier nicht explizit dargestellt.

Das Spatprodukt bezeichnet man auch als 3×3–**Determinante**.

Möglichkeiten für kostenlose Literatur:

```
Beispiel: Vektorrechnung im Wikipedia
http://de.wikipedia.org/wiki/Vektorrechnung
http://de.wikipedia.org/wiki/Spatprodukt
http://de.wikipedia.org/wiki/Analytische_Geometrie
http://de.wikipedia.org/wiki/Kategorie:Geometrie
http://de.wikipedia.org/wiki/Kategorie:Lineare_Algebra

Beispiel 2: Differentialrechnung in mathe-online
http://www.mathe-online.at/mathint/anwdiff/i.html
http://www.mathe-online.at/mathint/diff1/i.html
```

7.7 Vektorielle analytische Geometrie: Punkte, Geraden, Ebenen, Kreise, Kugeln Tangenten

---

(1) Punkt, Ortsvektor — (nachlesen in der Literatur):

Ein Punkt P kann in einem Koordinatensystem durch seinen Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ gegeben werden. Das ist derjenige Vektor, der durch den Pfeil vom Ursprung O zum Punkt P repräsentiert wird. Beispiel: $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $P=P(1,2,3)$. Mache eigene Beispiele.

(2) Parametergleichung der Geraden — (nachlesen in der Literatur):

Eine Gerade g ist durch zwei Punkte P_0 und P_1 festgelegt. Daher genügt es, z.B. P_0 als Aufpunkt und $\vec{a}=\overrightarrow{P_0P_1}$ als Richtungsvektor zu verwenden. Jeden weiteren Punkt auf der Geraden erhält man dann, indem man den Richtungsvektor geeignet streckt:
$\overrightarrow{0P}\,(t)=\overrightarrow{0P_0}+t\;\overrightarrow{P_0P_1}=\overrightarrow{OP_0}+t\,\vec{a}$.
Beispiel: $\overrightarrow{OP_0}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$ $\Rightarrow \overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}$ zeigt auf den Punkt $P(-1;4;-1)\in g$. Mache eigene Beispiele.

(3) Parametergleichung der Ebene — (nachlesen in der Literatur):

Eine Ebene Φ ist durch drei Punkte P_0, P_1 und P_2 festgelegt. Daher genügt es, z.B. P_0 als Aufpunkt und $\vec{a}=\overrightarrow{P_0P_1}$ und $\vec{b}=\overrightarrow{P_0P_2}$ als Richtungsvektoren zu verwenden, $\overrightarrow{P_0P_1}\not\parallel\overrightarrow{P_0P_2}$. Jeden weiteren Punkt auf der Ebene erhält man dann, indem man die Richtungsvektoren geeignet streckt:
$\overrightarrow{0P}\,(\lambda,\mu)=\overrightarrow{0P_0}+\lambda\;\overrightarrow{P_0P_1}+\mu\;\overrightarrow{P_0P_2}=\overrightarrow{OP_0}+\lambda\,\vec{a}+\mu\,\vec{b}$.
Beispiel: $\overrightarrow{OP_0}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$
$\Rightarrow \overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}+(-1)\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\2\\-2\end{pmatrix}$ zeigt auf den Punkt $P(-3;2;-2)\in\Phi$.
Mache eigene Beispiele.

(4) Vektorgleichung des Kreises oder der Kugel — (nachlesen in der Literatur):

Ein Kreis oder eine Kuges ist bestimmt durch ihren Mittelpunkt M und den Radius R. Es gilt für alle Punkte P der Peripherie: $\mid \overrightarrow{MP} \mid = R \Rightarrow \mid \overrightarrow{MP} \mid^2 = \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MP} = R^2 = const.$. Damit ist die Vektorgleichung schon gegeben.

Beispiel: $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad R = 10 \Rightarrow \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow R^2 = 10^2 = 100 = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix} = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2.$

Liegt ein Punkt auf der Kugel, so muss er obige Gleichung erfüllen. Mache eigene Beispiele.

(5) Koordinatengleichung der Gerade in der Grundebene — (nachlesen in der Literatur):

Wir kennen für die Gerade g die Funktionsgleichung: $y = m\,x + b$. Diese lässt sich umformen: $m\,x + (-1)\,y + b = 0$. Die letzte Gleichung wiederum dürfen wir mit irgend einer Zahl ungleich 0 multiplizieren, ohne dass die Gleichung die Gültigkeit verliert: $a\,m\,x + a\,(-1)\,y + a\,b = 0$. Da hier $m = 0$ möglich wäre, wollen wir an Stelle von $a\,(-1)$ allgemeiner $a\,q$ zulassen mit irgend einer Zahl q. Das gibt wieder eine Geradengleichung, denn für $q \neq 0$ können wir daraus wieder die Funktionsgleichung zurückgewinnen. Für $q = 0$ erhalten wir $a\,m\,x + a\,b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{m}$, $m \neq 0$, denn m und q können nicht gleichzeitig 0 gewählt werden, weil das nur zur Gleichung $b = 0$ fühern würde. $b = 0$ ist aber von allen Punkten erfüllt, also nicht nur von den Punkten auf einer Geraden. Für $q = 0$ erhalten wir wie eben berechnet ein fixes x. y dagegen darf beliebig sein. Das ergibt eine zur x–Achse senkrechte Gerade.
Wir schreiben nun allgemeiner: $A\,x + B\,y + C = 0$. Diese Gerade schneidet die x–Achse in P_1 mit $x = -\frac{C}{A}$ (y=0) und die y–Achse in P_2 mit $y = -\frac{C}{B}$ (x=0). Daraus berechnet man, dass der Vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ senkrecht auf dem „Koordinatenvektor“ $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ steht ($\perp$, denn das Skalarprodukt wird 0). $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ heisst daher „Normalenvektor“ zur Geraden g. Man entnimmt ihn sofort der Gleichung $A\,x + B\,y + C = 0$. Diese Gleichung heisst daher „Koordinatengleichung“. Über die Länge von $\vec{n}$ kann man vorerst nichts sagen. Mache eigene Beispiele.

Möglichkeiten für kostenlose Literatur:

```
Beispiel 1: Vektorrechnung im Wikipedia
http://de.wikipedia.org/wiki/Vektorrechnung
http://de.wikipedia.org/wiki/Spatprodukt
http://de.wikipedia.org/wiki/Analytische_Geometrie
http://de.wikipedia.org/wiki/Kategorie:Geometrie
http://de.wikipedia.org/wiki/Kategorie:Lineare_Algebra

Beispiel 2: Differentialrechnung in mathe-online
http://www.mathe-online.at/mathint/anwdiff/i.html
http://www.mathe-online.at/mathint/diff1/i.html
```

7.8 Vektorielle analytische Geometrie: Die Koordinatengleichung der Ebene

---

(1) Analog wie bei der Geraden können wir eine Parametergleichung einer Ebene umformen in eine einzige Gleichung mit drei Unbekannten der Form:

$$\Phi: \; A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$$

Beispiel: $\Phi: \; 7\,x + (-3)\,y + 4\,z + 8 = 0$

Die Koeffizienten einer solchen Gleichung sind nicht fix. Denn wenn man die Gleichung mit irgend einer Zahl $\neq 0$ multipliziert, so entsteht eine neue Gleichung mit unveränderter Lösungsmenge. Beispiel: Multiplikation mit 2 ergibt: $\Phi: \; 14\,x+(-6)\,y+8\,z+17 = 0, \;\; x, y, z$ unverändert.

Die Koordinatengleichung einer Ebene kann man erhalten, wenn man die Koordinaten von 3 gegebenen Punkten, welche nicht auf einer Geraden liegen, je einmal in die obige erste Gleichung einsetzt. So entstehen 3 Gleichungen mit den unbekannten Parameter A, B, C, D. Sind die Ortsvektoren der drei Punkte linear abhängig, so liegt der Ursprung in der Ebene. D wird dann $= 0$.
Andernfalls ist $D \neq 0$. Wären dann die Koeffizienten bekannt, so könnte man die Gleichung mit $\frac{1}{D}$ multiplizieren. Dann wird der Koeffizient an der Stelle D gleich 1. Daher kann man im Falle $D \neq 0$ immer $D = 1$ annehmen. Man hat also in jedem Fall jetzt 3 Gleichungen mit nur noch 3 Unbekannten (D ist ja jetzt bekannt). Wenn man diese Unbekannten berechnet, so gewinnt man die Koordinatengleichung.

Im Unterschied zur Koordinatengleichung der Ebene findet man in der Koordinatengleichung der Geraden nur zwei Variablen. Im $\mathbb{R}^3$ müsste man für die Festlegung einer Gerade zwie Koordinatengleichungen von Ebenen nehmen (Schnittgebilde). **Bsp.:**

(2) $$\begin{pmatrix} 2\,x - 3\,y + 4\,z - 6 = 0 \\ -x + y + z + 2 = 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ Mögliche Lösung } \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\,t \\ -2 + 6\,t \\ t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2\,x - 3\,y + 4\,z - 6 = 0 \\ -x + y + z + 2 = 0 \\ -2\,x - 3y + z = 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ Lösung } \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{31} \begin{pmatrix} 42 \\ -26 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Im ersten Fall erhält man als Schnittgebilde eine Gerade, im zweiten Fall einen Punkt.

(3) Setzt man in $A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$ z.B. die Werte von x und y gleich 0, so erhält man einen Punkt auf der z–Achse mit $z = \dfrac{-D}{C}$. Ebenso erhält man den x–Achsenabschnitt der Ebene $x = \dfrac{-D}{A}$ und den y–Achsenabschnitt $y = \dfrac{-D}{B}$. A, B, C, D haben daher sicher etwas mit Koordinaten zu tun.

(4) Wir nennen den Vektor, den man mit den Koordinaten A, B, C bilden kann, jetzt $\vec{n}$. Es gilt also: $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$. Frage: Was hat $\vec{n}$ für eine Bedeutung?

Wir werden Klarheit in dieser Sache bekommen, wenn wir das Skalarprodukt von $\vec{n}$ mit den durch die Achsenabschnitte definierten, zur Ebene parallelen Vektoren $\begin{pmatrix} \frac{D}{A} \\ \frac{-D}{B} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \frac{D}{A} \\ 0 \\ \frac{-D}{C} \end{pmatrix}$ bilden: $\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} \frac{D}{A} \\ \frac{-D}{B} \\ 0 \end{pmatrix} = A \cdot \dfrac{D}{A} + B \cdot \dfrac{-D}{B} = D - D + 0 = 0$ und

$$\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} \frac{D}{A} \\ 0 \\ \frac{-D}{C} \end{pmatrix} = A \cdot \frac{D}{A} + 0 + C \cdot \frac{-D}{C} = D - D = 0 \leadsto \quad \vec{n} \perp \Phi$$

Resultat: $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ ist immer ein **Normalenvektor** zur Ebene $A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$.

Daher ist die Koordinatengleichung bedeutsam: Man sieht in ihr den Normalenvektor. Will man z.B den Winkel zwischen zwei Ebenen finden, so kann man mit dem Skalarprodukt $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = |\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2| \cdot \cos(\alpha)$ den Winkel α berechnen: $\alpha = \arccos(\dfrac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|})$.

(5) Frage: Was ist die Bedeutung von D?. Um diese Bedeutung zu erfassen, normieren wir den Normalenvektor so, dass seine Länge gleich 1 ist: $\vec{n}_{norm} = \dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$.

Passen wir die Koeffizienten in der Koordinatengleichung entsprechnend an, so ergibt sich:

$$\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} (A\,x + B\,y + C\,z + D)$$

$$= \frac{A\,x}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + \frac{B\,y}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + \frac{C\,z}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

Man hat daher $\dfrac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} \cdot \vec{x} = \dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\dfrac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Dabei ist das Produk $\dfrac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} \cdot \vec{x} = \dfrac{1}{|\vec{n}|} \cdot |\vec{n}| \cdot |\vec{x}| \cdot \cos(\alpha) = |\vec{x}| \cdot \cos(\alpha)$. Hier ist $|\vec{x}|$ die Länge eines Vektors, der vom Ursprung in die Ebene zeigt. α ist der Winkel zwischen diesem Vektor und dem Normalenvektor. Daher ist $|\vec{x}| \cdot \cos(\alpha) = \pm d = \pm$ Distanz vom Ursprung zur Ebene Φ.

Man erhält daher: Distanz vom Ursprung zur Ebene Φ: $\quad \pm d = -\dfrac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.
D zusammen mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ trägt also in sich die Distanz der Ebene zum Ursprung. Damit hat man nochmals ein Mittel zur Abstandsberechnung zur Verfügung.

Möglichkeiten für kostenlose Literatur:

```
Beispiel 1: Vektorrechnung im Wikipedia
http://de.wikipedia.org/wiki/Vektorrechnung
http://de.wikipedia.org/wiki/Spatprodukt
http://de.wikipedia.org/wiki/Analytische_Geometrie
http://de.wikipedia.org/wiki/Kategorie:Geometrie
http://de.wikipedia.org/wiki/Kategorie:Lineare_Algebra

Beispiel 2: Differentialrechnung in mathe-online
http://www.mathe-online.at/mathint/anwdiff/i.html
http://www.mathe-online.at/mathint/diff1/i.html
```

7.9 Test

◇ Test ◇ **◇ Version A1a Bu ◇ 04 05 ◇**

Aufgabe 1 **(je 3 Punkte)**

(a) Erkläre den mathematischen Begriff **geometrischer Vektor**. Zeige dazu Beispiele. *Richtlinie bezüglich maximalem Umfang: Ca. eine halbe Seite.*

(b) Erkläre die mathematische Eigenschaft **linear unabhängig** betreffend Vektoren. Zeige dazu Beispiele. *Richtlinie bezüglich maximalem Umfang: Ca. eine halbe Seite.*

Aufgabe 2 **(je 12 Punkte)**

Fasse deine Kenntnisse zum Thema **Geraden– und Ebenengleichungen** zusammen. Erwartet wird eine strukturierte listanartige Übersicht.
Richtlinie bezüglich maximalem Umfang: Ca. 1 – 2 Seiten.

Viel Glück!

Kapitel • Chapitre 8

Kurs 2 (2. Jahr)

8.1 Kurzskript mit Diagrammen zum Zoo der Funktionen

Dieses Kurzskript ist hier aus änderungstechnischen Gründen nicht speziell eingefügt worden. Den Inhalt findet man unter der Adresse:

`http://rowicus.ch/Wir/Scripts/FktZoo.pdf`

Zoo der Funktionen

Plots von einfachen Funktionenserien

Übungen und Selbststudium in Mathematik

Rolf Wirz

Ausgabedatum. . . . . .

Siehe Link: http://rowicus.ch/Wir/Scripts/FktZoo.pdf

8.2 Funktionen, Kurven und Tangenten

Nach den Grundlagen des ECTS–Systems muss man bei uns auf eine Unterrichtslektion ca. eine bis vier Stunden Selbststudium rechnen. Damit sind Übungen, eigenständige Erarbeitung von Teilen des Stoffes, Prüfungsvorbereitungen, Arbeit mit Computerprogrammen u.s.w. gemeint. (1 ECTS entspricht 30 Stunden Arbeit. Bei 7 Lektionen z.B. entstehen so pro Lektion zusätzlich drei bis dreieinhalb Stunden Arbeit.)

Aufgabe: Bearbeite dieses Blatt 1, indem du dir dafür einen Studienplan bis zur nächsten Lektion machst. Halte diesen Studienplan dann auch ein.

Wichtig: Die Lösungen der folgenden Aufgaben (resp. die Resultate der eigenen Arbeiten) sind aufzubewahren und an die Schlussprüfung mitzubringen. Sie werden da gebraucht!

1 Stoffgruppe 1: Kurven und Tangenten...

(a) Zu einer Funktion $y = f(x)$ definiert man eine zweite Funktion $y' = f'(x) = \frac{d\,f(x)}{d\,x}$, die in jedem Punkt der ursprünglichen Funktion die Tangentensteigung angibt: $f'(x) = \tan(\alpha)$ in $P(x, y)$. Unter „differenzieren der Funktion f“ verstehen wir die Berechnung der Ableitung f'. Die Berechnungsmethoden für f' werden in der Differentialrechnung untersucht. Hier beschränken wir uns auf einfache Resultate.

Beispiele: (Beachte: $x^1 = x,\ \ x^0 = 1$)

$f(x)$	$f'(x)$
$const.$	0
$a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + a_1\,x^1 + a_0\,x^0$	$n\,a_n\,x^{n-1} + (n-1)\,a_{n-1}\,x^{n-2} + \ldots + a_1$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$c_1\,f_1(x) + c_2\,f_2(x)$	$c_1\,f_1'(x) + c_2\,f_2'(x)$
$f_1(x) \cdot f_2(x)$	$f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x)$
$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$	$\frac{f_1'(x) \cdot f_2(x) - f_1(x) \cdot f_2'(x)}{(f_2(x))^2}$
$f_1(f_2(x)) = f_1(z)$	$\frac{d\,f_1(z)}{d\,z} \cdot \frac{d\,f_2(x)}{d\,x},\ \ z = f_2(x)$

(b) Plane eine Zusammenfassung der Regeln mit Beispielen, die du in der Literatur finden kannst (sollte auf die 4. Lektion fertig sein).

2 Übersicht über den „Zoo der elementaren Funktionen“:

Studiere zu den „Zoo der Funktionen“, mit dem du dann arbeiten kannst bei der Lösung von Tangentenproblemen u.s.w..

Mögliche Liste: Konstante Funktionen, lineare Funktionen, quadratische Funktionen, Potenzfunktionen mit beliebigen Exponenten, Exponentialfunktionen, Logarithmusfunktionen, trigonometrische Funktionen und Umkehrfunktionen, Gaussklammerfunktion, Signumfunktion, Betragsfunktion u.s.w..

Aufgabe: Mache dir eine übersichtliche Zusammenstellung mit solchen Funktionen (Materialbereitstellung). Zu finden sind solche Funktionen z.B. im Skript Analysis. Notiere dir spezielle Eigenschaften und fertige Skizzen der Graphen an.

Link 1:

`http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html`

3 **Denkaufgabe für später:** Auf einer Schraubenlinie (Radius 3, Ganghöhe 1) wird in jedem Punkt aufwärts ein Stück Tangente der Länge 1 gezogen. Skizziere möglichst exakt (Computer!) die Kurve, die durch die Endpunkte der Tangentenstücke entsteht.

8.3 Zum „Zoo der Funktionen“...

Nach den Grundlagen des ECTS–Systems muss man bei uns auf eine Unterrichtslektion ca. eine bis vier Stunden Selbststudium rechnen. Damit sind Übungen, eigenständige Erarbeitung von Teilen des Stoffes, Prüfungsvorbereitungen, Arbeit mit Computerprogrammen u.s.w. gemeint. (1 ECTS entspricht 30 Stunden Arbeit. Bei 7 Lektionen z.B. entstehen so pro Lektion zusätzlich drei bis dreieinhalb Stunden Arbeit.)

Aufgabe: Bearbeite dieses Blatt 2, indem du dir dafür einen Studienplan bis zur nächsten Lektion machst. Halte diesen Studienplan dann auch ein.

Wichtig: Die Lösungen der folgenden Aufgaben (resp. die Resultate der eigenen Arbeiten) sind aufzubewahren und an die Schlussprüfung mitzubringen. Sie werden da gebraucht!

1 Stoffgruppe 2: Zum „Zoo der Funktionen“...

In der angewandten Praxis kommen sehr oft einfache Funktionen $f(x), g(x)....$ zur Anwendung und auch Zusammensetzungen davon. Um damit arbeiten zu können, muss man auch die wichtigsten Eigenschaften kennen. Auch muss man die heute gebräuchlichen Gelichungstyten voneinander zu unterscheiden wissen, damit man damit arbeiten kann. Hier einige (für nur eine Stunde zu viele) Stichworte dazu:

(a) Bestimmungsgleichungen, Funktionsgleichungen, Äquivalenzen, Gleichung als Aussagenlogische Aussage, Wertzuweisung an benannten Speicherplatz, Ungleichungen (quadratische...) u.s.w.
(b) Typen von Bestimmungsgleichungen
(c) Funktionen, Definitionsbereich, Wertebereich, Zahlen: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ Eigenschaften von $\mathbb{R}$
(d) Beispiele, reelle Funktionen: Problematik Bildbereich und Wertebereich
(e) Bsp. $f(n) = \sin(n), n \in \mathbb{N}$
(f) Intervalltypen (offen, abgeschlossen, halboffen, Umgebungen, Rand, unendlich,...)
(g) Problematik von Definitions- und Wertebereichen
(h) Folgen (Funktionen auf $\mathbb{N}$), Gauss-Klammer, Signum, Betrag, Eigenschaften...
(i) Betrag: Eigenschaften
(j) Konstante, lineare Funktion: Warum gibt es eine Gerade? (Mathematische und nicht physikalische Rechtfertigung)
(k) Quadratische Funktion, Kegelschnitte
(l) Potenzfunktionen, Parabeln, Hyperbeln
(m) Anzahl Nullstellen von Polynomen
(n) Pole
(o) Periodische Funktionen

(p) Punktweise und stückweise definierte Funktionen, diskrete Funktionen
(q) Verkettung von Funktionen
(r) Monotone und beschränkte Funktionen
(s) Gerade und ungerade Funktionen
(t) Umkehrabbildung
(u) Transzendente Funktionen wie trigonometrische Funktionen u.s.w.
(v) Eigenschaften von trigonometrischen Funktionen trigonometrische Funktionen
(w) Arcus–Funktionen
(x) Exponentialfkt.
(y) Logarithmus–Funktion
(z) Hyperbolische Funktionen und Areafunktionen

2 Plane eine weitere Zusammenfassung der Eigenschaften mit Beispielen, die du in der Literatur finden kannst (sollte auf die 5. Lektion fertig sein). Wenn die Zeit nicht reicht, so ist die Sache „auszudünnen“.

Link für Skripte (Analysis):

`http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html`

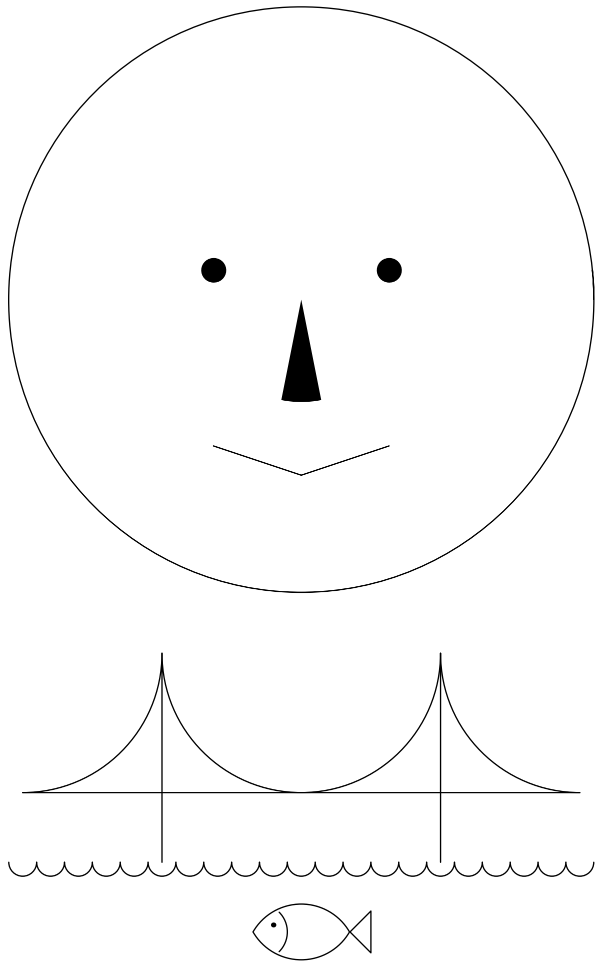
oder

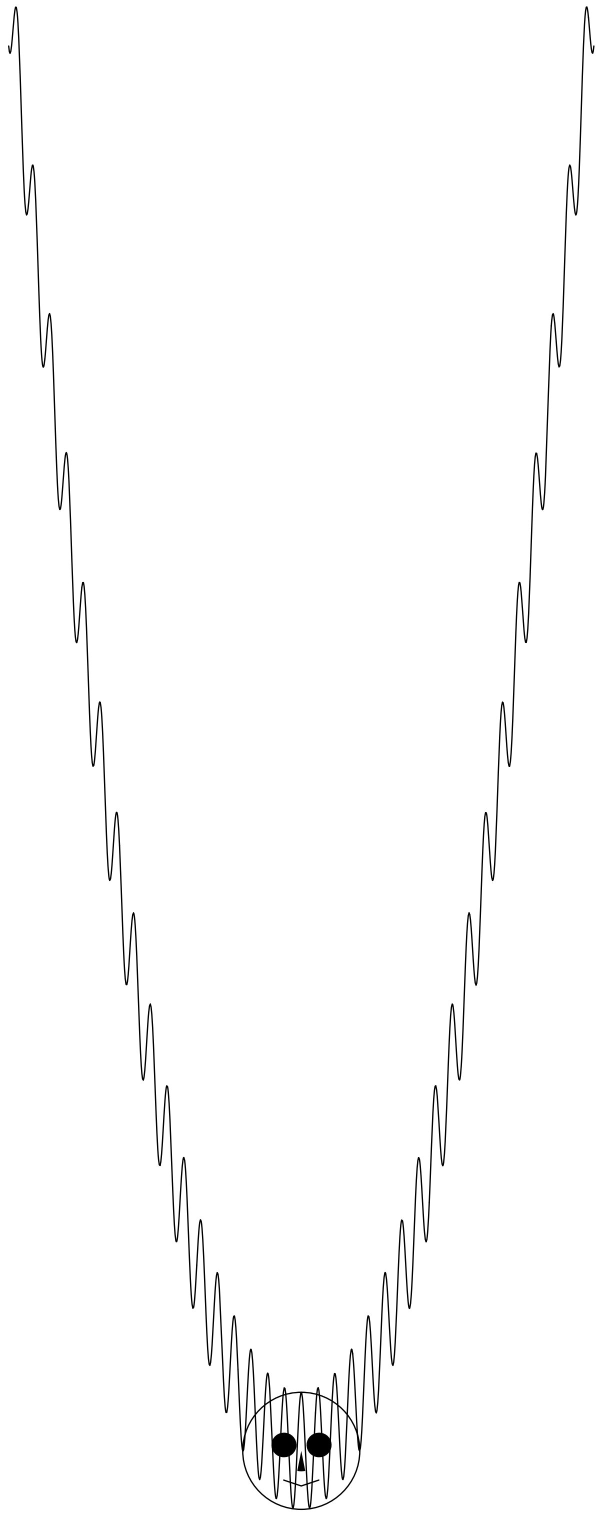
`http://www.rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html`

8.4 Spiel mit Funktionen

8.4.1 Benutze Funktionen, um einfache Zeichnungen zu machen

Hier naive Beispiele:





8.5 Steigungen von Kurventangenten

Die Steigung einer Kurventangente in einem Kurvenpunkt P_0 kann man als Grenzfall der Steigung einer Kurvensehne verstehen, welche durch P_0 geht. Für die Tangentensteigung hat man Formeln entwickelt. Mit ihrer Hilfe kann man die gesuchte Steigung aus der Formel für die Kurve berechnen.

1 Beispiel: Gegeben sei ein Polynom

$$f(x) = a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + a_1\,x + a_0.$$

Dann berechnet sich die Steigung $\tan(\alpha)$ an der Stelle x durch

$$f'(x) = n\,a_n\,x^{n-1} + (n-1)\,a_{n-1}\,x^{n-2} + \ldots + a_1 = \tan(\alpha).$$

Die Exponenten werden also einerseits zu Faktoren, und andererseits wird 1 von ihnen subtrahiert.

Aufgabe: Suche Literatur zu diesem Sachverhalt und studiere sie soweit das möglich ist.

2 **Bsp.:** $f(x) = 4\,x^3 - 5\,x^2 + 3\,x - 6 \;\Rightarrow\; \tan(\alpha) = f'(x) = 3 \cdot 4\,x^2 - 2 \cdot 5\,x^1 + 3\,x^0,\;\; x^0 = 1.$
An der Stelle $x = 4$ wird damit der Wert $\tan(\alpha) = 155$.

Aufgabe: Mache dazu eigene ähnliche Beispiele.

3 Gegeben ist die Parabel $y = f(x) = x^2$. Für ein fixes $x = x_0$ wird daher $y_0 = x_0^2$. Die Steigung in diesem Punkt ist daher $\tan(\alpha) = 2\,x_0$.
Damit können wir die Tangente an die Kurve durch $P_0(x_0; y_0)$ berechnen: $t(x) = a\,x + b$ mit $a = \tan(\alpha) = 2\,x_0$. Wir erhalten daher $t(x) = 2\,x_0\,x + b$. Im Punkte P_0 wird $t(x_0) = y_0 = x_0^2 = 2\,x_0\,x_0 + b = 2\,x_0^2 + b$. Damit finden wir $b = -x_0^2$.
Die beiden durch die Ordinate durch x_0, die Tangente, die x–Achse und die y–Achse gebildeten Dreiecke sind daher kongruent!

Aufgabe: Löse dieselbe Aufgabe für $f(x) = x^3$ sowie für $f(x) = x^4$. Was stellt man fest? Gibt es eine allgemeine Regel?

8.6 Regeln für die Steigungen von Kurventangenten

Die Steigung einer Kurventangente in einem Kurvenpunkt $P(x, y)$ bezeichnen wir mit f'. $f'(x)$ ist eine Funktion von x. Für solche Funktionen gelten Regeln. Nachfolgend sind die wichtigsten davon aufgelistet:

1 $f(x) = c = const. \;\Rightarrow\; f'(x) = 0$
(Ableitung einer Konstanten)

2 $f(x) = c^n \;\Rightarrow\; f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
(Ableitung einer Potenz)

3 $f(x) = a \cdot g(x) + b \cdot h(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = a \cdot g'(x) + b \cdot h'(x)$
(Linearität)

4 $f(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + a_2\, x^2 + a_1\, x + a_0$
$\Rightarrow\; f'(x) = a_n\; n\; x^{n-1} + a_{n-1}\, (n-1)\, x^{n-2} + a_2\, x\, x + a_1$
(Ableitung eines Polynoms)

5 $f(x) = \sin(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = \cos(x)$

6 $f(x) = \cos(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = \sin(x)$

7 $f(x) = e^x \;\Rightarrow\; f'(x) = e^x$

8 $f(x) = ln(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = \dfrac{1}{x}$

9 $f(x) = g(x) \cdot h(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$
(Produktregel)

10 $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)} \;\Rightarrow\; f'(x) = \dfrac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{(h(x))^2}$
(Quotientenregel)

11 $f(x) = g(h(x)) := g(z),\;\; z = h(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = \dfrac{d\,g(z)}{d\,z} \cdot \dfrac{d\,h(x)}{d\,x} = \dfrac{d\,g(z)}{d\,z}\Big|_{z=h(x)} \cdot \dfrac{d\,h(x)}{d\,x}$
(Kettenregel)

12 $f(f^{-1}(x)) = f(y) \;\Rightarrow\; (f^{-1}(x))' = (\dfrac{1}{f'(y)})\Big|_{y=f^{-1}(x)}$
(Ableitung der Umkehrfunktion)

Einige Beispiele sind in der Lektion gemacht worden. Andere finden sich in grosser Zahl in der Literatur über Differentialrechnung.

Möglichkeiten: $\rightsquigarrow$

Möglichkeiten für kostenlose Literatur:

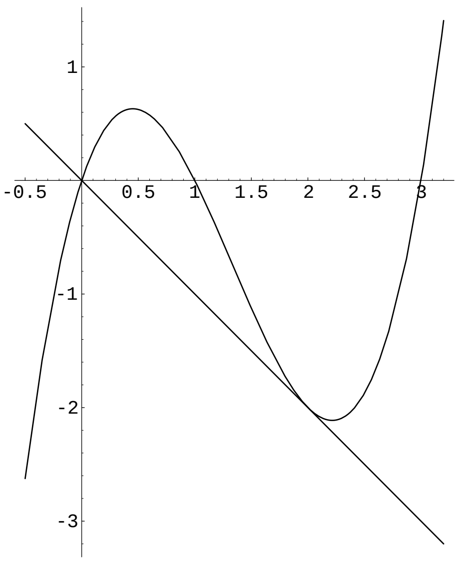
Beispiel 1: Differentialrechnung im Wikipedia
http://de.wikipedia.org/wiki/Differentialrechnung

Beispiel 2: Differentialrechnung in mathe-online
http://www.mathe-online.at/mathint/anwdiff/i.html
http://www.mathe-online.at/mathint/diff1/i.html

8.7 Beispiele von Problemen mit Steigungen von Kurventangenten

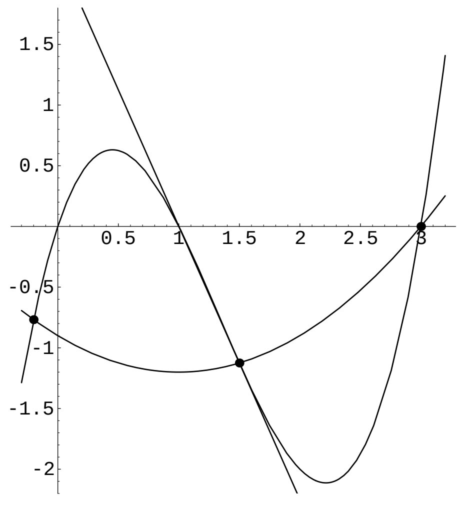
---

1



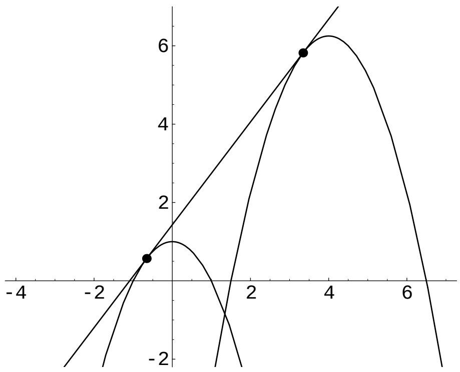
Durch die Punkte $P_1(6;0)$, $P_2(1;0)$, $P_3(3;0)$ soll eine Funktionskurve $f(x) = x^2 + b\,x + c$ gelegt werden. Von P_1 wird eine Tangente $t(x)$ an die Kurve gezogen. Wo berührt die Tangente die Kurve?
von f wissen wir wegen den durch die Punkte gegebenen Nullstellen: $f(x) = (x-0)(x-1)(x-3) = x^3-4\,x^2+3\,x$. Es gilt $t(x) = a\,x$ und $a = f\,'(x_0) = 2\,x_0^2-8\,x_0+3$ für den Berührungspunkt $P_0(x_0, f(x_0)) = P_0(x_0, t(x_0))$. Damit ist $a\,x_0 = x_0^3 - 4\,x_0^2 + 3\,x_0$. Damit hat man zwei Gleichungen für den Berührungspunkt, aus denen sich x_0 und a berechnen lassen:
$a = -1,\;\; x_0 = 2,\;\; f(x_0) = -2.$

2



Durch drei gegebene Punkt soll eine Kurve gezogen werden. Auf den ersten Blick scheint die gezeigte Parabel die best passende Kurve zu sein. Nun kennt man im mittleren Punkt aber auch die Tangentenrichtung. Damit ergibt es sich, dass die gezeigte quadratische Parabel keineswegs passt. Die jetzt am besten passende Kurve ist die gezeigte kubische Parabel. Man sieht daraus, wie wichtig hier die Tangente wird. Aus Messungen sieht man, dass die kubische Parabel durch die oben verwendete Funktion $f(x) = x^3 - 4\,x^2 + 3\,x$ gegeben ist.

3



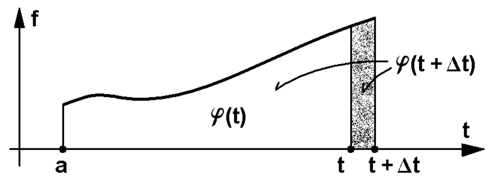
Durch zwei Funktionen
$f_1(x) = -(x-1)(x+1)$ und
$f_2(x) = -(x-1.5)(x-6.5)$ sind zwei Kurven definiert (siehe Bild).Gesucht ist eine gemeinsame Tangente $t(x)$.
Durch die Gleichungen
$t(x) = a\,x + b$,
$t(x_1) = f_1(x_1)$,
$t(x_2) = f_2(x_2)$,
$a = t\,'(x_1) = f_1'(x_1)$,
$a = t\,'(x_2) = f_2'(x_2)$ hat man vier Glei-chungen für die Unbekannten a, b, x_1, x_2. Damit verfügt man über ein Gleichungssystem, das lösbar ist. Man erhält als Näherung:
$t(x) = 1.43066 + 1.3125\,x$,
$x_1 = -0.65625, x_2 = 3.34375$.

4 Studiere den Inhalt von Internetseiten, auf denen Probleme mit Tangenten zur Sprache kommen. Beispiel:

`http://www.netschool.de/mat/dirs/dui_0.htm`

8.8 Flächenfunktionen, Flächeninhalte unter krummen Kurven

1 Wir definieren den Flächeninhalt zwischen der Kurve $f(x)$ und der x–Achse von $x = a$ bis $x = t$ als neue Funktion $A(t) = \varphi(t)$. Sicher wächst diese Funktion im nebenstehenden Beispiel, wenn t grösser wird.



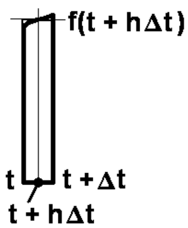
Was kommt wohl dabei heraus, wenn wir die Steigungsfunktion $\varphi'(t)$ (d.h. die Ableitung) berechnen? t ist der rechte, variable Endpunkt der x–Werte der Fläche unter der Kurve.

Es gilt: $\varphi'(t) = A'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t}$. Dabei ist die Differenz $A(t + \Delta t) - A(t)$ gerade der Flächeninhalt der dunkel gehaltenen Differenzfläche (Balken) rechts im Bild. Wir müssen danach hier den Inhalt des schmalen Balkens mit der Breite Δt und der ungefähren Höhe $f(t)$ bzw. $f(t + \Delta t)$ berechnen. Dabei können wir mit einer „mittleren Höhe“ $f(t + h \cdot \Delta t)$ rechnen.

Wie wir dem Bild rechts entnehmen, ist dann der Flächeninhalt

$$A(t + \Delta t) - A(t) = \Delta t \cdot f(t + h\,\Delta t)$$

$$\rightsquigarrow \quad \varphi'(t) \approx \frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta t \cdot f(t + h\,\Delta t)}{\Delta t} = \Delta t \cdot f(t + h\,\Delta t) \to f(t)$$



$\rightsquigarrow$ $\varphi'(t) = f(t)$. Das ist höchst erstaunlich und einfach. Die Flächeninhaltsfunktion $\varphi(t)$ ist demnach diejenige Funktion (Stammfunktion), deren Ableitung gerade $f(t)$ ist. Um $\varphi(t)$ herauszufinden, müssen wir uns daher fragen, welche Funktion abgeleitet f(t) ergibt. Konkret: Z.B. für $f(x) = x^2$ lautet die Frage: Welche Funktion $\varphi(t)$ ergibt abgeleitet $f(t) = t^2$? Da fällt einem natürlich sofort $\varphi(t) = \dfrac{t^3}{3} + const.$ ein. (Die Ableitung jeder Konstante ist ja 0.) Diese Konstante wird uns aber keine Schwierigkeiten machen, wie wir gleich sehen werden.

Will man z.B. die Fläche zwischen $x = 0$ und $x = t$ unter der Kurve $f(x) = x^2$ wissen, so kann man wie folgt argumentieren: Der Inhalt der Fläche unter der Kurve von einem unbekannten, als fix gedachten Punkt $x = x_0$ bis $x = t$ ist $\varphi(t) = \dfrac{t^3}{3} + const.$. Der Inhalt der Fläche unter der Kurve von $x = x_0$ bis $x = 0$ ist damit $\varphi(0) = \dfrac{0^3}{3} + const.$. Und so ist der Inhalt der Fläche unter der Kurve von $x = 0$ bis $x = t$ die Differenz

$$\varphi(t) - \varphi(0) = (\frac{t^3}{3} + const.) - (\frac{0^3}{3} + const.) = \frac{t^3}{3}.$$

Wir haben den Inhalt damit also berechnet! Z.B. für $t = 1$ ist er $\frac{1}{3}$.

2 Berechne den Inhalt der Fläche unter der Kurve der Funktion $f(x) = \sin(x)$ zwischen $x = 0$ und $x = \frac{\pi}{2}$!

Die Stammfunktion von $f(x) = \sin(x)$ ist bekanntlich $-\cos(x) + const.$, denn $(-\cos(x) + const.)' = \sin(x)$. Damit ergibt sich:
$Inhalt = -\cos(\frac{\pi}{2}) + const. - (-\cos(0) + const.) = -0 + const. - (-1 + const.) = 1.$
Ein unerwartet schönes Resultat!

3 Was ist der Inhalt der Fläche unter der Kurve der Funktion $f(x) = e^x$ zwischen $x = -\infty$ und $x = 0$?

Die Stammfunktion von $f(x) = e^x$ ist $e^x + const.$. Wir setzen links statt $x = -\infty$ vorerst $x = u$. Dann ist der Inhalt $A = e^0 + const. - (e^u + const.) = 1 - e^u$. Für $u \to -\infty$ geht $e^u \to \frac{1}{e^\infty} = 0$. Damit wird $A = 1$.

Dieses Resultat ist deshalb so erstaunlich, weil wir hier eine Fläche vor uns haben, die unendlich lang ist (negative x–Achse). Der Inhalt ist aber nicht unendlich, sondern exakt 1. Da es in der Natur keine unendlich langen Flächen gibt (Endlichkeit des Weltalls), haben wir hier keine physikalisch realisierbare Fläche vor uns.

4 Ein derart (wie oben) berechneter Flächeninhalt nennt man „bestimmtes Integral“. Man schreibt:

$$A = \int_{x=a}^{x=t} f(x)\, dx$$

Das Resultat ist dann die Masszahl der Fläche, wie wir sie oben in den Beispielen berechnet haben.

Eine einfache Darstellung dieses Stoffes für Mittelschulen findet sich z.B. unter:

`http://www.netschool.de/mat/dirs/dui_0.htm`

8.9 Test

◇ Test ◇ **◇ Version A2a Bu ◇ 04 05 ◇**

Aufgabe 1 **(je 3 Punkte)**

(a) Erkläre den mathematischen Begriff **reelle Funktion**. (Mit „reell“ ist gemeint, dass als Urbilder und Bilder nur reelle Zahlen zugelassen sind.) Zeige dazu Beispiele. *Richtlinie bezüglich maximalem Umfang: Ca. eine halbe Seite.*

(b) Erkläre die mathematische Begriff **Tangentensteigung** am Beispiel einer Geraden. Zeige dazu Beispiele. *Richtlinie bezüglich maximalem Umfang: Ca. eine halbe Seite.*

Aufgabe 2 **(je 12 Punkte)**

Fasse deine Kenntnisse zum Thema **Tangenten an Kurven** zusammen. Erwartet wird eine strukturierte listanartige Übersicht.
Richtlinie bezüglich maximalem Umfang: Ca. 1 – 2 Seiten.

Viel Glück!

WIR1

Kapitel • Chapitre 9

Kurs 3 (3. Jahr)

9.1 Synthese von Flächen und Schläuche (Schnecken)

Nach den Grundlagen des ECTS–Systems muss man bei uns auf eine Unterrichtslektion ca. eine bis vier Stunden Selbststudium rechnen. Damit sind Übungen, eigenständige Erarbeitung von Teilen des Stoffes, Prüfungsvorbereitungen, Arbeit mit Computerprogrammen u.s.w. gemeint. (1 ECTS entspricht 30 Stunden Arbeit. Bei 7 Lektionen z.B. entstehen so pro Lektion zusätzlich drei bis dreieinhalb Stunden Arbeit.)

Aufgabe: Bearbeite dieses Blatt 1, indem du dir dafür einen Studienplan bis zur nächsten Lektion machst. Halte diesen Studienplan dann auch ein.

Wichtig: Die Lösungen der folgenden Aufgaben (resp. die Resultate der eigenen Arbeiten) sind aufzubewahren und an die Schlussprüfung mitzubringen. Sie werden da gebraucht!

1 Stoffgruppe 1: Synthese von Flächen und Schläuche (Schnecken)

   (a) Spiel mit Funktionen zum „Aufwärmen": Entwerfe eine Landschaft mit Hilfe von Funktionen $f : x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) \in \mathbb{R}^2$ und stelle diese mit dem Computer dar. (Sie sollte zur späteren Aufnahme eines Vordergrundes nutzbar sein.)

   (b) Die Vektorfunktion $\vec{v}(t) = 5 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$ beschreibt eine Schraubenlinie. Wenn man entlang dieser Schraubenlinie einen Kreis mit Radius $r = 1$ führt, wobei in jedem Punkt die Kreisebene jeweils orthogonal zur Tangente der Schraubenlinie steht, entsteht ein Schlauch.
   Schlauchartige Gebilde finden wir neben Industrieanwendungen etwa z.B. in Rutschbahnen von Badeanstalten, Passarellen, Flughafeneinrichtungen, U-Bahnen, Treppengehäuse oder futuristischen Bauten.

   Aufgabe: Versuche diesen Schlauch mathematisch zu beschreiben und dann mit dem Computer mittels Vektorgraphik exakt zu zeichnen. (Programm frei. Eventuell

ist auch eine Handzeichnung möglich. Doch der Aufwand wäre hier beträchtlich.)
Hinweis: Zuerst muss die Tangentenrichtung bestimmt werden, bevor die Orthogonalität gebraucht werden kann.

Beispiel archimedische Spirale: $\vec{v}(t) := r_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$ mit der Tangentenrichtung $\vec{v}\,'(t)$. Zur Tangente brauchen wir in einem Punkt einen senkrechten Vektor $\vec{u}(t)$ mit $\langle \vec{v}\,'(t), \vec{u}(t) \rangle = 0$ sowie einen zweiten senkrechten Vektor $\vec{w}(t) = \vec{v}\,'(t) \times \vec{u}(t)$ als Basis um einen Kreis aufzunehmen mit den Vektorkoordinaten $r_2 \begin{pmatrix} \cos(s) \\ \sin(s) \end{pmatrix}$.

Bestimme als Beispiel auch numerisch den Volumeninhalt einer solchen Spirale mit drei Windungen.

2 Fraktale Gebilde

Falls die Zeit noch reich und obige Aufgabe beendet ist, so orientiere dich im Skript „Architekturmaterial" über fraktale Gebilde.

Link 1:

`http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KArch3.pdf`

Aufgabe: Versuche selbst, ein fraktales Gebilde zu entwerfen und mit dem Computer darzustellen. Wichtig: Es kommt weniger auf die Zeichnung an. Viel wichtiger ist das Verständnis des Weges!

9.2 Jetzt ist eine Variantenwahl notwendig! Folgende Themenkreise sind möglich. . .

Nach den Grundlagen des ECTS–Systems muss man bei uns auf eine Unterrichtslektion ca. eine bis vier Stunden Selbststudium rechnen. Damit sind Übungen, eigenständige Erarbeitung von Teilen des Stoffes, Prüfungsvorbereitungen, Arbeit mit Computerprogrammen u.s.w. gemeint. (1 ECTS entspricht 30 Stunden Arbeit. Bei 7 Lektionen z.B. entstehen so pro Lektion zusätzlich drei bis dreieinhalb Stunden Arbeit.)

Aufgabe: Studiere dieses Blatt 2 und überlege dir die interessanteste Variante.

Wichtig: Die Lösungen der Aufgaben (resp. die Resultate der Arbeit) sind aufzubewahren und an die Schlussprüfung mitzubringen. Sie werden da gebraucht!

1 Stoffgruppe 2: Jetzt ist eine Variantenwahl notwendig! Folgende Themenkreise sind möglich:

   (a) Themen aus „Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik“. (Schliesst Architektur ein.)

      i. Kurze Einführung
      ii. Internet–Recherche oder
      iii. Sichtung von Literatur und kurze Präsentation: Was könnte ich gebrauchen?
      iv. Graphische Behandlung und explorative Vertiefung in den Stoff: Abwandlung der gewählten Formen und Flächen, so dass sie je nach Interessenlage gewählte Eigenschaften bewahren (vorerst rein qualitativ, jedoch mit relativ exakten Skizzen). Das Resultat wird zeigen, wie weit eine Weiterbearbeitung möglich ist.

   (b) Das Einsteinjahr: Streifzug durch die Relativitätstheorie (4 - 6 Lektionen)

   (c) Weiter nach Stoffplan (Konzept reduzierte Math., htm-File, Link auf Klassenseite): Das Problem der Minimalfläche (Seifenhäute!), Gitterflächen, mathematische Formen, Anwendungen in der Architektur. Abhandlung wie eingangs beschrieben.

   (d) Seifenblasen

   (e) Themenvorschlag der Studierenden.

   (f) In kurzer Zeit neues Thema aus der Auswahl in Link 1 evaluieren:

`http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KArch3.pdf`

2 Die Weiterarbeit ist jetzt abhängig von der Variantenwahl. . .

9.3 Beispiel 1 –Programm zu einer Arbeit

9.3.1 Beispiel 2005/ 06: Projekt 1

Arbeit im Themenbereich "Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik"(einschließlich Architektur) A03a (Einschränkung des Themas auf die Teilbereiche der im abgegebenen Text behandelten gekrümmten Kurven und Flächen.)

21.12. 05 Wir1

Grundlage:

Werk mit dem genannten Titel von Prof. Georg Glaeser (Institut für diskrete Mathematik und Geometrie an der Hochschule für angewandte Kunst in Wien).
Zugehörige Webseite: http://www.uni-ak.ac.at/geom/opengeometry_gallery.php

Thema der Arbeit:

Aspekte im Beziehungsfeld Mathematik - Architektur im weiteren Sinneäm Beispiel von ...xxx...

Phase 1:

Einarbeitung: Sichten (teilweise lesen) des gegebenen Textmaterials.
Hinweis: Es wird zeitlich kaum möglich sein, den ganzen Text zu lesen. Aus Zeitgründen ist man zum "Querlesenünd zur Auswahl gezwungen.
Ziel: Engere Begrenzung auf bevorzugte Teilthemen. Bei Bedarf noch Literatursuche (auch Internet). *Termin 1:* Themen zur Genehmigung abgeben bis **16.1.06**. (Mail an Wir1).

Phase 2:

Engere Themenwahl: Einschränkung auf ein einziges bevorzugtes Thema.
Bedingung: Die einzelnen Themen dürfen sich unter den Kursteilnehmern nicht decken. (Sie können sich aber berühren).
Termin 2: Ende Klärung von Überschneidungsfragen, Auskunft zum engeren Konzept: Am **16.1.06**.

Phase 3:

Ausarbeitung: Bearbeitung des gewählten Themas.
Form + Umfang: Format A4 mit minimaler Randbreite 3 cm. Handschrift - oder auch 11-er oder 12-er-Schrift ohne größere leere Zwischenräume, keine Füllseiten. Richtwert: Total 2 bis 10 Seiten Papier.

Termine 3: Kurzer mündlicher Zwischenbericht am **30.1.05**, Abgabe am **15.2.06** (Lektion).

Mögliches Konzept zum inhaltlichen Aufbau: Vlg. Rückseite $\rightsquigarrow$

9.3.2 Mögliches Konzept zum inhaltlichen Aufbau

a) **Deklarative Komponente (Faktenwissen):**

1 Kurze Präsentation des Objekts (d.h. der gewählten Realität aus der Architektur resp. aus deren Umkreis).

2 Kurze und fachlich saubere Darstellung der damit verbundenen Komponente aus der Mathematik. (Für die mathematische Komponente wird ein Anspruch erwartet, der über die alltägliche Erfahrung mit fixe Gerade, Ebene, Kreis, Kugel und sonst nichts"hinausgeht.)

b) **Prozedurale Komponente (Anwendung):**

1 In den Zeitrahmen passende Erarbeitung von geometrischen Verwandlungen, Transformationen, Ergänzungen oder dualen Strukturen zum gewählten Objekt nach *eigener Initiative.*

2 Beschreibung (oder Analyse) der mit der Veränderung verbundenen Folgen für die mathematische Komponente.

c) **Strategische Komponente (Einbau in ein Netz):**

1 Diskussion zum Thema Strategie zu obigen Komponenten und alternativen Methoden.

2 Abschätzung von Aufwand und Ertrag infolge Mathematik. (Beispiel: Abwägung der Antworten zu folgenden Fragen: "Was kostet die eigene Einarbeitung in das notwendige Gebiet an Zeit?". Alternative: "Was kostet der Einkauf von Know-how und was kosten die Folgen?".)

3 Diskussion zum Thema ,,reeller und ideeller Nutzen“?

d) **Formale Komponenten:** Titel, Autor, Institution, Datum, Literaturnachweis, Bildnachweis

21.12. 05 Wir1

9.3.3 Beispiele für Themen

1 Thema Kugel: Dies im Zusammenhang mit entweder einer Kuppel bzw. der Kuppel des Pantheons oder der Utopie der Kenotaphe für Newton von Boullée. Problem Pantheon: Was für Proportionen z.B. in den Kassetten.

2 Kugel mit praktischer Anwendung - Fuller, Montreal, Expo-Dom - Kugeln, Form der Zellen (regulär?).

3 Spirale–City Hall - Problem: Welche Spiralen.

4 Math. Formen: Islerschalen - Identifikation der Flächenformen? Keine Minimalflächen - schon wegen der Krümmung (Summe der Hauptkrümmungen nicht null).

5 Math. Formen: Reichstagskuppel- Wikipedia - Problem: Welche Formen/ Typen wieso? (Ellipsen?).

6 Ellipse - Botta San Francisco Zylinder - wieso diese Neigung wieso diese Proportionen?

7 Math. Formen: Calatrava-Brücken.

8 Ellipse Kolosseum–Problem: Wieso hier Ellipse? Erstmals? Vorteile, Nachteile, . . . Praktische Gründe? Formen: Herzog & de Meuron Allianz-Arena München.

9 Der Torus als Prototyp für alle anderen Drehflächen, speziell mit dem Drehellipsoid.

10 Bauwerk: Mit Ellipsenform.

11 Unendlichen Vielfalt der gekrümmten Flächen am Beispiel von Frank O. Gehry. Problem: Welche Körper? Freiformen? Analyse?

12 Kegelflächen - im engeren Sinne über die Türme an der Expo02 in Biel. Problem: Geometrisches Gerüst hinter der Sache?

13 Pyramidenformen (Louvre u.s.w.).

14 Themenkreis Photos, Verzerrung im Hirn, Abbildungen, Perspektive.

15 Salginatobelbrücke Schiers. Brücke: Welche Form? Kurvenart?

16 Minimalflächen in Dächern u.s.w. - Sonnen- oder Regensegel.

9.4 Beispiel 2 –Programm zu einer grösseren Arbeit

9.4.1 Beispiel 2005/ 06: Projekt 2

Gewicht eines leeren Gebäudes von großem öffentlichen Interesse für die Menschheit bestimmen (Z.B. UNESCO-Weltkulturerbe, Beispiel Dom von Florenz). Gewicht = ?

Gerüst:

1 Geometrische Darstellung, Aufbau, Pläne und / oder Ansichten.

2 Wichtige Masse.

3 Ev. notwendige Maßkontrollen (Vermessungen und Berechnungen).

4 Materialien.

5 Berechnungen.

6 Genauigkeit (Angabe der notwendigen Vereinfachungen, Abschätzung der Fehler).

7 Weitere Fragen:

- (a) Z.B. wie viele Quadratmeter Wald waren notwendig für das Brennen der Backsteine?
- (b) Welche Transportstrecke wurde total zurückgelegt (aufsummiert)?
- (c) Wie viele Transportesel waren notwendig für den Materialtransport?
- (d) Wie viele Menschen mussten wie lange für die Finanzierung arbeiten?
- (e) Wie viele Bauarbeiter und Zulieferer waren notwendig?
- (f) Wie viele Menschen mussten wie lange für die Versorgung der Bauarbeiter mit Essen arbeiten u.s.w.?

Benotung siehe Rückseite.

Benotung:

1 Grundlage der Benotung: Weiter ist dann auf einen noch zu nennenden Termin eine Arbeit abzuliefern, die mit der Inputzeit zusammen z.B. als ca. 180 Arbeitsstunden (6 ECTS) gewertet werden kann.

2 Das Benotungsschema ist wie folgt:

   (a) Note 4 $\leadsto$ Alles richtig (gut gelernt und gearbeitet, tieferes Verständnis der Sache nicht ersichtlich).

   (b) Note 5 $\leadsto$ Alles richtig, tiefes Verständnis ersichtlich.

   (c) Note 6 $\leadsto$ Alles richtig, tiefes Verständnis ersichtlich und auch noch Fähigkeit vorhanden, in der Sache eigene Fragen zu entwickeln.

   (d) Sonst gilt:

      i. Note 1 $\leadsto$ Nicht anwesend oder nichts abgegeben.

      ii. Note 2 $\leadsto$ Arbeit nicht auf dem Niveau einer Hochschule.

      iii. Note 3 $\leadsto$ Arbeit zwar auf dem Niveau einer Hochschule, doch die verlangten ca. 180 Stunden sind nicht ausgewiesen (Journal, nachvollziehbar).

3 Diese Regelung schützt uns vor dem Vorwurf der Korruption. Ich denke daher, dass wenn jemand einigermassen Einsatzfreude beweist, die Sache für diese Person nicht wirklich schief gehen kann und die ECTS gegeben werden können.

Wir1

9.4.2 Eine grobe Schätzmethode für Gebäudegewichte

Studierende[1] haben in einer Arbeit auf der Grundlage von eigenen Messungen, beschafften oder nachge-zeichneten Plänen, Schätzungen, Archivmaterial, vorhandenen Datenbanken u.s.w. die Gewichte und die Materialvolumina einer Anzahl von mehr oder weniger bekannten Gebäuden ermittelt. Die Resultate sind in der unten beigefügten Tabelle wiedergegeben. Auf der Grundlage dieser Resultate können wir nun eine Schätzmethode validieren.

Einfachstes Modell: Wir gehen von der Annahme aus, beim Gebäude handle es sich um einen Quader mit der Breite a, der Länge b und der Höhe h. Weiter nehmen wir an, dass die Verhältnisse dem Gesetze des goldenen Schnitts genügen: $b : a = a : h = \varrho = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Dann gilt: $h = a \cdot \varrho = b \cdot \varrho^2$. Sei d die Wanddicke. Wir nehmen weiter an, dass das Materialvolumen ungefähr der folgenden Gleichung genügt:

$$V = 2\,d\,(a\,b + a\,h + b\,h) = 2\,d\,(b \cdot \varrho \cdot b + b \cdot \varrho \cdot b \cdot \varrho^2 + b \cdot b \cdot \varrho^2) = 2\,d\,b^2\,\varrho\,(1 + \varrho + \varrho^2) \approx 2.47\,d\,b^2$$

Bei geschätztem d (unten in Metern) und bekanntem V ergibt sich daraus die plausibel nachvollziehbare, derart geschätzte Gebäudelänge (unten in Metern) zu

$$b = \sqrt{\frac{V}{2\,d\,\varrho\,(1 + \varrho + \varrho^2)}} \approx 0.636\,\sqrt{\frac{V}{d}}$$

Was, wo?	m^3	Tonnen t	$\frac{t}{m^3}$	A	40–t–LKW	d	Schätzung b
Haus Kt. Bern	120.2	300.5	2.5	.	7.5×10^0	0.5	9.9
Erechtheion	1243.7	3233.3	2.6	.	8.1×10^1	0.5	31.7
Campanile d.S.Marco Venezia	7040.2	11654.1	1.7	.	2.9×10^2	2	37.7
Stadttheater Bern	5621.5	11762.2	2.1	.	2.9×10^2	0.5	67.4
Villa Rotonda, Palladio	4737.6	12413.6	2.6	.	3.1×10^2	0.5	61.9
Brandenburger Tor	5212.7	13038.0	2.5	.	3.3×10^2	1	45.9
Duomo di Firenze	89617.7	197159.0	2.2	7771.2	4.9×10^3	1	190.4

Aus den Resultaten sieht man, dass die Schätzung realistisch ist. Sogar der im Vergleich zu seiner Höhe nur wenig breite Campanile die San Marco erzeugt keine unsinnige Dimension von b.

9.4.3 Zur Interpretation der gewonnenen Zahlen

Weiter ist in der Tabelle das Transportproblem (LKW) angetönt. Dabei hat man mit einer Ladekapazität von 40 Tonnen pro LKW (Lastwagen) gerechnet. In der Realität füllen jedoch schon 20 t Backsteine einen solchen LKW (wegen dem Volumen). Beim Dom von Florenz wären daher total ca. 10′000 Lastwagen notwendig gewesen. Rechnet man aber mit Transporteseln zu 100 kg pro Esel, so kommt man auf die Zahl von ca. 2 Millionen Eselstransporten. Man bedenke die Bedeutung dieser grossen Zahl angesichts der Tatsache, dass eine grosse mittelalterliche Stadt vielleicht 20′000 bis 30′000 Einwohner hatte, welche infolge der Lebenssicherung nur zu einem geringen Teil am Bau teilgenommen haben konnte. In der Literatur wird die Position

[1]Berner Fachhochschule, HSB, Klasse A04p

vertreten, dass der Kuppelbau des Domes zu Florenz unter Brunelleschi zwölf Jahre gedauert hat. Aus der Arbeit eines Studierenden[2] geht hervor, dass in diesen zwölf Jahren ca. 19′000 Tonnen nach oben gebracht werden mussten. Bei angenommenen 60 beteiligten Arbeitern (zu viele konnten es nicht sein, denn sonst wären sie sich gegenseitig auf die Füsse getreten. . .) und 250 Arbeitstage pro Jahr, kommt man auf einen durchschnittlichen Materialverbau von ca. 100 kg pro Person und Tag. (Bei diesem Durchschnitt ist zu berücksichtigen, dass nicht alle auf dem Bauplatz beschäftigten Arbeiter direkt Material verbaut haben können. Einige waren mit dem Materialeinbau beschäftigt, andere aber mit Logistik, Gerüstbau u.s.w..) Umgerechnet auf den ganzen Dom kommt man aus diesen Zahlen bei einem Gewicht von ca. 200′000′000 kg auf rund 2′000′000 „Mannarbeitstage“. Bei durchschnittlich 60 Mann ergibt das 130 Jahre ununterbrochene Bauzeit. Ein Marktflecken mit 2000 bis 3000 Seelen hätte sich das neben all den anderen öffentlichen Bautätigkeiten (Herren– und Adelshäuser, Wehranlagen) kaum leisten können. Für eine Stadt mit ca. 30′000 Einwohnern ist die Belastung im Bereich des Möglichen vorstellbar. Vermutlich hat es aber die Grenzen dieses Möglichen erreicht. . .

Es ist nun dem Leser überlassen, aus den Zahlen weitere Folgerungen zu ziehen. Z.B. ob ein Gebäude schwimmen[3] würde unter der Annahme, es habe dieselben Dimensionen, dasselbe Gewicht und es sei zusätzlich noch dicht. Das würde dann Schlüsse zulassen auf die Folgen einer Zunahme des Grundwasserdrucks und die Deformationsfolgen bei dichten Kellern. . .

[2] Herr H. Menzi

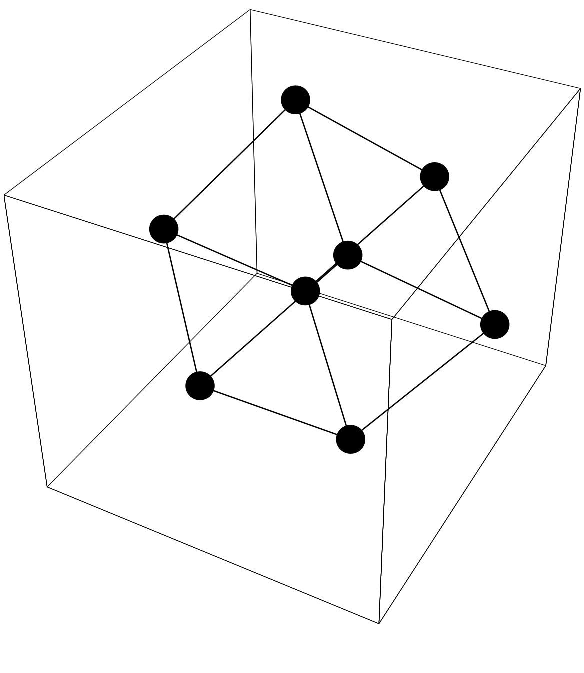
[3] Nach den Zahlen aus der erwähnten Arbeit von Herrn H. Menzi würde der Dom von Florenz sehr gut schwimmen

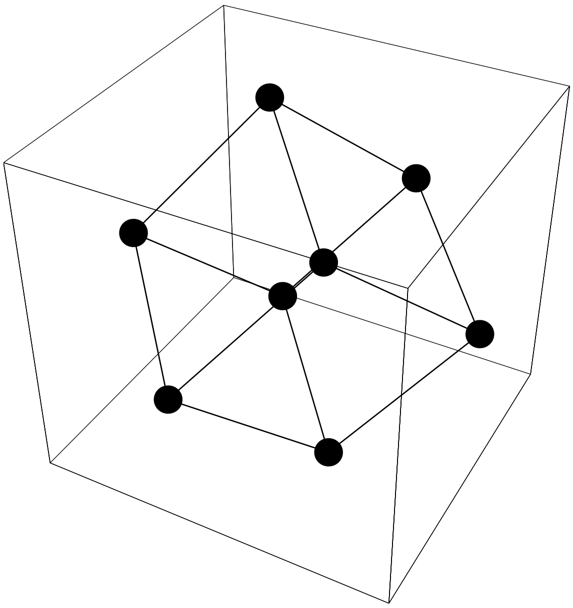
Kapitel • Chapitre 10

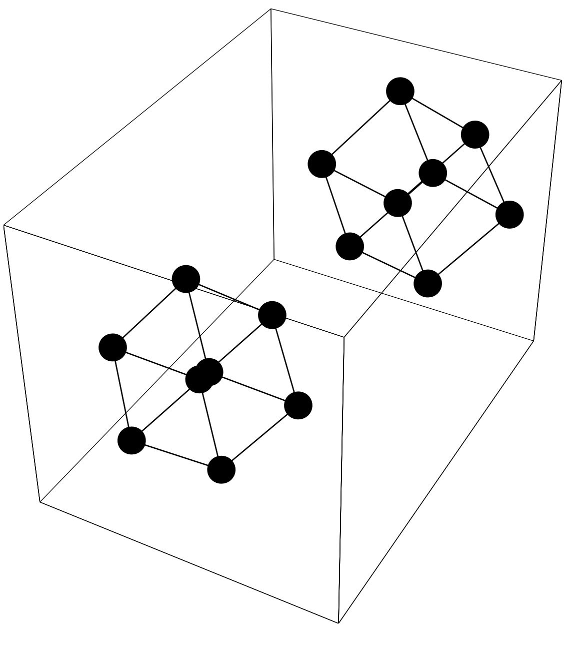
Einige Lösungen

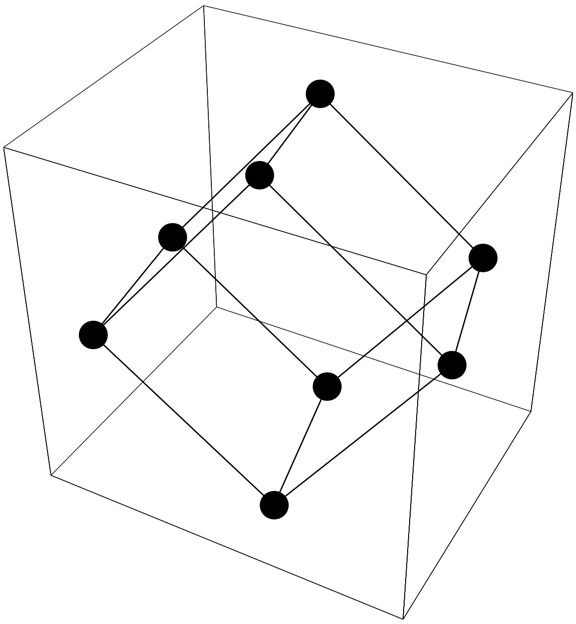
10.1 Serie A1.1

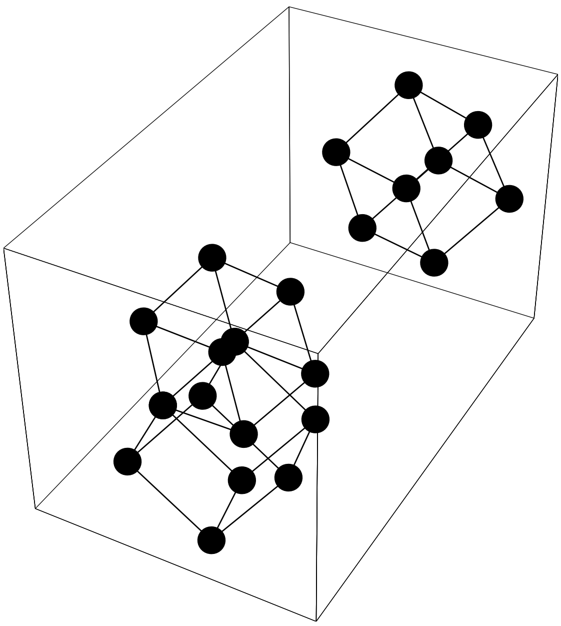
10.1.1 Output

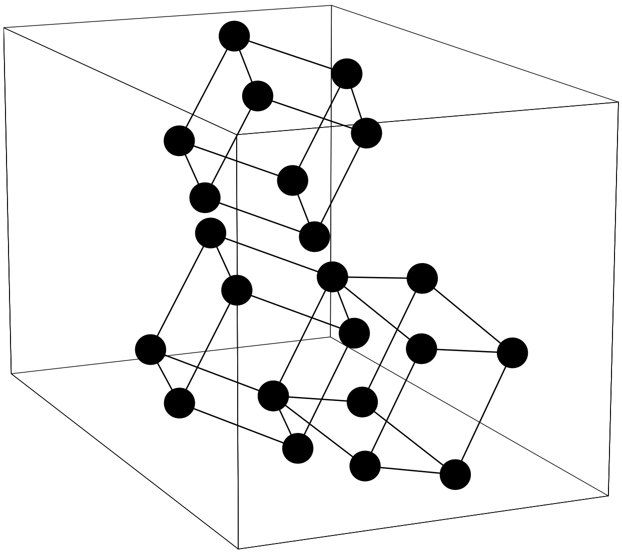












10.2 Serie A1.2, zu Aufgabe 2

Ausgangsposition

$\{1, 1, 1\}$

Drehung um die z-Achse um 60 Grad

$\left\{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right\}$
$\{-0.366025, 1.36603, 1.\}$

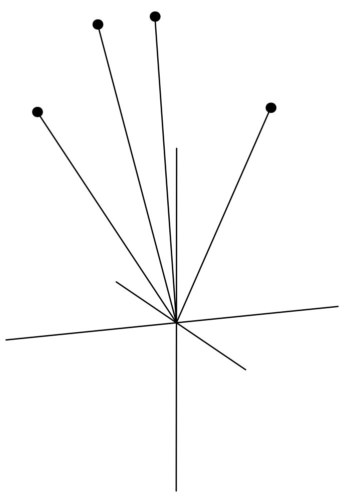
Drehung um die x-Achse um 45 Grad

$\left\{\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{3}\right), \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right\}$
$\{-0.366025, 0.258819, 1.67303\}$

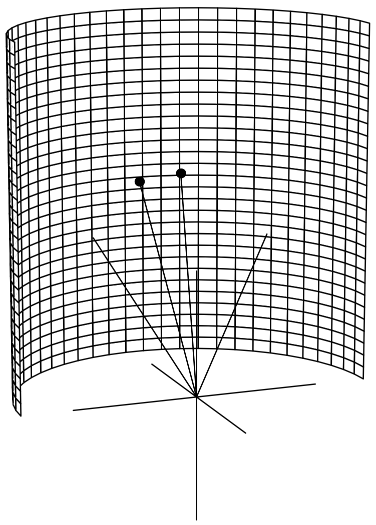
Drehung um die z-Achse um -60 Grad

$\left\{\frac{1}{4}\left(1 - \sqrt{3}\right) + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\left(-1 + \sqrt{3}\right),\right.$
$\left.-\frac{1}{4}\sqrt{3}\left(1 - \sqrt{3}\right) + \frac{-1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right\}$
$\{0.0411312, 0.446397, 1.67303\}$

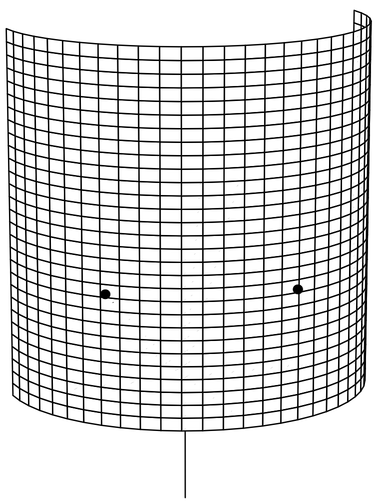
Zeichnung



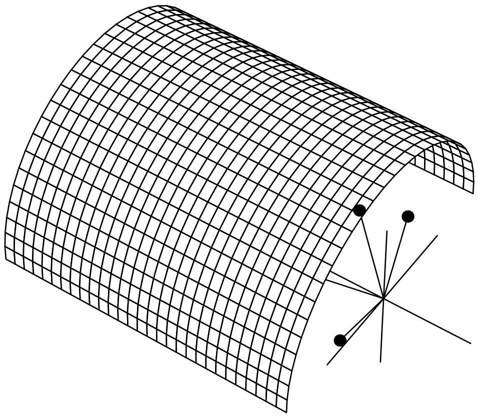
Sicht von der negativen x- und y-Achse



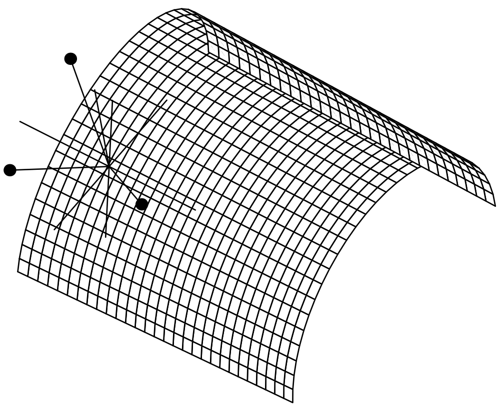
Sicht von der positiven x- und y-Achse



Sicht von oben



Sicht von unten



10.3 Serie A1.2, Lösungen

10.3.1 1: Lösungen

Assoziativgesetz, Existenz des Nullelements, Existenz des Inversen, Kommutativgesetz, Assoziativität mit Skalaren, Distributivität

10.3.2 2

$a = \{2, 1, 1\}; b = \{1, 4, 3\}; c = \{3, 2, -2\};$
$v = a - b + 3c$
$\{10, 3, -8\}$
$Norm[v]$
$\sqrt{173}$
$Norm[v]//N$
13.1529

Vektorlänge 13.1529 = $\sqrt{173}$

10.3.3 3

$F1 = \{-2, -1, -1\}; F2 = \{-1, -4, -3\};$
$a = \{0, 1, 1\}; b = \{1, 4, 2\}; c = \{2, 0, 1\};$
$Solve[F1 + F2 == \lambda a + \mu b + \nu c, \{\lambda, \mu, \nu\}]$
$\{\{\lambda \to -1, \mu \to -1, \nu \to -1\}\}$
$F1 + F2$
$\{-3, -5, -4\}$

Es gilt: R = F1+F2 = (-1) a + (-1) b + (-1) c

10.3.4 4

Sich die Formel merken

10.3.5 5

Kommutativgesetz, Orthogonalitätsgesetz, Distributivität Assoziativität mit Skalaren

10.3.6 6

a

$a = \{-2, -1, -1\}; b = \{-1, -4, -3\};$
$a.b$
9
$\phi = ArcCos[a.b/(Norm[a]Norm[b])]$
$ArcCos\left[\frac{3\sqrt{\frac{3}{13}}}{2}\right]$

$\phi = ArcCos[a.b/(Norm[a]Norm[b])]//N$
0.766163
$\phi/Degree$
43.8979

Winkel 43.8979 Grad

b

$a = \{-2, -1, -1\}; b = \{-1, -4, z\};$
$a.b$
$6 - z$
$ba = a.b/Norm[a]$
$\frac{6-z}{\sqrt{6}}$
$ba == 2$
$\frac{6-z}{\sqrt{6}} == 2$
$Solve[ba == 2, \{z\}]$
$\{\{z \to \sqrt{6}\left(-2 + \sqrt{6}\right)\}\}$
$Solve[ba == 2, \{z\}]//N$
$\{\{z \to 1.10102\}\}$

z = $\sqrt{6}$ (-2+$\sqrt{6}$) , etwa 1.10102

10.3.7 7

$d = \{1, 1, 1\};$
$k1 = \{1, 0, 0\};$
$k2 = \{1, 1, 0\} - k1;$
$k3 = d - \{1, 1, 0\};$
$\{k1, k2, k3\}$
$\{\{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}\}$
$proj1 = d.k1/Norm[d]$
$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$proj1//N$
0.57735
$proj2 = d.k2/Norm[d]$
$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$proj1//N$
0.57735
$proj2 = d.k2/Norm[d]$
$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$proj2//N$
0.57735
$proj3 = d.k3/Norm[d]$
$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$proj3//N$
0.57735

Alle Projektionen haben die Längen $\frac{1}{\sqrt{3}}$, ungefähr 0.57735

10.4 8 Maschinenrechnung mit schnellen Hilfsmitteln, welche noch nicht besprochen sind (bitte nur Resultate beachten)

Remove["*Global*‘*"]

Mögliche Ecken von T1:

$d[\varphi\_] := \{\{Cos[\varphi], -Sin[\varphi], 0\}, \{Sin[\varphi], Cos[\varphi], 0\}, \{0, 0, 1\}\};$
$d[\varphi]//MatrixForm$
$$\begin{pmatrix} Cos[\varphi] & -Sin[\varphi] & 0 \\ Sin[\varphi] & Cos[\varphi] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$e1 = \{1, 0, 0\};$
$e2 = d[120Degree].e1$
$\left\{-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right\}$
$e3 = d[240Degree].e1$
$\left\{-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right\}$
$h = 3/2Norm[e1]$
$\frac{3}{2}$
$h = Sqrt[Norm[e2 - e1]\hat{}2 - (Norm[e2 - e1]/2)\hat{}2]$
$\frac{3}{2}$
$e4 = \{0, 0, h\}$
$\left\{0, 0, \frac{3}{2}\right\}$

Ecken von T2:

$t1 = (e2 + e3 + e4)/3$
$\left\{-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{2}\right\}$
$t2 = (e1 + e3 + e4)/3$
$\left\{\frac{1}{6}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\right\}$
$t3 = (e1 + e2 + e4)/3$
$\left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\right\}$
$t4 = (e1 + e2 + e3)/3$
$\{0, 0, 0\}$

Zachenhöhe: Länge der Projektion von e4-t1 auf e4

$h1 = (e4 - t1).e4/Norm[e4]$
1

Die Zachenhöhe ist 1

$h1/h$
$\frac{2}{3}$

Sternvolumen: Volumen des inneren Tetraeders plus 4 Zackenvolumina

$VaeusseresTetraeder = Det[\{e4 - e1, e4 - e2, e4 - e3\}]/6$
$\frac{3\sqrt{3}}{8}$
$\%//N$
0.649519
$VinneresTetraeder = Det[\{t4 - t1, t4 - t2, t4 - t3\}]/6//Abs$
$\frac{1}{24\sqrt{3}}$
$\%//N$
0.0240563
$Vzacken = Norm[Cross[t3 - t1, t4 - t1]]/2 * h1/3$
$\frac{\sqrt{\frac{5}{6}}}{18}$
$\%//N$
0.0507151
$VStern = VinneresTetraeder + 4Vzacken$
$\frac{1}{24\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{\frac{10}{3}}}{9}$
$\%//N$
0.226916
$VStern/VaeusseresTetraeder$
$\frac{8\left(\frac{1}{24\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{\frac{10}{3}}}{9}\right)}{3\sqrt{3}}$
$\%//N$
0.349361
$VStern/VaeusseresTetraeder100//N$
34.9361

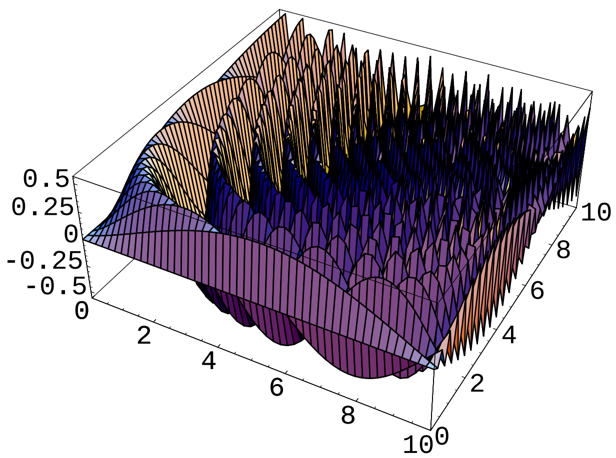
Das Sternvolumen ist ca. 34.9361 % des Tetraedervolumens

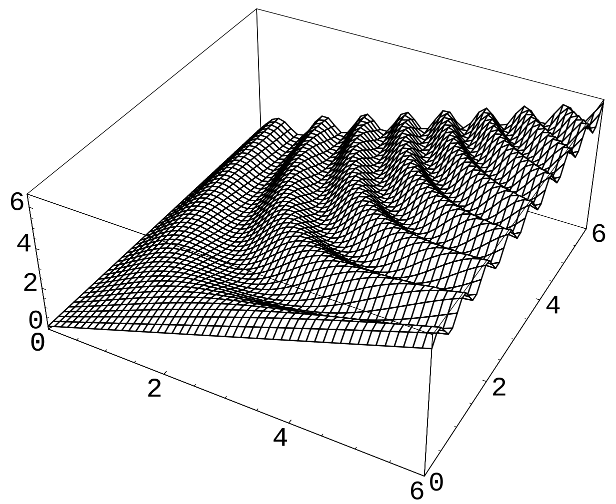
a

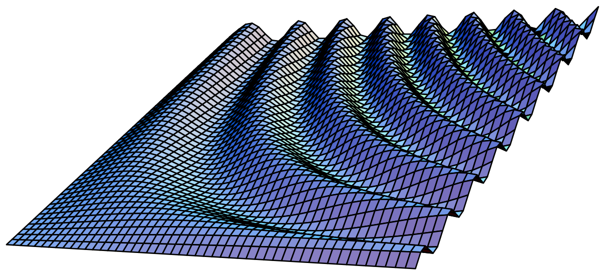
10.5 Serie A3.1, Landschaft mit Funktionen und Kurven

Solche Lösungen brauchen vermutlich die Hilfe des Dozenten. Dazu muss man ihn kontaktieren.

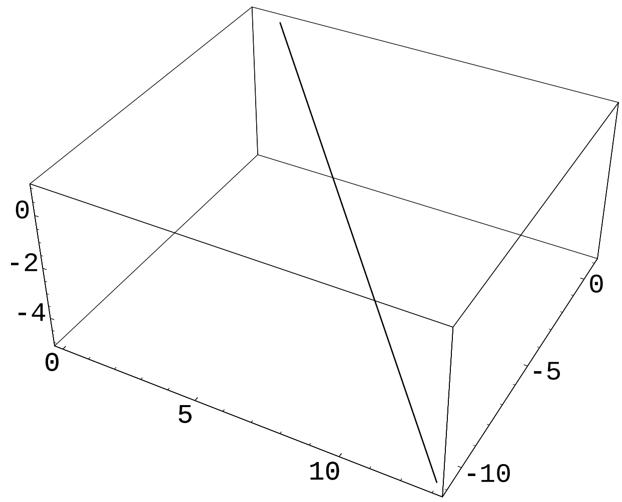
10.5.1 Beispiel Landschaft (Spiel mit Funktionen)

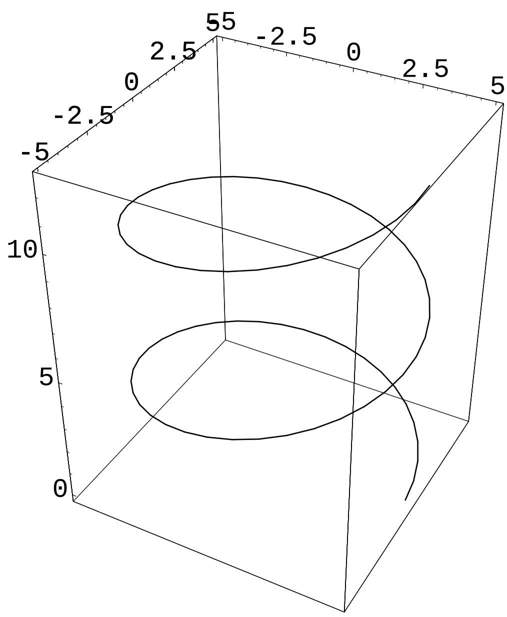




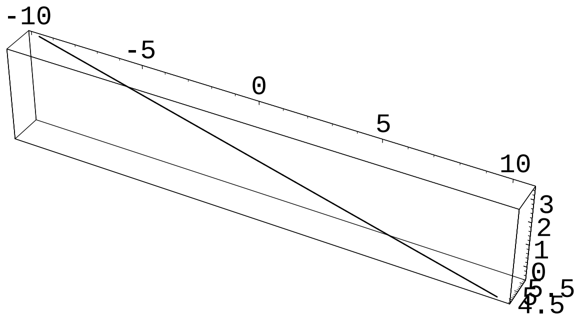


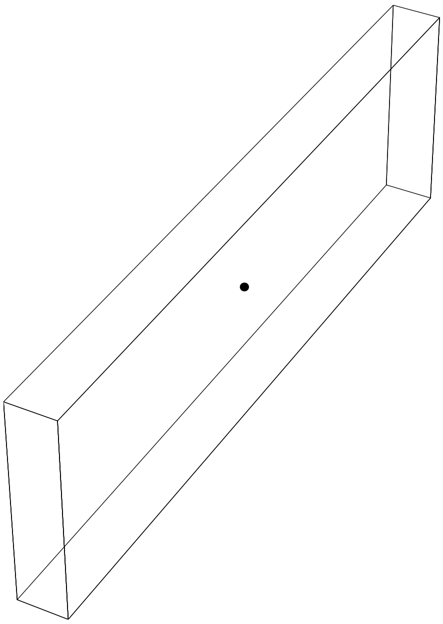
10.5.2 Vektorkurven

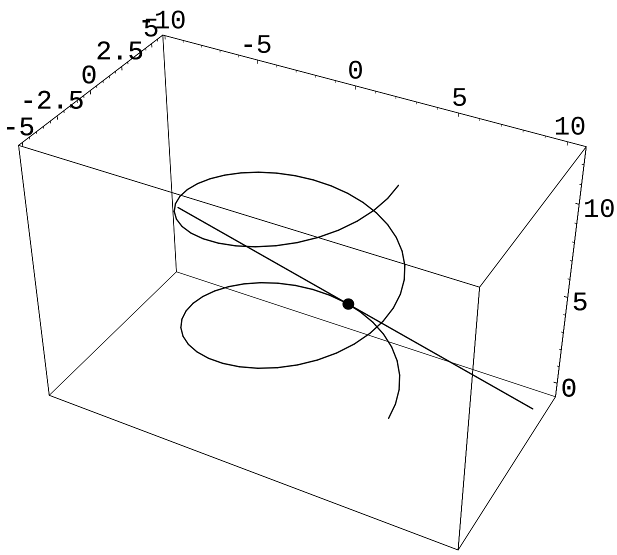




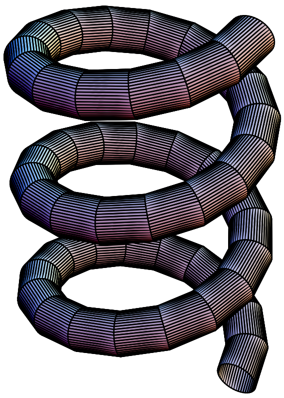
10.5.3 Tangente







10.5.4 Schlauch



———-1———————————————-

Kapitel • Chapitre 11

Weiteres Material für die Abteilung Architektur Bachelor

11.1 ◇ Test ◇ ◇ A1 a 04/05 ◇

---

1 **(je 3 Punkte)**

(a) Erkläre den mathematischen Begriff **geometrischer Vektor**. Zeige dazu Beispiele. *Richtlinie bezüglich maximalem Umfang: Ca. eine halbe Seite.*

(b) Erkläre die mathematische Eigenschaft **linear unabhängig** betreffend Vektoren. Zeige dazu Beispiele. *Richtlinie bezüglich maximalem Umfang: Ca. eine halbe Seite.*

2 **(je 12 Punkte)**

Fasse deine Kenntnisse zum Thema **Geraden– und Ebenengleichungen** zusammen. Erwartet wird eine strukturierte listanartige Übersicht.
Richtlinie bezüglich maximalem Umfang: Ca. 1 – 2 Seiten.

Viel Glück!

WIR1

11.2 ◇ Test ◇ ◇ A1 b 04/05 ◇

---

1 **(je 3 Punkte)**

(a) Erkläre den mathematischen Begriff **Skalarprodukt von Vektoren**. Zeige dazu Beispiele. *Richtlinie bezüglich maximalem Umfang: Ca. eine halbe Seite.*

(b) Erkläre die mathematische Eigenschaft **linear abhängig** betreffend Vektoren. Zeige dazu Beispiele. *Richtlinie bezüglich maximalem Umfang: Ca. eine halbe Seite.*

2 **(je 12 Punkte)**

Fasse deine Kenntnisse zum Thema **Berechnung von Abständen im Raum sowie Flächen– und Volumeninhalten von geradelinig begrenzten Gebilden** zusammen. Erwartet wird eine strukturierte listanartige Übersicht.
Richtlinie bezüglich maximalem Umfang: Ca. 1 – 2 Seiten.

Viel Glück!

11.3 ◇ Test ◇ ◇ A2 p 05 ◇

Nach den Grundlagen des ECTS–Systems muss man bei uns auf eine Unterrichtslektion ca. eine bis zwei Stunden Selbststudium rechnen. Damit sind Übungen, eigenständige Erarbeitung von Teilen des Stoffes, Prüfungsvorbereitungen, Arbeit mit Computerprogrammen u.s.w. gemeint.

Aufgabe: Bearbeite dieses Blatt 1, indem du dir dafür einen Studienplan bis zur nächsten Lektion machst. Halte diesen Studienplan dann auch ein.

Wichtig: Die Lösungen der folgenden Aufgaben (resp. die Resultate der eigenen Arbeiten) sind aufzubewahren und an die Schlussprüfung mitzubringen. Sie werden da gebraucht!

1 Stoffgruppe 1: Kurven und Tangenten...

(a) Zu einer Funktion $y = f(x)$ definiert man eine zweite Funktion $y' = f'(x) = \frac{d\,f(x)}{d\,x}$, die in jedem Punkt der ursprünglichen Funktion die Tangentensteigung angibt: $f'(x) = \tan(\alpha)$ in $P(x, y)$. Unter „differenzieren der Funktion f" verstehen wir die Berechnung der Ableitung f'. Die Berechnungsmethoden für f' werden in der Differentialrechnung untersucht. Hier beschränken wir uns auf einfache Resultate.

11.4 ◇ Test ◇ ◇ A2 a 05/06 ◇

(a) **(Je 3 Punkte)**

i. Erkläre den mathematischen Begriff **reelle Funktion**. (Mit „reell“ ist gemeint, dass als Urbilder und Bilder nur reelle Zahlen zugelassen sind.) Zeige dazu Beispiele. *Richtlinie bezüglich maximalem Umfang: Ca. eine halbe Seite.*

ii. Erkläre die mathematische Begriff **Tangentensteigung** am Beispiel einer Geraden. Zeige dazu Beispiele. *Richtlinie bezüglich maximalem Umfang: Ca. eine halbe Seite.*

(b) **(12 Punkte)**

Fasse deine Kenntnisse zum Thema **Tangenten an Kurven** zusammen. Erwartet wird eine strukturierte listanartige Übersicht.
Richtlinie bezüglich maximalem Umfang: Ca. 1 – 2 Seiten.

Viel Glück!

11.5 ◇ Test ◇ ◇ A2 a 05/07 ◇

1 **(6 Punkte)**

Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^2 \cdot (x - 3)$.

(a) **Skizziere $f(x)$ im Bereich $0 \leq x \leq 3$.**

(b) **Suche die Steigung der Tangente bei $x = 3$.**

(c) **Suche für die Herstellung eines Rotationskörpers die y–Koordinate des Punktes, in dem diese Tangente die y–Achse schneidet.**

2 **(12 Punkte)**

Erstelle in der zur Verfügung stehenden Zeit eine beschreibende Zusammenfassung zum Thema „Funktionen“: Was ist. . . ?, Typen?, Tangenten? und so fort.

Erwartet wird eine strukturierte listenartige Übersicht.

Richtlinie bezüglich maximalem Umfang: Ca. 1 – 3 Seiten.

Es werden Punkte gegeben für die Breite, die Tiefe und die Komplexität des Wissens zum Stoff.

Viel Glück!

WIR1

11.6 ◇ Test ◇ ◇ A2 p 06/07 ◇

---

1 **(Je 3 Punkte)**

(a) Erkläre den mathematischen Begriff **reelle Polynom–Funktion**. (Mit „reell“ ist gemeint, dass als Urbilder und Bilder nur reelle Zahlen zugelassen sind.) Mache dazu Beispiele mit Skizzen der Graphen. *Richtlinie bezüglich maximalem Umfang: Ca. eine halbe Seite.*

(b) Erkläre den mathematische Begriff **Parabel** am Beispiel von reellen Funktionen. Zeige dazu Beispiele. *Richtlinie bezüglich maximalem Umfang: Ca. eine halbe Seite.*

2 **(12 Punkte)**

Fasse deine Kenntnisse zum Thema **Steigungswinkel von Tangenten an Kurven** zusammen. Erwartet wird eine strukturierte listanartige Übersicht.
Richtlinie bezüglich maximalem Umfang: Ca. 1 – 2 Seiten.

Viel Glück!

11.7 Erläuterung Evaluationstest für die Studierenden

HSB, BFH 03

Liebe erstsemestrige Studentinnen und Studenten

Um die Einteilung in den **Stützkurs Mathematik** auf eine seriösen Grundlage stellen und nicht nur dem Gutdünken oder dem Zufall zu überlassen, bedarf es einer **Evaluation**. Daher bitte ich Sie, sich einmal ein wenig Zeit zu nehmen. Folgendes ist zu tun:

- ⊘ Jede Studentin/ jeder Student soll in einer ruhigen Umgebung den beigelegten **Evaluationstest** ohne fremde Hilfe für sich durcharbeiten.
- ⊘ Taschenrechner und Formelsammlungen sind **erlaubt**.
- ⊘ Pro Aufgabe soll **maximal** etwa zehn bis fünfzehn Minuten eingesetzt werden. Wenn man dann zu keinem Resultat gekommen ist, soll man erklären, dass man diese Aufgabe noch nicht lösen kann.
- ⊘ Weiter soll die **Berufsmaturitätsnote** in Mathematik auf dem Blatt vermerkt werden. Diese Information wird vertraulich behandelt.
- ⊘ **Abgabetermin:** Mathematiklektion 2. Semesterwoche.
- ⊘ **Kommunikationsmittel:** Bitte gut leserlich E-Mail-Adresse auf dem Blatt vermerken!

Auf der Grundlage der Evaluation wird dann so rasch wie möglich ein **Vorschlag erstellt** werden, der einzelnen Studentin oder dem einzelnen Studenten empfiehlt, den Stützkurs zu besuchen. **Weitere Konsequenzen** hat die Evaluation **keine** - also bitte keine Angst haben! Es geht im Endeffekt ja darum, Sie fachlich weiterzubringen.

Mit freundlichen Grüssen

Rolf Wirz, Prof. für Mathematik

11.8 Zur Prüfungsvorbereitung Stützkurs

Zu den nachfolgenden Themen können folgende Fragentypen gestellt werden (Ankreuzen von Auswahlvorschlägen):

1 **Begriffsdefinition (richtige oder falsche Vorschläge)**

2 **Gesetze und Beziehungen (richtige oder falsche Vorschläge)**

3 **Kleine Anwendungen (Resultate, die richtig oder falsch sein können)**

Die Themen richten sich strikte nach dem behandelten Stoffprogramm (auf der Grundlage der angegebenen Literatur)

- ⊘ Zahlenmengen, Umwandlung periodische Dezimalbrüche <—–> gewöhnliche Brüche
- ⊘ Betrag
- ⊘ Betragsregeln
- ⊘ Terme
- ⊘ Die Zahl 0
- ⊘ Polynome, Bsp.
- ⊘ Ordnungsrelation (auf $\mathbf{R}$)
- ⊘ Addition (Terme, $\mathbf{R}$), Gesetze
- ⊘ Subtraktion (Terme, $\mathbf{R}$), Gesetze
- ⊘ Multiplikation (Terme, $\mathbf{R}$), Gesetze
- ⊘ Division (Terme, $\mathbf{R}$), Gesetze,
- ⊘ Bsp. für Termvereinfachung
- ⊘ Bsp. für Ausmultiplizieren von Bruchtermen
- ⊘ Division Bruchterm durch Bruchterm, Bsp.
- ⊘ Potenzen mit natürlichen und ganzen Exponenten, Bsp.
- ⊘ Arithmetik mit Potenzen
- ⊘ Sätze für Potenzen, wissenschaftliche Zahlennotation mit Zehnerpotenzen
- ⊘ SI-Vorsätze (Tera, Giga,...., Nano, Piko)
- ⊘ Wurzeln
  - Quadratwurzel
  - Regeln
  - Normalform von Wurzeltermen

  - n-te Wurzel, Potenzdarstellung
  - Regeln, Gesetze
  - Regeln: Rechnen mit Wurzeln in Potenzdarstellung

- Logarithmen,
  - Definition
  - Spezielle Basen (e, 10, 2)
  - Regeln, Gesetze bei allgemeinen Basen
- Gleichungen
  - Gleichungsarten: Wertzuweisungen, Funktionsgleichungen, Bestimmungsgleichungen, Aussagen, Aussageformen, Äquivalenzen,....
  - Lösung von Bestimmungsgleichungen: Definitionsbereiche von Termen, gemeinsame Definitionsbereiche, Lösungsmengen und zugehörige Mengenregeln
  - Äquivalenzumformungen
- Aussagen, Aussageverknüpfungen, Junktoren, Aussageformen
- Variablen, Lösungsmengen, Grundmengen
- Äquivalenz von Aussagen, Aussageformen
- Lineare Gleichungen, lineare Gleichungen mit Parameter, lineare Ungleichungen
- Quadratischen Gleichungen, Spezialfälle, Diskriminante
- Probleme mit Äquivalenzumformungen
- Substitutionen
- Satz von Vieta für quadratische Gleichungen
- Bruchgleichungen
- Wurzelgleichungen
- Produkt = 0 ==> Mindestens ein Faktor = 0
- Exponentialgleichungen
- Logarithmische Gleichungen
- Das Problem der versteckten Division durch 0
- Gleichungen mit mehreren Unbekannten
  - Lineare Gleichungen
  - Geometrische Bedeutung: Gerade bei 2 Unbekannten u.s.w.
  - Lösungen bei Systemen: Schnittmenge der geometrischen Gebilde
  - Graphische Lösung
- Gleichungen mit mehreren Unbekannten

- Additionsmethode
- Einsetzungsmethode
- Gleichsetzungsmethode
- Cramer, Determinanten
- Verallgemeinerungen für mehrere Unbekannte

⊘ Diophantische Gleichungen

- Beispiel

⊘ Nichtlineare Gleichungen

- Gleichungen 3. und höheren Grades
  - Beispiel
- Transzendente Gleichungen

⊘ Weiter: Funktionen

⊘ Funktionen:

- Begriffe
- Geometrische Bedeutung der Änderung von Funktionstermen
- Koordinatensysteme
- Konstante Funktionen
- Lineare Funktionen
- Betragsfunktionen
- Ungleichungen mit Beträgen

⊘ Funktionen:

- Funktionenscharen
- Quadratische Funktionen:
  - Grundform, Scheitelform
  - Normalparabel, Öffnung, Verschiebung nach oben
  - Mittleres Glied: Verschiebung des Scheitels auf einer Parabel
  - Nullstellen, Diskriminante, Anzahl Lösungen
  - Problemarten
- Potenzfunktionen mit geradem oder ungeraden Exponent
- Polynomfunktionen (vom Grade n, ganz rational)
- Produktdarstellung bei Polynomfunktionen

⊘ Funktionen:

- Polynomfunktionen (vom Grade n, ganz rational)
- Produktdarstellung bei Polynomfunktionen, Horner
- Anzahl Nullstellen, lokale, globale Extrema (Min. Max, Wendepunkte)
- Gebrochen rationale Funktionen

  - Asymptoten
  - Pole, Polstellen
  - Bsp.

- ⊘ Umkehrung einer Funktion, Umkehrfunktion, Inverse
  - Definition, Variablenwechsel,
  - Wurzelfunktion und Potenzfunktion
  - Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion
  - Verschiedene Basen bei Logarithmen

- ⊘ Exponentielle Prozesse
  - Beispiel: Wachstumsprozesse
  - Beispiel: Wachstum der Menschheit

- ⊘ Winkelfunktionen
- ⊘ Lineare Optimierung
- ⊘ Extremalprobleme
- ⊘ Bemerkungen zur Mengennotation und zu Rundungen
- ⊘ Vektrorrechnung:
  - Begriffe: Geometrischer, freier Vektor, Repräsentant, Symbole, Betrag, Gleichheit von Vektoren, Skalar
  - Operationen, Gesetze: Parallelogrammaddition, Kommutativ- und Assoziativgesetz, Nullvektor, inverser Vektor, Subtraktion, Multiplikation mit einem Skalar (Streckungsprodukt), spezielle Streckungen, Distributivgesetze und Streckungsprodukt

- ⊘ Linearkombination, kollineare Vektoren, lineare Abhängigkeit
- ⊘ Parallelsysteme, kartesische Koordinatensysteme, ONS, Polarkoordinaten, Origo, ...
- ⊘ Vektoren in einem ONS, Spaltenvektoren
- ⊘ Skalare Komponenten, vektorielle Komponenten, Vektorlänge
- ⊘ Elementare Operationen mit Spaltenvektoren (Addition, Streckung)
- ⊘ Differenzenvektor, Einheitsvektor, Spaltenvektoren der Basisvektoren
- ⊘ Skalarprodukt:
  - Definition
  - Gesetze
  - Flächenberechnung

- ⊘ Geradengleichung:
  - Parametergleichung
  - Komponentengleichungen

  - Beispiel
  - Schnitt von Geraden, windschief, parallel, zusammenfallen
  - Abstandsprobleme

- ⊘ Vektorprodukt:
  - Definition
  - Gesetze
  - Flächenberechnung, senkrechter Vektor, Projektionsflächen

- ⊘ Ebenengleichungen:
  - Parametergleichung
  - Komponentengleichungen
  - Koordinatengleichungen

- ⊘ Zur Ebene:
  - Senkrechter Vektor
  - Abstand zu einer Ebene
  - Schnitt von Ebenen

- ⊘ Vermischte Aufgaben

Wir1 / 07

11.9 ◇ Schlusstest ◇ Math. ◇ Arch. ◇ .... ◇

Name: ______________________, ______________________ Datum: ______________________

◇ Beispiele zu Beantwortung der Testfragen ◇

Hier einige Beispiele:

1 ⊗ $3+4=7$ (Aussage **richtig**, Antwort: **Kreuz** im Kreislein!)

2 ◯ $3+4=2$ (Aussage **falsch**, **kein Kreuz** anbringen!)

3 ⊗ $3^2+4^2=5^2$ (Aussage richtig, Kreuz!)

4 ◯ $3^2+4^2\neq 5^2$ (Aussage falsch, kein Kreuz!)

◇ Testfragen Schlusstest Architektur ◇

Kreuze die richtigen Aussagen so wie in den obigen Beispielen im jeweiligen Kringel resp. Kreislein an! **Achtung: Falsche Kreuze werden negativ bewertet!**
(Korrektur mit Schablone $\rightsquigarrow$ Kreuz in den Kreis setzen!!!)

1 Ein geometrischer Vektor ist exakt definiert als:

(a) ◯ Ein Pfeil, den man addieren kann.

(b) ◯ Eine physikalische Grösse mit einer Richtung.

(c) ◯ Ein Pfeil und sonst nichts.

(d) ◯ Eine Pfeilklasse mit gleich langen, irgendwie gerichteten Pfeilen.

(e) ◯ Eine richtige Beschreibung ist hier nicht vorhanden.

2 Folgende Aussagen über Vektoren sind allgemein richtig:

(a) ◯ $3\left(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}+\vec{x}=2\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \vec{x}=\begin{pmatrix}10\\6\end{pmatrix}$.

(b) ◯ $3\left(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}+\vec{x}=2\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \vec{x}=\begin{pmatrix}6\\10\end{pmatrix}$.

(c) ◯ $3\left(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}+\vec{x}=2\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

(d) ◯ Die Vektoren $\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-5\\17\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}4\\-6\\1\end{pmatrix}$ sind linear abhängig.

(e) ◯ Die Vektoren $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-5\\17\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}$ sind linear unabhängig.

(f) ◯ $\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\-6\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-17\\-5\\38\end{pmatrix}$.

(g) ◯ $\begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\-6\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-38\end{pmatrix}$.

(h) ◯ $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}$.

(i) ◯ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

(j) ◯ $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{b})$.

(k) ◯ Die Gerade $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}4\\-6\\0\end{pmatrix}$ geht durch den Punkt $P(7/-1/-1)$.

(l) ◯ Die Gerade $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ geht durch den Punkt $P(5/7/2)$.

(m) ◯ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\varphi),\ \ \varphi=$ Zwischenwinkel.

(n) ◯ $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\varphi),\ \ \varphi=$ Zwischenwinkel.

(o) ◯ $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\geq|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

(p) ◯ $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \perp=$ senkrecht.

(q) ◯ $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ steht senkrecht auf der Geraden $6\,x+10\,y=2$.

(r) ◯ $|\vec{v}|^2=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$.

(s) ◯ In der Statik sind Kräfte an Wirkungslinien gebundene Vektoren.

(t) ◯ $\vec{x}=\vec{x}_0+\lambda\,\vec{a}+\mu\,\vec{b}+\lambda\,\vec{b}$ ist eine Ebenengleichung.

3 Folgende Aussagen über Mengen, Zahlen Terme und Gleichungen sind allgemein richtig:

(a) ○ $|c+4|+|c-4|=2\,|c|$.

(b) ○ $|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|=A_1\cup A_2$.

(c) ○ $3+a\cdot\sqrt[3]{\sqrt[7]{a^{-6}}}=a^{\frac{5}{7}}+3$.

(d) ○ $\dfrac{b\,a^5-b\,a^4+b^3\,a^2+b^4\,a}{a\,(a-b)\,b^2}-\dfrac{a\,b}{a-b}=\dfrac{a^4-a^3+b^3}{(a-b)\,b}$.

(e) ○ $(x^{100}+x^{99}+\ldots+x^2+x+1)(x-1)=x^{101}-1$.

(f) ○ $2\sin^2(x)-\cos^2(x)\leq 2.5$.

(g) ○ $a^8-a^3=a^5$ oder $(x^8)^4=x^{12}$.

(h) ○ $\dfrac{4}{x^3}=3\,x^{-4}$.

(i) ○ $\sin(5\,x)+\cos(5\,x)=1$.

(j) ○ Aus $(3=7)$ folgt $(7=3)$.

(k) ○ Aus $(3=7$ oder $5=5)$ folgt $(a=b)$.

(l) ○ Aus $(3=7$ und $5=5)$ folgt $(2\,a=a+a)$.

(m) ○ $\left(3\,\sqrt{3}\,a+\dfrac{4}{\sqrt{3}}\right)^2=27a^2+24a+\dfrac{16}{3}$.

(n) ○ $\left(3\sqrt{3}+\dfrac{4}{\sqrt{3}}\right)^2=\dfrac{100}{3}+23$.

(o) ○ $\log_2(3)+\log_2(4)=\log_2(7)$.

(p) ○ $\log_2(3)+\log_2(4)=\log_2(12)$.

(q) ○ $\log_2(8)-\log_2(4)=3^0$.

(r) ○ $e^{(Ln(9)+2\,x)}=(3\,e^x)^2$.

(s) ○ $\left|\begin{array}{lcl} a\,x+3\,y & = & 7 \\ -2\,x+2\,y & = & 4a \end{array}\right|$ hat keine Lösung für $x=-3$.

(t) ○ $x^2+4\,bx+2=-2\,x+6$ ist nur lösbar für $b\geq 0$.

(u) ○ $x^2+4\,bx+2=-2\,x+6$ ist lösbar für $b=2a^3,\ a\in\mathbb{R}$.

(v) ○ $\left|\begin{array}{lcl} x+3\,y & = & 28 \\ -2\,x+2\,y & = & 16 \end{array}\right|$ hat die Bedeutung von 2 Geraden durch $P(1/9)$.

(w) ○ $(x^5-x^3+4\,x^2-8)^5\cdot(2\,x^5-4\,x^2+7)$ ist ein Polynom vom Grad 30 mit $a_{30}=2$.

4

(a) ◯ $\frac{\cos(x)}{\sqrt{2}}+\frac{\sin(x)}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\cos(x)+\sqrt{2}\sin(x)\right)$.

(b) ◯ $\cos^2(-\frac{\pi}{4})+\sin^2(2\,x)=2\,x+1$.

(c) ◯ $\frac{\cos(x)}{2}+\frac{\sin(y)}{2}=\frac{1}{4}$.

(d) ◯ $\frac{\cos(-3\,x)}{2}+\frac{\sin(3\,x)}{2}=\frac{1}{4}$.

(e) ◯ $\sin(2x)\tan(x)=\frac{\cos(x)-\cos(3x)}{2\,\cos(x)}$.

(f) ◯ $\frac{\cos(x)-\cos(3x)}{2\,\cos(x)}=\frac{1}{2}+\frac{\cos(2x)}{2}$.

(g) ◯ Die Funktion $g(x)=x$ ist bei $x=0$ eine Tangente an die Kurven von $f(x)=\tan(x)$ und $f^{-1}(x)=\arctan(x)$.
(Hinweis: Die Lösung kann man aus einer genauen Skizze ablesen.)

(h) ◯ $\underbrace{1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots\ldots+1-1+1-1+1}_{\text{1000 mal die Zeichen „}-\text{“ und „}+\text{“}}=\pi^{1-1}$.

(i) ◯ $f(x)=(x-1)^5\cdot(x-2)^4\cdot(x-3)^3\cdot(x-4)^2\cdot(x-5)^1\cdot(x-6)^0$ hat exakt 5 Nullstellen.

(j) ◯ $f(x)=x\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-2)^2\cdot(x-5)$ hat exakt 5 Nullstellen.

(k) ◯ $f(x)=x^7+x^5+x^3+x$ ist eine gerade Funktion.

(l) ◯ $f(x)=x^8+x^6+x^4+x^2-11$ ist eine gerade Funktion.

(m) ◯ $f(x)$ hat die Nullstellen 1 und 3 und geht durch den Punkt $P(2/-1)$.
Dann ist das konstante Glied $c=3$ (Vieta).

(n) ◯ $f(x)$ hat die Nullstellen 1 und 3 und geht durch den Punkt $P(2/-1)$.
Dann ist das konstante Glied $c=-2$ (Vieta).

(o) ◯ Die Punkte $P_1(e/1), P_2(1/e), P_3(0,0)$ bilden ein △ mit den Flächeninhalt e^2 .

(p) ◯ Die Punkte $P_1(e/1), P_2(1/e), P_3(0,0)$ bilden ein △ mit den Flächeninhalt $\frac{e^2}{2}$.

(q) ◯ Die Punkte $P_1(e/1), P_2(1/e), P_3(0,0)$ bilden ein △ mit den Flächeninhalt $\frac{e^2}{3}$.

(r) ◯ $f(x)=e^x \;\Rightarrow\; f(0)+f(1)+\ldots+f(100)=\frac{1-e^{101}}{1-e}\approx 4.252538703689276\cdot 10^{43}$.

(s) ◯ $2e^{2\,x}=100 \;\Rightarrow\; x=\frac{ln(50)}{2}$.

(t) ◯ $2e^{2\,x}=100 \;\Rightarrow\; x=ln(\sqrt{50})$.

(u) ◯ $2e^{2\,x}=100 \;\Rightarrow\; x\approx 1.95601$.

5 Skizziere resp. berechne im leeren Bereich unter dem jeweiligen Text:
Bitte alle Skizzen auf diesem Blatt jeweils neben der Funktionsvorschrift ausführen! (Zusatzblätter können verloren gehen.)

Noch nichts ankreuzen, richtige Lösungen werden erst bei der Korrektur angekreuzt!

(a) ◯ Skizziere hier $y = (x-2)^2 - 3$.

(b) ◯ Skizziere hier $y = \frac{1}{3}\, e^{-x-1}$.

(c) ◯ Skizziere hier $y = \frac{1}{x^3}$.

(d) ◯ Skizziere hier $y = +\sqrt[4]{x^2}$.

(e) ◯ Skizziere hier $y = 0.4\,x - 2.5$.

(f) ◯ Ermittle hier das Minimum von $y = (x-8)(x-2)$.

6 **Notizen:**

WIR1

Wird erst bei der Korrektur ausgefüllt:

Anzahl Kreuze:.........

Richtige Kreuze und leere Kreise:.........

Falsche Kreuze und leere Kreise:.........

Lösungen: Anzukreuzen ist

Seite 1: (e)
Seite 2: (b,d,g,i,l,m,p,q,r,s,t)
Seite 3: (d,e,f,j,m,n,p,r,u,v,w)
Seite 4: (a,e,g,h,i,l,m,r,s,t,u)
Seite 5: (a,b,c,d,e) siehe Graphikrechner, (f): (5/-9))

Flalsch: Richtige nicht angekreuzt oder falsche angekreuzt.
Richtig: Richtige angekreuzt oder falsche nicht angekreuzt.

Ende