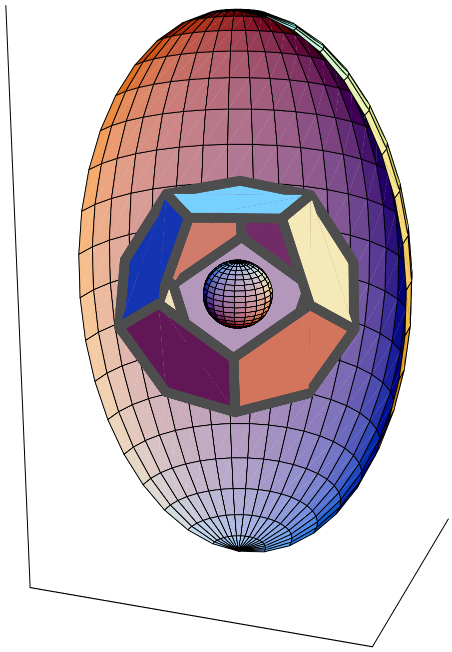
◇ Tests ◇ *Tests* ◇

◇ Analysis 1 ◇ *Analyse 1* ◇

◇ Diplom ◇ 1989 – 2000 ◇ *Diplôme* ◇



von • *de*

Rolf Wirz

Ingenieurschule Biel — HTA-Biel/BFH — HTI/BFH bis • *jusqu'à* 2000

Ausgabe vom 14. September 2007, Version 1.0.0 / d/f

Mit klickbaren Links • *Avec des lines cliquables*

WIR1 /2007/LaTex/BuchTestsAnalysis2000Dipl_1.TEX

Produziert mit PCTeX unter Win XP. Einige Graphiken sind auch mit *Mathematica* entstanden.

• *Produit avec PCTeX sous Win XP. Quelques représentations ont été produites avec Mathematica.*

Der Mensch hat dreierlei Wege, um zu lernen:
Erstens durch Nachdenken, das ist der edelste;
zweitens durch Nachahmen, das ist der leichteste;
drittens durch Erfahrung, das ist der bitterste.

(Nach Konfuzius)

• *L'homme a trois occasions pour apprendre:*
Premièrement par réflexion, c'est la plus noble;
deuxièmement par l'imitation, c'est la plus facile;
troisièmement par l'expérience, c'est la plus dure.

(Selon Confucius)

Aktuelle Adresse des Autors (2007):

Rolf W. Wirz-Depierre
Prof. für Math.
Berner Fachhochschule (BFH), Dep. AHB und TI
Pestalozzistrasse 20
Büro B112 CH–3400 Burgdorf/BE
Tel. ++41 (0)34 426 42 30 / intern 230
Mail: Siehe http://rowicus.ch/Wir/indexTotalF.html unter „Koordinaten von R.W.“
(Alt: Ingenieurschule Biel (HTL), Ing'schule des Kt. Bern, Fachhochschule ab 1997) // BFH HTA Biel // BFH HT/

Inhaltsverzeichnis • Table des matières

Kapitel • Chapitre 1

Einführung — Introduction

1.1 Gegenstand — Sujet

In dieser Sammlung ist eine Auswahl von Aufgaben zusammengefasst, welche in den Jahren vor 2000 verwendet worden sind.
• *Dans cette collection, un choix de problèmes est rassemblé. Il s'agit de problèmes qui ont été utilisés dans les années avant 2000.*

Klickbare Links zu Skripten: • *Liens cliquables pour les cours:*

http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html (Skript–Download) • *Download cours*

Die Lösungen zu den Aufgaben sind momentan nur in Papierform vorhanden. An eine gesamthafte Veröffentlichung kann aus Kapazitätsgründen vorläufig nicht gedacht werden.
• *Les solutions des problèmes existent momentanément seulement sur papier. Actuellement, par raisons de capacité, on ne peut pas penser à une la publication intégrale.*

1.2 Gliederung — Disposition

Bemerkung: • Remarque: Da nur noch wenige Sérien auch in französischer Übersetzung vorliegen, wird im weiteren Text aus Kapazitätsgründen auf Übersetzungen verzichtet.

Gliederung des Teils „Analysis“

(1) Funktionen im $\mathbb{R}^1$

(2) Folgen und Grenzwerte

(3) Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$ und im $\mathbb{R}^n$

(4) Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$

(5) Reihen

(6) Potenzreihen im $\mathbb{R}^1$

(7) Nichtlineare Gleichungen und Ungleichungen

(8) Numerik

(9) Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

(10) Fehlerrechnung

(11) Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$

(12) Differentialgeometrie, Analysis im $\mathbb{R}^n$

Kapitel • Chapitre 2

Serien mit „Funktionen im $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^n$“

2.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Srofgebiete war nie vorhanden.

2.2 Test: Ungleichungen, Ungleichungssysteme, Mengenlehre, Zahlentheorie, Funktionen im $\mathbb{R}^1$ I/01

Abschrift • *Copie*

(1) $x = \cfrac{-1}{2 + \cfrac{-1}{2 + \cfrac{-1}{2 + \ddots}}}$

(a) $x = ?$

(b) $x \in \mathbb{Q}$?

(2) Skizziere $\mathbb{L}$! • *Esquisse de* $\mathbb{L}$*!* $\leadsto$ $\left| \begin{array}{rcl} 3\,x + 2\,y & \geq & 6 \\ 2\,x - 3\,y & \leq & 3 \end{array} \right|$

(3) $x + 1 \geq \cos(x) - 1 \leadsto \mathbb{L} = ?$

(4) $\left| \begin{array}{lcr} \mathbb{L}_1: \; x^2 + x - 2 & \leq & 0 \\ \mathbb{L}_1: \; -x^2 + x + 2 & \geq & 0 \end{array} \right| \leadsto \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = ?$

(5) $2\,x^2 - 5\,x - 1 \geq x + 10 \leadsto \mathbb{L} = ?$

(6) $|A| = 99,\ |B| = 98,\ |C| = 97,\ |A \cap B| = 30,\ |A \cap C| = 27,\ |B \cap C| = 28,\ |A \cap B \cap C| = 26.$

(a) $|A \cup B \cup C| = ?$

(b) $|(A \cap B) \setminus (A \cap B \cap C)| = ?$

(7) $(A \cup B) \cap C = \ldots \cup \ldots \leadsto$ Durch eine Zeichnung erklären! • *Expliquer par un dessin!*

(8) (a) $f(x) = x^2 - |[x]| \leadsto$ Skizze! • *Esquisse!*

(b) Löse: • *Résoudre:* $x^2 - |[x]| = 1$

(9) (a) $g(x) = (x + 1)\,\mathrm{sgn}(x) \leadsto$ Skizze von g ! • *Esquisse de* g *!*

(b) $(x + 1)\,\mathrm{sgn}(x) = 0 \leadsto x = ?$

(c) $(x + 1)\,\mathrm{sgn}(x) = -2 \leadsto x = ?$

(10) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x),\ g(x) = \sin(x) \cdot x^2$

(a) Skizze! • *Esquisse!*

(b) $f(x) = g(x) \leadsto x = ?$

Viel Glück!

WIR

2.3 Test: Funktionen im $\mathbb{R}^1$, Gleichungssysteme, Ungleichungssysteme, Zahlentheorie I/02

Abschrift • *Copie*

(1) Löse: • *Résoudre:* $\left| \begin{array}{lcl} x - y & \leq & 1 \\ x + y & \geq & 1 \\ y & \geq & 2\,x - 6 \end{array} \right|$

(2) (a) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$: $\rightsquigarrow$ Algebraische Struktur? • *Structure algébrique?*

(b) $a + b = 10,\ \ a^2 = 10\,b \ \rightsquigarrow\ \ a = ?,\ \ b = ?,\ \ a \in \mathbb{Q}\,?$

(3) (a) Löse: • *Résoudre:* $x^2 - 4\,x + 5 = 0$

(b) Skizziere: • *Esquisse:* $y = x^2 - 4\,x + 5$

(4) (a) Exakt: • *Exacte:* $\tan(60^o) = ?$

(b) Löse: • *Résoudre:* $\cos(x) = \frac{1}{2}$ ($\rightsquigarrow$ alle Lösungen!) • *Toutes les solutions!*

(5) Löse: • *Résoudre:* $\left| \begin{array}{lcl} -2\,x - y + 12 & = & 0 \\ x + y & = & 2 \\ x - 2\,y & = & 8 \\ 2\,x + y & = & 12 \end{array} \right|$

(6) $\log_{10}(3) + 3\,\log_{10}(2) = \log_{10}(x) \ \Rightarrow\ x = ?$

(7) $\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}) = \sin(x) \cdot \cos(\frac{\pi}{4}) + \cos(\frac{\pi}{3}) \cdot \cos(\sqrt{1 - \cos^2(\frac{\pi}{4})}) \ \Rightarrow\ x = ?$

(8) Auf wieviele verschiedene Arten kann man sechs Häuser mit sechs verschiedenen Farben kolorieren?
• *De combien de manières différentes est–ce qu'on peut colorer six maisons de manières différentes?*

(9) *kgV'ppmc*$(1376528024, 1376528026) = ?$

(10) $0.0123456789\overline{0123456789}\ldots = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \ \Rightarrow\ \frac{a}{b} = ?$

Viel Glück! — Bonne chance!

WIR

2.4 Test: Funktionen im $\mathbb{R}^1$, Mengenlehre, Ungleichungssysteme I/03

Abschrift • *Copie*

(1) $A = [-11,\ 22),\ \ B = (18,\ 60],\ \ C = \mathbb{N}_0,\ \ D = (5,\ 22)\ \ \leadsto\ \ ((A \cup B) \cap C) \setminus (D \cap A) = \,?$

(2) Gebe eine Übersicht über die Teilmengen von $\mathbb{R}$, welche in unserer Mathematik wichtig sind. • *Donner une vue d'ensemble des sous–ensembles de* $\mathbb{R}$ *qui sont importants en mathématique.*

(3) $y^2 - 3\,y - 4 = x \leadsto$ Lässt sich y als $f(x)$ darstellen? (Wie, wo?)
• $y^2 - 3\,y - 4 = x \leadsto$ *Est–ce qu'on pout représenter* y *comme* $f(x)$? *(Comment, où?)*

(4) $\left|\begin{array}{lcl} -x+y & \leq & 3 \\ 3\,x-y & \geq & -10 \\ 2\,x+y & = & k \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array}\right|$ Wie gross kann x maximal sein? (Skizze!)
• *Quelle valeur maximale est–ce que* k *peut atteindre? (Esquisse!)*

(5)

(a) $f_1(x) = x^2$

(b) $f_2(x) = e^{-x^2}$

(c) $f_3(x) = e^x$

(d) $f_4(x) = \cos\dfrac{x}{\pi} + 4$

(e) $f_5(x) = a\,x + b$

(f) $f_6(x) = 3\,\cos(2\,x - 4) + 8$

(g) $f_7(x) = \dfrac{2}{(\frac{x}{2})^2 + 3}$

Welche Funktion ist • *Quelle fonction est*

(a) monoton? • *monotone?*

(b) beschränkt? • *borneée?*

(c) periodisch? • *périodique?*

(d) gerade? • *paire?*

(e) ungerade? • *impaire?*

(6) Pole und Asymptoten? • *Donner les pôles et les asymptotes:*

(a) $h_1(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

(b) $h_2(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1}$

(c) $h_3(x) = \dfrac{1}{2^x - 1} + 2\,x - 1$

(d) $h_1(x) = \dfrac{1}{x^2-1} - x^2 + 1$

(7) $f(x) = \dfrac{1}{x} \leadsto$ Rechteck = • *Rectangle* = $Fig.\Big((0;0),(1;1),(x;f(x)),(0;f(x))\Big)$.
$R(x) =$ Flächeninhalt von $Fig. = \,?$ • $R(x) =$ *Surface de* $Fig. = \,?$ %

(8) (a) $f(x) = e^x, \;\; f(x) = \ln(x)$

i. $f(g(x)) = \,?$

ii. $g(f(x)) = \,?$

iii. $f(f(x)) = \,?$

iv. $g(g(x)) = \,?$

(b) $f_1(x) = x, \;\; f_2(x) = x^2, \;\; f_2(x) = \sqrt{x}$

i. $f_1(f_2(f_3(x))) = \,?$

ii. $f_1(f_3(f_2(x))) = \,?$

iii. $f_2(f_1(f_3(x))) = \,?$

iv. $f_2(f_3(f_1(x))) = \,?$

v. $f_3(f_1(f_2(x))) = \,?$

vi. $f_3(f_2(f_1(x))) = \,?$

(9) $F(x) = \cos(2\,\sin(e^{2\,x} - 1) + 1) + e^{2\,x}, \;\; g(x) = e^{2\,x-1}, \;\; F(x) = f(g(x))$

$$\Rightarrow \;\; f(x) = \,?$$

(10) $M_1 = \{(x,y) \mid y = f_1(x) = \dfrac{1}{2}\,x^2 - x - 4\}, \;\; M_2 = \{(x,y) \mid y = f_2(x) = 3\,x + 6\}$

$$\Rightarrow \;\; M_1 \cap M_2 = \,?$$

Viel Glück! — Bonne chance!

2.5 Test: Funktionen im $\mathbb{R}^1$, I/04

Abschrift • *Copie*

(1) (a) $$f(x) = \frac{x^3 + 2\,x^2 + 2\,x + 1}{x^2 - 3\,x + 2}$$

i. Pole? • *Pôles?*

ii. Asymptoten? • *Asymptotes?*

iii. Nullstellen? • *Zéros?*

iv. Graph? • *Graphe?*

(b) $$f(x) = \frac{x^3 + 2\,x^2 + 2\,x + 1}{\left(\frac{x-1}{x-2}\right)}$$

i. Pole? • *Pôles?*

ii. Asymptoten? • *Asymptotes?*

iii. Nullstellen? • *Zéros?*

iv. Graph? • *Graphe?*

(2) $$f(x) = \frac{x}{x^2+1} + (-1) + \frac{x}{10}$$

(a) Pole? • *Pôles?*

(b) Asymptoten? • *Asymptotes?*

(c) Nullstellen? • *Zéros?*

(d) Graph? • *Graphe?*

(3) $f(x) = \cos(x),\ \ g(x) = x + 1,\ \ h(x) = \sin(x)$

(a) $F(x) = h(g(f(x))) = \,?$

(b) Graph von $F(x)$? • *Graphe de* $F(x)$ *?*

(c) Berechne die $F(x)_{\max}$!
• *Calculer les* $F(x)_{\max}$*!*

(d) $F \rightsquigarrow$ gerade/ ungerade?
• $F \rightsquigarrow$ *paire/ impaire?*

(e) $F(x) = -x^2 + \frac{1}{2} \rightsquigarrow\ x = \,?$

(f) $F(x) = y\ \Rightarrow\ x = F^{-1}(y) = \,?$

(4)

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 1 - \cos^2(x) & x \le 0 \\ x & x \in (0,\ 2] \\ -(x-1) & x > 2 \end{cases}$$

(a) Graph? • *Graphe?*

(b) Maximum? • *Maximum?*

(c) Nullstellen? • *Zéros?*

(5) Skizze, Polarkoordinaten: • *Esquisse, coordonnées polaires:*

$$r(\varphi) = |2 - \frac{\varphi}{10}|,\ \ \varphi \in [6,\ 8\,\pi]$$

Viel Glück! — Bonne chance!

WIR

2.6 Test: Funktionen, Vektorgeometrie I/05

Abschrift • *Copie*

(1) $\ln(3) - \ln(2) + \ln(6) - \ln(4) + \ln(9) - \ln(6) + \ln(12) - \ln(8) + \ldots + \ln(300) - \ln(200) = \,?$

(2) $6\,x^2 - 2\,x + 1 + \ln(5^x) = 0 \;\Rightarrow\; x = \,?$

(3) $(\ln(x^4) - \ln(x^2) + 2)^3 - 126 = 0 \;\Rightarrow\; x = \,?$

(4) Gegeben sind die Punkte $P_1(0;2)$, $P_2(3;1)$, $P_3(5;-4)$, $P_4(8;3)$, $P_5(3.5;5)$. Weiter ist $a_1 = |\overline{P_1P_2}|$, $a_2 = |\overline{P_2P_3}|$, $a_3 = |\overline{P_3P_4}|$, $a_4 = |\overline{P_4P_5}|$, $a_5 = |\overline{P_5P_1}|$ und $A =$ Flächeninhalt von $\triangle P_2P_3P_5$

(a) $a = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \,?$

(b) $A = \,?$

(5) Gegeben sind die Punkte $A(1;1)$, $B(7;0)$, $C(7;6)$, $D(3;5)$.
Weiter ist $P(x;y) = \overline{AC} \cap \overline{BD}$.
Berechne x und y.

(6) $\vec{c} = \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}$
Berechne λ und μ.

(7) Gegeben sind die Punkte $A(1;2;3)$, $B(2;4;6)$, $C(-1;3;6)$. Bei B gilt $\beta = \angle(\overline{BA}, \overline{BC})$.
Untersuche, ob $\beta = \perp$ gilt!

Viel Glück!

2.7 Test: Funktionen, Vektorgeometrie I/06

Abschrift • *Copie*

(1) $$f(x) = \frac{x^2 + 2\,x - 3}{3\,x - 1}$$

(a) Pole? • *Pôles?*

(b) Asymptoten? • *Asymptotes?*

(2) $\arcsin(x) = \cos(x) \;\Rightarrow\; x \approx ?$ (Zeichnung) • *(Dessin)*

(3) $r(\varphi) = |\cos(\frac{\varphi}{2})| + 1 \;\leadsto$ Graph? • *Graphe?*

(4) $y(x) = (e^{x+4})^2 \;\leadsto$ Graph? • *Graphe?*

(5) $2\,\log_5(10) - \log_{10}(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = ?$

(6) $\ln(1) - \ln(2) + \ln(3) - \ln(6) + \ln(4) - \ln(8) + \ln(5) - \ln(10) + \ln(6) - \ln(12) + \ldots - \ldots = ?$

(7) $(\ln(x)) + 1 + e^x - 3 \;\Rightarrow\; x = ?$ (Zeichnung) • *(Dessin)*

(8) $2\,\vec{u} + \frac{1}{2}(\vec{x} + 2\,\vec{u} - 3\,\vec{c}) = \frac{1}{3}(2\,\vec{x} - \vec{u} + \vec{c}) \;\Rightarrow\; \vec{x} = ?$

(9) Gegeben: Konvexes Viereck $Fig(ABCD)$. • *Donné: quadrilatère convexe* $Fig(ABCD)$.
M_1 = Seitenmittelpunkt von • *centre de côté de* $\overline{AB}$,
M_2 = Seitenmittelpunkt von • *centre de côté de* $\overline{BC}$,
M_3 = Seitenmittelpunkt von • *centre de côté de* $\overline{CD}$,
M_4 = Seitenmittelpunkt von • *centre de côté de* $\overline{DA}$.
Weiter gilt: • *En outre on sait:* $E = \overline{M_1M_3} \cap \overline{M_2M_4}$.
$\leadsto$ Berechne E! • *Calculer* E *!*

(10) Gegeben: Punkte A, B, (allgemeine Lage). • *Donné: Points* A, B, *(position générale).*
Zudem gilt: • *En outre on sait:* $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{5}\,\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BF} = \lambda\,\overrightarrow{BD}$.
$\leadsto$ Berechne λ! • *Calculer* λ *!*

Viel Glück! — Bonne chance!

2.8 Test: Grundlagen, Algebra, Funktionen, Grenzwerte I/24

Abschrift • *Copie*

(1) (a)

$$\frac{\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}}{1+\frac{x+1}{x-1}}=\frac{1}{2} \rightsquigarrow \quad x=\,?$$

(b)

$$\text{Vereinfache: } \frac{a^2+a\,c-b^2-b\,c}{a^2-b^2-2\,b\,c-c^2}$$

(c)

$$x^2-4\,x-3\leq 2\,x+1 \;\Rightarrow\; \mathbb{L} \;=\,? \;\; \text{(Exakt!)}$$

(2) Skizziere die Graphen:

(a) $f(x)=x-[x],\;\; x\in[-2,\;2]$

(b) $f(x)=\sin(|x-[x+0.5]|),\;\; x\in[-2,\;2]$

(c) $f(x)=\sin(x)+\cos(\frac{1}{x}),\;\; x\in[-0.1,\;0.1]$

(d) $f(x)=\frac{x-1}{|(\sqrt{x}-1)|},\;\; x\in\mathbb{R}$

(3) Bestimme so genau wie möglich Pole, Asymptoten und Monotoniebereiche:

(a) $f(x)=\frac{x^2-2}{x+1}$

(b) $f(x)=\frac{x^2}{(x+1)^2}$

(4) (a) $a_n=\cos(n)\cdot\sin(\frac{n+2\,n^2}{3\,n^3+4\,n^{\frac{1}{2}}}) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}\;?$

(b) Gegeben ist eine quadratische Platte der Dicke 1 cm. Auf diese Platte wird eine zweite Platte der selben Dicke gelegt, deren Ecken mit den Seitenmittelpunkten der ersten Platte zusammenfallen. Nach dem gleichen Rezept wird auf die zweite Platte eine dritte gelegt und so fort, in alle Ewigkeit. So entsteht ein unendlich hoher Turm. Wie gross ist die gesamte obere Deckfläche aller Platten zusammen, die man aus einem Halbfabrikat ausschneiden müsste? (Das Ausschneiden ist der unendlich vielen Teile wegen natürlich in der Realität nicht möglich, aber rechnen kann man es trotzdem.)

(c) Gegeben ist eine Folge mit $x_1=a,\;\; x_{n+1}=\frac{1}{2}\,(x_n+\frac{a}{x_n})$.
Zeige im Beispiel $a=2$ dass die Folge konvergiert und berechne den Grenzwert allgemein für $a>0$. *Herleitung angeben!*

(5) Schreibe in lateinischer Schrift:

$H\varepsilon\upsilon\rho\varepsilon\kappa\alpha$! $\Gamma\varepsilon\sigma\chi\eta\alpha\phi\phi\tau$! $\Delta\alpha\sigma$ $\Delta\iota\nu\gamma$ $\eta\alpha\tau$ $\Sigma\pi\alpha\sigma\sigma$ $\gamma\varepsilon\mu\alpha\chi\eta\tau$!

(6) (a) Skizziere die Graphen.
(b) Ermittle den Definitionsbereich und den Wertebereich für f, g und h.
(c) Wo ist f, g und h injektiv, surjektiv oder bijektiv?

(7) Wieviele Schnittpunkte können n Kreise maximal haben?

(a) Formel?
(b) Induktionsbeweis?
(c) Was ändert sich, wenn man statt Kreise Ellipsen betrachtet?

(8) Man berechne mit Hilfe eines Algorithmus den g.g.T. und das k.g.V. von 123456 und 7890.

(9) (a) Gesucht sind Additions– und Multiplikationstabellen der Restklassen modulo 6.
(b) Löse mit Hilfe der eben aufgestellten Tabellen die folgende Gleichung:

$$[5]_6 + [5]_6 \cdot [x]_6 = [3]_6$$

Viel Glück!

WIR

2.9 Test: Funktionen, Logik, Mengenlehre, Relationen, Zahlentheorie I/25

Abschrift • *Copie*

(1) $(X \Rightarrow (Y \Rightarrow X \wedge \neg Z)) \dot{\vee} Z \leadsto$ Tautologie?

(2) Verwandle den folgenden Ausdruck in eine vollständige NF:

$$(\neg Z \Rightarrow X \wedge Y) \uparrow (X \Rightarrow \neg Z)$$

(3) Gegeben sind in der Universalmenge U drei Mengen A, B und C. Berechne, falls möglich, mit Hilfe der nachfolgenden Angaben die Mächtigkeit $|\overline{A \cup B \cup C}|$:

$$|U| = 100,\ |A| = 50,\ |B| = 30,\ |C| = 8,\ |A \cap B| = 11,\ |A \cap C| = 7,\ B \cap C = \{\}$$

(4) $\mathcal{R} = \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2),(1,6),(6,1),(6.6),(2,6),(6,2),(3,6),(6,3),(3,3),(2,3),$ $(3,2),(1,3),(3,1),(4,5),(4,4),(4,5),(5,5),(6,6),(1,6),(5,4)\}$.
Erstelle einen Graphen und beurteile, welche Eigenschaft diese Relation hat.

(5)

$$f(x) = \sqrt{(x-3)(x-4)(x+1)},\ g(x) = x^{-5},\ h(x) = x^{-6}$$

(a) Skizziere die Graphen.

(b) Ermittle den Definitionsbereich und den Wertebereich für f, g und h.

(c) Wo ist f, g und h injektiv, surjektiv oder bijektiv?

(6) Wieviele Schnittpunkte können n Kreise maximal haben?

(a) Formel?

(b) Induktionsbeweis?

(c) Was ändert sich, wenn man statt Kreise Ellipsen betrachtet?

(7) Man berechne mit Hilfe eines Algorithmus den g.g.T. und das k.g.V. von 123456 und 7890.

(8) (a) Gesucht sind Additions– und Multiplikationstabellen der Restklassen modulo 6.

(b) Löse mit Hilfe der eben aufgestellten Tabellen die folgende Gleichung:

$$[5]_6 + [5]_6 \cdot [x]_6 = [3]_6$$

Viel Glück!

WIR

2.10 Test: Funktionen, Logik, Mengenlehre, Relationen

I/26

Abschrift • *Copie*

(1) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow A \wedge \neg C)) \dot{\vee} C \rightsquigarrow$ Tautologie?

(2) Verwandle den folgenden Ausdruck in eine vollständige NF:

$$(\neg C \Rightarrow A \wedge B) \uparrow (A \Rightarrow \neg C)$$

(3) Erkläre, was ein „indirekter“ Beweis ist.

(4) Gegeben sind in der Universalmenge G zwei Mengen A und B.

(a) $|\overline{A \cup B}| = ?$ (Formel)

(b) Beweise die Formel durch Rückgriff auf die Logik: $A \cup B = \{x \in G \mid \ldots\ldots\}$.

(5) Gegeben sind in der Universalmenge G drei Mengen A, B und C. Berechne, falls möglich, mit Hilfe der nachfolgenden Angaben die Mächtigkeit $|\overline{A \cup B \cup C}|$:

$$|U| = 100, \ |A| = 51, \ |B| = 30, \ |C| = 8, \ |A \cap B| = 11, \ |A \cap C| = 7, \ B \cap C = \{\}$$

(6) $\mathcal{R} = \{(1,3), (1,2), (2,1), (1,1), (2,2), (1,6), (6,1), (6.6), (2,6), (6,2), (3,6), (6,3), (3,3), (2,3), (4,5), (3,2), (1,3), (3,1), (4,5), (4,4), (4,5), (5,5), (6,6), (1,6), (5,4)\}$.
Erstelle einen Graphen und beurteile, welche Eigenschaft diese Relation hat.

(7)

$$f_1(t) = \sqrt{(t-3)(t-4)(t+1)}, \quad f_2(t) = t^{-5}, \quad f_3(t) = t^{-6},$$

$$f_4(t) = \begin{cases} t^2 & t \text{ abbrechender Dezimalbruch} \\ \dfrac{1}{t} & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Skizziere die Graphen, falls möglich.

(b) Ermittle den Definitionsbereich und den Wertebereich für f_1, f_2, f_3 und f_4.

(c) Wo ist f_1, f_2, f_3 und f_5h injektiv, surjektiv oder bijektiv?

Viel Glück!

WIR

2.11 Test: Funktionen, Logik, Mengenlehre, Relationen, Ungleichungen I/30

Abschrift • *Copie*

I30 Algebra !!!

(1)

$$((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \longmapsto (B \Rightarrow (C \Rightarrow A))$$

(a) Ist dieser logische Schluss korrekt?

(b) Falls die letzte Frage mit nein beantwortet werden musste, so soll die eine kNF oder aNF gefunden werden (davon die einfachste Form).

(2) Der folgende Ausdruck ist so umzuformen, dass er möglichst kurz geschrieben werden kann:

$$\neg(\neg A \Rightarrow (\neg(A \wedge \neg B)))$$

(3) Gegeben sind die Intervalle $A = [2, 3]$, $B = [3, 5]$, $C = (5, 10)$. Beweise oder widerlege:

$$A \times (B \cup C)) = (A \times B) \cup A \times C)$$

(4)

$$\mathcal{R} = \{(1, 2), (1, 1), (3, 4), (4, 5), (2, 1), (1, 1), (3, 3), (5, 4), (4, 4), (4, 3), (5, 5), (2, 2)\}$$

Erstelle einen Graphen und beurteile, um welchen Relationstyp es sich handelt.

(5)

$$a\mathcal{R}b :\Leftrightarrow a^2 \geq \frac{1}{2},\ \ a, b \in (1, \infty) \rightsquigarrow \text{ Relationstyp?}$$

(6) Skizziere den Graphen und bestimme den Definitionsbereich D_f:

$$f(x) = y = \frac{2\,x}{x^2 + 2} + \frac{1}{2}\,x - 1$$

(7) Skizziere den Graphen:

$$f(x) = (\sin(|x|) + |[x]|) \cdot sgn(x),\ \ x \in [-\pi, \pi]$$

(8) Gegeben ist der Kettenbruch $x = \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{2 + \ddots}}}$. $\rightsquigarrow$ Frage: $x \in \mathbb{Q}$?

(9)

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + 999 = \,?$$

%

(10)

$$f(n) = \frac{1}{n^2+9} + 1, \;\; D_f = \mathbb{N}$$

(a) f injektiv?

(b) $W_f = \,?$

(c) f bijektiv bezütlich $W_f\,$?

(11) Löse:

$$(x-2)(x-3) \geq (x+1)(x+2)$$

(12)

$$I_1 = (0,7), \;\; I_2 = [1.5, 5], \;\; I_3 = (3,9] \;\Rightarrow\; I = I_1 \setminus (I_2 \cap I_3) = \,?, \quad |I| = \,?$$

Viel Glück!

2.12 Test: Relationen, Funktionen, Ungleichungen I/34

Abschrift • *Copie*

Version française: Voir http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/restricted/TestsAll.pdf

(1) Untersuche und begründe, ob der folgende Sachverhalt richtig ist:

$$(f \;\; \text{bijektiv}\;) \;\wedge\; (g \;\; \text{bijektiv}\;) \;\Rightarrow\; (f \circ g \;\; \text{bijektiv}\;)$$

(2) $f(x) = 2\,x^2 + 8\,x - 35, \qquad g(x) = x + 10.$ Wo ist dann die folgende Aussage richtig?

$$(f(x) < g(x)) \;\wedge\; (6.5\,x < 0)$$

(3) Gegeben: $f(x) = x^3 + x^2 + 1$. Gesucht sind:

(a) Wertetabelle?

(b) Graph?

(c) y–Achsenabschnitt?

(d) Eventuelle Nullstellen des Graphen?

(e) Wo ist $f(x) = \sqrt{x}$?

(4) $f(x) = \sqrt{x}, \qquad g(x) = [x], \qquad h(x) = x^2.$

(a) Bestimme $\Phi = h \circ g \circ f$.

(b) Bestimme D_Φ.

(c) Bestimme W_Φ.

(d) Ist Φ surjektiv?

(e) Ist Φ injektiv?

(f) Ist Φ bijektiv?

Viel Glück!

2.13 Test: Logik, Mengenlehre, Relationen, Funktionen, Zahlentheorie I/35

Abschrift • *Copie*

(1) $\Big((x = y) \;\Rightarrow\; (y = z)\Big) \;\Rightarrow\; (a < z) \;\longmapsto\; \Big((a < z) \;\Rightarrow\; ((z = y) \;\Rightarrow\; (y = x))\Big) \leadsto$ korrekt?

(2)

X	Y	Z	W	$f(X,Y,Z,W)$
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	0
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

$f(X,Y,Z,W) \equiv\ ?$ (a.N.F.)

(3) In einem Stadion sind 548 Personen. 100 von ihnen haben einen CH–Pass, 200 einen F–Pass, 300 einen I–Pass. 30 haben sogar einen CH– und einen F–Pass, 15 einen F– und einen I–Pass, 20 einen CH– und einen I–Pass. Wieviele haben alle 3 Pässe? (Sofern die Konstellation logisch korrekt ist.)

(4) Beweise oder widerlege exakt: $A \times (A \cap B) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

(5) $A = \{1,2,3,4\},\ B = \{10,15\},\ C = \mathbb{N} \;\Rightarrow\; (A \times B) \cap (A \times C) =\ ?$

(6) $f(x) = x^2 + 2\,x - 3, \qquad f(x) = \sqrt{x+2} - 2, \qquad h(x) = 3\,\sin(x^2).$

(a) Wo ist $f(g(x))$ bijektiv?

(b) Berechne $[(f \circ g) \circ h](x)$

(7) Kreativ: Stelle $[a]_3 \cdot [b]_3 := [a \cdot b]_3 = [x]_3$ in einer Tabelle dar.

(8) $a\mathcal{R}b \;\Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq a\,b,\ \ a, b \in \mathbb{Z}$ Äquivalenzrelation?

(9) Wo gilt $-2\,x^2 - 2\,x - 2 \leq x^2 - 6\,x + 5$?

Viel Glück!

2.14 Test: Grundlagen, Funktionen, Schaltalgebra I/36

Abschrift • *Copie*

(1) Erkläre den Begriff „mathematisches Modell“ am Beispiel der Schaltalgebra!

(2) $f(x) = \sinh(x) \cdot \cosh(x)$

(a) $D_f = ?$

(b) $W_f = ?$

(c) Wo ist f bijektiv?

(d) Skizziere die Umkehrfunktion, falls eine solche existiert!

(3) $\dfrac{\log_3(2) - \log_9(4)}{\log_\pi(\pi^2 - \pi)} + \ln(2\, e^e) = ?$ (Vereinfachen!)

(4) Zwei 2–stellige Dualzahlen a und b werden multipliziert: $a \cdot b = c$.
a hat die Form $a_1 \cdot a_2$ (Ziffern a_1, a_2). b hat die Form $b_1 \cdot b_1$ (Ziffern b_1, b_2).

(a) Gesucht sind die algebraischen Ausdrücke für die nötigen Schaltungen (mit „+“, „·“, „‾“).

(b) Vereinfache die Ausdrücke nach „Karnaugh“!

Viel Glück!

WIR

2.15 Test: Funktionen, nichtlineare Ungleichungen, Vektorgeometrie I/38

Abschrift • *Copie*

(1)

$$f(x) = a\,x + b, \quad g(x) = c\,x + d, \quad (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$$

Was gelten zwischen a, b, c, d für Beziehungen?

(2) Entwerfe von Hand den Graphen von $\sin(\tan(|x|))$ in $[-\pi,\ \pi]$. Mache dazu eine vernüfntige Wertetabelle.

(3) Löse: $\displaystyle \frac{1}{4}\,x^2 - 2\,x - 5 > \frac{1}{3}\,x + 6$.

(4)

$$f(x) = \frac{2\,x^3 - 5\,x^2 + 8\,x}{-x^2 + 5\,x + 7}$$

(a) *Polstellen*?

(b) Asymptoten?

(c) Funktionsgleichung(en) der Asymptoten?

(d) Graph?

(5) Gegeben ist die Gerade g durch $P(-1; 4)$ und $Q(3; 7)$ sowie die Gerade h mit $h \perp g$ und $P \in h$.

(a) Bestimme die Funktionsgleichung $g:\ x \longmapsto g(x)$.

(b) Bestimme die Funktionsgleichung $h:\ x \longmapsto h(x)$.

(c) Wo ist $h(x) = 0$?

Viel Glück!

2.16 Test: Grundbegriffe, Grenzwerte, Funktionen, Algebra I/41

Abschrift • *Copie*

(1) Warum kann man nicht allgemein behaupten, dass die folgende Gleichung richtig sei?

$$\frac{0}{0} = 1$$

(2) Berechne, falls möglich, die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+\sin(\cos(n))}{n+\sin(n)}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[\frac{3}{4}]{n^2+2\,n+1.1}}{\sqrt[\frac{5}{6}]{n^2-2\,n+1}}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \,?\qquad a_n = 1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}+\ldots+\dfrac{1}{(??)^n}$

(3) $a_n = 1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{3!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}$

(a) Zeige, dass $\langle a_n\rangle$ konvergiert.

(b) Versuche, numerisch einen Grenzwert zu beobachten. Lässt sich hier eine Vermutung formulieren?

(4) Bestimme den folgenden Limes: $\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(2.x)^n}{2-x})$.

(5) Vergleiche die Mächtigkeit der Intervalle $[0,\ 1]$ und $[0,\ 4]$. (Begründung!)

(6) Erkläre resp. definiere die folgenden Ausdrücke:

(a) Gleichmässige Stetigkeit auf I

(b) Algebraisch irrationale Zahl

(c) Reelle Zahl

(d) Zahlenkörper

(7) Gegeben ist der Ausdruck $(\pi^{\frac{11}{17\,\pi+\pi}})^{\pi}\cdot(e^e)^{\frac{1}{e}}\cdot e^{(e^{(\frac{1}{e})})}\cdot(e^{\frac{11}{17\,\pi+\pi}})^{\pi}$.

(a) Vereinfache den Ausdruck.

(b) Approximiere den Ausdruck numerisch.

Viel Glück!

WIR

2.17 Test: Funktionen, nichtlineare Gleichungen, Zahlentheorie, Kombinatorik I/42

Abschrift • *Copie*

(1) Gegeben sind die Ziffern 4, 9, 1, 1, 9, 9, 0. Wieviele 7–ziffrige Zahlen zwischen $2'000'000$ und $6'000'000$ kann man damit bilden?

(2) Wieviele Lösungen mit $x, y, z \in \mathbb{N}$ hat die folgende Gleichung?

$$x + y + z = 100$$

(3) Sporttotto: 13 Spiele sind zu beurteilen. Für jedes Spiel hat man die Möglichkeit, 1, x oder 2 anzukreuzen. Wieviele verschiedenen Lösungen kann man setzen?

(4) Vereinfache: $((k+1)! - k \cdot k!)(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!})\binom{2\,k-1}{k-1} \cdot k! = \,?$

(5) Vereinfache: $\binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k+1} = \,?$

(6) Löse die Gleichung: $\tan(x) \cdot \cot(x) = 0.6384$.

(7) Skizziere die Funktion $f : x \longmapsto y = \arctan(x)$ und löse die Gleichung $\arctan(x) = \frac{\pi}{4}$.

(8) Skizziere in Polarkoordinaten: $r(\varphi) = \cos^2(\frac{\varphi}{2}) \cdot \varphi^2, \;\; \varphi \in [0, \; 2\,\pi]$.

(9) Berechne möglichst exakt: $\log_{3.7}(\frac{1}{3.6}) + \log_{3.7}(3.6) = \,?$

(10) Berechne möglichst exakt: $\log_{(e^2)}(e^{\pi}) = \,?$

Bemerkung: Die meisten Aufgaben sind relativ einfach und geben nicht sehr viel zu tun. Löse diejenigen Aufgaben zuerst, die dir am einfachsten vorkommen und versuche, mit 5 Minuten pro Aufgabe auszukommen.

Viel Glück!

2.18 Test: Komplexe Zahlen und Abbildungen, Funktionen, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$ I/47

Abschrift • *Copie*

(1) Die Einzelschritte müssen sichtbar sein:

(a) Eine komplexe Zahl $z \neq 0$ wird abgebildet in $f(z) = \dfrac{|z|}{\bar{z}}$.
Wo liegt geometrisch das Bild bezüglich z? (Begründung!)

(b) $z_1 = 3 + 4\,i,\ \ z_2 = -2 - 5\,i \ \Rightarrow\ \dfrac{(z_1 - z_2)(z_1 + z_2^2)}{z_1} = \,?$

(2) (a) Was ist die Summe aller 5–ten Einheitswurzeln? (Begründung!)

(b) $(\dfrac{(2-3\,i)^2}{(2+3\,i)} + (2+3\,i)^{\frac{1}{6}}) - (2-3\,i) = \,?$

(3) $f(x) = 2\,x^3 + 4\,x^2 - 8\,x^{\frac{1}{2}} + 6,\ \ g(x) = e^x\, ln(x^2 + x),\ \ F(x) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$

(a) $F'(x) = \,?$ (Nach den Regeln ableiten, keine Umformungen!)

(b) Steigungswinkel der Tangente an die Kurve $F(x)$ für $x = 3$ in *rad* $\rightsquigarrow\ \alpha = \,?$

(4) $f(x) = e^{\frac{\sinh(x^2)}{(x+1)}},\ \ g(x) = x \cdot ln(\dfrac{e^{(x^2)}}{(x+1)})$.

(a) Berechne die Ableitungen von f und g.

(b) Entscheide, ob $f'(1) > g'(2)$ richtig ist.

Viel Glück!

Kapitel • Chapitre 3

Serien mit „Folgen, Grenzwerte“

3.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Srofgebiete war nie vorhanden.

3.2 Test: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$, Differentialgeometrie und Kurven, Grenzwerte I/10

Abschrift • *Copie*

(1) $x(t) = \dfrac{1}{\cos^2(t)},\ \ y = (t) = \tan(t),\ \ \dfrac{d\,y}{d\,x} = ?$ für $t = 1$.

(2) $f(x) = e^x,\ \ x = 1 \ \rightsquigarrow$ Krümmungsraduis = ?

(3) $f(x) = e^x,\ \ x = 1 \ \rightsquigarrow$ Mittelpunkt des Krümmungskreises = ?

(4) $r(\varphi) = \dfrac{1}{2}\,(1+\cos(\varphi).\ \rightsquigarrow$ Berechne für $\varphi = 15^o$ den Winkel zwischen Radius und Tangente (in *Grad*)!

(5) Diskutiere $f(x) = \dfrac{x+5}{2-x}$.

(6) Berechne die Extrema von $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$.

(7) Berechne den Steigungswinkel der Kurve (rad!) für $x = 2$:

(a) $f(x) = \dfrac{\cos(x) \cdot \arccos(\frac{1}{x})}{x}$

(b) $f(x) = x \cdot \tan(x) - \ln(\cosh(x))$

(c)

(8) (a) $Lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x) - x^4}{3\,x^2 - \sin(x) + 2\,x} = ?$

(b) $Lim_{x\to\infty}\dfrac{x^6 - e^{-x}}{x^6 - e^x} = ?$

(9) Gegeben ist ein quadratisches Papier mit der Seitenlänge 10 cm. Aus diesem Papier wird die Mantelfläche einer quadratischen Pyramide ausgeschnitten. (Form eines Malteserkreuzes, aussen jedoch wie das Tatzen– oder Templerkreuz. Die Form wird an der Prüfung bei Bedarf mündlich erklärt.) x ist die Distanz von einer Quadratecke bis zum Beginn einer Tatze, wo man mit dem Schnitt beginnt (symmetrische Anordnung infolge der nachfolgenden Aufgabenstellung naheliegend).

(a) Wie gross muss man x wählen, damit die Pyramide einen maximalen Volumeninhalt erhält?

(b) Wie gross muss man x wählen, damit die Pyramide eine maximalen Manteloberfläche erhält?

(10) *Literaturhausaufgabe:* Versuche herauszufinden, ob die eben errechnete Pyramidenform sich in einer ägyptischen Pyramide auffinden lässt. (Es ist eine Dokumentation zu erstellen. Termin nach mündlicher Mitteilung.)

Viel Glück!

WIR

3.3 Test: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$, Differentialgeometrie und Kurven, Grenzwerte I/11

Abschrift • *Copie*

(1) $x(t) = t^3 + 3\,t^2 - 2\,t + 4,\;\; y = (t) = t^4 - 2\,t^3 - t^2 - t + 4,\;\; \dfrac{d\,y}{d\,x} = ?$ für $t = 1$.

(2) $f(x) = x^4 + 4\,x^2,\;\; x = 0 \;\leadsto$ Krümmungsraduis = ?

(3) $f(x) = x^4 + 4\,x^2,\;\; x = 0 \;\leadsto$ Mittelpunkt des Krümmungskreises = ?

(4) $r(\varphi) = \varphi \cdot \cos(2\,\varphi)$. $\leadsto$ Berechne für $\varphi = \dfrac{\pi}{12}$ den Winkel zwischen Radius und Tangente (in *rad*)!

(5) Diskutiere $f(x) = \dfrac{x^2 + 5}{x - 2}$.

(6) Berechne die Extrema von $f(x) = 2\,e^{\cos^2(x)} + 4$.

(7) Berechne den Steigungswinkel der Kurve (*rad*!) für $x = 1$:

(a) $f(x) = x^{\ln(x)}$

(b) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x} + \dfrac{\sinh(x^2)}{x^2}$

(8) (a) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\ln(2 - x^2) - (1 - x)^2}{x^2 - 2\,x + 1 - \sin(1 - x)} = ?$

(b) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x + x^2 + e^x}{x - x^2 + e^{2\,x}} = ?$

Viel Glück!

3.4 Test: Grundlagen, Algebra, Funktionen, Grenzwerte I/24

Abschrift • *Copie*

(1) (a)

$$\frac{\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}}{1 + \frac{x+1}{x-1}} = \frac{1}{2} \rightsquigarrow \quad x = ?$$

(b)

$$\text{Vereinfache:} \quad \frac{a^2 + a\,c - b^2 - b\,c}{a^2 - b^2 - 2\,b\,c - c^2}$$

(c)

$$x^2 - 4\,x - 3 \leq 2\,x + 1 \;\Rightarrow\; \mathbb{L} = ? \quad \text{(Exakt!)}$$

(2) Skizziere die Graphen:

(a) $f(x) = x - [x], \; x \in [-2, \; 2]$

(b) $f(x) = \sin(|x - [x + 0.5]|), \; x \in [-2, \; 2]$

(c) $f(x) = \sin(x) + \cos(\frac{1}{x}), \; x \in [-0.1, \; 0.1]$

(d) $f(x) = \dfrac{x-1}{|(\sqrt{x} - 1)|}, \; x \in \mathbb{R}$

(3) Bestimme so genau wie möglich Pole, Asymptoten und Monotoniebereiche:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x + 1}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x+1)^2}$

(4) (a) $a_n = \cos(n) \cdot \sin(\dfrac{n + 2\,n^2}{3\,n^3 + 4\,n^{\frac{1}{2}}}) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} ?$

(b) Gegeben ist eine quadratische Platte der Dicke 1 cm. Auf diese Platte wird eine zweite Platte der selben Dicke gelegt, deren Ecken mit den Seitenmittelpunkten der ersten Platte zusammenfallen. Nach dem gleichen Rezept wird auf die zweite Platte eine dritte gelegt und so fort, in alle Ewigkeit. So entsteht ein unendlich hoher Turm. Wie gross ist die gesamte obere Deckfläche aller Platten zusammen, die man aus einem Halbfabrikat ausschneiden müsste? (Das Ausschneiden ist der unendlich vielen Teile wegen natürlich in der Realität nicht möglich, aber rechnen kann man es trotzdem.)

(c) Gegeben ist eine Folge mit $x_1 = a, \; x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\,(x_n + \dfrac{a}{x_n})$.
Zeige im Beispiel $a = 2$ dass die Folge konvergiert und berechne den Grenzwert allgemein für $a > 0$. *Herleitung angeben!*

(5) Schreibe in lateinischer Schrift:

$H\epsilon\upsilon\rho\epsilon\kappa\alpha$! $\Gamma\epsilon\sigma\chi\eta\alpha\phi\phi\tau$! $\Delta\alpha\sigma$ $\Delta\iota\nu\gamma$ $\eta\alpha\tau$ $\Sigma\pi\alpha\sigma\sigma$ $\gamma\epsilon\mu\alpha\chi\eta\tau$!

(6) (a) Skizziere die Graphen.

(b) Ermittle den Definitionsbereich und den Wertebereich für f, g und h.

(c) Wo ist f, g und h injektiv, surjektiv oder bijektiv?

(7) Wieviele Schnittpunkte können n Kreise maximal haben?

(a) Formel?

(b) Induktionsbeweis?

(c) Was ändert sich, wenn man statt Kreise Ellipsen betrachtet?

(8) Man berechne mit Hilfe eines Algorithmus den g.g.T. und das k.g.V. von 123456 und 7890.

(9) (a) Gesucht sind Additions– und Multiplikationstabellen der Restklassen modulo 6.

(b) Löse mit Hilfe der eben aufgestellten Tabellen die folgende Gleichung:

$$[5]_6 + [5]_6 \cdot [x]_6 = [3]_6$$

Viel Glück!

WIR

3.5 Test: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$, Grenzwerte I/37

Abschrift • *Copie*

(1) $\langle a_n \rangle = [a_1, a_2, a_3, \ldots] = [-2, -2, -4, -6, 16, \ldots]$

(a) $a_{10=}$?

(b) Konvergiert die Folge?

(2) $\langle a_n \rangle \rightsquigarrow \quad a_n = \cos(n) \cdot \dfrac{\sin(\frac{1}{n})}{n} + \dfrac{\cos(n}{n^2}$

(a) Konvergiert die Folge für $n \to \infty$?

(b) Was ist allenfalls der Grenzwert?

(3) $f(x) = \dfrac{\sin(x-\pi)\cdot(x-\pi)+\cos(x-\pi)\cdot e^{\frac{x-\pi}{2}}-\pi}{x^2-\pi} \rightsquigarrow \lim\limits_{x\to\pi} f(x) = \,?$

(4)

(a) $\Big(\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x-1)(x+3)}\Big)' = \,?$

(b) $\Big(\sin(x)\cdot\cos(x)\cdot e^x - 2\,e^{-\cos(x)}\Big)' = \,?$

(5) $f(x) = 3\,x^4 - 2\,x^3 + \dfrac{1}{2}\,x^2 - 8\,x + 4$

Steigungswinkel der Tangente an die Kurve für $x = 160$? *(In rad, auf* 5 *Stellen genau!)*

Viel Glück!

WIR

3.6 Test: Grundbegriffe, Grenzwerte, Funktionen, Algebra I/41

Abschrift • *Copie*

(1) Warum kann man nicht allgemein behaupten, dass die folgende Gleichung richtig sei?

$$\frac{0}{0} = 1$$

(2) Berechne, falls möglich, die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+\sin(\cos(n))}{n+\sin(n)}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+2\,n+1.1}}{\sqrt[5]{n^2-2\,n+1}}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \,?\qquad a_n = 1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}+\ldots+\dfrac{1}{(??)^n}$

(3) $a_n = 1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{3!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}$

(a) Zeige, dass $\langle a_n\rangle$ konvergiert.

(b) Versuche, numerisch einen Grenzwert zu beobachten. Lässt sich hier eine Vermutung formulieren?

(4) Bestimme den folgenden Limes: $\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(2.x)^n}{2-x})$.

(5) Vergleiche die Mächtigkeit der Intervalle $[0,\ 1]$ und $[0,\ 4]$. (Begründung!)

(6) Erkläre resp. definiere die folgenden Ausdrücke:

(a) Gleichmässige Stetigkeit auf I

(b) Algebraisch irrationale Zahl

(c) Reelle Zahl

(d) Zahlenkörper

(7) Gegeben ist der Ausdruck $\quad (\pi^{\frac{11}{17\,\pi+\pi}})^{\pi}\cdot(e^e)^{\frac{1}{e}}\cdot e^{(e^{(\frac{1}{e})})}\cdot(e^{\frac{11}{17\,\pi+\pi}})^{\pi}$.

(a) Vereinfache den Ausdruck.

(b) Approximiere den Ausdruck numerisch.

Viel Glück!

WIR

3.7 Test: Algebra und Zahlentheorie, Grenzwerte I/46

Abschrift • *Copie*

(1) Berechne exakt: $k.g.V.(224424, 56322) = ?$ (Methode $\rightsquigarrow$ Euklidscher Algorithmus!)

(2) Verwandle $0.54\overline{54}\ldots$ in einen gewöhnlichen, gekürzten Bruch!

(3) Berechne das Inverse von $[5]$ in $(\mathbb{Z}_{13}, \cdot)$!

(4) Berechne x resp. x und y jeweils vollumfänglich:

(a) $16 \equiv 22\,x \ (mod\ 30)$

(b) $18\,x \equiv 1 \ (mod\ 53)$

(c) System: $\left| \begin{array}{lcl} 4\,x + y & \equiv & 8\ mod\ 12 \\ 2\,x - y & \equiv & 10\ mod\ 12 \end{array} \right|$

(5) Berechne den Grenzwert, falls möglich:

(a) Rekursiv definierte Folge: $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$

(b) $a_n = \dfrac{(1-n^2)}{n} \cdot \sin(\dfrac{1}{n})$

(c) $a_n = \dfrac{n^2+6}{3\,n^2+5}$

(d) $a_n = \dfrac{n^{\frac{1}{2}} - n^2}{n^{\frac{1}{2}} + n^2}$

(e) $a_n = 10 - 9 + 8.1 - 7.29 + 6.561 - \ldots$ (n Summanden!)

(6) Berechne $\lim\limits_{n\to 6} \dfrac{(x-6)^4}{(x^4-6^4)}$

Viel Glück!

WIR

3.8 Test: Grenzwerte, nichtlineare Gleichungen und Ungleichungen, Zahlentheorie I/62

Abschrift • *Copie*

(1) Löse:

(a) $\log_{10}(x) - e^x > 0$

(b) $\sinh^2(x) - \cosh^2(x) = \dfrac{1}{4}$

(c) $\sinh^2(x) + \cosh^2(x) = \dfrac{1}{4}$

(2) Zeige:

(a) $x \; R \; y :\Leftrightarrow x^2 - y^2 \in \mathbb{Z}$ ist Äquivalenzrelation.

(b) Betrachte dazu die Abbildung: $x \longmapsto$ Äquivalenzklasse $[x]$.
$\rightsquigarrow$ Was ist hier die Urbildklasse von $[\sqrt{2}]$?

(3) Untersuche die Konvergenz von $\langle a_n \rangle$ und berechne, falls möglich, den Grenzwert:

(a) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1} - 1}$

(b) $a_n = e^{\frac{1}{n}}$

(c) $a_n = e^{\sqrt{n}}$

(d) $a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2\,n)!}$

(4) Wieviele Häufungspunkte hat die Folge $\langle a_n \rangle = \langle \sin(\dfrac{3\,n\,\pi}{13} + 1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}) \rangle$?

(5) (a) Stimmt die Gleichung $|\mathbb{Q}^2| = |\mathbb{Q}|$? (Begründung!)

(b) Stimmt die Gleichung $|\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}|$? (Begründung!)

Viel Glück!

3.9 Test: Grenzwerte, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$ II/1

Abschrift • *Copie*

(1)

$$P_1 = P_1(-3;1),\ \ P_2 = P_3(-2;0),\ \ P_3 = P_3(0;0),\ \ P_4 = P_4(1;0),\ \ P_5 = P_5(2;1)$$

Bestimme ein Polynom mit minimalem Grad durch P_1, P_2, P_3, P_4, P_5.

(2)

$$f(x) = \sin^2(x) - |[x]|,\ \ D_f = [-3,\ 3].$$

(a) Graph von f?

(b) Wo ist f stetig?

(c) Wo ist f monoton?

(3) $f_1 = 2\,x^2 + 2\,x - 4$ und $f_2(x) = -x^2 + x - 2$ schneiden sich in x_1 und x_2.

(a) Skizze?

(b) Ist $f_3(x) = \dfrac{1}{f_1(x) - f_2(x)} + x + 1$ beschränkt auf $[x_1,\ x_2$?

(c) Hat $f_3(x)$ eine Asymptote?

(4) $f(x) = \cosh(\sqrt{x+1} - 1)$

(a) $f^{-1}(x) = ?$

(b) Ist $f^{-1}(x)$ monoton?

(c) $D_{f^{-1}} = ?$ und $W_{f^{-1}} = ?$

(5)

$$r(\varphi) = |\cos(\varphi)|$$

(a) Skizziere $r(\varphi)$ in Polarkoordinaten.

(b) Ist $r(\varphi)$ gleichmässig stetig?

(6)

$$f(x) = cos(2\,x) \cdot e^x,\ \ x \in (0,\ \frac{3\,\pi}{2}]$$

(a) Skizziere $f(x)$.

(b) Bestimme Minumum und Maximum resp. Supremum und Infimum.

(7)

$$f(x) = [x],\ \ x \in [-1,\ 0] \cup [1,\ 2]$$

Setze f derart fort, dass f stetig ist in $[-1,\ 2]$ (Skizze!).
Beschreibung von f notwendig!

(8) (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\tan(2\,x)}\,(5\,x+\cos(x)) = \,?$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{1+n}{n^2} - 1)\,(3 - \dfrac{5}{n} + \dfrac{\cos(n)}{\sqrt{n}}) = \,?$

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$. $\rightsquigarrow$ $1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^3} + \ldots + \dfrac{1}{n^n} \to \,?$

(d) $a_n = \dfrac{6^n}{2\,n} \cdot \sin(n) - \dfrac{1}{n} \cdot \sin(n!)$. $\rightsquigarrow$ Konvergiert $\langle a_n \rangle$?

Viel Gl?ck!

3.10 Test: Grenzwerte, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$ II/03

Abschrift • *Copie*

(1) $x = \dfrac{1}{cos^2(t)}, \;\; y = \tan(t)$

(a) $\dfrac{d\,y}{d\,x} = ?$

(b) $\dfrac{d\,y(t)}{d\,x(t)}\Big|_{t=1} = ?$

(2) $e^x = -x, \;\; x_1 = 0.5.$
Approximiere die Lösung auf 4 Stellen genau. Wieviele Schritte braucht es?

(a) Beim Newtonverfahren

(b) Beim Fixpunktverfahren

(3) Welche Funktion ist jeweils wo in I gleichmässig stetig?

(a) $f(x) = [x] - x, \;\; x \in I = [\dfrac{1}{10}, \; \dfrac{9}{11})$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} \cdot \sqrt{x}, \;\; x \in I = [0, \; 1]$

(c) $f(x) = (\sin(x))^{\cos(x)}, \;\; x \in I = [0, \; 2\,\pi]$

(d) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^x}, \;\; x \in I = [-1, \; 1]$

(4) Berechne jeweils die Ableitung exakt und aus der Ableitung anschliessend den Steigungswinkel von f in rad für $x = 1$ auf 4 Stellen genau.

(a) $f(x) = \dfrac{\cos(x) \cdot \arccos(\frac{1}{x})}{x}$

(b) $f(x) = x \cdot \tan(x) - \ln(\cosh(x))$

(5) Diskutiere $f(x) = \dfrac{x^2+5}{x-1}.$

(6) $f(x) = x^{\frac{1}{x}} \rightsquigarrow$ Berechne die Extrema, falls vorhanden.

(7) $y = e^{-x\cdot\sin(x)}, \;\; x \in [0, \; 15] \rightsquigarrow$ Berechne die Minima, Maxima, Wendepunkte und Nullstellen.

(8) Berechne $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x) - x^2}{3\,x^{\frac{2}{3}} - \sin(x) + 2\,x}.$

(9) Gegeben ist ein Kreissektor mit dem Winkel φ und dem Radius r. Diesem Sektor ist ein Rechteck einzuschreiben (Flächeninhalt A), wobei eine Rechteckseite (Basis) auf einen Sektorschenkel zu liegen kommt.

(a) Berechne die Höhe h des Rechtecks als Funktion von φ.

(b) Berechte den Flächeninhalt des inhaltsgrössten Rechtecks als Funktion von φ.

Viel Glück!

WIR

3.11 Test: Grenzwerte, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$ II/04

Abschrift • *Copie*

(1)

(a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 6\,x^2 + 11\,x - 6}{x+1}$ (b) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

Erstelle resp. berechne:

(a) Skizze?

(b) Pole?

(c) Nullstellen?

(d) Extrema?

(2)

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x}{\sin^2(x) - \sin(x)} = ?$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\ln((x+1)^{1.5}} = ?$

(3) Berechne jeweils die 1. Ableitung:

(a) $f(x) = e^{x^2+1} \cdot \ln(x)$

(b) $f(x) = (\tan(x))^{\arctan(x)}$

(c) $f(x) = \cos^2(\sin(\cos(x))) \cdot \cos(x)$

(d) $f(x) = \ln(\tanh(x))$

(e) $f(x) = \sqrt{(x\,\cos(x))^2 + (x\,\sin(x))^2}$

(f) $f(x) = x^{x-3}$

Viel Glück!

3.12 Test: Grenzwerte, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$ II/05

Abschrift • *Copie*

(1) Berechne die 1. Ableitung:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)} + \sin(x) \cdot \cos(x) - \ln(\tan(x))$

(b) $f(x) = x^{x^x} - x^{\frac{1}{3}} + 1$

(2) Berechne die Ableitung von $y = f(x)$ aus der impliziten Gleichung $F(x, y) = 0$:

(a) $F(x, y) = 2\,x\,y - x^2 + y^2 - 4$

(b) $F(x, y) = \sin^2(x\,y) + \cos^2(x\,y)$

(3) Vermischte Aufgaben:

(a) $f(x) = x^{-2} + x^{-1}$

i. $f^{-1}(x) = \,?$

ii. $(f^{-1}(x))' = \,?$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\,\sin(x^2)}{x\,\sin(x)} = \,?$

(4) Diskutiere die folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = e^{-x^4+1}$

(b) $f(x) = \dfrac{(x-3)(x-6)}{(x-4)}$

Viel Glück!

WIR

3.13 Test: Grenzwerte, Differential– und Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$

II/06

Abschrift • *Copie*

(1) Integriere von Hand: $f(x) = x^5 - 2\,x^4 - x^3 - x^2 + x + 1 \;\rightsquigarrow$

(a) $\int f(x)\,dx = \,?$

(b) $\int\limits_{-1}^{\frac{13}{4}} f(x)\,dx = \,?$ (Skizze!)

(2) Integriere von Hand: $f(x) = x^2 \cdot \sinh(x) \;\rightsquigarrow\; \int\limits_0^1 f(x)\,dx = \,?$ (Skizze!)

(3) Berechne: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sinh(x)}{x^2 - 2\,x} = \,?$

(4) Diskutiere: $f(x) = \dfrac{(2\,x^4 + 4\,x + 4)(3\,x - 2)}{(x - 2)}$

(5) Diskutiere: $f(x) = e^x \cdot \sin(x)$

Viel Glück!

Kapitel • Chapitre 4

Serien mit „Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$“

4.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Srofgebiete war nie vorhanden.

4.2 Test: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$ I/09

Abschrift • *Copie*

(1) (a) $f(x) = e^x \cos(x) + \frac{1}{3} x^3 \sin(x) \rightsquigarrow f'(x) = ?$

(b) $f(x) = \big(\sin(x) \cdot \arcsin(x)\big) \cdot \sqrt{x} \rightsquigarrow f'(x) = ?$

(c) $f(x) = \frac{x^x}{\ln(x)} \rightsquigarrow f'(x) = ?$

(2) Berechne Nullstellen und Extrema: • *Calculer les zéros et les extrémums:*

(a) $f(x) = 4\, e^{-2\,x} \cdot \cos(2\,\pi\, x) - 3.9$

(b) $f(x) = e^{-\frac{x^2\,\pi}{4}}$

(3) Gegeben: • *Donné:* $\triangle ABC,\ D \in \overline{AC},\ \overline{AC} \perp \overline{BD},\ |\overline{BD}| = 6,\ |\overline{AD}| = 5,\ |\overline{DC}| = 3.$
$P_1, P_1 \in \overline{AB},\ P_3 \in \overline{BC},\ P_4 \in \overline{AC},\ Fig.(P_1P_2P_3P_4) =$ Rechteck. • *rectangle.*

Sei • *Soit* $|\overline{P_1P_2}| := x.$ Flächeninhalt$(Fig.(P_1P_2P_3P_4)) = F(x)$
• *Surface*$(Fig.(P_1P_2P_3P_4)) = F(x)$

$$F(x) \to \max \ \Rightarrow\ x = ?$$

(4) Gegeben: Kurve • *Donné: courbe* $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},\ y = f(x)$

$$\alpha = \arctan(f'(x)),\ x(t) = k \cdot \cos(\alpha) \cdot t,\ y(t) = k \cdot \sin(\alpha) \cdot t - \frac{1}{2}\, g \cdot t^2$$

$$x[m],\ y[m],\ t[sec],\ k \approx 5\ [\frac{m}{sec}],\ g \approx 9.81\ [\frac{m}{sec^2}]$$

(a) Skizze? • *Esquisse?*

(b) $y(x) = ?$

(c) $x_1 > 0,\ f(x_1) = 0,\ x_1 = x_1(\alpha) \to \max \ \Rightarrow\ \alpha = ?$

Viel Glück! — Bonne chance!

WIR

4.3 Test: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$, Differentialgeometrie und Kurven, Grenzwerte I/10

Abschrift • *Copie*

(1) $x(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}$, $y = (t) = \tan(t)$, $\frac{d\,y}{d\,x} = ?$ für $t = 1$.

(2) $f(x) = e^x$, $x = 1 \rightsquigarrow$ Krümmungsraduis = ?

(3) $f(x) = e^x$, $x = 1 \rightsquigarrow$ Mittelpunkt des Krümmungskreises = ?

(4) $r(\varphi) = \frac{1}{2}\,(1+\cos(\varphi)$. $\rightsquigarrow$ Berechne für $\varphi = 15^o$ den Winkel zwischen Radius und Tangente (in *Grad*)!

(5) Diskutiere $f(x) = \frac{x+5}{2-x}$.

(6) Berechne die Extrema von $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$.

(7) Berechne den Steigungswinkel der Kurve (*rad*!) für $x = 2$:

(a) $f(x) = \frac{\cos(x) \cdot \arccos(\frac{1}{x})}{x}$

(b) $f(x) = x \cdot \tan(x) - \ln(\cosh(x))$

(c)

(8) (a) $Lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x) - x^4}{3\,x^2 - \sin(x) + 2\,x} = ?$

(b) $Lim_{x\to \infty} \frac{x^6 - e^{-x}}{x^6 - e^x} = ?$

(9) Gegeben ist ein quadratisches Papier mit der Seitenlänge 10 cm. Aus diesem Papier wird die Mantelfläche einer quadratischen Pyramide ausgeschnitten. (Form eines Malteserkreuzes, aussen jedoch wie das Tatzen– oder Templerkreuz. Die Form wird an der Prüfung bei Bedarf mündlich erklärt.) x ist die Distanz von einer Quadratecke bis zum Beginn einer Tatze, wo man mit dem Schnitt beginnt (symmetrische Anordnung infolge der nachfolgenden Aufgabenstellung naheliegend).

(a) Wie gross muss man x wählen, damit die Pyramide einen maximalen Volumeninhalt erhält?

(b) Wie gross muss man x wählen, damit die Pyramide eine maximalen Manteloberfläche erhält?

(10) *Literaturhausaufgabe:* Versuche herauszufinden, ob die eben errechnete Pyramidenform sich in einer ägyptischen Pyramide auffinden lässt. (Es ist eine Dokumentation zu erstellen. Termin nach mündlicher Mitteilung.)

Viel Glück!

WIR

4.4 Test: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$, Differentialgeometrie und Kurven, Grenzwerte I/11

Abschrift • *Copie*

(1) $x(t) = t^3 + 3\,t^2 - 2\,t + 4,\;\; y = (t) = t^4 - 2\,t^3 - t^2 - t + 4,\;\; \frac{d\,y}{d\,x} = ?$ für $t = 1$.

(2) $f(x) = x^4 + 4\,x^2,\;\; x = 0 \;\rightsquigarrow$ Krümmungsraduis = ?

(3) $f(x) = x^4 + 4\,x^2,\;\; x = 0 \;\rightsquigarrow$ Mittelpunkt des Krümmungskreises = ?

(4) $r(\varphi) = \varphi \cdot \cos(2\,\varphi).\;\rightsquigarrow$ Berechne für $\varphi = \frac{\pi}{12}$ den Winkel zwischen Radius und Tangente (in rad)!

(5) Diskutiere $f(x) = \dfrac{x^2+5}{x-2}$.

(6) Berechne die Extrema von $f(x) = 2\,e^{\cos^2(x)} + 4$.

(7) Berechne den Steigungswinkel der Kurve ($rad\,!$) für $x = 1$:

(a) $f(x) = x^{\ln(x)}$

(b) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x} + \dfrac{\sinh(x^2)}{x^2}$

(8) (a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(2-x^2) - (1-x)^2}{x^2 - 2\,x + 1 - \sin(1-x)} = ?$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x + x^2 + e^x}{x - x^2 + e^{2\,x}} = ?$

Viel Glück!

4.5 Test: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$, nichtlineare Gleichungen, Gleichungssysteme I/17

Abschrift • *Copie*

Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$, nichtlineare Gleichungen, Gleichungssysteme
I18 Differentialgleichungen

(1) Gegeben ist die Funktion — *Soit donnée la fonction* $f(x) = x^4 - 5\,x^3 + 3\,x^2 + 5\,x + 2$.

(a) Kontrollieren Sie, ob diese Funktion bei $x = 1 + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}} \approx 3.84732$ eine Nullstelle hat.
Controller si cette fonction a un zéro à $x = 1 + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}} \approx 3.84732$.

(b) Skizzieren Sie die Funktionskurve.
Dessiner une esquisse de la courbe de cette fonction.

(c) Bestimmen Sie alle Nullstellen, Extrema und Wendepunkte der Kurve.
Trouver tous les zéros, les points extrêmes et les points d'infléxion de cette fonction.

(2) Gegeben ist das Gleichungssystem — *Soit donné le système d'équations*:

$$\begin{aligned} x - y + z &= 3 \\ r\,x - y - z &= 1 \\ 2\,x + y - 4\,z &= -3\,q \end{aligned} \tag{4.1}$$

(a) Für $z = 3$ und $q = 1$ existiert eine Lösung. Berechne x, y und r.
Pour $z = 3$ *et* $q = 1$ *il existe une solution. Calculer* x, y *et* r.

(b) Sei $q = -2$. Für welche r existieren keine resp. unendlich viele Lösungen?
Soit $q = -2$. *Decider pour quels* r *il n'y a pas de solution resp. infiniment de solutions.*

Viel Glück!

WIR

4.6 Test: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$, Grenzwerte I/37

Abschrift • *Copie*

(1) $\langle a_n \rangle = [a_1, a_2, a_3, \ldots] = [-2, -2, -4, -6, 16, \ldots]$

(a) $a_{10=}$?

(b) Konvergiert die Folge?

(2) $\langle a_n \rangle \rightsquigarrow \quad a_n = \cos(n) \cdot \dfrac{\sin(\frac{1}{n})}{n} + \dfrac{\cos(n}{n^2}$

(a) Konvergiert die Folge für $n \to \infty$?

(b) Was ist allenfalls der Grenzwert?

(3) $f(x) = \dfrac{\sin(x-\pi) \cdot (x-\pi) + \cos(x-\pi) \cdot e^{\frac{x-\pi}{2}} - \pi}{x^2 - \pi} \quad \rightsquigarrow \quad \lim\limits_{x \to \pi} f(x) = \,?$

(4)

(a) $\left(\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x-1)(x+3)}\right)' = \,?$ (b) $\left(\sin(x) \cdot \cos(x) \cdot e^x - 2\,e^{-\cos(x)}\right)' = \,?$

(5) $f(x) = 3\,x^4 - 2\,x^3 + \dfrac{1}{2}\,x^2 - 8\,x + 4$

Steigungswinkel der Tangente an die Kurve für $x = 160$? *(In rad, auf* 5 *Stellen genau!)*

Viel Glück!

4.7 Test: Komplexe Zahlen und Abbildungen, Funktionen, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$ I/47

Abschrift • *Copie*

(1) Die Einzelschritte müssen sichtbar sein:

(a) Eine komplexe Zahl $z \neq 0$ wird abgebildet in $f(z) = \dfrac{|z|}{\bar{z}}$.
Wo liegt geometrisch das Bild bezüglich z? (Begründung!)

(b) $z_1 = 3 + 4\,i,\;\; z_2 = -2 - 5\,i \;\Rightarrow\; \dfrac{(z_1 - z_2)(z_1 + z_2^2)}{z_1} = ?$

(2) (a) Was ist die Summe aller 5–ten Einheitswurzeln? (Begründung!)

(b) $\left(\dfrac{(2-3\,i)^2}{(2+3\,i)} + (2+3\,i)^{\frac{1}{6}}\right) - (2-3\,i) = ?$

(3) $f(x) = 2\,x^3 + 4\,x^2 - 8\,x^{\frac{1}{2}} + 6,\;\; g(x) = e^x\, ln(x^2 + x),\;\; F(x) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$

(a) $F'(x) = ?$ (Nach den Regeln ableiten, keine Umformungen!)

(b) Steigungswinkel der Tangente an die Kurve $F(x)$ für $x = 3$ in *rad* $\rightsquigarrow\;\; \alpha = ?$

(4) $f(x) = e^{\frac{\sinh(x^2)}{(x+1)}},\;\; g(x) = x \cdot ln\left(\dfrac{e^{(x^2)}}{(x+1)}\right)$.

(a) Berechne die Ableitungen von f und g.

(b) Entscheide, ob $f'(1) > g'(2)$ richtig ist.

Viel Glück!

4.8 Test: Vektorgeometrie, Determinanten und Matrizen, Eigenwerttheorie, Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$ I/52

Abschrift • *Copie*

(1)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Eigenwerte von C.

(b) Berechne die Eigenvektoren von C.

(c) Was hat B mit C zu tun?

(d) Berechne die Inverse von C.

(2)

$$f(x) = \frac{x^3 + 3\,x^2 - x - 2}{x^2 + 2\,x}$$

(a) $\int f(x)\,dx = \,?$

(b) $\int\limits_{-3}^{\infty} f(x)\,dx = \,?$

(c) $\int\limits_{-3}^{\infty} \frac{f(x)}{x^k}\,dx \rightsquigarrow$ Wie gross muss k mindestens sein, damit das Integral existiert? (Begründung!)

(d) $\int\limits_{-3}^{\infty} \frac{f(x)}{x^4}\,dx = \,? \rightsquigarrow$ Exakt!

(3) $g(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ hat Nullstellen bei $x = 0$ und bei $x = 3$ sowie einen Wendepunkt in $(x, y) = (1, 1)$. Weiter sei $M(x_m, y_m)$ derjenige Punkt mit $0 \leq x_m \leq 3$, in dem der Funktionswert ein lokales Maximum annimmt. R sei das achsenparallele Rechteck, das durch den Urspung O und M gebildet wird.
Berechne $\int\limits_0^3 f(x)\,dx$ und entscheide, ob $\int\limits_0^3 f(x)\,dx \geq$ (Inhalt von R) richtig ist.

(4) Gegeben sind die Gerade g und die Ebene Φ:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \Phi : x - y + 2\,z + 2 = 0$$

Unter welchem Winkel (α) trifft g auf Φ auf?

Viel Glück!

WIR

4.9 Test: Lineare Abbildungen, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$, komplexe Zahlen, Reihen I/53

Abschrift • *Copie*

(1)

$$(-1)\,A^{-1}\cdot\vec{x}\,' = (\vec{x}-\vec{b}),\;\; A=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix},\;\; \vec{b}=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix},\;\; \vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\;\; y=4\,x-3$$

$\rightsquigarrow$ Bild $\vec{x}\,'$ des Geradenvektors $\vec{x}$? • *Image $\vec{x}\,'$ du vecteur de la droite $\vec{x}$?*

(2) Miovre: $\sin(5\,\varphi)=\cos^5(\varphi)-\ldots=\,?$

(3)

$$f(z)=\frac{2}{z-1}$$

Bild von • *Image de* $\gamma_1 : z_1(t)=e^{i\,t}$
Bild von • *Image de* $\gamma_2 : z_2(t)=3\,i\,t$

(4) Gesucht: Polynom $f(x)$ mit • *Chercher: Polynôme $f(x)$ avec*

$$f(1)=0,\;\; f(-1)=0,\;\; f(-2)=0,\;\; f\,'(2)=38.$$

(5) Untersuche, ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren:
• *Démontrer la convergence ou la divergence des séries suivantes:*

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3\,\sin(n\,x)}{n^6}+\frac{1}{n^3}\right)$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4\,n^3}{2\,n^3+7}\right)^n$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\,n^2}{4\,n^4+2\,n^2+3}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sin(\frac{1}{n})+1}$

Viel Glück!

4.10 Test: Lineare Abbildungen, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$, komplexe Zahlen, Reihen I/54

Abschrift • *Copie*

(1)

$$(-1)\,A^{-1}\cdot\vec{x}\,' = (\vec{x}+\vec{b}),\;\; A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\; \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1\end{pmatrix},\;\; \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix},\;\; y = 2\,x-5$$

$\leadsto$ Bild $\vec{x}\,'$ des Geradenvektors $\vec{x}$? • *Image $\vec{x}\,'$ du vecteur de la droite $\vec{x}$?*

(2) Miovre: $\sin(5\,\varphi) = \ldots\sin(\varphi) - \ldots = ?$

(3)

$$f(z) = \frac{3}{z+1}$$

Bild von • *Image de* $\gamma_1 : z_1(t) = e^{i\,t}$
Bild von • *Image de* $\gamma_2 : z_2(t) = 2\,i\,t$

(4) Gesucht: Polynom $f(x)$ mit • *Chercher: Polynôme $f(x)$ avec*

$$f(1) = 0,\;\; f(3) = 0,\;\; f(-1) = 0,\;\; f\,'(-2) = \frac{19}{2}.$$

(5) Untersuche, ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren:
• *Démontrer la convergence ou la divergence des séries suivantes:*

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{3\,\cos(-2\,n\,x)}{n^5}+\frac{2}{n^4})$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{5\,n^4}{8+4\,n^4})^n$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4\,n^3}{2\,n^6+4\,n^2-2}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{e^{\frac{1}{n}}+1}$

Viel Glück!

4.11 Test: Differential– und Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$, Vektorgeometrie I/59

Abschrift • *Copie*

(1) In welchem Verhältnis teilt die durch $f(x) = x^3$ beschriebene Kurve das im 1. Quadranten liegende Flächenstück, welches begrenzt ist durch $g(x) = a\,x - x^3$ und die x–Achse? Für welche a–Werte ist die Aufgabe sinnvoll?

(2) In einem kartesischen Koordinatensystem wird ein durch den Punkt $P(1; 11; 2)$ gehender, parallell zur x–Achse laufender Lichtstrahl an einer Kugel mit Zentrum im Ursprung und dem Radius 3 reflektiert. In welchem Punkt und unter welchem Winkel schneidet der reflektierte Strahl die (x, z)–Ebene?
Kontrollangabe: Die Koordinaten des gesuchten Punktes sind ganzzahlig.

(3)

$$f(x) := \frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot ln(\frac{x^2 - \sqrt{2} \cdot x + 1}{x^2 + \sqrt{2} \cdot x + 1}) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \arctan(\frac{\sqrt{2} \cdot x}{1 - x^2})$$

Berechne $f\,'(x)$. Stelle das Resultat möglichst einfach dar.

(4) Integration:

(a) Zeige zuerst, dass die Funktion $f(x) = \cos(\sin(x))$ eine $2\,\pi$–periodische Funktion ist.

(b) Wir nehmen an, dass mit Hilfe der eben definierten Funktion $A(a) = \int\limits_0^{2\pi} e^{a \cdot x} \cdot f(x)\,dx$ berechnet sei. Berechne daraus $\int\limits_0^{n \cdot 2\pi} e^{a \cdot x} \cdot f(x)\,dx, \; n \in \mathbb{N}$.

(c) Für welchen a–Wert existiert das obige Integral bei $n \to \infty$? Berechne in diesem Fall dieses uneigentliche Integral wieder unter Verwendung von $A(a)$.

Viel Glück!

4.12 Test: Boolsche Algebra, Differential– und Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$, Vektorgeometrie I/59

Abschrift • *Copie*

(1) Vereinfache den Boolschen Ausdruck $z = x \cdot y + [(x + y') \cdot y]'$.
Dabei bedeutet „·“ $\hat{=}$ AND, „+“ $\hat{=}$ OR, „′ “ $\hat{=}$ NOT.
Verlangt ist Analyse und Graphik.

(2) Berechne mit Hilfe der Partialbruchzerlegung das unbestimmte Integral

$$\int \frac{2\,x^2 + 9\,x + 12}{x^2 + 6\,x + 10}\,dx.$$

(3) Durch ein unbekanntes Polynom f 3. Grades ist eine Kurve gegeben, von der man weiss: $f(-p) = 0$, $f(0) = 3\,p$, $f(2\,p) = 3\,p$. Zudem befindet sich in $(0; f(0))$ ein lokales Maximum.

(a) Skizziere die Situation.

(b) Berechne die Koeffizienten als Funktion des Parameters p.

(c) A_1 sei das Flächenstück unter der Kurve zwischen $-p$ und 0. A_2 dasjenige zwischen 0 und $2\,p$. Bestimme das Verhältnis $A_1 \, : A_2$.

(4) Von einem Punkt $P(3; 3; 5)$ aus fällt ein Lichtstrahl in Richtung des Vektors $\vec{a} = (-1, -1, -2)^T$ auf einen Planspiegel, der durch die Ebene $\Phi: \; x + 2\,x + 3\,z = 6$ beschrieben wird. Bestimme die Parameterdarstellung der Geraden, auf der der reflektierte Strahl liegt.

Viel Glück!

4.13 Test: Grenzwerte, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$ II/1

Abschrift • *Copie*

(1)

$$P_1 = P_1(-3;1),\ \ P_2 = P_3(-2;0),\ \ P_3 = P_3(0;0),\ \ P_4 = P_4(1;0),\ \ P_5 = P_5(2;1)$$

Bestimme ein Polynom mit minimalem Grad durch P_1, P_2, P_3, P_4, P_5.

(2)

$$f(x) = \sin^2(x) - |[x]|,\ \ D_f = [-3,\ 3].$$

(a) Graph von f?

(b) Wo ist f stetig?

(c) Wo ist f monoton?

(3) $f_1 = 2\,x^2 + 2\,x - 4$ und $f_2(x) = -x^2 + x - 2$ schneiden sich in x_1 und x_2.

(a) Skizze?

(b) Ist $f_3(x) = \dfrac{1}{f_1(x) - f_2(x)} + x + 1$ beschränkt auf $[x_1,\ x_2$?

(c) Hat $f_3(x)$ eine Asymptote?

(4) $f(x) = \cosh(\sqrt{x+1} - 1)$

(a) $f^{-1}(x) = ?$

(b) Ist $f^{-1}(x)$ monoton?

(c) $D_{f^{-1}} = ?$ und $W_{f^{-1}} = ?$

(5)

$$r(\varphi) = |\cos(\varphi)|$$

(a) Skizziere $r(\varphi)$ in Polarkoordinaten.

(b) Ist $r(\varphi)$ gleichmässig stetig?

(6)

$$f(x) = cos(2\,x) \cdot e^x,\ \ x \in (0,\ \frac{3\,\pi}{2}]$$

(a) Skizziere $f(x)$.

(b) Bestimme Minumum und Maximum resp. Supremum und Infimum.

(7)

$$f(x) = [x],\ \ x \in [-1,\ 0] \cup [1,\ 2]$$

Setze f derart fort, dass f stetig ist in $[-1,\ 2]$ (Skizze!).
Beschreibung von f notwendig!

(8) (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\tan(2\,x)}\,(5\,x+\cos(x)) = \,?$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{1+n}{n^2}-1)\,(3-\dfrac{5}{n}+\dfrac{\cos(n)}{\sqrt{n}}) = \,?$

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$. $\leadsto$ $1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}+\ldots+\dfrac{1}{n^n} \to \,?$

(d) $a_n = \dfrac{6^n}{2\,n}\cdot\sin(n)-\dfrac{1}{n}\cdot\sin(n!)$. $\leadsto$ Konvergiert $\langle a_n\rangle$?

Viel Gl?ck!

4.14 Test: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$ II/02

Abschrift • *Copie*

(1) $f(x) = \tan(\tan(x))$

(a) Leite die 1. und 2. Ableitung mit Hilfe der Regeln her.

(b) Berechne den Steigungswinkel für $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

(c) Berechne die Gleichung der Normalen für x_0.

(d) Berechne die Nullstelle der Normalen für x_0.

(2) $f(x) = 2 + 4\,x\,(x+2) + 8\,x^2\,\ln(x) - 16\,e^{x^2}\cos(x) + \sin(\ln(\dfrac{\sqrt{x}}{\arctan(x)}))$

(a) Leite die 1. Ableitung mit Hilfe der Regeln her.

(b) $f'(7.5) = ?$ (erst ableiten, anschliessend einsetzen).

(3) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$

(a) Wie lässt sich $f'(0)$ allenfalls definieren?

Hinweis: Stelle für $x \neq 0$ die Ableitung $f'(x)$ dar als $\frac{g(x)}{h(x)}$. Benutze, dass für differenzierbare Funktionen $\Phi(x)$ gilt:
$\Phi(x) = \Phi(x_0) + (x - x_0)\,R(x), \;\; R(x_0) = \ldots$

Viel Glück!

4.15 Test: Grenzwerte, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$ **II/03**

Abschrift • *Copie*

(1) $x = \dfrac{1}{cos^2(t)}, \;\; y = \tan(t)$

(a) $\dfrac{d\,y}{d\,x} = \,?$ (b) $\dfrac{d\,y(t)}{d\,x(t)}\Big|_{t=1} = \,?$

(2) $e^x = -x, \;\; x_1 = 0.5.$
Approximiere die Lösung auf 4 Stellen genau. Wieviele Schritte braucht es?

(a) Beim Newtonverfahren (b) Beim Fixpunktverfahren

(3) Welche Funktion ist jeweils wo in I gleichmässig stetig?

(a) $f(x) = [x] - x, \;\; x \in I = [\frac{1}{10}, \; \frac{9}{11})$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} \cdot \sqrt{x}, \;\; x \in I = [0, \; 1]$

(c) $f(x) = (\sin(x))^{\cos(x)}, \;\; x \in I = [0, \; 2\,\pi]$

(d) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^x}, \;\; x \in I = [-1, \; 1]$

(4) Berechne jeweils die Ableitung exakt und aus der Ableitung anschliessend den Steigungswinkel von f in *rad* für $x = 1$ auf 4 Stellen genau.

(a) $f(x) = \dfrac{\cos(x) \cdot \arccos(\frac{1}{x})}{x}$ (b) $f(x) = x \cdot \tan(x) - \ln(\cosh(x))$

(5) Diskutiere $f(x) = \dfrac{x^2+5}{x-1}.$

(6) $f(x) = x^{\frac{1}{x}} \rightsquigarrow$ Berechne die Extrema, falls vorhanden.

(7) $y = e^{-x \cdot \sin(x)}, \;\; x \in [0, \; 15] \rightsquigarrow$ Berechne die Minima, Maxima, Wendepunkte und Nullstellen.

(8) Berechne $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1-x) - x^2}{3\,x^{\frac{2}{3}} - \sin(x) + 2\,x}.$

(9) Gegeben ist ein Kreissektor mit dem Winkel φ und dem Radius r. Diesem Sektor ist ein Rechteck einzuschreiben (Flächeninhalt A), wobei eine Rechteckseite (Basis) auf einen Sektorschenkel zu liegen kommt.

(a) Berechne die Höhe h des Rechtecks als Funktion von φ.

(b) Berechte den Flächeninhalt des inhaltsgrössten Rechtecks als Funktion von φ.

Viel Glück!

WIR

4.16 Test: Grenzwerte, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$ II/04

Abschrift • *Copie*

(1)

(a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 6\,x^2 + 11\,x - 6}{x+1}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

Erstelle resp. berechne:

(a) Skizze?

(b) Pole?

(c) Nullstellen?

(d) Extrema?

(2)

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - x}{\sin^2(x) - \sin(x)} = \,?$

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{\ln((x+1)^{1.5}} = \,?$

(3) Berechne jeweils die 1. Ableitung:

(a) $f(x) = e^{x^2+1} \cdot \ln(x)$

(b) $f(x) = (\tan(x))^{\arctan(x)}$

(c) $f(x) = \cos^2(\sin(\cos(x))) \cdot \cos(x)$

(d) $f(x) = \ln(\tanh(x))$

(e) $f(x) = \sqrt{(x\,\cos(x))^2 + (x\,\sin(x))^2}$

(f) $f(x) = x^{x-3}$

Viel Glück!

4.17 Test: Grenzwerte, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$ II/05

Abschrift • *Copie*

(1) Berechne die 1. Ableitung:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)} + \sin(x) \cdot \cos(x) - \ln(\tan(x))$

(b) $f(x) = x^{x^x} - x^{\frac{1}{3}} + 1$

(2) Berechne die Ableitung von $y = f(x)$ aus der impliziten Gleichung $F(x, y) = 0$:

(a) $F(x, y) = 2\,x\,y - x^2 + y^2 - 4$

(b) $F(x, y) = \sin^2(x\,y) + \cos^2(x\,y)$

(3) Vermischte Aufgaben:

(a) $f(x) = x^{-2} + x^{-1}$

i. $f^{-1}(x) = ?$

ii. $(f^{-1}(x))' = ?$

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3\,\sin(x^2)}{x\,\sin(x)} = ?$

(4) Diskutiere die folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = e^{-x^4+1}$

(b) $f(x) = \dfrac{(x-3)(x-6)}{(x-4)}$

Viel Glück!

4.18 Test: Grenzwerte, Differential– und Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$

II/06

Abschrift • *Copie*

(1) Integriere von Hand: $f(x) = x^5 - 2\,x^4 - x^3 - x^2 + x + 1 \;\rightsquigarrow$

(a) $\int f(x)\,dx = \,?$

(b) $\int\limits_{-1}^{\frac{13}{4}} f(x)\,dx = \,?$ (Skizze!)

(2) Integriere von Hand: $f(x) = x^2 \cdot \sinh(x) \;\rightsquigarrow\; \int\limits_0^1 f(x)\,dx = \,?$ (Skizze!)

(3) Berechne: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sinh(x)}{x^2 - 2\,x} = \,?$

(4) Diskutiere: $f(x) = \dfrac{(2\,x^4 + 4\,x + 4)(3\,x - 2)}{(x - 2)}$

(5) Diskutiere: $f(x) = e^x \cdot \sin(x)$

Viel Glück!

WIR

4.19 Test: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$, Reihentheorie III/43a

Abschrift • *Copie*

(1) Gegeben ist ein Quadrat $Q_1Q_2Q_3Q_4$ mit $Q_1 = P_1$ und Halbdiagonalen der Länge 1. Der Einfachheit halber nummerieren wir die Eckpunkte weiter wir folgt:

$$Q_5 = Q_1,\ \ Q_6 = Q_2,\ \ Q_{n+4} = Q_n.$$

Auf $\overline{Q_2Q_4}$ befindet sich $\dfrac{1}{3}$ von Q_2 entfernt der Punkt P_2. P_3 wird dann durch folgende Bedingungen Konstruiert: $P_3 \in \overline{Q_3Q_1}$, $\overline{P_3P_2} \perp \overline{P_2P_1}$ — oder allgemeiner:

$$P_n \in \overline{Q_nQ_{n-2}} \text{ und } \overline{P_nP_{n-1}} \perp \overline{P_{n-1}P_{n-2}}.$$

So entsteht ein spiralartiger Streckenzug $\overline{P_1P_2P_3P_4P_5P_6\ldots P_n\ldots}$.
$\leadsto$ Was ist die Länge dieses Streckenzuges für $n \to \infty$?

(2) Berechne

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} 2 - \sum\limits_{k=0}^{n} (\frac{1}{2})^n$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - \sin(n)}{n\,(1 - cos(n))}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k\,(k+1)} + \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$

(3) Berechne jeweils die angegebenen Ableitungen:

(a) $f(x) = \sin(x)\cdot\cos(x) + 2\,\sin^2(x),\ \ f'(x) = ?$

(b) $f(x) = x^4 - 4^x,\ \ f'(x) = ?$

(c) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{1+\cos(x)},\ \ f'(x) = ?$

(d) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{1+\cos^2(x)},\ \ f'(x) = ?$

(e) $f(x) = (1+x^2)^3,\ \ f'(x) = ?,\ \ f''(x) = ?,\ \ f'''(x) = ?$

(f) $f(x) = ln(x^2\cdot\sin(x)),\ \ f'(x) = ?$

(g) $f(x) = ln(-x),\ \ f'(x) = ?$

(h) $f(x) = \arctan(e^{-x}) - ln(1+e^{2\,x}),\ \ f'(x) = ?$

(4) Sei $f(x) = x^3 - 9\,x^2 + 23\,x - 15$. Berechne Nullstellen, Extrema und Wendepunkte.

(5) Sei $f(x) = x\cdot\sin(x)$. Berechne Näherungswerte für Extrema und Wendepunkte, $x \in (0,\ 2\,\pi)$.

%

(6) Sei $f(x) = 2 + ln(x)$. Für $x = 1$ wird die Tangente (Gerade g) an die Kurve konstruiert. Berechne die Nullstellen von $g = g(x)$.

(7) Sei $f(x) = x - x^{\pi}$. Berechne den Steigungswinkel der Tangenten für $x = 0$ und $x = 1$.

Viel Glück!

WIR

Kapitel • Chapitre 5

Serien mit „Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$“

5.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Srofgebiete war nie vorhanden.

5.2 Test: Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$ I/12

Abschrift • *Copie*

(1) Berechne möglichst exakt:

(Falls in einem Teilschritt eine Tabelle verwendet wird: Bitte exakte Referenz mit Seitenzahl u.s.w. angeben.)

(a) $\int\limits_0^\infty (x^{-\frac{2}{5}} - x^{-2})\, dx$

(b) $\int\limits_1^5 \frac{\sqrt{2+50\,x^2}}{3}\, dx$

(c) $\int\limits_0^\pi e^s \cdot \sin(x)\, ds$ (Rechnung zeigen!)

(d) $\int\limits_0^2 \frac{(2\,x)^2}{5\,\pi}\, dx$

(e) $\int\limits_1^2 \frac{(a\cdot t)^4}{1+t^5}\, dt$ (Rechnung zeigen!)

(f) $\int\limits_0^1 \frac{\arccos(y)}{2\,\sqrt{1-y^2}}\, dy$

(2) (a) Berechne exakt den durch die Funktionen $f(x) = \sin(x) + sin(\frac{x}{4}) + 7$ und $g(x) = \cos(x) - \cos(3\,x) - 4$ begrenzten Flächeninhalt über dem Intervall $[0,\ \frac{\pi}{4}]$.

(b) Die Kurve $f(x) = \frac{e^{4\,x} - e^{-4\,x}}{2} = \sinh(4\,x)$ lässt man um die x–Achse rotieren. Berechne den Inhalt des entstehenden Rotationskörpers zwischen $x = 0$ und $x = 2$ exakt und numerisch.

(c) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$. Berechne auf 4 Stellen hinter dem Komma genau die Länge der Funktionskurve zwischen $x = 0$ und $x = 4$.

(d) Gegeben ist die Fläche zwischen der Kurve $f(x) = |\sin(x)|$ und der x–Achse über dem Intervall $[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$.
Berechne für diese Fläche den Schwerpunktsabstand y_S.

(e) Gegeben ist die Fläche zwischen der Kurve $f(x) = x^{-1}$ und der x–Achse über dem Intervall $[1,\ x_1]$.
Berechne für diese Fläche den Schwerpunktsabstand y_S für $x_1 \to \infty$.

Viel Glück!

5.3 Test: Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$ I/13

Abschrift • *Copie*

Version française: Voir http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/restricted/TestsAll.pdf

(1) Berechne möglichst exakt:

(Falls in einem Teilschritt eine Tabelle verwendet wird: Bitte exakte Referenz mit Seitenzahl u.s.w. angeben.)

(a) $\int \frac{\sin(x)}{2\cdot\sqrt{\cos(x)}}\,dx$

(b) $\int\limits_0^1 x^3\,e^x\,dx$

(c) $\int\limits_1^\infty (\frac{1}{x^3}-\frac{1}{\sqrt{x}})\,dx$

(d) $\int \sqrt{1+16\,x^2}\,dx$

(e) $\int\limits_1^2 \frac{x^3}{2+x^4}\,dx$

(f) $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(2) (a) Gegeben sind die Kurven $y=\sin(x)$ und $y=\cos(x)$. Diese Beiden Kurven schneiden zusammen mit der y–Achse im 1. Quadranten eine Fläche aus. Skizziere die Situation und berechne den Flächeninhalt.

(b) Gegeben sind die Kurven $y=\ln(x)+4$ und $y=-1-\sin^2(x)$ zwischen $x=1$ und $x=1.5$. Berechne den Inhalt der Fläche zwischen den beiden Kurven über dem angegebenen Intervall. (Skizze!)

(3) (a) Die Kurve $y=e^{2\,x}-e^x$ lässt man über dem Intervall $[0,\ 1]$ um die x–Achse rotieren. Berechne den Inhalt des Rotationskörpers. (Skizze!)

(b) Gegeben ist die Kurve $y=f(x)=x-x^3$ über der x–Achse im 1. Quadranten. Berechne den y–Abstand des Schwerpunkts von der x–Achse: $y_S=\,?$ (Skizze!)

(4) (a) Gegeben ist die Kurve $y=f(x)=\cos(x)$ über dem Intervall $[0,\ \frac{\pi}{2}]$. Berechne die Kurvenlänge l. (Skizze!)

(b) Gegeben ist die Kurve $r=r(\varphi)=\sin(\varphi)$ in Polarkoordinaten über dem Intervall $I=[\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3}]$ (d.h. $\varphi\in I$). Berechne den Inhalt der durch $r(\varphi)$ und die beiden Begrenzungsradien bei $\varphi=\frac{\pi}{6}$ und $\varphi=\frac{\pi}{3}$ eingeschlossene Sektorfläche. (Skizze!)

Viel Glück!

5.4 Test: Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$, Zahlentheorie I/45

Abschrift • *Copie*

(1) Wieviele Schnittpunkte können n Kreise maximal haben?

(a) Suche die Formel!

(b) Beweise die die Formel mit vollständiger Induktion!

(c) Löse dieselbe Aufgabe für Dreiecke: Suche die Formel!

(d) Löse dieselbe Aufgabe für Dreiecke: Beweise die die Formel mit vollständiger Induktion!

(2) Beweise: $\forall_{n\in\mathbb{N}} : \ \dfrac{n}{n-1}(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{(n-1)\cdot n})=1.$

(3) Sei $f(x,y)=x^2+y^2$. K sei der Kreis um $O(0;0)$ mit Radius r:

$$x=x(t)=r\,\cos(t),\ \ y=y(t)=\ldots,\ \ t\in[0,\ 2\,\pi)$$

Berechne das Kurvenintegral von $f(x,y)$ über die Kurve K.

(4) Die Hyperbel $y=x^{-1}$ wird geschnitten mit der Geraden $y=a\cdot x$.
Wir betrachten die Fläche zwischen der x–Achse, der Geraden und der Hyperbel im 1. Quadranten. x_0 sei die x–Koordinate des Schnittpunkts der Geraden mit der Hyperbel. x_0 ist als Parameter zu verwenden.

(a) Wie gross ist die beschriebene Fläche?

(b) Wie gross ist das Volumen welches entsteht, wenn die Fläche um die x–Achse rotiert wird?

(c) Ist die Oberfläche des Rotationskörpers endlich oder unendlich?

(5) $\int\limits_0^1 e^x\,(\sin(2\,x)-\cos(x))\,dx = \ ?$ (Herleitung zählt!)

Viel Glück!

5.5 Test: Vektorgeometrie, Determinanten und Matrizen, Eigenwerttheorie, Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$ I/52

Abschrift • *Copie*

(1)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Eigenwerte von C.

(b) Berechne die Eigenvektoren von C.

(c) Was hat B mit C zu tun?

(d) Berechne die Inverse von C.

(2)

$$f(x) = \frac{x^3 + 3\,x^2 - x - 2}{x^2 + 2\,x}$$

(a) $\int f(x)\,dx = \,?$

(b) $\int\limits_{-3}^{\infty} f(x)\,dx = \,?$

(c) $\int\limits_{-3}^{\infty} \frac{f(x)}{x^k}\,dx \rightsquigarrow$ Wie gross muss k mindestens sein, damit das Integral existiert? (Begründung!)

(d) $\int\limits_{-3}^{\infty} \frac{f(x)}{x^4}\,dx = \,? \rightsquigarrow$ Exakt!

(3) $g(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ hat Nullstellen bei $x = 0$ und bei $x = 3$ sowie einen Wendepunkt in $(x, y) = (1, 1)$. Weiter sei $M(x_m, y_m)$ derjenige Punkt mit $0 \leq x_m \leq 3$, in dem der Funktionswert ein lokales Maximum annimmt. R sei das achsenparallele Rechteck, das durch den Urspung O und M gebildet wird.

Berechne $\int\limits_0^3 f(x)\,dx$ und entscheide, ob $\int\limits_0^3 f(x)\,dx \geq$ (Inhalt von R) richtig ist.

(4) Gegeben sind die Gerade g und die Ebene Φ:

$$g: \; \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \Phi : x - y + 2\,z + 2 = 0$$

Unter welchem Winkel (α) trifft g auf Φ auf?

Viel Glück!

WIR

5.6 Test: Differential– und Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$, Vektorgeometrie I/59

Abschrift • *Copie*

(1) In welchem Verhältnis teilt die durch $f(x) = x^3$ beschriebene Kurve das im 1. Quadranten liegende Flächenstück, welches begrenzt ist durch $g(x) = a\,x - x^3$ und die x–Achse? Für welche a–Werte ist die Aufgabe sinnvoll?

(2) In einem kartesischen Koordinatensystem wird ein durch den Punkt $P(1; 11; 2)$ gehender, parallell zur x–Achse laufender Lichtstrahl an einer Kugel mit Zentrum im Ursprung und dem Radius 3 reflektiert. In welchem Punkt und unter welchem Winkel schneidet der reflektierte Strahl die (x, z)–Ebene?
Kontrollangabe: Die Koordinaten des gesuchten Punktes sind ganzzahlig.

(3)

$$f(x) := \frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot ln(\frac{x^2 - \sqrt{2}\cdot x + 1}{x^2 + \sqrt{2}\cdot x + 1}) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \arctan(\frac{\sqrt{2}\cdot x}{1 - x^2})$$

Berechne $f\,'(x)$. Stelle das Resultat möglichst einfach dar.

(4) Integration:

(a) Zeige zuerst, dass die Funktion $f(x) = \cos(\sin(x))$ eine $2\,\pi$–periodische Funktion ist.

(b) Wir nehmen an, dass mit Hilfe der eben definierten Funktion $A(a) = \int\limits_0^{2\pi} e^{a\cdot x} \cdot f(x)\,dx$ berechnet sei. Berechne daraus $\int\limits_0^{n\cdot 2\pi} e^{a\cdot x} \cdot f(x)\,dx,\ \ n \in \mathbb{N}$.

(c) Für welchen a–Wert existiert das obige Integral bei $n \to \infty$? Berechne in diesem Fall dieses uneigentliche Integral wieder unter Verwendung von $A(a)$.

Viel Glück!

5.7 Test: Boolsche Algebra, Differential– und Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$, Vektorgeometrie I/59

Abschrift • *Copie*

(1) Vereinfache den Boolschen Ausdruck $z = x \cdot y + [(x + y') \cdot y]'$.
Dabei bedeutet „$\cdot$" $\hat{=}$ AND, „+" $\hat{=}$ OR, „$'$ " $\hat{=}$ NOT.
Verlangt ist Analyse und Graphik.

(2) Berechne mit Hilfe der Partialbruchzerlegung das unbestimmte Integral

$$\int \frac{2\,x^2 + 9\,x + 12}{x^2 + 6\,x + 10}\,dx.$$

(3) Durch ein unbekanntes Polynom f 3. Grades ist eine Kurve gegeben, von der man weiss: $f(-p) = 0,\ \ f(0) = 3\,p,\ \ f(2\,p) = 3\,p$. Zudem befindet sich in $(0; f(0))$ ein lokales Maximum.

(a) Skizziere die Situation.

(b) Berechne die Koeffizienten als Funktion des Parameters p.

(c) A_1 sei das Flächenstück unter der Kurve zwischen $-p$ und 0. A_2 dasjenige zwischen 0 und $2\,p$. Bestimme das Verhältnis $A_1\ : A_2$.

(4) Von einem Punkt $P(3; 3; 5)$ aus fällt ein Lichtstrahl in Richtung des Vektors $\vec{a} = (-1, -1, -2)^T$ auf einen Planspiegel, der durch die Ebene $\Phi:\ x{+}2\,x{+}3\,z = 6$ beschrieben wird. Bestimme die Parameterdarstellung der Geraden, auf der der reflektierte Strahl liegt.

Viel Glück!

WIR

5.8 Test: Nichtlineare Gleichungen, Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$, Vektorgeometrie I/61

Abschrift • *Copie*

(1) $f(x) = \frac{1}{10}\,(\cos(x))^2 + \frac{1}{2} - x.\ \leadsto$ Löse $f(x) = 0$ mit $x > 0$!

Approximiere die kleinste Nullstelle dieser Gleichung wie folgt:

(a) Newton–Methode

(b) Fixpunktmethode

(c) Regula falsi (sofern einfach möglich)

Wähle als Startwert $x_1 = 0.1$ und für die Regula falsi noch $x_2 = 0.5$.
Vergleiche die Anzahl Rechenschritte bis zu einer Genauigkeit von 6 Stellen hinter dem Komma bei den verschiedenen Methoden.

(2) Die Ebene Φ ist gegeben durch $A(2;1;3)$, $B(-1;4;6)$, $C(1;-1;-2)$, $P(5;5;5)$.

(a) Bestimme den Schwerpunkt S des Dreiecks $\triangle(ABC)$.

(b) In welchen Punkten schneidet Φ die Koordinatenachsen?

(c) Wo durchstösst die Gerade $\overline{PS}$ die (x, y)–Ebene?

(3)

$$\{(x_i; y_i)\} = \{(1; 0.5), (3; 0.9), (2; -0.7), (5; 0.8), (4; 0.4)\}$$

(a) Berechne das Interpolationspolynom $p(x)$ mit minimalem Grad durch die gegebenen Stützstellen.

(b) Sei f die wirkliche Funktion mit ihrem Graphen durch die Stützstellen. Berechne eine Näherung von $\int_1^5 f(x)\,dx$ mit Hilfe des Simpson–Verfahrens.

Viel Glück!

5.9 Test: Grenzwerte, Differential– und Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$ II/06

Abschrift • *Copie*

(1) Integriere von Hand: $f(x) = x^5 - 2\,x^4 - x^3 - x^2 + x + 1 \;\rightsquigarrow$

(a) $\int f(x)\,dx = \,?$

(b) $\int\limits_{-1}^{\frac{13}{4}} f(x)\,dx = \,?$ (Skizze!)

(2) Integriere von Hand: $f(x) = x^2 \cdot \sinh(x) \;\rightsquigarrow\; \int\limits_0^1 f(x)\,dx = \,?$ (Skizze!)

(3) Berechne: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sinh(x)}{x^2 - 2\,x} = \,?$

(4) Diskutiere: $f(x) = \dfrac{(2\,x^4 + 4\,x + 4)(3\,x - 2)}{(x - 2)}$

(5) Diskutiere: $f(x) = e^x \cdot \sin(x)$

Viel Glück!

5.10 Test: Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$ II/07

Abschrift • *Copie*

(1) Die Graphen von $f_1(x) = x^2 + 2\,x - 18$ und $f_2(x) = -x^2 - x - 1$ schneiden sich (Skizze!). Zwischen den Schnittpunkten entsteht daher eine durch die Graphen eingeschlossene Fläche. Berechne den Flächeninhalt.

(2)

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x+\pi) & x \in [-2\,\pi,\ -\pi) \\ \sin(x) & x \in [-\pi,\ 0) \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & x \in [0,\ 2\,\pi) \end{cases} \qquad \int\limits_{-2\,\pi}^{2\,\pi} f(x)\,dx = \,?$$

(3) Berechne: $\int \dfrac{x^2 - 2\,x - 1}{x^2 - 1}\,dx = \,?$

(4) Berechne: $\int \Big(\sin(x) \cdot e^x + \cos(x)\,e^x \Big)\,dx = \,?$

(5) Berechne: $\int\limits_{\pi}^{2\,\pi} \dfrac{(\ln(x))^3 - 1}{x\,(\ln(x))^2}\,dx = \,?$

(6) Berechne: $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\,\cos(x))^3\,dx = \,?$

(7) Berechne: $\int\limits_{0}^{1} \Big(\dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2}} + 6\,\dfrac{\sqrt{x-5}}{5} \Big)\,dx = \,?$

Viel Glück!

5.11 Test: Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$ II/08

Abschrift • *Copie*

(1) Berechne exakt, falls möglich: *(Herleitung dokumentieren!)*

(a) $\int\limits_0^\infty x^{-\frac{2}{3}} - x^{-2}\, dx$

(b) $\int\limits_1^5 \sqrt{1+25\,x^2}\, dx$

(c) $\int\limits_0^\pi e^x \cdot \sin(s)\, ds$

(d) $\int\limits_0^2 (2\,x)^2\, dx$

(e) $\int\limits_1^2 \frac{t^4}{1+t^5}\, dt$

(f) $\int\limits_0^1 \frac{\arccos(y)}{\sqrt{1-y^2}}\, dy$

(2) (a) Berechne exakt den durch die Funktionen $f(x) = \sin(x) + \sin(\frac{x}{4}) + 7$ sowie $g(x) = \cos(x) - \cos(3\,x) - 4$ begrenzten Flächeninhalt über dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$.

(b) Man lässt die Kurve $f(x) = e^{4x} - e^{2x}$ um die x–Achse rotieren. Berechne exakt den Inhalt des entstehenden Rotationskörpers zwischen $x = 0$ und $x = 2$.

(c) Sei $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$. Berechne auf 4 Stellen hinter dem Komma genau die Länge der Funktionskurve zwischen $x = 0$ und $x = 4$.

(d) Über der x–Achse entsteht durch die Funktion $f(x) = |\sin(x)|$ zwischen $x = -\frac{\pi}{2}$ und $x = \frac{\pi}{2}$ die Fläche A. Berechne für A den Schwerpunktsabstand y_S von der x–Achse.

Viel Glück!

5.12 Test: Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$ II/09

Abschrift • *Copie*

(1) Berechne von Hand: *(Herleitung dokumentieren!)*

(a) $\int\limits_0^4 (5\,x - 2\,\sqrt{x} + \frac{32}{x^3})\,dx$

(b) $\int\limits_2^{10} \frac{3}{\sqrt{5\,x-1}}\,dx$

(c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\sin(2\,x))^3\,\cos(2\,x)\,dx$

(d) $\int\limits_0^{\infty} e^{-x}\,\sin(x)\,dx$

(e) $\int\limits_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x}\,dx$

(f) $\int\limits_0^{1} \frac{\arccos(y)}{\sqrt{1-y^2}}\,dy$

(2) (a) Berechne exakt den von den Funktionen $f_1(x) = \sqrt[3]{x}$ sowie $f_2(x) = x^3$ eingeschlossenen Flächeninhalt über dem Intervall $[0,\ 1]$. (Skizze!)

(b) Man lässt die Kurven $y_1 = \frac{1}{2}\,x + 1$ und $y_2 = x^2 + 2$ um die x–Achse rotieren. Berechne exakt den Inhalt des entstehenden Rotationskörpers zwischen $x = 0$ und $x = 1$ und zwischen den beiden entstehenden Rotationsflächen. (Skizze!)

(c) Sei $f(x) = x^4,\ \ x \in D_f = [0,\ 1]$. f rotiert um die y–Achse. Berechne den entstehenden Rotationsvolumeninhalt. (Skizze!)

(d) Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = 3\,x^{\frac{2}{3}} - 10$ über dem Definitionsbereich $D_f = [8,\ 27]$. Berechne die Kurvenlänge des Graphen numerisch und, falls möglich, auch exakt. (Skizze!)

(e) Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = x^2{+}1$ über dem Definitionsbereich $D_f = [0,\ 1]$. Berechne die Koordinaten des Schwerpunktes S der zwischen der x–Achse und dem Funktionsgraphen aufgespannten Fläche. (Skizze!)

Viel Glück!

WIR

5.13 Test: Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$, Reihen, Potenzreihen II/10

Abschrift • *Copie*

(1) (a) Berechne $\int e^x \cdot \sin(3\,x)\,dx$ durch partielle Integration!

(b) Berechne $\int \ln(x)\,dx = \int 1 \cdot \ln(x)\,dx$ durch partielle Integration!

(c) Berechne $\int (x+2) \cdot \sqrt[3]{x}\,dx$ durch Substitution! (Setze $t := \sqrt[3]{x}$)

(d) Berechne $\dfrac{d}{d\,x} \displaystyle\int \frac{\sin(x \cdot t)}{t}\,dt$.

(2) Berechne die y–Koordinate des Schwerpunktes der Fläche zwischen x–Achse und Kurve über D_f: $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $D_f = [1,\ \infty)$.

(3) Bestimme die Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln(n))^2}$ *Hinweis: Benutze* $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{1}{x \cdot (\ln(x)^2)}\,dx$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - \ln(n)}{4^n - n^3}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\ln(n)}{n^3}$ sowie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^3}$

(4) Bestimme die Potenzreihenentwicklung von $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5\,x + 6}$ um $x_0 = 0$.
Hinweis: Partialbruchzerlegung.

Viel Glück!

5.14 Test: Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$, Kombinatorik, Zahlentheorie II/11

Abschrift • *Copie*

(1) Der Graph von $f(x) = \sin(x)$ wird über dem Intervall $[0,\ \pi]$ um die x–Achse rotiert. Berechne den Volumeninhalt des entstehenden Rotationskörpers.

(2) Der Graph von $f(x) = ln(x)$ wird über dem y–Intervall $[0,\ 1]$ um die y–Achse rotiert. Berechne den Volumeninhalt des entstehenden Rotationskörpers.

(3)

$$\int [(\sin(x) \cdot e^x - x \cdot \sin(x^2) + \cos(x) \cdot e^x - \frac{ln(x)}{x}]\, dx = \,?$$

(4)

$$x + y + z = k, \;\; x, y, z \in \mathbb{N}$$

Wieviele Lösungen $(x; y; z)$ gibt es für $k = 1993$ (Jahreszahl der Prüfung).

Hinweis: Zeichne ein Beilspiel für $x, y, z, 1003$ auf der Zahlengerade und überlege dir, was das Stichwort „Teilmengen" hier für Ideen bewirken könnte.

(5) Sporttoto: Vorherzusagen sind 13 Fussballspiele. Wieviele verschiedenen Prognosen mit genau 12 richtigen Ausgängen sind möglich?

(6) Auf wieviele Arten kann man 24 Studenten in 4–er Gruppen einteilen?

(7) Stimmt die folgende Aussage? (Eine mathematische Begründung ist notwendig!)

$$\forall_{k\in\mathbb{N}} : \;\frac{k}{k+1} = \frac{1}{(k+1)\cdot k} + \frac{1}{k\cdot(k-1)} + \ldots + \frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 1}$$

Viel Glück!

5.15 Test: Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$, komplexe Zahlen II/12

Abschrift • *Copie*

(1) Die Graphen der Funktionen $f_1(x) = x^2 + 2\,x - 18$ und $f_2(x) = -x^2 - x - 1$ schliessen zwischen ihren Schnittpunkten eine Fläche ein. Berechne den Flächeninhalt.
Hinweis: Fertige dazu erst eine Skizze an!

(2)

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x-\pi) & x \in [-2\,\pi, \pi) \\ e^{\pi \cdot x} & x \in [\pi, 2\,\pi) \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & x \in [2\,\pi, 4\,\pi] \end{cases} \qquad \int\limits_{-2\,\pi}^{3\,\pi} f(x)\,dx = \,?$$

(3) Berechne von Hand:

$$\int\limits_{-4}^{0} \frac{(x-1)(x+\frac{1}{2})(x+2)}{(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-2)}\,dx = \,?$$

(4)

$$\int [(\sin(x) \cdot e^x - x \cdot \sin(x^2) + \cos(x) \cdot e^x - \frac{\ln(x)}{x}]\,dx = \,?$$

(5) Berechne die Summe aller Lösungen von $z^6 = e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}$.

(6) Berechne und skizziere die Lösungen von $(i + \frac{1}{z})^4 = i$.

Viel Glück!

5.16 Test: Lineare Abbildungen, Determinanten und Matrizen, komplexe Zahlen, Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$ II/21

Abschrift • *Copie*

(1)

$$\left|\begin{array}{lcl} 2\,x_1 - 3\,x_2 + x_3 + x_4 - x_5 & = & 4 \\ 2\,x_1 + x_2 + x_3 + 5\,x_4 + 2\,x_5 & = & 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 4\,x_4 + 2\,x_5 & = & 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 2\,x_4 + 2\,x_5 & = & -2 \end{array}\right|$$

(a) Gesucht ist der Lösungsraum mit Hilfe von Gauss–Jordan. (Die Schritte müssen sichtbar sein.)

(b) Wie gross ist der Rang des Systems?

(2) Gegeben: $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \overset{D}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 3 \\ x \\ 3 \end{pmatrix}$. Dabei ist D eine Drehung um die z–Achse. $\leadsto$ Berechne x.

(3) Berechne die Summe aller verschiedenen 437–ten Einheitswurzeln!
(Die Rechnung bzw. die Begründung wird bewertet!)

(4)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) $B \cdot A = ?$

(b) $(A \cdot B - 2\,E)\,\vec{u} = \vec{v} = ?$

(c) Berechne $\vec{x}$ mit $\vec{v} \times \vec{x} = \vec{u}$ und $\langle \vec{v}, \vec{x} \rangle = 5$

(5)

$$\int \frac{5\,x + 12}{\sqrt{-x^2 - 7\,x}}\,dx = ?$$

(6) Beweise: $\qquad \forall_{n \in \mathbb{N}} : \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = +\frac{n}{n+1}$

Viel Glück!

5.17 Test: Nichtlineare Gleichungen, Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$, Schaltalgebra, Kombinatorik, Zahlentheorie II/46

Abschrift • *Copie*

(1) Die Kurve der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ mit $D_f = [0,\ x_0]$ wird um die x-Achse rotiert. Dabei entsteht das Volumen V_2. Um dieses Volumen wird über dem gleichen Definitionsbereich ein x–achsenparalleler Zylinder gestülpt, welcher das Volumen V_1 besitzt.
Berechne $\frac{V_1}{V_2}$.

(2) Erkläre den Satz von Stone und seine Konsequenzen für die Schaltalgebra.

(3) Wieviele Lösungen hat die Gleichung $x + y + z = 1994$ in $\mathbb{N}$? (1994 = Prüfungsjahr.)

(4) Beweise oder widerlege: $\forall_{n\in\mathbb{N},\ n\geq 2}: \ \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=\frac{n^2+n}{(n+1)^2}$.

(5) In einer Klasse mit 20 Studenten sollen Arbeitsgruppen zu je 4 Studenten gebildet werden. Wieviele Arbeitsgruppen sind möglich?

(6) Löse die Gleichung $x^3 = \sin(x)$, $x > 0$, numerich wie folgt: Start mit $x_1 = 0.5$.

(a) Newton.Methode.

(b) Regula falsi, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, falls möglich.

(c) Fixpunktverfahren, falls möglich.

Nach wievielen Schritten hat man jeweils eine Genauigkeit von 4 Stellen hinter dem Komma erreicht?

Viel Glück!

WIR

5.18 Test: Differential– und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$ II/67

Abschrift • *Copie*

(1) (a) $\displaystyle \frac{d}{d\,x} \int\limits_0^{x^3+1} \sin(x\cdot t+1)\,dt = \,?$

(b) $\displaystyle \frac{d}{d\,t} \int\limits_0^{t} g(\sin(x))\cdot sin(k\cdot t+1)\,dx = \,?$ (g analytisch)

(2) $K = K_{R_1,R_2}(O) =$ Hohlkugel um O mit Innenradius R_1 und Aussenradius R_2. Berechne:

$$\int\limits_{V=K} \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dV = \,?$$

(3) Das dreieckige Gebiet G ist definiert durch die Eckpunkte $P_1(1;0)$, $P_2(1;1)$, $P_3(0;1)$. Berechne:

$$\iint\limits_G \frac{y^2}{x^2}\,dG = \,?$$

(4) Ein Papierband der Breite $2\,R$ ist mit seiner Mittellinie der Länge nach an die y–Achse geklebt und um diese Achse über seine Länge gleichmässig um den Winkel π vergreht. Die Länge der Mittelline misst $\frac{k\,\pi}{2}$, $k \in \mathbb{N}$. Das Band ist somit skizzierbar mit $y \in [-\frac{k\,\pi}{4},\ \frac{k\,\pi}{4}]$.

(a) Skizziere das Band!

(b) Untersuche, ob die Parametrisierung

$$\vec{v} = \vec{v}(t,r) = \begin{pmatrix} r\cdot\cos(t) \\ k\cdot t \\ r\cdot\sin(t) \end{pmatrix},\quad t \in [-\frac{k\,\pi}{4},\ \frac{k\,\pi}{4}],\ r \in [-R,\ R]$$

das Band richtig beschreibt. (Falls dies nicht der Fall ist, so ist die notwendige Korrektur anzugeben.)

(c) Berechne die einseitige Oberfläche des Bandes und vergleiche die erhaltene Grösse mit der Grösse eines Rechteckstreifens der Länge $\frac{k\,\pi}{2}$ und der Breite $2\,R$.

(d) Berechne die Kurvenlänge einer äusseren Längskante. Was ist bezüglich Herstellung des Papierstreifens zu bemerken, wenn man das Resultat mit der Länge der Mittellinie vergleicht?

Viel Glück!

WIR

5.19 Test: Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$ III/44

Abschrift • *Copie*

(1) Zwischen $x = 0$ und $x = 3$ schliesst die Parabel $y = f(x) = 4\,x^3$ und die Gerade durch $(0;\ 0)$ und $(3;\ f(3))$ eine Fläche ein. Berechne den Flächeninhalt!

(2) Berechne den Flächeninhalt unter der Kurve $f(x) = \dfrac{2\,x}{x^4+1}$ und oberhalb der x–Achse zwischen $x = 0$ und ∞.

(3)

$$F(t) = \int\limits_0^t \left(\frac{x^3}{x} - \frac{5\,x^2}{6} - \frac{3\,x}{2} + 3\right) dx = ?$$

(4) (a) $\int\limits_0^\alpha \cos^2(\varphi)\, d\varphi = ?$ *(Verwende* $\cos(2\,\varphi) = \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) = 2\,\cos^2(\varphi) - 1$*)*

(b) $\int\limits_0^t \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = ?$ *(Setze* $x = r\,\cos(\varphi)$, $\dfrac{d\,x}{d\,\varphi} = \ldots,\quad y = \sqrt{r^2 - x^2}$, *Kreis!)*

(5) Berechne exakt:

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos(x) - \sin(x) + \frac{1}{\cos^2(x)}\right) dx = ?$$

(6) $\int (ln(x))^2\, dx = ?$ *Integriere partiell* $\int 1 \cdot (ln(x)^2\, dx = \ldots$

(7) $\int (x^2 + 2\,x)\, e^x\, dx = ?$ *Integriere partiell...*

(8) $\int 2\,\sin^3(x)\,\cos(x)\, dx = \int (\sin^2(x))\,(2\,\sin(x)\,\cos(x))\, dx = ?$

(9) $\int e^{\sqrt{x}}\, dx = ?$ *Substituiere* $t = \sqrt{x},\ \ x = \ldots,\ \dfrac{d\,x}{d\,t} = \ldots$

(10) $\int \dfrac{4\,x^2 - 7\,x + 25}{x^3 - 6\,x^2 + 3\,x + 10}\, dx = ?$ *Partialbruchzerlegung! Betrachte den Nenner für* $x = -1\ldots$

(11) $\int \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = ?$ *Hinweis:* $x = r \cdot \sin(t),\ \ \dfrac{d\,x}{d\,t} = \ldots,\ \ t = \arcsin(\dfrac{x}{t})$.

(12) $\int \dfrac{dx}{sin(x)} = ?$

Hinweis: $$\sin(x) = 2\,\sin(\frac{x}{2})\,\cos(\frac{x}{2}) = 2\,\frac{\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})} \cdot \cos^2(\frac{x}{2})}{1} = 2\,\frac{\tan(\frac{x}{2}) \cdot \cos^2(\frac{x}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2}) + \cos^2(\frac{x}{2})}$$
$$= 2\,\frac{\tan(\frac{x}{2})}{\tan^2(\frac{x}{2}) + 1},\ \textit{substituiere}\ \tan(\frac{x}{2}) = t.$$

Viel Glück!

WIR

Kapitel • Chapitre 6

Serien mit „Reihen“

6.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Srofgebiete war nie vorhanden.

6.2 Test: Lineare Abbildungen, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$, komplexe Zahlen, Reihen I/53

Abschrift • *Copie*

(1)

$$(-1)\,A^{-1}\cdot\vec{x}\,' = (\vec{x}-\vec{b}),\quad A=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ \frac{1}{2} & -1\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix},\ \vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\ y=4\,x-3$$

$\rightsquigarrow$ Bild $\vec{x}\,'$ des Geradenvektors $\vec{x}$? • *Image $\vec{x}\,'$ du vecteur de la droite $\vec{x}$?*

(2) Miovre: $\sin(5\,\varphi)=\cos^5(\varphi)-\ldots=\,?$

(3)

$$f(z)=\frac{2}{z-1}$$

Bild von • *Image de* $\gamma_1 : z_1(t)=e^{i\,t}$
Bild von • *Image de* $\gamma_2 : z_2(t)=3\,i\,t$

(4) Gesucht: Polynom $f(x)$ mit • *Chercher: Polynôme $f(x)$ avec*

$$f(1)=0,\ \ f(-1)=0,\ \ f(-2)=0,\ \ f\,'(2)=38.$$

(5) Untersuche, ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren:
• *Démontrer la convergence ou la divergence des séries suivantes:*

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3\,\sin(n\,x)}{n^6}+\frac{1}{n^3}\right)$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4\,n^3}{2\,n^3+7}\right)^n$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\,n^2}{4\,n^4+2\,n^2+3}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sin(\frac{1}{n})+1}$

Viel Glück!

6.3 Test: Lineare Abbildungen, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$, komplexe Zahlen, Reihen I/54

Abschrift • *Copie*

(1)

$$(-1)\,A^{-1}\cdot\vec{x}\,' = (\vec{x}+\vec{b}),\;\; A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\;\; \vec{b}=\begin{pmatrix} 4 \\ -1\end{pmatrix},\;\; \vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix},\;\; y=2\,x-5$$

$\rightsquigarrow$ Bild $\vec{x}\,'$ des Geradenvektors $\vec{x}$? • *Image $\vec{x}\,'$ du vecteur de la droite $\vec{x}$?*

(2) Miovre: $\sin(5\,\varphi)=\ldots\sin(\varphi)-\ldots=\,?$

(3)

$$f(z)=\frac{3}{z+1}$$

Bild von • *Image de* $\gamma_1 : z_1(t)=e^{i\,t}$
Bild von • *Image de* $\gamma_2 : z_2(t)=2\,i\,t$

(4) Gesucht: Polynom $f(x)$ mit • *Chercher: Polynôme $f(x)$ avec*

$$f(1)=0,\;\; f(3)=0,\;\; f(-1)=0,\;\; f\,'(-2)=\frac{19}{2}.$$

(5) Untersuche, ob die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren:
• *Démontrer la convergence ou la divergence des séries suivantes:*

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{3\,\cos(-2\,n\,x)}{n^5}+\frac{2}{n^4})$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{5\,n^4}{8+4\,n^4})^n$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4\,n^3}{2\,n^6+4\,n^2-2}$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{e^{\frac{1}{n}}+1}$

Viel Glück!

WIR

6.4 Test: Lineare Abbildungen, Reihen, Potenzreihen, komplexe Zahlen I/57

Abschrift • *Copie*

(1) Kreis: • *Cercle:* $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $(y-3)^2 + (x+1)^2 = 2 \;\Rightarrow\; y = \pm\sqrt{\ldots - (x+1)^2} + \ldots = \ldots$

Bild $\vec{x}\,'$ des Kreises? • *Image* $\vec{x}\,'$ *du cercle?*

$$A^{-1} \cdot \vec{x}\,' = A \cdot (\vec{x} + \vec{b}),\;\; A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\;\; \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$f(z) = \frac{\bar{z} \cdot 2 \cdot z}{|z|^2 \cdot (z - i)}$$

(a) Bild von • *Image de* $z(t) = e^{i\,t}$?

(b) Bild von • *Image de* $z(t) = 2\,i$?

(3) (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n^3 + n^4}{n^5 + n^6 + n^7} \cdot x^n \rightsquigarrow$ Konvergenzradius? • *Rayon de convergence?*

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\,n^2\,(x-4)^n}{n^4} \rightsquigarrow$ Konvergenzradius? • *Rayon de convergence?*

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\cos(\frac{1}{n}) - 1} \rightsquigarrow$ Konvergenz? • *Convergence?*

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{2}{3})^{n+1}}{n + \frac{1}{2}} + \frac{(n \cdot x)^n}{n!} \rightsquigarrow$ Konvergenz? • *Convergence?*

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos(x)}{(2\,n+1)(2\,n-1)} + (\frac{1}{4})^n\right) \rightsquigarrow$ Konvergenz? • *Convergence?*

Berechne im Falle der Konvergenz den Grenzwert.
• *Calculer la valeur limite dans le cas de la convergence.*

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-\frac{1}{3})^3 \rightsquigarrow$ „Vernünftige Näherung“. • *”Approximation raisonable”.*

Viel Glück!

6.5 Test: Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$, Reihen, Potenzreihen II/10

Abschrift • *Copie*

(1) (a) Berechne $\int e^x \cdot \sin(3\,x)\,dx$ durch partielle Integration!

(b) Berechne $\int \ln(x)\,dx = \int 1 \cdot \ln(x)\,dx$ durch partielle Integration!

(c) Berechne $\int (x+2) \cdot \sqrt[3]{x}\,dx$ durch Substitution! (Setze $t := \sqrt[3]{x}$)

(d) Berechne $\dfrac{d}{d\,x} \displaystyle\int \frac{\sin(x \cdot t)}{t}\,dt.$

(2) Berechne die y–Koordinate des Schwerpunktes der Fläche zwischen x–Achse und Kurve über D_f: $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $D_f = [1,\ \infty)$.

(3) Bestimme die Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln(n))^2}$ *Hinweis: Benutze* $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{1}{x \cdot (\ln(x)^2)}\,dx.$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - \ln(n)}{4^n - n^3}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\ln(n)}{n^3}$ sowie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^3}$

(4) Bestimme die Potenzreihenentwicklung von $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5\,x + 6}$ um $x_0 = 0$.
Hinweis: Partialbruchzerlegung.

Viel Glück!

6.6 Test: Nichtlineare Gleichungen, Reihen, Zahlentheorie II/48

Abschrift • *Copie*

(1) Untersuche die Konvergenz: $\langle a_n\rangle = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \ldots]$

(2) Untersuche die Konvergenz: $\langle n_n\rangle = [\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, \frac{1}{4\cdot 5}, \ldots]$

(3) Durch den Ursprung gehen 6 Geraden $g_0, g_{30}, g_{60}, \ldots, g_{150}$, welche um $0^o, 30^o, 60^o, 90^o, 120^o$ und 150^o gegen die positive x–Achse geneigt sind.
Im 1. Quadranten befindet sich auf g_{30} der Punkt P_1 mit dem Abstand vom Ursprung $|\overline{OP_1}| = 2$. Von P_1 wird im Gegenuhrzeigersinn auf g_{60} das Lot gefällt. Der Lotfusspunkt ist P_2. Ebenso wird von P_2 im Gegenuhrzeigersinn auf g_{90} das Lot gefällt. Der Lotfusspunkt ist P_3 und so fort. So entsteht die Punktfolge $[P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \ldots]$. Berechne den Grenzwert der Länge des spiraligen Streckenzuges $\lim\limits_{n\to\infty} |\overline{P_1P_2P_3\ldots P_n}|$ (Skizze!).

(4) Die Dezimalzahldivision für $\frac{1}{a} = x \in \mathbb{R}$ soll mit Hilfe des Newton–Verfahrens durchgeführt werden. Beispiel: $a = 3 \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{3}$. Dazu definieren wir: $f(x) = \frac{1}{x} - a$. Für die Nullstelle von $f(x)$ gilt dann: $\frac{1}{x} - a = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{x} = a \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{a}$.

(a) Berechne nach dem genannten Verfahren eine Rekursionsformel $x_{n+1} = h(x_n)$

(b) Wähle $a = 3$ und $x_1 = 0.5$. Nach wievielen Schritten ist das Resultat auf 3 Stellen exakt?

(c) Was ist die Bedeutung dieses Verfahrens für die Programmierung der Division auf einem Rechner?

(5)

$$a_n = a_1 + d\,(n-1) = 7 + 3\,(n-1)$$

(a) Berechne eine Formel für die Summenfolge s_n.

(b) Beweise die Formel für s_n mit Hilfe vollständiger Induktion.

(6) Löse:

$$8\,x^2 + 2\,x - 1 \equiv 6\,x - 5 \;mod(10)$$

Viel Glück!

WIR

6.7 Test: Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$, Reihen, Potenzreihen II/45

Abschrift • *Copie*

(1) (a) $S = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots$

i. Entscheide die Konvergenz (mit Begründung)!

ii. Berechne, falls möglich, S explizit. *(Hinweis:* $\frac{1}{n\,(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} \ldots$*)*

(b) Jede Seite eines gleichseitigen Dreiecks F_1 mit der Seitenlänge 1 wird in 3 gleich lange Teile geteilt. Jeweils über dem mittleren Teil wird wieder ein gleichseitiges Dreieck errichtet und die Berührungskannte zwischen altem und neuem Dreieck anschliessend weggelassen. Zu den 3 ursprünglich gegebenen Strecken kommen so 3 mal $(3-1)=2$ neue hinzu. Dadurch entsteht eine Figur F_2. In der nun vorhandenen Situation verfahren wir wieder gleich: Jede der vorhandenen Seiten wird dreigeteilt, neue Dreiecke werden errichtet und die gemeinsamen Kanten weggelassen. Damit gelangen wir zu F_3. Dieses Verfahren wird nun wiederholt „in alle Ewigkeit“ (Iteration). Es entsteht somit eine Folge von Figuren $[F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n \ldots]$. Berechne allgemein den Umfang U_n der Figur F_n und damit den Grenzwert $U = \lim\limits_{n\to\infty} U_n$.

(2) Potenzreihen:

(a) Bestimme das Taylorpolynom (Näherungspolynom) für $f(x) = e^x \cdot \sqrt{1+x^3}$ vom Grad 7 zum Zentrum $x_0 = 0$ ($\rightsquigarrow$ $p_7(x)$). Vergleiche anschliessend $p_7(0.1)$ mit $f(0.1)$ numerisch.

(b) Bestimme aus der Potenzreihe für $g(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$ (Tabelle!) diejenige von $f(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin(a\,t)}{t}\,dt$ und berechne den Konvergenzradius der entstehenden Reihe.

(3) Differentialrechnung mit mehreren Variablen:

(a) Gegeben ist $w = \varphi(x,y,z) = \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{-1}{r}$.

i. Berechne $grad(\varphi)$ für $r \neq 0$.

ii. Beschreibe die Niveauflächen sowie $|grad(\varphi)|$ für $r = 1$.

iii. Sei $f(x,y) = \varphi(x,y,0)$. Berechne für $P_0(1;0)$ die Richtungsableitung von f in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

(b) Gegeben ist $f(x,y) = \frac{1}{2}\,x^2 - 4\,x\,y + 9\,y^2 + 3\,x - 14\,x + \frac{1}{2}$.

Berechne die Lage allfälliger Extrema!

Viel Glück!

WIR

6.8 Test: Reihen II/50

Abschrift • *Copie*

(1) Berechne die Summen der folgenden Reihen:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^{-n}$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+2)}$

(2) Wo konvergiert die folgende Reihe absolut? — Wo divergiert sie?

$$\frac{x-2}{1} + \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(x-2)^3}{3} + \ldots + \frac{(x-2)^n}{n} + \ldots$$

(3) Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3\,n-1}$

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n!)^3}$

(b) $\frac{2}{3} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} - \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} + \ldots$

(c) $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \ldots$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^p},\ \ p \in \mathbb{N}$

(d) $1 + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + + \ldots$

Viel Glück!

6.9 Test: Reihen, Potenzreihen II/51

Abschrift • *Copie*

(1) Berechne die Summen der folgenden Reihen, falls möglich:

(a) $\sum\limits_{k=0}^{n} (2\,k+1)$

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \pi^{(-n)}$

(c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\,(n+3)}$

(2) Untersuche die Konvergenz sowie die absolute Konvergenz der folgenden Reihen:

(a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+3}}{4\,n-2}$

(b) $\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3} - \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{4} + \ldots$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos(\frac{1}{n})\cdot\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}\cdot\cos(n)$

(d) $x+1+\frac{(x+1)^3}{2}+\frac{(x+1)^5}{3}+\frac{(x+1)^7}{4}+\frac{(x+1)^9}{5}+\ldots$

(3) Ermittle die Anzahl Häufungspunkte von $\sin(\frac{1}{\sqrt[3]{2\,n\,\pi+1}-1}+\frac{-n\,\pi}{2}\,(-1)^{3\,n})$.

(4) Sei $f(x)=e^x, \qquad g(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)\cdot x^n}{n!}$.

(a) Konvergenzradius von $g(x)$?

(b) Was lässt sich zu $g'(x)$ sagen? (Kriterien!)

(c) $g(0)=\,?\qquad g(1)=\,?$

(d) Was gilt zwischen $g(x)$ und $g'(x)$ für eine Beziehung?

(e) $\int\limits_0^x g(t)\,dt = \,?$

(f) Was gilt für eine Beziehung zwischen $g(x)$ und $\int\limits_0^x g(t)\,dt$?

Viel Glück!

6.10 Test: Reihen, Potenzreihen **II/52**

Abschrift • *Copie*

(1) Sei $f(x) = \dfrac{\tan(x)}{x} \cdot e^x$.

(a) Entwickle diese Funktion in eine Potenzreihe bis zu einem Rest der Ordnung 6 um das Zentrum $x_0 = 0$.

(b) Sei $f_6(x)$ die Reihe ohne den Rest. Berechne damit $\int\limits_{-0.1}^{0.2} f_6(x)\, dx$.

(2) Sei $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ und $f_1(x) = \dfrac{d \sin(x)}{d\, x} - 1$.

(a) Entwickle $f_1(x)$ in eine Potenzreihe bis zu einem Rest der Ordnung 6 um das Zentrum $x_0 = 0$.

(b) Ersetze x durch $(12 - 6\,z)^{0.5}$ und vereinfache den Ausdruck.

(c) Berechne den Konvergenzradius der Potenzreihe von f_1.

(3) Sei $f(x) = (2 - x)^r \ln(x)$.

(a) Entwickle $f(x)$ in eine Potenzreihe bis zu einem Rest höchstens der Ordung 6 um das Zentrum $x_0 = 1$.

(b) Welcher Fehler entsteht für $r = 0$ und $x \in [0.5,\ 1.5]$ höchstens?

(c) Welcher Fehler entsteht für $r = \pi$ und $x \in [0.5,\ 1.5]$ höchstens?

Viel Glück!

6.11 Test: Kombinatorik, Potenzreihen, Vektorgeometrie II/53

Abschrift • *Copie*

(1) Entwickle in eine Potenzreihe unter Benutzung der Potenzreihen von $\sin(x)$ und $\cos(x)$:

(a) $f_1(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$

(b) $f_2(x) = \sin(\cos(x))$

(2) Bilde die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a(n) \cdot b(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x)}{n} \cdot e^x \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x} \cdot e^{-n}$.

(a) Konvergiert diese Reihe?

(b) Falls ja, was ist dann der Konvergenzbereich?

(3) Gegeben ist ein Dreieck $A(1;-1)$, $B(3;6)$, $C(4;-3)$. Durch die Seitenmittelpunkte wird ein Kreis gelegt. Berechne diesen Kreis auf 6 Stellen genau:

(a) Radius?

(b) Mittelpunkt?

(4) Mit Hilfe der Zeichen $\{+,-,0,1\}$ werden immer neue 7–stellige Zeichenfolgen kombiniert, wobei das mittlere Zeichen immer eine 1 ist. Alle so entstandenen Zeichenfolgen werden fortlaufend hintereinander geschrieben. Wieviele mögliche, auf diese Weise entstehenden Zeichenketten gibt es? (Es genügt eine „wissenschaftliche Zahlendarstellung“ $a \cdot 10^b$ anzugeben.)

Viel Glück!

6.12 Test: Reihen, Potenzreihen, Differentialgleichungen II/54

Abschrift • *Copie*

(1) (a) $y' = y^2 - x^2 + \sin(x-y) \rightsquigarrow$ Richtungsfeld?

(b) $y' = \dfrac{\tan(x-y)}{y} \cdot x + x \cdot y \rightsquigarrow$ Richtungsfeld?

(2) Berechne die ersten 8 Glieder der Potenzreihe:

(a)
$$f(x) = \sin(x) \cdot \cos(-x) - \sin(-2\,x), \;\; x_0 = 0$$

(b)
$$f(x) = (x^3 - 2\,x^2 + x - 1)(\sin(x) - \cos(x)), \;\; x_0 = 0$$

(3) Bestimme den Konvergenzbereich:

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty}(x^n + x^{n-1})\,\frac{(n-1)}{n!}$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{x}}{(n! + (2n)!)}$$

(4) Untersuche, ob die folgenden Reihen konvergieren:

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n})}{(\sqrt{n} - n \cdot \sqrt[3]{n})} \cdot e^n$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n) - \ln(2\,n)}{e^n - n^2}$$

(d)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{n}}{n + \sqrt{n}}$$

Viel Glück!

WIR

6.13 Test: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$, Reihentheorie III/43a

---

Abschrift • *Copie*

(1) Gegeben ist ein Quadrat $Q_1Q_2Q_3Q_4$ mit $Q_1 = P_1$ und Halbdiagonalen der Länge 1. Der Einfachheit halber nummerieren wir die Eckpunkte weiter wir folgt:

$$Q_5 = Q_1, \;\; Q_6 = Q_2, \;\; Q_{n+4} = Q_n.$$

Auf $\overline{Q_2Q_4}$ befindet sich $\dfrac{1}{3}$ von Q_2 entfernt der Punkt P_2. P_3 wird dann durch folgende Bedingungen Konstruiert: $P_3 \in \overline{Q_3Q_1}$, $\overline{P_3P_2} \perp \overline{P_2P_1}$ — oder allgemeiner:

$$P_n \in \overline{Q_nQ_{n-2}} \;\text{ und }\; \overline{P_nP_{n-1}} \perp \overline{P_{n-1}P_{n-2}}.$$

So entsteht ein spiralartiger Streckenzug $\overline{P_1P_2P_3P_4P_5P_6\ldots P_n\ldots}$.
$\leadsto$ Was ist die Länge dieses Streckenzuges für $n \to \infty$?

(2) Berechne

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} 2 - \sum\limits_{k=0}^{n} (\frac{1}{2})^n$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - \sin(n)}{n\,(1 - cos(n))}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k\,(k+1)} + \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$

(3) Berechne jeweils die angegebenen Ableitungen:

(a) $f(x) = \sin(x)\cdot\cos(x) + 2\,\sin^2(x)$, $f'(x) = ?$

(b) $f(x) = x^4 - 4^x$, $f'(x) = ?$

(c) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{1+\cos(x)}$, $f'(x) = ?$

(d) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{1+\cos^2(x)}$, $f'(x) = ?$

(e) $f(x) = (1+x^2)^3$, $f'(x) = ?$, $f''(x) = ?$, $f'''(x) = ?$

(f) $f(x) = ln(x^2\cdot\sin(x))$, $f'(x) = ?$

(g) $f(x) = ln(-x)$, $f'(x) = ?$

(h) $f(x) = \arctan(e^{-x}) - ln(1+e^{2\,x})$, $f'(x) = ?$

(4) Sei $f(x) = x^3 - 9\,x^2 + 23\,x - 15$. Berechne Nullstellen, Extrema und Wendepunkte.

(5) Sei $f(x) = x\cdot\sin(x)$. Berechne Näherungswerte für Extrema und Wendepunkte, $x \in (0,\;2\,\pi)$.

%

(6) Sei $f(x) = 2 + ln(x)$. Für $x = 1$ wird die Tangente (Gerade g) an die Kurve konstruiert. Berechne die Nullstellen von $g = g(x)$.

(7) Sei $f(x) = x - x^\pi$. Berechne den Steigungswinkel der Tangenten für $x = 0$ und $x = 1$.

Viel Glück!

Kapitel • Chapitre 7

Serien mit „Potenzreihen im $\mathbb{R}^1$“

7.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Srofgebiete war nie vorhanden.

7.2 Test: Lineare Abbildungen, Reihen, Potenzreihen, komplexe Zahlen I/57

Abschrift • *Copie*

(1) Kreis: • *Cercle:* $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $(y-3)^2 + (x+1)^2 = 2 \;\Rightarrow\; y = \pm\sqrt{\ldots - (x+1)^2} + \ldots = \ldots$

Bild $\vec{x}\,'$ des Kreises? • *Image* $\vec{x}\,'$ *du cercle?*

$$A^{-1} \cdot \vec{x}\,' = A \cdot (\vec{x} + \vec{b}),\;\; A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\;\; \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$f(z) = \frac{\bar{z} \cdot 2 \cdot z}{|z|^2 \cdot (z - i)}$$

(a) Bild von • *Image de* $z(t) = e^{i\,t}$?

(b) Bild von • *Image de* $z(t) = 2\,i$?

(3) (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2 + n^3 + n^4}{n^5 + n^6 + n^7} \cdot x^n \rightsquigarrow$ Konvergenzradius? • *Rayon de convergence?*

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4\,n^2\,(x-4)^n}{n^4} \rightsquigarrow$ Konvergenzradius? • *Rayon de convergence?*

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\cos(\frac{1}{n}) - 1} \rightsquigarrow$ Konvergenz? • *Convergence?*

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(\frac{2}{3})^{n+1}}{n + \frac{1}{2}} + \dfrac{(n \cdot x)^n}{n!} \rightsquigarrow$ Konvergenz? • *Convergence?*

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\dfrac{\cos(x)}{(2\,n+1)(2\,n-1)} + (\dfrac{1}{4})^n) \rightsquigarrow$ Konvergenz? • *Convergence?*

Berechne im Falle der Konvergenz den Grenzwert.
• *Calculer la valeur limite dans le cas de la convergence.*

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-\dfrac{1}{3})^3 \rightsquigarrow$ „Vernünftige Näherung“. • *”Approximation raisonable”.*

Viel Glück!

7.3 Test: Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$, Reihen, Potenzreihen II/10

Abschrift • *Copie*

(1) (a) Berechne $\int e^x \cdot \sin(3\,x)\,dx$ durch partielle Integration!

(b) Berechne $\int \ln(x)\,dx = \int 1 \cdot \ln(x)\,dx$ durch partielle Integration!

(c) Berechne $\int (x+2) \cdot \sqrt[3]{x}\,dx$ durch Substitution! (Setze $t := \sqrt[3]{x}$)

(d) Berechne $\dfrac{d}{d\,x} \displaystyle\int \frac{\sin(x \cdot t)}{t}\,dt.$

(2) Berechne die y–Koordinate des Schwerpunktes der Fläche zwischen x–Achse und Kurve über D_f: $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $D_f = [1,\ \infty)$.

(3) Bestimme die Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln(n))^2}$ *Hinweis: Benutze* $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{1}{x \cdot (\ln(x)^2)}\,dx.$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - \ln(n)}{4^n - n^3}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\ln(n)}{n^3}$ sowie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^3}$

(4) Bestimme die Potenzreihenentwicklung von $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5\,x + 6}$ um $x_0 = 0$.
Hinweis: Partialbruchzerlegung.

Viel Glück!

7.4 Test: Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$, Reihen, Potenzreihen II/45

Abschrift • *Copie*

(1) (a) $S = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots$

i. Entscheide die Konvergenz (mit Begründung)!

ii. Berechne, falls möglich, S explizit. *(Hinweis:* $\frac{1}{n\,(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} \ldots$*)*

(b) Jede Seite eines gleichseitigen Dreiecks F_1 mit der Seitenlänge 1 wird in 3 gleich lange Teile geteilt. Jeweils über dem mittleren Teil wird wieder ein gleichseitiges Dreieck errichtet und die Berührungskannte zwischen altem und neuem Dreieck anschliessend weggelassen. Zu den 3 ursprünglich gegebenen Strecken kommen so 3 mal $(3-1)=2$ neue hinzu. Dadurch entsteht eine Figur F_2. In der nun vorhandenen Situation verfahren wir wieder gleich: Jede der vorhandenen Seiten wird dreigeteilt, neue Dreiecke werden errichtet und die gemeinsamen Kanten weggelassen. Damit gelangen wir zu F_3. Dieses Verfahren wird nun wiederholt „in alle Ewigkeit“ (Iteration). Es entsteht somit eine Folge von Figuren $[F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n \ldots]$. Berechne allgemein den Umfang U_n der Figur F_n und damit den Grenzwert $U = \lim\limits_{n\to\infty} U_n$.

(2) Potenzreihen:

(a) Bestimme das Taylorpolynom (Näherungspolynom) für $f(x) = e^x \cdot \sqrt{1+x^3}$ vom Grad 7 zum Zentrum $x_0 = 0$ ($\leadsto$ $p_7(x)$). Vergleiche anschliessend $p_7(0.1)$ mit $f(0.1)$ numerisch.

(b) Bestimme aus der Potenzreihe für $g(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$ (Tabelle!) diejenige von $f(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin(a\,t)}{t}\,dt$ und berechne den Konvergenzradius der entstehenden Reihe.

(3) Differentialrechnung mit mehreren Variablen:

(a) Gegeben ist $w = \varphi(x,y,z) = \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{-1}{r}$.

i. Berechne $grad(\varphi)$ für $r \neq 0$.

ii. Beschreibe die Niveauflächen sowie $|grad(\varphi)|$ für $r = 1$.

iii. Sei $f(x,y) = \varphi(x,y,0)$. Berechne für $P_0(1;0)$ die Richtungsableitung von f in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

(b) Gegeben ist $f(x,y) = \frac{1}{2}\,x^2 - 4\,x\,y + 9\,y^2 + 3\,x - 14\,x + \frac{1}{2}$.

Berechne die Lage allfälliger Extrema!

Viel Glück!

WIR

7.5 Test: Reihen, Potenzreihen II/51

Abschrift • *Copie*

(1) Berechne die Summen der folgenden Reihen, falls möglich:

(a) $\sum\limits_{k=0}^{n} (2\,k+1)$

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \pi^{(-n)}$

(c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\,(n+3)}$

(2) Untersuche die Konvergenz sowie die absolute Konvergenz der folgenden Reihen:

(a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+3}}{4\,n-2}$

(b) $\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3} - \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{4} + \ldots$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos(\frac{1}{n}) \cdot \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2} \cdot \cos(n)$

(d) $x+1+\frac{(x+1)^3}{2}+\frac{(x+1)^5}{3}+\frac{(x+1)^7}{4}+\frac{(x+1)^9}{5}+\ldots$

(3) Ermittle die Anzahl Häufungspunkte von $\sin(\frac{1}{\sqrt[3]{2\,n\,\pi+1}-1} + \frac{-n\,\pi}{2}\,(-1)^{3\,n})$.

(4) Sei $f(x) = e^x, \qquad g(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)\cdot x^n}{n!}$.

(a) Konvergenzradius von $g(x)$?

(b) Was lässt sich zu $g'(x)$ sagen? (Kriterien!)

(c) $g(0) = ? \qquad g(1) = ?$

(d) Was gilt zwischen $g(x)$ und $g'(x)$ für eine Beziehung?

(e) $\int\limits_0^x g(t)\,dt = ?$

(f) Was gilt für eine Beziehung zwischen $g(x)$ und $\int\limits_0^x g(t)\,dt$?

Viel Glück!

7.6 Test: Reihen, Potenzreihen II/52

Abschrift • *Copie*

(1) Sei $f(x) = \dfrac{\tan(x)}{x} \cdot e^x$.

(a) Entwickle diese Funktion in eine Potenzreihe bis zu einem Rest der Ordnung 6 um das Zentrum $x_0 = 0$.

(b) Sei $f_6(x)$ die Reihe ohne den Rest. Berechne damit $\int\limits_{-0.1}^{0.2} f_6(x)\, dx$.

(2) Sei $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ und $f_1(x) = \dfrac{d\,\sin(x)}{d\,x} - 1$.

(a) Entwickle $f_1(x)$ in eine Potenzreihe bis zu einem Rest der Ordnung 6 um das Zentrum $x_0 = 0$.

(b) Ersetze x durch $(12 - 6\,z)^{0.5}$ und vereinfache den Ausdruck.

(c) Berechne den Konvergenzradius der Potenzreihe von f_1.

(3) Sei $f(x) = (2 - x)^r\, \ln(x)$.

(a) Entwickle $f(x)$ in eine Potenzreihe bis zu einem Rest höchstens der Ordung 6 um das Zentrum $x_0 = 1$.

(b) Welcher Fehler entsteht für $r = 0$ und $x \in [0.5,\ 1.5]$ höchstens?

(c) Welcher Fehler entsteht für $r = \pi$ und $x \in [0.5,\ 1.5]$ höchstens?

Viel Glück!

7.7 Test: Kombinatorik, Potenzreihen, Vektorgeometrie II/53

Abschrift • *Copie*

(1) Entwickle in eine Potenzreihe unter Benutzung der Potenzreihen von $\sin(x)$ und $\cos(x)$:

(a) $f_1(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$

(b) $f_2(x) = \sin(\cos(x))$

(2) Bilde die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a(n) \cdot b(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x)}{n} \cdot e^x \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x} \cdot e^{-n}$.

(a) Konvergiert diese Reihe?

(b) Falls ja, was ist dann der Konvergenzbereich?

(3) Gegeben ist ein Dreieck $A(1;-1)$, $B(3;6)$, $C(4;-3)$. Durch die Seitenmittelpunkte wird ein Kreis gelegt. Berechne diesen Kreis auf 6 Stellen genau:

(a) Radius?

(b) Mittelpunkt?

(4) Mit Hilfe der Zeichen $\{+,-,0,1\}$ werden immer neue 7–stellige Zeichenfolgen kombiniert, wobei das mittlere Zeichen immer eine 1 ist. Alle so entstandenen Zeichenfolgen werden fortlaufend hintereinander geschrieben. Wieviele mögliche, auf diese Weise entstehenden Zeichenketten gibt es? (Es genügt eine „wissenschaftliche Zahlendarstellung“ $a \cdot 10^b$ anzugeben.)

Viel Glück!

WIR

7.8 Test: Reihen, Potenzreihen, Differentialgleichungen II/54

Abschrift • *Copie*

(1) (a) $y' = y^2 - x^2 + \sin(x - y) \leadsto$ Richtungsfeld?

(b) $y' = \dfrac{\tan(x-y)}{y} \cdot x + x \cdot y \leadsto$ Richtungsfeld?

(2) Berechne die ersten 8 Glieder der Potenzreihe:

(a)

$$f(x) = \sin(x) \cdot \cos(-x) - \sin(-2\,x), \;\; x_0 = 0$$

(b)

$$f(x) = (x^3 - 2\,x^2 + x - 1)(\sin(x) - \cos(x)), \;\; x_0 = 0$$

(3) Bestimme den Konvergenzbereich:

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x^n + x^{n-1})\,\frac{(n-1)}{n!}$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{x}}{(n! + (2n)!)}$$

(4) Untersuche, ob die folgenden Reihen konvergieren:

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n})}{(\sqrt{n} - n \cdot \sqrt[3]{n})} \cdot e^n$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n) - \ln(2\,n)}{e^n - n^2}$$

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{n}}{n + \sqrt{n}}$$

Viel Glück!

WIR

7.9 Test: Fourieranalysis, Potenzreihen II/69

Abschrift • *Copie*

(1) (a) Entwickle $f_1(x) = e^{x^2} + e^x$ in eine Potenzreihe bis zum 6. Glied um $x_0 = 0$.

(b) Was ist der Konvergenzradius der Potenzreihe von f_1? (Begründung!)

(c) Berechne mit Hilfe der Potenzreihe von f_1 eine Näherung von $\int\limits_0^2 f_1(x)\,dx$.

(2) (a) Skizziere die Funktion

$$f_2(t) \quad = \quad \begin{cases} |t| + t & t \in (-\pi,\ \pi] \\ f_2(t + 2\,n\pi) & n \in \mathbb{Z},\ \ t + 2\,n\pi \in (-\pi,\ \pi] \end{cases}$$

(b) Entwickle $f_2(t)$ in eine Fourierreihe!

(c) Kann man $f_2(t)$ in eine Potenzreihe entwickeln? — Wie sieht eine solche Entwicklung aus? — Begründung!

(3)

$$g(t) \quad = \quad \begin{cases} e^{-a\,t} & t \in [0,\ \infty) \\ 0 & t \notin [0,\ \infty) \end{cases}$$

Berechne die Fouriertransformierte von $g(t)$.

(4) Erkläre das Phänomen von Gibbs!

Viel Glück!

WIR

7.10 Test: Fourieranalysis, Potenzreihen III/01

Abschrift • *Copie*

(1) Entwickle in eine Potenzreihe:

$$f(x) = (1 + k\,x)^r, \;\; |k \cdot x| < 1, \;\; r \in \mathbb{R}.$$

(2) Sei:

$$f(t) \;=\; \begin{cases} t & t \in [-\frac{\pi}{3},\; \frac{\pi}{3}] \\ 1 & t \in (\frac{\pi}{3},\; \frac{2\pi}{3}) \\ \pi - t & t \in [\frac{2\pi}{3},\; \frac{4\pi}{3}] \\ -1 & t \in (\frac{4\pi}{3},\; \frac{5\pi}{3}) \end{cases}$$

Dazu ist $f(t + 2\,\pi) = f(t)$.

(a) Entwickle f in eine Fourierreihe (Skizze!).

(b) Verschiebe den Ursprung in $P_0(2\,\pi, 0)$. Aus $f(t)$ wird dann $f_1(t')$, wobei t' die Variable im neuen KS ist. Entwickle $f_1(t')$ in eine Fourierreihe.

(c) Berechne eine Näherung für $\displaystyle\frac{1}{2\,\pi}\int_0^{2\,\pi} f^2(t)\,dt$, $\;f^2(t) = (f(t))^2$.

(3) Sei

$$f(t) \;=\; \begin{cases} -\sin(t) & t \in [\pi,\; 2\,\pi] \\ 0 & t \notin [\pi, 2\;\pi] \end{cases}$$

Bestimme die Fouriertransformierte von $f(t)$ (Skizze!).

(4) Gegeben: Skalarfeld $\varphi(x, y, z) = x\,y + 2$, Vektorfeld $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x\,y \\ -y^2 \\ z^3 \end{pmatrix}$,

Weg $\gamma : t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix}$, $\;t \in [1,\; 2]$.

(a) Besitzt $\vec{F}$ eine Potentialfunktion $u(x, y, z)$? (D.h. $grad(u(x, y, z)) = \vec{F}(x, y, z)$.)

(b) $\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle = \,?$

(c) Gibt es eine Beziehung zwischen $\vec{F}$ und $grad(\varphi)$?

Viel Glück!

WIR

Kapitel • Chapitre 8

Serien mit „Nichtlineare Gleichungen und Ungleichungen“

8.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Srofgebiete war nie vorhanden.

8.2 Test: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$, nichtlineare Gleichungen, Gleichungssysteme I/17

Abschrift • *Copie*

Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$, nichtlineare Gleichungen, Gleichungssysteme
I18 Differentialgleichungen

(1) Gegeben ist die Funktion — *Soit donnée la fonction* $f(x) = x^4 - 5\,x^3 + 3\,x^2 + 5\,x + 2$.

(a) Kontrollieren Sie, ob diese Funktion bei $x = 1 + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}} \approx 3.84732$ eine Nullstelle hat.
Controller si cette fonction a un zéro à $x = 1 + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}} \approx 3.84732$.

(b) Skizzieren Sie die Funktionskurve.
Dessiner une esquisse de la courbe de cette fonction.

(c) Bestimmen Sie alle Nullstellen, Extrema und Wendepunkte der Kurve.
Trouver tous les zéros, les points extrêmes et les points d'infléxion de cette fonction.

(2) Gegeben ist das Gleichungssystem — *Soit donné le système d'équations*:

$$\begin{aligned} x - y + z &= 3 \\ r\,x - y - z &= 1 \\ 2\,x + y - 4\,z &= -3\,q \end{aligned} \tag{8.1}$$

(a) Für $z = 3$ und $q = 1$ existiert eine Lösung. Berechne x, y und r.
Pour $z = 3$ *et* $q = 1$ *il existe une solution. Calculer* x, y *et* r.

(b) Sei $q = -2$. Für welche r existieren keine resp. unendlich viele Lösungen?
Soit $q = -2$. *Decider pour quels* r *il n'y a pas de solution resp. infiniment de solutions.*

Viel Glück!

WIR

8.3 Test: Relationen, Funktionen, Ungleichungen I/34

Abschrift • *Copie*

Version française: Voir http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/restricted/TestsAll.pdf

(1) Untersuche und begründe, ob der folgende Sachverhalt richtig ist:

$$(f \ \text{ bijektiv }) \ \wedge \ (g \ \text{ bijektiv }) \ \Rightarrow \ (f \circ g \ \text{ bijektiv })$$

(2) $f(x) = 2\,x^2 + 8\,x - 35, \qquad g(x) = x + 10.$ Wo ist dann die folgende Aussage richtig?

$$(f(x) < g(x)) \ \wedge \ (6.5\,x < 0)$$

(3) Gegeben: $f(x) = x^3 + x^2 + 1$. Gesucht sind:

(a) Wertetabelle?

(b) Graph?

(c) y–Achsenabschnitt?

(d) Eventuelle Nullstellen des Graphen?

(e) Wo ist $f(x) = \sqrt{x}$?

(4) $f(x) = \sqrt{x}, \qquad g(x) = [x], \qquad h(x) = x^2.$

(a) Bestimme $\Phi = h \circ g \circ f$.

(b) Bestimme D_Φ.

(c) Bestimme W_Φ.

(d) Ist Φ surjektiv?

(e) Ist Φ injektiv?

(f) Ist Φ bijektiv?

Viel Glück!

8.4 Test: Funktionen, nichtlineare Ungleichungen, Vektorgeometrie I/38

Abschrift • *Copie*

(1)

$$f(x) = a\,x + b, \quad g(x) = c\,x + d, \quad (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$$

Was gelten zwischen a, b, c, d für Beziehungen?

(2) Entwerfe von Hand den Graphen von $\sin(\tan(|x|))$ in $[-\pi,\ \pi]$. Mache dazu eine vernüfntige Wertetabelle.

(3) Löse: $\frac{1}{4}\,x^2 - 2\,x - 5 > \frac{1}{3}\,x + 6$.

(4)

$$f(x) = \frac{2\,x^3 - 5\,x^2 + 8\,x}{-x^2 + 5\,x + 7}$$

(a) *Polstellen*?

(b) Asymptoten?

(c) Funktionsgleichung(en) der Asymptoten?

(d) Graph?

(5) Gegeben ist die Gerade g durch $P(-1; 4)$ und $Q(3; 7)$ sowie die Gerade h mit $h \perp g$ und $P \in h$.

(a) Bestimme die Funktionsgleichung $g: \ x \longmapsto g(x)$.

(b) Bestimme die Funktionsgleichung $h: \ x \longmapsto h(x)$.

(c) Wo ist $h(x) = 0$?

Viel Glück!

WIR

8.5 Test: Funktionen, nichtlineare Gleichungen, Zahlentheorie, Kombinatorik I/42

Abschrift • *Copie*

(1) Gegeben sind die Ziffern 4, 9, 1, 1, 9, 9, 0. Wieviele 7–ziffrige Zahlen zwischen $2'000'000$ und $6'000'000$ kann man damit bilden?

(2) Wieviele Lösungen mit $x, y, z \in \mathbb{N}$ hat die folgende Gleichung?

$$x + y + z = 100$$

(3) Sporttotto: 13 Spiele sind zu beurteilen. Für jedes Spiel hat man die Möglichkeit, 1, x oder 2 anzukreuzen. Wieviele verschiedenen Lösungen kann man setzen?

(4) Vereinfache: $((k+1)! - k \cdot k!)(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!})\binom{2\,k-1}{k-1} \cdot k! = ?$

(5) Vereinfache: $\binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k+1} = ?$

(6) Löse die Gleichung: $\tan(x) \cdot \cot(x) = 0.6384$.

(7) Skizziere die Funktion $f : x \longmapsto y = \arctan(x)$ und löse die Gleichung $\arctan(x) = \frac{\pi}{4}$.

(8) Skizziere in Polarkoordinaten: $r(\varphi) = \cos^2(\frac{\varphi}{2}) \cdot \varphi^2,\ \ \varphi \in [0,\ 2\,\pi]$.

(9) Berechne möglichst exakt: $\log_{3.7}(\frac{1}{3.6}) + \log_{3.7}(3.6) = ?$

(10) Berechne möglichst exakt: $\log_{(e^2)}(e^{\pi}) = ?$

Bemerkung: Die meisten Aufgaben sind relativ einfach und geben nicht sehr viel zu tun. Löse diejenigen Aufgaben zuerst, die dir am einfachsten vorkommen und versuche, mit 5 Minuten pro Aufgabe auszukommen.

Viel Glück!

8.6 Test: Nichtlineare Gleichungen, Differentialgleichungen, Numerik I/60

Abschrift • *Copie*

(1) $f(x) = \frac{1}{3}\cos(x) + \frac{1}{10} - x. \leadsto$ Löse $f(x) = 0$ mit $x > 0$!

Approximiere die kleinste Nullstelle dieser Gleichung wie folgt:

(a) Newton–Methode

(b) Fixpunktmethode

(c) Regula falsi (sofern einfach möglich)

Wähle als Startwert $x_1 = 0.3$ und für die Regula falsi noch $x_2 = 0.5$.
Vergleiche die Anzahl Rechenschritte bis zu einer Genauigkeit von 6 Stellen hinter dem Komma bei den verschiedenen Methoden. Beurteile damit die Methoden!

(2)

$$y'' = \cos(y') + e^y \sin(x), \;\; y(0) = 1, \;\; y(0) = 0, \;\; \Delta y = 0.1\,.$$

Berechne $y(0.1)$ approximativ mit Hilfe von Runge–Kutta!

(3)

$$\{(x_i; y_i)\} = \{(2; 0.5), (3; -0.7), (4; 0.9), (5; 0.4), (6; 0.8)\}$$

(a) Berechne das Interpolationspolynom $p(x)$ mit minimalem Grad durch die gegebenen Stützstellen mit Hilfe des Newton–Verfahrens.

(b) Annahme: $|f^{(n)}| \leq 1.1\cdot$ |max. Sekantensteigung bei Stützstellen|. $f(x_i)$ sei dabei der Wert der wirklichen Funktion. Wie gross ist dann $|f(x) - p(x)|$ maximal?

(c) Beurteile die letzte Annahme mit Hilfe eines abschätzbaren Wertes für $f^{(4)}$. (Methode der Binomialkoeffizienten.)

(d) Berechne eine Näherung von $\int_2^6 f(x)\,dx$ mit Hilfe des Simpson–Verfahrens.

(e) Berechne eine Näherung von $\int_2^6 p(x)\,dx$ und vergleiche diesen Wert mit dem erhaltenen Wert in der vorangegangenen Teilaufgabe.

Viel Glück!

WIR

8.7 Test: Nichtlineare Gleichungen, Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$, Vektorgeometrie I/61

Abschrift • *Copie*

(1) $f(x) = \frac{1}{10}\,(\cos(x))^2 + \frac{1}{2} - x. \rightsquigarrow$ Löse $f(x) = 0$ mit $x > 0\,!$

Approximiere die kleinste Nullstelle dieser Gleichung wie folgt:

(a) Newton–Methode

(b) Fixpunktmethode

(c) Regula falsi (sofern einfach möglich)

Wähle als Startwert $x_1 = 0.1$ und für die Regula falsi noch $x_2 = 0.5$.
Vergleiche die Anzahl Rechenschritte bis zu einer Genauigkeit von 6 Stellen hinter dem Komma bei den verschiedenen Methoden.

(2) Die Ebene Φ ist gegeben durch $A(2;1;3)$, $B(-1;4;6)$, $C(1;-1;-2)$, $P(5;5;5)$.

(a) Bestimme den Schwerpunkt S des Dreiecks $\triangle(ABC)$.

(b) In welchen Punkten schneidet Φ die Koordinatenachsen?

(c) Wo durchstösst die Gerade $\overline{PS}$ die (x,y)–Ebene?

(3)

$$\{(x_i; y_i)\} = \{(1; 0.5), (3; 0.9), (2; -0.7), (5; 0.8), (4; 0.4)\}$$

(a) Berechne das Interpolationspolynom $p(x)$ mit minimalem Grad durch die gegebenen Stützstellen.

(b) Sei f die wirkliche Funktion mit ihrem Graphen durch die Stützstellen. Berechne eine Näherung von $\int\limits_1^5 f(x)\,dx$ mit Hilfe des Simpson–Verfahrens.

Viel Glück!

WIR

8.8 Test: Grenzwerte, nichtlineare Gleichungen und Ungleichungen, Zahlentheorie I/62

Abschrift • *Copie*

(1) Löse:

(a) $\log_{10}(x) - e^x > 0$

(b) $\sinh^2(x) - \cosh^2(x) = \dfrac{1}{4}$

(c) $\sinh^2(x) + \cosh^2(x) = \dfrac{1}{4}$

(2) Zeige:

(a) $x\ R\ y :\Leftrightarrow x^2 - y^2 \in \mathbb{Z}$ ist Äquivalenzrelation.

(b) Betrachte dazu die Abbildung: $x \longmapsto$ Äquivalenzklasse $[x]$.
$\leadsto$ Was ist hier die Urbildklasse von $[\sqrt{2}]$?

(3) Untersuche die Konvergenz von $\langle a_n \rangle$ und berechne, falls möglich, den Grenzwert:

(a) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n+1} - 1}$

(b) $a_n = e^{\frac{1}{n}}$

(c) $a_n = e^{\sqrt{n}}$

(d) $a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2\,n)!}$

(4) Wieviele Häufungspunkte hat die Folge $\langle a_n \rangle = \langle \sin(\dfrac{3\,n\,\pi}{13} + 1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}) \rangle$?

(5) (a) Stimmt die Gleichung $|\mathbb{Q}^2| = |\mathbb{Q}|$? (Begründung!)

(b) Stimmt die Gleichung $|\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}|$? (Begründung!)

Viel Glück!

8.9 Test: Nichtlineare Gleichungen, Vektorgeometrie, Vektorrechnung II/29

Abschrift • *Copie*

(1) Hat diese Gleichung Lösungen? Wenn ja, dann welche Lösungen? *Graphisch!*

$$\arcsin(x) = e^{\cos(x)}$$

(2) Löse diese Gleichung: $\log_5(7) - \log_{10}(x) = 7\, e^{\log_5(7)}$

(3) (a) Gegeben ist ein Dreieck mit den Eckpunkten $(1;1)$, $(5;2)$, $(4;4)$. Berechne den Schwerpunkt S_a.

(b) Gegeben ist ein konvexes Viereck mit den Eckpunkten $(1;1)$, $(5;2)$, $(4;4)$, $(1.5;3)$. Berechne den Schwerpunkt S_b.

(4) Gegeben sind die Punkte $A(1;1)$, $B(7;3)$, $C(3;0)$, $D(6;5)$. Berechne $E = \overline{AB} \cap \overline{CD}$.

(5) Gegeben sind die Vektoren und Beziehungen:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = 3\,\vec{d} - 3\,\vec{a}, \quad \vec{c} = 2.5 \cdot \vec{b}$$

Löse die Gleichung $4 \cdot \vec{a} - \vec{c} + \vec{e} + (-1) \cdot \vec{x} = \vec{0}$ rechnerisch und skizziere die Situation!

Viel Glück!

8.10 Test: Nichtlineare Gleichungen, Reihen, Zahlentheorie II/48

Abschrift • *Copie*

(1) Untersuche die Konvergenz: $\langle a_n \rangle = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \ldots]$

(2) Untersuche die Konvergenz: $\langle n_n \rangle = [\frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, \frac{1}{4 \cdot 5}, \ldots]$

(3) Durch den Ursprung gehen 6 Geraden $g_0, g_{30}, g_{60}, \ldots, g_{150}$, welche um $0^o, 30^o, 60^o, 90^o, 120^o$ und 150^o gegen die positive x–Achse geneigt sind.
Im 1. Quadranten befindet sich auf g_{30} der Punkt P_1 mit dem Abstand vom Ursprung $|\overline{OP_1}| = 2$. Von P_1 wird im Gegenuhrzeigersinn auf g_{60} das Lot gefällt. Der Lotfusspunkt ist P_2. Ebenso wird von P_2 im Gegenuhrzeigersinn auf g_{90} das Lot gefällt. Der Lotfusspunkt ist P_3 und so fort. So entsteht die Punktfolge $[P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \ldots]$. Berechne den Grenzwert der Länge des spiraligen Streckenzuges $\lim\limits_{n\to\infty} |\overline{P_1 P_2 P_3 \ldots P_n}|$ (Skizze!).

(4) Die Dezimalzahldivision für $\frac{1}{a} = x \in \mathbb{R}$ soll mit Hilfe des Newton–Verfahrens durchgeführt werden. Beispiel: $a = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$. Dazu definieren wir: $f(x) = \frac{1}{x} - a$. Für die Nullstelle von $f(x)$ gilt dann: $\frac{1}{x} - a = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} = a \Rightarrow x = \frac{1}{a}$.

(a) Berechne nach dem genannten Verfahren eine Rekursionsformel $x_{n+1} = h(x_n)$

(b) Wähle $a = 3$ und $x_1 = 0.5$. Nach wievielen Schritten ist das Resultat auf 3 Stellen exakt?

(c) Was ist die Bedeutung dieses Verfahrens für die Programmierung der Division auf einem Rechner?

(5)

$$a_n = a_1 + d\,(n-1) = 7 + 3\,(n-1)$$

(a) Berechne eine Formel für die Summenfolge s_n.

(b) Beweise die Formel für s_n mit Hilfe vollständiger Induktion.

(6) Löse:

$$8\,x^2 + 2\,x - 1 \equiv 6\,x - 5 \; mod(10)$$

Viel Glück!

WIR

8.11 Test: Nichtlineare Gleichungen, Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$, Schaltalgebra, Kombinatorik, Zahlentheorie II/46

Abschrift • *Copie*

(1) Die Kurve der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ mit $D_f = [0,\ x_0]$ wird um die x-Achse rotiert. Dabei entsteht das Volumen V_2. Um dieses Volumen wird über dem gleichen Definitionsbereich ein x–achsenparalleler Zylinder gestülpt, welcher das Volumen V_1 besitzt.
Berechne $\frac{V_1}{V_2}$.

(2) Erkläre den Satz von Stone und seine Konsequenzen für die Schaltalgebra.

(3) Wieviele Lösungen hat die Gleichung $x + y + z = 1994$ in $\mathbb{N}$? (1994 = Prüfungsjahr.)

(4) Beweise oder widerlege: $\forall_{n\in\mathbb{N},\ n\geq 2} : \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} = \frac{n^2+n}{(n+1)^2}$.

(5) In einer Klasse mit 20 Studenten sollen Arbeitsgruppen zu je 4 Studenten gebildet werden. Wieviele Arbeitsgruppen sind möglich?

(6) Löse die Gleichung $x^3 = \sin(x)$, $x > 0$, numerich wie folgt: Start mit $x_1 = 0.5$.

(a) Newton.Methode.

(b) Regula falsi, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, falls möglich.

(c) Fixpunktverfahren, falls möglich.

Nach wievielen Schritten hat man jeweils eine Genauigkeit von 4 Stellen hinter dem Komma erreicht?

Viel Glück!

WIR

8.12 Test: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, nichtlineare Gleichungen, Fehlerrechnung II/56

Abschrift • *Copie*

(1) Löse die Gleichung $e^{-x} + 4 - \frac{1}{2} \cdot x = 0$ numerisch auf 6 Stellen genau wenn möglich mit der Fixpunktmethode. Start: $x_1 = 1$.

(2) Gegeben sind die Messpunkte auf einem hypothetischen Funktionsgraphen:

$$(1.00/2.83), (2.00/3.21), (3.50/1.96/), (4.00/2.42), (5.00/1.06), (6.50/4.25)$$

(a) Approximiere die Funktion durch ein Polynom.

(b) Berechne damit das Integral zwischen 2.00 und 6.00.

(c) Berechne die Steigung des Graphen bei $x = 1.5$.

(d) Was müsste man wissen, um die Genauigkeit der Approximation zu beurteilen?

(3) Bestimme die Extremwertstellen der folgenden Funktion und beurteile, um welche Art Extremum es sich jeweils handelt:

$$f(x, y, z) = x, y + 2\,x^2 + y^2 + x + 1$$

(4) Berechne das totale Differential der folgenden Funktion:

$$f(x, y, z) = \cos(x\,y) + y\,e^x - 3\,ln(y - z) + z$$

(5) Suche eine einfache Annäherung von $f(x) = (1 + x)^n,\ x << 1$ und berechne damit $(1.000'000'000'041)^{163}$.

(6) Gegeben: $\Phi(x, y, z, w) = a\,\cos(x\,y)\cdot(1 - \sin(x)) + \frac{y\,z^2}{w} - b\,\frac{y^2}{w^2}$. Folgende Werte sind bekannt:

$x = 0.8652 \pm 0.0020$	$a = 2$
$y = 3.000 \pm 0.001$	$b = 3$
$z = 0.469 \pm 0.004$	
$w = 1.002 \pm 0.001$	Berechne den Funktionswert mit dem absoluten Messfehler!

Viel Glück!

WIR

Kapitel • Chapitre 9

Numerik

9.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Srofgebiete war nie vorhanden.

9.2 Test: Nichtlineare Gleichungen, Differentialgleichungen, Numerik I/60

Abschrift • *Copie*

(1) $f(x) = \frac{1}{3}\cos(x) + \frac{1}{10} - x. \leadsto$ Löse $f(x) = 0$ mit $x > 0\,!$

Approximiere die kleinste Nullstelle dieser Gleichung wie folgt:

(a) Newton–Methode

(b) Fixpunktmethode

(c) Regula falsi (sofern einfach möglich)

Wähle als Startwert $x_1 = 0.3$ und für die Regula falsi noch $x_2 = 0.5$.
Vergleiche die Anzahl Rechenschritte bis zu einer Genauigkeit von 6 Stellen hinter dem Komma bei den verschiedenen Methoden. Beurteile damit die Methoden!

(2)

$$y'' = \cos(y') + e^y \sin(x),\;\; y(0) = 1,\;\; y(0) = 0,\;\; \Delta y = 0.1\,.$$

Berechne $y(0.1)$ approximativ mit Hilfe von Runge–Kutta!

(3)

$$\{(x_i; y_i)\} = \{(2; 0.5), (3; -0.7), (4; 0.9), (5; 0.4), (6; 0.8)\}$$

(a) Berechne das Interpolationspolynom $p(x)$ mit minimalem Grad durch die gegebenen Stützstellen mit Hilfe des Newton–Verfahrens.

(b) Annahme: $|f^{(n)}| \leq 1.1\cdot$ |max. Sekantensteigung bei Stützstellen|. $f(x_i)$ sei dabei der Wert der wirklichen Funktion. Wie gross ist dann $|f(x) - p(x)|$ maximal?

(c) Beurteile die letzte Annahme mit Hilfe eines abschätzbaren Wertes für $f^{(4)}$. (Methode der Binomialkoeffizienten.)

(d) Berechne eine Näherung von $\int_2^6 f(x)\,dx$ mit Hilfe des Simpson–Verfahrens.

(e) Berechne eine Näherung von $\int_2^6 p(x)\,dx$ und vergleiche diesen Wert mit dem erhaltenen Wert in der vorangegangenen Teilaufgabe.

Viel Glück!

WIR

9.3 Test: Nichtlineare Gleichungen, Integralrechnung im $\mathbb{R}^1$, Vektorgeometrie I/61

Abschrift • *Copie*

(1) $f(x) = \dfrac{1}{10}\,(\cos(x))^2 + \dfrac{1}{2} - x. \rightsquigarrow$ Löse $f(x) = 0$ mit $x > 0\,!$

Approximiere die kleinste Nullstelle dieser Gleichung wie folgt:

(a) Newton–Methode

(b) Fixpunktmethode

(c) Regula falsi (sofern einfach möglich)

Wähle als Startwert $x_1 = 0.1$ und für die Regula falsi noch $x_2 = 0.5$.
Vergleiche die Anzahl Rechenschritte bis zu einer Genauigkeit von 6 Stellen hinter dem Komma bei den verschiedenen Methoden.

(2) Die Ebene Φ ist gegeben durch $A(2;1;3)$, $B(-1;4;6)$, $C(1;-1;-2)$, $P(5;5;5)$.

(a) Bestimme den Schwerpunkt S des Dreiecks $\triangle(ABC)$.

(b) In welchen Punkten schneidet Φ die Koordinatenachsen?

(c) Wo durchstösst die Gerade $\overline{PS}$ die (x,y)–Ebene?

(3)

$$\{(x_i; y_i)\} = \{(1; 0.5), (3; 0.9), (2; -0.7), (5; 0.8), (4; 0.4)\}$$

(a) Berechne das Interpolationspolynom $p(x)$ mit minimalem Grad durch die gegebenen Stützstellen.

(b) Sei f die wirkliche Funktion mit ihrem Graphen durch die Stützstellen. Berechne eine Näherung von $\int\limits_1^5 f(x)\,dx$ mit Hilfe des Simpson–Verfahrens.

Viel Glück!

9.4 Test: Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, nichtlineare Gleichungen, Fehlerrechnung II/56

Abschrift • *Copie*

(1) Löse die Gleichung $e^{-x} + 4 - \frac{1}{2} \cdot x = 0$ numerisch auf 6 Stellen genau wenn möglich mit der Fixpunktmethode. Start: $x_1 = 1$.

(2) Gegeben sind die Messpunkte auf einem hypothetischen Funktionsgraphen:

$$(1.00/2.83), (2.00/3.21), (3.50/1.96/), (4.00/2.42), (5.00/1.06), (6.50/4.25)$$

(a) Approximiere die Funktion durch ein Polynom.

(b) Berechne damit das Integral zwischen 2.00 und 6.00.

(c) Berechne die Steigung des Graphen bei $x = 1.5$.

(d) Was müsste man wissen, um die Genauigkeit der Approximation zu beurteilen?

(3) Bestimme die Extremwertstellen der folgenden Funktion und beurteile, um welche Art Extremum es sich jeweils handelt:

$$f(x, y, z) = x, y + 2\,x^2 + y^2 + x + 1$$

(4) Berechne das totale Differential der folgenden Funktion:

$$f(x, y, z) = \cos(x\,y) + y\,e^x - 3\,ln(y - z) + z$$

(5) Suche eine einfache Annäherung von $f(x) = (1 + x)^n$, $x << 1$ und berechne damit $(1.000'000'000'041)^{163}$.

(6) Gegeben: $\Phi(x, y, z, w) = a\,\cos(x\,y) \cdot (1 - \sin(x)) + \frac{y\,z^2}{w} - b\,\frac{y^2}{w^2}$. Folgende Werte sind bekannt:

$x = 0.8652 \pm 0.0020$ $\quad a = 2$
$y = 3.000 \pm 0.001$ $\quad b = 3$
$z = 0.469 \pm 0.004$
$w = 1.002 \pm 0.001$

Berechne den Funktionswert mit dem absoluten Messfehler!

Viel Glück!

WIR

Kapitel • Chapitre 10

Serien mit „Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$“

10.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Sroffgebiete war nie vorhanden.

$\leadsto$ Siehe Skript Teil 2

http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/ArchivTestserien.html

Kapitel • Chapitre 11

Serien mit „Fehlerrechnung“

11.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Sroffgebiete war nie vorhanden.

⇝ Siehe Skript Teil 2

http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/ArchivTestserien.html

Kapitel • Chapitre 12

Serien mit „Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$“

12.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Sroffgebiete war nie vorhanden.

$\rightsquigarrow$ Siehe Skript Teil 2

http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/ArchivTestserien.html

Kapitel • Chapitre 13

Serien mit „Differentialgeometrie, Analysis im $\mathbb{R}^n$“

13.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Sroffgebiete war nie vorhanden.

$\leadsto$ Siehe Skript Teil 2

http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/ArchivTestserien.html

Kapitel • Chapitre 14

Lösungen — Solutions

14.1 Momentane Sachlage — — Situation actuelle

Die Lösungen zu den Aufgaben sind momentan nur noch in Papierform vorhanden (*Mathematica*–Output und Handschriften). An eine gesamthafte oder teilweise Veröffentlichung kann aus Kapazitätsgründen vorläufig nicht gedacht werden.
• *Les solutions des problèmes existent momentanément seulement sur papier output de Mathematica et manuscrits. Actuellement, par raisons de capacité, on ne peut pas penser à une la publication intégrale ou bien partielle.*

http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/ArchivTestserien.html

Fremdarbeit?

Ende • *Fin*