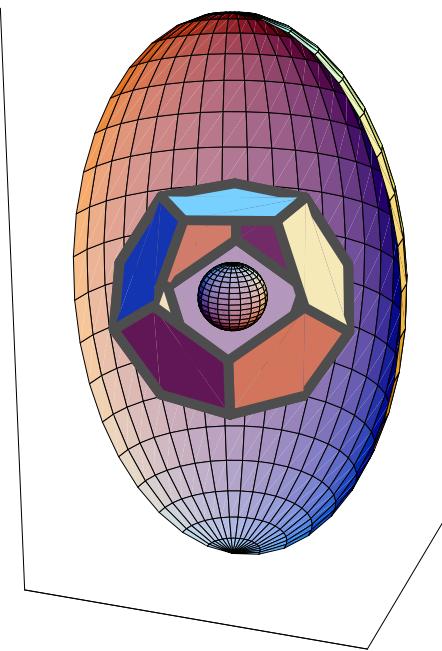


- ◊ Tests ◊ *Tests* ◊
- ◊ Grundlagen, diskr. Math., Statistik ◊
- ◊ *Elém. de base, math. discr., statist.* ◊
 - ◊ Diplom ◊ 1989 – 2000 ◊ *Diplôme* ◊



von • *de*

Rolf Wirz

Ingenieurschule Biel — HTA-Biel/BFH — HTI/BFH bis • *jusqu'à* 2000

Ausgabe vom 14. September 2007, Version 1.0.1 / d/f

Mit klickbaren Links • *Avec des lignes cliquables*

Produziert mit PCTeX unter Win XP. Einige Graphiken sind auch mit *Mathematica* entstanden.

- *Produit avec PCTeX sous Win XP. Quelques représentations ont été produites avec Mathematica.*

Der Mensch hat dreierlei Wege, um zu lernen:
 Erstens durch Nachdenken, das ist der edelste;
 zweitens durch Nachahmen, das ist der leichteste;
 drittens durch Erfahrung, das ist der bitterste.

(Nach Konfuzius)

- *L'homme a trois occasions pour apprendre:
 Premièrement par réflexion, c'est la plus noble;
 deuxièmement par l'imitation, c'est la plus facile;
 troisièmement par l'expérience, c'est la plus dure.*

(Selon Confucius)

Aktuelle Adresse des Autors (2007):

Rolf W. Wirz-Depierre
 Prof. für Math.
 Berner Fachhochschule (BFH), Dep. AHB und TI
 Pestalozzistrasse 20
 Büro B112 CH-3400 Burgdorf/BE
 Tel. ++41 (0)34 426 42 30 / intern 230
 Mail: Siehe <http://rowicus.ch/Wir/indexTotalF.html> unter „Koordinaten von R.W.“
 (Alt: Ingenieurschule Biel (HTL), Ing'schule des Kt. Bern, Fachhochschule ab 1997) // BFH HTA Biel // BFH HT/

©2007

Die Urheberrechte für das verwendete graphische Material gehören dem Autor.

Inhaltsverzeichnis • Table des matières

1 Einführung — Introduction	5
1.1 Gegenstand — Sujet	5
1.2 Gliederung — Gliederung	6
2 Grundlagen, Grundbegriffe	7
2.1 Inhalt	7
2.2 Test: Grundlagen — I/19	8
2.3 Test: Grundlagen — I/20	9
2.4 Test: Grundlagen — I/21	10
2.5 Test: Grundlagen — I/22	11
2.6 Test: Alg., Zahlenth., Gleich., Grundl., Vekt.'geom. — I/23	12
2.7 Test: Grundlagen, Algebra, Funktionen, Grenzwerte — I/24	13
2.8 Test: Grundlagen, Funktionen, Schaltalgebra — I/36	15
2.9 Test: Grundbegr., Grenzwerte, Funktionen, Algebra — I/41	16
2.10 Test: Det. u. Matrizen, EW, kompl. Zahlen — III/41	17
3 Trigonometrie, Goniometrie	19
3.1 Inhalt	19
3.2 Test: Trigonometrie — II/18	20
3.3 Test: Trigonometrie — II/19	21
3.4 Test: Vektorgeometrie, Goniometrie — II/35	22
3.5 Test: Vekt'rechn., Vekt'geom., Gleich'syst., Goniom. — II/38	23
3.6 Test: Vektorgeometrie, Goniometrie — II/39	24
4 Logik	25
4.1 Inhalt	25
4.2 Test: Funktionen, Logik, Mengenl., Relat., Zahllenth. — I/25	26
4.3 Test: Funktionen, Logik, Mengenl., Relationen — I/26	27
4.4 Test: Logik, Mengenlehre., Relationen — I/27	28
4.5 Test: Logik, Mengenlehre., Relationen — I/28	30
4.6 Test: Logik, Mengenlehre., Relationen — I/29	32
4.7 Test: Funktionen, Logik, Mengenl., Relat., Ungleich. — I/30	33
4.8 Test: Logik, Mengenlehre — I/31	35
4.9 Test: Logik, Mengenl., Relat., Funkt., Zahllenth. — I/35	36

4.10 Test: Kombinatorik, Logik, Mengenl., Zahlenth. — I/40	37
4.11 Test: Grundl., Logik, Mengenl., Zahlenth. — III/39	38
4.12 Test: Det. u. Matrizen, EW, kompl. Zahlen — III/41	40
5 Mengenlehre	41
5.1 Inhalt	41
5.2 Test: Ungleich., Unglech'syst., Mengenl., Zahlenth., 1-dim. F'kt. — I/01	42
5.3 Test: 1-dim. Funkt., Ungleich'syst., Mengenlehre — I/03	43
5.4 Test: Funktionen, Logik, Mengenl., Relat., Zahlenth. — I/25	45
5.5 Test: Funktionen, Logik, Mengenl., Relationen — I/26	46
5.6 Test: Logik, Mengenlehre., Relationen — I/27	47
5.7 Test: Logik, Mengenlehre., Relationen — I/28	49
5.8 Test: Logik, Mengenlehre., Relationen — I/29	51
5.9 Test: Funktionen, Logik, Mengenl., Relat., Ungleich. — I/30	52
5.10 Test: Logik, Mengenlehre — I/31	54
5.11 Test: Logik, Mengenl., Relat., Funkt., Zahlenth. — I/35	55
5.12 Test: Kombinatorik, Logik, Mengenl., Zahlenth. — I/40	56
5.13 Test: Grundl., Logik, Mengenl., Zahlenth. — III/39	57
5.14 Test: Det. u. Matrizen, EW, kompl. Zahlen — III/41	59
6 Relationen	61
6.1 Inhalt	61
6.2 Test: Logik, Mengenlehre., Relationen — I/27	62
6.3 Test: Funktionen, Logik, Mengenl., Relat., Zahlenth. — I/25	64
6.4 Test: Funktionen, Logik, Mengenl., Relationen — I/26	65
6.5 Test: Logik, Mengenlehre., Relationen — I/28	66
6.6 Test: Logik, Mengenlehre., Relationen — I/29	68
6.7 Test: Funktionen, Logik, Mengenl., Relat., Ungleich. — I/30	69
6.8 Test: Boole'sche Algebra, Kombinatorik, Relationen — I/32	71
6.9 Test: Boole'sche Algebra, Kombinatorik, Relationen — I/33	72
6.10 Test: Relationen, Funktionen, Ungleichungen — I/34	73
6.11 Test: Logik, Mengenl., Relat., Funkt., Zahlenth. — I/35	74
7 Boole'sche Algebra	75
7.1 Inhalt	75
7.2 Test: Boole'sche Algebra, Kombinatorik, Relationen — I/32	76
7.3 Test: Boole'sche Algebra, Kombinatorik, Relationen — I/33	77
7.4 Test: Boole'sche Algebra, Zahlentheorie — I/43	78
7.5 Test: Boole'sche Alg., 1-dim. Diff.- u. Integr'rechn., Vekt'geom. — I/59	79
8 Schaltalgebra	81
8.1 Inhalt	81
8.2 Test: Boole'sche Algebra, Kombinatorik, Relationen — I/32	82
8.3 Test: Boole'sche Algebra, Kombinatorik, Relationen — I/33	83
8.4 Test: Grundlagen, Funktionen, Schaltalgebra — I/36	84
8.5 Test: Boole'sche Algebra, Zahlentheorie — I/43	85
8.6 Test: Nichtlin. Gleich., 1-dim Int'rechn., Schaltalg. Komb., Zahlenth. — II/46	86

8.7 Test: Boolsche Alg., 1–dim. Diff.– u. Integr’rechn., Vekt’geom. — I/59	87
9 Kombinatorik	89
9.1 Inhalt	89
9.2 Test: Boolsche Algebra, Kombinatorik, Relationen — I/32	90
9.3 Test: Zahlenth., Kombinatorik — Th. d. nomb., analyse comb. — I/39	91
9.4 Test: Kombinatorik, Logik, Mengenl., Zahlenth. — I/40	93
9.5 Test: Funkt., nichtlin. Gleich.n, Zahlenth., Kombinatorik — I/42	94
9.6 Test: 1–dim. Int’rechn., Kombinatorik, Zahlfentheorie — II/11	95
9.7 Test: Nichtlin. Gleich., 1–dim Int’rechn., Schaltalg. Komb., Zahlenth. — II/46 . .	96
9.8 Test: Kombinatorik, Potenzreihen, Vekt’geom. — II/53	97
9.9 Test: Boolsche Algebra, Kombinatorik, Relationen — I/33	98
10 Statistik	99
10.1 Inhalt	99
10.2 Test: Statistik — I/14	100
10.3 Test: Statistik — I/15	102
10.4 Test: Statistik — I/16	104
10.5 Test: Det. und Matrizen, Diff’gleich., Statistik — I/18	105
11 Lösungen — Solutions	107
11.1 Momentane Sachlage — Situation actuelle	107

Kapitel • Chapitre 1

Einführung — Introduction

1.1 Gegenstand — Sujet

In dieser Sammlung ist eine Auswahl von Aufgaben zusammengefasst, welche in den Jahren vor 2000 verwendet worden sind.

- *Dans cette collection, un choix de problèmes est rassemblé. Il s'agit de problèmes qui ont été utilisés dans les années avant 2000.*

Klickbare Links zu Skripten: • *Liens cliquables pour les cours:*

<http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html> (Skript–Download) • *Download cours*

Die Lösungen zu den Aufgaben sind momentan nur in Papierform vorhanden. An eine gesamthaft Veröffentlichung kann aus Kapazitätsgründen vorläufig nicht gedacht werden.

- *Les solutions des problèmes existent momentanément seulement sur papier. Actuellement, par raisons de capacité, on ne peut pas penser à une la publication intégrale.*

1.2 Gliederung — Disposition

Bemerkung: • **Remarque:** Da nur noch wenige Séries auch in französischer Übersetzung vorliegen, wird im weiteren Text aus Kapazitätsgründen auf Übersetzungen verzichtet.

Gliederung von „Grundlagen, diskrete Mathematik und Statistik“:

- (1) Grundlagen, Grundbegriffe
- (2) Trigonometrie, Goniometrie
- (3) Logik
- (4) Mengenlehre
- (5) Relationen
- (6) Funktionen als Relationen
- (7) Boolesche Algebra
- (8) Schaltalgebra
- (9) Kombinatorik
- (10) Statistik

Kapitel • Chapitre 2

Serien mit „Grundlagen, Grundbegriffen“

2.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Stoffgebiete war nie vorhanden.

2.2 Test: Grundlagen

I/19

Abschrift • Copie

(1) Vereinfache:

$$\frac{\frac{a-b}{\left(\frac{1}{a+b}\right)}}{\frac{\left(\frac{a+1}{b}-\frac{b+1}{a}\right)}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a \cdot b}\right)}}$$

(2)

$$\frac{1}{1-\frac{1}{x}} - \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1-x^2} \Rightarrow x = ?$$

- (3) Skizziere: In einem Quadrat mit dem Umkreisradius $r = 1$ wird über jeder Seite mit Zentrum = Seitenmittelpunkt nach innen ein Halbkreis gezeichnet. Alle Halbkreise inzidieren im Zentrum. So entsteht ein „vierblättriges Kleeblatt“, welches schraffiert werden soll. Um den Umkreis wird danach ein zweites Quadrat in paralleler Lage gezeichnet. Die Fläche zwischen dem Umkreis und dem äusseren Quadrat wird ebenfalls schraffiert. Berechne den Inhalt der gesamten schraffierten Fläche.
- (4) Skizziere: Um einen Kreis mit dem Radius 10 wird ein Trapez gezeichnet, welches an der Basis zwei spitze Innenwinkel besitzt. Die beiden Schenkel messen 24 und 26. Um das Trapez wird ein Rechteck gezeichnet, welches zu den beiden parallelen Trapezseiten kolliniare Seiten aufweist und daher in zwei Punkten zusammen mit dem Trapez den Kreis berührt.
- (a) Berechne den Flächeninhalt des Trapezes!
 - (b) Berechne den Flächeninhalt des Rechtecks!

Viel Glück!

WIR

2.3 Test: Grundlagen**I/20**

Abschrift • Copie

- (1) Gegeben seien die Seiten eines gleichschenkligen Trapezes:

$$\overline{AB} = 20, \quad \overline{CD} = 4, \quad \overline{AD} = \overline{BC} = 17.$$

Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks, das entsteht, wenn man die Seite \overline{AD} und die Seite \overline{BC} bis zu ihrem Schnittpunkt verlängert.

- (2) Ein Tankwagen soll drei Ölbehälter von 10.8 m^3 , 4.5 m^3 und 19.5 m^3 nacheinander füllen. Beim ersten Behälter liefert der Tankwagen eine bestimmte Menge Öl pro *Minute*. Beim zweiten wird diese Menge um $\frac{1}{3}$ herabgesetzt, und beim dritten liefert der Tankwagen 40 Liter pro *Minute* mehr als beim zweiten. Die totale Füllzeit für die beiden ersten Behälter ist gleich gross wie diejenige für den dritten allein. Wie gross ist diese Zeit?

- (3) (a) Man bestimme den Wert x , für welchen der folgende Ausdruck null ist:

$$\frac{2x}{4x^2 - 4x + 1} - \frac{2}{2x - 1}$$

- (b) Bestimme k so, dass die folgende Gleichung ersten Grades wird:

$$\frac{2x}{4x^2 - 4x + 1} - \frac{2}{2x - 1} = \frac{kx - 8}{4x^2 - 1}$$

- (4) (a) Vereinfache so weit wie möglich:

$$\left(\frac{x}{a} - 1\right) \cdot \left(\frac{a^2}{a^2 - x^2}\right)$$

- (b) Vereinfache so weit wie möglich:

$$\left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b}\right) : \left(\frac{b}{1+\frac{a}{b}}\right)$$

Viel Glück!

WIR

2.4 Test: Grundlagen

I/21

Abschrift • Copie

- (1) Gegeben seien die Seiten eines gleichschenkligen Trapezes:

$$\overline{AB} = 20, \quad \overline{CD} = 5, \quad \overline{AD} = \overline{BC} = 17.$$

Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks, das entsteht, wenn man die Seite \overline{AD} und die Seite \overline{BC} bis zu ihrem Schnittpunkt verlängert.

- (2) Ein Tankwagen soll drei Ölbehälter von 10.2 m^3 , 4.5 m^3 und 19.5 m^3 nacheinander füllen. Beim ersten Behälter liefert der Tankwagen eine bestimmte Menge Öl pro *Minute*. Beim zweiten wird diese Menge um $\frac{1}{3}$ herabgesetzt, und beim dritten liefert der Tankwagen 41 *Liter* pro *Minute* mehr als beim zweiten. Die totale Füllzeit für die beiden ersten Behälter ist gleich gross wie diejenige für den dritten allein. Wie gross ist diese Zeit?

- (3) (a) Man bestimme den Wert x , für welchen der folgende Ausdruck null ist:

$$\frac{2x}{2x^2 - 4x + 1} - \frac{2}{2x - 1}$$

- (b) Bestimme k so, dass die folgende Gleichung ersten Grades wird:

$$\frac{4x}{2x^2 - 4x + 1} - \frac{2}{2x - 1} = \frac{kx - 8}{4x^2 - 1}$$

- (4) (a) Vereinfache so weit wie möglich:

$$\left(\frac{x}{a} + 1\right) \cdot \left(\frac{a^2}{a^2 + x^2}\right)$$

- (b) Vereinfache so weit wie möglich:

$$\left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b}\right) : \left(\frac{b}{1 - \frac{a}{b}}\right)$$

Viel Glück!

WIR

2.5 Test: Grundlagen**I/22**

Abschrift • Copie

- (1) Skizziere: Gegeben ist ein Kreis in einem Koordinatensystem mit dem Mittelpunkt $M = O$ und dem Radius R . Mit Zentrum auf der negativen x -Achse wird ein zweiter Kreis mit dem Radius $r = \frac{R}{2}$ gezeichnet, welcher durch M und durch $(-R; 0)$ geht. Weiter wird durch $(-r; 0)$ die Senkrechte h zur x -Achse errichtet. Schraffierte die Menge der Punkte, welche innerhalb des grossen Kreises, aber ausserhalb des kleinen Kreises und rechts von h liegen. Diese Fläche nennen wir A .
- Berechne den Inhalt von A exakt.
 - Setze $|A| = x \cdot r^2$ und berechne x , wenn π durch $\frac{22}{7}$ sowie $\sqrt{3}$ durch $\frac{7}{4}$ approximiert wird.
- (2) Skizziere: Um einen Kreis mit dem Radius 5 wird ein Trapez gezeichnet, welches an der Basis zwei spitze Innenwinkel besitzt. Die beiden Schenkel messen 12 und 13. Um das Trapez wird ein Rechteck gezeichnet, welches zu den beiden parallelen Trapezseiten kolliniare Seiten aufweist und daher in zwei Punkten zusammen mit dem Trapez den Kreis berührt.
- Berechne den Flächeninhalt des Trapezes!
 - Berechne den Flächeninhalt des Rechtecks!

- (3) Vereinfache:

$$(2\frac{5}{6} - 1\frac{1}{2})^2 \cdot x : \frac{(2\frac{5}{12}\lambda + 4\frac{1}{4}\lambda) \cdot \frac{6}{7}\mu^2}{3\frac{1}{2}x^2 : (3\frac{1}{5}\mu - \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{4}\mu + \mu \cdot \frac{4}{5}) \cdot \lambda}$$

Das Resultat soll ein gekürzter Bruch sein. Die Aufgabe gilt als gelöst, wenn der Weg sichtbar ist. Erwartet wird eine Rechnung von Hand.

- (4)

$$s = 2 \cdot \left(\left(\frac{r}{3}\right)^3 - \left(\frac{r-1}{3}\right)^3 \right), \quad t = \left(\left(\frac{r}{3}\right)^3 + \left(\frac{r-1}{3}\right)^3 \right)$$

Um exakt wieviel ist der grösste der beiden Ausdrücke s und t grösster als der andere?

Viel Glück!

WIR

2.6 Test: Algebra, Zahlentheorie, Gleichungen, Grundlagen, Vektorgeometrie

I/23

Abschrift • Copie

- (1) Einer Kugel mit Radius r ist ein Drehzylinder mit Radius ρ und der Höhe h eingeschrieben worden, dessen Mantelfläche gleich der halben Kugeloberfläche ist. Berechne das Zylindervolumen.

(2)

$$\left(\frac{10 - 3x}{5} - \frac{2x - 12}{3} + 2 \right) \cdot \left(\frac{2x - 1}{4x + 11} - \frac{5}{21} \right)$$

Bestimme die Werte von x , für die dieses Produkt null ist.

(3)

$$\frac{5x - 11}{4 - 3y} = \frac{10x - 19}{7 - 6y}$$

Suche die ganzzahligen Lösungen (x, y) dieser Gleichung!

- (4) In einem gleichseitigen Dreieck $\triangle ABC$ mit der Seitenlänge 6 sind die Seitenmittelpunkte mit M_a , M_b , M_c bezeichnet (z.B. $a = \overline{BC}$). Mit dem Mittelpunkt A wird ein Kreisbogen von M_c nach M_b geschlagen und ebenso mit dem Mittelpunkt B ein Kreisbogen von M_c nach M_a . Über den halben Dreiecksseiten \overline{CM}_a und \overline{CM}_b wird je ein Halbkreis nach aussen errichtet. Berechne nun den Umfang und den Inhalt der von den Kreisbögen begrenzen Figur $CM_b M_c M_a C$.

Viel Glück!

WIR

2.7 Test: Grundlagen, Algebra, Funktionen, Grenzwerte I/24

Abschrift • Copie

(1) (a)

$$\frac{\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}}{1 + \frac{x+1}{x-1}} = \frac{1}{2} \rightsquigarrow x = ?$$

(b)

Vereinfache: $\frac{a^2 + ac - b^2 - bc}{a^2 - b^2 - 2bc - c^2}$

(c)

$$x^2 - 4x - 3 \leq 2x + 1 \Rightarrow \text{L} = ? \text{ (Exakt!)}$$

(2) Skizziere die Graphen:

- (a) $f(x) = x - [x]$, $x \in [-2, 2]$
- (b) $f(x) = \sin(|x - [x + 0.5]|)$, $x \in [-2, 2]$
- (c) $f(x) = \sin(x) + \cos(\frac{1}{x})$, $x \in [-0.1, 0.1]$
- (d) $f(x) = \frac{x-1}{|(\sqrt{x}-1)|}$, $x \in \mathbb{R}$

(3) Bestimme so genau wie möglich Pole, Asymptoten und Monotoniebereiche:

(a) $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x + 1}$

(b) $f(x) = \frac{x^2}{(x + 1)^2}$

(4) (a) $a_n = \cos(n) \cdot \sin\left(\frac{n + 2n^2}{3n^3 + 4n^{\frac{1}{2}}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ?$

(b) Gegeben ist eine quadratische Platte der Dicke 1 cm. Auf diese Platte wird eine zweite Platte der selben Dicke gelegt, deren Ecken mit den Seitenmittelpunkten der ersten Platte zusammenfallen. Nach dem gleichen Rezept wird auf die zweite Platte eine dritte gelegt und so fort, in alle Ewigkeit. So entsteht ein unendlich hoher Turm. Wie gross ist die gesamte obere Deckfläche aller Platten zusammen, die man aus einem Halbfabrikat ausschneiden müsste? (Das Ausschneiden ist der unendlich vielen Teile wegen natürlich in der Realität nicht möglich, aber rechnen kann man es trotzdem.)

(c) Gegeben ist eine Folge mit $x_1 = a$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$.

Zeige im Beispiel $a = 2$ dass die Folge konvergiert und berechne den Grenzwert allgemein für $a > 0$. Herleitung angeben!

(5) Schreibe in lateinischer Schrift:

Hευρεκα! Γεσχηαφφτ! Δασ Δινγηατ Σπασσ γεμαχητ!

- (6) (a) Skizziere die Graphen.
(b) Ermittle den Definitionsbereich und den Wertebereich für f, g und h .
(c) Wo ist f, g und h injektiv, surjektiv oder bijektiv?
- (7) Wieviele Schnittpunkte können n Kreise maximal haben?
(a) Formel?
(b) Induktionsbeweis?
(c) Was ändert sich, wenn man statt Kreise Ellipsen betrachtet?
- (8) Man berechne mit Hilfe eines Algorithmus den g.g.T. und das k.g.V. von 123456 und 7890.
- (9) (a) Gesucht sind Additions- und Multiplikationstabellen der Restklassen modulo 6.
(b) Löse mit Hilfe der eben aufgestellten Tabellen die folgende Gleichung:

$$[5]_6 + [5]_6 \cdot [x]_6 = [3]_6$$

Viel Glück!

2.8 Test: Grundlagen, Funktionen, Schaltalgebra I/36

Abschrift • Copie

- (1) Erkläre den Begriff „mathematisches Modell“ am Beispiel der Schaltalgebra!

(2) $f(x) = \sinh(x) \cdot \cosh(x)$

 - (a) $D_f = ?$
 - (c) Wo ist f bijektiv?
 - (b) $W_f = ?$
 - (d) Skizziere die Umkehrfunktion, falls eine solche existiert!

(3) $\frac{\log_3(2) - \log_9(4)}{\log_\pi(\pi^2 - \pi)} + \ln(2e^e) = ?$ (Vereinfachen!)

(4) Zwei 2-stellige Dualzahlen a und b werden multipliziert: $a \cdot b = c$.
 a hat die Form $a_1 \cdot a_2$ (Ziffern a_1, a_2). b hat die Form $b_1 \cdot b_2$ (Ziffern b_1, b_2).

 - (a) Gesucht sind die algebraischen Ausdrücke für die nötigen Schaltungen
(mit „+“, „·“, „¬“).
 - (b) Vereinfache die Ausdrücke nach „Karnaugh“!

Viel Glück!

WIR

2.9 Test: Grundbegriffe, Grenzwerte, Funktionen, Algebra I/41

Abschrift • Copie

(1) Warum kann man nicht allgemein behaupten, dass die folgende Gleichung richtig sei?

$$\frac{0}{0} = 1$$

(2) Berechne, falls möglich, die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \sin(\cos(n))}{n + \sin(n)}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + 2n + 1.1}}{\sqrt[5]{n^2 - 2n + 1}}$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ? \quad a_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{(??)^n}$

(3) $a_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$

(a) Zeige, dass $\langle a_n \rangle$ konvergiert.

(b) Versuche, numerisch einen Grenzwert zu beobachten. Lässt sich hier eine Vermutung formulieren?

(4) Bestimme den folgenden Limes: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2 \cdot x)^n}{2 - x} \right)$.

(5) Vergleiche die Mächtigkeit der Intervalle $[0, 1]$ und $[0, 4]$. (Begründung!)

(6) Erkläre resp. definiere die folgenden Ausdrücke:

(a) Gleichmässige Stetigkeit auf I

(c) Reelle Zahl

(b) Algebraisch irrationale Zahl

(d) Zahlenkörper

(7) Gegeben ist der Ausdruck $(\pi^{\frac{11}{17\pi+\pi}})^{\pi} \cdot (e^e)^{\frac{1}{e}} \cdot e^{(e^{\frac{1}{e}})} \cdot (e^{\frac{11}{17\pi+\pi}})^{\pi}$.

(a) Vereinfache den Ausdruck.

(b) Approximiere den Ausdruck numerisch.

Viel Glück!

WIR

2.10 Test: Determinanten und Matrizen, Eigenwerttheorie, komplexe Zahlen

III/41

Abschrift • Copie

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- (a) Berechne die Determinante von A .
- (b) Berechne die Spur von A .
- (c) Berechne die Eigenwerte von A .
- (d) Berechne die Eigenvektoren von A .
- (e) Berechne, falls vorhanden, die Hauptvektoren \vec{y} von A .

Hinweis: Eigenvektoren $\rightsquigarrow A \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x}$ oder $(A - \lambda E) \vec{y} = \vec{0}$.
 Hauptvektoren $\rightsquigarrow (A - \lambda E)^2 \vec{x} = \vec{0}$.

(2)

$$A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Berechne die Determinante von A .
- (b) Kann α so gewählt werden, dass $\text{L} = \{\}$ ist? — ($\alpha = ?$)
- (c) Wie gross ist z für $x = \frac{1}{8}$? (Falls lösbar.)

(3)

$$\frac{\sqrt{2}(z-i)^5 - \sqrt{2}}{1+i} = 1-i$$

Leite die Lösungen her und skizziere die Lösungsmenge!

(4)

$$\begin{pmatrix} k & -1 & 2 \\ 1 & k & -2 \\ -2 & 2 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Untersuche die Abhängigkeit der Eigenwerte von k !

(5)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = X \cdot D \cdot X^{-1} \quad (\text{Diagonalisierung})$$

- (a) Berechne D und $X = (\vec{x}_1 \vec{x}_2)$, \vec{x}_1 und \vec{x}_2 normiert.
- (b) Berechne A^{100} .
- (c) Berechne $A \cdot \vec{y}(t)$, $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Viel Glück!

WIR

Kapitel • Chapitre 3

Serien mit „Trigonometrie, Goniometrie“

3.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Stoffgebiete war nie vorhanden.

3.2 Test: Trigonometrie**II/18**

Abschrift • Copie

- (1) Ein Beobachter steht am Fenster in einem Haus an einem See. Die Beobachtungsposition liegt 10.53 m über der Wasseroberfläche. Er sieht eine Bergspitze 34.72° über der Horizontalen auf der andern Seeseite. Für das Spiegelbild des Bergs im See ermittelt er den entsprechenden Winkel 36.45° unter der Horizontalen. Wie hoch liegt die Bergspitze über der Wasseroberfläche? (Skizze!)
- (2) Gegeben ist eine reguläre, 5-seitige Pyramide mit der Grundkante 8 cm und der Höhe 20 cm . Berechne den Winkel zwischen Grundfläche und Seitenkante! (Skizze!)
- (3) Gegeben ist ein Sehnenviereck mit $a = 5.0$, $b = 4.3$, $c = |\overline{CD}| = 5.4$, $\beta = 94^\circ$. Berechne den Umkreisradius! (Skizze!)
- (4) $\cos(x) = -\cos(2x) \rightsquigarrow$ Lösungen in $[0^\circ, 360^\circ]$?
- (5) $\sin^4(x) + \cos^4(x) = \frac{2}{3} \rightsquigarrow$ Lösungen in $[0^\circ, 360^\circ]$?

Viel Glück!

WIR

3.3 Test: Trigonometrie

II/19

Abschrift • Copie

- (1) In Mexiko steht in einer Ebene ein Vulkan. Beidseitig des Vulkans befinden sich Dörfer, zwischen denen keine direkte Sicht besteht. Um die Distanz zwischen den Kirchtürmen der beiden Dörfern zu vermessen, führen wir im ebenen Gelände zusätzliche Punkte ein. Damit erhalten wir ein konkaves Fünfeck $P_1P_2P_3P_4P_5$. P_1 bezeichnet den Kirchturm des Dorfes *Acapetl* und P_2 denjenigen des Dorfes *Bcapetl*. Indem wir das Fünfeck triangulieren erhalten wir:

$$a = \overline{P_1P_2}, \quad b = \overline{P_2P_3}, \quad b_1 = \overline{P_3P_1}, \quad c = \overline{P_3P_4}, \quad c_1 = \overline{P_4P_2}, \quad d = \overline{P_4P_5}, \quad d_1 = \overline{P_5P_3}, \quad h = \overline{P_1P_5}$$

Weiter führen wir Winkelbezeichnungen ein, wobei die Winkel nur absolut gehandhabt werden:

$$\alpha = \angle(a, b_1), \quad \beta_1 = \angle(a, b), \quad \beta = \angle(b, c_1),$$

$$\gamma_1 = \angle(b_1, c), \quad \gamma = \angle(c, d_1), \quad \delta_1 = \angle(c, d), \quad \delta = \angle(c, c_1)$$

Messresultate:

- | | |
|--|---|
| (a) $a = 1000.00 \text{ m}$ | (e) $\gamma = 30.06^\circ \text{ m}$ |
| (b) $\alpha = 28.49^\circ \text{ m}$ | (f) $\gamma_1 = 131.52^\circ \text{ m}$ |
| (c) $\beta = 19.12^\circ \text{ m}$ | (g) $\delta_1 = 118.35^\circ \text{ m}$ |
| (d) $\beta_1 = 125.44^\circ \text{ m}$ | |

Skizziere die Situation und berechne damit die Strecke $|h| = |\overline{P_1P_5}|$.

Formeln, Herleitungen, numerische Zwischenresultate gehören aufs Blatt!

(2) $2 \sin(x) + 0.5 \sin(2x) = 0 \rightsquigarrow$ Lösungen in $[0^\circ, 360^\circ]$?

(3) $\cos(x) - \tan(x) = 0 \rightsquigarrow$ Lösungen in $[0^\circ, 360^\circ]$?

Viel Glück!

WIR

3.4 Test: Vektorgeometrie, Goniometrie**II/35**

Abschrift • Copie

(1) Bezuglich der Orthonormalbasis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ sind die folgenden Vektoren gegeben:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Untersuche, ob die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} eine Basis bilden.
 - (b) Stelle, falls möglich, \vec{d} bezüglich \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} dar.
 - (c) Berechne die Länge von $3\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c} - \vec{d}$.
- (2)** Durch $A(3; 3; 3)$ und $B(5; -2; 6)$ ist eine Gerade gegeben.
Bestimme den Punkt $C(18; y; z)$ so, dass $C \in g$ gilt.
- (3)** Gesucht ist die kleinste Zahl a , so dass $|\sin(x) + \cos(x)| \leq a$ ist.
- (4)** Zwei Kreise mit dem Radius r haben den Mittelpunktabstand $\frac{r}{2}$.
Berechne den Flächeninhalt einer der so entstehenden Mondsichel.
- (5)** Vereinfache: $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{(\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta))}$
- (6)** Gegeben sind $g_1 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $g_2 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $g_3 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- (a) Berechne die Eckpunkte des entstehenden Dreiecks.
 - (b) Berechne den Flächeninhalt des entstehenden Dreiecks.
 - (c) Berechne die Innenwinkel des entstehenden Dreiecks.
 - (d) Entscheide rechnerisch, ob der Punkt $P(2; 3)$ im Innern des Dreiecks liegt.

Viel Glück!

WIR

3.5 Test: Vektorrechnung, Vektorgeometrie, Gleichungssysteme Goniometrie

II/38

Abschrift • Copie

- (1) Zeige rechnerisch: In einem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate über den Diagonalen gleich der Summe der Quadrate über den Seiten.
- (2) Seien $A = A(1; 2)$, $B = B(4; -1)$, $C = C(x; 8)$.
- Bestimme C so, dass A , B , C auf einer Geraden liegen.
 - Bestimme alsdann D so, dass (A, B) und (C, D) harmonische Punktpaare bilden.
- (3) Seien $A = A(1; 2)$, $B = B(4; -1)$, $C = C(6; 8)$.
- Berechne den Umfang des Dreiecks $\triangle ABC$.
 - Berechne den Schwerpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$.
 - Berechne den Umkreisradius des Dreiecks $\triangle ABC$.
- (4) Löse möglichst exakt:
- $$\begin{aligned}\sin^2(x) - 3 \cos^2(x) &= 0 \\ \sin(x) + 2 \sin(2x) &= 0\end{aligned}$$
- (5) $g : 10x + 7y + 16 = 0$ Kleinster Schnittwinkel der Geraden ≥ 0 ?
 $h : 12x - 17y - 14 = 0$
- (6) Seien $A = A(0; 0; 1)$, $B = B(2; -2; 4)$, $C = C(5; 1; 2)$, Ebene $\Phi = \Phi(A, B, C)$.
- Berechne die Durchstosspunkte der Achsen durch Φ .
 - Berechne den kürzesten Abstand von C auf \overline{AB} auf zwei Stellen hinter dem Komma genau.

Viel Glück!

WIR

3.6 Test: Vektorgeometrie, Goniometrie**II/39**

Abschrift • Copie

- (1) Gegeben sind die Punkte $A(0; 5; 2)$, $B(3; 2; 3)$, $C(6; -2; 0)$, $D(-3; -6; 1)$.
- Berechne im Tetraeder $ABCD$ die Länge der Höhe durch A .
 - Bestimme den Höhenfusspunkt.
- (2) Gegeben sind die Punkte A , B , C , D mit denselben Koordinaten wie in der Aufgabe oben.
 M_1 , M_2 , M_3 , M_4 seien die Mittelpunkte der Strecken \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DA} . Berechne die Winkel zwischen den Kanten im Viereck $M_1M_2M_3M_4$.
- (3) Bestimme die Lösungen der Gleichungen $\cos^2(x) + \cos(x) = \sin^2(x) + \sin(x)$.
- (4) Gegeben sind die Geraden $g : 3x - 4y + 12 = 0$ und $h : 5x + 12y - 1 = 0$ sowie die Distanz $d = 8$. Seien w_1 die Winkelhalbierende von g und h zum kleineren Winkel und w_2 die zum grösseren Winkel. Sei S der Schnittpunkt von g und h . Zu h wird im Abstand d von S eine Parallele gezogen. h_1 schneidet w_1 in P und w_2 in Q . Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks SPQ .

Viel Glück!

WIR

Kapitel • Chapitre 4

Serien mit „Logik“

4.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Stoffgebiete war nie vorhanden.

4.2 Test: Funktionen, Logik, Mengenlehre, Relationen, Zahlentheorie

I/25

Abschrift • Copie

(1) $(X \Rightarrow (Y \Rightarrow X \wedge \neg Z)) \dot{\vee} Z \rightsquigarrow$ Tautologie?

(2) Verwandle den folgenden Ausdruck in eine vollständige NF:

$$(\neg Z \Rightarrow X \wedge Y) \uparrow (X \Rightarrow \neg Z)$$

(3) Gegeben sind in der Universalmenge U drei Mengen A , B und C . Berechne, falls möglich, mit Hilfe der nachfolgenden Angaben die Mächtigkeit $|\overline{A \cup B \cup C}|$:

$$|U| = 100, |A| = 50, |B| = 30, |C| = 8, |A \cap B| = 11, |A \cap C| = 7, B \cap C = \{\}$$

(4) $\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 1), (1, 1), (2, 2), (1, 6), (6, 1), (6, 6), (2, 6), (6, 2), (3, 6), (6, 3), (3, 3), (2, 3), (3, 2), (1, 3), (3, 1), (4, 5), (4, 4), (4, 5), (5, 5), (6, 6), (1, 6), (5, 4)\}$.

Erstelle einen Graphen und beurteile, welche Eigenschaft diese Relation hat.

(5)

$$f(x) = \sqrt{(x-3)(x-4)(x+1)}, g(x) = x^{-5}, h(x) = x^{-6}$$

(a) Skizziere die Graphen.

(b) Ermittle den Definitionsbereich und den Wertebereich für f, g und h .(c) Wo ist f, g und h injektiv, surjektiv oder bijektiv?(6) Wieviele Schnittpunkte können n Kreise maximal haben?

(a) Formel?

(b) Induktionsbeweis?

(c) Was ändert sich, wenn man statt Kreise Ellipsen betrachtet?

(7) Man berechne mit Hilfe eines Algorithmus den g.g.T. und das k.g.V. von 123456 und 7890.

(8) (a) Gesucht sind Additions- und Multiplikationstabellen der Restklassen modulo 6.

(b) Löse mit Hilfe der eben aufgestellten Tabellen die folgende Gleichung:

$$[5]_6 + [5]_6 \cdot [x]_6 = [3]_6$$

Viel Glück!

WIR

4.3 Test: Funktionen, Logik, Mengenlehre, Relationen

I/26

Abschrift • Copie

(1) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow A \wedge \neg C)) \dot{\vee} C \rightsquigarrow$ Tautologie?

(2) Verwandle den folgenden Ausdruck in eine vollständige NF:

$$(\neg C \Rightarrow A \wedge B) \uparrow (A \Rightarrow \neg C)$$

(3) Erkläre, was ein „indirekter“ Beweis ist.

(4) Gegeben sind in der Universalmenge G zwei Mengen A und B .

(a) $|\overline{A \cup B}| = ?$ (Formel)

(b) Beweise die Formel durch Rückgriff auf die Logik: $A \cup B = \{x \in G \mid \dots\}$.

(5) Gegeben sind in der Universalmenge G drei Mengen A , B und C . Berechne, falls möglich, mit Hilfe der nachfolgenden Angaben die Mächtigkeit $|\overline{A \cup B \cup C}|$:

$$|U| = 100, |A| = 51, |B| = 30, |C| = 8, |A \cap B| = 11, |A \cap C| = 7, |B \cap C| = \{ \}$$

(6) $\mathcal{R} = \{(1, 3), (1, 2), (2, 1), (1, 1), (2, 2), (1, 6), (6, 1), (6.6), (2, 6), (6, 2), (3, 6), (6, 3), (3, 3), (2, 3), (4, 5), (3, 2), (1, 3), (3, 1), (4, 5), (4, 4), (4, 5), (5, 5), (6, 6), (1, 6), (5, 4)\}$.

Erstelle einen Graphen und beurteile, welche Eigenschaft diese Relation hat.

(7)

$$f_1(t) = \sqrt{(t-3)(t-4)(t+1)}, \quad f_2(t) = t^{-5}, \quad f_3(t) = t^{-6},$$

$$f_4(t) = \begin{cases} t^2 & t \text{ abbrechender Dezimalbruch} \\ \frac{1}{t} & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Skizziere die Graphen, falls möglich.

(b) Ermittle den Definitionsbereich und den Wertebereich für f_1, f_2, f_3 und f_4 .

(c) Wo ist f_1, f_2, f_3 und f_4 injektiv, surjektiv oder bijektiv?

Viel Glück!

WIR

4.4 Test: Logik, Mengenlehre, Relationen

I/27

Abschrift • Copie

Formeln, Methoden, Zwischenschritte, Herleitungen, Name und Gruppe müssen auf dem Blatt notiert sein!

- Formules, méthodes, résultats intermédiaires, déductions, nom, groupe doivent être visibles sur la feuille!

(1) $\neg A \vee \neg B \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \rightsquigarrow$ Wahrheitstafel? • Tableau de vérité?

(2) $[(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)] \wedge [(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)] \rightsquigarrow$ Vereinfachen! • Simplifier!

(3) $((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Rightarrow ((C \Rightarrow A) \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \equiv ? \rightsquigarrow$ Vereinfachen! • Simplifier!

(4) $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg A) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B) \rightsquigarrow$ Vereinfachen! • Simplifier!

(5) $a \Rightarrow \neg b, c \Rightarrow a, b \vdash \neg c \rightsquigarrow$ Korrekt? • Correct?

(6) $\neg C \Leftrightarrow (B \vee A) \rightsquigarrow$ Vollständige A.N.F.? • a.N.F. complète?

(7) $|A \cup B| = |A| + \dots ? \dots \rightsquigarrow$ „Euler–Venn“ verwenden! • Utiliser "Euler–Venn"!
Was passiert bei $A \cap B = \{\}?$ • Qu'est-ce qui se passe si $A \cap B = \{\}?$

(8) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \rightsquigarrow$ Beweis? • Preuve?
(Benutze die Definition von $A \times M.$) • (Utiliser la définition de $A \times M.$)

(9) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \rightsquigarrow$ Beweis? • Preuve?
(Benutze die Definition von $A \cup M.$) • (Utiliser la définition de $A \cup M.$)

(10) $M = \{x \in \mathbb{N} \mid (x \geq 7) \wedge (x < 20)\}, N = \{x \in \mathbb{N} \mid (x \leq 21) \wedge (x > 8)\}$

(a) $M \cup N = ?$

(c) $M \setminus N = ?$

(b) $M \cap N = ?$

(d) $M \Delta N = ?$

(11) $M = \{a, b, c\}, \mathcal{P}(M) = \{M, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{\}\}$

(a) Hasse–Diagramm von $\mathcal{P}(M)$? (12 Pfeile!)

• Diagramme de Hasse de $\mathcal{P}(M)$? (12 flèches!)

(b) $M = \{a, b, c, d\} \rightsquigarrow$ Hasse–Diagramm zu $x =$ Pfeilen, $x = ?$ • Diagramme de Hasse
à x flèches, $x = ?$ %

(12)

X	Y	Z	P
1	1	1	0
1	0	1	1
0	1	1	0
0	0	1	0
1	1	0	0
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	0	1

$P \equiv ?$ (Formel) • (Formule)

Viel Glück! — Bonne chance!

WIR

4.5 Test: Logik, Mengenlehre, Relationen

I/28

Abschrift • Copie

Formeln, Methoden, Zwischenschritte, Herleitungen, Name und Gruppe müssen auf dem Blatt notiert sein!

- Formules, méthodes, résultats intermédiaires, déductions, nom, groupe doivent être visibles sur la feuille!

(1) $A \wedge C \wedge (B \vee \neg A \vee \neg C) \rightsquigarrow$ Wahrheitstafel? • Tableau de vérité?

(2) $[\neg(A \wedge \neg B) \vee \neg B \vee A \vee \neg(A \wedge B)] \wedge B \rightsquigarrow$ Vereinfachen! • Simplifier!

(3) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \equiv ? \rightsquigarrow$ Vereinfachen! • Simplifier!

(4) $[(A \wedge C) \vee (B \wedge \neg C)] \Leftrightarrow [(\neg A \wedge B) \vee (\neg B \wedge \neg C)] \rightsquigarrow$ Vereinfachen! • Simplifier!

(5) $a \Rightarrow b, c \vee \neg b, \neg b \vdash \neg a \rightsquigarrow$ Korrekt? • Correct?

(6) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \rightsquigarrow$ Vollständige A.N.F.? • a.N.F. complète?

(7) $|A \cap B| = |A| + \dots ? \dots \rightsquigarrow$ „Euler–Venn“ verwenden! • Utiliser "Euler–Venn"!
Was passiert bei $A \cup B = A$? • Qu'est-ce qui se passe si $A \cup B = A$?

(8) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \rightsquigarrow$ Beweis? • Preuve?

(Benutze die Definition von $A \times M$.) • (Utiliser la définition de $A \times M$.)

(9) $A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C) \rightsquigarrow$ Beweis? • Preuve?

(Benutze die Definition von $A \cap M$.) • (Utiliser la définition de $A \cap M$.)

(10) $M = \{x \in \mathbb{N} \mid (x < 25) \wedge (x \geq 8)\}, N = \{x \in \mathbb{N} \mid (x > 9) \wedge (x \leq 24)\}$

(a) $M \cup N = ?$

(c) $M \setminus N = ?$

(b) $M \cap N = ?$

(d) $M \Delta N = ?$

(11) $M = \{1, 2, 3\}, \mathcal{P}(M) = \{M, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{\}\}$

(a) Hasse–Diagramm von $\mathcal{P}(M)$? (12 Pfeile!)

• Diagramme de Hasse de $\mathcal{P}(M)$? (12 flèches!)

(b) $M = \{1, 2, 3, 4\} \rightsquigarrow$ Hasse–Diagramm zu $x =$ Pfeilen, $x = ?$ • Diagramme de Hasse
à flèches, $x = ?$ %

(12)

X	Y	Z	P
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	1	1
1	1	0	0
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	0	1

$P \equiv ?$ (Formel) • (Formule)

Viel Glück! — Bonne chance!

WIR

4.6 Test: Logik, Mengenlehre, Relationen

I/29

Abschrift • Copie

- (1) $\neg A \vee (A \wedge C \wedge \neg B) \vee \neg C \rightsquigarrow$ Wahrheitstafel? Suche damit die einfachste vollständige kanonische Normalform (a.N.F. oder k.N.F.)
- (2) Vereinfache durch Äquivalenzumformung:
 - (a) $[(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)] \wedge [(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)]$
 - (b) $((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Rightarrow ((C \Rightarrow A) \Rightarrow (B \Rightarrow A))$
- (3) $a \Rightarrow \neg b, c \Rightarrow a, b \vdash \neg c \rightsquigarrow$ Ist dieser logische Schluss korrekt?
- (4) Beweise korrekt mit Hilfe der Definition: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- (5) Auf einem Schiff sind 109 Fergiengäste. 81 von ihnen lieben Spaghetti, 24 essen gerne Kalamares und 35 lieben schwarze Oliven. 11 von ihnen möchten Spaghetti und Kalamares, 35 hingegen Spaghetti mit Oliven, 7 aber wollen Kalamares und Oliven. Wieviele Teller müssen bereitgestellt werden, auf denen es alle drei angebotene Sorten zu essen gibt?
- (6) Ist die folgende Relation $R \subseteq \mathbb{Z}^2$ eine Äquivalenzrelation?

$$aRb : \Leftrightarrow (a^2 + b^2 \geq a \cdot b) \wedge \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

- (7) Gegeben ist eine Karte der Grösse einer Visitenkarte. Auf der vorderen Seite ist aufgedruckt: „Der Satz auf der Rückseite ist wahr“. Schaut man dann auf der Rückseite was dort steht, so findet man: „Der Satz auf der Vorderseite ist falsch“. Übersetze diesen Aussagenzusammenhang in die formale Logik und erkläre, wie sich das mit der Karte verhält, d.h. was man dort für eine logische Schlusskette finden kann.

Viel Glück!

WIR

4.7 Test: Funktionen, Logik, Mengenlehre, Relationen, Ungleichungen

I/30

Abschrift • Copie

I30 Algebra !!!

(1)

$$((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \vdash (B \Rightarrow (C \Rightarrow A))$$

- (a) Ist dieser logische Schluss korrekt?
- (b) Falls die letzte Frage mit nein beantwortet werden musste, so soll die eine kNF oder aNF gefunden werden (davon die einfachste Form).

(2) Der folgende Ausdruck ist so umzuformen, dass er möglichst kurz geschrieben werden kann:

$$\neg(\neg A \Rightarrow (\neg(A \wedge \neg B)))$$

(3) Gegeben sind die Intervalle $A = [2, 3]$, $B = [3, 5]$, $C = (5, 10)$. Beweise oder widerlege:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup A \times C$$

(4)

$$\mathcal{R} = \{(1, 2), (1, 1), (3, 4), (4, 5), (2, 1), (1, 1), (3, 3), (5, 4), (4, 4), (4, 3), (5, 5), (2, 2)\}$$

Erstelle einen Graphen und beurteile, um welchen Relationstyp es sich handelt.

(5)

$$a \mathcal{R} b : \Leftrightarrow a^2 \geq \frac{1}{2}, \quad a, b \in (1, \infty) \rightsquigarrow \text{Relationstyp?}$$

(6) Skizziere den Graphen und bestimme den Definitionsbereich D_f :

$$f(x) = y = \frac{2x}{x^2 + 2} + \frac{1}{2}x - 1$$

(7) Skizziere den Graphen:

$$f(x) = (\sin(|x|) + |[x]|) \cdot \operatorname{sgn}(x), \quad x \in [-\pi, \pi]$$

(8) Gegeben ist der Kettenbruch $x = \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{2 + \ddots}}}$. \rightsquigarrow Frage: $x \in \mathbb{Q}$?

(9)

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 999 = ?$$

%

(10)

$$f(n) = \frac{1}{n^2 + 9} + 1, \quad D_f = \mathbb{N}$$

- (a) f injektiv?
- (b) $W_f = ?$
- (c) f bijektiv bezüglich W_f ?

(11) Löse:

$$(x - 2)(x - 3) \geq (x + 1)(x + 2)$$

(12)

$$I_1 = (0, 7), \quad I_2 = [1.5, 5], \quad I_3 = (3, 9] \Rightarrow I = I_1 \setminus (I_2 \cap I_3) = ?, \quad |I| = ?$$

Viel Glück!

WIR

4.8 Test: Logik, Mengenlehre**I/31**

Abschrift • Copie

$$(1) ((A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (\neg A \wedge B \wedge C)$$

- (a) Stelle die Wahrheitstabelle auf!
- (b) Suche die zugehörige k.N.F.!
- (c) Suche die zugehörige a.N.F.!

(2) Vereinfache mit Hilfe von Äquivalenzumformungen:

$$[(\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg B \vee C)] \Leftrightarrow [(A \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg C)]$$

(3) Beweise korrekt mit Hilfe der Definitionen:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(4) In den letzten drei Wochen haben sich bei der Polizei 101 Personen Autodiebstähle angemeldet. 45 fahren BMW, 50 VW und 31 AX. 18 melden gleich zwei Diebstähle, nämlich BMW und VW an, 15 melden BMW und AX an und 8 VW und AX. Der Polizei ist bekannt, dass in ihrem Einzugsgebiet 5 Personen wohnen, welche mehr als zwei Autos besitzen. Geht es hier mit rechten Dingen zu?

Viel Glück!

WIR

4.9 Test: Logik, Mengenlehre, Relationen, Funktionen, Zahlentheorie

I/35

Abschrift • Copie

(1) $((x = y) \Rightarrow (y = z)) \Rightarrow (a < z) \vdash ((a < z) \Rightarrow ((z = y) \Rightarrow (y = x))) \rightsquigarrow$ korrekt?

(2)

X	Y	Z	W	$f(X, Y, Z, W)$
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	0
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

$f(X, Y, Z, W) \equiv ?$ (a.N.F.)

- (3) In einem Stadion sind 548 Personen. 100 von ihnen haben einen CH-Pass, 200 einen F-Pass, 300 einen I-Pass. 30 haben sogar einen CH- und einen F-Pass, 15 einen F- und einen I-Pass, 20 einen CH- und einen I-Pass. Wieviele haben alle 3 Pässe? (Sofern die Konstellation logisch korrekt ist.)
- (4) Beweise oder widerlege exakt: $A \times (A \cap B) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
- (5) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{10, 15\}$, $C = \mathbb{N} \Rightarrow (A \times B) \cap (A \times C) = ?$
- (6) $f(x) = x^2 + 2x - 3$, $f(x) = \sqrt{x+2} - 2$, $h(x) = 3 \sin(x^2)$.
- (a) Wo ist $f(g(x))$ bijektiv?
- (b) Berechne $[(f \circ g) \circ h](x)$
- (7) Kreativ: Stelle $[a]_3 \cdot [b]_3 := [a \cdot b]_3 = [x]_3$ in einer Tabelle dar.
- (8) $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq ab$, $a, b \in \mathbb{Z}$ Äquivalenzrelation?
- (9) Wo gilt $-2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - 6x + 5$?

Viel Glück!

WIR

4.10 Test: Kombinatorik, Logik, Mengenlehre, Zahlentheorie

I/40

Abschrift • Copie

- (1)** Beweise mit Hilfe vollständiger Induktion:

$$(q^n - 1) = (q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q^2 + q + 1) \cdot (q - 1)$$

- (2)** In einem kartesischen Koordinatensystem sind auf der x -Achse die Punkte $P_1(1; 0), P_2(2; 0), \dots, P_n(n; 0)$ und auf der y -Achse die Punkte $Q_1(0; 1), Q_2(0; 2), \dots, Q_n(0; n)$ gegeben. Damit werden folgende Geraden gezeichnet: $g_1 = \overline{P_1 Q_n}, g_2 = \overline{P_2 Q_{n-1}}, g_3 = \overline{P_3 Q_{n-2}}, \dots, g_n = \overline{P_n Q_1}$.
- (a) Skizziere die Situation.
 - (b) Wieviele geschlossene Flächen entstehen durch eine solche Konstruktion mit n Geraden g_k und den beiden Achsen? Beweise die Vermutung!
 - (c) Wieviele Schnittpunkte inklusive Achsenschnittpunkte entstehen total?
- (3)** Gegeben ist eine Tolneiter mit 8 Tönen. Der Komponist will 4 Takte mit je 8 Achteltonen erzeugen. Wieviele verschiedene Kompositionen ohne Pausen sind möglich?
- (4)** Ist der Ausdruck $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow \neg A \Rightarrow X$ eine Tautologie, eine Kontraposition oder keines von beiden?
- (5)** Ermittle die Anzahl Teilmengen von U :

$$U = \{\{A\}, \{A, \{A\}\}, \{A, A, \{A\}, \{A\}\} \cup \{\{A\}\}\}$$

Viel Glück!

4.11 Test: Grundlagen, Logik, Mengenlehre, Zahlentheorie

III/39

Abschrift • Copie

(1) Aus einer ehemaligen Aufnahmeprüfung:

- (a) Zentrisch zum Ursprung in einem kartesischen Koordinatensystem ist ein Kreis (Kreislinie) mit Radius R gegeben. Mit Mittelpunkt M_2 auf der negativen x -Achse ist dazu noch ein zweiter Kreis gegeben mit Radius $r = \frac{R}{2}$. Dieser zweite Kreis geht durch den Ursprung. Durch M_2 geht weiter noch eine Gerade g senkrecht zur x -Achse. A ist die Fläche, welche gebildet wird von den Punkten des ersten grösseren Kreises ohne die Punkte links von g und ebenso ohne die Punkte des zweiten Kreises. Berechne den Flächeninhalt von A .

- (b) Vereinfache von Hand:

$$\left((a-b) : \left(\frac{1}{a+b} \right) : \left(\frac{a+1}{b} - \frac{b+1}{a} \right) : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a \cdot b} \right) \right)$$

(2) $|A| = 99$, $|B| = 98$, $|C| = 97$, $|A \cap B| = 30$, $|A \cap C| = 27$, $|B \cap C| = 28$, $|A \cap B \cap C| = 26$.

- (a) $G = |A \cup B \cup C| = ?$
 (b) $|(A \cap B) \setminus (A \cap B \cap C)| = ?$

(3) Zeige oder widerlege: $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

- (4) (a) Beweise oder widerlege: $\forall_{l \in \mathbb{N}} : k \mid (k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3)$.
 (b) Entwickle eine Formel für die maximale Anzahl der Schnittpunkte von n Kreisen und beweise diese Formel.

(5) $a, b \in \mathbb{Z}$. $(a \sim b) \Leftrightarrow (a^2 + b^2 \geq a \cdot b) \rightsquigarrow$ Äquivalenzrelation?

(6) Betrachte $((X \Rightarrow Z) \vee (Y \Rightarrow Z)) \Rightarrow (\neg X \wedge Y \Rightarrow Z) \equiv f(X, Y, Z)$.

- (a) Wahrheitstafel von $f(X, Y, Z)$?
 (b) A.n.F oder k.n.F. von $f(X, Y, Z)$? (Einfachere Variante geben!)

(7) Erstelle das Hasse-Diagramm der Menge $\{a, b, c, d\}$. In wievielen Teilmengen ist das Element a enthalten?

Kann man damit eine Formel für die verallgemeinerte Situation $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ finden?

(8) Löse folgende Kongruenzgleichungen:

(a) $16 \equiv 22 \cdot x \pmod{30}$

(b) $1 \equiv 18 \cdot x \pmod{53}$

(c)
$$\begin{array}{rcl} [4]_{12} \cdot [x]_{12} - [y]_{12} & = & [8]_{12} \\ [2]_{12} \cdot [x]_{12} - [y]_{12} & = & [10]_{12} \end{array} \quad \text{System!} \quad \%$$

(9) $a \Rightarrow \neg b \wedge c \Rightarrow a \wedge b \vdash \neg c \rightsquigarrow$ korrekter Schluss?

(10) Vereinfache:

$$D \vee \neg D \wedge (A \wedge B \wedge C \vee \neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (D \vee D \wedge E) \wedge (D \vee E \wedge F) \vee (A \wedge \neg D)$$

Viel Glück!

4.12 Test: Determinanten und Matrizen, Eigenwerttheorie, komplexe Zahlen

III/41

Abschrift • Copie

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- (a) Berechne die Determinante von A .
- (b) Berechne die Spur von A .
- (c) Berechne die Eigenwerte von A .
- (d) Berechne die Eigenvektoren von A .
- (e) Berechne, falls vorhanden, die Hauptvektoren \vec{y} von A .

Hinweis: Eigenvektoren $\rightsquigarrow A \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x}$ oder $(A - \lambda E) \vec{y} = \vec{0}$.
 Hauptvektoren $\rightsquigarrow (A - \lambda E)^2 \vec{x} = \vec{0}$.

(2)

$$A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Berechne die Determinante von A .
- (b) Kann α so gewählt werden, dass $\mathbb{L} = \{\}$ ist? — ($\alpha = ?$)
- (c) Wie gross ist z für $x = \frac{1}{8}$? (Falls lösbar.)

(3)

$$\frac{\sqrt{2}(z-i)^5 - \sqrt{2}}{1+i} = 1-i$$

Leite die Lösungen her und skizziere die Lösungsmenge!

(4)

$$\begin{pmatrix} k & -1 & 2 \\ 1 & k & -2 \\ -2 & 2 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Untersuche die Abhängigkeit der Eigenwerte von k !

(5)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = X \cdot D \cdot X^{-1} \quad (\text{Diagonalisierung})$$

- (a) Berechne D und $X = (\vec{x}_1 \vec{x}_2)$, \vec{x}_1 und \vec{x}_2 normiert.
- (b) Berechne A^{100} .
- (c) Berechne $A \cdot \vec{y}(t)$, $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Viel Glück!

WIR

Kapitel • Chapitre 5

Serien mit „Mengenlehre“

5.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Stoffgebiete war nie vorhanden.

5.2 Test: Ungleichungen, Ungleichungssysteme, Mengenlehre, Zahlentheorie, Funktionen im \mathbb{R}^1

I/01

Abschrift • Copie

$$(1) \quad x = \frac{-1}{2 + \frac{-1}{2 + \frac{-1}{2 + \ddots}}} \quad \begin{array}{l} (\text{a}) \quad x = ? \\ (\text{b}) \quad x \in \mathbb{Q} ? \end{array}$$

$$(2) \quad \text{Skizziere } \mathbb{L} ! \bullet \text{ Esquisse de } \mathbb{L} \quad \rightsquigarrow \left| \begin{array}{rcl} 3x + 2y & \geq & 6 \\ 2x - 3y & \leq & 3 \end{array} \right|$$

$$(3) \quad x + 1 \geq \cos(x) - 1 \rightsquigarrow \mathbb{L} = ?$$

$$(4) \quad \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{L}_1: & x^2 + x - 2 & \leq 0 \\ \mathbb{L}_2: & -x^2 + x + 2 & \geq 0 \end{array} \right| \rightsquigarrow \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = ?$$

$$(5) \quad 2x^2 - 5x - 1 \geq x + 10 \rightsquigarrow \mathbb{L} = ?$$

$$(6) \quad |A| = 99, \quad |B| = 98, \quad |C| = 97, \quad |A \cap B| = 30, \quad |A \cap C| = 27, \quad |B \cap C| = 28, \quad |A \cap B \cap C| = 26.$$

$$(\text{a}) \quad |A \cup B \cup C| = ?$$

$$(\text{b}) \quad |(A \cap B) \setminus (A \cap B \cap C)| = ?$$

$$(7) \quad (A \cup B) \cap C = \dots \cup \dots \rightsquigarrow \text{Durch eine Zeichnung erklären!} \bullet \text{Expliquer par un dessin!}$$

$$(8) \quad (\text{a}) \quad f(x) = x^2 - |[x]| \rightsquigarrow \text{Skizze!} \bullet \text{Esquisse!}$$

$$(\text{b}) \quad \text{Löse:} \bullet \text{Résoudre:} \quad x^2 - |[x]| = 1$$

$$(9) \quad (\text{a}) \quad g(x) = (x+1) \operatorname{sgn}(x) \rightsquigarrow \text{Skizze von } g! \bullet \text{Esquisse de } g!$$

$$(\text{b}) \quad (x+1) \operatorname{sgn}(x) = 0 \rightsquigarrow x = ?$$

$$(\text{c}) \quad (x+1) \operatorname{sgn}(x) = -2 \rightsquigarrow x = ?$$

$$(10) \quad f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x), \quad g(x) = \sin(x) \cdot x^2$$

$$(\text{a}) \quad \text{Skizze!} \bullet \text{Esquisse!}$$

$$(\text{b}) \quad f(x) = g(x) \rightsquigarrow x = ?$$

Viel Glück!

WIR

5.3 Test: Funktionen im \mathbb{R}^1 , Mengenlehre, Ungleichungssysteme I/03

Abschrift • Copie

- (1) $A = [-11, 22], B = (18, 60], C = \mathbb{N}_0, D = (5, 22) \rightsquigarrow ((A \cup B) \cap C) \setminus (D \cap A) = ?$
- (2) Gebe eine Übersicht über die Teilmengen von \mathbb{R} , welche in unserer Mathematik wichtig sind. • *Donner une vue d'ensemble des sous-ensembles de \mathbb{R} qui sont importants en mathématique.*
- (3) $y^2 - 3y - 4 = x \rightsquigarrow$ Lässt sich y als $f(x)$ darstellen? (Wie, wo?)
• *Est-ce qu'on peut représenter y comme $f(x)$? (Comment, où?)*

$$(4) \left| \begin{array}{rcl} -x + y & \leq & 3 \\ 3x - y & \geq & -10 \\ 2x + y & = & k \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} \text{Wie gross kann } x \text{ maximal sein? (Skizze!)} \\ \bullet \text{ Quelle valeur maximale est-ce que } k \text{ peut atteindre?} \\ \quad (\text{Esquisse!}) \end{array}$$

- (5)
- | | |
|---------------------------------------|--|
| (a) $f_1(x) = x^2$ | (e) $f_5(x) = a x + b$ |
| (b) $f_2(x) = e^{-x^2}$ | (f) $f_6(x) = 3 \cos(2x - 4) + 8$ |
| (c) $f_3(x) = e^x$ | (g) $f_7(x) = \frac{2}{(\frac{x}{2})^2 + 3}$ |
| (d) $f_4(x) = \cos \frac{x}{\pi} + 4$ | |

Welche Funktion ist • *Quelle fonction est*

- | | |
|--------------------------------------|---------------------------------|
| (a) monoton? • <i>monotone?</i> | (d) gerade? • <i>paire?</i> |
| (b) beschränkt? • <i>borneeée?</i> | (e) ungerade? • <i>impaire?</i> |
| (c) periodisch? • <i>périodique?</i> | |

- (6) Pole und Asymptoten? • *Donner les pôles et les asymptotes:*

$$(a) h_1(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad (c) h_3(x) = \frac{1}{2^x - 1} + 2x - 1$$

$$(b) h_2(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{1} \quad (d) h_1(x) = \frac{1}{x^2 - 1} - x^2 + 1$$

- (7) $f(x) = \frac{1}{x} \rightsquigarrow$ Rechteck = • *Rectangle* = Fig. $\left((0; 0), (1; 1), (x; f(x)), (0; f(x)) \right)$.
 $R(x) =$ Flächeninhalt von Fig. = ? • *R(x) = Surface de Fig. = ?* %

(8) (a) $f(x) = e^x, \ f(x) = \ln(x)$

i. $f(g(x)) = ?$ iii. $f(f(x)) = ?$

ii. $g(f(x)) = ?$ iv. $g(g(x)) = ?$

(b) $f_1(x) = x, \ f_2(x) = x^2, \ f_3(x) = \sqrt{x}$

i. $f_1(f_2(f_3(x))) = ?$ iv. $f_2(f_3(f_1(x))) = ?$

ii. $f_1(f_3(f_2(x))) = ?$ v. $f_3(f_1(f_2(x))) = ?$

iii. $f_2(f_1(f_3(x))) = ?$ vi. $f_3(f_2(f_1(x))) = ?$

(9) $F(x) = \cos(2 \sin(e^{2x} - 1) + 1) + e^{2x}, \ g(x) = e^{2x-1}, \ F(x) = f(g(x))$

$$\Rightarrow f(x) = ?$$

(10) $M_1 = \{(x, y) \mid y = f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 4\}, \ M_2 = \{(x, y) \mid y = f_2(x) = 3x + 6\}$

$$\Rightarrow M_1 \cap M_2 = ?$$

Viel Glück! — Bonne chance!

5.4 Test: Funktionen, Logik, Mengenlehre, Relationen, Zahlentheorie

I/25

Abschrift • Copie

(1) $(X \Rightarrow (Y \Rightarrow X \wedge \neg Z)) \dot{\vee} Z \rightsquigarrow$ Tautologie?

(2) Verwandle den folgenden Ausdruck in eine vollständige NF:

$$(\neg Z \Rightarrow X \wedge Y) \uparrow (X \Rightarrow \neg Z)$$

(3) Gegeben sind in der Universalmenge U drei Mengen A , B und C . Berechne, falls möglich, mit Hilfe der nachfolgenden Angaben die Mächtigkeit $|\overline{A \cup B \cup C}|$:

$$|U| = 100, |A| = 50, |B| = 30, |C| = 8, |A \cap B| = 11, |A \cap C| = 7, B \cap C = \{\}$$

(4) $\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 1), (1, 1), (2, 2), (1, 6), (6, 1), (6, 6), (2, 6), (6, 2), (3, 6), (6, 3), (3, 3), (2, 3), (3, 2), (1, 3), (3, 1), (4, 5), (4, 4), (4, 5), (5, 5), (6, 6), (1, 6), (5, 4)\}$.

Erstelle einen Graphen und beurteile, welche Eigenschaft diese Relation hat.

(5)

$$f(x) = \sqrt{(x-3)(x-4)(x+1)}, g(x) = x^{-5}, h(x) = x^{-6}$$

(a) Skizziere die Graphen.

(b) Ermittle den Definitionsbereich und den Wertebereich für f, g und h .(c) Wo ist f, g und h injektiv, surjektiv oder bijektiv?(6) Wieviele Schnittpunkte können n Kreise maximal haben?

(a) Formel?

(b) Induktionsbeweis?

(c) Was ändert sich, wenn man statt Kreise Ellipsen betrachtet?

(7) Man berechne mit Hilfe eines Algorithmus den g.g.T. und das k.g.V. von 123456 und 7890.

(8) (a) Gesucht sind Additions- und Multiplikationstabellen der Restklassen modulo 6.

(b) Löse mit Hilfe der eben aufgestellten Tabellen die folgende Gleichung:

$$[5]_6 + [5]_6 \cdot [x]_6 = [3]_6$$

Viel Glück!

WIR

5.5 Test: Funktionen, Logik, Mengenlehre, Relationen

I/26

Abschrift • Copie

(1) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow A \wedge \neg C)) \dot{\vee} C \rightsquigarrow$ Tautologie?

(2) Verwandle den folgenden Ausdruck in eine vollständige NF:

$$(\neg C \Rightarrow A \wedge B) \uparrow (A \Rightarrow \neg C)$$

(3) Erkläre, was ein „indirekter“ Beweis ist.

(4) Gegeben sind in der Universalmenge G zwei Mengen A und B .

(a) $|\overline{A \cup B}| = ?$ (Formel)

(b) Beweise die Formel durch Rückgriff auf die Logik: $A \cup B = \{x \in G \mid \dots\}$.

(5) Gegeben sind in der Universalmenge G drei Mengen A , B und C . Berechne, falls möglich, mit Hilfe der nachfolgenden Angaben die Mächtigkeit $|\overline{A \cup B \cup C}|$:

$$|U| = 100, |A| = 51, |B| = 30, |C| = 8, |A \cap B| = 11, |A \cap C| = 7, |B \cap C| = \{ \}$$

(6) $\mathcal{R} = \{(1, 3), (1, 2), (2, 1), (1, 1), (2, 2), (1, 6), (6, 1), (6.6), (2, 6), (6, 2), (3, 6), (6, 3), (3, 3), (2, 3), (4, 5), (3, 2), (1, 3), (3, 1), (4, 5), (4, 4), (4, 5), (5, 5), (6, 6), (1, 6), (5, 4)\}$.

Erstelle einen Graphen und beurteile, welche Eigenschaft diese Relation hat.

(7)

$$f_1(t) = \sqrt{(t-3)(t-4)(t+1)}, \quad f_2(t) = t^{-5}, \quad f_3(t) = t^{-6},$$

$$f_4(t) = \begin{cases} t^2 & t \text{ abbrechender Dezimalbruch} \\ \frac{1}{t} & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Skizziere die Graphen, falls möglich.

(b) Ermittle den Definitionsbereich und den Wertebereich für f_1, f_2, f_3 und f_4 .

(c) Wo ist f_1, f_2, f_3 und f_4 injektiv, surjektiv oder bijektiv?

Viel Glück!

WIR

5.6 Test: Logik, Mengenlehre, Relationen

I/27

Abschrift • Copie

Formeln, Methoden, Zwischenschritte, Herleitungen, Name und Gruppe müssen auf dem Blatt notiert sein!

- Formules, méthodes, résultats intermédiaires, déductions, nom, groupe doivent être visibles sur la feuille!

(1) $\neg A \vee \neg B \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \rightsquigarrow$ Wahrheitstafel? • Tableau de vérité?

(2) $[(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)] \wedge [(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)] \rightsquigarrow$ Vereinfachen! • Simplifier!

(3) $((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Rightarrow ((C \Rightarrow A) \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \equiv ? \rightsquigarrow$ Vereinfachen! • Simplifier!

(4) $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg A) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B) \rightsquigarrow$ Vereinfachen! • Simplifier!

(5) $a \Rightarrow \neg b, c \Rightarrow a, b \vdash \neg c \rightsquigarrow$ Korrekt? • Correct?

(6) $\neg C \Leftrightarrow (B \vee A) \rightsquigarrow$ Vollständige A.N.F.? • a.N.F. complète?

(7) $|A \cup B| = |A| + \dots ? \dots \rightsquigarrow$ „Euler–Venn“ verwenden! • Utiliser "Euler–Venn"!
Was passiert bei $A \cap B = \{\}?$ • Qu'est-ce qui se passe si $A \cap B = \{\}?$

(8) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \rightsquigarrow$ Beweis? • Preuve?
(Benutze die Definition von $A \times M.$) • (Utiliser la définition de $A \times M.$)

(9) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \rightsquigarrow$ Beweis? • Preuve?
(Benutze die Definition von $A \cup M.$) • (Utiliser la définition de $A \cup M.$)

(10) $M = \{x \in \mathbb{N} \mid (x \geq 7) \wedge (x < 20)\}, N = \{x \in \mathbb{N} \mid (x \leq 21) \wedge (x > 8)\}$

(a) $M \cup N = ?$

(c) $M \setminus N = ?$

(b) $M \cap N = ?$

(d) $M \Delta N = ?$

(11) $M = \{a, b, c\}, \mathcal{P}(M) = \{M, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{\}\}$

(a) Hasse–Diagramm von $\mathcal{P}(M)?$ (12 Pfeile!)

• Diagramme de Hasse de $\mathcal{P}(M)?$ (12 flèches!)

(b) $M = \{a, b, c, d\} \rightsquigarrow$ Hasse–Diagramm zu $x =$ Pfeilen, $x = ?$ • Diagramme de Hasse
à x flèches, $x = ?$ %

(12)

X	Y	Z	P
1	1	1	0
1	0	1	1
0	1	1	0
0	0	1	0
1	1	0	0
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	0	1

$$P \equiv ? \text{ (Formel)} \bullet (\text{Formule})$$

Viel Glück! — Bonne chance!

WIR

5.7 Test: Logik, Mengenlehre, Relationen

I/28

Abschrift • Copie

Formeln, Methoden, Zwischenschritte, Herleitungen, Name und Gruppe müssen auf dem Blatt notiert sein!

- Formules, méthodes, résultats intermédiaires, déductions, nom, groupe doivent être visibles sur la feuille!

(1) $A \wedge C \wedge (B \vee \neg A \vee \neg C) \rightsquigarrow$ Wahrheitstafel? • Tableau de vérité?

(2) $[\neg(A \wedge \neg B) \vee \neg B \vee A \vee \neg(A \wedge B)] \wedge B \rightsquigarrow$ Vereinfachen! • Simplifier!

(3) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \equiv ? \rightsquigarrow$ Vereinfachen! • Simplifier!

(4) $[(A \wedge C) \vee (B \wedge \neg C)] \Leftrightarrow [(\neg A \wedge B) \vee (\neg B \wedge \neg C)] \rightsquigarrow$ Vereinfachen! • Simplifier!

(5) $a \Rightarrow b, c \vee \neg b, \neg b \vdash \neg a \rightsquigarrow$ Korrekt? • Correct?

(6) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \rightsquigarrow$ Vollständige A.N.F.? • a.N.F. complète?

(7) $|A \cap B| = |A| + \dots ? \dots \rightsquigarrow$ „Euler–Venn“ verwenden! • Utiliser "Euler–Venn"!
Was passiert bei $A \cup B = A$? • Qu'est-ce qui se passe si $A \cup B = A$?

(8) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \rightsquigarrow$ Beweis? • Preuve?

(Benutze die Definition von $A \times M$.) • (Utiliser la définition de $A \times M$.)

(9) $A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C) \rightsquigarrow$ Beweis? • Preuve?

(Benutze die Definition von $A \cap M$.) • (Utiliser la définition de $A \cap M$.)

(10) $M = \{x \in \mathbb{N} \mid (x < 25) \wedge (x \geq 8)\}, N = \{x \in \mathbb{N} \mid (x > 9) \wedge (x \leq 24)\}$

(a) $M \cup N = ?$

(c) $M \setminus N = ?$

(b) $M \cap N = ?$

(d) $M \Delta N = ?$

(11) $M = \{1, 2, 3\}, \mathcal{P}(M) = \{M, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{\}\}$

(a) Hasse–Diagramm von $\mathcal{P}(M)$? (12 Pfeile!)

• Diagramme de Hasse de $\mathcal{P}(M)$? (12 flèches!)

(b) $M = \{1, 2, 3, 4\} \rightsquigarrow$ Hasse–Diagramm zu $x =$ Pfeilen, $x = ?$ • Diagramme de Hasse
à flèches, $x = ?$ %

(12)

X	Y	Z	P
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	1	1
1	1	0	0
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	0	1

$$P \equiv ? \text{ (Formel)} \bullet (\text{Formule})$$

Viel Glück! — Bonne chance!

WIR

5.8 Test: Logik, Mengenlehre, Relationen

I/29

Abschrift • Copie

- (1) $\neg A \vee (A \wedge C \wedge \neg B) \vee \neg C \rightsquigarrow$ Wahrheitstafel? Suche damit die einfachste vollständige kanonische Normalform (a.N.F. oder k.N.F.)
- (2) Vereinfache durch Äquivalenzumformung:
 - (a) $[(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)] \wedge [(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)]$
 - (b) $((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Rightarrow ((C \Rightarrow A) \Rightarrow (B \Rightarrow A))$
- (3) $a \Rightarrow \neg b, c \Rightarrow a, b \vdash \neg c \rightsquigarrow$ Ist dieser logische Schluss korrekt?
- (4) Beweise korrekt mit Hilfe der Definition: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- (5) Auf einem Schiff sind 109 Fergiengäste. 81 von ihnen lieben Spaghetti, 24 essen gerne Kalamares und 35 lieben schwarze Oliven. 11 von ihnen möchten Spaghetti und Kalamares, 35 hingegen Spaghetti mit Oliven, 7 aber wollen Kalamares und Oliven. Wieviele Teller müssen bereitgestellt werden, auf denen es alle drei angebotene Sorten zu essen gibt?
- (6) Ist die folgende Relation $R \subseteq \mathbb{Z}^2$ eine Äquivalenzrelation?

$$aRb : \Leftrightarrow (a^2 + b^2 \geq a \cdot b) \wedge \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

- (7) Gegeben ist eine Karte der Grösse einer Visitenkarte. Auf der vorderen Seite ist aufgedruckt: „Der Satz auf der Rückseite ist wahr“. Schaut man dann auf der Rückseite was dort steht, so findet man: „Der Satz auf der Vorderseite ist falsch“. Übersetze diesen Aussagenzusammenhang in die formale Logik und erkläre, wie sich das mit der Karte verhält, d.h. was man dort für eine logische Schlusskette finden kann.

Viel Glück!

WIR

5.9 Test: Funktionen, Logik, Mengenlehre, Relationen, Ungleichungen

I/30

Abschrift • Copie

I30 Algebra !!!

(1)

$$((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \vdash (B \Rightarrow (C \Rightarrow A))$$

- (a) Ist dieser logische Schluss korrekt?
- (b) Falls die letzte Frage mit nein beantwortet werden musste, so soll die eine kNF oder aNF gefunden werden (davon die einfachste Form).

(2) Der folgende Ausdruck ist so umzuformen, dass er möglichst kurz geschrieben werden kann:

$$\neg(\neg A \Rightarrow (\neg(A \wedge \neg B)))$$

(3) Gegeben sind die Intervalle $A = [2, 3]$, $B = [3, 5]$, $C = (5, 10)$. Beweise oder widerlege:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup A \times C$$

(4)

$$\mathcal{R} = \{(1, 2), (1, 1), (3, 4), (4, 5), (2, 1), (1, 1), (3, 3), (5, 4), (4, 4), (4, 3), (5, 5), (2, 2)\}$$

Erstelle einen Graphen und beurteile, um welchen Relationstyp es sich handelt.

(5)

$$a \mathcal{R} b : \Leftrightarrow a^2 \geq \frac{1}{2}, \quad a, b \in (1, \infty) \rightsquigarrow \text{Relationstyp?}$$

(6) Skizziere den Graphen und bestimme den Definitionsbereich D_f :

$$f(x) = y = \frac{2x}{x^2 + 2} + \frac{1}{2}x - 1$$

(7) Skizziere den Graphen:

$$f(x) = (\sin(|x|) + |[x]|) \cdot \operatorname{sgn}(x), \quad x \in [-\pi, \pi]$$

(8) Gegeben ist der Kettenbruch $x = \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{2 + \ddots}}}$. \rightsquigarrow Frage: $x \in \mathbb{Q}$?

(9)

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 999 = ?$$

%

(10)

$$f(n) = \frac{1}{n^2 + 9} + 1, \quad D_f = \mathbb{N}$$

- (a) f injektiv?
- (b) $W_f = ?$
- (c) f bijektiv bezüglich W_f ?

(11) Löse:

$$(x - 2)(x - 3) \geq (x + 1)(x + 2)$$

(12)

$$I_1 = (0, 7), \quad I_2 = [1.5, 5], \quad I_3 = (3, 9] \Rightarrow I = I_1 \setminus (I_2 \cap I_3) = ?, \quad |I| = ?$$

Viel Glück!

5.10 Test: Logik, Mengenlehre**I/31**

Abschrift • Copie

$$(1) ((A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (\neg A \wedge B \wedge C)$$

- (a) Stelle die Wahrheitstabelle auf!
- (b) Suche die zugehörige k.N.F.!
- (c) Suche die zugehörige a.N.F.!

(2) Vereinfache mit Hilfe von Äquivalenzumformungen:

$$[(\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg B \vee C)] \Leftrightarrow [(A \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg C)]$$

(3) Beweise korrekt mit Hilfe der Definitionen:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(4) In den letzten drei Wochen haben sich bei der Polizei 101 Personen Autodiebstähle angemeldet. 45 fahren BMW, 50 VW und 31 AX. 18 melden gleich zwei Diebstähle, nämlich BMW und VW an, 15 melden BMW und AX an und 8 VW und AX. Der Polizei ist bekannt, dass in ihrem Einzugsgebiet 5 Personen wohnen, welche mehr als zwei Autos besitzen. Geht es hier mit rechten Dingen zu?

Viel Glück!

WIR

5.11 Test: Logik, Mengenlehre, Relationen, Funktionen, Zahlentheorie

I/35

Abschrift • Copie

(1) $((x = y) \Rightarrow (y = z)) \Rightarrow (a < z) \vdash ((a < z) \Rightarrow ((z = y) \Rightarrow (y = x))) \rightsquigarrow$ korrekt?

(2)

X	Y	Z	W	$f(X, Y, Z, W)$
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	0
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

$f(X, Y, Z, W) \equiv ?$ (a.N.F.)

- (3) In einem Stadion sind 548 Personen. 100 von ihnen haben einen CH-Pass, 200 einen F-Pass, 300 einen I-Pass. 30 haben sogar einen CH- und einen F-Pass, 15 einen F- und einen I-Pass, 20 einen CH- und einen I-Pass. Wieviele haben alle 3 Pässe? (Sofern die Konstellation logisch korrekt ist.)
- (4) Beweise oder widerlege exakt: $A \times (A \cap B) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
- (5) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{10, 15\}$, $C = \mathbb{N} \Rightarrow (A \times B) \cap (A \times C) = ?$
- (6) $f(x) = x^2 + 2x - 3$, $f(x) = \sqrt{x+2} - 2$, $h(x) = 3 \sin(x^2)$.
- (a) Wo ist $f(g(x))$ bijektiv?
- (b) Berechne $[(f \circ g) \circ h](x)$
- (7) Kreativ: Stelle $[a]_3 \cdot [b]_3 := [a \cdot b]_3 = [x]_3$ in einer Tabelle dar.
- (8) $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq ab$, $a, b \in \mathbb{Z}$ Äquivalenzrelation?
- (9) Wo gilt $-2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - 6x + 5$?

Viel Glück!

WIR

5.12 Test: Kombinatorik, Logik, Mengenlehre, Zahlentheorie

I/40

Abschrift • Copie

- (1)** Beweise mit Hilfe vollständiger Induktion:

$$(q^n - 1) = (q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q^2 + q + 1) \cdot (q - 1)$$

- (2)** In einem kartesischen Koordinatensystem sind auf der x -Achse die Punkte $P_1(1; 0), P_2(2; 0), \dots, P_n(n; 0)$ und auf der y -Achse die Punkte $Q_1(0; 1), Q_2(0; 2), \dots, Q_n(0; n)$ gegeben. Damit werden folgende Geraden gezeichnet: $g_1 = \overline{P_1 Q_n}, g_2 = \overline{P_2 Q_{n-1}}, g_3 = \overline{P_3 Q_{n-2}}, \dots, g_n = \overline{P_n Q_1}$.
- (a) Skizziere die Situation.
 - (b) Wieviele geschlossene Flächen entstehen durch eine solche Konstruktion mit n Geraden g_k und den beiden Achsen? Beweise die Vermutung!
 - (c) Wieviele Schnittpunkte inklusive Achsenschnittpunkte entstehen total?
- (3)** Gegeben ist eine Tolneiter mit 8 Tönen. Der Komponist will 4 Takte mit je 8 Achteltonen erzeugen. Wieviele verschiedene Kompositionen ohne Pausen sind möglich?
- (4)** Ist der Ausdruck $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow \neg A \Rightarrow X$ eine Tautologie, eine Kontraposition oder keines von beiden?
- (5)** Ermittle die Anzahl Teilmengen von U :

$$U = \{\{A\}, \{A, \{A\}\}, \{A, A, \{A\}, \{A\}\} \cup \{\{A\}\}\}$$

Viel Glück!

5.13 Test: Grundlagen, Logik, Mengenlehre, Zahlentheorie

III/39

Abschrift • Copie

(1) Aus einer ehemaligen Aufnahmeprüfung:

- (a) Zentrisch zum Ursprung in einem kartesischen Koordinatensystem ist ein Kreis (Kreislinie) mit Radius R gegeben. Mit Mittelpunkt M_2 auf der negativen x -Achse ist dazu noch ein zweiter Kreis gegeben mit Radius $r = \frac{R}{2}$. Dieser zweite Kreis geht durch den Ursprung. Durch M_2 geht weiter noch eine Gerade g senkrecht zur x -Achse. A ist die Fläche, welche gebildet wird von den Punkten des ersten grösseren Kreises ohne die Punkte links von g und ebenso ohne die Punkte des zweiten Kreises. Berechne den Flächeninhalt von A .

- (b) Vereinfache von Hand:

$$\left((a-b) : \left(\frac{1}{a+b} \right) : \left(\frac{a+1}{b} - \frac{b+1}{a} \right) : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a \cdot b} \right) \right)$$

(2) $|A| = 99$, $|B| = 98$, $|C| = 97$, $|A \cap B| = 30$, $|A \cap C| = 27$, $|B \cap C| = 28$, $|A \cap B \cap C| = 26$.

- (a) $G = |A \cup B \cup C| = ?$
 (b) $|(A \cap B) \setminus (A \cap B \cap C)| = ?$

(3) Zeige oder widerlege: $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

- (4) (a) Beweise oder widerlege: $\forall_{l \in \mathbb{N}} : k \mid (k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3)$.
 (b) Entwickle eine Formel für die maximale Anzahl der Schnittpunkte von n Kreisen und beweise diese Formel.

(5) $a, b \in \mathbb{Z}$. $(a \sim b) \Leftrightarrow (a^2 + b^2 \geq a \cdot b) \rightsquigarrow$ Äquivalenzrelation?(6) Betrachte $((X \Rightarrow Z) \vee (Y \Rightarrow Z)) \Rightarrow (\neg X \wedge Y \Rightarrow Z) \equiv f(X, Y, Z)$.

- (a) Wahrheitstafel von $f(X, Y, Z)$?
 (b) A.n.F oder k.n.F. von $f(X, Y, Z)$? (Einfachere Variante geben!)

(7) Erstelle das Hasse-Diagramm der Menge $\{a, b, c, d\}$. In wievielen Teilmengen ist das Element a enthalten?Kann man damit eine Formel für die verallgemeinerte Situation $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ finden?

(8) Löse folgende Kongruenzgleichungen:

- (a) $16 \equiv 22 \cdot x \pmod{30}$

- (b) $1 \equiv 18 \cdot x \pmod{53}$

(c)
$$\begin{array}{rcl} [4]_{12} \cdot [x]_{12} - [y]_{12} & = & [8]_{12} \\ [2]_{12} \cdot [x]_{12} - [y]_{12} & = & [10]_{12} \end{array} \quad \text{System!} \quad \%$$

(9) $a \Rightarrow \neg b \wedge c \Rightarrow a \wedge b \vdash \neg c \rightsquigarrow$ korrekter Schluss?

(10) Vereinfache:

$$D \vee \neg D \wedge (A \wedge B \wedge C \vee \neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (D \vee D \wedge E) \wedge (D \vee E \wedge F) \vee (A \wedge \neg D)$$

Viel Glück!

5.14 Test: Determinanten und Matrizen, Eigenwerttheorie, komplexe Zahlen

III/41

Abschrift • Copie

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- (a) Berechne die Determinante von A .
- (b) Berechne die Spur von A .
- (c) Berechne die Eigenwerte von A .
- (d) Berechne die Eigenvektoren von A .
- (e) Berechne, falls vorhanden, die Hauptvektoren \vec{y} von A .

Hinweis: Eigenvektoren $\rightsquigarrow A \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x}$ oder $(A - \lambda E) \vec{y} = \vec{0}$.
 Hauptvektoren $\rightsquigarrow (A - \lambda E)^2 \vec{x} = \vec{0}$.

(2)

$$A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Berechne die Determinante von A .
- (b) Kann α so gewählt werden, dass $\mathbb{L} = \{\}$ ist? — ($\alpha = ?$)
- (c) Wie gross ist z für $x = \frac{1}{8}$? (Falls lösbar.)

(3)

$$\frac{\sqrt{2}(z-i)^5 - \sqrt{2}}{1+i} = 1-i$$

Leite die Lösungen her und skizziere die Lösungsmenge!

(4)

$$\begin{pmatrix} k & -1 & 2 \\ 1 & k & -2 \\ -2 & 2 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Untersuche die Abhängigkeit der Eigenwerte von k !

(5)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = X \cdot D \cdot X^{-1} \quad (\text{Diagonalisierung})$$

- (a) Berechne D und $X = (\vec{x}_1 \vec{x}_2)$, \vec{x}_1 und \vec{x}_2 normiert.
- (b) Berechne A^{100} .
- (c) Berechne $A \cdot \vec{y}(t)$, $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Viel Glück!

WIR

Kapitel • Chapitre 6

Serien mit „Relationen“

6.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormaligen gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Stoffgebiete war nie vorhanden.

6.2 Test: Logik, Mengenlehre, Relationen

I/27

Abschrift • Copie

Formeln, Methoden, Zwischenschritte, Herleitungen, Name und Gruppe müssen auf dem Blatt notiert sein!

- Formules, méthodes, résultats intermédiaires, déductions, nom, groupe doivent être visibles sur la feuille!

(1) $\neg A \vee \neg B \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \rightsquigarrow$ Wahrheitstafel? • Tableau de vérité?

(2) $[(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)] \wedge [(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)] \rightsquigarrow$ Vereinfachen! • Simplifier!

(3) $((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Rightarrow ((C \Rightarrow A) \Rightarrow (B \Rightarrow A)) \equiv ? \rightsquigarrow$ Vereinfachen! • Simplifier!

(4) $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg A) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B) \rightsquigarrow$ Vereinfachen! • Simplifier!

(5) $a \Rightarrow \neg b, c \Rightarrow a, b \vdash \neg c \rightsquigarrow$ Korrekt? • Correct?

(6) $\neg C \Leftrightarrow (B \vee A) \rightsquigarrow$ Vollständige A.N.F.? • a.N.F. complète?

(7) $|A \cup B| = |A| + \dots ? \dots \rightsquigarrow$ „Euler–Venn“ verwenden! • Utiliser ”Euler–Venn“!
Was passiert bei $A \cap B = \{\}?$ • Qu'est-ce qui se passe si $A \cap B = \{\}?$

(8) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) \rightsquigarrow$ Beweis? • Preuve?
(Benutze die Definition von $A \times M$.) • (Utiliser la définition de $A \times M$.)

(9) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \rightsquigarrow$ Beweis? • Preuve?
(Benutze die Definition von $A \cup M$.) • (Utiliser la définition de $A \cup M$.)

(10) $M = \{x \in \mathbb{N} \mid (x \geq 7) \wedge (x < 20)\}, N = \{x \in \mathbb{N} \mid (x \leq 21) \wedge (x > 8)\}$

(a) $M \cup N = ?$

(c) $M \setminus N = ?$

(b) $M \cap N = ?$

(d) $M \Delta N = ?$

(11) $M = \{a, b, c\}, \mathcal{P}(M) = \{M, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{\}\}$

(a) Hasse–Diagramm von $\mathcal{P}(M)$? (12 Pfeile!)

• Diagramme de Hasse de $\mathcal{P}(M)$? (12 flèches!)

(b) $M = \{a, b, c, d\} \rightsquigarrow$ Hasse–Diagramm zu $x =$ Pfeilen, $x = ?$ • Diagramme de Hasse
à x flèches, $x = ?$ %

(12)

X	Y	Z	P
1	1	1	0
1	0	1	1
0	1	1	0
0	0	1	0
1	1	0	0
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	0	1

$P \equiv ?$ (Formel) • (Formule)

Viel Glück! — Bonne chance!

6.3 Test: Funktionen, Logik, Mengenlehre, Relationen, Zahlentheorie

I/25

Abschrift • Copie

(1) $(X \Rightarrow (Y \Rightarrow X \wedge \neg Z)) \dot{\vee} Z \rightsquigarrow$ Tautologie?

(2) Verwandle den folgenden Ausdruck in eine vollständige NF:

$$(\neg Z \Rightarrow X \wedge Y) \uparrow (X \Rightarrow \neg Z)$$

(3) Gegeben sind in der Universalmenge U drei Mengen A , B und C . Berechne, falls möglich, mit Hilfe der nachfolgenden Angaben die Mächtigkeit $|\overline{A \cup B \cup C}|$:

$$|U| = 100, |A| = 50, |B| = 30, |C| = 8, |A \cap B| = 11, |A \cap C| = 7, B \cap C = \{\}$$

(4) $\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 1), (1, 1), (2, 2), (1, 6), (6, 1), (6, 6), (2, 6), (6, 2), (3, 6), (6, 3), (3, 3), (2, 3), (3, 2), (1, 3), (3, 1), (4, 5), (4, 4), (4, 5), (5, 5), (6, 6), (1, 6), (5, 4)\}$.

Erstelle einen Graphen und beurteile, welche Eigenschaft diese Relation hat.

(5)

$$f(x) = \sqrt{(x-3)(x-4)(x+1)}, g(x) = x^{-5}, h(x) = x^{-6}$$

(a) Skizziere die Graphen.

(b) Ermittle den Definitionsbereich und den Wertebereich für f, g und h .(c) Wo ist f, g und h injektiv, surjektiv oder bijektiv?(6) Wieviele Schnittpunkte können n Kreise maximal haben?

(a) Formel?

(b) Induktionsbeweis?

(c) Was ändert sich, wenn man statt Kreise Ellipsen betrachtet?

(7) Man berechne mit Hilfe eines Algorithmus den g.g.T. und das k.g.V. von 123456 und 7890.

(8) (a) Gesucht sind Additions- und Multiplikationstabellen der Restklassen modulo 6.

(b) Löse mit Hilfe der eben aufgestellten Tabellen die folgende Gleichung:

$$[5]_6 + [5]_6 \cdot [x]_6 = [3]_6$$

Viel Glück!

WIR

6.4 Test: Funktionen, Logik, Mengenlehre, Relationen

I/26

Abschrift • Copie

(1) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow A \wedge \neg C)) \dot{\vee} C \rightsquigarrow$ Tautologie?

(2) Verwandle den folgenden Ausdruck in eine vollständige NF:

$$(\neg C \Rightarrow A \wedge B) \uparrow (A \Rightarrow \neg C)$$

(3) Erkläre, was ein „indirekter“ Beweis ist.

(4) Gegeben sind in der Universalmenge G zwei Mengen A und B .

(a) $|\overline{A \cup B}| = ?$ (Formel)

(b) Beweise die Formel durch Rückgriff auf die Logik: $A \cup B = \{x \in G \mid \dots\}$.

(5) Gegeben sind in der Universalmenge G drei Mengen A , B und C . Berechne, falls möglich, mit Hilfe der nachfolgenden Angaben die Mächtigkeit $|\overline{A \cup B \cup C}|$:

$$|U| = 100, |A| = 51, |B| = 30, |C| = 8, |A \cap B| = 11, |A \cap C| = 7, |B \cap C| = \{ \}$$

(6) $\mathcal{R} = \{(1, 3), (1, 2), (2, 1), (1, 1), (2, 2), (1, 6), (6, 1), (6.6), (2, 6), (6, 2), (3, 6), (6, 3), (3, 3), (2, 3), (4, 5), (3, 2), (1, 3), (3, 1), (4, 5), (4, 4), (4, 5), (5, 5), (6, 6), (1, 6), (5, 4)\}$.

Erstelle einen Graphen und beurteile, welche Eigenschaft diese Relation hat.

(7)

$$f_1(t) = \sqrt{(t-3)(t-4)(t+1)}, \quad f_2(t) = t^{-5}, \quad f_3(t) = t^{-6},$$

$$f_4(t) = \begin{cases} t^2 & t \text{ abbrechender Dezimalbruch} \\ \frac{1}{t} & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Skizziere die Graphen, falls möglich.

(b) Ermittle den Definitionsbereich und den Wertebereich für f_1, f_2, f_3 und f_4 .

(c) Wo ist f_1, f_2, f_3 und f_4 injektiv, surjektiv oder bijektiv?

Viel Glück!

WIR

6.5 Test: Logik, Mengenlehre, Relationen

I/28

Abschrift • Copie

Formeln, Methoden, Zwischenschritte, Herleitungen, Name und Gruppe müssen auf dem Blatt notiert sein!

- Formules, méthodes, résultats intermédiaires, déductions, nom, groupe doivent être visibles sur la feuille!

(1) $A \wedge C \wedge (B \vee \neg A \vee \neg C) \rightsquigarrow$ Wahrheitstafel? • Tableau de vérité?

(2) $[\neg(A \wedge \neg B) \vee \neg B \vee A \vee \neg(A \wedge B)] \wedge B \rightsquigarrow$ Vereinfachen! • Simplifier!

(3) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \equiv ? \rightsquigarrow$ Vereinfachen! • Simplifier!

(4) $[(A \wedge C) \vee (B \wedge \neg C)] \Leftrightarrow [(\neg A \wedge B) \vee (\neg B \wedge \neg C)] \rightsquigarrow$ Vereinfachen! • Simplifier!

(5) $a \Rightarrow b, c \vee \neg b, \neg b \vdash \neg a \rightsquigarrow$ Korrekt? • Correct?

(6) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \rightsquigarrow$ Vollständige A.N.F.? • a.N.F. complète?

(7) $|A \cap B| = |A| + \dots ? \dots \rightsquigarrow$ „Euler–Venn“ verwenden! • Utiliser "Euler–Venn"!
Was passiert bei $A \cup B = A$? • Qu'est-ce qui se passe si $A \cup B = A$?

(8) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) \rightsquigarrow$ Beweis? • Preuve?

(Benutze die Definition von $A \times M$.) • (Utiliser la définition de $A \times M$.)

(9) $A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C) \rightsquigarrow$ Beweis? • Preuve?

(Benutze die Definition von $A \cap M$.) • (Utiliser la définition de $A \cap M$.)

(10) $M = \{x \in \mathbb{N} \mid (x < 25) \wedge (x \geq 8)\}, N = \{x \in \mathbb{N} \mid (x > 9) \wedge (x \leq 24)\}$

(a) $M \cup N = ?$

(c) $M \setminus N = ?$

(b) $M \cap N = ?$

(d) $M \Delta N = ?$

(11) $M = \{1, 2, 3\}, \mathcal{P}(M) = \{M, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{\}\}$

(a) Hasse–Diagramm von $\mathcal{P}(M)$? (12 Pfeile!)

• Diagramme de Hasse de $\mathcal{P}(M)$? (12 flèches!)

(b) $M = \{1, 2, 3, 4\} \rightsquigarrow$ Hasse–Diagramm zu $x =$ Pfeilen, $x = ?$ • Diagramme de Hasse
à x flèches, $x = ?$ %

(12)

X	Y	Z	P
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	1	1
1	1	0	0
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	0	1

$P \equiv ?$ (Formel) • (Formule)

Viel Glück! — Bonne chance!

6.6 Test: Logik, Mengenlehre, Relationen

I/29

Abschrift • Copie

- (1) $\neg A \vee (A \wedge C \wedge \neg B) \vee \neg C \rightsquigarrow$ Wahrheitstafel? Suche damit die einfachste vollständige kanonische Normalform (a.N.F. oder k.N.F.)
- (2) Vereinfache durch Äquivalenzumformung:
 - (a) $[(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)] \wedge [(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)]$
 - (b) $((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Rightarrow ((C \Rightarrow A) \Rightarrow (B \Rightarrow A))$
- (3) $a \Rightarrow \neg b, c \Rightarrow a, b \vdash \neg c \rightsquigarrow$ Ist dieser logische Schluss korrekt?
- (4) Beweise korrekt mit Hilfe der Definition: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- (5) Auf einem Schiff sind 109 Feriengäste. 81 von ihnen lieben Spaghetti, 24 essen gerne Kalamares und 35 lieben schwarze Oliven. 11 von ihnen möchten Spaghetti und Kalamares, 35 hingegen Spaghetti mit Oliven, 7 aber wollen Kalamares und Oliven. Wieviele Teller müssen bereitgestellt werden, auf denen es alle drei angebotene Sorten zu essen gibt?
- (6) Ist die folgende Relation $R \subseteq \mathbb{Z}^2$ eine Äquivalenzrelation?

$$aRb : \Leftrightarrow (a^2 + b^2 \geq a \cdot b) \wedge \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

- (7) Gegeben ist eine Karte der Grösse einer Visitenkarte. Auf der vorderen Seite ist aufgedruckt: „Der Satz auf der Rückseite ist wahr“. Schaut man dann auf der Rückseite was dort steht, so findet man: „Der Satz auf der Vorderseite ist falsch“. Übersetze diesen Aussagenzusammenhang in die formale Logik und erkläre, wie sich das mit der Karte verhält, d.h. was man dort für eine logische Schlusskette finden kann.

Viel Glück!

WIR

6.7 Test: Funktionen, Logik, Mengenlehre, Relationen, Ungleichungen

I/30

Abschrift • Copie

I30 Algebra !!!

(1)

$$((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \vdash (B \Rightarrow (C \Rightarrow A))$$

- (a) Ist dieser logische Schluss korrekt?
- (b) Falls die letzte Frage mit nein beantwortet werden musste, so soll die eine kNF oder aNF gefunden werden (davon die einfachste Form).

(2) Der folgende Ausdruck ist so umzuformen, dass er möglichst kurz geschrieben werden kann:

$$\neg(\neg A \Rightarrow (\neg(A \wedge \neg B)))$$

(3) Gegeben sind die Intervalle $A = [2, 3]$, $B = [3, 5]$, $C = (5, 10)$. Beweise oder widerlege:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup A \times C$$

(4)

$$\mathcal{R} = \{(1, 2), (1, 1), (3, 4), (4, 5), (2, 1), (1, 1), (3, 3), (5, 4), (4, 4), (4, 3), (5, 5), (2, 2)\}$$

Erstelle einen Graphen und beurteile, um welchen Relationstyp es sich handelt.

(5)

$$a \mathcal{R} b : \Leftrightarrow a^2 \geq \frac{1}{2}, \quad a, b \in (1, \infty) \rightsquigarrow \text{Relationstyp?}$$

(6) Skizziere den Graphen und bestimme den Definitionsbereich D_f :

$$f(x) = y = \frac{2x}{x^2 + 2} + \frac{1}{2}x - 1$$

(7) Skizziere den Graphen:

$$f(x) = (\sin(|x|) + |[x]|) \cdot \operatorname{sgn}(x), \quad x \in [-\pi, \pi]$$

(8) Gegeben ist der Kettenbruch $x = \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{2 + \ddots}}} \rightsquigarrow \text{Frage: } x \in \mathbb{Q} ?$

(9)

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 999 = ?$$

%

(10)

$$f(n) = \frac{1}{n^2 + 9} + 1, \quad D_f = \mathbb{N}$$

- (a) f injektiv?
- (b) $W_f = ?$
- (c) f bijektiv bezüglich W_f ?

(11) Löse:

$$(x - 2)(x - 3) \geq (x + 1)(x + 2)$$

(12)

$$I_1 = (0, 7), \quad I_2 = [1.5, 5], \quad I_3 = (3, 9] \Rightarrow I = I_1 \setminus (I_2 \cap I_3) = ?, \quad |I| = ?$$

Viel Glück!

WIR

6.8 Test: Boolesche Algebra, Kombinatorik, Relationen I/32

Abschrift • Copie

Boolesche Algebra, Kombinatorik, Relationen

- *Algèbre de Boole, analyse combinatoire, relations*

- (1) $(x_3 + \bar{x}_2)x_2 + (x_3 + x_1)x_3 + x_3 = ? \rightsquigarrow$ Vereinfachen, Rechnen! • *Simplifier, calculer!*
- (2) $a b c d + a \bar{b} c d + \bar{a} \bar{b} c d + \bar{a} b c d + a b c \bar{d} + a \bar{b} c \bar{d} + a b \bar{c} d + a \bar{b} \bar{c} d + \bar{a} b \bar{c} d = ? \rightsquigarrow$ Karnaugh!
- (3) Konstruiere eine Schaltung, die 3 einstellige Dualzahlen addieren kann.
• *Construire un circuit pour faire additionner 3 nombres binaires.*
 - (a) Wertetabelle • *Tableau des valeurs*
 - (b) A.N.F. (Schreibweise der Boolschen Algebra)
• *A.N.F. (façon d'écrite selon l'algèbre de Boole)*
 - (c) Vereinfachung (Karnaugh) • *Simplification (Karnaugh)*
- (4) Aussagenlogik, Verbandstheorie, Boolesche Algebra, Schaltalgebra \rightsquigarrow Unterschiede?
• *Logique propositionnelle, théorie des treillis, algèbre de Boole, algèbre des circuits*
 \rightsquigarrow *différences?*
- (5) Auf wieviele Arten kann man 8 Autos auf 11 Parkplätze stellen?
• *De combien de manières différentes est-ce qu'on peut parquer 8 voitures sur 11 places?*
- (6) Gegeben: Ziffern 1, 1, 2, 3, 4. Wieviele 5-ziffrige Zahlen kann man damit bilden?
• *Donné: Chiffres 1, 1, 2, 3, 4. Combien de nombres à 5 places est-ce qu'on peut former avec ces éléments?*
- (7) $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (1,3), (4,4), (4,5), (5,4), (5,5)\}$
 - (a) Ist mit R eine Funktion gegeben? • *Est-ce que R est une fonction?*
 - (b) Ist mit R eine strenge Ordnungsrelation gegeben?
• *Est-ce que R est une relation d'ordre stricte?*

Viel Glück! — Bonne chance!

6.9 Test: Boolesche Algebra, Kombinatorik, Relationen I/33

Abschrift • Copie

Boolesche Algebra, Kombinatorik, Relationen

- *Algèbre de Boole, analyse combinatoire, relations*

- (1) $x_3 x_2 x_1 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 x_1 x_3 = ? \rightsquigarrow$ Vereinfachen, Rechnen! • *Simplifier, calculer!*
- (2) $a b c d + \bar{a} \bar{b} c d + \bar{a} b c d + \bar{a} \bar{b} c \bar{d} + \bar{a} b \bar{c} \bar{d} + \bar{a} b \bar{c} d + a b \bar{c} d + a \bar{b} \bar{c} d + \bar{a} \bar{b} \bar{c} d + \bar{a} b \bar{c} d = ? \rightsquigarrow$ Karnaugh!
- (3) Konstruiere eine Schaltung, die 3 einstellige Dualzahlen addieren kann.
• *Construire un circuit pour faire additionner 3 nombres binaires.*
 - (a) Wertetabelle • *Tableau des valeurs*
 - (b) A.N.F. (Schreibweise der Boolschen Algebra)
• *A.N.F. (façon d'écrite selon l'algèbre de Boole)*
 - (c) Vereinfachung (Karnaugh) • *Simplification (Karnaugh)*
- (4) Aussagenlogik, Verbandstheorie, Boolesche Algebra, Schaltalgebra \rightsquigarrow Unterschiede?
• *Logique propositionnelle, théorie des treillis, algèbre de Boole, algèbre des circuits*
 \rightsquigarrow *différences?*
- (5) Auf wieviele Arten kann man 36 Spielkarten an 4 Spieler verteilen?
• *De combien de manières différentes est-ce qu'on peut distribuer un jeu de cartes avec 36 cartes à 4 joueurs?*
- (6) Gegeben: Ziffern 1, 1, 2, 2, 8. Wieviele 5-ziffrige Zahlen kann man damit bilden?
• *Donné: Chiffres 1, 1, 2, 2, 8. Combien de nombres à 5 places est-ce qu'on peut former avec ces éléments?*
- (7) $R = \{(\alpha, \alpha), (\alpha, \beta), (\beta, \beta), (\beta, \alpha), (\beta, \gamma), (\gamma, \alpha), (\gamma, \beta), (\gamma, \gamma), (\alpha, \gamma), (\delta, \delta), (\delta, \varepsilon), (\varepsilon, \delta), (\varepsilon, \varepsilon)\}$
 - (a) Ist mit R eine Funktion gegeben? • *Est-ce que R est une fonction?*
 - (b) Ist mit R eine strenge Ordnungsrelation gegeben?
• *Est-ce que R est une relation d'ordre stricte?*

Viel Glück! — Bonne chance!

6.10 Test: Relationen, Funktionen, Ungleichungen**I/34**

Abschrift • Copie

Version française: Voir <http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/restricted/TestsAll.pdf>

(1) Untersuche und begründe, ob der folgende Sachverhalt richtig ist:

$$(f \text{ bijektiv}) \wedge (g \text{ bijektiv}) \Rightarrow (f \circ g \text{ bijektiv})$$

(2) $f(x) = 2x^2 + 8x - 35$, $g(x) = x + 10$. Wo ist dann die folgende Aussage richtig?

$$(f(x) < g(x)) \wedge (6.5x < 0)$$

(3) Gegeben: $f(x) = x^3 + x^2 + 1$. Gesucht sind:

- | | |
|---------------------------|---|
| (a) Wertetabelle? | (d) Eventuelle Nullstellen des Graphen? |
| (b) Graph? | (e) Wo ist $f(x) = \sqrt{x}$? |
| (c) y -Achsenabschnitt? | |

(4) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = [x]$, $h(x) = x^2$.

- | | |
|---|---------------------------|
| (a) Bestimme $\Phi = h \circ g \circ f$. | (d) Ist Φ surjektiv? |
| (b) Bestimme D_Φ . | (e) Ist Φ injektiv? |
| (c) Bestimme W_Φ . | (f) Ist Φ bijektiv? |

Viel Glück!

6.11 Test: Logik, Mengenlehre, Relationen, Funktionen, Zahlentheorie

I/35

Abschrift • Copie

(1) $((x = y) \Rightarrow (y = z)) \Rightarrow (a < z) \vdash ((a < z) \Rightarrow ((z = y) \Rightarrow (y = x))) \rightsquigarrow$ korrekt?

(2)

X	Y	Z	W	$f(X, Y, Z, W)$
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	0
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

$f(X, Y, Z, W) \equiv ?$ (a.N.F.)

- (3) In einem Stadion sind 548 Personen. 100 von ihnen haben einen CH-Pass, 200 einen F-Pass, 300 einen I-Pass. 30 haben sogar einen CH- und einen F-Pass, 15 einen F- und einen I-Pass, 20 einen CH- und einen I-Pass. Wieviele haben alle 3 Pässe? (Sofern die Konstellation logisch korrekt ist.)
- (4) Beweise oder widerlege exakt: $A \times (A \cap B) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
- (5) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{10, 15\}$, $C = \mathbb{N} \Rightarrow (A \times B) \cap (A \times C) = ?$
- (6) $f(x) = x^2 + 2x - 3$, $f(x) = \sqrt{x+2} - 2$, $h(x) = 3 \sin(x^2)$.
- (a) Wo ist $f(g(x))$ bijektiv?
- (b) Berechne $[(f \circ g) \circ h](x)$
- (7) Kreativ: Stelle $[a]_3 \cdot [b]_3 := [a \cdot b]_3 = [x]_3$ in einer Tabelle dar.
- (8) $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq ab$, $a, b \in \mathbb{Z}$ Äquivalenzrelation?
- (9) Wo gilt $-2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - 6x + 5$?

Viel Glück!

WIR

Kapitel • Chapitre 7

Serien mit „Boolscher Algebra“

7.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Stoffgebiete war nie vorhanden.

7.2 Test: Boolesche Algebra, Kombinatorik, Relationen I/32

Abschrift • Copie

Boolesche Algebra, Kombinatorik, Relationen

- *Algèbre de Boole, analyse combinatoire, relations*

- (1) $(x_3 + \bar{x}_2)x_2 + (x_3 + x_1)x_3 + x_3 = ? \rightsquigarrow$ Vereinfachen, Rechnen! • *Simplifier, calculer!*
- (2) $a b c d + a \bar{b} c d + \bar{a} \bar{b} c d + \bar{a} b c d + a b c \bar{d} + a \bar{b} c \bar{d} + a \bar{b} \bar{c} \bar{d} + a b \bar{c} d + a \bar{b} \bar{c} d + \bar{a} b \bar{c} d = ? \rightsquigarrow$ Karnaugh!
- (3) Konstruiere eine Schaltung, die 3 einstellige Dualzahlen addieren kann.
• *Construire un circuit pour faire additionner 3 nombres binaires.*
 - (a) Wertetabelle • *Tableau des valeurs*
 - (b) A.N.F. (Schreibweise der Boolschen Algebra)
• *A.N.F. (façon d'écrite selon l'algèbre de Boole)*
 - (c) Vereinfachung (Karnaugh) • *Simplification (Karnaugh)*
- (4) Aussagenlogik, Verbandstheorie, Boolesche Algebra, Schaltalgebra \rightsquigarrow Unterschiede?
• *Logique propositionnelle, théorie des treillis, algèbre de Boole, algèbre des circuits*
 \rightsquigarrow *différences?*
- (5) Auf wieviele Arten kann man 8 Autos auf 11 Parkplätze stellen?
• *De combien de manières différentes est-ce qu'on peut parquer 8 voitures sur 11 places?*
- (6) Gegeben: Ziffern 1, 1, 2, 3, 4. Wieviele 5-ziffrige Zahlen kann man damit bilden?
• *Donné: Chiffres 1, 1, 2, 3, 4. Combien de nombres à 5 places est-ce qu'on peut former avec ces éléments?*
- (7) $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (1,3), (4,4), (4,5), (5,4), (5,5)\}$
 - (a) Ist mit R eine Funktion gegeben? • *Est-ce que R est une fonction?*
 - (b) Ist mit R eine strenge Ordnungsrelation gegeben?
• *Est-ce que R est une relation d'ordre stricte?*

Viel Glück! — Bonne chance!

7.3 Test: Boolesche Algebra, Kombinatorik, Relationen I/33

Abschrift • Copie

Boolesche Algebra, Kombinatorik, Relationen

- *Algèbre de Boole, analyse combinatoire, relations*

- (1) $x_3 x_2 x_1 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 x_1 x_3 = ? \rightsquigarrow$ Vereinfachen, Rechnen! • *Simplifier, calculer!*
- (2) $a b c d + \bar{a} \bar{b} c d + \bar{a} b c d + \bar{a} \bar{b} c \bar{d} + \bar{a} b \bar{c} \bar{d} + \bar{a} b \bar{c} d + a b \bar{c} d + a \bar{b} \bar{c} d + \bar{a} \bar{b} \bar{c} d + \bar{a} b \bar{c} d = ? \rightsquigarrow$ Karnaugh!
- (3) Konstruiere eine Schaltung, die 3 einstellige Dualzahlen addieren kann.
• *Construire un circuit pour faire additionner 3 nombres binaires.*
 - (a) Wertetabelle • *Tableau des valeurs*
 - (b) A.N.F. (Schreibweise der Boolschen Algebra)
• *A.N.F. (façon d'écrite selon l'algèbre de Boole)*
 - (c) Vereinfachung (Karnaugh) • *Simplification (Karnaugh)*
- (4) Aussagenlogik, Verbandstheorie, Boolesche Algebra, Schaltalgebra \rightsquigarrow Unterschiede?
• *Logique propositionnelle, théorie des treillis, algèbre de Boole, algèbre des circuits*
 \rightsquigarrow *différences?*
- (5) Auf wieviele Arten kann man 36 Spielkarten an 4 Spieler verteilen?
• *De combien de manières différentes est-ce qu'on peut distribuer un jeu de cartes avec 36 cartes à 4 joueurs?*
- (6) Gegeben: Ziffern 1, 1, 2, 2, 8. Wieviele 5-ziffrige Zahlen kann man damit bilden?
• *Donné: Chiffres 1, 1, 2, 2, 8. Combien de nombres à 5 places est-ce qu'on peut former avec ces éléments?*
- (7) $R = \{(\alpha, \alpha), (\alpha, \beta), (\beta, \beta), (\beta, \alpha), (\beta, \gamma), (\gamma, \alpha), (\gamma, \beta), (\gamma, \gamma), (\alpha, \gamma), (\delta, \delta), (\delta, \varepsilon), (\varepsilon, \delta), (\varepsilon, \varepsilon)\}$
 - (a) Ist mit R eine Funktion gegeben? • *Est-ce que R est une fonction?*
 - (b) Ist mit R eine strenge Ordnungsrelation gegeben?
• *Est-ce que R est une relation d'ordre stricte?*

Viel Glück! — Bonne chance!

7.4 Test: Boolesche Algebra, Zahlentheorie

I/43

Abschrift • Copie

- (1) Vereinfache so weit wie möglich den Booleschen Ausdruck:

$$d + \bar{d}(a b c + \bar{a} + \bar{b} + \bar{c})(d + d c)(d + e f) + (a \bar{d})$$

- (2) Dreistellige Dualzahlen a , b und c sollen mit Hilfe einer Schaltung addiert werden.

- (a) Erstelle die Tabelle der Leitwerte.
- (b) Leite daraus einfache Boolesche Ausdrücke für die Schaltungen ab.
- (c) Vereinfache die Ausdrücke so weit wie möglich. Die Schalterzahl soll minimal sein.
Dazu soll man mit „Serie“, „Parallel“ und „Negation“ auskommen.

- (3) Beweise die folgenden Aussagen, falls möglich: ($|$ bedeutet „teilt“)

$$\forall_{k \in \mathbb{N}} : k \mid (k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3)$$

- (4) Beweise: $\forall_{n \in \mathbb{N}} : \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n \cdot n + 1)} = \frac{n}{n + 1}$.

- (5) Gegeben sind die folgenden Gleichungen:

$1 \cdot 2$	=	2	=	6/3
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3$	=	8	=	24/3
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4$	=	20	=	60/3
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5$	=	40	=	120/3

Suche das allgemeine Gesetz und beweise es!

Viel Glück!

WIR

7.5 Test: Boolesche Algebra, Differential– und Integralrechnung im \mathbb{R}^1 , Vektorgeometrie

I/59

Abschrift • Copie

- (1)** Vereinfache den Booleschen Ausdruck $z = x \cdot y + [(x + y') \cdot y]'$.

Dabei bedeutet „ \cdot “ $\hat{=}$ AND, „ $+$ “ $\hat{=}$ OR, „ $'$ “ $\hat{=}$ NOT.

Verlangt ist Analyse und Graphik.

- (2)** Berechne mit Hilfe der Partialbruchzerlegung das unbestimmte Integral

$$\int \frac{2x^2 + 9x + 12}{x^2 + 6x + 10} dx.$$

- (3)** Durch ein unbekanntes Polynom f 3. Grades ist eine Kurve gegeben, von der man weiss: $f(-p) = 0$, $f(0) = 3p$, $f(2p) = 3p$. Zudem befindet sich in $(0; f(0))$ ein lokales Maximum.

- (a) Skizziere die Situation.
 - (b) Berechne die Koeffizienten als Funktion des Parameters p .
 - (c) A_1 sei das Flächenstück unter der Kurve zwischen $-p$ und 0 . A_2 dasjenige zwischen 0 und $2p$. Bestimme das Verhältnis $A_1 : A_2$.
- (4)** Von einem Punkt $P(3; 3; 5)$ aus fällt ein Lichtstrahl in Richtung des Vektors $\vec{a} = (-1, -1, -2)^T$ auf einen Planspiegel, der durch die Ebene $\Phi: x+2x+3z=6$ beschrieben wird. Bestimme die Parameterdarstellung der Geraden, auf der der reflektierte Strahl liegt.

Viel Glück!

WIR

Kapitel • Chapitre 8

Serien mit „Schaltalgebra“

8.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Stoffgebiete war nie vorhanden.

8.2 Test: Boolesche Algebra, Kombinatorik, Relationen I/32

Abschrift • Copie

Boolesche Algebra, Kombinatorik, Relationen

- *Algèbre de Boole, analyse combinatoire, relations*

- (1) $(x_3 + \bar{x}_2)x_2 + (x_3 + x_1)x_3 + x_3 = ? \rightsquigarrow$ Vereinfachen, Rechnen! • *Simplifier, calculer!*
- (2) $a b c d + a \bar{b} c d + \bar{a} \bar{b} c d + \bar{a} b c d + a b c \bar{d} + a \bar{b} c \bar{d} + a b \bar{c} d + a \bar{b} \bar{c} d + \bar{a} b \bar{c} d = ? \rightsquigarrow$ Karnaugh!
- (3) Konstruiere eine Schaltung, die 3 einstellige Dualzahlen addieren kann.
 - *Construire un circuit pour faire additionner 3 nombres binaires.*
 - (a) Wertetabelle • *Tableau des valeurs*
 - (b) A.N.F. (Schreibweise der Booleschen Algebra)
 - *A.N.F. (façon d'écrite selon l'algèbre de Boole)*
 - (c) Vereinfachung (Karnaugh) • *Simplification (Karnaugh)*
- (4) Aussagenlogik, Verbandstheorie, Boolesche Algebra, Schaltalgebra \rightsquigarrow Unterschiede?
 - *Logique propositionnelle, théorie des treillis, algèbre de Boole, algèbre des circuits*
 \rightsquigarrow *différences?*
- (5) Auf wieviele Arten kann man 8 Autos auf 11 Parkplätze stellen?
 - *De combien de manières différentes est-ce qu'on peut parquer 8 voitures sur 11 places?*
- (6) Gegeben: Ziffern 1, 1, 2, 3, 4. Wieviele 5-ziffrige Zahlen kann man damit bilden?
 - *Donné: Chiffres 1, 1, 2, 3, 4. Combien de nombres à 5 places est-ce qu'on peut former avec ces éléments?*
- (7) $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (1,3), (4,4), (4,5), (5,4), (5,5)\}$
 - (a) Ist mit R eine Funktion gegeben? • *Est-ce que R est une fonction?*
 - (b) Ist mit R eine strenge Ordnungsrelation gegeben?
 - *Est-ce que R est une relation d'ordre stricte?*

Viel Glück! — Bonne chance!

WIR

8.3 Test: Boolesche Algebra, Kombinatorik, Relationen I/33

Abschrift • Copie

Boolesche Algebra, Kombinatorik, Relationen

- Algèbre de Boole, analyse combinatoire, relations

$$(1) \quad x_3 x_2 x_1 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 x_1 x_3 = ? \rightsquigarrow \text{Vereinfachen, Rechnen!} \quad \bullet \text{Simplifier, calculer!}$$

$$(2) \quad a b c d + \bar{a} \bar{b} c d + \bar{a} b c d + \bar{a} \bar{b} c \bar{d} + \bar{a} b \bar{c} \bar{d} + \bar{a} b \bar{c} d + a b \bar{c} d + a \bar{b} \bar{c} d + \bar{a} \bar{b} \bar{c} d + \bar{a} b \bar{c} d = ?$$

\rightsquigarrow Karnaugh!

- (3) Konstruiere eine Schaltung, die 3 einstellige Dualzahlen addieren kann.

- Construire un circuit pour faire additionner 3 nombres binaires.

- (a) Wertetabelle • Tableau des valeurs

- (b) A.N.F. (Schreibweise der Booleschen Algebra)

- A.N.F. (façon d'écrite selon l'algèbre de Boole)

- (c) Vereinfachung (Karnaugh) • Simplification (Karnaugh)

- (4) Aussagenlogik, Verbandstheorie, Boolesche Algebra, Schaltalgebra \rightsquigarrow Unterschiede?

- Logique propositionnelle, théorie des treillis, algèbre de Boole, algèbre des circuits
 \rightsquigarrow différences?

- (5) Auf wieviele Arten kann man 36 Spielkarten an 4 Spieler verteilen?

- De combien de manières différentes est-ce qu'on peut distribuer un jeu de cartes avec 36 cartes à 4 joueurs?

- (6) Gegeben: Ziffern 1, 1, 2, 2, 8. Wieviele 5-ziffrige Zahlen kann man damit bilden?

- Donné: Chiffres 1, 1, 2, 2, 8. Combien de nombres à 5 places est-ce qu'on peut former avec ces éléments?

- (7) $R = \{(\alpha, \alpha), (\alpha, \beta), (\beta, \beta), (\beta, \alpha), (\beta, \gamma), (\gamma, \alpha), (\gamma, \beta), (\gamma, \gamma), (\alpha, \gamma), (\delta, \delta), (\delta, \varepsilon), (\varepsilon, \delta), (\varepsilon, \varepsilon)\}$

- (a) Ist mit R eine Funktion gegeben? • Est-ce que R est une fonction?

- (b) Ist mit R eine strenge Ordnungsrelation gegeben?

- Est-ce que R est une relation d'ordre stricte?

Viel Glück! — Bonne chance!

8.4 Test: Grundlagen, Funktionen, Schaltalgebra

I/36

Abschrift • Copie

(1) Erkläre den Begriff „mathematisches Modell“ am Beispiel der Schaltalgebra!

(2) $f(x) = \sinh(x) \cdot \cosh(x)$ (a) $D_f = ?$ (c) Wo ist f bijektiv?(b) $W_f = ?$ (d) Skizziere die Umkehrfunktion, falls eine solche existiert!

(3) $\frac{\log_3(2) - \log_9(4)}{\log_\pi(\pi^2 - \pi)} + \ln(2e^e) = ?$ (Vereinfachen!)

(4) Zwei 2-stellige Dualzahlen a und b werden multipliziert: $a \cdot b = c$. a hat die Form $a_1 \cdot a_2$ (Ziffern a_1, a_2). b hat die Form $b_1 \cdot b_1$ (Ziffern b_1, b_2).(a) Gesucht sind die algebraischen Ausdrücke für die nötigen Schaltungen
(mit „+“, „·“, „-“).

(b) Vereinfache die Ausdrücke nach „Karnaugh“!

Viel Glück!

WIR

8.5 Test: Boolesche Algebra, Zahlentheorie

I/43

Abschrift • Copie

- (1) Vereinfache so weit wie möglich den Booleschen Ausdruck:

$$d + \bar{d}(a b c + \bar{a} + \bar{b} + \bar{c})(d + d c)(d + e f) + (a \bar{d})$$

- (2) Dreistellige Dualzahlen a , b und c sollen mit Hilfe einer Schaltung addiert werden.

- (a) Erstelle die Tabelle der Leitwerte.
- (b) Leite daraus einfache Boolesche Ausdrücke für die Schaltungen ab.
- (c) Vereinfache die Ausdrücke so weit wie möglich. Die Schalterzahl soll minimal sein.
Dazu soll man mit „Serie“, „Parallel“ und „Negation“ auskommen.

- (3) Beweise die folgenden Aussagen, falls möglich: ($|$ bedeutet „teilt“)

$$\forall_{k \in \mathbb{N}} : k \mid (k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3)$$

- (4) Beweise: $\forall_{n \in \mathbb{N}} : \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n \cdot n + 1)} = \frac{n}{n + 1}$.

- (5) Gegeben sind die folgenden Gleichungen:

$1 \cdot 2$	=	2	=	$6/3$
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3$	=	8	=	$24/3$
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4$	=	20	=	$60/3$
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5$	=	40	=	$120/3$

Suche das allgemeine Gesetz und beweise es!

Viel Glück!

WIR

8.6 Test: Nichtlineare Gleichungen, Integralrechnung im \mathbb{R}^n , Schaltalgebra, Kombinatorik, Zahlentheorie II/46

Abschrift • Copie

- (1) Die Kurve der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ mit $D_f = [0, x_0]$ wird um die x -Achse rotiert. Dabei entsteht das Volumen V_2 . Um dieses Volumen wird über dem gleichen Definitionsbereich ein x -achsenparalleler Zylinder gestülpt, welcher das Volumen V_1 besitzt.

Berechne $\frac{V_1}{V_2}$.

- (2) Erkläre den Satz von Stone und seine Konsequenzen für die Schaltalgebra.
- (3) Wieviele Lösungen hat die Gleichung $x + y + z = 1994$ in \mathbb{N} ? (1994 = Prüfungsjahr.)
- (4) Beweise oder widerlege: $\forall_{n \in \mathbb{N}, n \geq 2} : \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \frac{n^2 + n}{(n+1)^2}$.
- (5) In einer Klasse mit 20 Studenten sollen Arbeitsgruppen zu je 4 Studenten gebildet werden. Wieviele Arbeitsgruppen sind möglich?
- (6) Löse die Gleichung $x^3 = \sin(x)$, $x > 0$, numerisch wie folgt: Start mit $x_1 = 0.5$.
- (a) Newton.Methode.
 - (b) Regula falsi, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, falls möglich.
 - (c) Fixpunktverfahren, falls möglich.

Nach wievielen Schritten hat man jeweils eine Genauigkeit von 4 Stellen hinter dem Komma erreicht?

Viel Glück!

8.7 Test: Boolesche Algebra, Differential– und Integralrechnung im \mathbb{R}^1 , Vektorgeometrie

I/59

Abschrift • Copie

- (1)** Vereinfache den Booleschen Ausdruck $z = x \cdot y + [(x + y') \cdot y]'$.

Dabei bedeutet „ \cdot “ $\hat{=}$ AND, „ $+$ “ $\hat{=}$ OR, „ $'$ “ $\hat{=}$ NOT.

Verlangt ist Analyse und Graphik.

- (2)** Berechne mit Hilfe der Partialbruchzerlegung das unbestimmte Integral

$$\int \frac{2x^2 + 9x + 12}{x^2 + 6x + 10} dx.$$

- (3)** Durch ein unbekanntes Polynom f 3. Grades ist eine Kurve gegeben, von der man weiss: $f(-p) = 0$, $f(0) = 3p$, $f(2p) = 3p$. Zudem befindet sich in $(0; f(0))$ ein lokales Maximum.

- (a) Skizziere die Situation.
 - (b) Berechne die Koeffizienten als Funktion des Parameters p .
 - (c) A_1 sei das Flächenstück unter der Kurve zwischen $-p$ und 0. A_2 dasjenige zwischen 0 und $2p$. Bestimme das Verhältnis $A_1 : A_2$.
- (4)** Von einem Punkt $P(3; 3; 5)$ aus fällt ein Lichtstrahl in Richtung des Vektors $\vec{a} = (-1, -1, -2)^T$ auf einen Planspiegel, der durch die Ebene $\Phi: x+2x+3z=6$ beschrieben wird. Bestimme die Parameterdarstellung der Geraden, auf der der reflektierte Strahl liegt.

Viel Glück!

WIR

Kapitel • Chapitre 9

Serien mit „Kombinatorik“

9.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Stoffgebiete war nie vorhanden.

9.2 Test: Boolesche Algebra, Kombinatorik, Relationen I/32

Abschrift • Copie

Boolesche Algebra, Kombinatorik, Relationen

- *Algèbre de Boole, analyse combinatoire, relations*

- (1) $(x_3 + \bar{x}_2)x_2 + (x_3 + x_1)x_3 + x_3 = ? \rightsquigarrow$ Vereinfachen, Rechnen! • *Simplifier, calculer!*
- (2) $a b c d + a \bar{b} c d + \bar{a} \bar{b} c d + \bar{a} b c d + a b c \bar{d} + a \bar{b} c \bar{d} + a \bar{b} \bar{c} \bar{d} + a b \bar{c} d + a \bar{b} \bar{c} d + \bar{a} b \bar{c} d = ? \rightsquigarrow$ Karnaugh!
- (3) Konstruiere eine Schaltung, die 3 einstellige Dualzahlen addieren kann.
• *Construire un circuit pour faire additionner 3 nombres binaires.*
 - (a) Wertetabelle • *Tableau des valeurs*
 - (b) A.N.F. (Schreibweise der Boolschen Algebra)
• *A.N.F. (façon d'écrite selon l'algèbre de Boole)*
 - (c) Vereinfachung (Karnaugh) • *Simplification (Karnaugh)*
- (4) Aussagenlogik, Verbandstheorie, Boolesche Algebra, Schaltalgebra \rightsquigarrow Unterschiede?
• *Logique propositionnelle, théorie des treillis, algèbre de Boole, algèbre des circuits*
 \rightsquigarrow *différences?*
- (5) Auf wieviele Arten kann man 8 Autos auf 11 Parkplätze stellen?
• *De combien de manières différentes est-ce qu'on peut parquer 8 voitures sur 11 places?*
- (6) Gegeben: Ziffern 1, 1, 2, 3, 4. Wieviele 5-ziffrige Zahlen kann man damit bilden?
• *Donné: Chiffres 1, 1, 2, 3, 4. Combien de nombres à 5 places est-ce qu'on peut former avec ces éléments?*
- (7) $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (1,3), (4,4), (4,5), (5,4), (5,5)\}$
 - (a) Ist mit R eine Funktion gegeben? • *Est-ce que R est une fonction?*
 - (b) Ist mit R eine strenge Ordnungsrelation gegeben?
• *Est-ce que R est une relation d'ordre stricte?*

Viel Glück! — Bonne chance!

9.3 Test: Zahlentheorie (\mathbb{N}) Kombinatorik

— Théorie des nombres (\mathbb{N}), analyse combinatoire

I/39

Abschrift • Copie

Hinweis: Beweise \rightsquigarrow vollständige Induktion. • *Indication: Preuves \rightsquigarrow Induction complète.*

(1) Gesetz und Beweis: • *Loi et preuve:* $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = ?$

(Nur für den Beweis werden Punkte erteilt.)

• *(Les points seront donnés seulement pour la preuve.)*

(2) Beweise: in einem konvexen n -Eck gibt es $\frac{n \cdot (n - 3)}{2}$ Diagonalen.

• *Prouver: Dans un polygone convexe à n sommets il y a $\frac{n \cdot (n - 3)}{2}$ diagonales.*

(3) Beweise: • *Prouver:* $\forall_{n \in \mathbb{N}} : s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n \cdot n + 1)} = \frac{n}{n + 1}$

(4)

$$\frac{(2n+1)^2}{8} = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$

Warum funktioniert hier die vollständige Induktion nicht?

• *Pourquoi ici l'induction complète ne fonctionne-t-elle pas?*

(5)

$1 \cdot 2$	=	2	=	$6/3$
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3$	=	8	=	$24/3$
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4$	=	20	=	$60/3$
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5$	=	40	=	$120/3$

Allgemeines Gesetz? — Beweis?

• *Loi générale? — Preuve?*

(6) Erste Runde eines Schachturniers mit 14 Spielern: Auf wieviele Arten kann man 7 Paare bilden?

• *Première partie d'un tournois d'échecs avec 14 joueurs: De combien de manières peut-on composer les 7 couples de joueurs?*

(7)

R	
O O	
X X X	
A A A A	
N N N N N	
E E E E E E	

Auf wieviele Arten kann man in diesem Schema den Namen „ROXANE“ lesen? Regel: Keine Buchstaben überspringen! (Roxane: Gattin Alexanders des Grossen.)

• *De combien de manières différentes peut-on lire le nom de "Roxane" dans ce schéma? Règle: Interdit de dépasser des lettres. (Roxane: L'épouse d'Alexandre le grand.)*

%

(8)

$$M = \{x, y, z \in \mathbb{N} \mid x + y + z = 100\} \Rightarrow |M| = ?$$

Hinweis: $|M| = \text{Anzahl Lösungen von } x + y + z = 100, x, y, z \in \mathbb{N}$.

• Indication: $|M| = \text{Nombre de solutions de } x + y + z = 100, x, y, z \in \mathbb{N}$.

(9) Wieviele innere Schnittpunkte haben die Diagonalen eines konvexen n -Ecks?

• Combien de points d'intersection intérieurs les diagonales d'un polygone convexe à n sommets ont-elles?

Untersuche, wieviele Eckpunkte nötig sind, um einen Schnittpunkt zu erzeugen. Wo schneiden sich die Diagonalen durch diese Eckpunkte? Wie kann man hier die Kombinatorik anwenden?

• Chercher combien de sommets sont nécessaires pour produire un point d'intersection. Où les diagonales par ces sommets ont-elles les points d'intersection? Comment est-ce au'on peut appliquer maintenant l'analyse combinatoire?

Viel Glück!

9.4 Test: Kombinatorik, Logik, Mengenlehre, Zahlentheorie

I/40

Abschrift • Copie

- (1) Beweise mit Hilfe vollständiger Induktion:

$$(q^n - 1) = (q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q^2 + q + 1) \cdot (q - 1)$$

- (2) In einem kartesischen Koordinatensystem sind auf der x -Achse die Punkte $P_1(1; 0), P_2(2; 0), \dots, P_n(n; 0)$ und auf der y -Achse die Punkte $Q_1(0; 1), Q_2(0; 2), \dots, Q_n(0; n)$ gegeben. Damit werden folgende Geraden gezeichnet: $g_1 = \overline{P_1 Q_n}, g_2 = \overline{P_2 Q_{n-1}}, g_3 = \overline{P_3 Q_{n-2}}, \dots, g_n = \overline{P_n Q_1}$.
- (a) Skizziere die Situation.
 - (b) Wieviele geschlossene Flächen entstehen durch eine solche Konstruktion mit n Geraden g_k und den beiden Achsen? Beweise die Vermutung!
 - (c) Wieviele Schnittpunkte inklusive Achsenschnittpunkte entstehen total?
- (3) Gegeben ist eine Tolneiter mit 8 Tönen. Der Komponist will 4 Takte mit je 8 Achteltonen erzeugen. Wieviele verschiedene Kompositionen ohne Pausen sind möglich?
- (4) Ist der Ausdruck $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow \neg A \Rightarrow X$ eine Tautologie, eine Kontraposition oder keines von beiden?
- (5) Ermittle die Anzahl Teilmengen von U :

$$U = \{\{A\}, \{A, \{A\}\}, \{A, A, \{A\}, \{A\}\} \cup \{\{A\}\}\}$$

Viel Glück!

WIR

9.5 Test: Funktionen, nichtlineare Gleichungen, Zahlentheorie, Kombinatorik

I/42

Abschrift • Copie

(1) Gegeben sind die Ziffern 4, 9, 1, 1, 9, 9, 0. Wieviele 7-ziffrige Zahlen zwischen 2'000'000 und 6'000'000 kann man damit bilden?

(2) Wieviele Lösungen mit $x, y, z \in \mathbb{N}$ hat die folgende Gleichung?

$$x + y + z = 100$$

(3) Sportotto: 13 Spiele sind zu beurteilen. Für jedes Spiel hat man die Möglichkeit, 1, x oder 2 anzukreuzen. Wieviele verschiedenen Lösungen kann man setzen?

(4) Vereinfache: $((k+1)! - k \cdot k!)(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}) \binom{2k-1}{k-1} \cdot k! = ?$

(5) Vereinfache: $\binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k+1} = ?$

(6) Löse die Gleichung: $\tan(x) \cdot \cot(x) = 0.6384$.

(7) Skizziere die Funktion $f : x \mapsto y = \arctan(x)$ und löse die Gleichung $\arctan(x) = \frac{\pi}{4}$.

(8) Skizziere in Polarkoordinaten: $r(\varphi) = \cos^2(\frac{\varphi}{2}) \cdot \varphi^2$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

(9) Berechne möglichst exakt: $\log_{3.7}(\frac{1}{3.6}) + \log_{3.7}(3.6) = ?$

(10) Berechne möglichst exakt: $\log_{(e^2)}(e^\pi) = ?$

Bemerkung: Die meisten Aufgaben sind relativ einfach und geben nicht sehr viel zu tun.

Löse diejenigen Aufgaben zuerst, die dir am einfachsten vorkommen und versuche, mit 5 Minuten pro Aufgabe auszukommen.

Viel Glück!

WIR

9.6 Test: Integralrechnung im \mathbb{R}^1 , Kombinatorik, Zahlentheorie II/11

Abschrift • Copie

(1) Der Graph von $f(x) = \sin(x)$ wird über dem Intervall $[0, \pi]$ um die x -Achse rotiert. Berechne den Volumeninhalt des entstehenden Rotationskörpers.

(2) Der Graph von $f(x) = \ln(x)$ wird über dem y -Intervall $[0, 1]$ um die y -Achse rotiert. Berechne den Volumeninhalt des entstehenden Rotationskörpers.

(3)

$$\int [(\sin(x) \cdot e^x - x \cdot \sin(x^2)) + \cos(x) \cdot e^x - \frac{\ln(x)}{x}] dx = ?$$

(4)

$$x + y + z = k, \quad x, y, z \in \mathbb{N}$$

Wieviele Lösungen $(x; y; z)$ gibt es für $k = 1993$ (Jahreszahl der Prüfung).

Hinweis: Zeichne ein Beispiel für $x, y, z, 1003$ auf der Zahlengerade und überlege dir, was das Stichwort „Teilmengen“ hier für Ideen bewirken könnte.

- (5) Sporttoto: Vorherzusagen sind 13 Fussballspiele. Wieviele verschiedenen Prognosen mit genau 12 richtigen Ausgängen sind möglich?
- (6) Auf wieviele Arten kann man 24 Studenten in 4-er Gruppen einteilen?
- (7) Stimmt die folgende Aussage? (Eine mathematische Begründung ist notwendig!)

$$\forall_{k \in \mathbb{N}} : \frac{k}{k+1} = \frac{1}{(k+1) \cdot k} + \frac{1}{k \cdot (k-1)} + \dots + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 1}$$

Viel Glück!

9.7 Test: Nichtlineare Gleichungen, Integralrechnung im \mathbb{R}^n , Schaltalgebra, Kombinatorik, Zahlentheorie II/46

Abschrift • Copie

- (1) Die Kurve der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ mit $D_f = [0, x_0]$ wird um die x -Achse rotiert. Dabei entsteht das Volumen V_2 . Um dieses Volumen wird über dem gleichen Definitionsbereich ein x -achsenparalleler Zylinder gestülpt, welcher das Volumen V_1 besitzt.

Berechne $\frac{V_1}{V_2}$.

- (2) Erkläre den Satz von Stone und seine Konsequenzen für die Schaltalgebra.
- (3) Wieviele Lösungen hat die Gleichung $x + y + z = 1994$ in \mathbb{N} ? (1994 = Prüfungsjahr.)
- (4) Beweise oder widerlege: $\forall_{n \in \mathbb{N}, n \geq 2} : \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \frac{n^2 + n}{(n+1)^2}$.
- (5) In einer Klasse mit 20 Studenten sollen Arbeitsgruppen zu je 4 Studenten gebildet werden. Wieviele Arbeitsgruppen sind möglich?
- (6) Löse die Gleichung $x^3 = \sin(x)$, $x > 0$, numerisch wie folgt: Start mit $x_1 = 0.5$.
- (a) Newton.Methode.
 - (b) Regula falsi, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, falls möglich.
 - (c) Fixpunktverfahren, falls möglich.

Nach wievielen Schritten hat man jeweils eine Genauigkeit von 4 Stellen hinter dem Komma erreicht?

Viel Glück!

9.8 Test: Kombinatorik, Potenzreihen, Vektorgeometrie II/53

Abschrift • Copie

(1) Entwickle in eine Potenzreihe unter Benutzung der Potenzreihen von $\sin(x)$ und $\cos(x)$:

- (a) $f_1(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$
- (b) $f_2(x) = \sin(\cos(x))$

(2) Bilde die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a(n) \cdot b(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x)}{n} \cdot e^x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x} \cdot e^{-n}$.

- (a) Konvergiert diese Reihe?
- (b) Falls ja, was ist dann der Konvergenzbereich?

(3) Gegeben ist ein Dreieck $A(1; -1)$, $B(3; 6)$, $C(4; -3)$. Durch die Seitenmittelpunkte wird ein Kreis gelegt. Berechne diesen Kreis auf 6 Stellen genau:

- (a) Radius?
- (b) Mittelpunkt?

(4) Mit Hilfe der Zeichen $\{+, -, 0, 1\}$ werden immer neue 7-stellige Zeichenfolgen kombiniert, wobei das mittlere Zeichen immer eine 1 ist. Alle so entstandenen Zeichenfolgen werden fortlaufend hintereinander geschrieben. Wieviele mögliche, auf diese Weise entstehenden Zeichenketten gibt es? (Es genügt eine „wissenschaftliche Zahlendarstellung“ $a \cdot 10^b$ anzugeben.)

Viel Glück!

WIR

9.9 Test: Boolesche Algebra, Kombinatorik, Relationen I/33

Abschrift • Copie

Boolesche Algebra, Kombinatorik, Relationen

- *Algèbre de Boole, analyse combinatoire, relations*

- (1) $x_3 x_2 x_1 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 x_1 x_3 = ? \rightsquigarrow$ Vereinfachen, Rechnen! • *Simplifier, calculer!*
- (2) $a b c d + \bar{a} \bar{b} c d + \bar{a} b c d + \bar{a} \bar{b} c \bar{d} + \bar{a} b \bar{c} \bar{d} + \bar{a} b \bar{c} d + a b \bar{c} d + a \bar{b} \bar{c} d + \bar{a} \bar{b} \bar{c} d + \bar{a} b \bar{c} d = ? \rightsquigarrow$ Karnaugh!
- (3) Konstruiere eine Schaltung, die 3 einstellige Dualzahlen addieren kann.
• *Construire un circuit pour faire additionner 3 nombres binaires.*
 - (a) Wertetabelle • *Tableau des valeurs*
 - (b) A.N.F. (Schreibweise der Boolschen Algebra)
• *A.N.F. (façon d'écrite selon l'algèbre de Boole)*
 - (c) Vereinfachung (Karnaugh) • *Simplification (Karnaugh)*
- (4) Aussagenlogik, Verbandstheorie, Boolesche Algebra, Schaltalgebra \rightsquigarrow Unterschiede?
• *Logique propositionnelle, théorie des treillis, algèbre de Boole, algèbre des circuits*
 \rightsquigarrow *différences?*
- (5) Auf wieviele Arten kann man 36 Spielkarten an 4 Spieler verteilen?
• *De combien de manières différentes est-ce qu'on peut distribuer un jeu de cartes avec 36 cartes à 4 joueurs?*
- (6) Gegeben: Ziffern 1, 1, 2, 2, 8. Wieviele 5-ziffrige Zahlen kann man damit bilden?
• *Donné: Chiffres 1, 1, 2, 2, 8. Combien de nombres à 5 places est-ce qu'on peut former avec ces éléments?*
- (7) $R = \{(\alpha, \alpha), (\alpha, \beta), (\beta, \beta), (\beta, \alpha), (\beta, \gamma), (\gamma, \alpha), (\gamma, \beta), (\gamma, \gamma), (\alpha, \gamma), (\delta, \delta), (\delta, \varepsilon), (\varepsilon, \delta), (\varepsilon, \varepsilon)\}$
 - (a) Ist mit R eine Funktion gegeben? • *Est-ce que R est une fonction?*
 - (b) Ist mit R eine strenge Ordnungsrelation gegeben?
• *Est-ce que R est une relation d'ordre stricte?*

Viel Glück! — Bonne chance!

Kapitel • Chapitre 10

Serien mit „Statistik“

10.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Stoffgebiete war nie vorhanden.

10.2 Test: Statistik**I/14**

Abschrift • Copie

- (1) Was ist eine diskrete Variable?
- (2) Was ist eine Hypothese?
- (3) Was sind Statistiken?
- (4) Was ist ein Schaubild?
- (5) Was ist Statistik?
- (6) Was ist die Arbeitsweise der Statistik?
- (7) Was ist induktive Statistik?
- (8) Was ist deduktive Statistik?
- (9) Beschreibung dieser Aufgabe siehe Rückseite!

% % %

- (9) In der nachstehenden Tabelle links findet man die Häufigkeitsverteilung der Monatslöhne in „narchischen Dollars“ von 65 Arbeitern bei der Firma Knarr um 1922. Die Prüfungsfragen dazu sind rechts genannt.

Lebensdauer	Anzahl
30–39.99	8
40–49.99	10
50–59.99	16
60–69.99	14
70–79.59	10
80–89.99	5
90–99.99	2
	Summe 65

- (a) Obergrenze der 4. Klasse?
- (b) Untergrenze der 6. Klasse?
- (c) Klassenmitte der 3. Klasse?
- (d) Klasseränder der ersten Klasse?
- (e) Klassenbreite?
- (f) Absolute Häufigkeit der 5. Klasse?
- (g) Relative Häufigkeit der 5. Klasse?
- (h) Prozentsatz der Arbeiter, die weniger verdienen als 70 n\$?
- (i) Prozentsatz der Arbeiter, die mindestens 70 n\$ verdienen?
- (j) Histogramm?
- (k) Häufigkeitspolygon?
- (l) Summenkurve?

Viel Glück!

10.3 Test: Statistik**I/15**

Abschrift • Copie

- (1) Womit beschäftigt sich Statistik?
- (2) Was ist induktive Statistik?
- (3) Was ist deduktive Statistik?
- (4) Was ist eine diskrete Variable?
- (5) Was ist die Arbeitsweise der Statistik?
- (6) Was sind Statistiken?
- (7) Was ist eine Hypothese?
- (8) Was ist ein Schaubild?
- (9) Beschreibung dieser Aufgabe siehe Rückseite!

% % %

- (9) In der nachstehenden Tabelle links findet man die Ergebnisse eines Tests der Lebensdauer in h eines elektronischen Bauteils XX01P–13H der Firma Knarr. Die Prüfungsfragen dazu sind rechts genannt.

Lebensdauer	Anzahl
100–199	14
200–299	46
300–399	58
400–499	76
500–599	68
600–699	62
700–799	48
800–899	22
900–999	6
	Summe 400

- (a) Obergrenze der 4. Klasse?
- (b) Untergrenze der 7. Klasse?
- (c) Klassenmitte der 8. Klasse?
- (d) Klasseränder der ersten Klasse?
- (e) Klassenbreite?
- (f) Absolute Häufigkeit der 3. Klasse?
- (g) Relative Häufigkeit der 3. Klasse?
- (h) Prozentsatz der Teile mit einer Lebensdauer nicht grösser als 600?
- (i) Prozentsatz der Teile mit einer Lebensdauer von mindestens 700?
- (j) Histogramm?
- (k) Häufigkeitspolygon?
- (l) Summenkurve?

Viel Glück!

10.4 Test: Statistik**I/16**

Abschrift • Copie

- (1) Wieso braucht man in der Statistik die Wahrscheinlichkeitstheorie?
- (2) Was ist ein Zufallsexperiment?
- (3) Was ist ein Ereignis?
- (4) Was ist die relative Häufigkeit eines Ereignisses?
- (5) Was ist ein Produktereignis?
- (6) Wie ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses definiert?
- (7) Was ist ein Summenereignis?
- (8) Erkläre $h(A \cup B) = (h(A) + h(B) - h(A \cap B))$.

Viel Glück!

WIR

10.5 Test: Determinanten und Matrizen, Differentialgleichungen, Statistik

I/18

Abschrift • Copie

- (1)** Eine Gruppe von Studenten hat die Körpergrösse von Mitstudenten gemessen. Hier sind die Messdaten (in cm):

Un groupe d'étudiants a mesuré la taille d'un nombre d'étudiants de l'école. Voici les données (en cm):

173	178	177	173	184	161	162	169	154	188
177	177	169	183	185	183	173	192	182	181
176	177	169	177	173	163	192	165	156	159
175	173	179	178	177	168	158	183	187	175
174	173	179	169	179	168	174	194	160	187

- (a)** Teilen Sie die Daten in Klassen ein mit den Klassenmittnen 152, 157, 162, ... (Klassenbreite 5).

Classifer les données en classes dont les millieus sont 152, 157, 162, ... (largeur des classes 5).

- (b)** Berechnen Sie Mittelwert sowie Standardabweichung der Klassen.

Calculer la valeur moyenne et la déviation standard.

- (c)** Stellen Sie die Klassen in einem Balkendiagramm oder Histogramm dar.

Représenter ces classes à l'aide d'un diagramme de barre ou bien histogramme.

- (2)** Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen:

Résoudre les équations différentielles suivantes:

- (a)**

$$y(x) y'(x) - x = 1, \quad y(1) = 2$$

- (b)**

$$y'(x) = e^{-x} y(x)$$

%

(3) Gegeben sind die folgenden Matrizen. Soient données les matrices suivantes:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

M_4 sei die Inverse von M_3 — soit M_4 l'inverse de M_3 ,

$$M_5 = M_4 \cdot M_2.$$

Die Gerade g ist gegeben durch — la droite g soit donnée par

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0.5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2.5 \\ 1 \end{pmatrix} (t \in \mathbf{R}).$$

- (a) Berechnen Sie / Calculer M_4 und / et M_5 .
- (b) Berechnen Sie das Bild g' von g unter M_5 / Calculer l'image g' de g : $\vec{v} = M_5 \cdot \vec{r}$.
- (c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt von g' mit der Geraden $y = x$.
Calculer le point d'intersection de g' avec la droite $y = x$.
- (d) Bestimmen Sie das Volumen des Spats, der aufgespannt wird durch die Ortsvektoren zu den Punkten $(1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1)$.
Vergleichen Sie das Resultat mit der Determinante von M_1 .
Calculer le volume du parallélépipède étendu par les vecteurs liés aux points suivants: $(1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1)$.
Comparez le résultat avec la valeur de la déterminante de M_1 .

Viel Glück!

Kapitel • Chapitre 11

Lösungen — Solutions

11.1 Momentane Sachlage — — Situation actuelle

Die Lösungen zu den Aufgaben sind momentan nur noch in Papierform vorhanden (*Mathematica*-Output und Handschriften). An eine gesamthafte oder teilweise Veröffentlichung kann aus Kapazitätsgründen vorläufig nicht gedacht werden.

- *Les solutions des problèmes existent momentanément seulement sur papier output de Mathematica et manuscrits. Actuellement, par raisons de capacité, on ne peut pas penser à une la publication intégrale ou bien partielle.*

<http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/ArchivTestserien.html>

Fremdarbeit?

Ende • *Fin*