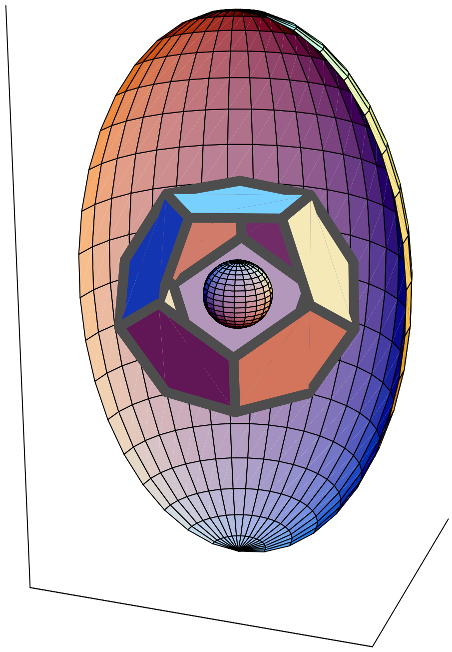
◇ Tests / Übungen ◇ *Tests / Exercices* ◇
◇ Mathematik II ◇
◇ *Mathématiques II* ◇
◇ Diplom ◇ 1989 – 2000 ◇ *Diplôme* ◇



von • *de*

Rolf Wirz

Ingenieurschule Biel — HTA-Biel/BFH — HTI/BFH bis • *jusqu'à* 2000

Ausgabe vom 10. November 2007, Version 1.0.5 / d/f

Mit klickbaren Links • *Avec des lines cliquables*

WIR1 /2007/LaTex/BuchTestsMathII2000Dipl.TEX

Produziert mit PCTeX unter Win XP. Einige Graphiken sind auch mit *Mathematica* entstanden.

• *Produit avec PCTeX sous Win XP. Quelques représentations ont été produites avec Mathematica.*

Der Mensch hat dreierlei Wege, um zu lernen:
Erstens durch Nachdenken, das ist der edelste;
zweitens durch Nachahmen, das ist der leichteste;
drittens durch Erfahrung, das ist der bitterste.

(Nach Konfuzius)

• *L'homme a trois occasions pour apprendre:*
Premièrement par réflexion, c'est la plus noble;
deuxièmement par l'imitation, c'est la plus facile;
troisièmement par l'expérience, c'est la plus dure.

(Selon Confucius)

Aktuelle Adresse des Autors (2007):

Rolf W. Wirz-Depierre
Prof. für Math.
Berner Fachhochschule (BFH), Dep. AHB und TI
Pestalozzistrasse 20
Büro B112 CH–3400 Burgdorf/BE
Tel. ++41 (0)34 426 42 30 / intern 230
Mail: Siehe http://rowicus.ch/Wir/indexTotalF.html unter „Koordinaten von R.W.“
(Alt: Ingenieurschule Biel (HTL), Ing'schule des Kt. Bern, Fachhochschule ab 1997) // BFH HTA Biel // BFH HT/

Inhaltsverzeichnis • Table des matières

Kapitel • Chapitre 1

Einführung — Introduction

1.1 Gegenstand — Sujet

In dieser Sammlung ist eine Auswahl von Aufgaben zusammengefasst, welche in den Jahren vor 2000 verwendet worden sind.
• *Dans cette collection, un choix de problèmes est rassemblé. Il s'agit de problèmes qui ont été utilisés dans les années avant 2000.*

Klickbare Links zu Skripten: • *Liens cliquables pour les cours:*

http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html (Skript–Download) • *Download cours*

Die Lösungen zu den Aufgaben sind momentan nur in Papierform vorhanden. An eine gesamthafte Veröffentlichung kann aus Kapazitätsgründen vorläufig nicht gedacht werden.
• *Les solutions des problèmes existent momentanément seulement sur papier. Actuellement, par raisons de capacité, on ne peut pas penser à une la publication intégrale.*

1.2 Gliederung — Disposition

Bemerkung: • Remarque: Da nur noch wenige Sérien auch in französischer Übersetzung vorliegen, wird im weiteren Text aus Kapazitätsgründen auf Übersetzungen verzichtet.

(1) Differentialgleichungen
• *Equations différentielles*

(2) Differentialgleichungen und Laplace–Transformationen
• *Equations différentielles et transformations de Laplace*

(3) Laplace–Transformationen
• *Transformations de Laplace*

(4) z–Transformationen
• *Transformations en z*

(5) Fourieranalysis
• *Analyse harmonique (analyse de Fourier)*

(6) Differentialgeometrie und Kurven, Vektoranalysis
• *Géométrie différentielle, courbes, analyse vectorielle*

(7) Komplexe und holomorphe Funktionen
• *Fonctions complexes et holomorphes*

Kapitel • Chapitre 2

Serien mit „Differentialgleichungen“ — Séries avec ”Equations différentielles”

2.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Srofgebiete war nie vorhanden.

2.2 Test: Determinanten und Matrizen, Differentialgleichungen, Statistik I/18

Abschrift • *Copie*

(1) Eine Gruppe von Studenten hat die Körpergrösse von Mitstudenten gemessen. Hier sind die Messdaten (in cm):
Un groupe d'étudiants a mesuré la taille d'un nombre d'étudiants de l'école. Voici les données (en cm):

173	178	177	173	184	161	162	169	154	188
177	177	169	183	185	183	173	192	182	181
176	177	169	177	173	163	192	165	156	159
175	173	179	178	177	168	158	183	187	175
174	173	179	169	179	168	174	194	160	187

(a) Teilen Sie die Daten in Klassen ein mit den Klassenmitten $152, 157, 162, \ldots$ (Klassenbreite 5).
Classifier les données en classes dont les millieus sont $152, 157, 162, \ldots$ *(largeur des classes* 5*).*

(b) Berechnen Sie Mittelwert sowie Standardabweichung der Klassen.
Calculer la valeur moyenne et la déviation standard.

(c) Stellen Sie die Klassen in einem Balkendiagramm oder Histogramm dar.
Représenter ces classes à l'aide d'un diagramme de barre ou bien histogramme.

(2) Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen:
Résoudre les équations différentielles suivantes:

(a)

$$y(x)\, y\,'(x) - x = 1, \qquad y(1) = 2$$

(b)

$$y\,'(x) = e^{-x}\, y(x)$$

%

(3) Gegeben sind die folgenden Matrizen. *Soient données les matrices suivantes*:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

M_4 sei die Inverse von M_3 — *soit* M_4 *l'inverse de* M_3,
$M_5 = M_4 \cdot M_2$.
Die Gerade g ist gegeben durch — *la droite* g *soit donnée par*

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0.5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2.5 \\ 1 \end{pmatrix} \ (t \in \mathbf{R}).$$

(a) Berechnen Sie / *Calculer* M_4 und / *et* M_5.

(b) Berechnen Sie das Bild g' von g unter M_5 / *Calculer l'image* g' *de* g : $\vec{v} = M_5 \cdot \vec{r}$.

(c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt von g' mit der Geraden $y = x$.
Calculer le point d'intersection de g' *avec la droite* $y = x$.

(d) Bestimmen Sie das Volumen des Spats, der aufgespannt wird durch die Ortsvektoren zu den Punkten $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$.
Vergleichen Sie das Resultat mit der Determinante von M_1.
Calculer le volume du parallélépipède étendu par les vecteurs liés aux points suivants: $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$.
Comparez le résultat avec la valeur de la déterminante de M_1.

Viel Glück!

2.3 Test: Differentialgleichungen III/15

Abschrift • *Copie*

(1) Zeichne das Richtungsfeld!

(a)
$$y' = (x+y)\,(x-y)$$

(b)
$$y' = x \cdot sgn(y) \cdot \sqrt{|y|}$$

(2)
$$y' = \frac{x}{y}$$

(a) Wo existiert die Lösung eindeutig?

(b) Richtungsfeld?

(c) Lösung?

(3) Was kann man über die Struktur der Lösungsmenge der folgenden Differentialgleichung sagen?
$$\cos(x)\,y''' - \sin(x)\,y'' + \tan(x)\,y' - e^x\,y = x^x$$

(4) Löse: Gegeben ist die Differentialgleichung $y' = \sin(x)\,y + \sin(x)$.

(a) Allgemeine Lösung?

(b) Lösung des AWP's $y(1) = 1$?

(5) Löse allgemein die folgende Differentialgleichung:
$$y''' - 4\,y'' - 6\,y' = 18\,x$$

(6) Was ist die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung?
$$(x^2\,y + x\,y + x^2)\,dx + 0.5\,x^2\,dy = 0$$

(7) Löse das folgende AWP:
$$\begin{aligned} y''' - y &= e^x \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

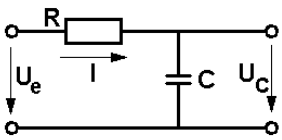
Viel Glück!

WIR

2.4 Test: Differentialgleichungen III/16

Abschrift • *Copie*

(1)



$U_e(t) = 10\,\cos(\omega\,t)\ [V]$,
$R = 10\ [k\Omega]$,
$C = 5\ [\mu F]$

$U_C = U(t) = ?$

Stelle die Differentialgleichung auf und löse sie. Einheiten weglassen.)

(2) Löse $y\,' + \dfrac{y}{x} = \sin(x)$ durch Trennung der Variablen und Variation der Konstanten.

(3) Löse $y\,' = x \cdot y - x \cdot \sqrt{y}$ *Hinweis: Substitution* $z = y^{\frac{1}{2}}$.

(4) Löse $y + (y + x) \cdot y\,' = 0$ *Hinweis: Theorie der exakten D'gl.*

(5) Suche eine Näherungslösung von $y\,' - y = \sin(x)$, $y(0) = 0$, indem du die Potenzreihe $f(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + \ldots$ für y in die Gleichung einsetzest und ebenfalls die Reihe $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots$ verwendest.

(6) Löse:

(a) Löse die Schwingungsgleichung $\ddot{y} + 2\,\dot{y} + \omega_0^2\,y = 10\,\sin(\omega\,t)$. Setze $y(0) = 10$, $\dot{y}(0) = 0$. Diskutiere die 3 möglichen Fälle.

Hinweis: $m\,\ddot{y} + b\,\dot{y} + c\,y = \ldots,\ \ 2\,\delta = \dfrac{b}{m},\ \ \omega_0^2 = \dfrac{c}{m}\ \Rightarrow\ \ldots$

$\delta =$ *Dämpfungsfaktor,* $\omega_0 =$ *Eigenfrequenz,* $\omega_d^2 = \omega_o^2 - \delta^2 =$ *Schwingungsfrequenz.*

(b) Wie hängt die Amplitude von y vom Parameter ω ab?

Viel Glück!

2.5 Test: Differentialgleichungen, Differential– und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$ III/19

Abschrift • *Copie*

(1) Skizziere das Richtungsfeld:

(a)
$$y' = x + y$$

(b)
$$y' = x^2 + y^2$$

(2)
$$\int\limits_{K_{r=2}(Origo)} (x^2 + y^2 + z^2)\, dV = ?$$

Hinweis: Kugelkoordinaten: $D = -r^2 \sin(\alpha)$, $\alpha =$ *Winkel zur z–Achse.*

(3) Ein keilförmiger Körper ist begrenzt durch $P_1(0;0;0)$, $P_2(x_0,0,0)$, $P_3(x_0,y_0,0)$, $P_4(0,y_0,0)$, $P_5(0,0,z_0)$, $P_6(x_0,0,z_0)$. (Die Kante von P_4 nach P_5 wird gegeben durch $z = z_0 - y$.) Weiter gilt:

$$f(x,y,z) = \frac{1}{x} + z \cdot \sin(y), \quad F(x_0,x_0,z_0) = \int\limits_V f(x,y,h)\, dV$$

Suche die Extremalstellen von $F(x_0,x_0,z_0)$.

(4)
$$\begin{aligned} y' &= (\cos(x) \cdot \sinh(x)) \cdot y \\ y(1) &= 4 \end{aligned}$$

Löse die Differentialgleichungen und skizziere den Graphen.

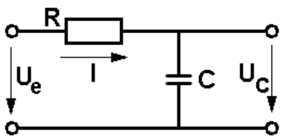
Viel Glück!

WIR

2.6 Test: Differentialgleichungen III/20

Abschrift • *Copie*

(1)



$U_e(t) = 10\,\cos(\omega\, t)\ [V]$,
$R = 5\ [k\Omega]$,
$C = 5\ [\mu F]$

$U_C = U(t) = ?$

Stelle die Differentialgleichung auf und löse sie. Einheiten weglassen.)

(2) Löse $y\,' + \dfrac{y}{x} = \sin(2\,x)$ durch Trennung der Variablen und Variation der Konstanten.

(3) Löse $y\,' = -x \cdot \sqrt{y} + x \cdot y$ *Hinweis: Substitution* $z = y^{\frac{1}{2}}$.

(4) Löse $x + y \cdot y\,' = 0$ *Hinweis: Theorie der exakten D'gl.*

(5) Suche eine Näherungslösung von $y\,' - y = \sin(x)$, $y(0) = 0$, indem du die Potenzreihe $f(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + \ldots$ für y in die Gleichung einsetzest und ebenfalls die Reihe $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots$ verwendest.

(6) Löse:

(a) Löse die Schwingungsgleichung $\ddot{y} + 2\,\dot{y} + \omega_0^2\,y = 20\,\sin(\omega\,t)$. Setze $y(0) = 10$, $\dot{y}(0) = 0$. Diskutiere die 3 möglichen Fälle.

Hinweis: $m\,\ddot{y} + b\,\dot{y} + c\,y = \ldots,\ \ 2\,\delta = \dfrac{b}{m},\ \ \omega_0^2 = \dfrac{c}{m}\ \Rightarrow\ \ldots$

$\delta =$ *Dämpfungsfaktor,* $\omega_0 =$ *Eigenfrequenz,* $\omega_d^2 = \omega_o^2 - \delta^2 =$ *Schwingungsfrequenz.*

(b) Wie hängt die Amplitude von y vom Parameter ω ab?

Viel Glück!

WIR

2.7 Test: Differentialgleichungen III/21

Abschrift • *Copie*

Löse ohne Laplace–Transformationen:

(1)

$$y'' + a\,y = b\,x$$

(2)

$$y'' - y = e^x\,\sin(x)$$

(3)

$$y''' - y'' + y' - y = x^2 + 2\,x + 1$$

(4)

$$y''' + y'' + y' + y = x^2 + 2\,x + 1$$

(5)

$$y' = \frac{y}{2\,\cos^2(x)}$$

(6)

$$y'''' = y + e^x + 1$$

(7) Ist die Funktionenmenge $\{x_1, y_2, y_3\} = \{\sin(x), \cos(x), x\,\cos(x)\}$ eine l.u. Lösungsmenge (Basislösungen) einer lin. D'gl. mit konstanten Koeffizienten? Falls ja, so ist eine solche D'gl. anzugeben.

Viel Glück!

2.8 Test: Reihen, Potenzreihen, Differentialgleichungen II/54

Abschrift • *Copie*

(1) (a) $y' = y^2 - x^2 + \sin(x-y) \rightsquigarrow$ Richtungsfeld?

(b) $y' = \dfrac{\tan(x-y)}{y} \cdot x + x \cdot y \rightsquigarrow$ Richtungsfeld?

(2) Berechne die ersten 8 Glieder der Potenzreihe:

(a)

$$f(x) = \sin(x) \cdot \cos(-x) - \sin(-2\,x), \;\; x_0 = 0$$

(b)

$$f(x) = (x^3 - 2\,x^2 + x - 1)(\sin(x) - \cos(x)), \;\; x_0 = 0$$

(3) Bestimme den Konvergenzbereich:

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x^n + x^{n-1})\,\frac{(n-1)}{n!}$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{x}}{(n! + (2n)!)}$$

(4) Untersuche, ob die folgenden Reihen konvergieren:

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n})}{(\sqrt{n} - n \cdot \sqrt[3]{n})} \cdot e^n$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n) - \ln(2\,n)}{e^n - n^2}$$

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{n}}{n + \sqrt{n}}$$

Viel Glück!

WIR

2.9 Test: Reihen, Potenzreihen, Differentialgleichungen II/55

Abschrift • *Copie*

(1) ⊘ Entwickle die folgenden Funktionen je in eine Potenzreihe bis Restglieder von $O[x^7]$.
⊘ Berechne, falls möglich, den Konvergenzradius.

(a)

$$f(x) = \frac{e^{-x} + \sin(x)}{2}, \;\; x_0 = 0$$

(b)

$$f(x) = x^3 - 2\,x^2 + 8\,x - 1 - ln(\frac{x}{2}), \;\; x_0 = 1$$

(c)

$$f(x) = (\cos(x)) \cdot (\sin(x))$$

(2) Untersuche, ob die folgenden Reihen konvergieren (Begründung notwendig!):

(a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2\,n+3})^n}$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^{n-1}}{(n+1)^{n+1}}$$

(c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{3\,n+1})^7$$

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{3\,n+1})^{\frac{1}{n}}$$

(3) Skizziere das Richtungsfeld:

$$y' = -\frac{x\,\sin(y)}{y\,\sin(x)} + \sin(x \cdot y)$$

Hinweis: Genügend viele Linienelemente!

Viel Glück!

WIR

2.10 Test: Differential und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$, Differentialgleichungen II/60

Abschrift • *Copie*

(1) (a) $y\,' = e^{-(x+y)} + \sin(x) + \cos(y),\ \ (x, y) \in D = [0,\ 2\,\pi] \times [0,\ 2\,\pi] \rightsquigarrow$ Richtungsfeld?

(b) $y\,' = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{y^2}{x^3} \rightsquigarrow$ Vollständige Lösung?

(2) Körper $K = K(OP_1P_2P_3),\ \ P_1 = (1; 0; 0),\ \ P_2 = (; 3; 0),\ \ P_3 = (0; 0; 2)$. (Skizze!) Berechne den Abstand des Schwerpunktes von K von der (y, z)–Ebene!

(3) Gegeben ist eine zum Ursprung zentrische Hohlkugel H mit dem inneren Radius 1 und dem äusseren Radius 2. (Skizze!) Berechne folgendes Integral:

$$\iiint\limits_{H} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\, dV = \,?$$

(4) A ist die Oberfläche einer Halbkugel K_H, welche ihr Kugelzentrum im Ursprung hat und deren Punkte keine negativen z–Koordinaten besitzen. Zudem ist $f(P) = \vartheta,\ \ \vartheta =$ Winkel zwischen dem Radius durch P und der z–Achse. (Skizze!) Berechne:

$$\iint\limits_{K_H} f\, dA$$

(5) Auf der (x, y)–Ebene senkrecht steht ein Zylinder Z, dessen Achse die z–Achse ist. Z hat die Höhe 25 und den Radius 10. Eine Schnittebene Φ steht senkrecht auf der (y, z)–Ebene und geht durch die Punkte $P_1(0, -10, 0)$ und $P_2(0, 10, 25)$. Φ schneidet die obere Hälfte des Zylinders weg. Das verbleibende Volumen heisst Z_1.
Eine durch die z–Achse gehende Ebene Ψ_1 bildet mit der x–Achse den Winkel $+45^o$ und eine weitere durch die z–Achse gehende Ebene Ψ_2 bildet mit der x–Achse den Winkel $+90^o$ (Skizze!) Ψ_1 und Ψ_2 schliessen demnach einen Winkel von 45^o ein und schneiden in diesem Winkel ein kuchenstückartiges Volumen aus Z_1 aus. Dadurch entsteht der Körper Z_2. A sei die von Z an Z_2 verbleibende gerundeten äussere Mantelfläche mit dem Radius 10!
Weiter ist $f(x, y, z) = y \cdot z$. Berechne:

$$\iint\limits_{A} f\, dA$$

Viel Glück!

WIR

2.11 Test: Equations différentielles, analyse vectorielle II/61

Abschrift • *Copie*

(1) (a)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\,x \cdot \cos(y)\,dx)dy = \,?$$

(b) f est harmonique $\Leftrightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{d^2\,f}{d\,y^2} \;:=\; \triangle f = 0.$
Est–ce que $f(x,y) = e^{-x}\,\cos(x)$ est harmonique?

(c)

$$f(x,y,z) = \sin(x,y,z),\;\; \frac{\partial}{\partial x} \triangle\, f = \,? \qquad (\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})$$

(d)

$$w(x,y,z) = x^2\,e^{y\,z} + y\ln(z) \;\Rightarrow\; dw = \,?$$

(2) (a) Donné: Cylindre $Z(R,h)$, r = rayon, h = hauteur.

$$r = 20\,mm \pm 0.02\,mm,\;\; h = 40\,mm \pm 0.02\,mm$$

Estimer l'erreur max. du volume V par la différentielle!

(b)

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4 \;\Rightarrow\; \frac{d\,y}{d\,x} = \,?$$

(c)

$$f(x,y) = x^2 \cdot \ln(y),\;\; P(5;1) = P_0,\;\; \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Derivée directionnelle de f au point P_0 en direction de $\vec{v}$?

(3) (a) $f(x,y) = (x^2 + 3\,y^2)\,e^{-(x^2+y^2}$. Chercher les minimums et les maximums!
(b) $f(x,y,z) = 4\,x^2 + y^2 + z^2$. Trouver les extrémums de f sous la contrainte $x + 2\,y - z = 1$!

(4) Chercher la solution:

(a)

$$y\,' = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

(b)

$$y\,' + 2\,y = 3\,x,\;\; y(1) = 1$$

(c)

$$y\,'' + 2\,y\,' + y = 3\,e^{-x}$$

(d)

$$y\,'' + 4\,y\,' + 5\,y = 0$$

%

(5)

$$y' = \sin(x + 2\,y), \quad x, y \in [2,\ 2]$$

(a) Champ de direction?

(b) Solution sous la contrainte $y(0) = 0$? (Esquisse!)

Bonne chance!

2.12 Test: Nichtlineare Gleichungen, Differentialgleichungen, Numerik I/60

Abschrift • *Copie*

(1) $f(x) = \frac{1}{3}\cos(x) + \frac{1}{10} - x. \leadsto$ Löse $f(x) = 0$ mit $x > 0$!

Approximiere die kleinste Nullstelle dieser Gleichung wie folgt:

(a) Newton–Methode

(b) Fixpunktmethode

(c) Regula falsi (sofern einfach möglich)

Wähle als Startwert $x_1 = 0.3$ und für die Regula falsi noch $x_2 = 0.5$.
Vergleiche die Anzahl Rechenschritte bis zu einer Genauigkeit von 6 Stellen hinter dem Komma bei den verschiedenen Methoden. Beurteile damit die Methoden!

(2)

$$y'' = \cos(y') + e^y \sin(x), \;\; y(0) = 1, \;\; y(0) = 0, \;\; \Delta y = 0.1\,.$$

Berechne $y(0.1)$ approximativ mit Hilfe von Runge–Kutta!

(3)

$$\{(x_i; y_i)\} = \{(2; 0.5), (3; -0.7), (4; 0.9), (5; 0.4), (6; 0.8)\}$$

(a) Berechne das Interpolationspolynom $p(x)$ mit minimalem Grad durch die gegebenen Stützstellen mit Hilfe des Newton–Verfahrens.

(b) Annahme: $|f^{(n)}| \leq 1.1\cdot$ |max. Sekantensteigung bei Stützstellen|. $f(x_i)$ sei dabei der Wert der wirklichen Funktion. Wie gross ist dann $|f(x) - p(x)|$ maximal?

(c) Beurteile die letzte Annahme mit Hilfe eines abschätzbaren Wertes für $f^{(4)}$. (Methode der Binomialkoeffizienten.)

(d) Berechne eine Näherung von $\int\limits_2^6 f(x)\,dx$ mit Hilfe des Simpson–Verfahrens.

(e) Berechne eine Näherung von $\int\limits_2^6 p(x)\,dx$ und vergleiche diesen Wert mit dem erhaltenen Wert in der vorangegangenen Teilaufgabe.

Viel Glück!

WIR

Kapitel • Chapitre 3

Serien mit „Differentialgleichungen und Laplace–Transformationen“ — Séries avec ”Equations différentielles et transformations de Laplace”

3.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Srofgebiete war nie vorhanden.

3.2 Test: Equations différentielles, transformations de Laplace, calcul intégral dans le $\mathbb{R}^n$ III/09

Abschrift • *Copie*

(1)

$$\underline{\left| \begin{array}{rcl} y' & = & y + 2\,z \\ z' & = & 2\,y + z + f(t) \end{array} \right|}, \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad y(0) = z(0) = 0$$

$$f(t) \quad = \quad \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \leq t \end{cases}$$

$$\leadsto \qquad y(t) = \,?$$

(2)

$$y'' + k \cdot y' + y = \delta(t), \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad k \in [0,\ 0.1]$$

$\leadsto$ $y(t) = ?$, esquisse?

(3)

$$\iint\limits_V \frac{1}{(4\,x - 4\,y + 1)^2}\,dx\,dy = \,?$$

Bord de V: $x = \sqrt{-y}, \ \ x = y, \ \ x = 1$.

Indication: Choisir $x = u + v, \ \ y = v - u^2$.

(4) Calculer le volume du solide qui se trouve au–dessus de la surface du cône $z^2 = x^2 + y^2$ et à l'extérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et en plus à l'intérieur du cône $(z+4)^2 = 4(x^2 + y^2)$. (Calcul sur la feuille!)

Bonne chance!

WIR

3.3 Test: Equations différentielles, transformations de Laplace, calcul intégral dans le $\mathbb{R}^n$ III/09a

---

Abschrift • *Copie*

(1)

$$\underline{\left| \begin{array}{lcl} y' & = & y+2\,z \\ z' & = & 2\,y+z+f(t) \end{array} \right|}, \;\; y=y(t), \;\; z=z(t), \;\; y(0)=z(0)=0$$

$$f(t) \;=\; \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & 0\leq t<1 \\ 0 & \leq t \end{cases}$$

$$\leadsto \qquad y(t)=\,?$$

(2)

$$y''+k\cdot y'+y=\delta(t), \;\; y(0)=y'(0)=0, \;\; k\in[0,\; 0.1]$$

$\leadsto$ $y(t)=$?, esquisse?

(3)

$$\int\!\!\int_V \frac{1}{(4\,x-4\,y+1)^2}\,dx\,dy=\,?$$

Bord de V: $x=\sqrt{-y}$, $x=y$, $x=1$.

Indication: Choisir $x=u+v$, $y=v-u^2$.

(4) Calculer le volume du solide qui se trouve au–dessus de la surface du cône $z^2=x^2+y^2$ et à l'intérieur de la sphère $x^2+y^2+z^2=1$

Bonne chance!

WIR

3.4 Test: D'gleichungen, Laplace–Transformationen III/12

Abschrift • *Copie*

(1) Löse allgemein:

$$y'' - y' - 2\,y = 2\,x$$

(2) Löse:

$$y^{(6)} + y^{(4)} - y^{(2)} - y = e^{x}\,\sin(t)$$

(3) Löse:

$$y' - y = x^2$$

(a) Mit Lösungsverfahren für Differentialgleichungen.

(b) Mit Potenzreihenansatz.

Viel Glück!

3.5 Test: D'gleichungen, Laplace–Transformationen III/13

Abschrift • *Copie*

(1) Suche die allgemeine Lösung:

$$2\,y^{(4)} - 4\,y^{(2)} + 2\,y = -8 + (\sqrt{2}\,t)^2$$

(2)

$$\left|\begin{array}{lcl} \cos(4\,t) & = & \frac{1}{2}\,y'' + 2\,y + 8\,y' \\ y(0) & = & 1 \\ y'(0) & = & 1 \end{array}\right| \quad \text{AWP: } y(t) = \,?$$

(3) Löse:

$$\left|\begin{array}{lcl} y' - 7\,y & = & e^{7\,x} \\ y(0) & = & 0 \end{array}\right| \quad \text{AWP: } y(x) = \,?$$

(4) Löse:

$$\left|\begin{array}{lcl} y' + y & = & \sin(x) \\ y(0) & = & 1 \end{array}\right| \quad \text{AWP: } y(x) = \,?$$

(5) Löse:

$$\left|\begin{array}{lcl} y''' + x - 1 & = & (x+1)(x-1) - x^2 \\ y(0) & = & 0 \\ y'(0) & = & 0 \\ y''(1) & = & \frac{1}{12} \end{array}\right| \quad \text{AWP / RWP: } y(x) = \,?$$

Viel Glück!

3.6 Test: D'gleichungen, Laplace–Transformationen, Diff'rechn. im $\mathbb{R}^n$, Vektorgeom. III/14

Abschrift • *Copie*

(1)

$$\left| \begin{array}{lcl} y'' - g\,y' + 8\,y & = & 4\,\sum\limits_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\,\pi) \\ y(0) & = & 0 \\ y'(0) & = & 1 \end{array} \right|$$

Beschreibe die Lösung!

Was passiert?

(2) Gegeben ist die Ebene $\Phi: \; x - 2\,y + 4\,z - 3 = 0$. Eine Gerade g' liegt in der (x, y)–Ebene H_1 und geht durch den Ursprung. Sie schliesst mit der x–Achse den Winkel $\alpha = \dfrac{\pi}{7}$ ein.

(a) Wie gross ist die Steigung in (z–Richtung bezüglich H_1) der Geraden $g \subset \Phi$, deren Projektion in H_1 die Gerade g' ist? (Skizze!)

(b) Wie gross ist die Steigung in (z–Richtung bezüglich H_1) der Geraden g, welche über dem Punkte $(1; 2) \in H_1$ Tangente ist an die Fläche $x^2 - 2\,y^2 + 4\,z - 3 = 0$? (Skizze!)

(3)

$$f(x, y) = 2\,x^2 + 3\,x\,y - 2\,y^2 + 3 - 3\,y + 4$$

(a) Extrema?

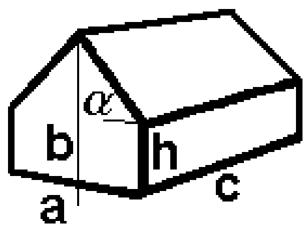
(b) Berechne die Tangentialebene in $P(x; y; f(x, y)) = (2; 3; f(2; 3))$.

(c) Liegt $(3; 2; 5)$ in der Tangentialebene?

(4) Löse: Haus mit symmetrischem Satteldach:

$V = 500\ m^3, \;\; \alpha = 45^o$

Bestimme a, b, c, h so, dass die Oberfläche minimal ist!



(a) Für den Fall $a = c$.

(b) Für den Fall, dass keine Bedingung gestellt ist.

Viel Glück!

WIR

3.7 Test: D'gleichungen, Laplace–Transformationen III/17

Abschrift • *Copie*

(1)

$$y'' = \sin(y') + e^y \cos(x), \;\; y(0) = 1, \;\; y(0) = 0$$

$\rightsquigarrow$ Berechne einen Näherungswert für $y(0.1)$ nach Runge–Kutta, $\Delta x = 0.1$.

(2)

$$y' = \sin(y) + x\, e^y \cos(x)$$

$\rightsquigarrow$ Richtungsfeld?

(3)

$$y' = e^y\, y^{-2}\, x + y^2 \sin(y\, x^2)$$

$\rightsquigarrow$ Wo existiert die Lösung nicht? — Ist die Lösung nicht eindeutig?

(4)

$$y' = \frac{y}{x} + y^4 + 1$$

$\rightsquigarrow$ Berechne die allgemeine Lösung!

(5)

$$2\, y''' - 3\, y'' - 4\, y' = -2\, x + y'', \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = y''(0) = -1, \;\; y = \,?$$

(6)

$$f(t) = (t^2\, e^{2\,t}) * (\cos(2\,t) + 2\,t^3)$$

$\rightsquigarrow$ Laplace–Transformierte von $f(t)$?

(7)

$$y' - 7\,x = e^{7\,x}, \;\; y(0) = 0$$

Löse die Differentialgleichung mit Hilfe von Laplace-Transformationen!

Viel Glück!

3.8 Test: D'gleichungen, Laplace–Transformationen III/18

Abschrift • *Copie*

(1) Transformiere mit Hilfe der Regeln:

(a)

$$f(t) = t \cdot \cos(4\,t - 7), \quad F(s) = \,?$$

(b)

$$F(s) = \frac{2\,s + 1}{(s^2 - 1)(s + 1)}, \quad f(t) = \,?$$

(2) Berechne die Funktion $y(t)$, die das folgende Gleichungssystem erfüllt:

$$\begin{array}{rcl} y' & = & z' \\ y + 2\,z & = & 2\,y' + z' + f(t) \end{array}$$

Dabei gilt $y(0) = 0$, $z(0) = 0$. Weiter ist $f(t)$ wie folgt gegeben:

$$f(t) \quad = \quad \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & 1 \leq t \end{cases}$$

(3) Es ist bekannt, dass ein gegebenes physikalisches System durch die folgende Differentialgleichung beschrieben wird:

$$y'' + y = \delta(t), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

Für $t > 0$ ist das System frei von äusseren Einwirkungen. Unter Laborbedinungen muss man jedoch einsehen, dass das System nicht als Idealfall vorliegt. Daher führt man nicht das Glied $k \cdot y'$ ein, um die vorhandene Dämpfung zu beschreiben. Dabei ist $k \in [0,\ 0.1]$. Damit hat man eine veränderte Differentialgleichung gegeben:

$$y'' + k \cdot y' + y = \delta(t), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

(a) Löse die beiden Differentialgleichungen.

(b) Beurteile, ob k im angegebenen Bereich zu sinnvollen Resultaten führt.

(c) Vergleiche die Lösungen für $t = 2\,\pi$ an der Stelle $k = 0.1$.

(d) Was passiert für $k < 0$?

Viel Glück!

WIR

3.9 Test: Differentialgeometrie und Kurven, Differentialgleichungen und Laplace–Transformationen III/22

Abschrift • *Copie*

Löse ohne Laplace–Transformationen:

(1)

$$\begin{array}{rcl} y'' + b\,y' + c\,y &=& \delta(t-1) \\ y(0) &=& 0 \\ y'(0) &=& 0 \end{array}$$

Berechne die Lösungsfunktion für folgende Fälle und erkläre den Unterschied zwischen den Lösungen:

(a) $b = c = 1$ (b) $b = 1,\ c = -1$

(2)

$$\begin{array}{rcl} y'' + p\,y' + z &=& e^{-t} \\ z' + y &=& f(t) \\ y(0) &=& 2 \\ y'(0) &=& 1 \\ z(0) &=& -2 \end{array} \qquad f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,t & t \in [0,\,2) \\ f(t + n\,2) & n \in \mathbb{Z},\ t \in [0,\,2) \end{cases}$$

Untersuche, wie sich $y(t)$ und $z(t)$ verhalten für $t \to \infty$.

(3) Gegeben ist die Kurve $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + t^6 \\ t^2 + t^4 \\ \sin(t) \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$.

(a) Berechne die Parametergleichung der Tangente $\vec{\tau}(t)$ für den Punkt mit $t = 1$.

(b) Suche den Schnittpunkt dieser Tangente mit der (x, y)–Ebene. (Skizze).

(c) Skizziere den Graphen der Projektion der Kurve $\vec{v}(t)$ auf die (x, y)–Ebene. Bestimme allenfalls kritische Punkte wie Knoten oder Spitzen. (Rechnung!)

Viel Glück!

WIR

3.10 Test: Differentialgleichungen und Laplace–Transformationen, Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$ III/23

Abschrift • *Copie*

(1) Suche die Laplace–Transformierte:

(a)

$$f(t) = t^4\, e^{-t(t-4)} + t^4 \cos(4\,(t-4) - \frac{\sin 4\,t}{t}$$

($t^4 \cos(4\,(t-4)$ *mit exponentieller Dämpfung.)*

(b)

$$g(t) = \int\limits_0^t f(\tau)\, d\tau \quad \text{mit } f \text{ von vorhin.}$$

(2) Suche die Laplace–Transformierte durch Rechnung:

(a)

$$f(t) = |\sin(t)|$$

(b)

$$g(t) \;=\; \begin{cases} 0 & t \in [0,\, \pi] \\ |\sin(t)| & t \geq \pi \end{cases}$$

(3) Löse die folgenden AWP mit Hilfe von Laplace–Transformationen:

(a)

$$\begin{aligned} y' - 7\,y &= e^{7\,x} \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} y' + y &= \sin(x) \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} y''' - 3\,y'' + 3\,y' - y &= t^2\, e^t \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 0 \\ y''(0) &= -2 \end{aligned}$$

(4) Gegeben ist ein keilförmiger Körper mit den Eckpunkten $(0;0;0)$, $(1;0;0)$, $(1;1;0)$, $(0;1;0)$, $(0;0;1)$, $(0;1;1)$. Berechne exakt:

$$\int\limits_V (x - y + z)\, dV$$

(5) (a) Das durch den Ursprung sowie die Punkte $(0.1, 0)$ und $(0, 2)$ gegebene rechteckige Gebiet heisst G. Berechne näherungsweise:

$$\int\limits_G \frac{\arctan(x)}{x}\, dG$$

(b) K sei die Kugel mit dem Radius 1 und dem Zentrum im Ursprung. Berechne:

$$\int\limits_K \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dK$$

Hinweis: $dx\, dy\, dz = D\, dr\, d\alpha\, d\beta, \quad D = r^2 \sin(\beta)$, *Kugelkoordinaten.*

Viel Glück!

3.11 Test: Differentialgleichungen, Laplace–Transformationen — équations différentielles, transformations de Laplace III/24

Abschrift • *Copie*

Löse: • *Résoudre:*

(1)

$$\begin{array}{rcl} y''' - 3\,y'' + 3\,y' - y & = & t^2\,e^t \\ y(0) & = & 1 \\ y'(0) & = & 0 \\ y''(0) & = & 0 \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{rcl} y'' + 4\,y' + 16\,y & = & 2\,\cos(4\,t) \\ y(0) & = & 1 \\ y'(0) & = & 1 \end{array}$$

(3)

$$y^{(4)}(x) = 8,\;\; y(0) = y(4) = y''(0) = y''(4) = 0$$

Hinweis: Verwende Parameter $y'(0) = \alpha$, $y'''(0) = \beta$. Berechne $y(x, \alpha, \beta)$. Verwende dann die Randbedingungen.
• *Indication: Utiliser les paramètres $y'(0) = \alpha$, $y'''(0) = \beta$. Calculer $y(x, \alpha, \beta)$. Utiliser les conditions aux limites.*

(4)

$$y^{(4)} - 2\,y^{(2)} + y = t^2 - 4,\;\; y(t) = \,?$$

(Allgemeine Lösung!) • *(Solution générale!)*

(5)

$$y' = 3\,(x^2 + 1)\,y + e^{(x^3)},\;\; y(t) = \,?$$

(Allgemeine Lösung!) • *(Solution générale!)*

(6)

$$(y')^4 = \frac{1}{4\,x^2}$$

Wo existieren die Lösungen? Wo sind sie eindeutig? Hinweis: Richtungsfeld.
• *Où est–ce que les solutions existent–elles? Où est–ce qu'elles sont univoques? Indication: Champ de direction.*

Viel Glück!

WIR

3.12 Test: D'gleichungen, Laplace–Transformationen III/25

Abschrift • *Copie*

Löse: • *Résoudre:*

(1)

$$\begin{aligned} -y''' + 3\,y'' - 3\,y' + y &= t^2\, e^t \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 0 \\ y''(0) &= -2 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} y'' + 9\,y &= \cos(2\,t) \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} y'' + 9\,y &= 4\,\delta(t) \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} y'' + x' &= 0 \\ y' - x(t) &= 0 \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 0 \\ x(0) &= 0 \end{aligned}$$

Viel Glück!

WIR

3.13 Test: Differentialgleichungen, Laplace–Transformationen, Vektoranalysis III/27

Abschrift • *Copie*

(1) Sei $\vec{a}^t = (x, x^2, x^3)$ und $\vec{b}^t = (e^x, \sin(x), \cos(x))$, Berechne den nachstehenden Ausdruck auf möglichst einfache Weise:

$$\langle\vec{b}, \bigtriangledown\rangle\,\vec{a} - \bigtriangledown \times (\bigtriangledown \times \vec{b}) - \langle\vec{a}, \bigtriangledown\rangle\,\vec{b} + \vec{b} \times (\bigtriangledown \times \vec{a}) + \bigtriangleup\,\vec{a} + \vec{a} \times (\bigtriangledown \times \vec{b}) + \bigtriangledown\langle\bigtriangledown, \vec{a}\rangle$$

(2) Löse mit Hilfe von Laplace–Transformationen:

$$\begin{aligned} 0.5\,y'' + y' + 0.5\,y &= 4.5\,e^{2x} \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

(3) Löse mit Hilfe von Laplace–Transformationen:

$$\begin{aligned} 2\,y'' + 10\,z' + 4\,y &= 0 \\ z'' + 4\,y' + 3\,z &= 0 \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0 \\ z(0) &= 0 \\ z'(0) &= 0 \end{aligned}$$

(4) Löse mit Hilfe von Laplace–Transformationen:

$$R\,i + L\,\frac{d\,i}{d\,t} + \frac{1}{C}\int i\,dt = \bar{U}_0\,\delta(t)$$

Angaben:
Schwingkreis, Spannungsstoss, **allw Anfangswerte sind** 0, gegeben sind $R, L, C, \bar{U}_0$.

Viel Glück!

WIR

3.14 Test: D'gleichungen, Laplace–Transformationen III/46

Abschrift • *Copie*

(1) Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y''' + 3\,y'' + 3\,y' + y = f(t).$$

(a) Sei $f(t) = e^{-t}$. Wieviele Integralkurven gehen durch den Origo und haben dort eine horizontale Wendetangente?

(b) Skizziere die Kurven über $I = [-1,\ 6]$.

(c) Berechne im letzten obigen Fall Extrema und Wendepunkte.

(d) Sei $f(t) = \delta(t),\ \ y(0) = -1,\ \ y'(0) = y''(0) = 0$. Wächst die damit erhaltene Lösung stärker als die oben erhaltene Lösung für $t \to \infty$?

(2) Gegeben:

$$y''(t) + k \cdot y' + 3\,y'(t) + y(t) = \delta(t),\ \ y(0) = y'(0) = 0.$$

k sei klein, d.h. $k \in [0,\ 1]$.

(a) Für welche k hat die Gleichung eine mindestens marginal stabile Lösung $y_k(t)$?

(b) Berechne die Nullstellen von $y_k(t),\ \ t > 0$.

(c) Was passiert für $k < 0$? (Stabilität!)

(3) Löse allgemein $\quad x \cdot y' + 3\,y = x^2.$

(4) Löse $\quad r \cdot s \cdot y - (r + s - 1)\,y' \cdot x + y''\,x^2 = 0,\ \ y = y(x),\ \ x \in (0,\ a).$
Hinweis: Ansatz $y = x^\alpha$

(5) Gegeben ist das System $\left|\begin{array}{lcl} u' - \tan(x) \cdot u & = & \sin(u) \\ y' & = & \dfrac{y}{x} + 4 \end{array}\right| \qquad \begin{array}{l} u = u(x) \\ y = y(x) \end{array}$

(a) Suche $u_0(x)$ als Lösung der 1. Gleichung mit $u_0(0) = 0$.

(b) Suche $y_0(x)$ als Lösung der 2. Gleichung mit $y_0(\pi) = u_0(\pi)$.

(c) Berechne ${y_0}'(x)$ für $x \to \infty$ sowie das Infimum resp. Minimum von ${y_0}'(x)$.

Viel Glück!

Kapitel • Chapitre 4

Serien mit „Laplace–Transformationen“ — Séries avec ”Equations différentielles et transformations de Laplace”

4.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Srof-fgebiete war nie vorhanden.

4.2 Test: Transformations de Laplace III/10

Abschrift • *Copie*

(1) Résoudre:

$$y'' + y = t,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = -2$$

(2) (a) Résoudre:

$$y''' - 3\,y'' + 3\,y' - y = t^2\,e^t = f(t),\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0,\ \ y''(0) = -2$$

(b) Le même problème avec:

$$f(t) = \delta(t)$$

(3) Résoudre:

$$t\,y'' + 2\,y' + t\,y = 0,\ \ y(0^+) = 1,\ \ y(\pi) = 0$$

(Idéé: $y'(0^+) = C$, p.ex. $\dfrac{d}{d\,s}(Y(s)\cdot s^2 - s\cdot y(0^+) - y'(0^+)) = ?$)

Bonne chance!

WIR

4.3 Test: Laplace–Transformationen III/11

Abschrift • *Copie*

(1) Löse allgemein:

$$y'' + 3\,y' - 6\,y = -12\,x^3 + 18\,x^2 + 12\,x - 12$$

(2) Löse:

$$y'' + 4\,y' + 4\,y = \sin(t), \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0$$

(3) Löse:

$$y''' + x - 1 = (x+1)(x-1) - x^2, \;\; y(0) = 0, \;\; y'(0) = 0, \;\; y''(1) = \frac{1}{12}$$

Viel Glück!

4.4 Test: Fourieranalysis, Laplace-Transformationen III/47

Abschrift • *Copie*

(1)

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & t \in [-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}] \\ \cos(t)) & t \in (\frac{\pi}{2},\ \frac{3\,\pi}{2}) \\ f_1(t + 2\,n\pi) & n \in \mathbb{Z},\ \ t + 2\,n\pi \in [-\frac{\pi}{2},\ \frac{3\,\pi}{2}) \end{cases}$$

(a) Skizziere f_1.

(b) Berechne die Koeffizienten der Fourierreihe von f_1.

(c) Berechne die Koeffizienten der komplexen Fourierreihe von f_1.

(d) Integriere f_1 derart, dass eine ungerade Funktion entsteht. Entwickle diese in eine Fourierreihe.

(2)

$$f_2(t) = -t,\ \ t \in [-\pi,\ 0)$$

(a) Setze $f_2(t)$ periodisch fort, sodass die Periode $T = 2\,\pi$ wird und dass $f_2(t)$ danach eine gerade Funktion ist.

(b) Benütze die Formel von Parseval, um $\sum\limits_{n+1}^{\infty} \frac{1}{(2\,n-1)^4}$ zu berechnen.
Hier dürfen die Koeffizienten einer Tabelle entnommen werden.

(3) Sei $f_3(t) = H(t) \cdot e^{-a \cdot t},\ \ a > 0,$ *($H(t)$: Einheitssprung für $t = 0$).*

(a) Berechne die Fouriertransformierte $F_3(\Omega)$.

(b) Skizziere die Graphen des Amplitudenspektrums und des Phasenspektrums.

(4) Sei

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} e^{a \cdot t} \cdot (t - \lambda) & t \in [0,\ 1] \\ 0 & t \notin [0,\ 1] \end{cases}$$

$$f_4(t) = e^{a \cdot t},\ \ g(t) = t,\ \ t \in [0,\ 1]$$

(a) Berechne die Faltung $(f_4 * g)(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{a \cdot \mu} \cdot (\mu - t)\, d\mu = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_t(\mu)\, d\mu.$

(b) Verifiziere den Faltungssatz.

Viel Glück!

WIR

Kapitel • Chapitre 5

Serien mit „z–Transformationen“ — Séries avec ”Transformations en z”

5.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Srofgebiete war nie vorhanden.

5.2 Test: z–Transformationen III/26

Abschrift • *Copie*

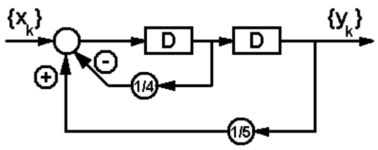
(1) Berechne $\mathcal{Z}^{-1}[Y(z)]$ für:

(a) $Y(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$

(b) $Y(z) = \dfrac{3\,z + z^2 + 5\,z^5}{z^5}$

(c) $Y(z) = \dfrac{1+z}{z^3} + \dfrac{3\,z}{3\,z+1}$

(2) (a)



Start: Ruhezustand

i. Finde die Differenzengleichung!

ii. Berechne die Impulsantwort!

(b)

$$2\,y_{k+2} - 2\,y_{k+1} + y_k = u_{k+1} - u_k$$

i. Berechne die Transferfunktion!

ii. Untersuche, ob das System stabil ist!

(3) Die Transferfunktion eines Systems ist gegeben durch $G(z) = \dfrac{z}{8\,z^2 + 6\,z + 1}$.

(a) Entwerfe ein Blockdiagramm! (Herleitung nach mathematischen Regeln!)

(b) Berechne die Impulsantwort!

Viel Glück!

WIR

5.3 Test: z–Transformationen, Vektoranalysis III/48

Abschrift • *Copie*

(1) (a) Transformiere $\{\frac{1}{k!}\}_{k=0}^{\infty}$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$ „einfache Funktion".

(b) $F(z) = ln(\frac{z}{z-1}) \rightsquigarrow$ Rücktransformation, $F(z)$ $\bullet\!\!-\!\!\circ$?
Hinweis: Potenzreihe von $F(z)\ldots$

(c) $G(z) = \frac{z}{z^2 - 3\,z + 2} \rightsquigarrow$ Impulsantwort?

(2) $(\{y_k\} = \{(-1)^k - 3^k\},\ \ k \geq 0)$ ist die Impulsantwort

$\oslash$ Transferfunktion? $\oslash$ Differenzengleichungen?

$\oslash$ Blockdiagramm? $\oslash$ Schrittantwort?

(3) Das Volumen eines Körpers K mit der Oberfläche A ist eingeschlossen duch den Schnitt von vier Ebenen durch den Ursprung und die Punkte $(1;0;0)$, $(0;1;0)$, $(0;0;1)$. Die Einschlussbedingungen lassen sich daher fassen durch $x, y, z \geq 0 \ \wedge\ x+y+u \leq 1$. Weiter hat man durch $\vec{u} = \begin{pmatrix} x^3\,y \\ x^2\,y^2 \\ x^2\,y\,z \end{pmatrix}$ ein Vektorfeld gegeben. Berechne das Integral $\oiint_A \langle \vec{u}, d\vec{A}\rangle$.

(4) Zeige mit Hilfe der Formeln für *grad*, *div*, *rot*:

(a) $\iiint_V \langle grad\,\varphi, rot\,\vec{F}\rangle\, dV = \oiint_A \vec{F} \times grad\,\varphi\, d\vec{A}$

(b) Falls die letzte Aufgabe nicht gelingt, so versuche es mit $\varphi = x+y+z$, $\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(5) Sei • *Soit* $\gamma:\ [1,\ 2] \longmapsto \{\begin{pmatrix} e^{t-1} \\ \sin(\frac{\pi}{t}) \end{pmatrix}\} \subset \mathbb{R} \rightsquigarrow \int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle = \int_\gamma \langle \begin{pmatrix} 2\,x\,\cos(y) \\ -x^2\sin(y) \end{pmatrix}, d\vec{s}\rangle = ?$
Hinweis: $\vec{F}$ = Gradientenfeld?

(6) Sei $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 36\,x\,y + 6\,y\,\cos(x) \\ 3 + 6\,\sin(x) + z\,\sin(y) \\ 18\,x^2 - \cos(y) \end{pmatrix}$. Weiter sei HK_1 die Halbkugel mit Zentrum im Ursprung, Radius $R = 1$ und $z \geq 0$. Zudem ist $P_1 = (1;0;0)$, $P_2 = (0;1;0)$ und $|\gamma|$ = Spur des kürzesten Weges von P_1 nach P_2 auf der Halbkugeloberfläche (Viertelkreisbogen mit $R = 1$ in der Grundebene).

(a) Untersuche, ob $\int_{P_1}^{P_2} \langle \vec{F}, d\vec{r}\rangle$ wegabhängig ist.

(b) Untersuche, ob man auf einfache Art $\oiint_A \langle rot\ \vec{F}, d\vec{A}\rangle$ sowie $\oint_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{r}\rangle$ berechnen kann!

Viel Glück!

WIR

Kapitel • Chapitre 6

Serien mit „Fourieranalysis“ — Séries avec ”Analyse de Fourier”

6.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Srofgebiete war nie vorhanden.

6.2 Test: Fourieranalysis, Potenzreihen III/01

Abschrift • *Copie*

(1) Entwickle in eine Potenzreihe:

$$f(x) = (1 + k\,x)^r, \ \ |k \cdot x| < 1, \ \ r \in \mathbb{R}.$$

(2) Sei:

$$f(t) \ = \ \begin{cases} t & t \in [-\frac{\pi}{3}, \ \frac{\pi}{3}] \\ 1 & t \in (\frac{\pi}{3}, \ \frac{2\,\pi}{3}) \\ \pi - t & t \in [\frac{2\,\pi}{3}, \ \frac{4\,\pi}{3}] \\ -1 & t \in (\frac{4\,\pi}{3}, \ \frac{5\,\pi}{3}) \end{cases}$$

Dazu ist $f(t + 2\,\pi) = f(t)$.

(a) Entwickle f in eine Fourierreihe (Skizze!).

(b) Verschiebe den Ursprung in $P_0(2\,\pi, 0)$. Aus $f(t)$ wird dann $f_1(t')$, wobei t' die Variable im neuen KS ist. Entwickle $f_1(t')$ in eine Fourierreihe.

(c) Berechne eine Näherung für $\frac{1}{2\,\pi} \int\limits_0^{2\,\pi} f^2(t)\,dt, \ \ f^2(t) = (f(t))^2$.

(3) Sei

$$f(t) \ = \ \begin{cases} -\sin(t) & t \in [\pi, \ 2\,\pi] \\ 0 & t \not\in [\pi, 2\ \pi] \end{cases}$$

Bestimme die Fouriertransformierte von $f(t)$ (Skizze!).

(4) Gegeben: Skalarfeld $\varphi(x, y, z) = x\,y + 2$, Vektorfeld $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x\,y \\ -y^2 \\ z^3 \end{pmatrix}$,

Weg $\gamma : t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix}, \ \ t \in [1, \ 2]$.

(a) Besitzt $\vec{F}$ eine Potentialfunktion $u(x, y, z)$? (D.h. $grad(u(x, y, z)) = \vec{F}(x, y, z)$.)

(b) $\int\limits_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle = \ ?$

(c) Gibt es eine Beziehung zwischen $\vec{F}$ und $grad(\varphi)$?

Viel Glück!

WIR

6.3 Test: Fourieranalysis III/02

Abschrift • *Copie*

(1)

$$f_1(t) \quad = \quad \begin{cases} \sin(\frac{t}{2}) & t \in I_1 = [0,\ 2\,\pi] \\ f_1(t+2\,n\pi) & n \in \mathbb{Z},\ \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(a) Skizziere f_1.

(b) Entwickle f_1 in eine Fourierreihe.

(2)

$$f_2(t) \quad = \quad \begin{cases} t & t \in I_2 = [-\pi,\ \pi] \\ f_1(t+2\,n\pi) & n \in \mathbb{Z},\ \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

a_0, a_k, b_k können in einer Tabelle nachgeschlagen werden. Berechne ohne Formelsammlung die Fourierkoeffizienten A_0, A_k, A_k von $f_2(t) = (f_1(t))^2$ aus denen von $f_1(t)$.

(3) Wende auf obiges f_2 die Parsevalsche Gleichung an. Berechne damit die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$.

(4) $f_4(t) = (\dfrac{t}{\pi})^3 - \dfrac{t}{\pi},\ \ t \in I_2,\ \ f_2\ 2\,\pi$–periodisch.

(a) Berechne ohne Formelsammlung die Fourierreihe von f_4.

(b) Welche Zahlenreihe entsteht für $t = \dfrac{\pi}{2}$?

(5)

$$f_5(t) \quad = \quad \begin{cases} k \cdot (e^t - 1) & t \in I_5 = [0,\ ln(2)] \\ 0 & t \notin I_5 \end{cases}$$

Berechne die Fouriertransformierte von f_5 ohne Tabelle.

Viel Glück!

6.4 Test: Fourieranalysis III/03

Abschrift • *Copie*

(1)

$$f_1(t) \quad = \quad \begin{cases} \sin(t) & t \in I_1 = [-\pi,\ \pi] \\ f_1(t+2\,n\pi) & n \in \mathbb{Z},\ \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(a) Wir gehen davon aus, dass die Fourierkoeffizienten a_k und b_k bekannt sind (Tabelle). Berechne daraus ohne Tabelle die Fourierkoeffizienten A_k und B_k von $f_2(x) = f_1^2(x)$.

(b) Benütze die Parsevalsche Gleichung und berechne damit die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^4}$.

(c) Berechne ohne Formelsammlung die Fourierreihe der $2\,\pi$–periodischen Funktion $f_3(t) = (\dfrac{t}{\pi})^3 - \dfrac{t}{\pi},\ \ t \in I_1$. Welche Zahlenreihe entsteht für $t = \dfrac{\pi}{2}$?

(2) (a) $f_4(t) = \sin(t) + \dfrac{\sin(2\,t)}{2} + \dfrac{\sin(3\,t)}{3} + \ldots$ stellt vermutlich eine Sägezahnfunktion dar. Man versuche herauszufinden, sie die Polynomschreibweise in $(0,\ 2\,\pi)$ gegebenenfalls lautet.

(b) Benutze das eben erhaltene Resultat, um das entsprechende Problem für $\sum\limits_{n+1}^{\infty} \dfrac{\cos(n\,x)}{n^2}$ in $(0,\ 2\,\pi))$ zu lösen. *Hinweis: Integration.*

(c) Berechne mit Hilfe des nun erhaltenen Resultates $\sum\limits_{n+1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ und $\sum\limits_{n+1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

(d) Wie lautet die komplexe Schreibweise von f_4?

(3) Berechne die Spektralfunktion (Fourier-Transformierte) von $f_5(x) = e^{-a\,|t|},\ \ a > 0$ (symmetrisch abfallender Impuls).

Viel Glück!

6.5 Test: Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$, Fehlerrechnung, Fourieranalysis III/05

Abschrift • *Copie*

(1) (a)

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{6} \ \wedge \ 0 \leq z \leq 12\}, \ \ f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$

$$\leadsto \int\limits_V f(x,y,z)\, dV = \,? \quad \text{(Skizze!)}$$

(b) In einen Körper mit rechteckigem Grundriss und $x \in [-12,\ 12]$, $y \in [-12,\ 12]$ und $z \in [0,\ 12]$ wird längs der z–Achse ein Loch mit Radius $r = 6$ gebohrt. Anschliessend wird die Menge aller Punkte mit negativer x–Koordinate weggeschnitten $\leadsto$ V. Dazu ist $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Wie gross ist $\int\limits_V f(x,y,z)\, dV$? (Skizze!)

(2)

$$f(x,y,z) = (x^2+y^2)\,\cos(x-y) + \frac{1}{x^2+y^2}\,\arctan(z)$$

$$x_1 = 10 \pm 0.2, \ \ y_1 = 11 \pm 0.2, \ \ z_1 = 0.9 \pm 0.05$$

$$f(x_1,y_1,z_1) \pm \Delta f = \,?$$

(3) (a)

$$f(t) = 2 + \frac{1}{4\,\pi}\,t \text{ für } t \in [0,\ 2\,\pi), \ \ f(t+2\,n\,\pi) = f(t) \text{ für } t \in \mathbb{R}, \ \ n \in \mathbb{Z}$$

$\leadsto$ Leite die Fourierreihe her!

(b)

$$f(t) = e^{-3\,t-t} \text{ für } t \in [0,\ 2\,\pi), \ \ f(t+2\,n\,\pi) = f(t) \text{ für } t \in \mathbb{R}, \ \ n \in \mathbb{Z}$$

$\leadsto$ Leite die Fourierreihe her!

(c)

$$f(t) = e^{-3\,t-t} \text{ für } t \in [0,\ 2\,\pi), \ \ f(t) = 0 \text{ für } t \not\in [0,\ 2\,\pi]$$

$$\hat{f}(\Omega) = \,?$$

Viel Glück!

WIR

6.6 Test: Analyse de Fourier III/06

Abschrift • *Copie*

(1) $f(t) = t,\ \ t \in [-\pi,\ \pi)$. Périodique $(T = 2\,\pi)$.

$$f(t) = 2(\sin(t) - \frac{1}{2}\sin(2\,t) + \frac{1}{3}\sin(3\,t) - \ldots)$$

(a) Esquisse de $f_m(t) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos(k\,t) + b_k \sin(k\,t)$ pour $m = 4$?

(b) $h_2(t) = t^2,\ \ t \in [-\pi,\ \pi)$. Périodique $(T = 2\,\pi)$. $\rightsquigarrow$ Série de Fourier? (Calcul, méthode libre.)

(c) $h_3(t) = t^3,\ \ t \in [-\pi,\ \pi)$. Périodique $(T = 2\,\pi)$. $\rightsquigarrow$ Série de Fourier? (Calcul, méthode libre.)

(d) $h_4(t) = t^4,\ \ t \in [-\pi,\ \pi)$. Périodique $(T = 2\,\pi)$. $\rightsquigarrow$ Série de Fourier? (Calcul, méthode libre.)

(e) Appliquer le théorème de Parseval pour $h_4(t)$. $\rightsquigarrow$ Calculer une formule pour π^8.

(2) (a) $g(t) = t^2 + 2\,t + 1 = (t+1)^2,\ \ t \in [-\pi,\ \pi)$. Périodique $(T = 2\,\pi)$. $\rightsquigarrow$ Série de Fourier? (Calcul, méthode libre.)

(b) $f(t) = t,\ \ t \in [0,\ \pi),\ \ f(t) = \pi,\ \ t \in [\pi,\ 2\,\pi)$. Périodique $(T = 2\,\pi)$. $\rightsquigarrow$ Série de Fourier? (Calcul, méthode libre.)

Bonne chance!

WIR

6.7 Test: Analyse de Fourier III/07

Abschrift • *Copie*

(1) (a) $f_1(x) = x^2,\ \ x \in (-\pi,\ \pi]$. Périodique ($T = 2\,\pi$).
$\rightsquigarrow$ Série de Fourier? (Calcul, méthode libre.)

Indication: $f_0(x) = x,\ \ x \in (-\pi,\ \pi]$. *Périodique* ($T = 2\,\pi$)
$\Rightarrow\ f_0(x) = 2\,(\sin(x) - \frac{1}{2}\sin(2\,x) + \frac{1}{3}\sin(3\,x) - \ldots)$

(b) $f_1(x) =\big|_{x=0} f(0) = \ldots \ \Rightarrow\ \pi^2 = \,?\, \rightsquigarrow$ Série pour π^2, approximation: 10 termes?

(2) (a) $f_2(x) = x^3,\ \ x \in (-\pi,\ \pi]$. Périodique ($T = 2\,\pi$). $\rightsquigarrow$ Série de Fourier?
(Calcul, utiliser résultat de $f_1(x) = x^2$.)

(b) $f_3(x) = 3\,x^3 - 2\,|x| + 1,\ \ x \in [0,\ \pi)$. Périodique ($T = 2\,\pi$).
$\rightsquigarrow$ Série de Fourier? (Calcul, méthode libre.)

Bonne chance!

WIR

6.8 Test: Analyse de Fourier III/08

Abschrift • *Copie*

(1) $v(t) = 1 - t,\;\; t \in [0,\; 1)$. Périodique $(T = 1)$. $\rightsquigarrow$ Série de Fourier de forme complexe?

(Calcul, méthode libre, $v(t) \rightsquigarrow c_0 + \sum\limits_{n=-\infty,\;\; n\neq 0}^{\infty} c_n \cdot e^{i\,n\,\omega\,t}$.)

(2) (a) $(f(t) = 1,\;\; t \in [0,\; 1)) \;\vee\; (f(t) = 4 - t,\;\; t \in [2,\; 4))$. Périodique $(T = 4)$.
$\rightsquigarrow$ Série de Fourier? (Calcul, le résultat précédent peut être util. . .)

(b) Utiliser $f(t)$ pour calculer à l'aide de la formule de Parseval une expression pour la solle suivante: $\sum\limits_{n^1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \,?$

(3) Calculer la transformée de Fourier de

$$((f(x) = 1,\;\; |x| \leq a) \;\vee\; ((f(x) = 0,\;\; |x| > a)) \;\wedge\; (a > 0).$$

Bonne chance!

WIR

6.9 Test: Differentialgeometrie und Kurven, Vektoranalysis, Fourieranalysis III/28

Abschrift • *Copie*

(1) Gegeben: $\vec{F}(x,y,z)) \begin{pmatrix} -4\,y+4\,z \\ -x\,y+6\,y-8\,z \\ 4\,x-8\,y+6\,z \end{pmatrix}$, Streckenzug $\gamma: \ \overline{P_0P_1P_2P_3P_4P_5}$ mit $P_0(2;3;1)$, $P_a(1;3;1)$, $P_2(1;5;1)$, $P_3(1;3;1)$, $P_4(1;5;1)$, $P_5(1;5;3)$.

$$\int\limits_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{r}\rangle = ?$$

(2) (a) In der (x,y)–Ebene ist eine Kurve γ gegeben, welche ein Gebiet G umschliesst:

$$\gamma: \ \varphi \longmapsto r(\varphi) = 1-\cos(\varphi), \ \ \varphi \in [0,\ 2\,\pi]$$

Berechne die Krümmung $\kappa(\varphi)$ und skizziere die Kurve.

(b) Berechne die Kurvenlänge von γ.

(c) Berechne den Flächeninhalt von G.

(d) Sei $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} y-x \\ x+y \\ x^2-2\,y \end{pmatrix}$, $\vec{H}(x,y) = \begin{pmatrix} 2\,x+1 \\ x \\ x-2\,y \end{pmatrix}$.

$$\text{Berechne} \quad \oint_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{r}\rangle \quad \text{sowie} \quad \oint_{\gamma} \langle \vec{H}, d\vec{r}\rangle.$$

(e) Über G werde ein Zylinder Z der Höhe 1 errichtet. Berechne den Fluss Φ von $\vec{H}$ durch die gesamte Oberfläche von Z.

(3) In der (x,y)–Ebene liegt eine endliche Fläche A, welche von einer Kurve γ umschlossen wird. Weiter ist ein Feld $\vec{u}$ gegeben: $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1(x,y,z) \\ u_2(x,y,z) \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\iint\limits_{A} \langle \text{rot } \vec{u}, d\vec{A}\rangle = ?$$

Hinweis: Einfacher Ausdruck!

(4) Berechne die Fourierreihe von $f(t) = \sin(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{3})$, $t \in [0,\ 2\,\pi)$, $\forall_t f(t) = f(t+2\,\pi)$.

Viel Glück!

WIR

6.10 Test: Komplexe Analysis, Fourieranalysis III/33

Abschrift • *Copie*

(1) Sei $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y),\ \ z = x + i\, y \in \mathbb{C},\ \ u(x, y) = x \cdot y$

(a) Konstruiere, falls möglich, eine Funktion $f(z)$, welche in $\mathbb{C}$ holomorph ist.

(b) Suche, falls möglich, die Fixpunkte (resp. den Fixpunkt) von f sowie das Bild der imaginären Achse.

(2) Sei $f(z) = \dfrac{3\,z + 9}{3 - 3\,z}$.

(a) Bestimme die Fixpunkte sowie das Bild von deren arithmetischem Mittel.

(b) Bestimme $f(f(z))$ sowie $f(f(f(z)))$.

(c) Bestimme möglichst einfach $f^{-1}(z)$.

(d) Bestimme das Bild der imaginären Achse.

(3) (a) Berechne direkt und ohne Tabelle die Fourierreihe von $f(t) = \sin^6(t)$.

(b) Der Weg γ ist durch den folgenden Streckenzug gegeben: $|\gamma| = \overline{A_\gamma P_1 P_2 E_\gamma}$ mit $A_\gamma = 1,\ \ P_1 = 1 + i,\ \ P_2 = -1 + i,\ \ E_\gamma = -1$. Fertige von der Spur des Weges eine Skizze an und berechne

$$\int\limits_{C=|\gamma|} \frac{1}{z}\, dz.$$

Viel Glück!

6.11 Test: Fourieranalysis, Laplace-Transformationen III/47

Abschrift • *Copie*

(1)

$$f_1(t) \;=\; \begin{cases} 0 & t \in [-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}] \\ \cos(t)) & t \in (\frac{\pi}{2},\ \frac{3\,\pi}{2}) \\ f_1(t+2\,n\pi) & n \in \mathbb{Z},\ \ t+2\,n\pi \in [-\frac{\pi}{2},\ \frac{3\,\pi}{2}) \end{cases}$$

(a) Skizziere f_1.

(b) Berechne die Koeffizienten der Fourierreihe von f_1.

(c) Berechne die Koeffizienten der komplexen Fourierreihe von f_1.

(d) Integriere f_1 derart, dass eine ungerade Funktion entsteht. Entwickle diese in eine Fourierreihe.

(2)

$$f_2(t) = -t,\ \ t \in [-\pi,\ 0)$$

(a) Setze $f_2(t)$ periodisch fort, sodass die Periode $T = 2\,\pi$ wird und dass $f_2(t)$ danach eine gerade Funktion ist.

(b) Benütze die Formel von Parseval, um $\sum\limits_{n+1}^{\infty} \frac{1}{(2\,n-1)^4}$ zu berechnen.
Hier dürfen die Koeffizienten einer Tabelle entnommen werden.

(3) Sei $f_3(t) = H(t) \cdot e^{-a \cdot t},\ \ a > 0,$ *($H(t)$: Einheitssprung für $t = 0$).*

(a) Berechne die Fouriertransformierte $F_3(\Omega)$.

(b) Skizziere die Graphen des Amplitudenspektrums und des Phasenspektrums.

(4) Sei

$$f_\lambda(t) \;=\; \begin{cases} e^{a \cdot t} \cdot (t-\lambda) & t \in [0,\ 1] \\ 0 & t \notin [0,\ 1] \end{cases}$$

$$f_4(t) = e^{a \cdot t},\ \ g(t) = t,\ \ t \in [0,\ 1]$$

(a) Berechne die Faltung $(f_4 * g)(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{a \cdot \mu} \cdot (\mu - t)\, d\mu = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_t(\mu)\, d\mu.$

(b) Verifiziere den Faltungssatz.

Viel Glück!

WIR

6.12 Test: Fourieranalysis, Vektoranalysis II/68

Abschrift • *Copie*

(1)

$$f(t) \;=\; \begin{cases} t & t \in [0\ a] \\ 0 & t \not\in [0\ a] \end{cases}$$

Bestimme die Fouriertransformierte $\hat{f}(\Omega)$ durch Berechnung.
Achtung: Für $\hat{f}(\Omega) = \hat{f}(0)$ ist eine spezielle Abklärung notwendig.

(2)

$$g(t) \;=\; \begin{cases} t+1 & t \in [-1,\ 1) \\ 0 & t \in [1,\ 2] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Bestimme die Fouriertransformierte von $\hat{g}(\Omega)$.
Die Verwendung von Tabellen ist erlaubt.

(b) Bestimme den Definitionsbereich von $\hat{g}(\Omega)$ sowie den Grenzwert für $\Omega \to 0$.

(3) Sei $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} 2\,x\,x \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}$. Berechne $\int\limits_C \langle \vec{v}, d\vec{r} \rangle$ ($d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$) längs der Kurve

$$C = \{ \begin{pmatrix} \sin(t) \\ r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0,\ 2\,\pi] \}.$$

Hinweis: Verlege die Betrachtung in den $\mathbb{R}^3$ und kläre ab, ob es sich bei $\vec{v}$ um ein konservatives Feld handelt. Dann könnte eine Potentialfunktion weiterhelfen. . .

(4) Sei $\vec{F}(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} x^2 \\ 2\,x\,y \\ z \end{pmatrix}$. Untersuche, ob und wo allenfalls das Feld $\vec{F}$ Quellen resp. Senken hat. Berechne dann den Fluss von $\vec{F}$ durch die Oberfläche des Einheitswürfels W,

$$W = \{(x;y;z) \mid 0 \le x,y,z \le 1\}.$$

(5) Das Gebiet G ist von der Kurve C umschlossen.

$$C = \{(x;y) \mid x = \cos(t),\;\; y = \sin(t) \cdot \cos(t),\;\; t \in [-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\}.$$

Berechne mit Hilfe des Satzes von Green den Inhalt von G.

Viel Glück!

WIR

6.13 Test: Fourieranalysis, Potenzreihen II/69

Abschrift • *Copie*

(1) (a) Entwickle $f_1(x) = e^{x^2} + e^x$ in eine Potenzreihe bis zum 6. Glied um $x_0 = 0$.

(b) Was ist der Konvergenzradius der Potenzreihe von f_1? (Begründung!)

(c) Berechne mit Hilfe der Potenzreihe von f_1 eine Näherung von $\int\limits_0^2 f_1(x)\,dx$.

(2) (a) Skizziere die Funktion

$$f_2(t) \quad = \quad \begin{cases} |t| + t & t \in (-\pi,\ \pi] \\ f_2(t + 2\,n\pi) & n \in \mathbb{Z},\ \ t + 2\,n\pi \in (-\pi,\ \pi] \end{cases}$$

(b) Entwickle $f_2(t)$ in eine Fourierreihe!

(c) Kann man $f_2(t)$ in eine Potenzreihe entwickeln? — Wie sieht eine solche Entwicklung aus? — Begründung!

(3)

$$g(t) \quad = \quad \begin{cases} e^{-a\,t} & t \in [0,\ \infty) \\ 0 & t \notin [0,\ \infty) \end{cases}$$

Berechne die Fouriertransformierte von $g(t)$.

(4) Erkläre das Phänomen von Gibbs!

Viel Glück!

WIR

Kapitel • Chapitre 7

Serien mit „Differentialgeometrie und Kurven, Vektoranalysis“ • *Séries avec ”géométrie différentielle, courbes, analyse vectorielle”*

7.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Srofgebiete war nie vorhanden.

7.2 Test: Differentialgeometrie und Kurven, Differentialgleichungen und Laplace–Transformationen III/22

Abschrift • *Copie*

Löse ohne Laplace–Transformationen:

(1)

$$\begin{aligned} y'' + b\,y' + c\,y &= \delta(t-1) \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

Berechne die Lösungsfunktion für folgende Fälle und erkläre den Unterschied zwischen den Lösungen:

(a) $b = c = 1$ (b) $b = 1,\ c = -1$

(2)

$$\begin{aligned} y'' + p\,y' + z &= e^{-t} \\ z' + y &= f(t) \\ y(0) &= 2 \\ y'(0) &= 1 \\ z(0) &= -2 \end{aligned} \qquad f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,t & t \in [0,\,2) \\ f(t+n\,2) & n \in \mathbb{Z},\ t \in [0,\,2) \end{cases}$$

Untersuche, wie sich $y(t)$ und $z(t)$ verhalten für $t \to \infty$.

(3) Gegeben ist die Kurve $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + t^6 \\ t^2 + t^4 \\ \sin(t) \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) Berechne die Parametergleichung der Tangente $\vec{\tau}(t)$ für den Punkt mit $t = 1$.

(b) Suche den Schnittpunkt dieser Tangente mit der (x, y)–Ebene. (Skizze).

(c) Skizziere den Graphen der Projektion der Kurve $\vec{v}(t)$ auf die (x, y)–Ebene. Bestimme allenfalls kritische Punkte wie Knoten oder Spitzen. (Rechnung!)

Viel Glück!

WIR

7.3 Test: Differentialgleichungen, Laplace–Transformationen, Vektoranalysis III/27

Abschrift • *Copie*

(1) Sei $\vec{a}^t = (x, x^2, x^3)$ und $\vec{b}^t = (e^x, \sin(x), \cos(x))$, Berechne den nachstehenden Ausdruck auf möglichst einfache Weise:

$$\langle \vec{b}, \bigtriangledown \rangle\, \vec{a} - \bigtriangledown \times (\bigtriangledown \times \vec{b}) - \langle \vec{a}, \bigtriangledown \rangle\, \vec{b} + \vec{b} \times (\bigtriangledown \times \vec{a}) + \triangle\, \vec{a} + \vec{a} \times (\bigtriangledown \times \vec{b}) + \bigtriangledown \langle \bigtriangledown, \vec{a} \rangle$$

(2) Löse mit Hilfe von Laplace–Transformationen:

$$\begin{aligned} 0.5\, y'' + y' + 0.5\, y &= 4.5\, e^{2x} \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

(3) Löse mit Hilfe von Laplace–Transformationen:

$$\begin{aligned} 2\, y'' + 10\, z' + 4\, y &= 0 \\ z'' + 4\, y' + 3\, z &= 0 \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0 \\ z(0) &= 0 \\ z'(0) &= 0 \end{aligned}$$

(4) Löse mit Hilfe von Laplace–Transformationen:

$$R\, i + L\, \frac{d\, i}{d\, t} + \frac{1}{C} \int i\, dt = \bar{U}_0\, \delta(t)$$

Angaben:
Schwingkreis, Spannungsstoss, **allw Anfangswerte sind** 0, gegeben sind $R, L, C, \bar{U}_0$.

Viel Glück!

WIR

7.4 Test: Differentialgeometrie und Kurven, Vektoranalysis, Fourieranalysis III/28

Abschrift • *Copie*

(1) Gegeben: $\vec{F}(x,y,z)) \begin{pmatrix} -4\,y+4\,z \\ -x\,y+6\,y-8\,z \\ 4\,x-8\,y+6\,z \end{pmatrix}$, Streckenzug $\gamma:\ \overline{P_0P_1P_2P_3P_4P_5}$ mit $P_0(2;3;1)$, $P_a(1;3;1)$, $P_2(1;5;1)$, $P_3(1;3;1)$, $P_4(1;5;1)$, $P_5(1;5;3)$.

$$\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{r}\rangle = \,?$$

(2) (a) In der (x,y)–Ebene ist eine Kurve γ gegeben, welche ein Gebiet G umschliesst:

$$\gamma:\ \varphi \longmapsto r(\varphi) = 1-\cos(\varphi),\ \ \varphi \in [0,\ 2\,\pi]$$

Berechne die Krümmung $\kappa(\varphi)$ und skizziere die Kurve.

(b) Berechne die Kurvenlänge von γ.

(c) Berechne den Flächeninhalt von G.

(d) Sei $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} y-x \\ x+y \\ x^2-2\,y \end{pmatrix}$, $\vec{H}(x,y) = \begin{pmatrix} 2\,x+1 \\ x \\ x-2\,y \end{pmatrix}$.

$$\text{Berechne}\ \oint_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{r}\rangle\ \text{sowie}\ \oint_\gamma \langle \vec{H}, d\vec{r}\rangle.$$

(e) Über G werde ein Zylinder Z der Höhe 1 errichtet. Berechne den Fluss Φ von $\vec{H}$ durch die gesamte Oberfläche von Z.

(3) In der (x,y)–Ebene liegt eine endliche Fläche A, welche von einer Kurve γ umschlossen wird. Weiter ist ein Feld $\vec{u}$ gegeben: $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1(x,y,z) \\ u_2(x,y,z) \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\iint_A \langle \text{rot}\ \vec{u}, d\vec{A}\rangle = \,?$$

Hinweis: Einfacher Ausdruck!

(4) Berechne die Fourierreihe von $f(t) = \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{3}),\ \ t \in [0,\ 2\,\pi),\ \ \forall_t f(t) = f(t+2\,\pi)$.

Viel Glück!

WIR

7.5 Test: Differential und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$, Vektoranalysis III/29

Abschrift • *Copie*

(1) Untersuche die Kurve $f(x,y) = x\,y\,(x+y) + x = 0$ auf spezielles Verhalten und skizziere die Kurve.

(2) (a) Zeige durch Rechnung:

$$(\vec{x} \times \vec{y})' = \vec{x}\,' \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{y}\,'.$$

(b) Zeige die Formel an einem Beispiel.

(3) (a) Gegeben ist $\vec{F}(x,y,z) = c \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2} \cdot \vec{e}_r,\ \ \vec{e}_r = \frac{1}{r} \cdot \vec{r},\ \ \vec{r} = \vec{r}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Berechne $div\,(\vec{F})$.

(b) $\varphi(x,y,z) = |\vec{F}(x,y,z)|$. Berechne $grad(\varphi)$.

Viel Glück!

7.6 Test: Diff'geometrie und Kurven, Vektoranalysis III/30

Abschrift • *Copie*

(1) Gegeben ist die Kurvenschar $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r\,\sin(\frac{t}{2}) \\ t^2 \\ r\,\cos(t) \end{pmatrix}$. ($r$ ist Scharparameter.)

(a) Berechne den Geschwindigkeitsvektor allgemein.

(b) Berechne die Tangente für $r = 1$ und $t = 0$.

(c) Berechne den Mittelpunkt des Krümmungskreises und den Krümmungsradius für $r = 1$ und $t = 0$.

(d) Berechne das begleitende Dreibein für $r = 1$ und $t = 0$.

(e) Skizziere die Kurve für $r = 1$ und trage obige Resultate in die Skizze ein. *(Diese Teilaufgabe wird nur dann bewertet, wenn die verwendeten Resultate richtig sind.)*

(f) Berechne die Torsion und den Torsionsradius für $r = 1$ und $t = 0$.

(g) Sei $\vec{v}(r, t)$ der oben berechnete Geschwindigkeitsvektor. Die Menge dieser Geschwindigkeitsvektoren bilden ein Vektorfled. Beschreibe dieses Vektorfled in der Form $\vec{v} = \vec{w}(x, y, z)$. ($r$ und t sind also zu ersetzen.)

(h) Berechne nun $rot\,(\vec{w})$ und entscheide, ob es sich um ein konservatives Feld handelt. *(Diese Teilaufgabe wird nur dann bewertet, wenn das verwendeten Resultate richtig ist.)*

(2) Gegeben ist $\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} e^{2\,(x+y)} \\ 2\,z^2 + y^2 - y + 1 \\ 2\,\sin(x\,z) \end{pmatrix}$.

Berechne $rot\,(grad(div\,(\vec{v})))$. *Die Teilresultate müssen gezeigt werden.*

(3) Sei $\vec{w}(x, y, z) = \begin{pmatrix} e^{2\,y^2} \\ 2\,z + y \\ \sin(y) \end{pmatrix}$ und $\gamma : \ \vec{x} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ -\cos(t) \end{pmatrix}, \ t \in [0,\ \pi]$.

Berechne das Kurvenintegral von $\vec{w}$ längs γ. *Die Teilresultate müssen sichtbar sein.*

Viel Glück!

WIR

7.7 Test: Differentialgeometrie und Kurven, Vektoranalysis III/34

Abschrift • *Copie*

(1) (a) Berechne mit Hilfe des Satzes von Gauss:

$$\oint_A \langle \operatorname{grad} \varphi, d\vec{A} \rangle = ?$$

(b) Überführe die Maxwell'sche Gleichung $-\oint_\gamma \langle \vec{E}, d\vec{s} \rangle = \dfrac{d}{dt} \iint\limits_A \langle \vec{B}, d\vec{A} \rangle$

in die Form $rot\ \vec{E} = -\dfrac{d\,\vec{B}}{d\,t}$.

(2) (a) Suche $\vec{u}$ möglichst einfach mit $rot\ \vec{u} = \begin{pmatrix} t(x,y,z) \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Sei G_1 = Kreis um den Ursprung mit Radius 1, G_2 einfach zusammenhängendes Gebiet mit glattem Rand, das den Ursprung nicht enthält, $\vec{u}$ wie oben gegeben. Berechne

$$\iint\limits_{A=G_2} \langle rot\ \vec{u}, d\vec{A} \rangle.$$

(c) Gegeben sei eine Ellipse in Normallage (Mittelpunkt im Ursprung, achsenparallel) mit der grossen Halbachse a (auf der x–Achse) und der kleinen Halbachse b (auf der y–Achse). Parametrisiere die Kurve und berechne den Krümmungsradius in $(a; 0)$ und $(0; b)$.

(3) (a) Gegeben sei ein einfach zusammenhängendes Volumen V im $\mathbb{R}^3$ mit der Oberfläche A. $\vec{r}$ ist der Ortsvektor eines Punktes auf der Oberfläche. Berechne

$$\oint_A \frac{\vec{e}_r}{r^2}\, d\vec{A}.$$

(b) Wähle V = Volumen der Kugel im den Ursprung mit Radius R. Berechne das obige Integral für diese Situation.

Viel Glück!

WIR

7.8 Test: Differentialgeometrie und Kurven, Vektoranalysis III/35

Abschrift • *Copie*

(1) Gegeben ist die Kurve C in Polarkoordinaten. C umschliesst das Gebiet D:

$$r(\varphi) = -1 + \cos(\varphi), \quad \varphi \in [0,\ 2\,\pi)$$

(a) Skizziere C.

(b) Berechne die Krümmung $\kappa(\varphi)$. Wo ist $\kappa = \pm\infty$?

(c) Berechne die Kurvenlänge von C.

(d) Berechne exakt den Flächeninhalt von D.

(e) Sei Sei $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} y - x \\ x + y \\ x^2 - 2\,y \end{pmatrix}$, $\vec{H}(x,y) = \begin{pmatrix} 2\,x + 1 \\ x \\ x - 2\,y \end{pmatrix}$.

$$\oint_C \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle = \,? \qquad \oint_C \langle \vec{G}, d\vec{r} \rangle = \,?$$

(f) Über G werde ein Zylinder Z der Höhe 1 errichtet. Berechne den Fluss Φ von $\vec{H}$ durch die gesamte Oberfläche von Z.

(2) Gegeben ist eine beliebige geschlossene Kurve in der (x,y)–Ebene durch die Parametrisierung $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Verwende das Vektorfeld $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ und leite damit eine Formel her zur Berechnung des Flächeninhalts des von C eingeschlossenen Gebiets.

(b) Suche ein anderes geeignetes Vektorfeld, das zu einer andern Formel für den Inhalt der besagten Fläche führt.

(c) Verifiziere die beiden Formel im Falle der Ellipse mit den Halbachsen a und b.

(3) A sei eine beliebige geschlossene Oberfläche. Berechne den Fluss des Vektorfeldes $\vec{v} = \dfrac{1}{r^3}\,\vec{r}$ durch A in den beiden unten angegebenen Fällen. $\vec{r}$ ist der Ortsvektor, welcher auf einen Punkt von A zeigt.

(a) Im Fall wo der Ursprung ausserhalb von A liegt.

(b) Im Fall wo der Ursprung innerhalb von A liegt.

Viel Glück!

WIR

7.9 Test: Differentialgeometrie und Kurven, Vektoranalysis III/36

Abschrift • *Copie*

(1) Gegeben ist die Kurve C in Polarkoordinaten:

$$r(\varphi) = -1 + \cos(\varphi), \;\; \varphi \in [0,\; 2\,\pi)$$

C umschliesst das Gebiet D.

(a) Skizziere C.

(b) Berechne die Krümmung $\kappa(\varphi)$. Wo ist $\kappa = \pm\infty$?

(c) Berechne die Kurvenlänge von C.

(d) Berechne exakt den Flächeninhalt von D.

(e) Sei Sei $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} y-x \\ x+y \\ x^2-2\,y \end{pmatrix}, \;\; \vec{H}(x,y) = \begin{pmatrix} 2\,x+1 \\ x \\ x-2\,y \end{pmatrix}$.

$$\oint\limits_C \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle = \,? \qquad \oint\limits_C \langle \vec{G}, d\vec{r} \rangle = \,?$$

(f) Über G werde ein Zylinder Z der Höhe 1 errichtet. Berechne den Fluss Φ von $\vec{H}$ durch die gesamte Oberfläche von Z.

(2) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = const.,\;\; a, b, \ldots, i =$ Parameter.

Sei weiter $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \;\; \vec{v} = A \cdot \vec{r}$. Somit ist $\vec{v} = \vec{v}(x,y,z)$ ein Vektorfeld.

(a) $div\; \vec{v} = \,?$

(b) $rot\; \vec{v} = \,?$

(c) Um welchen Typ Matrix muss es sich bei A handeln, damit $\vec{v}$ konservativ ist?

(d) Berechne die Potentialfunktion $\varphi(x,y,z) = \ldots$ mit $\varphi(0,0,0) = 0$.

(e) Sei $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \;\; \gamma$ ein beliebiger Weg von $(1;3;2)$ nach $(3;5;1)$.

$$W = \int\limits_\gamma \langle A \cdot \vec{r}, d\vec{r} \rangle = \,?$$

Viel Glück!

WIR

7.10 Test: Analys. im $\mathbb{R}^n$, kompl. Zahlen, Vektoranalysis III/37

Abschrift • *Copie*

(1) Diskutiere die algebraische Kurve $x^2 - 2\,x\,y + x^2 - y^4 = 0$.

(2) Gegeben ist das Vektorfeld $\vec{f}(x, y, z) = (2\,x^2 - x\,y, y^2 + y\,x, z^2 - x)^t$.
Berechne das Oberflächenintegral über die Oberfläche S des Einheitswürfels mit den Eckpunkten $(0; 0; 0)$, $(1; 0; 0)$, $(0; 1; 0)$, $(0; 0; 1)$:

$$I = \int\limits_S \langle \vec{f}(x, y, z), d\vec{S} \rangle = \,?$$

(3) Seien $f(x, y, z) = 3^{-1}\,(x^3 + y^3 + z^3)$ und $g(x, y, z) = x + y + z$.
Sei S die Oberfläche der Einheitskugel um den Ursprung. Berechne das Integral

$$I = \int\limits_S f \cdot \frac{\partial g}{\partial \vec{n}}\, dS = \,?$$

($\dfrac{\partial g}{\partial \vec{n}}$ ist die Richtungsableitung, $\vec{n} \perp$ Oberfläche.)

(4) Seien $a = 1 + i$, $b = (1 + i)\,2^{-0.5}$, $c = -i$. Bestimme sämtliche Lösungen der folgenden Gleichung in der Form $z_k = x + i\,y$:

$$(b + c - (x - a)^4)^2 - 4\,a\,b = 0$$

Viel Glück!

WIR

7.11 Test: Lineare Abbildungen, Differential– und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$, Vektoranalysis III/38

Abschrift • *Copie*

(1) Eine lineare Abbildung des 3–dimensionalen Raumes in sich besitzt die Abbildungsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Man weiss, dass alle Punkte der Geraden, die durch den Origo und den Punkt $P(1/1/1)$ geht, durch diese Abbildung unverändert gelassen werden, während der Punkt $A(4/-3/2)$ in $B(-6/1/2)$ übergeführt wird. Bestimme die fehlenden Elemente der Abbildungsmatrix und berechne den Bildpunkt D von $C(18/11/36)$!

(2) Gegeben sei ein 3–dimensionales Vektorfeld $\vec{X}$:

$$\vec{X} = \vec{X}(x, y, z) = x\,z\,\vec{e}_1 + x\,\sin(y)\,\vec{e}_2 + (z + e^x)\,\vec{e}_3.$$

Berechne das Linienintegral dieses Vektorfeldes längs des lückenlosen Weges $C = C_1 \cup C_2$, wobei C_1 ein Stück Parabel $z = x^3$ mit $x \in [0,\ 1]$ ist. C_2 verläuft parallel zur y–Achse mit $y \in [0,\ \pi],\ \ x = 1,\ \ z = 1$.

(3) Der Kaffee in einer zylinderförmigen Tasse mit Radius r wurde längere Zeit gleichmässig umgerührt. Die resultierende Kaffeeoberfläche (Querschnitt oben) ist durch ein quadratisches Polynom $y = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2$ bestimmt. In der Mitte steigt der Kaffee bis zur Höhe c, am Rand bis zur Höhe d. Um wieviel Kaffee handelt es sich? (D.h. $V = ?$)

(4) Gegeben sei die folgende Raumfläche im $\mathbb{R}^3$:

$$3\,x^2\,z - 4\,x\,y\,z - 7\,x + 4\,y = 5$$

(a) Man bestimme den einzigen Punkt der Raumfläche mit horizontaler Tangentialebene.

(b) Man bestimme die Tangentialebene in der Funktionsform $z = z(x, y)$.

(c) In dieser horizontalen Tangentialebene liegt das Dreieck, welches gegeben ist durch $A(10/0/z)$, $B(5/5/z)$ und $C(2/1/z)$. Man berechne das Volumen des Körpers der entsteht, wenn man das Dreieck rotieren lässt um die Parallele zur x–Achse in der horizontalen Tangentialebene.

Viel Glück!

WIR

7.12 Test: z–Transformationen, Vektoranalysis III/48

Abschrift • *Copie*

(1) (a) Transformiere $\{\frac{1}{k!}\}_{k=0}^{\infty}$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$ „einfache Funktion".

(b) $F(z) = ln(\frac{z}{z-1}) \rightsquigarrow$ Rücktransformation, $F(z)$ $\bullet\!\!-\!\!\circ$?
Hinweis: Potenzreihe von $F(z)\ldots$

(c) $G(z) = \frac{z}{z^2 - 3\,z + 2} \rightsquigarrow$ Impulsantwort?

(2) $(\{y_k\} = \{(-1)^k - 3^k\},\ k \geq 0)$ ist die Impulsantwort

$\oslash$ Transferfunktion? $\oslash$ Differenzengleichungen?

$\oslash$ Blockdiagramm? $\oslash$ Schrittantwort?

(3) Das Volumen eines Körpers K mit der Oberfläche A ist eingeschlossen duch den Schnitt von vier Ebenen durch den Ursprung und die Punkte $(1;0;0)$, $(0;1;0)$, $(0;0;1)$. Die Einschlussbedingungen lassen sich daher fassen durch $x, y, z \geq 0 \ \wedge \ x + y + u \leq 1$. Weiter hat man durch $\vec{u} = \begin{pmatrix} x^3\,y \\ x^2\,y^2 \\ x^2\,y\,z \end{pmatrix}$ ein Vektorfeld gegeben. Berechne das Integral $\oiint_A \langle \vec{u}, d\vec{A} \rangle$.

(4) Zeige mit Hilfe der Formeln für *grad*, *div*, *rot*:

(a) $\iiint_V \langle grad\,\varphi, rot\,\vec{F} \rangle\, dV = \oiint_A \vec{F} \times grad\,\varphi\, d\vec{A}$

(b) Falls die letzte Aufgabe nicht gelingt, so versuche es mit $\varphi = x + y + z$, $\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(5) Sei • *Soit* $\gamma:\ [1,\ 2] \longmapsto \{\begin{pmatrix} e^{t-1} \\ \sin(\frac{\pi}{t}) \end{pmatrix}\} \subset \mathbb{R} \rightsquigarrow \int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \int_\gamma \langle \begin{pmatrix} 2\,x\,\cos(y) \\ -x^2\,\sin(y) \end{pmatrix}, d\vec{s} \rangle = ?$

Hinweis: $\vec{F}$ = Gradientenfeld?

(6) Sei $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 36\,x\,y + 6\,y\,\cos(x) \\ 3 + 6\,\sin(x) + z\,\sin(y) \\ 18\,x^2 - \cos(y) \end{pmatrix}$. Weiter sei HK_1 die Halbkugel mit Zentrum im Ursprung, Radius $R = 1$ und $z \geq 0$. Zudem ist $P_1 = (1;0;0)$, $P_2 = (0;1;0)$ und $|\gamma| =$ Spur des kürzesten Weges von P_1 nach P_2 auf der Halbkugeloberfläche (Viertelkreisbogen mit $R = 1$ in der Grundebene).

(a) Untersuche, ob $\int_{P_1}^{P_2} \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle$ wegabhängig ist.

(b) Untersuche, ob man auf einfache Art $\oiint_A \langle rot\ \vec{F}, d\vec{A} \rangle$ sowie $\oint_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{r} \rangle$ berechnen kann!

Viel Glück!

WIR

7.13 Test: Equations différentielles, analyse vectorielle II/61

Abschrift • *Copie*

(1) (a)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\,x \cdot \cos(y)\, dx \right) dy = \,?$$

(b) f est harmonique $\Leftrightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{d^2 f}{d\,y^2} \;:=\; \triangle f = 0.$
Est–ce que $f(x,y) = e^{-x}\,\cos(x)$ est harmonique?

(c)

$$f(x,y,z) = \sin(x,y,z),\;\; \frac{\partial}{\partial x}\triangle f = \,? \qquad (\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})$$

(d)

$$w(x,y,z) = x^2\, e^{y\,z} + y\,ln(z) \;\Rightarrow\; dw = \,?$$

(2) (a) Donné: Cylindre $Z(R,h)$, $r =$ rayon, $h =$ hauteur.

$$r = 20\,mm \pm 0.02\,mm,\;\; h = 40\,mm \pm 0.02\,mm$$

Estimer l'erreur max. du volume V par la différentielle!

(b)

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4 \;\Rightarrow\; \frac{d\,y}{d\,x} = \,?$$

(c)

$$f(x,y) = x^2 \cdot ln(y),\;\; P(5;1) = P_0,\;\; \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Derivée directionnelle de f au point P_0 en direction de $\vec{v}$?

(3) (a) $f(x,y) = (x^2 + 3\,y^2)\,e^{-(x^2+y^2}$. Chercher les minimums et les maximums!
(b) $f(x,y,z) = 4\,x^2 + y^2 + z^2$. Trouver les extrémums de f sous la contrainte $x + 2\,y - z = 1$!

(4) Chercher la solution:

(a)

$$y\,' = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

(b)

$$y\,' + 2\,y = 3\,x,\;\; y(1) = 1$$

(c)

$$y\,'' + 2\,y\,' + y = 3\,e^{-x}$$

(d)

$$y\,'' + 4\,y\,' + 5\,y = 0$$

%

(5)

$$y\,' = \sin(x + 2\,y), \quad x, y \in [2,\ 2]$$

(a) Champ de direction?

(b) Solution sous la contrainte $y(0) = 0$? (Esquisse!)

Bonne chance!

7.14 Test: Fourieranalysis, Vektoranalysis II/68

Abschrift • *Copie*

(1)

$$f(t) \;=\; \begin{cases} t & t \in [0\ a] \\ 0 & t \notin [0\ a] \end{cases}$$

Bestimme die Fouriertransformierte $\hat{f}(\Omega)$ durch Berechnung.
Achtung: Für $\hat{f}(\Omega) = \hat{f}(0)$ ist eine spezielle Abklärung notwendig.

(2)

$$g(t) \;=\; \begin{cases} t+1 & t \in [-1,\ 1) \\ 0 & t \in [1,\ 2] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Bestimme die Fouriertransformierte von $\hat{g}(\Omega)$.
Die Verwendung von Tabellen ist erlaubt.

(b) Bestimme den Definitionsbereich von $\hat{g}(\Omega)$ sowie den Grenzwert für $\Omega \to 0$.

(3) Sei $\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} 2\,x\,x \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}$. Berechne $\int\limits_C \langle \vec{v}, d\vec{r}\rangle$ ($d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$) längs der Kurve

$$C = \{\begin{pmatrix} \sin(t) \\ r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0,\ 2\,\pi]\}.$$

Hinweis: Verlege die Betrachtung in den $\mathbb{R}^3$ und kläre ab, ob es sich bei $\vec{v}$ um ein konservatives Feld handelt. Dann könnte eine Potentialfunktion weiterhelfen. . .

(4) Sei $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ 2\,x\,y \\ z \end{pmatrix}$. Untersuche, ob und wo allenfalls das Feld $\vec{F}$ Quellen resp. Senken hat. Berechne dann den Fluss von $\vec{F}$ durch die Oberfläche des Einheitswürfels W,

$$W = \{(x; y; z) \mid 0 \leq x, y, z \leq 1\}.$$

(5) Das Gebiet G ist von der Kurve C umschlossen.

$$C = \{(x; y) \mid x = \cos(t),\ \ y = \sin(t) \cdot \cos(t),\ \ t \in [-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\}.$$

Berechne mit Hilfe des Satzes von Green den Inhalt von G.

Viel Glück!

WIR

Kapitel • Chapitre 8

Serien mit „Komplexe und holomorphe Funktionen" — Séries avec "Fonctions complexes et holomorphes"

8.1 Inhalt

Bei den nachfolgenden Testserien handelt es sich um Prüfungen in der Abteilung Elektrotechnik (manchmal aber auch Informatik, Mikrotechnik und Architektur), welche sich über verschiedene Stoffgebiete erstreckt haben. Die Zusammenstellung der Stoffgebiete erfolgte nach der vormals gegebenen Situation. Ein allgemeines gleichbleibendes Prinzip zur Zusammenstellung der Srofgebiete war nie vorhanden.

8.2 Test: Komplexe Zahlen und Abbildungen, Funktionen, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^1$ I/47

Abschrift • *Copie*

(1) Die Einzelschritte müssen sichtbar sein:

(a) Eine komplexe Zahl $z \neq 0$ wird abgebildet in $f(z) = \dfrac{|z|}{\bar{z}}$.
Wo liegt geometrisch das Bild bezüglich z? (Begründung!)

(b) $z_1 = 3 + 4\,i,\ \ z_2 = -2 - 5\,i \ \Rightarrow\ \dfrac{(z_1 - z_2)(z_1 + z_2^2)}{z_1} = \,?$

(2) (a) Was ist die Summe aller 5–ten Einheitswurzeln? (Begründung!)

(b) $(\dfrac{(2-3\,i)^2}{(2+3\,i)} + (2+3\,i)^{\frac{1}{6}}) - (2-3\,i) = \,?$

(3) $f(x) = 2\,x^3 + 4\,x^2 - 8\,x^{\frac{1}{2}} + 6,\ \ g(x) = e^x\, ln(x^2 + x),\ \ F(x) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$

(a) $F'(x) = \,?$ (Nach den Regeln ableiten, keine Umformungen!)

(b) Steigungswinkel der Tangente an die Kurve $F(x)$ für $x = 3$ in *rad* $\rightsquigarrow\ \alpha = \,?$

(4) $f(x) = e^{\frac{\sinh(x^2)}{(x+1)}},\ \ g(x) = x \cdot ln(\dfrac{e^{(x^2)}}{(x+1)})$.

(a) Berechne die Ableitungen von f und g.

(b) Entscheide, ob $f'(1) > g'(2)$ richtig ist.

Viel Glück!

8.3 Test: Algebra und Zahlentheorie, komplexe Zahlen, komplexe Abbildungen I/48

Abschrift • *Copie*

Version française: Voir http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/restricted/TestsAll.pdf

(1) Löse die folgende Restklassengleichung:

$$x \cdot 4 \equiv 8 \; mod \; 30$$

(2) Was sind transzendente Zahlen?
Notiere kurz, was sich dazu sagen lässt!

(3) $\dfrac{x^3 - x + 1}{x^2 + 5\,x - 6} \rightsquigarrow$ Partialbruchzerlegung?

(4) $z = 1+i$, $b = 2-i$. Berechne die folgenden Ausdrücke und zeichne die Resultate zusammen mit z und b in ein Koordinatensystem ein:

(a) $z^3 = \,?$

(b) $z^3 - b = \,?$

(c) $b \cdot (z^3 - b) = \,?$

(d) $\sqrt[5]{b \cdot (z^3 - b)} = \,?$

(e) $b + \sqrt[5]{b \cdot (z^3 - b)} = \,?$

(5) $z_n = r \cdot cis(\varphi_n)$, $r = 1$, $\varphi_n = \dfrac{n\,\pi}{8}$, $k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 14, 15\}$.

(a) Berechne für die 16 Zahlen z_n die Werte $w = \dfrac{-1}{z - i}$ und zeichne die Resultate in $\mathbb{C}$ ein. (Berechnungsformel angeben!)

(b) Wann gibt es keine Lösung?

Viel Glück!

8.4 Test: Algebra und Zahlentheorie, komplexe Zahlen, komplexe Abbildungen I/49

Abschrift • *Copie*

Version française: Voir http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/restricted/TestsAll.pdf

(1) Löse die folgende Restklassengleichung:

$$6 \cdot x \equiv 12 \; mod \; 50$$

(2) Lassen sich die Mächtigkeiten von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ vergleichen?
Notiere kurz, was sich dazu sagen lässt!

(3) $\dfrac{2\,x^3 - 1}{x^2 - x + 6} \rightsquigarrow$ Partialbruchzerlegung?

(4) $z = 1-i, \;\; b = 2+i$. Berechne die folgenden Ausdrücke und zeichne die Resultate zusammen mit z und b in ein Koordinatensystem ein:

(a) $z^3 = \,?$

(b) $z^3 + b = \,?$

(c) $b \cdot (z^3 + b) = \,?$

(d) $\sqrt[5]{b \cdot (z^3 + b)} = \,?$

(e) $b - \sqrt[5]{b \cdot (z^3 + b)} = \,?$

(5) $z_k = r \cdot cis(\varphi_k), \;\; r = 1, \;\; \varphi_k = \dfrac{k\,\pi}{8}, \;\; k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 14, 15\}$.

(a) Berechne für die 16 Zahlen z_k die Werte $w = \dfrac{-1}{z + i}$ und zeichne die Resultate in $\mathbb{C}$ ein. (Berechnungsformel angeben!)

(b) Wann gibt es keine Lösung?

Viel Glück!

8.5 Test: Algebra und Zahlentheorie, komplexe Zahlen, komplexe Abbildungen I/50

Abschrift • *Copie*

(1) Löse das folgende Restklassengleichungssystem:

$$\left|\begin{array}{rcl} 14\,x & \equiv & 28\,y+28\ mod\ 21 \\ 15\,x & \equiv & 20\,y+25\ mod\ 10 \end{array}\right|$$

(2) Was haben komplexe und transzendente Zahlen gemeinsam?

(3) $\dfrac{x^5+2\,x^4+3\,x^2+3\,x+3}{x^4+2\,x^3+2\,x^2+2\,x+1} \rightsquigarrow$ Partialbruchzerlegung?

(4) $w=\dfrac{z}{\bar{z}},\ z\in\mathbb{C}$. Wie liegen z und w in $\mathbb{C}$ geometrisch zueinander?

(5) $w=\dfrac{2}{i\,z-1},\ \ z=z_n=e^{i\,\varphi_n},\ \ \varphi_n=\dfrac{n\,\pi}{25},\ \ n\in\mathbb{Z}.$

$\rightsquigarrow$ Was erhält man für die $w=w_n$ geometrisch für eine „Figur “?
$\rightsquigarrow$ Skizziere die Lage der w_n in $\mathbb{C}$.

Viel Glück!

8.6 Test: Komplexe Zahlen, Algebra und Zahlentheorie, komplexe Abbildungen I/51

Abschrift • *Copie*

(1) $p_1(x) = x^2 - 5\,x + k$.

(a) Faktorisiere $p_1(x)$ für $k = 6$.

(b) Löse die Gleichung $p_1(x) = 0$ für $k = 6$.

(c) Löse die Ungleichung $p_1(x) \leq 0$ für $k = 6$.

(d) Löse $p_1(x) \leq 0$ und diskutieren das Lösungsverhalten für veränderte k.

(2) Ein Polynom p_2 4–ten Grades hat die Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$. x_3 und x_4 sind nicht explizit bekannt. Man weiss aber, dass die Summe aller Nullstellen -4 beträgt und das Produkt aller Nullstellen $+4$. Ausserdem ist $p_2(-1) = 1$.

(a) Wie lautet das Polynom (Näherung der Koeffizienten auf 4 Dezimalstellen genau).

(b) Stimmt die Ungleichung $p_2(-30) < p_2(\frac{3}{2})$? (Begründung!)

(3) $z_1 = 2 + i \cdot \sqrt{3}$.

(a) $\bar{z}_1 = ?$ (exakt!).

(b) $z_1 - \bar{z}_1 = ?$ (exakt!).

(c) $z_1 \cdot \bar{z}_1 = ?$ (exakt!).

(d) $z_1^3 = ?$ (exakt!).

(e) $z = \sqrt[3]{\bar{z}_1^3} = ?$

(f) $z_1 - (\bar{z}_1)^2 = ?$ (exakt!).

(g) $z = \dfrac{z_1}{\bar{z}_1 - i} = ?$ (reeller Nenner, exakt!).

(h) $z_1 = r\,cis(\varphi),\ \ r = ?,\ \ \varphi = ?$

(i) $z_1 = e^{z_2},\ \ z_2 = ?$

(4) Studiere die Abbildung $z \longmapsto \dfrac{1}{1+z} = w$.

(a) Was ist das Bild der reellen Achse?

(b) Was ist das Bild der imaginären Achse?

(c) Was ist das Bild des Einheitskreises?

(5) Entwickle $\dfrac{p_3(x)}{q(x)} = \dfrac{2\,x^4 - x^3 + 7\,x^2 + 9\,x - 4}{(x-2)^2 \cdot (x+2)}$ in einen Partialbruch!

Viel Glück!

WIR

8.7 Test: Komplexe Zahlen u. Funktionen, Gleichungssysteme, Matrizen, Determinanten, lineare Abbildungen II/44

Abschrift • *Copie*

(1) Komplexe Zahlen und Funktionen

(a) Sei $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y),\;\; z = x + i\,y$. Sei weiter $\triangle = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.
Berechne formal $\triangle f$. *Hinweis: Cauchy–Riemann.*

(b) Berechne exakt $(-i)^{1-i}$.

(c) Löse vollständig und exakt $\sin(\pi \cdot t + i \cdot t) = 0,\;\; t \in \mathbb{R}$.

(d) Skizziere alle Lösungen von $(z+2)^3 = 1 + i$.

(e) Sei $f(z) = \dfrac{a\,z+b}{c\,z+d} = w,\;\; a,b,c,d \in \mathbb{C}$ (Möbiustransformation). Sei weiter $f:\; -1 \longmapsto 1,\;\; f:\; 1 \longmapsto -1,\;\; f:\; -i \longmapsto 0.\; \rightsquigarrow$ Bestimme f.

(f) Untersuche, ob $f(z) = \dfrac{z}{|z|^2}$ holomorph ist!

(2) Gleichungssysteme,Matrizen, Determinanten, lineare Abbildungen

(a)
$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i. Berechne von Hand $M^{-1} = ?$ (Rechnung kommentieren!)

ii. Für welche α existiert M^{-1} nicht?

(b) $A \cdot X = A^T \cdot B^2,\;\; A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix},\;\; \gamma \neq 0.\;\; \rightsquigarrow\;\; X = ?$

(c) $\left|\begin{array}{lcr} 2\,x + 4\,y + 6\,z & = & 12 \\ 3\,x + 3\,y - 2\,z & = & -9 \\ x + 3\,y + 7\,z & = & 16 \end{array}\right|$ Löse das Gleichungssystem. (Zeige dabei das Gauss–Verfahren.)

(d) $\left|\begin{array}{lcr} 2\,x + 4\,y + 6\,z & = & 12 \\ x + 3\,y - 2\,z & = & 16 \\ x + y + 8\,z & = & 0 \end{array}\right|$ Was ist die Dimension des Lösungsraumes $\mathbb{L}$?

(e) $\mathcal{A} : \vec{x} \longmapsto \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \vec{x} \rightsquigarrow$ Suche eine mögliche Matrix A mit $\mathcal{A}(\vec{x}) = \vec{v} = A \cdot \vec{x}$

(f) Eine lineare Abbildung stiftet die Zuordnungen $0 \longmapsto 0$,
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix},\; \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$. Berechne eine mögliche Matrix, die das Gewünschte leistet und bestimme damit das Bild von $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Viel Glück!

WIR

8.8 Test: Komplexe Funktionen III/31

Abschrift • *Copie*

(1) Sei $f(z)$ eine Möbiustransformation, $z_1 = 0,\ \ z_2 = 1 + i,\ \ z_3 = 3 - i,\ \ z_4 = \infty$.
Sei weiter $f(z_1) = z_2,\ \ f(z_2) = z_3,\ \ f(z_3) = z_4$.

(a) Berechne $f(z)$.

(b) Berechne das Bild der imaginären Achse unter z.

(2)

$$f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y),\ \ z = x + i\, y,\ \ u(x, y) = \sin(x)$$

(a) Lässt sich ein $v(x, y)$ so finden, dass $f(z)$ holomorph ist?

(b) $f_1(z) = \sin(x),\ \ f_2(z) = \sin(x \cdot y),\ \ f_3(z) = \sin(x + y)$. Welche dieser Funktionen ist harmonisch?

(3) Was ist das Bild von $f(z) = ln(i \cdot \sin(z))$? Dabei ist $z = t \cdot i,\ \ t \in [0,\ 2\pi)$.

(a) Rechnung.

(b) Skizze.

(4) Sei $f(z) = z^2,\ \ f\ :\ \ G \longmapsto f(G)$. G ist ein Gebiet, $A(G)$ ist der Flächeninhalt von G, $A(f(G))$ der Flächeninhalt von $f(G)$. Berechne jeweils das Verhältnis

$$\lambda = \frac{A(f(G))}{A(G)}$$

(a) $G =$ Einheitsquadrat mit den Eckpunkten $0, 1, 1 + i, i$.

(b) $G =$ Halbkreis mit $\Im(z) \geq 0$ und Kreismittelpunkt $= 0$.

(5) Sei $f(z) = z^2,\ \ G = \{z \mid z = \varphi^2\,(\cos(Fi) + i\,\sin(\varphi)\},\ \ \varphi \in]0,\ 10\,\pi[$. Berechne:

$$\int\limits_G f(z)\,dz$$

Viel Glück!

WIR

8.9 Test: Komplexe Funktionen III/31

Abschrift • *Copie*

(1)

$$f(z) = \frac{a\,z+b}{c\,z+d},\;\; a,b,c,d \in \mathbb{C}$$

Erkläre und begründe kurz, ob eine solche Funktion f existiert mit $f(f(f(z)) = z$.

(2)

$$f(z) = \frac{2\,z-i}{i\,z+2}$$

Suche das Bild von $\{z = i\,t \mid t \in \mathbb{R}\}$.

(3) Berechne so exakt wie möglich:

(a) $ln(i)$
(b) $\tan(i)$
(c) $\tan'(i)$
(d) $\cos(3\,i)$

(4) Sei $f(z) = e^z,\;\; z = i\,t,\;\; t \in [0,\; 2\,\pi),\;\; K_r(z_0) = K_1(0) =$ Einheitskreis um 0.

$$\oint_{K_1(0)} f(z)\,dz = \;?$$

Hinweis: $\int\limits_C f(z)\,dz = \int\limits_C u\,dx - \int\limits_C v\,dy \ldots$

(5) Existiert eine holomorphe Funktion $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ mit $u(x,y) = x^3$? (Begründung!)

(6) (a)

$$\oint_{K_1(z_0)} (z-z_0)^n = \;?,\;\; n \in \mathbb{Z}$$

(b) Sei $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ holomorph, $\vec{w} = \begin{pmatrix} u \\ -v \\ 0 \end{pmatrix}$. $\rightsquigarrow$ $rot\;\vec{w} = \;?$

(c) C sei eine einfach geschlossene Kurve in einem einfachen Gebiet. Verwende $\vec{w}$ sowie den Satz von Stockes und berechne:

$$\oint_C u\,dx - v\,dy = \;? \;\text{ sowie }\; \oint_C v\,dx + u\,dy = \;? \;\Rightarrow\; \oint_C f(z)\,dz = \;?$$

Viel Glück!

WIR

8.10 Test: Komplexe Analysis, Fourieranalysis III/33

Abschrift • *Copie*

(1) Sei $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y),\ \ z = x + i\,y \in \mathbb{C},\ \ u(x,y) = x \cdot y$

(a) Konstruiere, falls möglich, eine Funktion $f(z)$, welche in $\mathbb{C}$ holomorph ist.

(b) Suche, falls möglich, die Fixpunkte (resp. den Fixpunkt) von f sowie das Bild der imaginären Achse.

(2) Sei $f(z) = \dfrac{3\,z + 9}{3 - 3\,z}$.

(a) Bestimme die Fixpunkte sowie das Bild von deren arithmetischem Mittel.

(b) Bestimme $f(f(z))$ sowie $f(f(f(z)))$.

(c) Bestimme möglichst einfach $f^{-1}(z)$.

(d) Bestimme das Bild der imaginären Achse.

(3) (a) Berechne direkt und ohne Tabelle die Fourierreihe von $f(t) = \sin^6(t)$.

(b) Der Weg γ ist durch den folgenden Streckenzug gegeben: $|\gamma| = \overline{A_\gamma P_1 P_2 E_\gamma}$ mit $A_\gamma = 1,\ \ P_1 = 1 + i,\ \ P_2 = -1 + i,\ \ E_\gamma = -1$. Fertige von der Spur des Weges eine Skizze an und berechne

$$\int\limits_{C=|\gamma|} \frac{1}{z}\,dz.$$

Viel Glück!

WIR

Kapitel • Chapitre 9

Lösungen — Solutions

9.1 Momentane Sachlage — — Situation actuelle

Die Lösungen zu den Aufgaben sind momentan nur noch in Papierform vorhanden (*Mathematica*–Output und Handschriften). An eine gesamthafte oder teilweise Veröffentlichung kann aus Kapazitätsgründen vorläufig nicht gedacht werden.
• *Les solutions des problèmes existent momentanément seulement sur papier output de Mathematica et manuscrits. Actuellement, par raisons de capacité, on ne peut pas penser à une la publication intégrale ou bien partielle.*

http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/ArchivTestserien.html

Fremdarbeit?

Ende • *Fin*