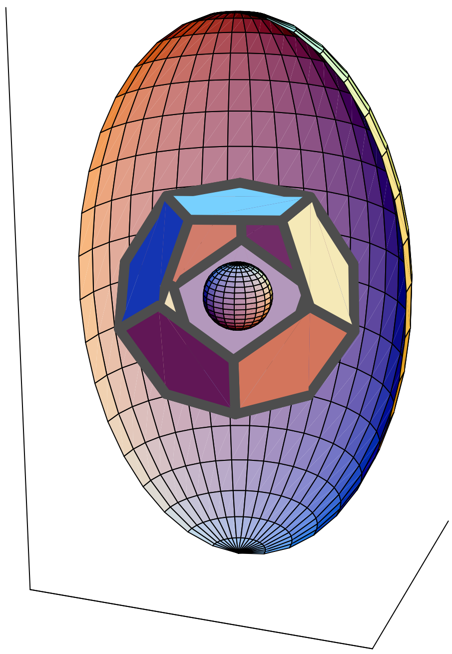
◇ Aufgabenauswahl 4 ◇ Exercices 4 ◇
◇ Tests Analysis ◇
◇ Tests analyse ◇
◇ Diplom ◇ Diplôme ◇



von • *de*

Rolf Wirz

Ingenieurschule Biel — HTA-Biel/BFH — HTI/BFH bis • *jusqu'à* 2005

Ausgabe vom 13. Juli 2007, Version 1.0.0 / d/f

Mit klickbaren Links • *Avec des lines cliquables*

WIR1 /2007/LaTex/BuchTestsAnaDipl.TEX

Produziert mit PCTeX unter Win XP. Einige Graphiken sind auch mit *Mathematica* entstanden.

• *Produit avec PCTeX sous Win XP. Quelques représentations ont été produites avec Mathematica.*

Der Mensch hat dreierlei Wege, um zu lernen:
Erstens durch Nachdenken, das ist der edelste;
zweitens durch Nachahmen, das ist der leichteste;
drittens durch Erfahrung, das ist der bitterste.

(Nach Konfuzius)

• *L'homme a trois occasions pour apprendre:*
Premièrement par réflexion, c'est la plus noble;
deuxièmement par l'imitation, c'est la plus facile;
troisièmement par l'expérience, c'est la plus dure.

(Selon Confucius)

Aktuelle Adresse des Autors (2007):

Rolf W. Wirz-Depierre
Prof. für Math.
Berner Fachhochschule (BFH), Dep. AHB und TI
Pestalozzistrasse 20
Büro B112 CH–3400 Burgdorf/BE
Tel. ++41 (0)34 426 42 30 / intern 230
Mail: Siehe http://rowicus.ch/Wir/indexTotalF.html unter „Koordinaten von R.W."
(Alt: Ingenieurschule Biel (HTL), Ing'schule des Kt. Bern, Fachhochschule ab 1997) // BFH HTA Biel // BFH HT/

Inhaltsverzeichnis • Table des matières

0.1 Einführung — Introduction

0.1.1 Gegenstand — Sujet

In dieser Sammlung ist eine Auswahl von Aufgaben zusammengefasst, welche in den letzten Jahren vor dem Wechsel vom Diplomstudium zum Bachelor–Studium verwendet worden sind.
• *Dans cette collection, un choix de problèmes est rassemblé. Il s'agit de problèmes qui ont été utilisés dans les dernières années avant le changement des études du diplôme au bachelor.*

Klickbare Links zu Skripten: • *Liens cliquables pour les cours:*

http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html (Skript–Download) • *Download cours*

Die Lösungen zu den Aufgaben sind mit *Mathematica* produziert worden. Aus Kapazitätsgründen ist jeweils nur der Quellencode abgespeichert, aus dem man mit Hilfe von *Mathematica* den Output sofort wieder produzieren kann. In den vielen Jahren, in denen der Autor dieses Verfahren anwendet, ist so eine riesige Sammlung von Aufgabenlösungen entstanden, siehe z.B. unter dem Link:
• *Les solutions aux problèmes ont été produites avec Mathematica. Pour raisons de capacité, seulement le code de source est mis à disposition. A l'aide de ce code on peut produire tout de suite le „output" à l'aide de Mathematica. Pendant les nombreuses années durant lesquelles l'auteur a utilisé cette méthode, une grande collection de solutions de devoirs est née, voir par exemple sous le lien:*

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Die Lösungen sind nach dem Schema der in Tabellenform abgespeicherten Übungen und Tests anbeordnet, siehe unter dem Link:
• *Les solutions sont mises à disposition d'après le schématisme utilisé dans le tableau des exercices et tests qu'on peut trouver sous le lien:*

http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/Problems.html

0.1.2 Gliederung — Disposition

---

(1) Übungen in Algebra und Geometrie • *Exercices en algèbre et géométrie*

(2) Tests in Algebra und Geometrie • *Tests en algèbre et géométrie*

(3) Übungen in Analysis • *Exercices en analyse*

(4) Tests in Analysis • *Tests en analyse*

(5) Übungen in Mathematik II • *Exercices en mathématiques 2*

(6) Tests in Mathematik II • *Tests en mathématiques 2*

Kapitel • Chapitre 1

Analysis Elektrotechnik — Analyse électrotechnique

1.1 Inhalt — Les matières

(1) Tests 1. und 2. Semester • *Exercices semestre 1 et 2*

(2) Lösungen siehe unter den Links: • *Solutions voir les liens:*

`http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/Problems.html`
(Schema) • *(Schéma)*

`http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html`
(*Mathematica*–Quellencode) • *(Code de source en Mathematica)*

(3) Vordiplome siehe unter Link: • *Diplômes préalables voir le lien:*

`http://rowicus.ch/Wir/VDs/VDs.html`

1.2 Test in Algebra ◇ Examen en analyse 1 ◇ E1 99/00 1

---

(1) Sei • *Soit* $f(x) = a_4\,x^4 + a_3\,x^3 + \ldots + a_0$,
$P_1 = P_1(-3/1),\ P_2 = P_2(-2/0),\ P_3 = P_3(3/0),\ P_4 = P_4(1/0),\ P_5 = P_5(2/1)$.
Der Graph von f geht durch • *Le graphe de f passe par* $P_1, \ldots, P_5$
$\rightsquigarrow\ f(-3) = 1,\ \ldots, f(2) = 1$
Bestimme $a_4, a_3, \ldots, a_0$ und skizziere den Graphen.

• *Calculer* $a_4, a_3, \ldots, a_0$ *et dessiner la graphique.*

(2) $f(x) = \sin^2(x) - |[x]|$
$D_f = [-3, 3]$

(a) Graph? • *Graphique?*

(b) Unstetigkeitsstellen? • *Places de discontinuité?*

(3) $f_1(x) = 2\,x^2 + 2\,x - 4,\ \ f_2(x) = -x^2 + x - 2$

(a) Berechne den Schnittpunkt der Graphen von f_1 und f_2.
• *Calculer le point d'intersection des graphiques de* f_1 *et* f_2

(b) $f_3 = \dfrac{1}{f_1(x) - f_2(x)} + 2$

i. Asymptote? • *Asymptote?*

ii. Ist f_3 beschränkt??
• *Est–ce que* f_3 *est bornée?*

(4) $f(x) = \cosh(\sqrt{x+1}) - 1$

(a) $D_f = ?$ — Wo ist f monoton? • *Où est–ce que f est monotone?*

(b) $f^{-1} = ?$ — $D_{f^{-1}} = ?$ — $W_{f^{-1}} = ?$

(5) $r(\varphi) = |\cos(\varphi)|,\ \ \varphi \in [0, 2\,\pi]$

(a) Wo ist $r(\varphi)$ gleichmässig stetig?
• *Où est–ce que $r(\varphi)$ est continue de façon monotone?*

(b) Skizziere $r(\varphi)$ in Polarkoordinaten.
• *Dessiner (esquisse) $r(\varphi)$ en coordonnées polaires.*

(6) (a) $1 + \dfrac{1}{11} + + \dfrac{1}{11^2} + \dfrac{1}{11^3} + \dfrac{1}{11^4} + \ldots + \dfrac{1}{11^n} \to ?$

(b) $1 + \dfrac{1}{n} + + \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^3} + \dfrac{1}{n^4} + \ldots + \dfrac{1}{n^n} \to ?$

(7) (a) $\lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{1+n}{n^2}) \cdot (3 - \dfrac{6}{n} + \dfrac{\cos(n)}{\sqrt{n}}) = ?$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} (\dfrac{x}{\tan(x)}) \cdot (\sin(x) + \cos(x) + 2\,x = ?$

(8) (a) $\langle a_n\rangle :\ a_n = \dfrac{1}{n}\,\sin(n!) + \dfrac{3^n}{n \cdot n!} \cdot \sqrt{n} \to ?$

(b) $\langle a_n \rangle : \; a_n = \dfrac{ln(n)}{[n^2]} + (1 + \dfrac{1}{n})^{n \cdot 2} \to \, ?$

1.3 Test in Algebra ◇ Examen en analyse 1 ◇ E1 99/00 1

---

(1) Sei • *Soit* $f(x) = a_4\,x^4 + a_3\,x^3 + \ldots + a_0$,
$P_1 = P_1(-3/1),\;\; P_2 = P_2(-2/0),\;\; P_3 = P_3(3/0),\;\; P_4 = P_4(1/0),\;\; P_5 = P_5(2/1)$.
Der Graph von f geht durch • *Le graphe de f passe par* $P_1, \ldots, P_5$
$\leadsto\;\; f(-3) = 1, \;\; \ldots, f(2) = 1$
Bestimme $a_4, a_3, \ldots, a_0$ und skizziere den Graphen.

• *Calculer* $a_4, a_3, \ldots, a_0$ *et dessiner la graphique.*

(2) $f(x) = \sin^2(x) - |[x]|$
$D_f = [-3, 3]$

(a) Graph? • *Graphique?*

(b) Unstetigkeitsstellen? • *Places de discontinuité?*

(3) $f_1(x) = 2\,x^2 + 2\,x - 4,\;\; f_2(x) = -x^2 + x - 2$

(a) Berechne den Schnittpunkt der Graphen von f_1 und f_2.
• *Calculer le point d'intersection des graphiques de* f_1 *et* f_2

(b) $f_3 = \dfrac{1}{f_1(x) - f_2(x)} + 2$

i. Asymptote? • *Asymptote?*

ii. Ist f_3 beschränkt??
• *Est–ce que* f_3 *est bornée?*

(4) $f(x) = \cosh(\sqrt{x+1}) - 1$

(a) $D_f = \,?$ — Wo ist f monoton? • *Où est–ce que f est monotone?*

(b) $f^{-1} = \,?$ — $D_{f^{-1}} = \,?$ — $W_{f^{-1}} = \,?$

(5) $r(\varphi) = |\cos(\varphi)|,\;\; \varphi \in [0, 2\,\pi]$

(a) Wo ist $r(\varphi)$ gleichmässig stetig?
• *Où est–ce que $r(\varphi)$ est continue de façon monotone?*

(b) Skizziere $r(\varphi)$ in Polarkoordinaten.
• *Dessiner (esquisse) $r(\varphi)$ en coordonnées polaires.*

(6) (a) $1 + \dfrac{1}{11} + + \dfrac{1}{11^2} + \dfrac{1}{11^3} + \dfrac{1}{11^4} + \ldots + \dfrac{1}{11^n} \to\, ?$

(b) $1 + \dfrac{1}{n} + + \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^3} + \dfrac{1}{n^4} + \ldots + \dfrac{1}{n^n} \to\, ?$

(7) (a) $\lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{1+n}{n^2}) \cdot (3 - \dfrac{6}{n} + \dfrac{\cos(n)}{\sqrt{n}}) = \,?$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} (\dfrac{x}{\tan(x)}) \cdot (\sin(x) + \cos(x) + 2\,x = \,?$

(8) (a) $\langle a_n \rangle :\;\; a_n = \dfrac{1}{n}\,\sin(n!) + \dfrac{3^n}{n \cdot n!} \cdot \sqrt{n} \to\, ?$

(b) $\langle a_n \rangle : \; a_n = \dfrac{ln(n)}{[n^2]} + (1 + \dfrac{1}{n})^{n \cdot 2} \to \, ?$

1.4 Test in Algebra ◇ Examen en analyse 1 ◇ E1 99/00 1

---

(1) Sei • *Soit* $f(x) = a_4\,x^4 + a_3\,x^3 + \ldots + a_0$,
$P_1 = P_1(-3/1),\ P_2 = P_2(-2/0),\ P_3 = P_3(3/0),\ P_4 = P_4(1/0),\ P_5 = P_5(2/1)$.
Der Graph von f geht durch • *Le graphe de f passe par $P_1, \ldots, P_5$*
$\rightsquigarrow\ f(-3) = 1,\ \ \ldots, f(2) = 1$
Bestimme $a_4, a_3, \ldots, a_0$ und skizziere den Graphen.

• *Calculer $a_4, a_3, \ldots, a_0$ et dessiner la graphique.*

(2) $f(x) = \sin^2(x) - |[x]|$
$D_f = [-3, 3]$

(a) Graph? • *Graphique?*

(b) Unstetigkeitsstellen? • *Places de discontinuité?*

(3) $f_1(x) = 2\,x^2 + 2\,x - 4,\ \ f_2(x) = -x^2 + x - 2$

(a) Berechne den Schnittpunkt der Graphen von f_1 und f_2.
• *Calculer le point d'intersection des graphiques de f_1 et f_2*

(b) $f_3 = \dfrac{1}{f_1(x) - f_2(x)} + 2$

i. Asymptote? • *Asymptote?*

ii. Ist f_3 beschränkt??
• *Est–ce que f_3 est bornée?*

(4) $f(x) = \cosh(\sqrt{x+1}) - 1$

(a) $D_f = ?$ — Wo ist f monoton? • *Où est–ce que f est monotone?*

(b) $f^{-1} = ?$ — $D_{f^{-1}} = ?$ — $W_{f^{-1}} = ?$

(5) $r(\varphi) = |\cos(\varphi)|,\ \ \varphi \in [0, 2\,\pi]$

(a) Wo ist $r(\varphi)$ gleichmässig stetig?
• *Où est–ce que $r(\varphi)$ est continue de façon monotone?*

(b) Skizziere $r(\varphi)$ in Polarkoordinaten.
• *Dessiner (esquisse) $r(\varphi)$ en coordonnées polaires.*

(6) (a) $1 + \dfrac{1}{11} + + \dfrac{1}{11^2} + \dfrac{1}{11^3} + \dfrac{1}{11^4} + \ldots + \dfrac{1}{11^n} \to ?$

(b) $1 + \dfrac{1}{n} + + \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^3} + \dfrac{1}{n^4} + \ldots + \dfrac{1}{n^n} \to ?$

(7) (a) $\lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{1+n}{n^2}) \cdot (3 - \dfrac{6}{n} + \dfrac{\cos(n)}{\sqrt{n}}) = ?$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} (\dfrac{x}{\tan(x)}) \cdot (\sin(x) + \cos(x) + 2\,x = ?$

(8) (a) $\langle a_n \rangle :\ a_n = \dfrac{1}{n}\,\sin(n!) + \dfrac{3^n}{n \cdot n!} \cdot \sqrt{n} \to ?$

(b) $\langle a_n \rangle: \; a_n = \frac{ln(n)}{[n^2]} + (1 + \frac{1}{n})^{n \cdot 2} \rightarrow \; ?$

1.5 Test in Algebra ◇ Examen en analyse 1 ◇ E1 00/01 1a

---

(1) Sei • *Soit* $f(x) = \tan(x)$, $g(x) = \cos(x)$, $h(x) = \sin(x)$

(a) Skizziere $h^{-1}(x)$ und $[h^{-1}(x)]$ in $D_{h^{-1}}$.
• *Esquisse de* $h^{-1}(x)$ *et de* $[h^{-1}(x)]$ *dans* $D_{h^{-1}}$.

(b) Skizziere $(h \circ g)^{-1}$ und bestimme ungefähr den Definitionsbereich (Approximation)
• *Esquisse de* $(h \circ g)^{-1}$ *et évaluer de une approximation du domaine de définition*

(c) Skizziere $s(x) = h(g(f(x)))$ in $[-\pi, \pi]$. Wo ist $s(x)$ nicht definiert?
• *Esquisse de* $s(x) = h(g(f(x)))$ *dans* $[-\pi, \pi]$. *Où est–ce que* $s(x)$ *n'est pas définie?*

(2) Bestimme die gemeinsamen Lösungen der folgenden Ungleichungen (System):
• *Calculer les solutions communes des inégalités suivantes (système):*

$$\begin{array}{lcl} x^2 - 2\,x - 3 & \leq & -3\,x^2 + x + 7 \\ x + 2 & \geq & x^2 - 2\,x - 3 \end{array}$$

(3)

$$d(x) = \frac{x^3 - 2\,x}{x^2 - 4} + 1$$

(a) Pole?
• *Pôles?*

(b) Asymptoten?
• *Asymptotes?*

(c) Stellen mit $d(x) = 1$?
• *Places avec* $d(x) = 1$*?*

(d) Skizze des Graphen?
• *Esquisse de la graphique?*

1.6 Test in Algebra ◇ Examen en analyse 1 ◇ E1 00/01 1b

---

(1) (a) Berechne exakt: $(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^n}) \cdot (\pi - 1)$
- *Calculer de Façon exacte:*

(b) Untersuche die Konvergenz: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$
- *Examiner la convergence:*

(2) (a) $f(x) = 5\,x^3 - 3\,x^2 - 2\,x + 4 + \sqrt{x}$ $\quad f'(x) = ?\quad f'(x)_{|x=1} = ?\quad f'(x)_{|x=0} = ?$

(b) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$ $\quad f''(x) = ?$

(c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - x}$ $\quad f'(x) = ?$

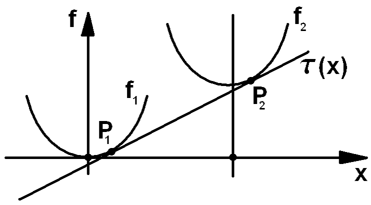
(d) $f(x) = \cos(x^2 + 1) - (\cos^2(x) + 1)$ $\quad f'(x) = ?$

(3) $f(x) = x^2 - x + 1$ Exakter Steigungswinkel (rad!!!) der Tangente für $x = 1$??
- *Angle exact de la tangente avec l'axe x (rad!!!) pour* $x = 1$ *??*

1.7 Test in Algebra ◇ Examen en analyse 1 ◇ E1 99/00 2

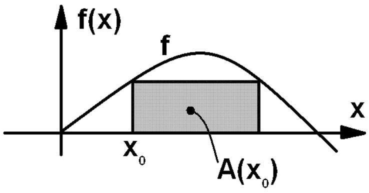
---

(1) $f_1(x) = x^2,\ \ f_2(x) = (x-2)^2 + 4$
$\overline{P_1P_2}$: Gemeinsame Tangente
• $\overline{P_1P_2}$: *Tangente commune*
$P_1 = P_1(x_1, y_1),\ \ P_2 = P_2(x_2, y_2)$



$x_1, x_2, y_1, y_2 = ?$

(2) $f(x) = \sin(x)$
$A(x_0)$ soll maximal sein
• $A(x_0)$ *doit être maximale*



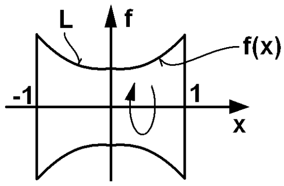
$x_0 = ?$

(3) $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ • *Es gilt:* • *Il vaut:*

(a) $f(-6) = 0$ (*NS'Z*)
(b) Maximum bei: • *Maximum à:* $x_1 = 1$
(c) Minimum bei: • *Minimum à:* $x_2 = 3$
(d) Wendepunkt: • *Point d'inflexion:* $P_W = P_W(2, 4)$

$a, b, c, d = ?$

(4) $f(x) = \cosh(x)$



(a) Mantellänge = ? • *Longueur d'une ligne de périphérie = ?*

(b) Oberfläche des Rotationskörpers = ?
• *Surface du corps de révolution = ?*

(c) Volumen = ? • *Volume = ?*

(d) Welche dieser Werte lassen sich exakt berechnen? (Rechnung!)
• *Lesquelles de ces valeurs est–ce qu'on peut calculer de façon exacte? (Calcul!)*

(5) (a) Berechne den folgenden Ausdruck mit Hilfe der Regel von Bernoulli! (Verwende $y = e^{\ln(y)} \ldots$)
• *Calculer l'expression suivante à l'aide de la règle de Bernoulli! (Utiliser $y = e^{\ln(y)} \ldots$)*

$$\lim_{x \downarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin(x)}$$

(b) Berechne nach den Regeln: • *Calculer dâprès les règles:*

$$\int_{5}^{7} \frac{1}{2\,x^2-1} + x \cdot \sinh(x) + e^{-5\,x+16}\,dx$$

1.8 Test in Algebra ◇ Examen en analyse 1 ◇ E1 00/01 2

---

(1) (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(5\,x^2)}{\sin^2(x)} = \,?$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{(x^2)}-1}{x^2} = \,?$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x)^2-1}{x^2} = \,?$

(2) Differenziere die nachfolgende Gleichung links und rechts nach x:
• *Calculer la dérivée de l'équation suivante à gauche et à droite d'après x:*

$$\sin(x+\beta) = \sin(x)\cdot\cos(\beta) + \cos(x)\cdot\sin(\beta)$$

Was kann man folgern? • *Quelle est la conséquence?*

(3) Bestimme Extrema, Wendepunkte und Symmetrien:
• *Calculer les extrêmes et les points d'inflexion, décider quelles sont les symétries:*

(a) $f(x) = \dfrac{1}{5}\,x^5 - \dfrac{1}{4}\,x^4 - \dfrac{1}{3}\,x^3 + \dfrac{1}{2}\,x^2$

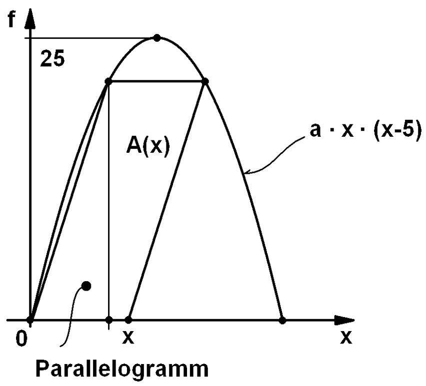
(b) $f(x) = \dfrac{1}{12}\,x^4 - \dfrac{1}{9}\,x^3 - x^2 + 1$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{50}\,x^2\,(x-5)\,(x-9)$

(4)

(a) $a = \,?$

(b) $A(x) \to Max. \leadsto\ x = \,?$



Version 2 vgl. Rückseite • *Version 2 voir au verso*

(5) (a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{ln(x)}{(x-1)} = ?$

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{ln(x)}{(x-1)^2} = ?$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x^2} = ?$

(d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin(2\,x)}{\cos(x^2)} = ?$

(6) Differenziere die unendliche Summe $f(x)$ gliedweise:
• *Calculer la dérivée de la somme infinie $f(x)$ terme par terme:*

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots,\quad n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

Einfachste Antwort! • *Réponse la plus simple!*

(7) Bestimme Extrema, Wendepunkte und Symmetrien:
• *Calculer les extrèmes et les points d'inflexion, décider quelles sont les symétries:*

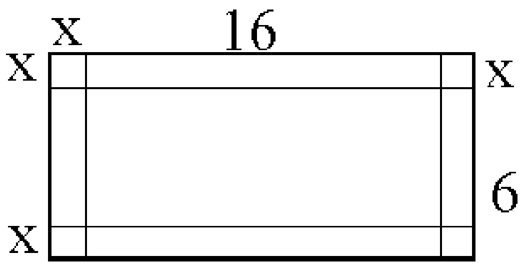
(a) $f(x) = \dfrac{1}{6}\,(x^3 - 3\,x^2 - 9\,x + 17)$

(b) $f(x) = 0.1\,(x^4 - 2\,x^3 - 12\,x^2 + 8\,x + 20)$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x}$

(d) $f(x) = e^{\sin(x)}$

(8) Durch wegschneiden der quadratischen Ecken der Breite x und danach falten entsteht aus dem Papierbogen (16×6) eine Schachtel ohne Deckel. Wie gross muss man x wählen, damit der Inhalt maximal wird?
• *Nous coupons les coins carrés de la largeur x et après nous plions la feuille de papier (16×6). Ainsi nous recevons une boîte sans couvercle. Comment est–ce qu'il faut couisir x pour avoir un contenu maximal?*



1.9 Test in Algebra ◇ Examen en analyse 1 ◇ E1 99/00 3

---

(1) $f(x) = e^{\sin(x)},\ \ x_0 = 0$

(a) Taylorreihe? – Hinweis: Kombiniere die Reihen von e^t und von $t = \sin(t)$.
• *Série de Taylor? – Indication: Combiner les séries de* e^t *et de* $t = \sin(t)$.

(b) $\int\limits_{-0.1}^{+0.1} f(x)\,dx \approx\ ?$
Benütze Glieder bis zur Ordnung 2. • *Utiliser des termes jusqu'à l'ordre* 2.

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5\,x + 6}$

(a) Partialberuchzerlegung! • *Décomposition en fractions partielles!*

(b) Potenzreihenentwicklung, Zentrum $x_0 = 0$. Hinweis: Geometrische Reihe.
• *Développement en séries de puissances, centre* $x_0 = 0$. *Indication: Série géométrique.*

(c) Konvergenzradius? • *Rayon de convergence?*

(3)

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{x^2\,y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Wo ist $f(x)$ stetig? • *Où est–ce que* $f(x)$ *est continue?*

(4) $f(x,y) = x^7\,\sin(e^{x\,y}),\ \ \alpha = \dfrac{\pi}{3},\ \ (x_0, y_0) = (0,0)$

Bestimme die Richtungsableitung von $f(x,y)$ für α und (x_0, y_0).
• *Calculer la dérivée suivant la direction pour* α *et* (x_0, y_0).

(5) $f(x,y) = -2\,x^2 + (2\,x^2 - 1)\,y^2$

Bestimme Minima, Maxima und Sattelpunkte. • *Calculer les minimums, maximums et les points–selle.*

(6) $f(x,y) = -x + 2\,y,\ \ g(x,y) = x^2 - y^2 - 1$

Bestimme die Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$.
• *Callculer les extremums de* f *sous la condition sécondaire* $g(x,y) = 0$.

$\rightsquigarrow$ Rückseite! • $\rightsquigarrow$ *voir au verso!*

(7) $V(x,y) = \frac{1}{3}\,x\,y^2 - y, \;\; x = y = 0.5, \;\; \Delta x = \Delta y = \pm 0.001$

$\leadsto \;\; \Delta V = \,?$

(8) Zusatzaufgabe: • *Problème additional:*

$$f(x) = \cos(\tfrac{1}{2}\,x), \quad \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(x)\,dx$$

(a) $g(x) = -x^2 + b \leadsto \;\; b = \,?$

(b) $g(x) = b\,x^2 + b \leadsto \;\; b = \,?$

(c) $g(x) = -x^2 + b\,x + b \leadsto \;\; b = \,?$

1.10 Test in Algebra ◇ Examen en analyse 1 ◇ E1 00/01 3a

---

(1) $f(x) = \dfrac{e^{(x^4)} - 1}{x}, \ \ x_0 = 0$

(a) Nimm die Taylorreihe von $e^t, \ \ t_0 = 0$ und leite daraus die Taylorreihe von $f(x)$ her.
• *Prendre la série de Taylor de $e^t, \ \ t_0 = 0$. Déduire de cette série la série de Taylor de $f(x)$.*

(b) Bestimme den Konvergenzradius der Taylorreihe von $f(x)$.
• *Calculer le rayon de convergence de la série de Taylor de $f(x)$.*

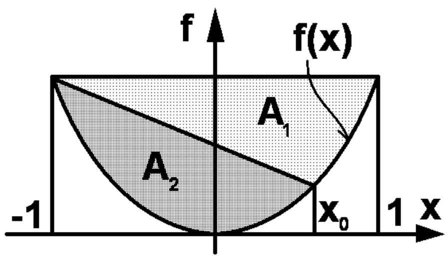
(c) Schreibe nun $\int f(x)\, dx$ als Potenzreihe.
• *Ecrire maintenant $\int f(x)\, dx$ comme série de puissances.*

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x - 10}$

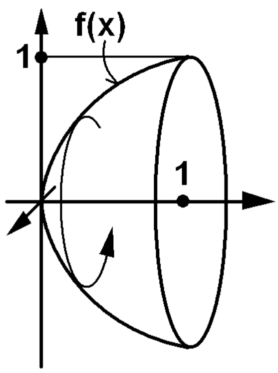
(a) Schreibe $f(x)$ als geometrische Reihe: $A \cdot \dfrac{1}{1-q} = \ldots$.
• *Ecrire $f(x)$ comme série géométrique: $A \cdot \dfrac{1}{1-q} = \ldots$.*

(b) Das Resultat ist eine Potenzreihe. Bestimme den Konvergenzradius.
• *Le résultat est une série de puissances. Calculer le rayon de convergence.*

(3) $A_1 = A_2 \rightsquigarrow \ \ x_0 = ?$



(4) $f(x) = \sqrt{x} \rightsquigarrow \ \ V = ?$
(Rotationskörper, Volumen)
• *(Corps de révolution, volume)*



(5) (a) $\int\limits_1^2 \ln(x)\,dx = \int\limits_1^2 1\cdot\ln(x)\,dx = \,?$
(Partielle Integration, zeigen) • *(Intégration partielle, démontrer)*

(b) $\int x\cdot(\sqrt{x+1})^3\,dx = \,?$ $\qquad u := g(x) = \sqrt{x+1}$
(Subst. $u = g(x)$, zeigen) • *(Subst. $u = g(x)$, démontrer)*

(c) $\int x\cdot\sin(5\,x+7)\,dx = \,?$
(Partielle Integration, zeigen) • *(Intégration partielle, démontrer)*

(d) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln(|f(x)|) \;\Rightarrow\; \displaystyle\int \tan(x)\,dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \,?$
(Zeigen) • *(Démontrer)*

(e) $\int \frac{4\,x}{(x+4)\,(x+1)}\,dx = \,?$
(Partialbruchzerlegung, zeigen) • *(Décomposition en fractions partielles, démontrer)*

(6) $\int\limits_{-1}^{1} \sin(\sin(x))\,dx = \,?$ (Begründung) • *(Déduction)*

1.11 Test in Algebra ◇ Examen en analyse 1 ◇ E1 00/01 3b

---

(1) $f(x) = \dfrac{e^{(x\cdot t)}}{x} + e^{\sin(\sqrt{x^2+1})} \cdot (\arctan(\cos(x-\pi)))^{2/5} \rightsquigarrow \quad \dfrac{d}{d\,t}\displaystyle\int\limits_0^1 f(x,t)\,dx \ = ?$

(2) $f(x,y) = \sin(x\cdot y)\cdot\cos(x+y) \rightsquigarrow$

(a) Berechne das totale Differential!
• *Calculer la différentielle totale!*

(b) $x = \dfrac{\pi}{2},\ \ y = \pi,\ \ \alpha = \dfrac{\pi}{4}.$
Berechne die Richtungsableitung.
• *Calculer la dérivée de direction.*

(3)

$$f(x,y) = \sin(x-y),\ \ g(x,y) = \sqrt{1+2\,\cos^2(x-y)}$$

Das Gebiet G ist begrenzt durch die x–Achse, die y–Achse und die Gerade durch die Punkte $(0,\frac{\pi}{2})$ und $(\pi,0)$. $f(x,y)$ definiert eine Funktionsfläche A über G
• *La région G est définie par l'axe x, l'axe y et par la droite qui passe par les points* $(0,\frac{\pi}{2})$ *et* $(\pi,0)$. *$f(x,y)$ définit une surface de fonction sur G.*
Berechne das Oberflächenintegral: • *Calculer l'intégrale superficielle:*

$$\int_G g(x,y)\,dA$$

(4)

$$g = \{(x,y)\mid 0\le x\cdot y\le\pi\},\ \ f(x,y)=\sin(x\cdot y)$$

(a) Skizziere: • *Dessiner:* $\quad D := G\cap(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+)$

(b) $\int\limits_D f(x,y)\,dD = ?$

(5) Aus der Vordiplomprüfung 1 Elektro in Analysis 2000, Originaltext:
• *Pris de l'examen de diplôme préalable 1 électro en analyse 2000, texte original:*
Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = 3\,x^2 - 5\,x\,y + 4\,y^2 - y + x - 1$ im Gebiet G,
$G = I\times I = [-1,1]\times[-1,1]$.

(a) Berechne die Extrema oder Sattelpunkte im Innern und auf dem Rand.

(b) Durch den Rand ∂G von G lassen sich vier Geraden legen. Untersuche, in welchen Punkten P_i auf diesen vier Geraden die maximale Richtungsableitung lokale Extrema hat. (Untersuche dazu die Länge des Gradienten.) Entscheide, ob die gefundenen Extrema Minima oder Maxima sind.

(c) Skizziere G mit den berechneten Extrema von f. Zeichne ebenfalls die berechneten Punkte P_i ein. Verbinde je zwei sich entsprechende Punkte auf gegenüberliegenden Geraden und kontrolliere, ob sich die Verbindungsgeraden in einem ausgezeichneten Punkt kreuzen. Was stellt man fest? Ist etwas bemerkenswert?

(d) Bestimme, in welchen Punkten der Geraden $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ in der Grundebene $f(x,y)$ extremal wird. (Die Punkte auf dem Rand sind auch in die Betrachtung einzubeziehen.)

1.12 Test in Algebra ◇ Examen en analyse 1 ◇ E1 00/01 3

Berechne von Hand die Stammfunktionen: • *Calculer à la main les fonctions antidérivées:*

(1) (a) $\dfrac{1}{(x^2-1)\,(x-2)}$

(b) $\dfrac{1}{(x^2+1)\,(x-2)}$

(c) $\dfrac{1}{(x-5)\,(x-3)\,(x+6)}$

(d) $\dfrac{1}{(x-1)\,(x-2)\,(x+1)\,(x+2)}$

(2) (a) $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\,\arcsin x^2}$

(b) $ln(x^2+1)-\arctan(x)$

(c) $\dfrac{-1+2\,x}{1+x^2}$

(d) $-\dfrac{2\,x}{(1+x^2)^2}$

(e) $-2\,a\,x\,\sin(a\,x^2+b)$

(f) $\dfrac{a}{\cos(a\,x+b)}\,\tan(a\,x+b)$

(g) $-a\,\sin(a\,x^2+b)$

(h) $-2\,a\,\cos(a\,x+b)\,\sin(a\,x+b)$

(i) $4\,a\,\cos^3(a\,x+b)\,\sin(a\,x+b)$

(j) $2\,a\,\cos(x)\,\cos(a\,x+b)\,\sin(a\,x+b)-\sin(x)\,\sin(a\,x+b)^2$

(k) $\dfrac{2\,a\,\cos(x)\,ln(a\,x+b)}{a\,x+b}-ln(a\,x+b)^2\,\sin(x)$

(l) $a+a\,ln(a\,x+b)+\dfrac{2\,a\,ln(a\,x+b)}{a\,x+b}$

(3) (a) $x\,e^x$

(b) $x^2\,e^x$

(c) $\cos(x)\,e^x$

(d) $(a\,x+b)\,\sin(a\,x+b)$

(e) $(a\,x+b)\,ln(a\,x+b)$

(f) $(a\,x+b)^2\,\cosh(a\,x+b)$

WIR

1.13 Lösungen ◇ Lines pour solutions

Die Lösungen werden bei Gelegenheit integriert, wenn der Autor dafür Zeit haben wird. • *Les solutions seront ajoutées prochainement à l'occasion, si l'auteur aura le temps.*

Lösungen siehe unter den Links: • *Solutions voir les liens:*

`http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/Problems.html`
(Schema) • *(Schéma)*

`http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html`
(*Mathematica*–Quellencode) • *(Code de source en Mathematica)*

Kapitel • Chapitre 2

Analysis Informatik — Analyse informatique

2.1 Inhalt — Les matières

(1) Tests 1. und 2. Semester • *Exercices semestre 1 et 2*

(2) Lösungen siehe unter den Links: • *Solutions voir les liens:*

`http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/Problems.html`
(Schema) • *(Schéma)*

`http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html`
(*Mathematica*–Quellencode) • *(Code de source en Mathematica)*

(3) Vordiplome siehe unter Link: • *Diplômes préalables voir le lien:*

`http://rowicus.ch/Wir/VDs/VDs.html`

2.2 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ I1 I 01/02 1

---

(1) Diagramme? • *Diagrammes?*

(a) $f_1(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + \sin(x)^2}$, $D_{f_1} = [-6, 6]$

(b) $f_1(x) = 1 \;\Rightarrow\; x = ?$ Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

(c) $f_2(x) = -1 + \sin([x])$, $D_{f_2} = [-6, 6]$

(d) $f_3(x) = \cos(e^{|x|})$, $D_{f_3} = [-2.5, 2.5]$

(2) $x = 4 + \cfrac{5}{5 + \cfrac{5}{5 + \cfrac{5}{\ddots}}} = ?$ $\rightsquigarrow$ $x \in \mathbb{Q}$?

Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

(3)

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & y \arrow[r, "p"] & z \end{tikzcd}$$

$f(x) = e^x$
$p(x) = \dfrac{1}{2}\, ln(x^2)$

(a) $h(x) = (p \circ f)(x)) = ?$
$\rightsquigarrow$ Diagramm? • *Diagramme?*

(b) $h(x) = (f \circ p)(x)) = ?$
$\rightsquigarrow$ Diagramm? • *Diagramme?*

(c) $h(x) = (f(p(x)^2) = ?$
$\rightsquigarrow$ Diagramm? • *Diagramme?*

(4) $f(x) = (-1 + x) \cdot \left(-1 + x^2\right)$, $p(x) = -8 + 12\,x - 6\,x^2 + x^3$

(a) $h(x) = f(x) \cdot p(x)$

i. Nullstellen? • *Zéros?* Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

ii. Diagramm? • *Diagramme?*

(b) $u(x) = \dfrac{f(x)}{p(x)}$

i. Pole? • *Pôles?* Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

ii. Diagramm? • *Diagramme?*

(5) $f(x) = e^{-\sin(x)^2}$, $g(x) = -0.5\,x$

(a) Diagramm? • *Diagramme?*

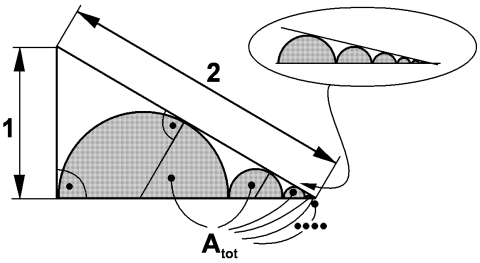
(b) Verhalten für grosse $|x|$?
• *Comportement pour des $|x|$ qui sont grands?*

(c) $m \leq f(x) \leq M \rightsquigarrow\; m, M = ?$ Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

(d) $f(x) = g(x) \rightsquigarrow\; x \approx ?$

(6) $4^{2\,x} = 3^x \cdot \pi^5 \cdot 4^{-3\,x} \rightsquigarrow\; x = ?$ Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!* $\rightsquigarrow$

(7) $A_{tot} = ?$



(8) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\,\left(-e^{-n} - 3\,n^2 + 4\,n^3 + n^2\,\cos(n)\right)}{4\,n^2 + 3\,n^4 - \sin(n^2)} = ?$ Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

(9) $(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{2\cdot 3^k} + \dfrac{1}{3\cdot 4^k}) - \dfrac{7}{6} = ?$ Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

(10) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n + 2\,ln(n)}{3\,n - 4\,ln(n) + 5\,\tan(\frac{1}{n})} = ?$ Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

Viel Glück! • *Bonne chance!*

2.3 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ I1 I 01/03 1

---

(1) Diagramme? • *Diagrammes?*

(a) $f_1(x) = \dfrac{x^2}{x^4 + cos(x)^2}, \;\; D_{f_1} = [-6, 6], \;\; cos(x)^2 = (cos(x))^2$

(b) $f_1(x) = 0.8 \;\Rightarrow\; x = ?$

(c) $f_2(x) = 2 \cdot \sin([x]) - x, \;\; D_{f_2} = [-6, 6]$

(d) $f_3(x) = \sin(|ln(x)|), \;\; D_{f_3} = [-2.5, 2.5]$

(2) $x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{\ddots}}}} = ? \qquad \rightsquigarrow \qquad x \in \mathbb{Q}\ ?$

Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

(3)

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & y \arrow[r, "p"] & z \end{tikzcd}$$

$f(x) = \sinh(x)$
$p(x) = \cosh(x)$

(a) $h(x) = (p \circ f)(x) = ?$
$\rightsquigarrow$ Diagramm? • *Diagramme?*

(b) $h(x) = (f \circ p)(x) = ?$
$\rightsquigarrow$ Diagramm? • *Diagramme?*

(c) $h(x) = f(p(x)^2) - 1 = ?$
$\rightsquigarrow$ Diagramm? • *Diagramme?*

(4) $f(x) = (2 - x)(4 - x^2), \;\; p(x) = (2 - x)^2(4 - x)$

(a) $h(x) = f(x) \cdot p(x)$

i. Nullstellen? • *Zéros?* Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

ii. Diagramm? • *Diagramme?*

(b) $u(x) = \dfrac{f(x)}{p(x)}$

i. Pole? • *Pôles?* Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

ii. Diagramm? • *Diagramme?*

(5) $f(x) = ln(1 + (\sin(x))^2), \;\; g(x) = 0.5\, x$

(a) Diagramm? • *Diagramme?*

(b) Verhalten für grosse $|x|$?
• *Comportement pour des $|x|$ qui sont grands?*

(c) $m \leq f(x) \leq M \rightsquigarrow \; m, M = ?$ Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

(d) $f(x) = g(x) \rightsquigarrow \; x \approx ?$

(6) $2^{(6\,x)} = 6^x \cdot e^x \cdot 2^{-x}$ Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!* $x =?$

(7) $(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e}{\pi^k}) - 1 = ?$ Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

(8) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot \sin(n) \cdot n^3 - ln(1-\frac{1}{n}) + n^4}{n^6 - 2\,n^2 + \cos(n)} = ?$ Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot \sin(n) \cdot n^2 - ln(1-\frac{1}{n}) + n^4}{n^5 - 2\,n^2 + \cos(n)} = ?$ Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

(9) $(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} - \frac{1}{6^k}) - \frac{3}{45} = ?$ Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

(10) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2\,ln(n^2)}{3\,n^2 - 4\,ln(n) + 5\,\tan(\frac{1}{n^2})} + \sqrt{3} = ?$ Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

(11) $f_1(x) = x^2 - x - 4$ $f_1(x) \geq f_2(x) \rightsquigarrow L_1$

$f_2(x) = -x^2 + 2\,x + 8$ $f_1(x) \geq g_3(x) \rightsquigarrow L_2$

$g_3(x) = 4\,x + 10$ $\rightsquigarrow L_1 \cap L_2 = ?$

Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

Viel Glück! • *Bonne chance!*

2.4 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ I1 I 03/04 1

---

(1) Diagramme? • *Diagrammes?*

(a) $f_1(x) = \dfrac{x^2}{x^4 + cos(x)^2}, \;\; D_{f_1} = [-6, 6], \;\; cos(x)^2 = (cos(x))^2$

(b) $f_1(x) = 0.8 \;\Rightarrow\; x = \,?$

(c) $f_2(x) = 2 \cdot \sin([x]) - x, \;\; D_{f_2} = [-6, 6]$

(d) $f_3(x) = \sin(|ln(x)|), \;\; D_{f_3} = [-2.5, 2.5]$

(2) $x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{\ddots}}}} = \,?$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ $x \in \mathbb{Q}\,?$

Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

(3)

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & y \arrow[r, "p"] & z \end{tikzcd}$$

$f(x) = \sinh(x)$
$p(x) = \cosh(x)$

(a) $h(x) = (p \circ f)(x) = \,?$
$\rightsquigarrow$ Diagramm? • *Diagramme?*

(b) $h(x) = (f \circ p)(x) = \,?$
$\rightsquigarrow$ Diagramm? • *Diagramme?*

(c) $h(x) = f(p(x)^2) - 1 = \,?$
$\rightsquigarrow$ Diagramm? • *Diagramme?*

(4) $f(x) = (2 - x)(4 - x^2), \;\; p(x) = (2 - x)^2(4 - x)$

(a) $h(x) = f(x) \cdot p(x)$

i. Nullstellen? • *Zéros?* Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

ii. Diagramm? • *Diagramme?*

(b) $u(x) = \dfrac{f(x)}{p(x)}$

i. Pole? • *Pôles?* Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

ii. Diagramm? • *Diagramme?*

(5) $f(x) = ln(1 + (\sin(x))^2), \;\; g(x) = 0.5\, x$

(a) Diagramm? • *Diagramme?*

(b) Verhalten für grosse $|x|$?
• *Comportement pour des* $|x|$ *qui sont grands?*

(c) $m \leq f(x) \leq M \rightsquigarrow\; m, M = \,?$ Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

(d) $f(x) = g(x) \rightsquigarrow\; x \approx \,?$

(6) $2^{(6\,x)} = 6^x \cdot e^x \cdot 2^{-x}$ Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!* $x = ?$

(7) $(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e}{\pi^k}) - 1 = ?$ Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

(8) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot \sin(n) \cdot n^3 - ln(1-\frac{1}{n}) + n^4}{n^6 - 2\,n^2 + \cos(n)} = ?$ Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \cdot \sin(n) \cdot n^2 - ln(1-\frac{1}{n}) + n^4}{n^5 - 2\,n^2 + \cos(n)} = ?$ Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

(9) $(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} - \frac{1}{6^k}) - \frac{3}{45} = ?$ Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

(10) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2\,ln(n^2)}{3\,n^2 - 4\,ln(n) + 5\,\tan(\frac{1}{n^2})} + \sqrt{3} = ?$ Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

(11) $f_1(x) = x^2 - x - 4$ $\quad f_1(x) \geq f_2(x) \leadsto L_1$

$f_2(x) = -x^2 + 2\,x + 8$ $\quad f_1(x) \geq g_3(x) \leadsto L_2$

$g_3(x) = 4\,x + 10$ $\quad \leadsto Ł_1 \cap L_2 = ?$

Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

Viel Glück! • *Bonne chance!*

2.5 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ I1 I 03/04 1a

Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet! • *Tous les parties énumérés des problèmes donnent le même nombre de points!* — Viel Glück! • *Bonne chance!*

WIR1

(1) Diagramme? • *Diagrammes?*

(a) $f_1(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2+cos(x)^2}$, $D_{f_1} = [-6, 6]$, $cos(x)^2 = (cos(x))^2$

(b) $f_1(x) = 0.8 \;\Rightarrow\; x = \,?$

(c) $f_2(x) = 2 \cdot \cos([x] - x)$, $D_{f_2} = [-6, 6]$

(d) $f_3(x) = \cos(|ln(x)|)$, $D_{f_3} = [0.5, 3.5]$

(e) $\varphi(t) = \dfrac{1}{(2+t^2+(t-5)^4}$ (Polarkoordinaten) • *(Coordonnées polaires)*

(2) $x = 2 + \cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{\ddots}}}} = \,?$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ $x \in \mathbb{Q}$?
Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

(3) Diagramm? • *Diagramme?* $\quad f(x) = \sin(x)$, $p(x) = \cos(x)$

(a) $h(x) = (p \circ f)(x) = \,?$

(b) $h(x) = (f \circ p)(x) = \,?$

(c) $h(x) = f((p(x) \cdot f(x)) = \,?$

(4) $f(x) = (x^2 - x)(16 - x^2)$, $p(x) = (2 + x)^2(4 + x)$

(a) $h(x) = f(x) \cdot p(x)$

i. Nullstellen? • *Zéros?* Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

ii. Diagramm? • *Diagramme?*

(b) $u(x) = \dfrac{f(x)}{p(x)}$

i. Pole? $x = \,?$ • *Pôles?* $x = \,?$ Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

ii. Asymptote? $y = \,?$ • *Asymptotes?* $y = \,?$ Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

iii. Diagramm? • *Diagramme?*

(5) Mathematica-Arbeit nach mündlicher Anleitung. • *Travail avec Mathematica selon instruction orale.*

(a) Output: Diagramme zu diesem Tests. • *Diagrammes pour ce test*

(b) Primzahlsiebe: • *"Passoire" de nombres premiers:*

i. $p_1 - p_2 = 2$

ii. $p_1 = p_2 + p_3 + 1$

iii. $p_1 = p_2 \cdot p_3 + 2$

iv. Ähnliche Frage. • *Question semblable.*

Viel Glück! • *Bonne chance!*

2.6 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ I1 I 03/04 1b

Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet! • *Tous les parties énumérés des problèmes donnent le même nombre de points!* — Viel Glück! • *Bonne chance!*

WIR1

(1) Diagramme? • *Diagrammes?*

(a) $f_1(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2+sin(x)^2},\ \ D_{f_1} = [-6, 6],\ \ cos(x)^2 = (cos(x))^2$

(b) $f_1(x) = 0.8 \ \Rightarrow\ x = ?$

(c) $f_2(x) = 2 \cdot \sin([x] - x),\ \ D_{f_2} = [-6, 6]$

(d) $f_3(x) = \sin(|ln(x)|),\ \ D_{f_3} = [0.5, 3.5]$

(e) $\varphi(t) = \sqrt{2 + \sin t + \frac{\sin 2\,t}{2} + \frac{\sin 2\cdot 2\,t}{3}}$ (Polarkoordinaten) • *(Coordonnées polaires)*

(2) $x = 5 + \cfrac{5}{5 + \cfrac{5}{5+\cfrac{5}{5+\cfrac{5}{\ddots}}}} = ?$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ $x \in \mathbb{Q}$?
Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

(3) Diagramm? • *Diagramme?* $\quad f(x) = \cos(x),\ \ p(x) = \tan(x)$

(a) $h(x) = (p \circ f)(x) = ?$

(b) $h(x) = (f \circ p)(x) = ?$

(c) $h(x) = f((p(x) \cdot f(x)) = ?$

(4) $f(x) = (x^2 - 25)(x^2 + 25),\ \ p(x) = (4 - x)^2(4 - x)$

(a) $h(x) = f(x) \cdot p(x)$

i. Nullstellen? • *Zéros?* Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

ii. Diagramm? • *Diagramme?*

(b) $u(x) = \dfrac{f(x)}{p(x)}$

i. Pole? $x = ?$ • *Pôles?* $x = ?$ Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

ii. Asymptote? $y = ?$ • *Asymptotes?* $y = ?$ Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

iii. Diagramm? • *Diagramme?*

(5) Mathematica-Arbeit nach mündlicher Anleitung. • *Travail avec Mathematica selon instruction orale.*

(a) Output: Diagramme zu diesem Tests. • *Diagrammes pour ce test*

(b) Primzahlsiebe: • *"Passoire" de nombres premiers:*

i. $p_1 - p_2 = 2$

ii. $p_1 = p_2 + p_3 + 1$

iii. $p_1 = p_2 \cdot p_3 + 2$

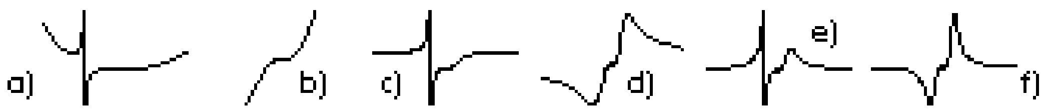
iv. Ähnliche Frage. • *Question semblable.*

2.7 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ I1 I 04/05 1a

CodeM1W T1I1AC0405-1.tex   Name, Datum, Klasse ....

Die Lösungen sind anzukreuzen, einzukreisen oder zu benennen. Richtige Kreuze oder Kreise u.s.w. geben je einen Pluspunkt. Falsche Kreuze oder Kreise geben je einen Minuspunkt.

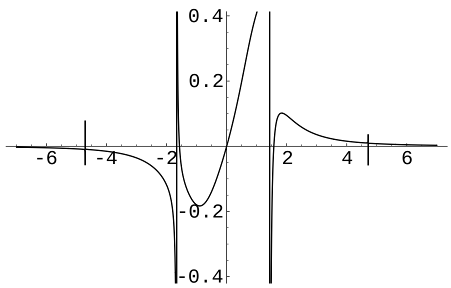
(1)



Das obenstehende Bild zeigt eine Funktion in $[-7, 7]$. Bestimme, welches Bild für die folgenden Funktionen in Frage kommt, falls der Ausdruck überhaupt zu einem Bild passt. Markiere einen Strich, wenn nichts passt:

Funktion	$\frac{-x^4}{3-x^4}$	$\frac{x^3}{3+x^4-\sin(x)}$	$\frac{-x^4 \cdot e^x}{3+x^4+\lvert\tan(x)\rvert}$	$\frac{x^3}{3+x^3-\sin(x)}$
Bild Nummer				

(2)



Gegeben ist:

$$f(x) = \frac{x}{3 + x^4 - \tan(x)}$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) f hat unendlich viele Pole.

(b) f hat unendlich viele Nullstellen.

(c) f hat endlich viele Nullstellen.

(d) f ist streng monoton fallend für $x > 3$.

(e) f ist positiv für $x > 3$.

(f) Wir berechnen z.B. $[|f(600)|] = 0$, $[|f(600+\pi)|] = 0$, $[|f(600+2\pi)|] = 0\ldots$
Wir behaupten jetzt: $[|f(x)|]$ ist periodisch für $x > 600$.

(g) $f(x^2)$ ist gerade.

Richtige Lösung deutlich markieren:

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)

(3) Betrachte den *Mathematica*–Code:

```
f[x_, n_] := Ceiling[2Sin[n Pi/2 x]]^2 - x;
g[x_, n_] := Floor[2Sin[n Pi/2 x]]^2 - x;
t = Table[f[x, n] - g[x, n], {n, 1, 100}] /. x -> 0.5;
Table[t[[k]] - t[[k + 8]], {k, 20, 27}]
```

Welcher Output ist der richtige, (falls der richtige Output in der Liste vorhanden ist)?

(a) $\{1, -3, 0, -3, -1, 3, 0, 3\}$
(b) $\{20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27\}$
(c) $\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$
(d) $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$
(e) Anderer Output!

Richtige Lösung deutlich markieren:

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)

(4) Sei $g(x) = x - 2$, $h(x) = x^2 - 2$. Damit bilden wir:

$f_1 = g \circ h$	$f_2 = h \circ g$	$f_3 = h \circ (g \circ g)$	$f_4(x) = g \circ (h \circ h)$	$f_5 = h \circ (g \circ h)$	$f_6 = g \circ (h \circ g)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)

Ordne, falls möglich, die Nummern der Ausdrücke folgenden Funktionstermen zu (Zahl notieren, falls nicht möglich Kreuz)! **Lösung deutlich markieren:**

Term	$14 - 8\,x^2 + x^4$	$-4\,x^2 + x^4$	$2 - 4\,x + x^2$	$-4\,x + x^2$	$14 - 8\,x + x^2$
Nummer					

(5) $f_1(x) = \left(-2 + x^2\right)\,\left(-1 + x^2\right)$, $f_2(x) = (f_1(x))^{(\frac{1}{2})}$, $f_3(x) = (f_2(x))^4$

(a) f_1 hat im Intervall $[0, 2]$ folgende Anzahl Nullstellen: **(Lösung deutlich markieren)**

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6	Andere Anzahl

(b) f_2 resp. f_3 ist im Intervall $[0, 2]$ zwischen folgenden Nullstellen nicht definiert:

f_2: Nullstellen (Intervall(e)) eintragen:	f_3: Nullstellen (Intervall(e)) eintragen:

(6) Polarkoordinaten: $r(x) = \cos(2\,x) - \sin(5\,x))$, $x \in [0, 2\,\pi] \rightsquigarrow$ Plot? (4 Punkte)
(Weiter: Dazu Projektaufgabe „Blumen und Früchte“ nach mündlicher Mitteilung bis Ende Januar.)

Viel Glück!

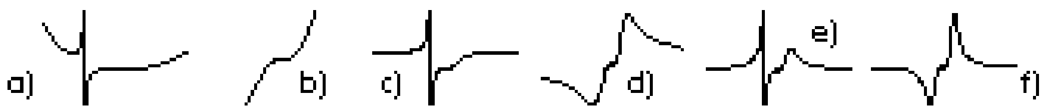
WIR1

2.8 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ I1 I 04/05 1b

CodeH1S T1I1AC0405-1a.tex Name, Datum, Klasse ....

Die Lösungen sind anzukreuzen, einzukreisen oder zu benennen. Richtige Kreuze oder Kreise u.s.w. geben je einen Pluspunkt. Falsche Kreuze oder Kreise geben je einen Minuspunkt.

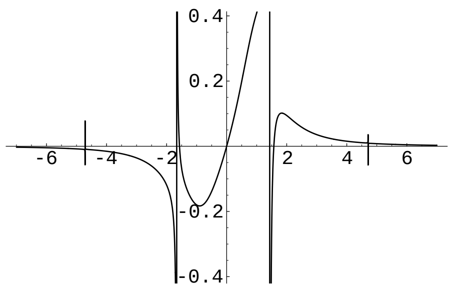
(1)



Das obenstehende Bild zeigt eine Funktion in $[-7, 7]$. Bestimme, welches Bild für die folgenden Funktionen in Frage kommt, falls der Ausdruck überhaupt zu einem Bild passt. Markiere einen Strich, wenn nichts passt:

Funktion	$\frac{x^4}{-x^4+3}$	$\frac{x^3}{3+x^4-\sin(x)}$	$\frac{-x^4 \cdot e^x}{3+x^4+\lvert\tan(x)\rvert}$	$\frac{x^3}{3+x^3-\sin(x)}$
Bild Nummer				

(2)



Gegeben ist:

$$f(x) = \frac{-x}{+\tan(x) - 3 - x^4}$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) f hat unendlich viele Pole.

(b) f hat unendlich viele Nullstellen.

(c) f hat endlich viele Nullstellen.

(d) f ist streng monoton fallend für $x > 3$.

(e) f ist positiv für $x > 3$.

(f) Wir berechnen z.B. $[|f(600)|] = 0$, $[|f(600+\pi)|] = 0$, $[|f(600+2\pi)|] = 0 \ldots$
Wir behaupten jetzt: $[|f(x)|]$ ist periodisch für $x > 600$.

(g) $f(x^2)$ ist gerade.

Richtige Lösung deutlich markieren:

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)

(3) Betrachte den *Mathematica*–Code:

```
f[x_, n_] := Ceiling[2Sin[n Pi/2 x]]^2 - x;
g[x_, n_] := Floor[2Sin[n Pi/2 x]]^2 - x;
t = Table[f[x, n] - g[x, n], {n, 1, 100}] /. x -> 0.5;
Table[t[[k]] - t[[k + 8]], {k, 20, 27}]
```

Welcher Output ist der richtige, (falls der richtige Output in der Liste vorhanden ist)?

(a) $\{1, -3, 0, -3, -1, 3, 0, 3\}$
(b) $\{20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27\}$
(c) $\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$
(d) $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$
(e) Anderer Output!

Richtige Lösung deutlich markieren:

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)

(4) Sei $g(x) = -2 + x$, $h(x) = -2 + x^2$. Damit bilden wir:

$f_1 = g \circ h$	$f_2 = h \circ g$	$f_3 = h \circ (g \circ g)$	$f_4(x) = g \circ (h \circ h)$	$f_5 = h \circ (g \circ h)$	$f_6 = g \circ (h \circ g)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)

Ordne, falls möglich, die Nummern der Ausdrücke folgenden Funktionstermen zu (Zahl notieren, falls nicht möglich Kreuz)! **Lösung deutlich markieren:**

Term	$14 - 8\,x^2 + x^4$	$-4\,x^2 + x^4$	$2 - 4\,x + x^2$	$-4\,x + x^2$	$14 - 8\,x + x^2$
Nummer					

(5) $f_1(x) = \left(-2 + x^2\right)\left(-1 + x^2\right)$, $f_2(x) = (f_1(x))^{(\frac{1}{2})}$, $f_3(x) = (f_2(x))^4$

(a) f_1 hat im Intervall $[0, 2]$ folgende Anzahl Nullstellen: **(Lösung deutlich markieren)**

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6	Andere Anzahl

(b) f_2 resp. f_3 ist im Intervall $[0, 2]$ zwischen folgenden Nullstellen nicht definiert:

f_2: Nullstellen (Intervall(e)) eintragen:	f_3: Nullstellen (Intervall(e)) eintragen:

(6) Polarkoordinaten: $r(x) = \cos(2\,x) - \sin(5\,x))$, $x \in [0, 2\,\pi] \rightsquigarrow$ Plot? (4 Punkte)
(Weiter: Dazu Projektaufgabe „Blumen und Früchte" nach mündlicher Mitteilung bis Ende Januar.)

Viel Glück!

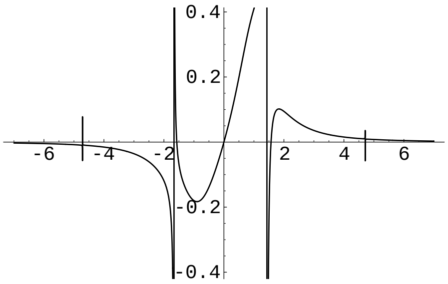
WIR1

2.9 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ I1 I 04/05 1c

CodeG1F T1I1AC0405-2.tex Name, Datum, Klasse ....

Die Lösungen sind anzukreuzen, einzukreisen oder zu benennen. Richtige Kreuze oder Kreise u.s.w. geben je einen Pluspunkt. Falsche Kreuze oder Kreise geben je einen Minuspunkt.

(1)



Gegeben ist:

$$f(x) = \frac{x}{3 + x^4 - \tan(x)}$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) f hat unendlich viele Nullstellen.

(b) f hat endlich viele Nullstellen.

(c) f hat unendlich viele Pole.

(d) f ist streng monoton fallend für $x > 3$.

(e) Wir berechnen z.B. $[|f(700)|] = 0$, $[|f(700+\pi)|] = 0$, $[|f(700+2\pi)|] = 0\ldots$
Wir behaupten jetzt: $[|f(x)|]$ ist periodisch für $x > 700$.

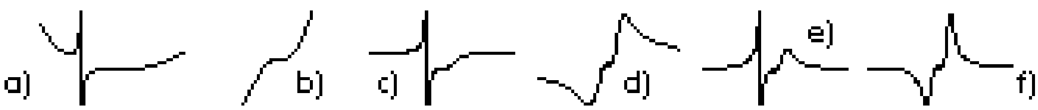
(f) $f(x^2)$ ist gerade.

(g) f ist positiv oder negativ für $x > 3$.

Richtige Lösung deutlich markieren:

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)

(2)



Das obenstehende Bild zeigt eine Funktion in $[-7, 7]$. Bestimme, welches Bild für die folgenden Funktionen in Frage kommt, falls der Ausdruck überhaupt zu einem Bild passt. Markiere einen Strich, wenn nichts passt:

Funktion	$\dfrac{x^3}{3 + x^4 - \sin(x)}$	$\dfrac{-x^6 \cdot e^x}{3 + x^4 - \lvert\tan(x)\rvert}$	$\dfrac{x^3}{3 + x^3 - \sin(x)}$	$\dfrac{-x^4}{3 - x^4}$
Bild Nummer				

(3) Sei $g(x) = x - 2,\ \ h(x) = x^2 - 2$. Damit bilden wir:

$f_1 = g \circ h$	$f_2 = h \circ g$	$f_3 = h \circ (g \circ g)$	$f_4(x) = g \circ (h \circ h)$	$f_5 = h \circ (g \circ h)$	$f_6 = g \circ (h \circ g)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)

Ordne, falls möglich, die Nummern der Ausdrücke folgenden Funktionstermen zu (Zahl notieren, falls nicht möglich Kreuz)! **Lösung deutlich markieren:**

Term	$14 - 8\,x + x^2$	$2 - 4\,x + x^2$	$-4\,x^2 + x^4$	$-4\,x + x^2$	$14 - 8\,x^2 + x^4$
Nummer					

(4) Betrachte den *Mathematica*–Code:

```
g[x_, n_] := Ceiling[2Sin[n Pi/2 x]]^2 - x;
h[x_, n_] := Floor[2Sin[n Pi/2 x]]^2 - x;
u = Table[g[x, m] - h[x, m], {m, 1, 100}] /. x -> 0.5;
Table[u[[p]] - u[[p + 8]], {p, 20, 27}]
```

Welcher Output ist der richtige, (falls der richtige Output in der Liste vorhanden ist)?

(a) $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$
(b) $\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$
(c) $\{28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35\}$
(d) $\{1, -3, 0, -3, -1, 3, 0, 3\}$
(e) Anderer Output!

Richtige Lösung deutlich markieren:

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)

(5) $f_1(x) = \left(1 - x^2\right)\,\left(2 - x^2\right),\ \ f_2(x) = (f_1(x))^{(\frac{1}{2})},\ \ f_3(x) = (f_2(x))^6$

(a) f_1 hat im Intervall $[0, 2]$ folgende Anzahl Nullstellen: **(Lösung deutlich markieren)**

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6	Andere Anzahl

(b) f_2 resp. f_3 ist im Intervall $[0, 2]$ zwischen folgenden Nullstellen nicht definiert:

f_2: Nullstellen (Intervall(e)) eintragen:	f_3: Nullstellen (Intervall(e)) eintragen:

(6) Polarkoordinaten: $r(x) = 2 + \cos(2\,x) + \sin(5\,x)),\ \ x \in [0, 2\,\pi] \rightsquigarrow$ Plot? (4 Punkte)
(Weiter: Dazu Projektaufgabe „Blumen und Früchte“ nach mündlicher Mitteilung bis Ende Januar.)

Viel Glück!

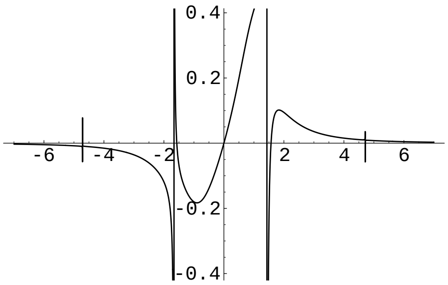
WIR1

2.10 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ I1 I 04/05 1cf

CodeG1F T1I1AC0405-2-f.tex Nom, date, classe ....

Marquer les solutions par des croix ou des ronds (cercles). Les croix (ou cercles) justes donnent des points positifs. Les croix (ou cercles) fausses donnent des points négatifs.

(1)



• *Soit donné:*

$$f(x) = \frac{x}{3 + x^4 - \tan(x)}$$

• *Chercher les propositions vraies:*

(a) • f *a un nombre infini de zéros.*

(b) • f *a un nombre fini de zéros.*

(c) • f *a un nombre infini de pôles.*

(d) • f *est décroissante de façon monotone pour* $x > 3$.

(e) • *On calcule p.ex.* $[|f(700)|] = 0$, $[|f(700 + \pi)|] = 0$, $[|f(700 + 2\pi)|] = 0 \ldots$
Maintenant on affirme: $[|f(x)|]$ *est périodique pour* $x > 700$.

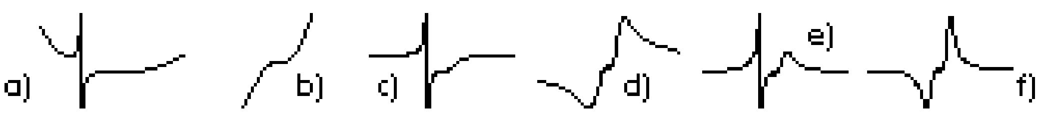
(f) • $f(x^2)$ *est paire.*

(g) • f *est positive ou négative pour* $x > 3$.

Marquer la solution juste:

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)

(2)



• *L'image ci-dessus montre une fonction dans* $[-7, 7]$. *Décider quel image correspond a quelle fonction suivante, si possible. Marquer par un trait s'il n'y a pas de coordination:*

Fonction	$\frac{x^3}{3 + x^4 - \sin(x)}$	$\frac{-x^6 \cdot e^x}{3 + x^4 - \|\tan(x)\|}$	$\frac{x^3}{3 + x^3 - \sin(x)}$	$\frac{-x^4}{3 - x^4}$
Image numéro				

(3) • *Soit* $g(x) = x - 2,\ \ h(x) = x^2 - 2$. Nous composons avec ces fonctions:

$f_1 = g \circ h$	$f_2 = h \circ g$	$f_3 = h \circ (g \circ g)$	$f_4(x) = g \circ (h \circ h)$	$f_5 = h \circ (g \circ h)$	$f_6 = g \circ (h \circ g)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)

• *Adjoindre, si possible, les numéros aux termes suivants. (Si possible noter le numéro, si ne pas possible noter une croix!)* **Marquer laq solution de façon bien visible:**

Terme	$14 - 8\,x + x^2$	$2 - 4\,x + x^2$	$-4\,x^2 + x^4$	$-4\,x + x^2$	$14 - 8\,x^2 + x^4$
Numéro					

(4) • *Concidérer le code de Mathematica:*

```
g[x_, n_] := Ceiling[2Sin[n Pi/2 x]]^2 - x;
h[x_, n_] := Floor[2Sin[n Pi/2 x]]^2 - x;
u = Table[g[x, m] - h[x, m], {m, 1, 100}] /. x -> 0.5;
Table[u[[p]] - u[[p + 8]], {p, 20, 27}]
```

• *Quel rendement (output) est juste? (Si présent dans la liste.)*

(a) • $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$
(b) • $\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$
(c) • $\{28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35\}$
(d) • $\{1, -3, 0, -3, -1, 3, 0, 3\}$
(e) • *Autre rendement!*

Marquer la solution juste de façon bien visible:

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)

(5) $f_1(x) = \left(1 - x^2\right)\left(2 - x^2\right),\ \ f_2(x) = (f_1(x))^{(\frac{1}{2})},\ \ f_3(x) = (f_2(x))^6$

(a) • f_1 *a dans l'intervalle* $[0, 2]$ *le nombre suivant de solutions:* **(Marquer la solution de façon bien visible!)**

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6	• *Autre nombre.*

(b) • f_2 *resp.* f_3 *n'est pas définie dans l'intervalle* $[0, 2]$ *entre les zéros suivants:*

f_2: • *Noter less zéros (Intervalle(s)):*	f_3: • *Noter less zéros (Intervalle(s)):*

(6) • *Coordonnées polaires:* $r(x) = 2 + \cos(2\,x) + \sin(5\,x)),\ \ x \in [0, 2\,\pi] \rightsquigarrow$ *Plot?* *(4 points)*
(En outre: Travail de projet „Fleurs et fruits“ selon explication orale jusqu'à fin janvier.)

• *Bonne chance!*

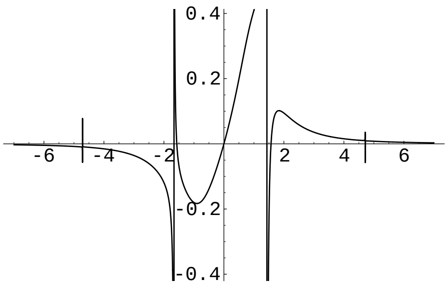
WIR1

2.11 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ I1 I 04/05 1d

CodeK2J T1I1AC0405-2a.tex Name, Datum, Klasse ....

Die Lösungen sind anzukreuzen, einzukreisen oder zu benennen. Richtige Kreuze oder Kreise u.s.w. geben je einen Pluspunkt. Falsche Kreuze oder Kreise geben je einen Minuspunkt.

(1)



Gegeben ist:

$$f(x)=\frac{-x}{+\tan(x)-3-x^4}$$

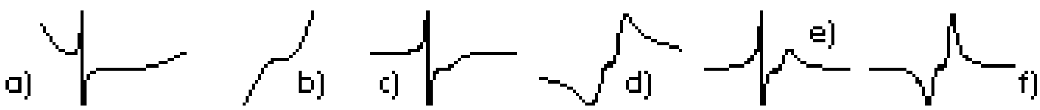
Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) f hat unendlich viele Nullstellen.
(b) f hat endlich viele Nullstellen.
(c) f hat unendlich viele Pole.
(d) f ist streng monoton fallend für $x>3$.
(e) Wir berechnen z.B. $[|f(700)|]=0$, $[|f(700+\pi)|]=0$, $[|f(700+2\pi)|]=0\ldots$
Wir behaupten jetzt: $[|f(x)|]$ ist periodisch für $x>700$.
(f) $f(x^2)$ ist gerade.
(g) f ist positiv oder negativ für $x>3$.

Richtige Lösung deutlich markieren:

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)

(2)



Das obenstehende Bild zeigt eine Funktion in $[-7,7]$. Bestimme, welches Bild für die folgenden Funktionen in Frage kommt, falls der Ausdruck überhaupt zu einem Bild passt. Markiere einen Strich, wenn nichts passt:

Funktion	$\frac{-x^3}{\sin(x)-3-x^4}$	$\frac{-x^6\cdot e^x}{3+x^4-\lvert\tan(x)\rvert}$	$\frac{x^3}{3+x^3-\sin(x)}$	$\frac{-x^4}{3-x^4}$
Bild Nummer				

(3) Sei $g(x) = -2 + x$, $h(x) = -2 + x^2$. Damit bilden wir:

$f_1 = g \circ h$	$f_2 = h \circ g$	$f_3 = h \circ (g \circ g)$	$f_4(x) = g \circ (h \circ h)$	$f_5 = h \circ (g \circ h)$	$f_6 = g \circ (h \circ g)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)

Ordne, falls möglich, die Nummern der Ausdrücke folgenden Funktionstermen zu (Zahl notieren, falls nicht möglich Kreuz)! **Lösung deutlich markieren:**

Term	$14 - 8\,x + x^2$	$2 - 4\,x + x^2$	$-4\,x^2 + x^4$	$-4\,x + x^2$	$14 - 8\,x^2 + x^4$
Nummer					

(4) Betrachte den *Mathematica*–Code:

```
g[x_, n_] := Ceiling[2Sin[n Pi/2 x]]^2 - x;
h[x_, n_] := Floor[2Sin[n Pi/2 x]]^2 - x;
u = Table[g[x, m] - h[x, m], {m, 1, 100}] /. x -> 0.5;
Table[u[[p]] - u[[p + 8]], {p, 20, 27}]
```

Welcher Output ist der richtige, (falls der richtige Output in der Liste vorhanden ist)?

(a) $\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$
(b) $\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$
(c) $\{28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35\}$
(d) $\{1, -3, 0, -3, -1, 3, 0, 3\}$
(e) Anderer Output!

Richtige Lösung deutlich markieren:

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)

(5) $f_1(x) = \left(1 - x^2\right)\,\left(2 - x^2\right)$, $f_2(x) = (f_1(x))^{(\frac{1}{2})}$, $f_3(x) = (f_2(x))^6$

(a) f_1 hat im Intervall $[0, 2]$ folgende Anzahl Nullstellen: **(Lösung deutlich markieren)**

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6	Andere Anzahl

(b) f_2 resp. f_3 ist im Intervall $[0, 2]$ zwischen folgenden Nullstellen nicht definiert:

f_2: Nullstellen (Intervall(e)) eintragen:	f_3: Nullstellen (Intervall(e)) eintragen:

(6) Polarkoordinaten: $r(x) = 2 + \cos(2\,x) + \sin(5\,x))$, $x \in [0, 2\,\pi] \rightsquigarrow$ Plot? (4 Punkte)
(Weiter: Dazu Projektaufgabe „Blumen und Früchte“ nach mündlicher Mitteilung bis Ende Januar.)

Viel Glück!

WIR1

2.12 Projekt in Analysis ◇ Projet en analyse ◇I1 ◇ I 03/04 1 a

---

Projek Simulation von rückgekoppelten Systemen mit Mathematica — Projet simulation de systèmes rétroactifs avec Mathematica

---

(1) Beispiel: Analysis-Script 1.5. • *Exemple: Script d'analyse 1.5.*

(2) Projekttitel nach eigener Wahl. • *Titres de projet selon choix personel.*

(3) Projektplan: • *Plan de projet:*

(a) Titel fixiert bis zum 25.2.04 (Mail mit Liste an mich, organisiert durch Klassenchef) • *Le titre est fixé jusqu' au 25.2.04 (mail avec la liste à moi, organisé par le chef de classe)*

(b) Arbeit einzeln oder in 2-er Gruppen möglich. • *Travail seul ou en groupes à deux est aussi possible.*

(c) Bewertung wie 1/3 Prüfung (2 Aufgaben von 6) • *Note: Pois comme 1/3 test, comparable avec 2 excercices sur 6*

(d) Zeit: Abgabe spätestens 24.3.04. • *Temps: Remettre le travail au plus tard le 24.3.04.*

(e) Bewertung: Einschätzung nach Rangliste (Aspekte: Themenwahl, Ausarbeitung, Modellierung, Programmierung, Resultat, Aussagekraft, Aufwand und Optimierung, Darstellung)
• *Evaluation: Estimation après le classement dans la classe(aspects: choix de sujet, élaboration, modelage, programmation, résultat, signifiance, optimisation, représentation)*

2.13 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ I1 I 01/02 2

---

(1) **(24 Punkte)** • *(24 points)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig. Sie werden alle gleich bewertet. Alle Teilschritte der Lösung sind schriftlich auf dem Lösungsblatt festzuhalten.
• *Les problèmes partiels suivants sont indépendants. Pour chaque problème partiel on donne le même nombre de points. Toutes les étapes partielles de la solution sont à retenir par écrit sur la feuille de solution.*

(a) Integriere von Hand: • *Intégrer à la main:* $\int 5\,x^5 - 4\,x^{\alpha} + \frac{1}{2}\,x^2 - 4\,x + 9\,dx = \,?$ $(\alpha > 0)$

(b) Integriere von Hand: • *Intégrer à la main:* $\int\limits_0^{t^2} x^2\,dx = \,?$

(c) Integriere von Hand: • *Intégrer à la main:* $\int\limits_0^{\pi} \frac{1}{\omega}\,\cos(\omega t + \beta)\,dt = \,?$

(d) Integriere von Hand: • *Intégrer à la main:* $\int\limits_{-1}^{1} y \cdot e^y\,dy = \,?$

(e) Integriere von Hand: • *Intégrer à la main:* $\int\limits_0^{1} x \cdot e^{(x^2)}\,dx = \,?$

(f) Integriere von Hand: • *Intégrer à la main:* $\int\limits_a^{t} \frac{d}{d\,x} ln(e^{x^2} + 2\,x\,\cos^2(3\,x - 2))\,dx = \,?$

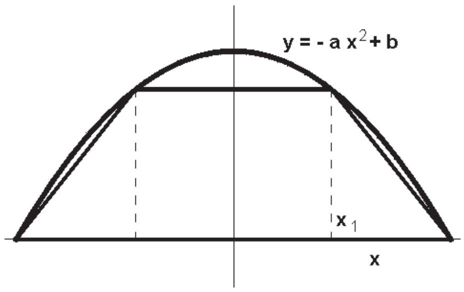
(g) Integriere von Hand: • *Intégrer à la main:* $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} 2\,e^{\sqrt{1-2\,x^2}}\,\frac{x}{\sqrt{1 - 2\,x^2}}\,dx = \,?$ (Subst. $u := \sqrt{1 - 2\,x^2}$)

(h) Integriere von Hand: • *Intégrer à la main:* $\int \frac{1}{e^x\,x^2} - \frac{ln(\frac{1}{x})}{e^x}\,dx = \,?$

(2) **(12 Punkte)**

Der Grundriss eines Hauses, das in einen Abhang hineingebaut wird, soll nach dem folgenden Prinzip festgelegt werden:
• *Le plan d'une maison, qui est construite dans une pente, devrait être fixé d'après le principe suivant:*

Zwischen der Parabel
$y = f_5(x) = -a\,x^2 + b \quad (a, b > 0)$
und der x–Achse wird ein Trapez eingeschrieben (vgl. Skizze).
• *Entre la parabole*
$y = f_5(x) = -a\,x^2 + b \quad (a, b > 0)$
et l'axe x on inscrit un trapèze (voir esquisse).



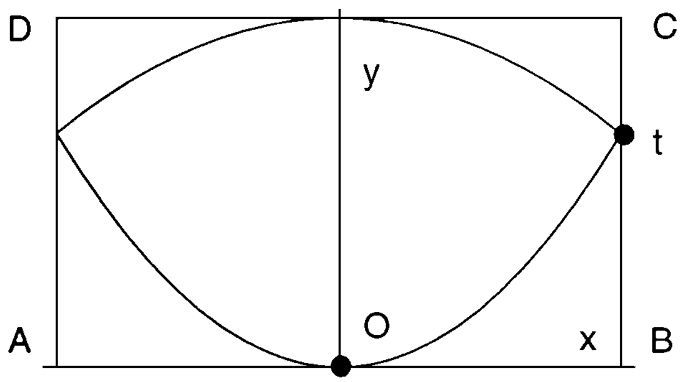
(a) Berechne die x–Koordinate x_1 des rechten oberen Punktes des Trapezes mit dem maximal möglichen Inhalt. (Der Lösungsweg muss sichtbar sein.)
• *Calculer la coordonnée x (qui soit x_1) du point supérieur droit du trapèze avec le contenu maximal possible. (Le chemin de solution doit être visible.)*

(b) Das Volumen des Aushubes beträgt schätzungsweise etwa einen Viertel des Volumens, das entsteht, wenn man die Parabel um die x–Achse rotieren lässt. Berechne dieses Volumen. (Der Lösungsweg muss sichtbar sein.)
• *Le volume de l'excavation fait approximativement un quart du volume qu'on obtient par rotation de la parabole autour de l'axe x. Calculer ce volume. (Le chemin de solution doit être visible.)*

(c) Berechne die Resultate für $a = \frac{1}{4}$ und $b = 36$.
• *Calculer les résultats pour $a = \frac{1}{4}$ et $b = 36$.*

(3) **(12 Punkte)**

Gegeben sei das Rechteck $A(-4, 0),\ B(4, 0),\ C(4, 4),\ D(-4, 4)$ sowie zwei Parabelbögen mit der y–Achse als Symmetrieachse (vgl. Skizze).
• *Soit donné le rectangle $A(-4, 0),\ B(4, 0),\ C(4, 4),\ D(-4, 4)$ ainsi que deux courbes de parabole dont l'axe y est l'axe de symétrie (voir ésquisse).*



(a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von t die Funktionsgleichungen der beiden Parabeln.
• *Calculer comment les équations des deux paraboles dépendent de t*

(b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die durch die beiden Parabelbögen begrenzt wird.
- *Calculer le contenu de la surface, qui est limité par les deux courbes paraboliques.*

(c) Berechnen Sie den Wert von t, für den der berechnete Flächeninhalt maximal ist.
- *Calculer la valeur t, pour laquelle le contenu de la surface devient maximal.*

(4) **(12 Punkte)**

Durch die Punkte $(0/0)$, $(\frac{\pi}{2}, 1)$, $(\pi, 0)$ geht eine Parabel.

• *Une parabole soit donnée par les points* $(0/0)$, $(\frac{\pi}{2}, 1)$, $(\pi, 0)$.

(a) Berechne die Länge des Parabelbogens über dem Intervall $[0, \pi]$.
• *Calculer la longueur de la courbe de la parabole sur l'intervalle* $[0, \pi]$.

(b) Berechne das Verhältnis der Länge des Parabelbogens über dem Intervall $[0, \pi]$ zur Länge der Sinuslinie über dem gleichen Intervall.
• *Calculer le rapport de la longueur de la parabole sur l'intervalle* $[0, \pi]$ *et de la longueur de la courbe du sinus sur le même intervalle.*

Fakultativ: • *Facultatif:*

(5) **(12 Punkte)**

Die Funktionskurve von $f(x) = y = e^{-x^2}$ wird um die y-Achse rotiert. Skizziere erst den Graphen von $f(x)$.
• *La courbe de la fonction* $f(x) = y = e^{-x^2}$ *soit pivotée sur l'axe* y. *Faire l'esquisse du graphe de* $f(x)$.

(a) Berechne das Volumen des entstehnden Rotationskörpers. (Achtung: die Mantelfläche sowie auch die Kurvenlänge sind ersichtlich unendlich gross!)
• *Calculer le volume du corps de révolution obtenu. (Attention: La surface et la longueur de la courbe sont infinies, comme il est bien visible.)*

(b) $f_1(x) = e^{-x^2 \cdot a}$.
Berechne a numerisch so, dass $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\, dx = 1$ wird.
• *Calculer a numériquement de façon qu'il soit* $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\, dx = 1$.

Viel Glück! • *Bonne chance!*

WIR

2.14 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ I1 I 02/03 2

---

(1) **(28 Punkte)** • *(28 points)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig. Sie werden alle gleich bewertet. Alle Teilschritte der Lösung sind schriftlich auf dem Lösungsblatt festzuhalten.
• *Les problèmes partiels suivants sont indépendants. Pour chaque problème partiel on donne le même nombre de points. Toutes les étapes partielles de la solution sont à retenir par écrit sur la feuille de solution.*

(a) Integriere von Hand: • *Intégrer à la main:* $\int -x^2+t\,x^3-4\,x^4+5\,x^5+(t-1)\,x^{t-2}\,dx = ?$ $(t > 2)$

(b) Integriere von Hand: • *Intégrer à la main:* $\int\limits_{-1}^{6\,t} -x^2+t\,x^3-4\,x^4+5\,x^5+(t-1)\,x^{t-2}\,dx = ?$

(c) Integriere von Hand: • *Intégrer à la main:* $\int\limits_{-1}^{6\,x} -\sin(2-t)+\sin(2+t)\,dt = ?$

(d) Integriere von Hand: • *Intégrer à la main:* $\int\limits_{1}^{2} \ln(x)^2\,dx = ?$
Hinweis: • *Indication:* $\ln(x)^2 = 1\cdot\ln(x)^2$ (partiell) • *(partiellement)*

(e) Integriere von Hand: • *Intégrer à la main:* $\int\limits_{1}^{2} \frac{d\,(\ln(x)^2)}{d\,x} - \frac{1}{x}\,dx = ?$

(f) Integriere von Hand: • *Intégrer à la main:* $\int\limits_{t}^{t^2} -\sqrt{x}+2\,e^{x^2}\,x\,dx = ?$

(g) Integriere von Hand: • *Intégrer à la main:* $\int\limits_{t}^{\frac{1}{2}t} \frac{2}{e^y\,y} - \cos(1-\pi\,y)\,dy = ?$

(2) **(15 Punkte)**

Als Modell für den Querschnitt eines Tunnels sollen die folgenden beiden Funktionen untersucht werden:
• *Comme modèle pour la coupe transversale d'un tunnel, il faut comparer les deux fonctions suivantes:*

$$p(x) = a\,x^4+b\,x^2+c,\;\; f(x) = d\cos(k\,x)+h\sin(kx)^2$$

(Untersuche den Fall $k = \frac{\pi}{24}$.) • *(Evaluer le cas $k = \frac{\pi}{24}$.)*
Der Graph der Funktion soll durch die folgenden Punkte gehen:
• *Le graphe de la fonction doit passer par les points suivants:*

$$P_1 = (-12;0),\;\; P_2 = (-10;5),\;\; P_3 = (0;6),\;\; P_4 = (10;5),\;\; P_5 = (12;0)$$

(a) Berechne nach Möglichkeit a, b, c, d, h.
• *Calculer a, b, c, d, h, si possible .*

(b) Skizziere die Funktionen.
• *Faire une esquisse de ces fonctions.*

(c) Vergleichen Sie das Integral dieser Funktionen.
• *Comparer l'intégral de ces fonctions.*

(d) Berechne die Extrema dieser Funktionen und zeichne diese in der Skizze ein.
• *Calculer les extrémums de ces fonctions et les porter sur l'esquisse.*

(e) Beurteile, welche Funktion sich besser eignet.
• *Estimer quelle fonction se prête mieux.*

(3) **(12 Punkte)**

Die Funktionskurve von $f(x) = y = x^3$ wird um die y-Achse rotiert. Mache eine Skizze.
• *La courbe de la fonction $f(x) = y = x^3$ soit pivotée sur l'axe y. Faire une esquisse.*

(a) Das Volumen des entstehenden Rotationskörpers zwischen $y = 0$ und $y = t$ hat dasselbe Volumen wie ein Zylinder mit dem Radius r und der Höhe t. Berechne r.
• *Le volume du corps de révolution obtenu entre $y = 0$ et $y = t$ a le même volume qu'un cylindre du rayon r et de la hauteur h. Calculer r.*

(b) Die Mantelfläche des entstehnden Rotationskörpers zwischen $y = 0$ und $y = 2$ hat denselben Inhalt wie die Mantelfläche eines Zylinders mit dem Radius r und der Höhe 2. Berechne r.
• *L'aire latérale du corps de révolution entre $y = 0$ et $y = t$ a la même mesure qu'un cylindre du rayon r et de la hauteur h. Calculer r.*

(4) **(12 Punkte)**

$$f_q(x) = x^3 + q\,x^2 + x + 1$$

(a) Sei • *Soit* $q = 3 \rightsquigarrow$ Betrachte: • *Considérer:* $\int\limits_0^x f_3(t)\,dt = \dfrac{d\,f_3(x)}{d\,x}$.

Skizziere f_3 und berechne den kleinsten positiven Wert x, für den die Gleichung richtig ist. (x numerisch angeben.)
• *Esquisse de f_3! Ensuite calculer la plus petite valeur positive de x pour laquelle cette équation est vraie. (Donner x de façon numérique.)*

(b) Berechne aus ${f_q}'(x) = 0$ den Wert $q = q(x)$ als Funktion von x. Bestimme daraus die Lösung von $q(x) = 0$. Beschreibe die Bedeutung dieser Lösung für den Graphen.
• *Calculer la valeur $q = q(x)$ comme fonction de x de l'équation ${f_q}'(x) = 0$. Ensuite déterminer la solution de $q(x) = 0$. Décrire la signification de cette solution pour le graphique.*

(5)

Fakultativ: • *Facultatif:*

(8 Punkte)

Seien • *Soient* $f_1(x) = x^3, \;\; f_2(x) = -a\,(x-10)^2 + 10$

(a) Löse das folgende Gleichungssystem:
• *Résoudre le système d'équations suivant:*

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f_2(x) \\ \int_0^x f_1(t)\,dt &= \int_x^{10} f_2(t)\,dt \end{aligned}$$

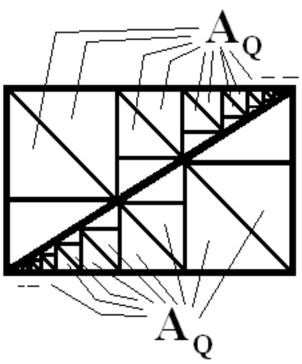
(b) Skizziere damit die Graphen der Funktionen und die integrierten Flächen.
• *Faire des esquisses des graphiques des fonctions et des surfaces intégrés avec les valeurs obtenues.*

Viel Glück! • *Bonne chance!*

2.15 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ I1 I 03/04 2

Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet! (Die Skizzen gelten als Korrekturhilfen.)

(1)



$A_{Rechteck} = 40 \cdot 24$
(Länge 40, Breite 24)

$A_Q : A_{Rechteck} = /?$

(2) $f(x) = (x^4 + 1) \cdot (x^2 - 1) + 1$

(a) $f'(x) = ?$

(b) $f'(1) = f(x)\big|_{x=1} = ?$

(c) $f'(x) = \tan(\alpha(x)) \;\Rightarrow\; \alpha(1) = ?$

(3) $f'(x) = (4\,x^5 - 6\,x^4 + 2\,x^3 - x^2) \cdot \dfrac{2}{x^2}$

(a) $f''(x) = 10 \;\Rightarrow\; x = ?$

(b) $f''(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = ?$ (Falls möglich!)

(4) $f(x) = (a\,x + b) \cdot (x + c),\;\; f(0) = 1,\;\; f'(1) = 0,\;\; f(1) = -(a\,c + b) \;\Rightarrow\; a,\; b,\; c = ?$

(5) (a) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k+1}{2\,k^3 + 1}$ konvergent?

(b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 - 1} = ?$ (Idee: Studiere $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n-1}$)

(6) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \cdot \dfrac{4 \cdot \sin(5\,n - n^2) + 2\,n^5 - 6\,n}{3 + a\,n^7 - b\,n^5} = 4 \;\Rightarrow\; a,\; b = ?$ (Falls möglich!)

(7) $a_1 = 3,\;\; a_2 = -5,\;\; b_n = a_{n-1},\;\; a_n = a_{n-1} + b_{n-1} \;\Rightarrow\; a_7 = ?,\;\; b_7 = ?$

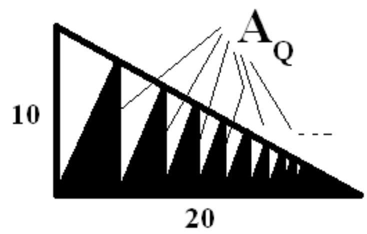
Viel Glück!

WIR1

2.16 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ I1 I 03/04 2b

Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet! (Die Skizzen gelten als Korrekturhilfen.)
• *Toutes les problèmes partielles donnent le même nombre de points. (Les esquisses sont pour simplifier la correction.)*

(1)



$A_{Triang} = \frac{20 \cdot 10}{2}$
(Länge 20, Höhe 10) • *Longueur 20, Hauteur 10*

$A_Q : A_{Triang} = /?$

(2) $f(x) = (x^2 + 1) \cdot (x^2 - 1) + 1$

(a) $f'(x) = ?$

(b) $f'(1) = f(x)\big|_{x=1} = ?$

(c) $f'(x) = \tan(\alpha(x)) \;\Rightarrow\; \alpha(1) = ?$

(3) $f'(x) = (2\,x^3 - 3\,x^2 + 4\,x - 6)$

(a) $f''(x) = 10 \;\Rightarrow\; x = ?$

(b) $f''(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = ?$ (Falls möglich!) • *(Si possible!)*

(4) $f(x) = (a\,x^2 + b\,x + c),\;\; f(-2) = 0,\;\; f'(3) = 2, \quad \Rightarrow\; a,\; b,\; c = ?$
(Falls möglich!) • *(Si possible!)*

(5) (a) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2\,k+3}{3\,k^3+2}$ konvergent? • *congergent?*

(b) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = ?$ (Idee: Studiere • *Idée: Etudier* $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}$)

(6) $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \frac{2 \cdot \cos(n^2-1) + 4\,n^3 - 5\,n}{a\,n^4 + b\,n^2} = 5 \;\Rightarrow\; a,\; b = ?$ (Falls möglich!) • *(Si possible!)*

(7) $a_1 = 3,\;\; a_2 = -5,\;\; b_n = a_{n-1},\;\; a_n = a_{n-1} + 2\,b_n \;\Rightarrow\; a_{10} = ?,\;\; b_{10} = ?$

Viel Glück! • *Bonne chance!*

2.17 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ I1 I 04/05 2a

Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet!

(1) $\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{2^k}-(\frac{1}{3})^k) \to ?$ $\quad\rightsquigarrow\quad (\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{2^k}-(\frac{1}{3})^k) = ?)$

(2) $\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{3})^k = \frac{3280}{6561} \;\Rightarrow\; n = ?$

(3) $\dfrac{2\cdot|\sin(\frac{1}{n})|\cdot n^3+2\,n^3-n+1}{4\,n^3-n^2} \to ?$

(4) $\dfrac{\frac{\tan(n)}{n}+5\,n^2-3\,n}{2\,n^2-3} \to ?$

(5) $\dfrac{e^n}{ln(n)+e^{3\,n}}+\dfrac{n^4}{e^n} \to ?$

(6) $a_1=1,\;\; a_2=1,\;\; a_{n+1}=a_n+a_{n-1},\;\; q_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

(a) q_n beschränkt?

(b) Tabelle: $\{q_{2\,n} \mid n\in\{1,\ldots,8\}\} \rightsquigarrow$ Monotonie?

(7) $f(x)=[\sin(x)]$

(a) Wo ist f stetig?

(b) Wo ist f beschränkt?

(c) Wo ist f monoton?

(8) $f(x)=x\cdot\sin(\frac{1}{x})$

(a) Wo ist f stetig?

(b) Wo ist f stetig fortsetzbar?

(c) Wo ist f beschränkt?

Viel Glück!

WIR1

2.18 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ I1 I 03/04 2b

Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet!
• *Toutes les problèmes partielles donnent le même nombre de points.*

(1) $\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{1}{3^k}-\frac{1}{4^k}) \to\ ?\qquad \rightsquigarrow\ (\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{1}{3^k}-\frac{1}{4^k}) =\ ?)$

(2) $\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{1}{4})^k = \frac{5461}{16384}\ \Rightarrow\ n =\ ?$

(3) $\dfrac{3\cdot|\sin(\frac{1}{n})|\cdot n^3 - 3\,n^3 - 2\,n + 1}{2\,n^3 - n^2} \to\ ?$

(4) $\dfrac{\frac{\tan(n)}{n} - 5\,n^2 - 3\,n}{4\,n^2 - 3} \to\ ?$

(5) $\dfrac{e^n}{ln(n) - e^{2\,n}} - \dfrac{n^3}{e^n} \to\ ?$

(6) $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1},\ q_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

(a) q_n beschränkt? • q_n *bornée?*

(b) Tabelle: • *Tableau:* $\{q_{2\,n+1} \mid n \in \{1,\ldots,8\}\} \rightsquigarrow$ Monotonie? • *Monotonie?*

(7) $f(x) = [\sin(x)]$

(a) Wo ist f stetig? • *Où est-ce que f est continue?*

(b) Wo ist f beschränkt? • *Où est-ce que f est borneée?*

(c) Wo ist f monoton? • *Où est-ce que f est monotone?*

(8) $f(x) = x\cdot\sin(\frac{1}{x})$

(a) Wo ist f stetig? • *Où est-ce que f est continue?*

(b) Wo ist f stetig fortsetzbar? • *Où est-ce qu' on peut définir f de façon continue?*

(c) Wo ist f beschränkt? • *Où est-ce que f est borneée?*

Viel Glück! • *Bonne chance!*

WIR1

2.19 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ I1 I 01/02 3

(1) **(21 Punkte) • (21 points)**

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig. Sie werden alle gleich bewertet. Alle Teilschritte der Lösung sind schriftlich auf dem Lösungsblatt festzuhalten.
• *Les problèmes partiels suivants sont indépendants. Pour chaque problème partiel on donne le même nombre de points. Toutes les étapes partielles de la solution sont à retenir par écrit sur la feuille de solution.*

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 5\,(\frac{1}{4})^{(k+1)} + 6\,(\frac{1}{3})^{(k-1)} \rightsquigarrow$ Konvergenz, Grenzwert? • *Convergence, valeur limite?*

(b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k+k^3}{1-k+k^2-k^3+k^4-k^5} \rightsquigarrow$ Konvergenz? • *Convergence?*

(c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k+7} \rightsquigarrow$ Konvergenz? • *Convergence?*

(d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{k}{k+7} \rightsquigarrow$ Konvergenz? • *Convergence?*

(e) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2+2\,k-3} \rightsquigarrow$ Konvergenz, Grenzwert? • *Convergence, valeur limite?*

(f) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(10\cdot x)^k}{k} \rightsquigarrow$ Konvergenz, Grenzwert? • *Convergence, valeur limite?*

(g) $\sum\limits_{k=1}^{n} (1+k)\cdot(2+3k) \rightsquigarrow$ Formel? • *Formule?*

(2) **(15 Punkte) • (15 points)**

(a) Berechne die Potenzreihe von $\sin(x)$, $x_0 = 0$, bis $n = 20$.
• *Calculer la série de puissances de* $\sin(x)$, $x_0 = 0$, *jusqu'à* $n = 20$.

(b) Verwende das Resultat zur Berechnung der Potenzreihe $h(x)$ von $\frac{\sin(x)}{x}$ bis $n = 20$.
• *Utiliser le résultat pour calculer la série de puissances* $h(x)$ *de* $\frac{\sin(x)}{x}$ *jusqu'à* $n = 20$.

(c) Berechne das Konvergenzintervall resp. den Konvergenzradius für $h(x)$.
(D. h. untersuche, für welche x die Reihe konvergiert.)
• *Calculer l'intervalle de convergence resp. le rayon de convergence de* $h(x)$.
(Ç.v.d. examiner pour quelles x *on a la convergence.)*

(d) Berechne mit Hilfe der Potenzreihe das folgende Integral:
• *Calculer à l'aide de la série de puissances l'intégtal suivant:*

$$F(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt$$

(e) Skizziere $F(x)$ in $I = [-10, 10]$. • *Exquisse de* $F(x)$ *dans* $I = [-10, 10]$*?*

(3) **(9 Punkte) • (9 points)**

(a) Berechne die Potenzreihe von $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$, $x_0 = 0$, bis $n = 10$.
• *Calculer la série de puissances de* $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$, $x_0 = 0$, *jusqu'à* $n = 10$.

(b) Berechne die Potenzreihe von $g(x) = \sqrt{2}\,\sin(x + \frac{\pi}{4})$, $x_0 = 0$ bis $n = 10$.
• *Calculer la série de puissances de* $g(x) = \sqrt{2}\,\sin(x + \frac{\pi}{4})$, $x_0 = 0$ *jusqu'à* $n = 10$.

(c) Berechnen mit Hilfe der Potenzreihen $f(x) - g(x)$.
• *Calculer à l'aide des séries de puissances* $f(x) - g(x)$.

(4) **(6 Punkte) • (6 points)**

Verwende die Potenzreihenentwicklung von $\sin(x)$, $x_0 = 0$, um etwas über die Lösung der folgenden Gleichung zu erfahren:
• *Utiliser la série de puissances de* $\sin(x)$, $x_0 = 0$, *pour apprendre quelque chose sur les solutions de:*

$$\frac{\frac{\sin(x)}{x} - 1}{x^2} = -\frac{1}{6}$$

Viel Glück! • *Bonne chance!*

WIR

2.20 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ I1 I 02/03 3

---

(1) **(12 Punkte)**

$f(x) = e^x - \dfrac{1}{5}$, Startwert $x_1 = -2$, Intervall $\bar{I} = [a, b] = [-2, -1]$,
$\rightsquigarrow$ Nullstelle $f(x_0) = 0 \;\Rightarrow\; x_0 = \,?$

Führe mit den folgenden Methoden je 4 Iterationsschritte durch, d.h. berechne jedesmal x_0. Ordne danach die Resultate nach ihrer Genauigkeit und entscheide heuristisch, ob alle Verfahren hier funktionieren.

(a) Intervalleingrenzung (Gabelungsmethode)
(b) Newton–Algorithmus (Tangentenmethode)
(c) Sekantenverfahren (Regula falsi)
(d) Fixpunktmehtode

(2) **(30 Punkte)**

Berechne $y = f(x) = \sin(x)$ exakt für die 5 Werte $x = 0, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2} \rightsquigarrow\; (x_1; y_1),\; (x_5; y_5)$.
Diese Werte dienen als Stützstellen für die folgenden Arbeiten:

(a) i. Berechne das Interpolationspolynom $p(x)$ mit den niedrigsten möglichen Grad durch die berechneten Stützstellen. Numerische Werte für die Koeffizienten genügen.

ii. Berechne $\int\limits_0^{\pi/2} f(x)\,dx - \int\limits_0^{\pi/2} p(x)\,dx$.

iii. Berechne $\int\limits_0^{\pi/2} (f(x) - p(x))^2\,dx$ numerisch.

iv. Mache eine Skizze von f und p in einem Diagramm und *beurteile* das letzte Resultat.

(b) i. Approximiere f zwischen x_1 und x_5 durch zwei Parabelbögen $\rightsquigarrow\; p_1(x)$ und $p_2(x)$. Die beiden Parabelbögen machen zusammen die Funktion $h(x)$ aus.

ii. Berechne $\int\limits_0^{\pi/2} f(x)\,dx - \int\limits_0^{\pi/2} h(x)\,dx$ numerisch.

iii. Mache eine Skizze von f und h in einem Diagramm und *beurteile* auf der Grundlage der Berechnungen und Skizzen, ob p oder h eine bessere Approximation ist.

(c) i. Approximiere f zwischen x_1 und x_5 durch ein Spline $s(x)$ mit Hilfe von Hermite-Polynomen. (Benutze dabei die bekannten Funktionswerte und Ableitungen von f in $x = 0$ und $x = \pi/2$.)

ii. Berechne $\int\limits_0^{\pi/2} f(x)\,dx - \int\limits_0^{\pi/2} s(x)\,dx$ numerisch.

iii. Mache eine Skizze von f und s in einem Diagramm und *beurteile* auf der Grundlage der Berechnungen und Skizzen, ob s eine bessere Approximation ist als p oder h.

(3) **(6 Punkte)**

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} (k-2)\cdot(k^2-1)$$

Berechne mit Hilfe der Methode der Summen und Differenzenfolgen eine geschlossene Formel für s_n. Berechne mit dieser Formel s_{100} exakt.

(4) **(12 Punkte)**

Beurteile die Konvergenz der nachfolgenden Reihen (Begründung ob konvergent? — absolut konvergent? — eventuell gleichmässig konvergent?):

(a)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-4)\cdot(k-5)}$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3\,k^2-2\,k+1}{2\,k^{3.5}-2\,k+2}$$

(c)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(x+k\,\pi)-\cos(x+k\,\pi)}{k}$$

• *Texte français voir feuille spéciale!*

Viel Glück! • *Bonne chance!*

WIR

2.21 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ I1 I 03/04 3Bsp

Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet! (Die Skizzen gelten als Korrekturhilfen.)
• *Toutes les problèmes partielles donnent le même nombre de points. (Les esquisses sont pour simplifier la correction.)*

Thema: Differentialrechnung und numerische Methoden.
• *Sujet: Calcul différential, méthodes numériques.*

Beispiele: • *Exemples:*

(1) Berechne die Ableitungen und zeige die Herleitung:

(a) $f(x) = 5\,x^4 - 2\,x^3 + 8\,x^2 + 4\,x - 3 \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = ?,\;\; f''(x) = ?$

(b) $f(x) = 5\,x^4\,\cos(10\,x) - x^(2, x) \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = ?$

(c) $f(x) = \dfrac{5\,x^4}{3\,\cos(x) + ln(x)} - \sin^2(x) \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = ?$

(d) $f(x) = e^{\sin(3\,x+7)} - ln(\tan(x^2)) \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = ?$

(2) $f(x) = 4\,x^3 - 6\,x^2 + 5x - 8 \rightsquigarrow$ Symmetriezentrum? Darstellung der Funktion in einem Koordinatensystem mit Ursprung im Symmetriezentrum? • *Centre de symétrie? Représentation la fonction dans un système de coordonnées avec l'origine dans le centre de symétrie?*

(3) f(x)=x (x-1) (x-3) - 3*ln*(x)

(a) Berechne Punkte, in denen die Steigung ($\tan(\alpha)$) des Graphen gleich 2.5 ist (falls solche existieren). • *Calculer des points dans lesquels la montée (*$\tan(\alpha)$*) du graphe est égaleme à* 2.5 *(si un tel point existe).*

(b) Berechne Punkte, in denen die Tangente horizontal verläuft (Extrema) (falls solche existieren). • *Calculer des points dans lesquels la tangente est horizontale (si un tel point existe).*

(4) $f(x) = \pi\,\cos(x) - a\,e^x = 0$

(a) Newton: $a = 1,\;\; x_1 = 0,\;\; x_5 = ?$

(b) Newton: $a = 1,\;\; x_1 = 1,\;\; x_5 = ?$

(c) Fixpunkt • *Point fixe*: $a = 1,\;\; x_1 = 0,\;\; x_5 = ?$

(d) Fixpunkt • *Point fixe*: $a = ?$ für Konvergenz • *Pour convergence*

(5) $P_1(1/2),\;\; P_2(3/5),\;\; P_3(5/1),\;\; P_4(7/3),\;\; P_5(9/4) \rightsquigarrow$ Splines?

(a) Ausdrücke der Funktionen? • *Expressions pour les fonctions?*

(b) $f'(x_i) \approx ?,\;\; f''(x_i) \approx ?\ldots$

Viel Glück!

WIR1

2.22 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ I1 I 03/04 3

Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet! (Die Skizzen gelten als Korrekturhilfen.)
• *Toutes les problèmes partielles donnent le même nombre de points. (Les esquisses sont pour simplifier la correction.)*

Thema: Differentialrechnung und numerische Methoden.
• *Sujet: Calcul différential, méthodes numériques.*

Beispiele: • *Exemples:*

(1) Berechne die Ableitungen und zeige die Herleitung:

(a) $f(x) = 5\,x^4 - 2\,x^3 + 8\,x^2 + 4\,x - 3 \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = ?,\;\; f''(x) = ?$
(b) $f(x) = 5\,x^4\,\cos(10\,x) - x^(2, x) \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = ?$
(c) $f(x) = \dfrac{5\,x^4}{3\,\cos(x) + ln(x)} - \sin^2(x) \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = ?$
(d) $f(x) = e^{\sin(3\,x+7)} - ln(\tan(x^2)) \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = ?$

(2) $f(x) = 4\,x^3 - 6\,x^2 + 5x - 8 \rightsquigarrow$ Symmetriezentrum? Darstellung der Funktion in einem Koordinatensystem mit Ursprung im Symmetriezentrum? • *Centre de symétrie? Représentation la fonction dans un système de coordonnées avec l'origine dans le centre de symétrie?*

(3) f(x)=x (x-1) (x-3) - 3*ln*(x)

(a) Berechne Punkte, in denen die Steigung ($\tan(\alpha)$) des Graphen gleich 2.5 ist (falls solche existieren). • *Calculer des points dans lesquels la montée (*$\tan(\alpha)$*) du graphe est égaleme à* 2.5 *(si un tel point existe).*
(b) Berechne Punkte, in denen die Tangente horizontal verläuft (Extrema) (falls solche existieren). • *Calculer des points dans lesquels la tangente est horizontale (si un tel point existe).*

(4) $f(x) = \pi\,\cos(x) - a\,e^x = 0$

(a) Newton: $a = 1,\;\; x_1 = 0,\;\; x_5 = ?$
(b) Newton: $a = 1,\;\; x_1 = 1,\;\; x_5 = ?$
(c) Fixpunkt • *Point fixe*: $a = 1,\;\; x_1 = 0,\;\; x_5 = ?$
(d) Fixpunkt • *Point fixe*: $a = ?$ für Konvergenz • *Pour convergence*

(5) $P_1(1/2),\;\; P_2(3/5),\;\; P_3(5/1),\;\; P_4(7/3),\;\; P_5(9/4) \rightsquigarrow$ Splines?

(a) Ausdrücke der Funktionen? • *Expressions pour les fonctions?*
(b) $f'(x_i) \approx ?,\;\; f''(x_i) \approx ?\ldots$

Viel Glück!

WIR1

2.23 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ I1 I 03/04 3a

Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet! (Die Skizzen gelten als Korrekturhilfen.)
• *Toutes les problèmes partielles donnent le même nombre de points. (Les esquisses sont pour simplifier la correction.)*

(1) Berechne die Ableitungen und zeige die Herleitung:

(a) $f(x) = 12\,x^5 - 4\,x^3 + 6\,x^2 + 11\,x - 3 \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = ?,\ \ f''(x) = ?$

(b) $f(x) = 3\,x^5\ \tan(10\,x) - x^{4\,x+1} \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = ?$

(c) $f(x) = \dfrac{5\,x^4}{3\,\cos(x) + ln(x)} - \sin^2(x) \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = ?$

(d) $f(x) = e^{\cos(2\,x+4)} - ln(\sin(x^3+1)) \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = ?$

(2) (a) $f(x) = 5\,x^3 + 2\,x^2 + 8\,x - 9 \rightsquigarrow$ Symmetriezentrum? • *Centre de symétrie?*

(b) Darstellung der Funktion f in einem Koordinatensystem mit Ursprung im Symmetriezentrum? • *Représentation la fonction dans un système de coordonnées avec l'origine dans le centre de symétrie?*

(c) g(x) = (x + 1)(x + 6)(x - 3)(x - 5)
$\rightsquigarrow$ Ex. Symmetriezentrum? • *Ex. centre de symétrie?*

(d) Kann die Steigung g' von g ein Symmetriezentrum haben?
• *Est-ce que la pente g' de g peut-elle avoir un centre de symétrie?*

(3) $f(x) = \cos(x\,(x-1)\,(x-3)) - 3ln(x),\ \ x \in [0.5, 3.0]$

(a) Berechne Punkte, in denen die Steigung ($\tan(\alpha)$) des Graphen gleich 2.5 ist (falls solche existieren). • *Calculer des points dans lesquels la montée ($\tan(\alpha)$) du graphe est égale à* 2.5 *(si un tel point existe).*

(b) Berechne Punkte, in denen die Tangente horizontal verläuft (Extrema) (falls solche existieren). • *Calculer des points dans lesquels la tangente est horizontale (si un tel point existe).*

(4) (a) $f(x) = (\pi + 1)\ \cot(x) - a\,e^x = 0,\ \ x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

i. Newton: $a = 1,\ \ x_1 = 0.5,\ \ x_5 = ?$
ii. Newton: $a = 1,\ \ x_1 = 1,\ \ x_5 = ?$
iii. Fixpunkt • *Point fixe*: $a = 1,\ \ x_1 = 0.5,\ \ x_5 = ?$
iv. Fixpunkt • *Point fixe*: $a = ?$ für Konvergenz. • *Pour convergence.*

(b) $P_1(1/3),\ \ P_2(3/5),\ \ P_3(5/0),\ \ P_4(7/4),\ \ P_5(9/2)$

i. Funktion für den 1. Spline? • *Fonction pour le premier spline?*
ii. $f'(x_i) \approx ?,\ \ f''(x_i) \approx ?\ldots$

Viel Glück!

WIR1

2.24 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ I1 I 03/04 3c

Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet! (Die Skizzen gelten als Korrekturhilfen.)
• *Tous les problèmes partiels donnent le même nombre de points. (Les esquisses sont pour simplifier la correction.)*

(1) Berechne die Ableitungen und zeige die Herleitung:

(a) $f(x) = 6\,x^5 - 4\,x^3 + 7\,x^2 + 11\,x - 3 \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = ?,\ \ f''(x) = ?$

(b) $f(x) = 4\,x^6\,\sin(10\,x) - x^{3\,x-2} \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = ?$

(c) $f(x) = \dfrac{5\,x^4}{3\,\cos(x) + ln(x)} - \sin^2(x) \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = ?$

(d) $f(x) = e^{\tan(2\,x+3)} + ln(\cos(x^4)) \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = ?$

(2) (a) $f(x) = 4\,x^3 - 6\,x^2 + 5x - 8 \rightsquigarrow$ Symmetriezentrum? • *Centre de symétrie?*

(b) Darstellung der Funktion f in einem Koordinatensystem mit Ursprung im Symmetriezentrum? • *Représentation la fonction dans un système de coordonnées avec l'origine dans le centre de symétrie?*

(c) g(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 3)(x + 5)
$\rightsquigarrow$ Ex. Symmetriezentrum? • *Ex. entre de symétrie?*

(d) Kann die Steigung g' von g ein Symmetriezentrum haben?
• *Est-ce que la pente g' de g peut-elle avoir un centre de symétrie?*

(3) $f(x) = \sin(x\,(x-1)\,(x-3)) - 3ln(x),\ \ x \in [0.5, 3.0]$

(a) Berechne Punkte, in denen die Steigung ($\tan(\alpha)$) des Graphen gleich 2.5 ist (falls solche existieren). • *Calculer des points dans lesquels la montée (*$\tan(\alpha)$*) du graphe est égale à* 2.5 *(si un tel point existe).*

(b) Berechne Punkte, in denen die Tangente horizontal verläuft (Extrema) (falls solche existieren). • *Calculer des points dans lesquels la tangente est horizontale (si un tel point existe).*

(4) (a) $f(x) = (e+1)\,\cot(x) - a\,e^x = 0,\ \ x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

i. Newton: $a = 1,\ \ x_1 = 0.5,\ \ x_5 = ?$
ii. Newton: $a = 1,\ \ x_1 = 1,\ \ x_5 = ?$
iii. Fixpunkt • *Point fixe*: $a = 1,\ \ x_1 = 0.5,\ \ x_5 = ?$
iv. Fixpunkt • *Point fixe*: $a = ?$ für Konvergenz. • *Pour convergence.*

(b) $P_1(1/2),\ \ P_2(3/5),\ \ P_3(5/1),\ \ P_4(7/4),\ \ P_5(9/2)$

i. Funktion für den 1. Spline? • *Fonction pour le premier spline?*
ii. $f'(x_i) \approx ?,\ \ f''(x_i) \approx ?\ldots$

Viel Glück!

WIR1

2.25 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ I1 I 04/05 3

Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet! (Die Skizzen gelten als Korrekturhilfen.)

(1) (a) $f_1(x) = 3\,x^5 - 8\,x^3 - 14\,x - 7 \qquad \rightsquigarrow \; f'(x) = ?,\; f''(x) = ?$

(b) In welchen Punkten hat der Graph von f_1 allenfalls eine Tangente, die parallel zur x–Achse verläuft?

(c) $f_2(x) = (4\,x-3)(5\,x^4 - 3\,x - 2) \qquad \rightsquigarrow \; f'(x) = ?$

(d) $f_3(x) = \dfrac{a-x}{x^2} - (4\,x^3+4)^7 \qquad \rightsquigarrow \; f'(x) = ?$

(e) $f_4(x) = ln(\dfrac{1}{x}) + x^{\sqrt{x}} - \sin(\cos(x)) \qquad \rightsquigarrow \; f'(x) = ?$

(2) (a) $f_5(n) = a_n = \dfrac{n^2+3\,n-2}{n^2+3\,n+2}$. Berechne $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und bestimme dasjenige n, von dem weg $|a_n - a| < 0.001$ gilt.

(b) Bestimme die Schnittwinkel der Parabeln p_1 und p_2 im ersten Quadranten: $p_1(x) = x^4 - 7,\;\; p_2(x) = x^2 + 5$.

(c) Eine Parabel 4. Ordnung $f(x)$ berührt die x–Achse bei $x = 1$. Der Ursprung ist Wendepunkt. Die Wendetangente hat die Steigung 2. Berechne $f(-1)$.

(d) Gegeben ist $u(x) = 2\cos(x)$ über dem Intervall $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Die drei Punkte $P_1(-x; u(-x)), P_2(0;0), P_3(x; u(x))$ bilden ein Dreieck. Bestimme x so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks maximal wird.

(3) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2\,x^2 + e^{-(x+100)^2} - 2.3811,\;\; x > 0$

(a) Berechne allfällige Nullstellen des Graphen mit dem Newton–Algorithmus. Was fällt auf?

(b) Berechne Punkte, in denen die Steigung ($\tan(\alpha)$) des Graphen gleich 0 ist (falls solche existieren).

(4) (a) Skizziere die Funktionen $f(x) = \cos(\sin(x))$ und $g(x) = x$. Löse näherungsweise die Gleichung $f(x) = g(x)$ mit der Fixpunktmethode. Was stellt man fest?

(b) Gegeben: $P_1(1;0),\;\; P_2(2;0),\;\; P_3(3;0),\;\; P_4(4;1)$. Berechne eine Spline–Kurve zwischen den Punkten P_2 und P_3. Skizziere diese Kurve. (Die Funktion ist anzugeben!)

Viel Glück!

2.26 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ I1 I 04/05 3c

Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet! (Die Skizzen gelten als Korrekturhilfen.)
• *Tous les problèmes partiels donnent le même nombre de points. (Les esquisses sont pour simplifier la correction.)*

(1) (a) $f_1(x) = 2\,x^5 - 6\,x^3 - 16\,x - 7$ $\quad\leadsto\quad f'(x) = ?,\ \ f''(x) = ?$

(b) In welchen Punkten hat der Graph von f_1 allenfalls eine Tangente, die parallel zur x–Achse verläuft?
• *Dans quels points le graphe de f_1 a–t–il une tangente qui est parallèle à l'axe x?*

(c) $f_2(x) = (4\,x + 3)(-5\,x^4 + 3\,x - 2)$ $\quad\leadsto\quad f'(x) = ?$

(d) $f_3(x) = \dfrac{a + x}{x^2} - (4\,x^3 - 4)^9$ $\quad\leadsto\quad f'(x) = ?$

(e) $f_4(x) = ln(\dfrac{1}{x}) + x^{\sin(x)} - \cos(\sin(x))$ $\quad\leadsto\quad f'(x) = ?$

(2) (a) $f_5(n) = a_n = \dfrac{n^2 + 5\,n - 4}{n^2 + 5\,n + 4}$. Berechne • *Calculer* $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
Bestimme dasjenige n, von dem weg $|a_n - a| < 0.001$ gilt.
• *Calculer le n à partir duquel il vaut $|a_n - a| < 0.001$.*

(b) Für welchen Wert von a schneiden sich die beiden Parabeln p_3 und p_4 unter einem rechten Winkel?
• *Pour quelle valeur de a les deux parabôles p_3 et p_4 se croisent sous un angle droit?*
$p_3(x) = x^2 + a\,x,\ \ p_4(x) = x^2 + a$.

(c) Gegeben ist $u(x) = 3\,\cos(x)$ über dem Intervall $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Die drei Punkte $P_1(-x; u(-x)), P_2(0; 0), P_3(x; u(x))$ bilden ein Dreieck. Bestimme x so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks maximal wird.
• *Soit donné $u(x) = 3\,\cos(x)$ sur l'intervalle $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Les trois points $P_1(-x; u(-x)), P_2(0; 0), P_3(x; u(x))$ forment un triangle. Calculer x de façon que la surface du triangel soit maximale.*

(d) Sei $h(x) = \dfrac{a}{x}$ mit $a > 0, x > 0$. Die Tangente an die Kurve h schneidet die x–Achse im Punkt P und die y–Achse im Punkt Q. O ist der Ursprung. Wie hängt der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle OPQ$ von x ab?
• *Soit $h(x) = \dfrac{a}{x}$ avec $a > 0, x > 0$. La tangente à la courbe h coupe l'axe x au point P et l'axe y au point Q. O est l'origine. Comment la surface du triangle $\triangle OPQ$ dépend–elle de x?*

%

(3) $f(x) = 2\,x^2 + \dfrac{1}{x} + e^{-(x+238.11)^2} - 2.3811,\ \ x > 0$

(a) Berechne allfällige Nullstellen des Graphen mit dem Newton–Algorithmus. Was fällt auf?
• *Calculer les zéros présumés à l'aide de l'algorithme de Newton. Qu'est–ce qu'on remarque?*

(b) Berechne Punkte, in denen die Steigung ($\tan(\alpha)$) des Graphen gleich 0 ist (falls solche existieren).
• *Calculer les points dans lesquells la pente (*$\tan(\alpha)$*) du graphe égale* 0.

(4) (a) Skizziere die Funktionen $f(x) = \sin(\cos(x))$ und $g(x) = x$. Löse näherungsweise die Gleichung $f(x) = g(x)$ mit der Fixpunktmethode. Was stellt man fest?
• *Faire une esquisse des fonctions* $f(x) = \sin(\cos(x))$ *et* $g(x) = x$. *Résoudre approximativement l'équation* $f(x) = g(x)$ *à l'aide de la méthode du point fixe. Qu'est–ce qu'on remarque?*

(b) Gegeben: • *Donné:* $P_1(1;0)$, $P_2(2;0)$, $P_3(3;0)$, $P_4(4;1)$.
Berechne eine Spline–Kurve zwischen den Punkten P_2 und P_3. Skizziere diese Kurve. (Die Funktion ist anzugeben!)
• *Calculer une courbe entre les points* P_2 *et* P_3 *en utilisant des splines. Faire une esquisse de cette courbe. (Indiquer la fonction!)*

Viel Glück! • *Bonne chance!*

2.27 Lösungen ◇ Lines pour solutions

Die Lösungen werden bei Gelegenheit integriert, wenn der Autor dafür Zeit haben wird. • *Les solutions seront ajoutées prochainement à l'occasion, si l'auteur aura le temps.*

Lösungen siehe unter den Links: • *Solutions voir les liens:*

http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/Problems.html
(Schema) • *(Schéma)*

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html
(*Mathematica*–Quellencode) • *(Code de source en Mathematica)*

Kapitel • Chapitre 3

Analysis 2 B–Arch. — Analyse 2 B–arch.

(Analysis 1 Architektur (B)) • *(Analyse 1 architecture (B))*

3.1 Inhalt — Les matières

---

(1) Tests 1. und 2. Semester • *Exercices semestre 1 et 2*

(2) Lösungen siehe unter den Links: • *Solutions voir les liens:*

`http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/Problems.html`
(Schema) • *(Schéma)*

`http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html`
(*Mathematica*–Quellencode) • *(Code de source en Mathematica)*

(3) Vordiplome siehe unter Link: • *Diplômes préalables voir le lien:*

`http://rowicus.ch/Wir/VDs/VDs.html`

3.2 Test in Analysis ◇ A2a 03/04 1a

Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet!

(1) Skizziere den Graphen genau:

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} 3 & x \in \mathbb{N} \\ 2 & x < 0 \\ x & sonst \end{cases}$$

(2)

$$f(x) = \sqrt{(x-10)(x-20)}$$

(a) $D_f = ?$

(b) Genaue Skizze des Graphen?

(c) $W_f = ?$

(3) $f(x) = (x-1)(x-2)$

(a) $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c \leadsto \; a, b, c = ?$

(b) $f(x) \geq 0 \leadsto$ Lösungsmenge = ?

(4) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3\,x + 1}{x - 1}$

(a) Pole?

(b) Asyptote? (Funktionsgleichung!)

(c) Skizze?

(5) Formales Denken: $f(z) = \sin(z), \;\; g(x) = \cos(x) \leadsto$ Wo ist $f(g(x)) = 0$?
(Nenne $f(g(x)) := h(x)$.)

(6) Skizziere als Hilfe $f(x) = sgn(x)$ (Signum) und $g(x) = \sin(x)$. Skizziere dann:

(a) $f(g(x)) = sgn(\sin(x))$.

(b) $f(|g(x)|) = sgn(|\sin(x)|)$.

Viel Glück!

WIR1

3.3 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ B2 99/00 1

---

(1) Skizzen? • *Esquisses?*

(a) $f(x) = x^2 + \sin(x)$

(b) $f(x) = [x^2] + 1$

(c) $f(x) = \sin([x^2 + 1]) - 1$

(2) $x = 4 + \cfrac{4}{4 + \cfrac{4}{4 + \cfrac{4}{\ddots}}} \stackrel{?}{=} \frac{p}{q},\ \ p, q \in \mathbb{N}$ $\qquad x = 5 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{3}{\ddots}}} \stackrel{?}{=} \frac{r}{s}, \quad = ?$

(3)

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & y \arrow[r, "p"] & z \end{tikzcd}$$

$f(x) = \arccos(x) = y$
$h(x) = p(f(x)) = p(y) = y^2 - 2\,y + 2 = z$
$h(x) = (p \circ f)(x))$

(a) $h(x) \rightsquigarrow$ Diagramm?
$h(x) \rightsquigarrow$ • *Diagramme?*

(b) $D_h = ?,\ \ W_h = ?$

(c) $h(o) = ?,\ \ h(1) = ?$

(4) $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{4},\ \ g(x) = x^2 - x$

(a) Nullstellen von $h(x) = f(x) \cdot g(x)$? • *Zéros de $h(x) = f(x) \cdot g(x)$?*

(b) $u(x) = \dfrac{1}{f(x) - g(x)} \rightsquigarrow$
i. Diagramm? • *Diagramme?*
ii. Pole? • *Pôles?*

(5) $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} + x$
$f(x), g(x) \rightsquigarrow$ Probl. 4

(a) Diagramm? • *Diagramme?*

(b) Verhalten für grosse $|x|$?
• *Comportement pour des $|x|$ qui sont grands?*

(6) $f(x) = e^{-x^2},\ \ g(x) = x$

(a) Diagramm? • *Diagramme?*

(b) $f(x) = g(x) \rightsquigarrow\ x \approx ?$

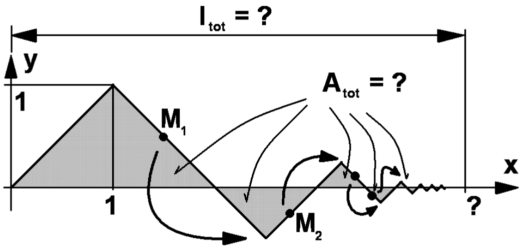
(c) $m \leq f(x) \leq M \rightsquigarrow\ m = ?,\ \ M = ?$

(d) $f(0) = ?,\ \ f(ln(e)) = ?,\ \ f(1) = ?$

(7) $3^x = 2^{2\,x} \cdot e^3 \cdot 3^{-2\,x} \rightsquigarrow\ x = ?$

3.4 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ B2 00/01 1

(1) $A_{tot} = ?,\ \ l_{tot} = ?$

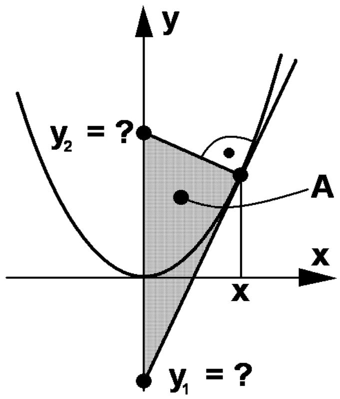


(2) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot\cos(2\,n) - \sin(n^2) + 8\,n^2 - 4\,n + 5}{2\,n^2 + 4\,n - 5\,\sin(n)} = ?$$

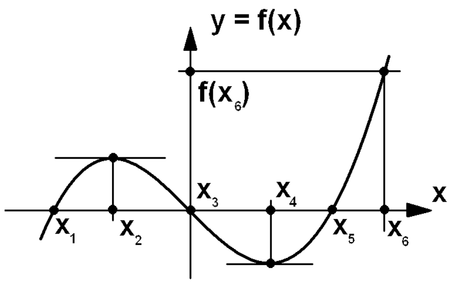
(3) $y = f(x) = x^2$

(a) $x = 1 \leadsto\ A(x) = ?$

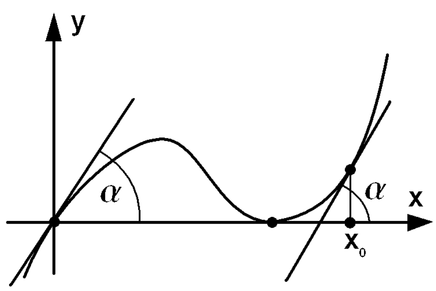
(b) $x = \text{var.} \leadsto\ A(x) = ?$



(4) $f(x) = a\cdot(x - x_1)\,(x - x_3)\,(x - x_5)$
$x_1 = -2,\ \ x_3 = 0,\ \ x_5 = 2$
$x_6 = 4,\ \ f(x_6) = 48$
$x_2 = ?\ ,\ \ x = 4 = ?$



(5) $f(x) = x^3 - 2\,x^2 + 4$
$f'(0) = ?\ ,\ \ \alpha = ?\ ,\ \ x_0 = ?$

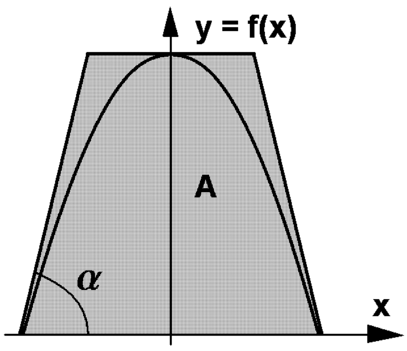


Probl. 6 $\leadsto$

(6) $y = f(x) = -x^2 + 4$

(a) $\alpha = ?$

(b) $A = ?$



3.5 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ B2 01/02 1

---

(1)

(a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - \cos(x)}$,
$I = [-2\,\pi, 2\,\pi]$

(b) $f(x) = [\cos(x)] + 1$,
$I = [-2\,\pi, 2\,\pi]$

(c) $f(x) = x^2 + 1$,
$I = [\pi, \pi]$
$f(x) = e^{\ln(x^2+1)}$,
$I = [\pi, \pi]$

(d) $f(x) = \cos(e^{\ln(x^2+1)})$,
$I = [\pi, \pi]$

⊘ Diagramme? • *Diagrammes?*

⊘ Pole • *Pôles*

⊘ Wo ist f nicht definiert? • *Où est–ce–que f n'est pas définie?*

⊘ Sprünge? • *Discontinuités?*

(2) $x = x^{3\cdot\ln(x^2)} \quad \rightsquigarrow \quad x = ?$

(3) $p(x) = (x-2)\cdot(x+1)\cdot(x^2-16), \qquad h(x) = x^2 - 2\,x - 3$
$f(x) = p(x)\cdot h(x), \qquad g(x) = \dfrac{p(x)}{h(x)}$

(a) Diagramm von f? • *Diagramme de f?*

(b) Pole von g? • *Pôles de g?*

(4) (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3\,n^2 - 3\,n + n^2\cdot\sin(n))\cdot n}{2\,n^2 + 4\,n^4} = ?$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3\,n^2 - 3\,n + n^2\cdot\sin(n)}{\cos(n) + 2\,n^2 + 4\,n^4} = ?$

(c) $s_1 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{5^k} = ?, \qquad s_1 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{4^k}{5^k} = ?, \qquad \rightsquigarrow \qquad \dfrac{s_2}{s_1} = ?$

(5) (a) $s_3 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{q^k} = 10 \;\Rightarrow\; q = ?$

(b) $s_4 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{q^k} = 1 \;\Rightarrow\; q = ?$

3.6 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ B2 02/03 1

---

(1) Skizziere die Graphen: • *Esquisse des graphiques:*

(a) $f_1(x) = x^3 + 20\sin(x), \qquad x \in [-6, 6]$
(b) $f_2(x) = [-x^2] + 1, \qquad x \in [-2\,4]$
(c) $f(x)_3 = \cos([x+1]) - 1, \qquad x \in [-7, 14]$

(2) Untersuche, ob die Lösung $\in \mathbb{Q}$ ist: • *Etudier si la solution est* $\in \mathbb{Q}$*:*

(a) $x = 5 + \dfrac{6}{x}$
(b) $x = 5 + \dfrac{7}{x}$

(3) $f(x) = \arctan(x),\; p(x) = x^2 + 2\,x + 2,\; f(x) = -(p \circ f)(x)$

(a) Diagramm von f und h, $x \in [-1, 1]$? • *Diagramme de* f *et de* h*,* $x \in [-1, 1]$*?*
(b) $\sin(h(-1) - h(1)) = ?$

(4) $f(x) = x^2 - x + \dfrac{1}{4},\; g(x) = x^2 + x,\; h(x) = f(x) \cdot g(x),\; u(x) = \dfrac{1}{f(x) - g(x)},\; s(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} + x$

(a) Berechne die Nullstellen von $f(x)$ und von $g(x)$.
• *Calculer les zéros de* $f(x)$ *et de* $g(x)$*.*
(b) Berechne die Nullstellen von $g(x)$.
• *Calculer les zéros de* $h(x)$*.*
(c) Berechne die Polstellen von $u(x)$.
• *Calculer les places de pôle de* $u(x)$*.*
(d) Skizziere $s(x)$.
• *Esquisse de* $s(x)$*.*
(e) Bestimme die eventuelle Asymptote von $s(x)$.
• *Déterminer l'asymptote possible de* $s(x)$*.*

(5) $f(x) = 2^{(-x^2)},\; g(x) = \dfrac{1}{2}\,x$

(a) Skizziere $f(x)$ und $g(x)$.
• *Esquisse de* $f(x)$ *et de* $g(x)$*.*
(b) Löse graphisch die Gleichung $g(x) = g(x)$.
• *Résoudre de façon graphique l'équation* $g(x) = g(x)$*.*
(c) $m \leq f(x) \leq M$
m und M sollen $f(x)$ möglichst gut eingrenzen. $m, M = ?$
• m *et* M *doivent délimiter* $f(x)$ *aussi bien que possibe.* $m, M = ?$

(6) Löse ohne Rechner: • *Résoudre sans calculatrice:*

$$2^x \cdot 3^{(-x)} \cdot 2^{2\,x} = e^3$$

WIR

3.7 Test in Analysis ◇ A2a 03/04 1b

Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet!

(1) Formales Denken:

(a) $f(z) = z^2,\ \ g(x) = ln(x) \rightsquigarrow\ f(g(x)) := h(x) = \,?$

(b) $u(s) = \sin(s),\ \ v(t) = 1 - \cos(t) \rightsquigarrow$ Wo ist $u(v(t)) = 0$?
(Nenne $u(v(t)) := w(t)$. Eine Skizze von w kann hilfreich sein.)

(2) Berechne die Ableitungen:

(a) $f_1(x) = a\,x^2 - b\,x - c$

(b) $f_2(x) = 4\,x^6 - 9\,x^5 + x^3 - 2\,x^2 + 8\,x - 7$

(c) $f_3(x) = (x^6 - x^5)\,e^x$

(d) $f_4(x) = \dfrac{(4\,x^6 - 9\,x^5)}{3\,e^x}$

(e) $f_5(x) = \cos(ln(x))$

(3) $g(x) = (x-1)(x-2) - \sin(x^2) + 4\,x^{-1}$

(a) $x_1 = \pi \rightsquigarrow\ g'(x)\big|_{x=x_1} = \,?$

(b) Steigungswinkel α der Tangente für $x = x_1 \rightsquigarrow\ \alpha =?$ (α in Altgrad angeben.)

(4) $f(x) = (x-4)(x-2)(x+2) = a_3\,x^3 + a_2 x^2 + \ldots$

(a) Für welche x ist die Tangente horizontal?

(b) Gibt es einen Wendepunkt? Und falls ja: Wo liegt er?

(c) Wo ist der Steigungswinkel der Tangente = 30 Altgrad?

Viel Glück!

3.8 Test in Analysis $\diamond$ A2a 04/05 1a

Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet!

(1) Skizziere den Graphen genau:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x \in \mathbb{N} \\ 2 & x < 0 \\ x & sonst \end{cases}$$

(2)

$$f(x) = \sqrt{(x-10)(x-20)}$$

(a) $D_f = ?$

(b) Genaue Skizze des Graphen?

(c) $W_f = ?$

(3) $f(x) = (x-1)(x-2)$

(a) $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c \leadsto \ a, b, c = ?$

(b) $f(x) \geq 0 \leadsto$ Lösungsmenge = ?

(4) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3\,x + 1}{x - 1}$

(a) Pole?

(b) Asyptote? (Funktionsgleichung!)

(c) Skizze?

(5) Formales Denken: $f(z) = \sin(z),\ \ g(x) = \cos(x) \leadsto$ Wo ist $f(g(x)) = 0$?
(Nenne $f(g(x)) := h(x)$.)

(6) Skizziere als Hilfe $f(x) = sgn(x)$ (Signum) und $g(x) = \sin(x)$. Skizziere dann:

(a) $f(g(x)) = sgn(\sin(x))$.

(b) $f(|g(x)|) = sgn(|\sin(x)|)$.

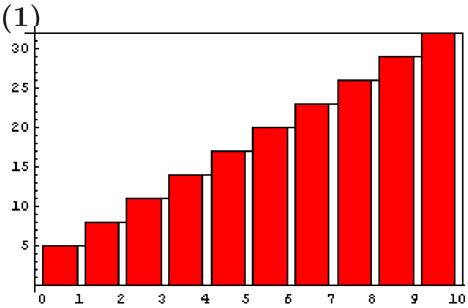
Viel Glück!

3.9 Test in Analysis ◇ A2a 04/05 1

CodeM1W Name, Datum, Klasse ....

Die Lösungen sind anzukreuzen oder einzukreisen. Richtige Kreuze oder Kreise geben je einen Pluspunktunkt. Falsche Kreuze oder Kreise geben je einen Minuspunktunkt.

(1)



Berechne exakt (Hinweis: Skizze):

a) $s_{10} = 5 + 8 + 11 + 14 + \ldots + 32$
$= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{10}$

b) $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

Lösung deutlich markieren:

	Auswahl, falls die richtige Lösung hier ist:	Andere Lösung:
(a) $s_{10} =$	163,179, 183, 185, 186, 171, 194, 199, 200, 212, 213, 215, 219	
(b) $s_n =$	$2\,n + \frac{3\,n\,(1+n)}{2}$, $2\,n + \frac{3\,n\,(1+n)}{3}$, $5\,n + \frac{3\,n\,(1-n)}{3}$, $5\,n + \frac{5\,n\,(1-n)}{3}$	

(2) Bestimme die Anzahl Wahrheitswerte „1“ (wahr) in der jeweiligen Wahrheitstabelle:

(a) $(\neg X \ \vee \ Y) \ \wedge \ \neg(X \ \wedge \ \neg Y)$

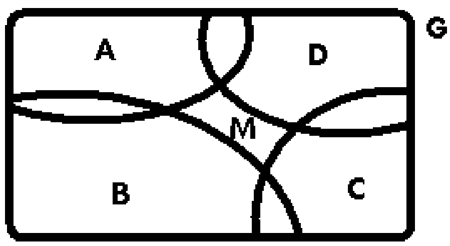
(b) $X \ \dot{\vee} \ (X \ \Rightarrow \ \neg X)$

(c) $(X \ \wedge \ (Y \ \Rightarrow \ \neg X)) \ \Rightarrow \ (Y \ \Leftrightarrow (X \ \vee \ Z))$

Lösung deutlich markieren:

	Auswahl, falls die richtige Lösung hier ist:	Andere Lösung:
(a)	0, 1, 2, 3, 4	
(b)	0, 1, 2, 3, 4	
(c)	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	

(3) Gegeben ist die Grundmenge G sowie die Mengen A, B, C, D.
$|G| = 500$, $|A| = 50$, $|B| = 60$,
$|C| = 70$, $|D| = 80$, $|A \cap B| = 20$,
$|B \cap C| = 30$, $|D \cap D| = 40$, $|D \cap A| = 50$
$|G \setminus (A \cup B \cup C \cup D| = ?$



Lösung deutlich markieren:

	Auswahl, falls die richtige Lösung hier ist:	Andere Lösung:
$\lvert M\rvert$	346, 352, 358, 360, 372, 373, 380, 382, 383, 387, 390	

(4) Bestimme den x–Wert des Punktes, der im Lösungsgebiet am weitesten rechts liegt:

$$y \geq x^2,\ \ y \leq -x^2+3,\ \ x \geq 0,\ \ y \leq 3x$$

Lösung deutlich markieren:

Auswahl, falls die richtige Lösung hier ist:	And. Lös.:
$\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$, $\frac{-3+\sqrt{21}}{2}$, 0, $\sqrt{3}$, 2.1, $(\frac{3}{2})^{(\frac{1}{2})}$, 3, $(0.816497\ldots)^{-1}$, 0.816497, $(1;1.5)$	

(5) Markiere diejenigen Relationen, die Äquivalenzrelationen respektive strenge Ordnungsrelationen sind.

(a) Drehung von Dreiecken um einen Punkt P. (Zwei Dreiecke sind in Relation, wenn sie durch Drehung um P auseinander hervorgehen....)

(b) Spiegelung von Figuren F an einer Geraden ($F \mapsto F'$).

(c) Verschiebung von Figuren mit einem Vektor (immer gleiche Distanz und Richtung, $F \mapsto F'$).

(d) Projektion von Körpern in die Ebene auf dieselbe Figur.

(e) Gleitspiegelung von Figuren. (Verschibung palallel zur Geraden g und anschliessend Spiegelung an g.)

(f) Gleicher Rest von Zahlen bei der Division durch 314.

Lösung deutlich markieren:

	Auswahl, falls die richtige Lösung hier ist:	Andere Lösung:
Äquivalenzrelation	(a) (b) (c) (e) (f)	
Strenge Ordnungsrelation	(a) (b) (c) (e) (f)	

(6) Sei $f(x) = (-3+x)\,(-1+x)\,\left(-1+x^2\right)$ und $x = z+1$.

Markiere die wahren Aussagen deutlich:

$\forall_x : f(x) \in \mathbb{Z}$	$\forall_x : f(x)+4 \geq 0$	$\forall_x : f(x) \geq 0$	$\forall_z : f(z+1) = f(-z+1)$
$f(1) = 4$	$f(0)\cdot f(2) = 9$	$f(0)\cdot f(2) = 0$	„$2^2+3^2 \neq 4^2 \ \Rightarrow\ f(x) = 5^2 - x$“

Viel Glück!

WIR1

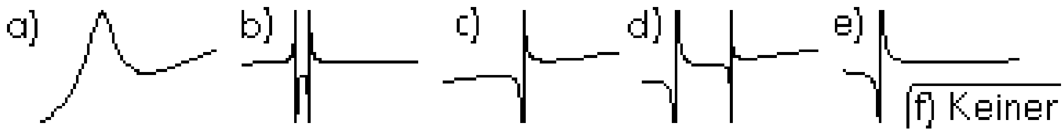
3.10 Test in Analysis ◇ A2ap 04/05 1a

CodeM1W T1A2ap0405-1.tex Name, Datum, Klasse ....

Die Lösungen sind anzukreuzen oder einzukreisen. Richtige Kreuze oder Kreise geben je einen Pluspunkt. Falsche Kreuze oder Kreise geben je einen Minuspunkt.

(1) Gegeben ist: $f(x) = \dfrac{(-4+x)\,(-2+x)\,(2+x)}{(2+x+x^2)}$

(a) Welcher der folgenden Graphen ist das Bild dieser Funktion?



Lösung deutlich markieren:

a)	b)	c)	d)	e)	f)

(b) Welches sind Nullstellen von f? **Lösung deutlich markieren:**

Mögliche Nullstellen:	Andere:
-5, -4, -3, -2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 2, 2.5, 3	

(c) Wo schneidet die Asymptote von f die x-Achse? **Lösung deutlich markieren:**

Bei $x = \ldots$	Keine oder andere Schnittstelle:
-2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 2, 2.5, 3, 4, 5, 6, 6.5	

(2) Sei $g(x) = x - 2$, $h(x) = x^2 - 2$. Damit bilden wir:

$f_1 = g \circ h$	$f_2 = h \circ g$	$f_3 = h \circ (g \circ g)$	$f_4(x) = g \circ (h \circ h)$	$f_5 = h \circ (g \circ h)$	$f_6 = g \circ (h \circ g)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)

Ordne, falls möglich, die Nummern der Ausdrücke folgenden Funktionstermen zu (Zahl notieren, falls nicht möglich Kreuz)! **Lösung deutlich markieren:**

Term	$14 - 8\,x^2 + x^4$	$-4\,x^2 + x^4$	$2 - 4\,x + x^2$	$-4\,x + x^2$	$14 - 8\,x + x^2$
Nummer					

(3) $f_1(x) = \left(-2 + x^2\right)\left(-1 + x^2\right)$, $f_2(x) = (f_1(x))^{(\frac{1}{2})}$, $f_3(x) = (f_2(x))^4$

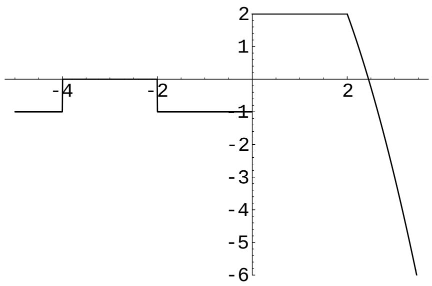
(a) f_1 hat im Intervall $[0, 2]$ folgende Anzahl Nullstellen: **(Lösung deutlich markieren)**

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6	Andere Anzahl

(b) f_2 resp. f_3 ist im Intervall $[0,2]$ zwischen folgenden Nullstellen nicht definiert:

f_2: Nullstellen (Intervall(e)) eintragen:	f_3: Nullstellen (Intervall(e)) eintragen:

(4)



Das nebenstehende Bild zeigt eine zusammengesetzte Funktion. Bestimme, welche der folgenden Funktionen dafür in Frage kommt:

$$f_1(x) = \begin{cases} [(\cos(\frac{x}{2}))]^2 & x < 0 \\ 2 & x \in [0,2] \\ 10 - x^3 & sonst \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} -sgn([(\sin(\frac{\pi x}{2}))])^2 & x < 0 \\ 2 & x \in [0,2] \\ 6 - x^2 & sonst \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 3 & x \in \mathbb{N} \\ 2 & x < 0 \\ x & sonst \end{cases} \qquad f_4(x) = \begin{cases} -[x]^2 & x < 0 \\ 2^{1.0001} & x \in [0,2] \\ 4 - x & sonst \end{cases}$$

Richtig				Andere Funktion
$f = f_1$	$f = f_2$	$f = f_3$	$f = f_4$	

(5) $f(x) = |[x+1]| \cdot \sqrt{|x|} \rightsquigarrow$ Bezeichne die richtigen Aussagen in folgender Liste, nachdem du den Verlauf der Funktion studiert hast:

(a) f ist periodisch für $x < 0$.
(b) f besitzt keine Asyptote.
(c) f ist streng monoton wachsend.
(d) Für $x > 1$ ist f monoton wachsend.
(e) Für $x < -1$ ist f beschränkt.
(f) $f(0) \cdot f(-1) = 0$.
(g) f ist nie negativ.
(h) f besitzt Pole.

Richtige Lösungen deutlich markieren:

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)

(6) Projektaufgabe nach mündlicher Mitteilung bis Ende Januar.

Viel Glück!

WIR1

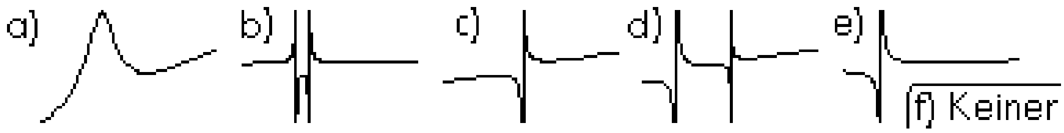
3.11 Test in Analysis ◇ A2ap 04/05 1b

CodeQ1R T1A2ap0405-1a.tex Name, Datum, Klasse ....

Die Lösungen sind anzukreuzen oder einzukreisen. Richtige Kreuze oder Kreise geben je einen Pluspunkt. Falsche Kreuze oder Kreise geben je einen Minuspunkt.

(1) Gegeben ist: $f(x) = \dfrac{(-4+x)\ (-2+x)\ (2+x)}{(2+x+x^2)}$

(a) Welcher der folgenden Graphen ist das Bild dieser Funktion?



Lösung deutlich markieren:

a)	b)	c)	d)	e)	f)

(b) Welches sind Nullstellen von f? **Lösung deutlich markieren:**

Mögliche Nullstellen:	Andere:
-5, -4, -3, -2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 2, 2.5, 3	

(c) Wo schneidet die Asymptote von f die x-Achse? **Lösung deutlich markieren:**

Bei $x = \ldots$	Keine oder andere Schnittstelle:
-2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 2, 2.5, 3, 4, 5, 6, 6.5	

(2) Sei $g(x) = x - 2$, $h(x) = x^2 - 2$. Damit bilden wir:

$f_1 = g \circ h$	$f_2 = h \circ g$	$f_3 = h \circ (g \circ g)$	$f_4(x) = g \circ (h \circ h)$	$f_5 = h \circ (g \circ h)$	$f_6 = g \circ (h \circ g)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)

Ordne, falls möglich, die Nummern der Ausdrücke folgenden Funktionstermen zu (Zahl notieren, falls nicht möglich Kreuz)! **Lösung deutlich markieren:**

Term	$14 - 8\,x^2 + x^4$	$-4\,x^2 + x^4$	$2 - 4\,x + x^2$	$-4\,x + x^2$	$14 - 8\,x + x^2$
Nummer					

(3) $f_1(x) = \left(-2 + x^2\right)\left(-1 + x^2\right)$, $f_2(x) = (f_1(x))^{(\frac{1}{2})}$, $f_3(x) = (f_2(x))^4$

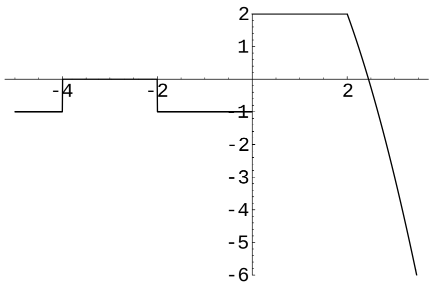
(a) f_1 hat im Intervall $[0, 2]$ folgende Anzahl Nullstellen: **(Lösung deutlich markieren)**

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6	Andere Anzahl

(b) f_2 resp. f_3 ist im Intervall $[0, 2]$ zwischen folgenden Nullstellen nicht definiert:

f_2: Nullstellen (Intervall(e)) eintragen:	f_3: Nullstellen (Intervall(e)) eintragen:

(4)



Das nebenstehende Bild zeigt eine zusammengesetzte Funktion. Bestimme, welche der folgenden Funktionen dafür in Frage kommt:

$$f_1(x) = \begin{cases} [(\cos(\frac{x}{2}))]^2 & x < 0 \\ 2 & x \in [0, 2] \\ 10 - x^3 & sonst \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} -sgn([(\sin(\frac{\pi x}{2}))])^2 & x < 0 \\ 2 & x \in [0, 2] \\ 6 - x^2 & sonst \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 3 & x \in \mathbb{N} \\ 2 & x < 0 \\ x & sonst \end{cases} \qquad f_4(x) = \begin{cases} -[x]^2 & x < 0 \\ 2^{1.0001} & x \in [0, 2] \\ 4 - x & sonst \end{cases}$$

Richtig	Andere Funktion
$f = f_1$ $\quad f = f_2$ $\quad f = f_3$ $\quad f = f_4$	

(5) $f(x) = |[x + 1]| \cdot \sqrt{|x|} \leadsto$ Bezeichne die richtigen Aussagen in folgender Liste, nachdem du den Verlauf der Funktion studiert hast:

(a) f ist periodisch für $x < 0$.
(b) f besitzt keine Asyptote.
(c) f ist streng monoton wachsend.
(d) Für $x > 1$ ist f monoton wachsend.
(e) Für $x < -1$ ist f beschränkt.
(f) $f(0) \cdot f(-1) = 0$.
(g) f ist nie negativ.
(h) f besitzt Pole.

Richtige Lösungen deutlich markieren:

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)

(6) Projektaufgabe nach mündlicher Mitteilung bis Ende Januar.

Viel Glück!

WIR1

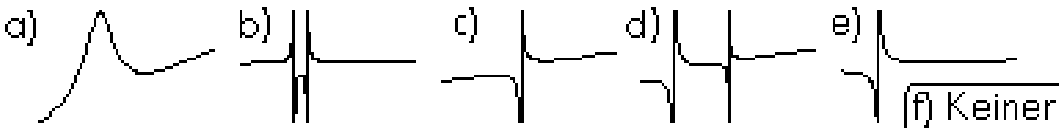
3.12 Test in Analysis ◇ A2ap 04/05 1c

CodeH2F T1A2ap0405-2.TEX Name, Datum, Klasse ....

Die Lösungen sind anzukreuzen oder einzukreisen. Richtige Kreuze oder Kreise geben je einen Pluspunkt. Falsche Kreuze oder Kreise geben je einen Minuspunkt.

(1) Gegeben ist: $f(x) = \dfrac{(-2+x)\ (-4+x)\ (2+x)}{(0+x+x^2)}$

(a) Welcher der folgenden Graphen ist das Bild dieser Funktion?



Lösung deutlich markieren:

a)	b)	c)	d)	e)	f)

(b) Welches sind Nullstellen von f? **Lösung deutlich markieren:**

Mögliche Nullstellen:	Andere:
-4, -3, -2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 2, 3, 3.5, 4	

(c) Wo schneidet die Asymptote von f die x-Achse? **Lösung deutlich markieren:**

Bei $x = \ldots$	Keine oder andere Schnittstelle:
-1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 2, 2.5, 3, 4, 5, 5.5, 6, 7	

(2) Sei $h(x) = x - 2$, $g(x) = x^2 - 2$. Damit bilden wir:

$f_1 = g \circ h$	$f_2 = h \circ g$	$f_3 = h \circ (g \circ g)$	$f_4(x) = g \circ (h \circ h)$	$f_5 = h \circ (g \circ h)$	$f_6 = g \circ (h \circ g)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)

Ordne, falls möglich, die Nummern der Ausdrücke folgenden Funktionstermen zu (Zahl notieren, falls nicht möglich Kreuz)! **Lösung deutlich markieren:**

Term	$14 - 8\,x^2 + x^4$	$-4\,x^2 + x^4$	$2 - 4\,x + x^2$	$-4\,x + x^2$	$14 - 8\,x + x^2$
Nummer					

(3) $f_1(x) = \left(2 - x^2\right)\ \left(1 - x^2\right)$, $f_2(x) = (f_1(x))^{(\frac{1}{2})}$, $f_3(x) = (f_1(x))^6$

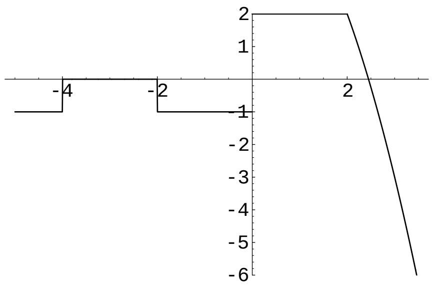
(a) f_1 hat im Intervall $[0, 2]$ folgende Anzahl Nullstellen: **(Lösung deutlich markieren)**

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6	Andere Anzahl

(b) f_2 resp. f_3 ist im Intervall $[0,2]$ def. resp. zwischen folgenden Nullstellen nicht def.:

f_2: Nullstellen (Intervall(e)) eintragen:	f_3: Nullstellen (Intervall(e)) eintragen:

(4)



Das nebenstehende Bild zeigt eine zusammengesetzte Funktion. Bestimme, welche der folgenden Funktionen dafür in Frage kommt:

$$f_1(x) = \begin{cases} -sgn([(\sin(\frac{\pi x}{2}))])^2 & x < 0 \\ 2 & x \in [0,2] \\ 6 - x^2 & sonst \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} [(\cos(\frac{x}{2}))]^2 & x < 0 \\ 2 & x \in [0,2] \\ 10 - x^3 & sonst \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} -[x]^2 & x < 0 \\ 2^{1.0001} & x \in [0,2] \\ 4 - x & sonst \end{cases} \qquad f_4(x) = \begin{cases} 3 & x \in \mathbb{N} \\ 2 & x < 0 \\ x & sonst \end{cases}$$

Richtig	Andere Funktion
$f = f_1$ $f = f_2$ $f = f_3$ $f = f_4$	

(5) $f(x) = |[x+1]| \cdot \sqrt{|x|} \rightsquigarrow$ Bezeichne die richtigen Aussagen in folgender Liste, nachdem du den Verlauf der Funktion studiert hast:

(a) f ist nie negativ.

(b) f besitzt keine Asyptote.

(c) f ist periodisch für $x < 0$.

(d) Für $x > 2$ ist f monoton wachsend.

(e) f ist streng monoton wachsend.

(f) $f(1) \cdot f(-1) = 0$.

(g) Für $x < -1$ ist f beschränkt.

(h) f besitzt keine Pole.

Richtige Lösungen deutlich markieren:

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)

(6) Projektaufgabe nach mündlicher Mitteilung bis Ende Januar.

Viel Glück!

WIR1

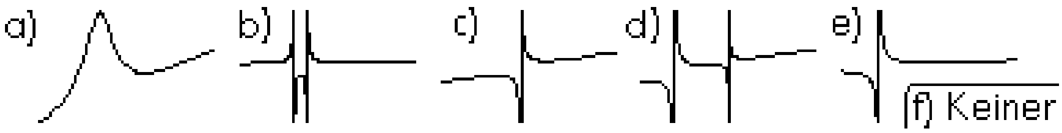
3.13 Test in Analysis ◇ A2ap 04/05 1d

CodeS2L T1A2ap0405-2a.TEX Name, Datum, Klasse ....

Die Lösungen sind anzukreuzen oder einzukreisen. Richtige Kreuze oder Kreise geben je einen Pluspunkt. Falsche Kreuze oder Kreise geben je einen Minuspunkt.

(1) Gegeben ist: $f(x) = \dfrac{(-2+x)\ (-4+x)\ (2+x)}{(0+x+x^2)}$

(a) Welcher der folgenden Graphen ist das Bild dieser Funktion?



Lösung deutlich markieren:

a)	b)	c)	d)	e)	f)

(b) Welches sind Nullstellen von f? **Lösung deutlich markieren:**

Mögliche Nullstellen:	Andere:
-4, -3, -2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 2, 3, 3.5, 4	

(c) Wo schneidet die Asymptote von f die x-Achse? **Lösung deutlich markieren:**

Bei $x = \ldots$	Keine oder andere Schnittstelle:
-1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 2, 2.5, 3, 4, 5, 5.5, 6, 7	

(2) Sei $h(x) = x - 2,\ \ g(x) = x^2 - 2$. Damit bilden wir:

$f_1 = g \circ h$	$f_2 = h \circ g$	$f_3 = h \circ (g \circ g)$	$f_4(x) = g \circ (h \circ h)$	$f_5 = h \circ (g \circ h)$	$f_6 = g \circ (h \circ g)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)

Ordne, falls möglich, die Nummern der Ausdrücke folgenden Funktionstermen zu (Zahl notieren, falls nicht möglich Kreuz)! **Lösung deutlich markieren:**

Term	$14 - 8\,x^2 + x^4$	$-4\,x^2 + x^4$	$2 - 4\,x + x^2$	$-4\,x + x^2$	$14 - 8\,x + x^2$
Nummer					

(3) $f_1(x) = \left(2 - x^2\right)\ \left(1 - x^2\right),\ \ f_2(x) = (f_1(x))^{(\frac{1}{2})},\ \ f_3(x) = (f_1(x))^6$

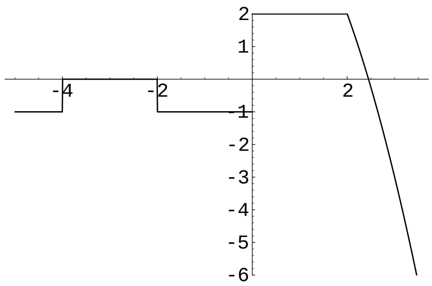
(a) f_1 hat im Intervall $[0, 2]$ folgende Anzahl Nullstellen: **(Lösung deutlich markieren)**

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6	Andere Anzahl

(b) f_2 resp. f_3 ist im Intervall $[0,2]$ def. resp. zwischen folgenden Nullstellen nicht def.:

f_2: Nullstellen (Intervall(e)) eintragen:	f_3: Nullstellen (Intervall(e)) eintragen:

(4)



Das nebenstehende Bild zeigt eine zusammengesetzte Funktion. Bestimme, welche der folgenden Funktionen dafür in Frage kommt:

$$f_1(x) = \begin{cases} -sgn([(\sin(\frac{\pi x}{2}))])^2 & x < 0 \\ 2 & x \in [0,2] \\ 6 - x^2 & sonst \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} [(\cos(\frac{x}{2}))]^2 & x < 0 \\ 2 & x \in [0,2] \\ 10 - x^3 & sonst \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} -[x]^2 & x < 0 \\ 2^{1.0001} & x \in [0,2] \\ 4 - x & sonst \end{cases} \qquad f_4(x) = \begin{cases} 3 & x \in \mathbb{N} \\ 2 & x < 0 \\ x & sonst \end{cases}$$

Richtig				Andere Funktion
$f = f_1$	$f = f_2$	$f = f_3$	$f = f_4$	

(5) $f(x) = |[x+1]| \cdot \sqrt{|x|} \rightsquigarrow$ Bezeichne die richtigen Aussagen in folgender Liste, nachdem du den Verlauf der Funktion studiert hast:

(a) f ist nie negativ.

(b) f besitzt keine Asyptote.

(c) f ist periodisch für $x < 0$.

(d) Für $x > 2$ ist f monoton wachsend.

(e) f ist streng monoton wachsend.

(f) $f(1) \cdot f(-1) = 0$.

(g) Für $x < -1$ ist f beschränkt.

(h) f besitzt keine Pole.

Richtige Lösungen deutlich markieren:

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)

(6) Projektaufgabe nach mündlicher Mitteilung bis Ende Januar.

Viel Glück!

WIR1

3.14 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ B2 99/00 2

---

(1) Projektarbeit nach speziellen Angaben.
• *Le travail de projet selon informations spéciales.*

WIR

3.15 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ B2 00/01 2

---

(1) $p(x) = (x+1) \cdot (x-4) \cdot (x-5) = \ldots$

(a) $p'(x) = ?$

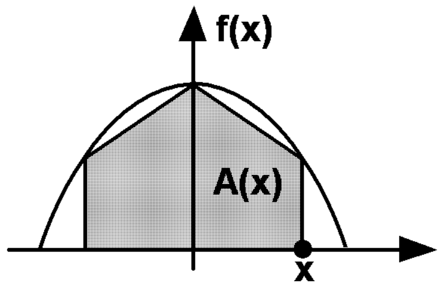
(b) Min./ Max. von $p(x) = ?$ • *Min./ Max. de* $p(x) = ?$

(c) $p''(x) := (p'(x))' = ?$

(d) Min./ Max. von $p'x) = ?$ • *Min./ Max. de* $p'(x) = ?$

(e) Skizze: • *Esquisse:* $p(x),\ p'(x),\ p''(x)!$

(2) $f(x) = -x^2 + 1$
$A(x) \to max. \rightsquigarrow\ x = ?$



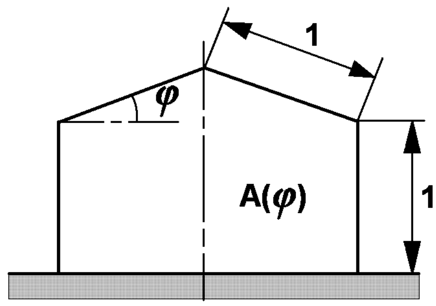
(3) $f_1(x) = \cos^2(x),\ f_2(x) = \cos^3(x)$ $\quad d(x) = |f_1(x) - f_2(x)|,$ $\quad x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (Rad!)

$d(x) \to max. \rightsquigarrow\ x = ?$

(4)

$f(x) = -x^2 + 1$
$A(x) \to max.$

$\rightsquigarrow\ \varphi = ?$ (Rad!)



3.16 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ B2 01/02 2

---

(1) $f(x) = \frac{1}{3}\,x^3 - 4\,x^2 + 2\,x - 1$

(a) Plot?

(b) $f'(x) = \,?$

(c) $f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = \,?$

(d) $x = 4 \;\Rightarrow\; \alpha_{Tg(f)} = \,?$

(e) $x = 4 \;\Rightarrow\; f''(x) = \,?,\;\; \alpha_{Tg(f')} = \,?$

(2) (a) $f(x) = x^2\,(4x - 3) \;\Rightarrow\; f'(x) = \,?$

(b) $f(x) = x^2\,(4x - 3) \;\Rightarrow\; f''(x) = \,?$

(c) $f(x) = x^2\,(4x - 3) \;\Rightarrow\; f'''(x) = \,?$

(d) $f(x) = x^2\,(4x - 3) \;\Rightarrow\; f''''(x) = f^{(4)}(x) = \,?$

(3) (a) $f(x) = x\,ln(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = \,?$

(b) $f(x) = x^2\,ln(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = \,?$

(c) $f(x) = x\,e^x \;\Rightarrow\; f'(x) = \,?$

(d) $f(x) = \sin(x)\,\cos(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = \,?$

(4) (a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2} \;\Rightarrow\; f'(x) = \,?$

(b) $f(x) = ln(2\,x + 3) \;\Rightarrow\; f'(x) = \,?$

(c) $f(x) = \cos(2\,x + 3) \;\Rightarrow\; f'(x) = \,?$

(d) $f(x) = \cos(x^4) \;\Rightarrow\; f'(x) = \,?$

3.17 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ B2 02/03 2

---

(1)

$$f(x) = x^3 - 6\,x^2 + 12\,x - 8$$

Skizziere den Graphen! • *Esquisse du graphique!*

(a) $f\,'(x_0) = 0 \;\Rightarrow\; x_0 = \,?$

(b) Was ist $(x_0; f(x_0))$ für ein Punkt? (Eigenschaft?)
• *Quelle sorte de point est–ce qu'on trouve à* $(x_0; f(x_0))$*? (Qualité?)*

(c) Hat die Tangente in x_0 mit der Kurve $f(x)$ einen weiteren Schnittpunkt?
• *Est–ce que la tangente à* x_0 *a–t–elle un autre point d'intersection avec la courbe* $f(x)$*?*

(2)

$$f(x) = (x+1)^3$$

Skizziere den Graphen! • *Esquisse du graphique!*

(a) $x_0 = 1 \leadsto$ exakter Steigungswinkel in x_0? (Ohne Rechner!)
• $x_0 = 1 \leadsto$ *angle de montée à* x_0*? (Sans calculatrice!)*

(b) Suche auf der Kurve $f(x)$ Punkte, in denen die Tangente gleiche Steigung hat wie bei $x_0 = 1$.
• *Chercher sur la courbe* $f(x)$ *des points où la tangente a la même montée comme a* $x_0 = 1$.

(3)

$$g(x) = 16\,x^4 + 8\,x^3 + 4\,x^2 + 2\,x + 1,\;\; h(x) = 5,\;\; f(x) = g(x)\cdot h(x) + 1$$

$\leadsto\; f\,'(x) = \,?$ Von Hand! • *A la main!*

(4) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2},\;\; g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ Von Hand! • *A la main!*

(a) $f\,'(x) = \,?$

(b) Berechne das Minimum von $f(x)$. (Rechnung zeigen!)
• *Calculer le minimum de* $f(x)$*. (Montrer le calcul!)*

(c) $g\,'(x) = \,?$

(5) Von Hand: • *A la main:*

(a) $f(x) = e^x \cdot \sin(x) - 4 \leadsto\; f\,'(x) = \,?$

(b) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{e^x - 4} \leadsto\; f\,'(x) = \,?$

(6) Von Hand: • *A la main:*

(a) $f(x) = ln(\sin(x)) \leadsto\; f\,'(x) = \,?$ $\leadsto$

(b) $f(x) = e^{(x^c)} \rightsquigarrow \; f'(x) = ?$

(7)

$$f(x) = a \cdot \cos(x - \frac{\pi}{2})$$

Steigungswinkel der Tangente bei $x_0 = 0 \rightsquigarrow \; \alpha = \frac{\pi}{6} \rightsquigarrow \; a = ?$

- *Angle de montée de la tangente à* $x_0 = 0 \rightsquigarrow \; \alpha = \frac{\pi}{6} \rightsquigarrow \; a = ?$

3.18 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ B2 03/04 2b

Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet! (Die Skizzen gelten als Korrekturhilfen.)

(1) $f(x) = x \cdot (x-2)^2$

(a) Skizze von f?

(b) Nullstellen von f?

(c) Wo gilt $f'(x) = 0$?

(d) $\int\limits_0^2 f(x)\,dx = \,?$

(e) $\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \,?$

(2) $f(x) = 2\,x^2, \qquad A(t) = \int\limits_{-1}^{t} f(x)\,dx = \,?$

(a) $A(t) = \dfrac{2}{3} \;\Rightarrow\; t = ?$

(b) $A(t) = 10 \;\Rightarrow\; t = ?$

(3) Die Kurve $f(x) = \sqrt{x}$ rotiert um die x–Achse. Zwischen $x_1 = 0$ und $x_2 = x$ entsteht so ein Volumen$V(x)$. Berechne $V(x)$!

(4) Gegeben ist ein Punkt P in einem räumlichen Polarkoordinatensystem. φ ist der Winkel in der (x,y)–Ebene zwischen der x–Achse und der Projektion P' von P. ϑ. Dabei ist $r = 6400\ km$ (Erde!), $\varphi = 21.5^o$, $\vartheta = 44.2^o$.

(a) Skizze?

(b) $P(x,y,z) = \,?$

(c) P wird um 3 *Stunden* um die z–Achse in positive Richtung gedreht. Berechne x_Q, y_Q, z_Q des so entstehenden Punktes Q!

(5) Gegeben sind die Pfeile (und die dadurch definierten Vektoren) $\overrightarrow{OA} = \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OB} = \vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$. Auf dem Pfeil $\overrightarrow{OB}$ liegt der Punkt P. Durch $\vec{w}$ geht eine Gerade g. Die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ schliessen den Winkel α ein. Durch O geht noch eine Gerade h, die mit g ebenfalls einen Winkel α einschliesst, jedoch A nicht enthält. Auf ihr liegt ein Punkt C sodass O, A, P, C ein Parallelogramm bilden.

(a) Skizze?

(b) $\alpha = \,?$

(c) $P(x,y) = \,?$

(d) $\vec{u} = \overrightarrow{OC} = \,?$ $\hookrightarrow$

(6) Gegeben ist ein Dreieck ABC mit $A(1;1)$, $B(7;2.5)$, $C=(2;6)$. Auf $\overline{AB}$ liegt der Punkt C' mit $x=4$ und auf $\overline{BC}$ der Punkt A' mit $x=5$. $\overline{AA'}$ und $\overline{CC'}$ schneiden sich in S. Weiter ist $B'=P$ der Schnittpunkt der Geraden $\overline{BS}$ und $\overline{AC}$.

(a) Skizze?

(b) $A' = ?$, $C' = ?$

(c) $S = ?$

(d) $P = B' = ?$

Viel Glück!

3.19 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ B2 03/04 2a

Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet! (Die Skizzen gelten als Korrekturhilfen.)

(1) Eine Schulaufgabe: Die Distanz zwischen Leipzig und Wien beträgt 660 km. Ein Flugzeug mit 60 km/h Rückenwind erreicht Wien 6 Minuten früher als nach Flugplan. Wie gross ist die Geschwindigkeit des Flugzeuges

(a) bezüglich des Bodens?

(b) bezüglich der Luft?

(2) Folge: $a_1 = 1,\;\; a_2 = 2,\;\; b_n = a_{n-1},\;\; a_n = a_{n-1} - 2\,b_{n-1}$

(a) $a_5 = \,?$

(b) $b_5 = \,?$

(3) $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{\sqrt{2}},\;\; a_1 = 16$

(a) $a_7 = \,?$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \,?$

(c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \,?$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4\,n^3 - 5\,n + \cos(\frac{1}{n}) \cdot \sin(n^2)}{5\,n^4 - 4\,n^2 + n \cdot \cos(\frac{1}{n})} = \,?$

(5) $a_n = (1 + \dfrac{1}{n})^n$

(a) $a_5 \approx \,?$

(b) $a_{10} \approx \,?$

(c) $a_{15} \approx \,?$

(d) Vermutung?

(6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{3\,n^2} \cdot ((\dfrac{\sin(n)}{2})^n + 4) = \,?$

Viel Glück!

3.20 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ B2 99/00 3

---

(1) Berechne $f'(x)$! • *Calculer* $f'(x) \rightsquigarrow$

(a) $f(x) = x^4 + x^6$

(b) $f(x) = x^4 \cdot ln(x)$

(c) $f(x) = \dfrac{x^4}{ln(x)}$

(d) $f(x) = ln(x^4)$

(e) $f(x) = x \cdot e^{(\frac{1}{x})}$

(2) $f(x) = 7\,x^4 + 12\,x^3 - x^2 + 8\,x + 9 \rightsquigarrow$

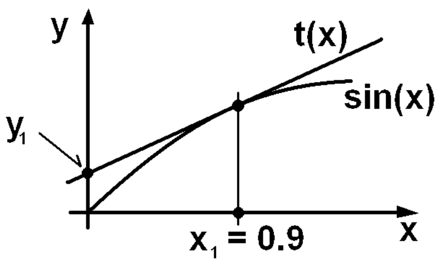
(a) $f'(x) = ?$

(b) $f''(x) = ?$

(c) $f'''(x) = ?$

(d) Plot: $f,\ \ f',\ \ f'',\ \ f''' \rightsquigarrow\ \ ?$

(3)



$f(x) = \sin(x) = y,\ \ x:\ \ rad,\ \ x \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$

(a) $f'(x_0) = 0.9 \rightsquigarrow\ \ x_0 = ?$

(b) $f'(x_0)\ =\ \tan(\alpha_0)\ \rightsquigarrow\ \ \alpha_0\ =\ ?$ *(rad!=*

(c) $x_1 = 0.9 \rightsquigarrow\ \ y_1 = ?$

(4)

$f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$
$f(2) = 0$
$f'(1) = 1$
$f''(-3) = 0$
$f(3) = -1$

$f(x) = ?$
$a, b, c, d = ?$

3.21 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ B2 00/01 3

---

(1) $\int\limits_0^1 a \cdot x\,(e^x - e^{-x})\,dx = \,?$

(2) $\dfrac{d}{d\,t}\displaystyle\int_0^1 t \cdot e^x\,dx = \,?$

(3) $\int\limits_1^2 x \cdot ln(x)\,dx = \,?$

(4) $\int\limits_1^2 x^2 \cdot ln(x)\,dx = \,?$

(5) $\int\limits_0^\pi \sin(\pi \cdot x + 1)\,dx = \,?$

(6) $\int\limits_0^\pi x^2 \cdot \sin(\pi \cdot x + 1)\,dx = \,?$

(7) $\int\limits_0^\pi (x \cdot \sin(x) - x \cdot \sin(x^2))\,dx = \,?$

(8) $f(x) = -\dfrac{4}{\pi^2} \cdot x^2 + 1, \;\; g(x) = \cos(x)$

(a) Skizze: • *Esquisse:* $f(x),\;\; g(x),\;\; f(x) - g(x)$

(b) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (f(x) - g(x))\,dx = \,?$

(9) $\int\limits_0^t x^2\,dx = \dfrac{1}{12} \;\Rightarrow\; t = \,?$

WIR

3.22 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ A2 01/02 3

---

(1) $\int_0^{2\pi} (2 + \cos(x) - \sin(x))\, dx = ?$ Skizze? • *Exquisse?*

(2) $\int \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 3\,x^2 + 2\,x - 4\, dx = ?$

(3) $g(t) := \int_0^1 (t^2 + 2\,t) \cdot e^x\, dx$

$\leadsto$ $t_0 =$ Minimum von $g(t)$ • $t_0 =$ *Minimum von* $g(t) \leadsto$ $t_0 = ?$

(4) $\int_0^{\pi} \cos(2\,x\,\pi)\, dx = ?$, $\int_0^{\pi} a\, \cos(2\,x\,\pi - \frac{\pi}{2})\, dx = ?$

(5) $\int_1^{e} x^3 \ln(x)\, dx = ?$

(6) $\int_0^{\pi} x \cdot \sin(x \cdot \pi)\, dx = ?$

(7) $\Delta V = r(x)^2 \cdot \pi \cdot \Delta x,\;\; V \approx \sum \Delta V \rightarrow \int dV = \int_0^1 r(x)^2 \cdot \pi\, dx$

$r(x) = (x^2 + 1) \;\Rightarrow\; \pi \cdot \int_0^1 (x^2 + 1)^2\, dx = ?$

Skizze? • *Esquisse?*

(8) $\int_0^1 x \cdot e^{-x^2}\, dx = ?$

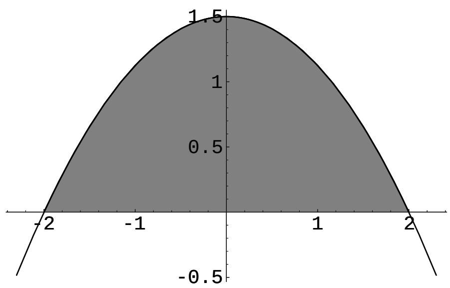
Viel Glück! • *Bonne chance!*

WIR

3.23 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ B2 02/03 3

Alle Integrale herleiten! • Déduire toutes les intégrals!

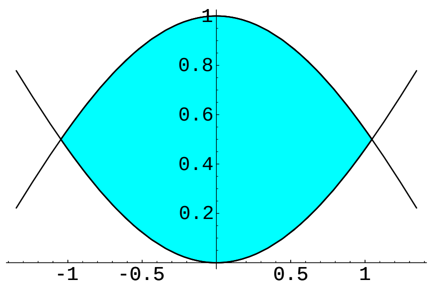
(1)



Die gezeigte Kurve ist eine Parabel durch die Punkte $(-2; 0), (0; 1.5), (2, 0)$.
• *La courbe dans l'image est une parabole par les points ...*

Berechne den gezeigten Flächeninhalt zwischen der x–Achse und der Kurve.
• *Calculer l'aire entre l'axe x et la courbe.*

(2)



Die gezeigten Kurven sind gegeben durch $f_1(x) = \cos(x)$ und $f_2(x) = -\cos(x) + 1$. La courbe dans l'image soit donnée par ...

Berechne den gezeigten Flächeninhalt zwischen den Kurven.
• *Calculer l'aire entre les deux courbes.*

(3) $\int\limits_1^2 (3\,x^4 - 5\,x^3 + 6\,x^2 - 7\,x + 1)\,dx = \,?$

(4) $\int\limits_3^5 2\,x^2\,ln(x)\,dx = \,?$

(5) $\int 2\,x \cdot E^{x^2}\,dx = \,?$

(6) $\int\limits_0^\pi 2\,\sin(3\,x + 4)\,dx = \,?$

(7) $\int\limits_7^8 \frac{1}{(x-3)\cdot(x-4)}\,dx = \,?$

(8) $\int\limits_0^1 x \cdot e^{-x^2}\,dx = \,?$

Viel Glück! • *Bonne chance!*

WIR

3.24 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ A2 03/04 3

Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet! (Die Skizzen gelten als Korrekturhilfen.)

(1) Berechne die Ableitungen und zeige die Herleitung:

(a) $f(x) = 5\,x^4 - 2\,x^3 + 8\,x^2 + 4\,x - 3 \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = ?,\ \ f''(x) = ?$

(b) $f(x) = 5\,x^4\,\cos(10\,x) \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = ?$

(c) $f(x) = \dfrac{5\,x^4}{3\,\cos(x)} \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = ?$

(d) $f(x) = e^{\sin(x)} - ln(\tan(x)) \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = ?$

(2) Berechne die Stammfunktion (unbestimmtes Integral):

(a) $f(x) = 5\,x^4 - 2\,x^3 + 8\,x^2 + 4\,x - 3$

(b) $f(x) = \cos(3x - 8) + 14$

(c) $f(x) = x\,\cos(x)$

(3) f(x)=x (x-1) (x-3)

(a) Berechne die Punkte, in denen die Steigung ($\tan(\alpha)$) des Graphen gleich 0.5 ist.

(b) Berechne die Punkte, in denen die Tangente horizontal verläuft (Extrema).

(c) Berechne das Symmetriezentrum des Graphen.

(4) Mache aus Verständnisgründen jeweils eine Skizze:

(a) $f(x) = 5\,x^4 - 2\,x^3 + 8\,x^2 + 4\,x - 3 \rightsquigarrow \int\limits_0^2 f(x)\,dx = ?$

(b) $\int\limits_0^2 a\,2\,x\,dx = 16 \rightsquigarrow \ a = ?$

(c) $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{2\,x}\,dx = ?$

(d) $\int\limits_0^1 x^2\,dx = \int\limits_0^u x^3\,dx \rightsquigarrow \ u = ?$

Viel Glück!

3.25 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ A2a 04/05 3

Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet! WIR1

(1) Berechne die Ableitungen:

(a) $f(x) = 4\,x^3 - 3\,x + 5 - 6\,x^{-1}$

(b) $f(x) = e^x \cdot \cos(x)$

(c) $f(x) = \dfrac{x^3}{\sin(x)}$

(d) $f(x) = \cos(2\,x^2 + 3\,x)$

(2) Wie gross ist der Steigungswinkel α an der Stelle $x = 2$?

(a) $f(x) = ln(x)$

(b) $f(x) = \sin(2\,x)$

(3) Gegeben ist $f(x) = x \cdot (x-2)\,(x+3)$ über $I = [-3, 2]$.
Berechne die Stelle x, an der $f(x)$ maximal wird.

(4) Gegeben ist $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{2}$ über $I = [0, 2\,\pi]$.
Berechne diejenigen Stellen x, an denen die Steigung von $f(x)$ exakt $\dfrac{1}{5}$ wird.

(5) Gegeben ist eine Funktionskurve über dem Intervall $I = [x_1, x_2]$. Berechne den Inhalt der Fläche zwischen der Kurve und der x–Achse.

(a) $f(x) = (x-1)\,(x+1),\ \ x_1 = -1,\ \ x_2 = 1.$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x^4},\ \ x_1 = 1,\ \ x_2 = \infty.$

(6) Wie gross muss x_2 werden, wenn gilt: $x_1 = 0,\ \ A = \int\limits_{x_1}^{x_2} e^x\,dx = 2$?

Viel Glück!

3.26 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ A2p 04/05 3

Alle Teilaufgaben werden gleich bewertet! WIR1

(1) Berechne die Ableitungen:

(a) $f(x) = 5\,x^4 - 2\,x^3 + 5 - 8\,x^{-2} + 4$

(b) $f(x) = ln(x) \cdot \sin(x)$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2}{3\,\cos(x)}$

(d) $f(x) = \sin(5\,x^3 + 4\,x^2 - 6)$

(2) Wie gross ist der Steigungswinkel α an der Stelle $x = 2$?

(a) $f(x) = e^x + 1$

(b) $f(x) = \cos(3\,x)$

(3) Gegeben ist $f(x) = x \cdot (x-4)\,(x+5)$ über $I = [-5, 4]$.
Berechne die Stelle x, an der $f(x)$ minimal wird.

(4) Gegeben ist $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{4} + 4$ über $I = [0, 2\,\pi]$.
Berechne diejenigen Stellen x, an denen die Steigung von $f(x)$ exakt $\dfrac{2}{11}$ wird.

(5) Gegeben ist eine Funktionskurve über dem Intervall $I = [x_1, x_2]$. Berechne den Inhalt der Fläche zwischen der Kurve und der x–Achse.

(a) $f(x) = 4(x-2)\,(x+2),\;\; x_1 = -2,\;\; x_2 = 2.$

(b) $f(x) = \dfrac{3}{x^6},\;\; x_1 = 1,\;\; x_2 = \infty.$

(6) Wie gross muss x_2 werden, wenn gilt: $x_1 = 1,\;\; A = \int\limits_{x_1}^{x_2} 3\,e^x\,dx = 4$?

Viel Glück!

3.27 Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ B2 01/02 4

---

(1) **(12 Punkte)**

Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ wird um die x–Achse rotiert. Dabei entsteht ein Rotationskörper, der als Säule gedacht ist.

(a) Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers zwischen $x = 1$ und $x = 2$

(b) Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers zwischen $x = 1$ und $x = \infty$

(c) Wir gross muss x_0 sein, damit das Volumen des Rotationskörpers zwischen $x = 1$ und $x = x_0$ gleich $\frac{\pi}{4}$ ist?

• *Le graphe de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ pivote autour de l'axe x. Il se forme un corps de révolution qu'on peut imaginer en tant que colonne.*

(a) Calculer le volume du corps de révolution entre $x = 1$ et $x = 2$

(b) Calculer le volume du corps de révolution entre $x = 1$ et $x = \infty$

(c) Comment ext–ce qu'il faut choisir x_0 afin que le volume du corps de révolution entre $x = 1$ et $x = x_0$ devienne égal à $\frac{\pi}{4}$?

(2) **(12 Punkte)**

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig. Sie werden alle gleich bewertet. Alle Teilschritte der Lösung sind schriftlich auf dem Lösungsblatt festzuhalten.

(a) Integrieren Sie von Hand: $\int_1^{\pi} x \cdot \sin(x)\, dx = ?$

(b) Für welche Werte von $x \in [0, \pi]$ hat die Kurve von $x \cdot \sin(x)$ die Steigung 1?

(c) Differenzieren Sie von Hand: $\frac{d}{d\,x}(x^2 \cdot e^x - e^{x^3}) = ? \qquad x = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = ?$

(d) Suchen Sie von Hand eine Stammfunktion zu: $f(x) = x \cdot \cos(x^2) - \sin(2\,x) + \frac{2}{3\,x^2}$

• *Les problèmes partiels suivants sont indépendants. Ils donnent le même nombre de points. Tous les pas intermédiaires de la solution sont à retenir par écrit sur la feuille de solution.*

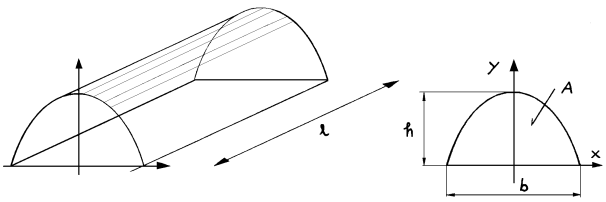
(a) Intégrer à la main: $\int_1^{\pi} x \cdot \sin(x)\, dx = ?$

(b) Pour quelles valeurs de $x \in [0, \pi]$ *la courbe de* $x \cdot \sin(x)$ *a la pente* 1*?*

(c) Différencier à la main: $\dfrac{d}{d\,x}(x^2 \cdot e^x - e^{x^3}) = \,?$ $\qquad x = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = \,?$

(d) Chercher à la main une fonction antidérivée à: $f(x) = x \cdot \cos(x^2) - \sin(2\,x) + \dfrac{2}{3\,x^2}$

(3) **(12 points)**



Die Funktion $f(x) = a\,x^6 + h$ mit $f(0) = h$ und $f(-\frac{b}{2}) = f(\frac{b}{2}) = 0$ beschreibt den Querschnitt eines Tunnels nach nebenstehender Skizze.

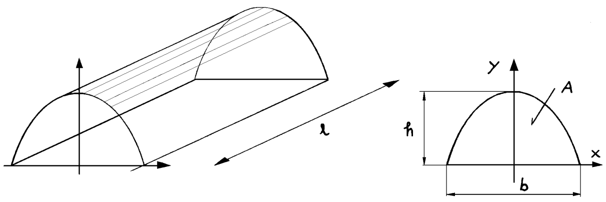
Es ist $h = 4.5\,m$, $b = 8.5\,m$ und $l = 10\,km$.

(a) Berechnen Sie $f(x)$. Erstellen Sie eine genaue Skizze des Tunnelprofils.

(b) Berechnen Sie das auszubrechende Volumen beim Tunnelbau.

(c) Wie ist bei gleichem a die Höhe h zu ändern, damit sich das auszubrechende Volumen verdoppelt? (Achtung: Mit h ändert auch b!)

•



La fonction $f(x) = a\,x^6 + h$ *avec* $f(0) = h$ *et* $f(-\frac{b}{2}) = f(\frac{b}{2}) = 0$ *décrit la coupe transversale d'un tunnel d'après le croquis ci–contre.*

Il est $h = 4.5\,m$, $b = 8.5\,m$ *et* $l = 10\,km$.

(a) Calculer $f(x)$*. Faire une esquisse exacte du profil du tunnel.*

(b) Calculer le volume à enlever lors de la construction du tunnel.

(c) Comment changer la hauteur h*, si* a *reste le même, afin que le volume à enlever soit double? (Attention: Si* h *est changé,* b *est aussi changé!)*

Viel Glück! • *Bonne chance!*

WIR

3.28 Lösungen ◇ Lines pour solutions

Die Lösungen werden bei Gelegenheit integriert, wenn der Autor dafür Zeit haben wird. • *Les solutions seront ajoutées prochainement à l'occasion, si l'auteur aura le temps.*

Lösungen siehe unter den Links: • *Solutions voir les liens:*

http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/Problems.html
(Schema) • *(Schéma)*

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html
(*Mathematica*–Quellencode) • *(Code de source en Mathematica)*

Ende • *Fin*