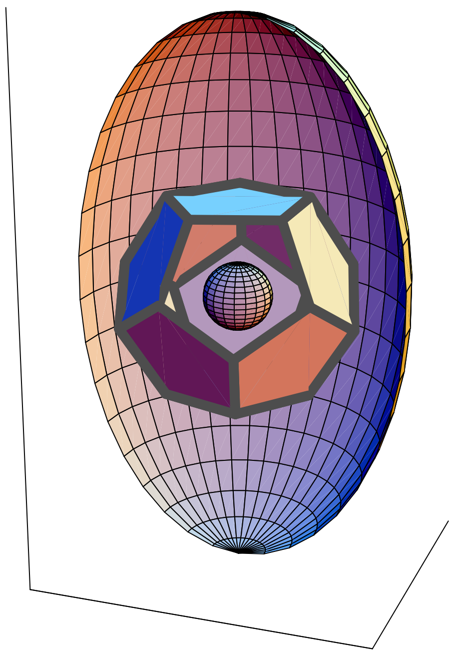
◇ Aufgabenauswahl 3 ◇ Exercices 3 ◇
◇ Übungen Analysis ◇
◇ Exercices en analyse ◇
◇ Diplom ◇ Diplôme ◇



von • *de*

Rolf Wirz

Ingenieurschule Biel — HTA-Biel/BFH — HTI/BFH bis • *jusqu'à* 2005

Ausgabe vom 13. Juli 2007, Version 1.0.0 / d/f

Mit klickbaren Links • *Avec des lines cliquables*

WIR1 /2007/LaTex/BuchUebAnaDipl.TEX

Produziert mit PCTeX unter Win XP. Einige Graphiken sind auch mit *Mathematica* entstanden.

• *Quelques représentations ont été produites avec Mathematica.*

Der Mensch hat dreierlei Wege, um zu lernen:
Erstens durch Nachdenken, das ist der edelste;
zweitens durch Nachahmen, das ist der leichteste;
drittens durch Erfahrung, das ist der bitterste.

(Nach Konfuzius)

• *L'homme a trois occasions pour apprendre:*
Premièrement par réflexion, c'est la plus noble;
deuxièmement par l'imitation, c'est la plus facile;
troisièmement par l'expérience, c'est la plus dure.

(Selon Confucius)

Aktuelle Adresse des Autors (2007):

Rolf W. Wirz-Depierre
Prof. für Math.
Berner Fachhochschule (BFH), Dep. AHB und TI
Pestalozzistrasse 20
Büro B112 CH–3400 Burgdorf/BE
Tel. ++41 (0)34 426 42 30 / intern 230
Mail: Siehe http://rowicus.ch/Wir/indexTotalF.html unter „Koordinaten von R.W.“
(Alt: Ingenieurschule Biel (HTL), Ing'schule des Kt. Bern, Fachhochschule ab 1997) // BFH HTA Biel // BFH HT/

Inhaltsverzeichnis • Table des matières

0.1 Einführung — Introduction

0.1.1 Gegenstand — Sujet

In dieser Sammlung ist eine Auswahl von Aufgaben zusammengefasst, welche in den letzten Jahren vor dem Wechsel vom Diplomstudium zum Bachelor–Studium verwendet worden sind.
• *Dans cette collection, un choix de problèmes est rassemblé. Il s'agit de problèmes qui ont été utilisés dans les dernières années avant le changement des études du diplôme au bachelor.*

Klickbare Links zu Skripten: • *Liens cliquables pour les cours:*

http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html (Skript–Download) • *Download cours*

Die Lösungen zu den Aufgaben sind mit *Mathematica* produziert worden. Aus Kapazitätsgründen ist jeweils nur der Quellencode abgespeichert, aus dem man mit Hilfe von *Mathematica* den Output sofort wieder produzieren kann. In den vielen Jahren, in denen der Autor dieses Verfahren anwendet, ist so eine riesige Sammlung von Aufgabenlösungen entstanden, siehe z.B. unter dem Link:
• *Les solutions aux problèmes ont été produites avec Mathematica. Pour raisons de capacité, seulement le code de source est mis à disposition. A l'aide de ce code on peut produire tout de suite le „output“ à l'aide de Mathematica. Pendant les nombreuses années durant lesquelles l'auteur a utilisé cette méthode, une grande collection de solutions de devoirs est née, voir par exemple sous le lien:*

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html.

Die Lösungen sind nach dem Schema der in Tabellenform abgespeicherten Übungen und Tests anbeordnet, siehe unter dem Link:
• *Les solutions sont mises à disposition d'après le schématisme utilisé dans le tableau des exercices et tests qu'on peut trouver sous le lien:*

http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/Problems.html

0.1.2 Gliederung — Disposition

---

(1) Übungen in Algebra und Geometrie • *Exercices en algèbre et géométrie*

(2) Tests in Algebra und Geometrie • *Tests en algèbre et géométrie*

(3) Übungen in Analysis • *Exercices en analyse*

(4) Tests in Analysis • *Tests en analyse*

(5) Übungen in Mathematik II • *Exercices en mathématiques 2*

(6) Tests in Mathematik II • *Tests en mathématiques 2*

Kapitel • Chapitre 1

Analysis Elektrotechnik — Analyse électrotechnique

1.1 Inhalt — Les matières

---

(1) Übungen 1. Semester • *Exercices semestre 1*

(2) Übungen 2. Semester • *Exercices semestre 2*

(3) Lösungen siehe unter den Links: • *Solutions voir les liens:*

`http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/Problems.html`
(Schema) • *(Schéma)*

`http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html`
(*Mathematica*–Quellencode) • *(Code de source en Mathematica)*

(4) Vordiplome siehe unter Link: • *Diplômes préalables voir le lien:*

`http://rowicus.ch/Wir/VDs/VDs.html`

1.2 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ E1 ◇ I / 1

---

(1) (a) Ursprung der Mathematik?
• *Origine des mathématiques?*

(b) Wie $\mathbb{Q}$ nummerieren?
• *Comment numéroter* $\mathbb{Q}$*?*

(2) Zeigen: • *Montrer:*

(a) In einem Dreieck ist die Winkelsumme immer 180°.
• *Dans un triangle la somme des angles est toujours* 180°*.*

(b) Satz von Pythagoras.
• *Théorème de Pythagore.*

(c) Satz von Thales.
• *Théorème de Thales.*

Wieso muss man die mathematischen Sätze beweisen?
• *Pourquoi est–ce qu'il faut prouver les théorèmes mathématiques?*

(3) Bearbeite den Stoff der Lektionen (Verbesserungen . . .).
• *Elaborer la matière des leçons (corrections . . .).*

Organisation, Planung:

(a) Planung organisieren! (Strategie, Prinzipien, Tandem)

(b) Einarbeitung in die Lerntechnik

(c) A4-Seite mit den wichtigsten 7 Punkten abgeben.

• *Organisation, projets:*

(a) • *Organiser la planification! (Stratégie, principes, tandem)*

(b) • *Se mettre au courant concernant la "technique d'apprendre".*

(c) • *Livrer une page A4 avec les 7 points les plus importants.*

(4) Rechner-Probleme lösen, falls nötig beschaffen:
• *Résoudre les problèmes avec les ordinateurs, procurer si nécessaire:*

(a) Account (Schule) • *Account (école)*

(b) Mathematica–Zugang • *Possibilité d'utiliser Mathematica*

(c) Mathematica–Kurs (DOWNLOAD, WIR) • *Cours de Mathematica (DOWNLOAD, WIR)*

(d) Eigener Rechner, Mathematica, Zip, Internet • *Ordinateur privé, Mathematica, Zip, Internet*

(e) Taschenrechner. • *Calculatrice de poche.*

(5) Reglemente, Literatur: • *Règlements:*

(a) Schulreglemente studieren, Weisungen, Führer • *Etudier les règlements de l'école, directives , guides*

(b) Literatur (Lehrbuch, Formeln) beschaffen • *Procurer la littérature (livres de théorie, formules).*

(6) Porte–Feuille: • *Porte–feuille:*

(a) Eigene Formelsammlung, Zusammenfassungen

(b) Planungen, Lerntechnik: Strategien, Prinzipien, Schemata, wichtige Dinge

(c) Übungen

(d) Prüfungen, Verbesserungen

(e) Mathematica–Arbeiten

(f) Journal

(a) • *Collection de formules, abrégé*

(b) • *Planification, technique de travail: Stratégies, principes, schémas, choses importants*

(c) • *Excercices*

(d) • *Tests, corrigés*

(e) • *Travaux de Mathematica*

(f) • *Journal*

Benotet werden: • *On donne des notes pour:*

(a) Tests

(b) Porte–Feuille, Arbeiten, Mitarbeit

(a) • *Tests*

(b) • *Porte–feuille, traveaux, travail pendant la leçon*

Abgabe der Uebungen: Woche später. • *Rendre les excercices: une semaine plus tard.*

(7) (a)

$$x = 3 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{3}{3 + \ldots}}}} := 3 + \left.\frac{3}{|\,3}\right| + \left.\frac{3}{|\,3}\right| + \left.\frac{3}{|\,3}\right| + \left.\frac{3}{|\,3}\right| + \cdots = ??, \quad x \in \mathbb{Q}??$$

(b) $2 + 6 + 10 + 14 + 18 + 22 + \ldots + 2222 = ?$

(c) $x + y \geq 1, \;\; x - y \geq 2, \;\; \mathbb{L} \; = ?$ (Zeichnung • *Dessin*)

(d) Zeigen: • *Montrer:* $\quad x, y \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; ||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$

(e) Erklären: • *Expliquer:* $\quad 3 : 4 : 5 : 6 \stackrel{?}{=} 2 : 3 : 4 : x$

(f) $\sin(x) = x + \cos(x), \;\; x = ?$

WIR

1.3 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ E1 ◇ I / 2

---

(1) Stelle Plots her: • *Fabriquer des plots:*

(a) $f(x) = 3\,\sin(\cos(2\,x^2+1)+x)$

(b) $f(x) = (\sin(x))^{\cos(x)}$

(c) $f(x) = ln(\dfrac{x^2+2}{x^4+2}) - x^2$

(d) $f(x) = sgn(x^2 \cdot \sin(x - \dfrac{1}{x}))$

(e) $f(x) = x^4 - 2\,x + 1$

(f) $f(x) = [10\,\sin(x)]$

(g) $f(x) = x + [\dfrac{1}{x} + x^2],\;\; D_f = [1, 10]$

(h) $f(x) = x^x,\;\; D_f = [1, \infty)$

(2) Zeichne in Polarkoordinaten: • *Dessiner en coordonnées polaires:*

(a) $r(\varphi) = 2 \cdot \cos(2\,\varphi)$

(b) $r(\varphi) = 2 \cdot \cos(2\,\varphi + 1)$

(c) $r(\varphi) = 4 + 2 \cdot \sin(4\,\varphi) + \cos(16\,\varphi)$

(d) $r(\varphi) = 1 + \dfrac{\varphi}{2} - \dfrac{\varphi^2}{4},\;\; \varphi \in [0, 2\,\pi)$

(3) Löse graphisch:
• *Résoudre graphiquement:*

$$|x-y| \leq |x+y| - x \;\wedge\; 10 \geq ||x-y| - x| \cdot |x+y|$$

1.4 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ E1 ◇ I / 3

(1) Herleitung der Lösungsformel von $a\,x^2 + b\,x + c = 0$? (Koordinatensystem verschieben!)
• *Déduction de la formule des solutions de* $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ *? (Déplacer le système de coordonnées!)*

(2) Studiere die Beschränktheit und Monotonie der folgenden Funktionen:
• *Etudier si les fonctions suivantes sont bornées et/ou monotones:*

(a) $f(x) = e^{\cos(x)}$

(b) $f(x) = ln(\frac{x^2}{x^2+1})$

(c)
$$f(x) \;=\; \begin{cases} -\sin(x) - 2 & x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \\ +\sin(x) & x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ -\sin(x) + 2 & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

(d) $f(x) = e^{-x^2}$

(3) (a) Schreibe nach dem Hornerschema: • *Ecrire selon le schéma de Horner:*
$p(x) = 4\,x^5 - 3\,x^4 + x^3 + 2\,x^2 - 5\,x + 6$

(b) Zerlege in Linearfaktoren: • *Décomposer en facteurs linéaires:*
$p(x) = 4 \cdot (x-2)\,(x^2 - 2\,x - 5)$

(c) Suche die Polstellen: • *Chercher les places de pôles:*
$f(x) = \dfrac{3\,x - 6}{4 \cdot (x-2)\,(x^2 - 2\,x - 5)}$

(4) Skizziere und berechne f^{-1} (falls möglich):
• *Esquisse de* f^{-1} *et calculer* f^{-1}*, si possible:*

(a) $f(x) = e^{-x^2},\; x \in D_f = [0, \infty)$

(b) $f(x) = \dfrac{3}{x-2},\; x \in D_f = [-\infty, 2)$

(c) Suche die Polstellen: • *Chercher les places de pôles:*
$f(x) = \dfrac{3\,x - 6}{4 \cdot (x-2)\,(x^2 - 2\,x - 5)}$

(5) Skizziere in Polarkoordinaten:
• *Esquisse dans le système de coordonnées polaires:*

(a) $r(\varphi) = \cos(2\,\varphi) + 2$

(b) $r(\varphi) = \cos(\frac{\varphi}{2})$

(c) $r(\varphi) = \cos(4\,\varphi + \frac{\varphi}{2})$

WIR

1.5 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ E1 ◇ I / 4

---

(1) Berechne numerisch die ersten 5 Glieder:
• *Calculer numériquement les premiers 5 termes:*

(a) $\langle a_n \rangle = \langle (1+\frac{1}{n})^n \rangle$

(b) $\langle a_n \rangle = \langle (-1)^n \cdot \frac{n!}{n^n} \rangle$

(2) Bestimme das allgemeine Gleid a_n:
• *Calculer le terme général a_n:*

(a) $[\frac{1}{6}, \frac{1}{20}, \frac{1}{42}, \frac{1}{72}, \ldots]$

(b) $[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{17}}, \ldots]$

(3) (a) Untersuche Monotonie und Beschränktheit:
• *Etudier si les suites sont monotones ou bornées:*
$\langle \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \rangle$

(b) $\langle \frac{n^2+1}{n} \rangle$

(4) Untersuche die Konvergenz:
• *Etudier la convergence:*

(a) $\langle \sqrt[n]{2} - 1 \rangle$

(b) $\langle \frac{4}{n^2+2} \rangle$

(c) $\langle \sum_{k=0}^{n} 5 \cdot (\frac{1}{3})^{k-1} \rangle$

(d) $\langle \frac{n+2}{n^2+3\,n+2} \rangle$

(5) (a) „Berechne“ den Grenzwert:
• *”Calculer” la valeur limite:*
$\langle \frac{(\cos(n)) \cdot (\sin(n))}{n} + \frac{n}{n+1} + \frac{n}{n^2+n} + \frac{n}{n^2+1} \rangle$

(b) Schreibe als gemeinen Bruch:
• *Ecrire comme fraction commune:*

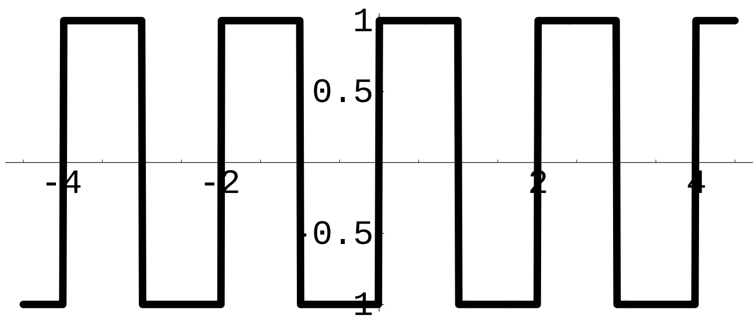
$$3.04\overline{04}\ldots$$

WIR

1.6 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ E1 ◇ I / 5

(1) Mache eine Zusammenfassung der verschiedenen Funktionstypen, die Du kennst.
• *Faire un résumé concernant les différents types de fonction qui sont connues maintenant.*

(2) Zeichne die folgende Funktion mit Hilfe eines Taschenrechners oder mit *Mathematica*:
• *Dessiner la fonction suivante à l'aide d'une calculatrice de poche ou à l'aide de Mathematica:*



(Das ist ein *Mathematica*–Output.) • *(Ce dessin a été fait avec Mathematica.)*

1.7 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ E1 ◇ I / 6

---

(1) Arbeite weiter an der Einführung in *Mathematica*! Repetiere zudem den Stoff für den nächsten Test!
• *Continuer le travail à l'introduction dans Mathematica! En plus répéter la matière pour le test prochain*

http://rowicus.ch/Wir/MathemDF/Mathem.html

1.8 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ E1 ◇ I / 7

---

(1) Skizze des Graphen? • *Esquisse de la graphique?*

(a) $f_1(x) = \sinh(x),\ \ f_2(x) = \cosh(x),\ \ f_3(x) = \tanh(x),\ \ f_4(x) = \coth(x)$

(b) $\varphi_1(x) = 0.5^x,\ \ \varphi_2(x) = 1^x,\ \ \varphi_3(x) = 2^x,\ \ \varphi_3(x) = e^x$

(c) $\eta_1(x) = 0.5^{-x},\ \ \eta_2(x) = 1^{-x},\ \ \eta_3(x) = 2^{-x},\ \ \eta_4(x) = e^{-x}$

(d) $\psi_1(x) = \log_{0.5}(x),\ \ \psi_2(x) = \log_2(x),\ \ \psi_3(x) = \log_e(x) = ln(x)$

(e) $phi(x) = x^x$

(f) $\xi(x) = x + \sin(x)$

(2) Skizze des Graphen? • *Esquisse de la graphique?*

(a) $h_1(x) = \sinh(\sin(x))$

(b) $h_2(x) = \sin(\sinh(x))$

(c) $h_3(x) = \sinh(\cos(x))$

(d) $h_4(x) = \sinh(\arcsin(x))$

(3)

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}$$

Berechne eine numerische Näherung von x.
• *Calculer une approximation numérique de x.*

(4) Beurteile die Konvergenz und bestimme, falls möglich, den Grenzwert:
• *Evaluer, juger la convercence et calculer la valeur limite, si possible:*

(a) $a_n = \dfrac{\cos(n) + n - 2\,n^2}{n^2 + n}$

(b) $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{n} \cdot (\dfrac{2}{3})^k$

(5) Bestimme, falls möglich, den Grenzwert:
• *Evaluer la valeur limite, si possible:*

(a) $\lim\limits_{n\to 0} \dfrac{\tan(x)}{x}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{x^2 - x}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3\,x^2 + 2\,x}{4\,x^2 + 3\,x}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{ln(x)}{x^2}$
Hinweis: Skizziere $f(x) = ln(x)$ und $g(x) = x^2 \ldots$
• Indication: *Esquisse de* $f(x) = ln(x)$ *et de* $g(x) = x^2 \ldots$

(6) Sei • *Soit* $\lim\limits_{x\downarrow 0} f(x) := \lim\limits_{x\to 0,\ \ x\in(\mathbb{R}^+)} f(x), \lim\limits_{x\uparrow 0} f(x) := \lim\limits_{x\to 0,\ \ x\in(\mathbb{R}^-)} f(x)$

(a) $\lim\limits_{x\downarrow 0} \dfrac{|x|}{x} = \, ?$

(b) $\lim\limits_{x\uparrow 0} \dfrac{|x|}{x} = \, ?$

(c)

(7) Suche in den Aufgaben 2 und 3 die Definitionslücken der gegebenen Funktionen. Wie könnte man gegebenenfalls die Lücken sinnvoll stopfen?
• *Chercher dans les problèmes 2 et 3 les places, où la fonction donnée n'est pas définie. Comment est–ce qu'on pourrait définir ces fonctions de manière raisonnable?*

1.9 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ E1 ◇ I / 8

---

(1) $f(x) = e^{(x^2-\cos(2\,x))} \leadsto$ f gerade/ ungerade? • *f paire/ impaire?*

(2) $f(x) = y = e^{-x^2}$

(a) $x \geq 0 \leadsto$ $f^{-1}(x) = ?$ Skizze! • *Esquisse!*

(b) $f^{-1}(0.5) \approx ?$

(3) $\log(x^2) + \log(\dfrac{1}{x}) - \log(x) = ?$

(4) $\sin(x + \dfrac{\pi}{3}) = \sin(x) \cdot (?) + \cos(x) \cdot (?)$

(a) $\sin(x + \dfrac{\pi}{3}) = \sin(x) \cdot (?) + \cos(x) \cdot (?)$

(b) $\tan(x + \dfrac{\pi}{3}) = \ldots ?\ \ldots$

(5) $r(\varphi) = 1 + \cos(\dfrac{\varphi}{2}) \leadsto$ Polar. . . Skizze! • *Polaire. . . esquisse!*

(6) $2 \cdot 3^x = 5^x \leadsto$ $x = ?$

(7) $0.367\overline{367}\ldots = \dfrac{p}{q},\ \ p, q \in \mathbb{N} \leadsto$ $p, q = ?$

(8) Arbeite weiter an den *Mathematica*–Files!
• *Continuer à travailler avec les fichiers de Mathematica.*

(9) Bearbeite die münglich angegebenen Stellen im Script (auch Vorausarbeit — die nächste Prüfung kommt bestimmt. . .).
• *Elaborer les positions indiquées oralement dans le script. (Aussi travailler à l'avance — le prochain examen va venir certainement. . .).*

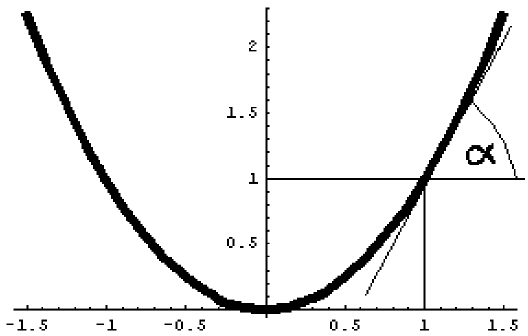
(10) Falls es noch Prüfungsaufgaben zu verbessern gibt: Mache die Verbesserungen.
• *S'il y a à faire des corrigées de problèmes d'examen: Il faut le faire maintenant.*

1.10 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ E1 ◇ I / 9

---

(1) $f(x) = x^3 \leadsto \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = ?$

(2) $f(x) = x^2,\ x_0 = 1 \leadsto \alpha(x_0) = ?$

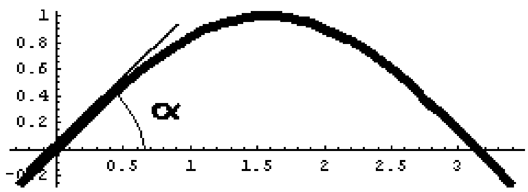


(3) $f(x) = k_1 \cdot x^2 + k_2 \leadsto$ (a) $f\,'(x) = ?$

(b) $f\,'(x_0) = \tan(\alpha(x_0)) = 3,\ x_0 = 1,\ k_1 = ?$

(4) (a) $f(x) = \sin(x),\ f\,'(x_0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = ?$

(b) $f(x) = \sin(x),\ \alpha = ?$



1.11 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇E1 ◇ I / 10

---

(1) Berechne die Ableitung! • *Calculer la dérivée!*

(a) $f_1(x) = x^3 + 4\,x^2 - x + 5$
$f_2(x) = 2\,x^5 + 7\,x^3 + 3\,x - 8$
$f_3(x) = f_1(x)\, f_2(x)$
$f_4(x) = f_1(x) + f_2(x)$

(b) $f_1(x) = \cos(x)^3$
$f_2(x) = \cos(x)^n$
$f_3(x) = x^2\, \cos(x)$

(c) $f_1(x) = \dfrac{\cos(x)}{x^2}$
$f_2(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$
$f_3(x) = \dfrac{x^2 + \cos(x)}{x\, \sin(x)}$

(d) $f_1(x) = \sin(\cos(x))$
$f_2(x) = \sin(\cos^2(x))$
$f_3(x) = \sin(3\,x^2 + 4\,x - 5)$
$f_4(x) = \sin(\dfrac{1}{x^2 - 2\,x + 3})$

(2) (a) $f(x) = x^3 + 4\,x^2 - x + 5,\;\; g(x) = 2\,x^5 + 7\,x^3 + 3\,x - 8$
Berechne den Steigungswinkel der Tangente an f und an g für $x = 1$.
• *Calculer l'angle entre la tangente et l'axe x pour f et pour g à la place* $x = 1$.

(b) $f(x) = x^3 + 4\,x^2 - x + 5$
Berechne die Stellen x, wo die Tangentensteigung gleich 2 ist.
• *Calculer les places x, où la pente de la tangente est* 2.

(c) $g(x) = a\,x^3 + 4\,x^2 - x + 5$
Wie gross muss a sein, damit die Tangentensteigung für $x = 1$ gerade 2 ist?
• *Quelle est la valeur de a, si la pente de la tangente est* 2 *pour* $x = 1$*?*

1.12 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇E1 ◇ I / 11

---

(1) Berechne die Ableitung! • *Calculer la dérivée!*

(a) $f_1(x) = \sin(\frac{1}{x})$

(b) $f_2(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

(c) $f_3(x) = \sin(\cos(\sin(x)))$

(d) $f_4(x) = \sin(\omega\, x^2 + \varphi)$

(e) $f_5(x) = \frac{e^x}{ln(x)}$

(f) $f_6(x) = x^2 \cdot \sin(x) - x \cdot \sin^2(x)$

(g) $f_7(x) = \cosh(x) \cdot \sinh(x)$

(h) $f_8(x) = \frac{1}{\sinh(x)}$

(i) $f_9(x) = 3\, x^3 - 2\, x^2 - 5$

(j) $f_{10}(x) = \sin^3(x) + \sin^2(x) + \sin(x) + 1$

(2) (a) $f_9(x) = 3\, x^3 - 2\, x^2 - 5,\ \ f_9'(x_0) = 4,\ \ x_0 = \,?$

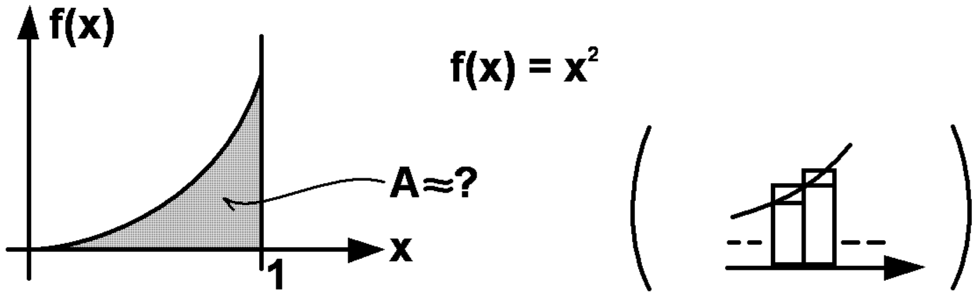
(b) $f_{11}(x) = \sin(x),\ \ f'(x_0) = \frac{1}{2},\ \ x_0 = \,?$

(3) $f_{11}(x) = e^x,\ \ f_{11}(x) = e^{-x} + 2$
Der Schnittpunkt der beiden Funktionskurven liegt bei x_0. Der Schnittwinkel der Tangenten in diesem Punkt ist α.
• *Le point d'intersection dans ce point est x_0. L'angle entre les tangentes dans ce point est α.*

(a) $x_0 = \,?$

(b) $\alpha = \,?$

1.13 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇E1 ◇ I / 12



(1)

(2) (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\,\sin^2(x)}{(e^x-1)^2} = ?$

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{ln(x)}{1-\cos(x)} = ?$

(c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^x - ln(x)}{x^4 - x^3} = ?$

(d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{3-x} = ?$

(e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos(x)-\cos(\frac{\pi}{4})}{\sin(x)-\sin(\frac{\pi}{4})} = ?$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = ?$

(g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[2]{x}-1} = ?$

1.14 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ E1 ◇ I / 12z

---

(1) $$f(x) = \frac{x^2 - 4}{(x-1)^2}$$

(a) Berechne Minima, Maxima und Wendepunkte.
• *Calculer les minimums, les maximums et les points d'inflexion.*

(b) Berechne Asymptoten und Pole.
• *Calculer les asymptotes et les pôles.*

(2) $$f(x) = x^2,\ \ P = P(1/-8)$$

t_P sei die Tangente an den Graphen durch P.
• *Soit t_P la tangente au graphe qui passe par P.*

Wo schneidet die Tangente den Graphen?
• *Point d'intersection du graphe et de la tangente?*

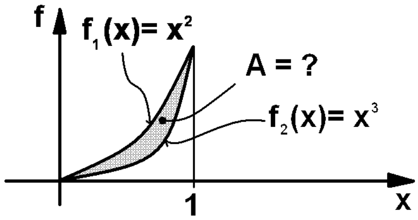
(3) $$f(x) = x^4 - 12\,x^3 + 46\,x^2 - 60\,x + 25$$

Berechne Minima, Maxima und Wendepunkte.
• *Calculer les minimums, les maximums et les points d'inflexion.*

(4) Berechne den Zylinder mit maximalem Volumen, den man einem Kreiskegel mit der Höhe 12 und dem Grundkreis–Radius 4 einschreiben kann.
• *Calculer le cylindre au volume maximal, qu'on peut inscrire dans une cône de hauteur 12 et au cercle de base de rayon 4.*

(5) Sei • *Soit* $f(x) = \sin(x),\ \ D_f = [0, \pi]$. Zwischen der x–Achse und dem Graphen wird ein achsenparalleles Rechteck maximaler Grösse eingeschrieben. Berechne dieses Rechteck.
• *Entre l'axe x et le graphe on inscrit un rectangle parallèle à l'axe x de surface maximale. Calculer ce rectangle.*

1.15 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇E1 ◇ I / 13



(1)

(2) (a) $f(x) = x \cdot \sin(x^2)$ $\qquad F(x) = ?$

(b) $f(x) = \cosh(x)$ $\qquad F(x) = ?$

(c) $f(x) = -8\,x^3 + 4\,x^2 - 3\,x + 1 - \dfrac{2}{x}$ $\qquad F(x) = ?$

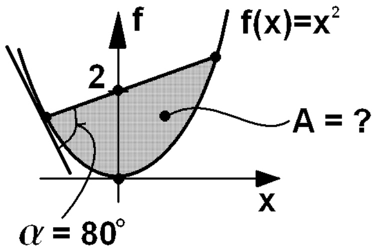
(d) $f(x) = \sin^2(4\,x - 7) + \cos^2(4\,x - 7)$ $\qquad F(x) = ?$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ $\qquad F(x) = ?$

(f) $f(x) = \cos(\omega\,x + \varphi)$ $\qquad F(x) = ?$

(g) $f(x) = e^{4\,x-3} - 2\,\dfrac{ln(4\,x + 3)}{x + \frac{3}{4}}$ $\qquad F(x) = ?$

(h) $f(x) = \dfrac{1}{2\,x - 3} - 10\,x^{20} + x^{40}$ $\qquad F(x) = ?$



1.16 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇E1 ◇ I / 14

---

(1) $\int\limits_3^t x^5\,dx = F(t)$ $\qquad$ $F(t) = 10 \;\Rightarrow\; t = ?$

(2) $\int\limits_4^6 \frac{1}{2\,x+1}\,dx = ?$

(3) $\int\limits_0^\pi x^2 \cdot \sin(x)\,dx = ?$

(4) $\int\limits_2^4 \frac{1}{4\,x^2-1}\,dx = ?$

(5) $\int\limits_{-4}^4 x^5\,\cos(x)\,dx = ?$

(6) $\int x^2\,\cos(4\,x^3+5)\,dx = ?$

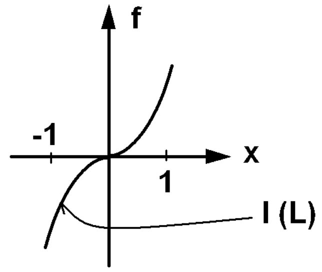
(7) $\int\limits_0^\pi \cos(x) \cdot e^{\sin(x)}\,dx = ?$

1.17 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇E1 ◇ I / 15

(1) $f(x) = \sinh(x)$

$I = [-1, 1]$

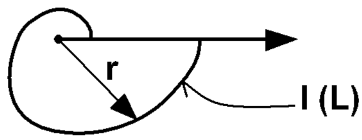
$l = ?$



(2) $r = r(\varphi) = e^{\varphi}$

$\varphi \in [0, 2\,\pi]$

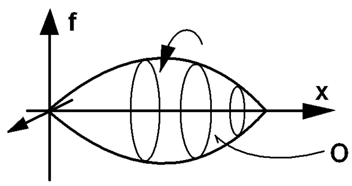
$l = ?$



(3) $f(x) = \sin(x)$

$x \in [0, \pi]$

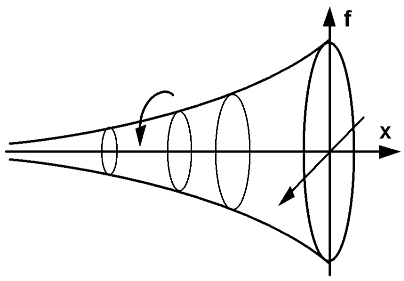
$O = ? \qquad V = ?$



(4) $f(x) = e^x$

$I = (-\infty, 0]$

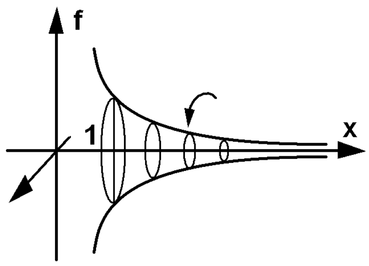
$O = ? \qquad V = ?$



(5) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$I = [1, \infty)$

$O = ? \qquad V = ?$



1.18 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇E1 ◇ I / 16

---

(1) Arbeite an der Einführung in *Mathematica*! Repetiere zudem den Stoff für den nächsten Test!
• *Travailler à l'introduction dans Mathematica! En plus répéter la matière pour le test prochain*

http://rowicus.ch/Wir/MathemDF/Mathem.html

1.19 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇E1 ◇ II / 1

---

(1) Programmiere mit Deinem persönlichen Rechner Verfahren für:
• *Programmer pour ta calculatrice personnelle des méthodes pour:*

(a) Numerische Differentiation. • *Différentiation numérique.*

(b) Numerische Integration. • *Intégration numérique.*

(c) Numerische Nullstellenberechnung.
• *Calculer numériquement les zéros d'une fonction.*

(d) Berechnung von Polynomen durch gegebene Stützstellen.
• *Calculer un polynômes dont le graphe passe par une série de points donnés.*

Rechne je einige selbstgewählte Beispiele und vergleiche die Resultate mit den Resultaten von Mathematica.
• *Calculer quelques exemples que tu as choisis toi–même et comparer les résultats avec les résultats obtenus à l'aide de Mathematica.*

1.20 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇E1 ◇ II / 2

Untersuche die Konvergenz:
• *Examiner la convergence:*

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{k-1}}$

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$

(3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 - 2\,k}{k^6 + k^4 + k^2 + 1}$

(4) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,(k+1)}$

(5) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k\,(\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2})$

(6) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)}{k^3}$

(7) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^k}$

(8) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!}$

(9) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2-(-1)^k}{4^k}$

1.21 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇E1 ◇ II / 3

---

(1) Wo konvergiert die folgende Reihe gleichmässig? Wo konvergiert sie absolut?
• *Où est-ce que la série suivante converge de façon uniforme? Où est-ce qu'elle converge de façon absolue?*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n \cdot x)}{n^k}, \;\; k > 1$$

(2) $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n \cdot x)}{n}$$

Suche Punkte, an denen die Reihe divergiert und Punkte, an denen die Reihe konvergiert.
• *Chercher des points où la série diverge et points, où la série converge.*

(3) $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n \cdot x)$$

Untersuche diese Reihe mit dem Rechner.
• *Examiner cette série à l'aide de la calculatrice.*

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^2}$$

(c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$$

(d) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2^n + 1)}$$

(e) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n!}}$$

1.22 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇E1 ◇ II / 4

---

(1) Arbeite an der Einführung in *Mathematica*! Repetiere zudem den Stoff für den nächsten Test!
• *Travailler à l'introduction dans Mathematica! En plus répéter la matière pour le test prochain*

http://rowicus.ch/Wir/MathemDF/Mathem.html

1.23 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇E1 ◇ II / 5

---

(1) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$

(a) Potenzreihe von f? • *Série de puissances de f ?*

(b) $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{10} a_k\, x^k + R_{10},\ \ x \in [-\pi, \pi] \rightsquigarrow\ |R_{10}| \leq\ ?$

(2) $f(x) = \int\limits_0^x \frac{e^t - 1}{t}\, dt$

(a) Potenzreihe von f? • *Série de puissances de f ?*

(b) Konvergenzradius = ? • *Rayon de convergence = ?*

(c) $f(1) \approx\ ?$

1.24 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇E1 ◇ II / 6

---

(1) $f_1(x,y) = \tan(\sin(x+y)) - \sin(\tan(x \cdot y)),\ \ (x,y) \in [-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, +\sqrt{\frac{\pi}{2}}] \times [-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, +\sqrt{\frac{\pi}{2}}]$

$\rightsquigarrow$ Plot?

(2) (a) Wo ist $f_1(x,y)$ stetig? • *Où est–ce que $f_1(x,y)$ est continue?*

(b) $f_2(x,y) = \dfrac{x \cdot y - x}{x^2 + y^3}$

Wo ist $f_2(x,y)$ stetig? • *Où est–ce que $f_2(x,y)$ est continue?*

(3) $f_3(x,y) = e^{(x+y)} - \sin(x^2) + ln(x \cdot y)$

Berechne alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 3.
• *Calculer toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre* 3.

(4) $f_4(x,y) = e^{-(x+y)},\ \ (x_0, y_0) = (1, 2)$

Berechne die Tangentialebene Φ für (x_0, y_0). Wo schneidet Φ die z–Achse?
• *Calculer le plan tangentiel Φ pour (x_0, y_0). Où est–ce que Φ a un point d'intersection avec l'axe z?*

1.25 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇E1 ◇ II / 7

---

(1) Arbeite weiter an der Einführung in *Mathematica*! Repetiere zudem den Stoff für den nächsten Test!
• *Continuer le travail à l'introduction dans Mathematica! En plus répéter la matière pour le test prochain*

(2)

1.26 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇E1 ◇ II / 8

---

(1) $$f_1(x,y) = e^{\sin(x+y)},\ \ f_2(x,y) = x^2 + x\,y - 3\,y$$
$$P_1 = P_1(0/0),\ \ P_2 = P_2(2/1)$$

(a) Bestimme das totale Differential von f_1 und f_2 in $P_1(x/y)$ und $P_2(x/y)$.
• *Calculer la différentielle totale de f_1 et f_2 à $P_1(x/y)$ et $P_2(x/y)$.*

(b) Bestimme die Tangentialebenen Φ_1 und Φ_2 an f_1 und f_2 in P_2. Berechne davon die Achsenabschnittspunkte.
• *Calculer les plans tangentiels Φ_1 et Φ_2 pour f_1 et f_2 à P_2. Calculer les points d'intersection avec les axes.*

(c) Bestimme $grad f_1$ und $grad f_2$ in P_1 und P_2.
• *Calculer* $\text{grad} f_1$ *et* $\text{grad} f_2$ *à P_1 et P_2.*

(d) Zeichne für P_2 $grad f_1$ und $grad f_2$ in Niveaulinienkarte ein.
• *Dessiner* $\text{grad} f_1$ *et* $\text{grad} f_2$ *pour P_2 dans la carte de ligne de niveau.*

(e) Bestimme die Richtungsableitungen für f_1 und f_2 in P_2 für $\alpha = \frac{\pi}{4}$.
• *Calculer les dérivées suivant une direction pour f_1 et f_2 à P_2 pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$.*

(f) Untersuche die Stellen, an denen $grad f_1 = \vec{0}$ und $grad f_2 = \vec{0}$ ist. Wie verhält sich dort f_1 und f_2?
• *Examine les places où les équations $grad f_1 = \vec{0}$ et $grad f_2 = \vec{0}$ sont valables. Comment f_1 et f_2 s'y comportent–elles?*

1.27 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇E1 ◇ II / 9

---

(1) $$f(x,y) = 3\,x^4 - 2\,x^3\,y + 2\,x\,y^2 - 4\,x + y + 1$$

(a) Minimum, Maximum von f? • *Minimum, maximum de f?*

(b) $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -4\,\sin t \end{pmatrix}$
$\rightsquigarrow$ Minimum, Maximum von $f(x(t), y(t))$? • *Minimum, maximum de $f(x(t), y(t))$?*

(c) $\vec{w}(t) = \begin{pmatrix} r \cdot e^t \\ r^3 - t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(r,t) \\ y(r,t) \end{pmatrix}$
$\rightsquigarrow\ f(x,y) = f(x(r,t), y(r,t)) := F(r,t) \ \Rightarrow\ F'_r = ?,\ F'_t = ?$

(2) $f(x,y,z) = e^{x^2 - y^2 + z^2} \cdot (x^2 + y + z)$
$\rightsquigarrow$ Minimum, Maximum von f? • *Minimum, maximum de f?*

1.28 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ E1 ◇ II / 10

---

(1) Newton–Methode: • *Méthode de Newton:*

Sei • *Soit* $x, y \geq 0$

Löse: • *Résoudre:* $\left| \begin{array}{lcl} \cos(x \cdot y) & = & x \\ e^y & = & x - y + 3 \end{array} \right|$

1.29 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ E1 ◇ II / 11

---

(1) $$\frac{d}{d\,t}\int\limits_{\sin(t)}^{e^t}\frac{\sin(x\cdot t)}{x}\,dx = \,?$$

(2) $$\frac{d}{d\,t}\int\limits_{\sin(y)}^{e^y}\frac{\sin(x)}{x}\,dx = \,?$$

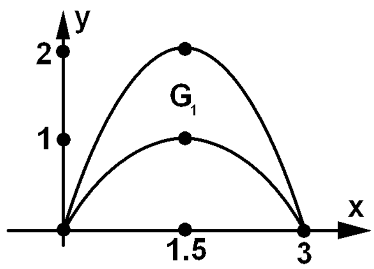
(3) $$\frac{d}{d\,t}\int\limits_{\sin(y)}^{e^y}\frac{\sin(x\cdot t)}{t}\,dx = \,?$$

1.30 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ E1 ◇ II / 12

---

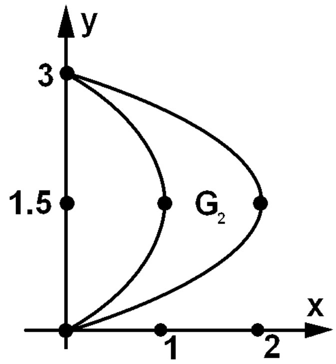
(1) Parabelkurven!
- *Courbes: Paraboles*

$G_1 = D_f$
$\int\limits_{G_1} (x^2 + x\,y)\,dG = \,?$



(2) Kurven wie oben!
- *Les courbes comme en haut!*

$G_1 = D_f$
$\int\limits_{G_2} (x^2 + x\,y)\,dG = \,?$



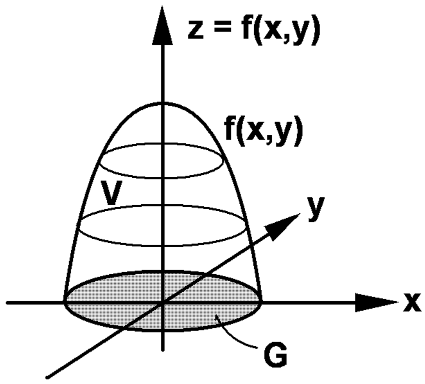
(3) (a) $\int\limits_{G_1} (y^2 + x\,y)\,dG = \,?$

(b) $\int\limits_{G_2} (y^2 + x\,y)\,dG = \,?$

1.31 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ E1 ◇ II / 13

---

(1) (a) $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$
$V = ?$



(b) $f(x, y) = 4 - x^4 - y^2$
$V = ?$

(2) $f(x, y) = \sin(x + y) + 1, \;\; G = [-4\,\pi, 4\,\pi] \times [-4\,\pi, 4\,\pi]$

(a) Oberfläche = ? • *Surface = ?*

(b) $V = ?$

(3) $$\vec{\rho}(u, v) = \begin{pmatrix} u^2 - v^2 \\ ln(1 + u + v) \cdot \sin(u + v) \\ u \cdot \sin(u \cdot v) \end{pmatrix} \qquad u, v \in [0, \pi]$$

$A = ?$

1.32 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ E1 ◇ II / 14

---

(1) Bearbeite ehemalige Vordiplomaufgaben!
• *Résoudre des anciennes séries de diplômes préalables.*

`http://rowicus.ch/Wir/VDs/VDs.html`

1.33 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ E1 ◇ II / 15

---

(1) Berechne die Funktionaldeterminante für die Integration in Polarkoordinaten.
• *Calculer le déterminant fonctionnel pour l'intégration dans des coordonnées polaires.*

(2) (a) Berechne das Volumenelement in elliptischen Koordinaten:
• *Calculer l'élément de volume dans des coordonnées elliptiques:*
$r \in [0, R] \qquad \varphi \in [0, 2\,\pi] \qquad \vartheta \in [0, \pi]$

$$\begin{aligned} x &= a \cdot r \cdot \cos(\varphi)\cos(\vartheta) \\ y &= b \cdot r \cdot \sin(\varphi)\cos(\vartheta) \\ z &= c \cdot r \cdot \sin(\vartheta) \end{aligned}$$

(b) $V = \int\limits_V dV = ? \qquad a = 3,\;\; b = 2,\;\; c = 1$

(3) $V =$ Kugelvolumen, Zentrum O, Radius $R = 1$.
• *$V =$ volumes de sphère, centre O, rayon $R = 1$.*

$$\int\limits_V \sin(\varphi)\, dV = ?$$

(4)
$$\int\limits_0^1 \int\limits_1^2 \sin(ln(x) + e^y) - \cos(ln(x) - e^y)\, dxdy = ?$$

1.34 Lösungen ◇ Lines pour solutions

Lösungen siehe unter den Links: • *Solutions voir les liens:*

http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/Problems.html
(Schema) • *(Schéma)*

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html
(*Mathematica*–Quellencode) • *(Code de source en Mathematica)*

Kapitel • Chapitre 2

Analysis Informatik — Analyse informatique

2.1 Inhalt — Les matières

(1) Übungen 1. Semester • *Exercices semestre 1*

(2) Übungen 2. Semester • *Exercices semestre 2*

(3) Lösungen siehe unter den Links: • *Solutions voir les liens:*

http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/Problems.html
(Schema) • *(Schéma)*

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html
(*Mathematica*–Quellencode) • *(Code de source en Mathematica)*

(4) Vordiplome siehe unter Link: • *Diplômes préalables voir le lien:*

http://rowicus.ch/Wir/VDs/VDs.html

2.2 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ I1 ◇ I / 1

---

(1) (a) Ursprung der Mathematik?
• *Origine des mathématiques?*

(b) Wie $\mathbb{Q}$ nummerieren?
• *Comment numéroter* $\mathbb{Q}$*?*

(2) Zeigen: • *Montrer:*

(a) In einem Dreieck ist die Winkelsumme immer $180°$.
• *Dans un triangle la somme des angles est toujours* $180°$*.*

(b) Satz von Pythagoras.
• *Théorème de Pythagore.*

(c) Satz von Thales.
• *Théorème de Thales.*

Wieso muss man die mathematischen Sätze beweisen?
• *Pourquoi est–ce qu'il faut prouver les théorèmes mathématiques?*

(3) Bearbeite den Stoff der Lektionen (Verbesserungen ...).
• *Elaborer la matière des leçons (corrections ...).*

Organisation, Planung:

(a) Planung organisieren! (Strategie, Prinzipien, Tandem)

(b) Einarbeitung in die Lerntechnik

(c) A4-Seite mit den wichtigsten 7 Punkten abgeben.

• *Organisation, projets:*

(a) • *Organiser la planification! (Strategie, principes, tandem)*

(b) • *Se mettre au courant concernant la "technique d'apprendre".*

(c) • *Livrer une page A4 avec les 7 points les plus importants.*

(4) Rechner-Probleme lösen, falls nötig beschaffen:
• *Résoudre les problèmes avec les ordinateurs, procurer si nécessaire:*

(a) Account (Schule) • *Account (école)*

(b) Mathematica–Zugang • *Possibilité d'utiliser Mathematica*

(c) Script (DOWNLOAD, WIR) • *Script (DOWNLOAD, WIR)*

(d) Mathematica–Kurs (DOWNLOAD, WIR) • *Cours de Mathematica (DOWNLOAD, WIR)*

(e) Eigener Rechner, Mathematica, Zip, Internet • *Ordinateur privé, Mathematica, ZIP, internet*

(f) Taschenrechner. • *Calculatrice de poche.*

(5) Reglemente, Literatur: • *Règlements:*

(a) Schulreglemente studieren, Weisungen, Führer • *Etudier les règlements de l'école, directives , guides*

(b) Literatur (Lehrbuch, Formeln) beschaffen • *Procurer la littérature (livres de théorie, formules).*

(6) Porte–Feuille: • *Porte–feuille:*

(a) Eigene Formelsammlung, Zusammenfassungen

(b) Planungen, Lerntechnik: Strategien, Prinzipien, Schemata, wichtige Dinge

(c) Übungen

(d) Prüfungen, Verbesserungen

(e) Mathematica–Arbeiten

(f) Journal

(a) • *Collection de formules, abrégé*

(b) • *Planification, technique de travail: Stratégies, principes, schémas, choses importants*

(c) • *Excercices*

(d) • *Tests, corrigés*

(e) • *Travaux de Mathematica*

(f) • *Journal*

Benotet werden: • *On donne des notes pour:*

(a) Tests

(b) Porte–Feuille, Arbeiten, Mitarbeit

(a) • *Tests*

(b) • *Porte–feuille, traveaux, travail pendant la leçon*

Abgabe der Uebungen: Woche später. • *Rendre les excercices: une semaine plus tard.*

(7) (a)

$$x = 3 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{3}{3 + \ldots}}}} := 3 + \frac{3 \rfloor}{\lceil 3} + \frac{3 \rfloor}{\lceil 3} + \frac{3 \rfloor}{\lceil 3} + \frac{3 \rfloor}{\lceil 3} + \cdots = ??, \quad x \in \mathbb{Q}??$$

(b) $2 + 6 + 10 + 14 + 18 + 22 + \ldots + 2222 = ?$

(c) $x + y \geq 1, \;\; x - y \geq 2, \;\; \mathbb{L} = ?$ (Zeichnung • *Dessin*)

(d) Zeigen: • *Montrer:* $x, y \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; ||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$

(e) Erklären: • *Expliquer:* $3 : 4 : 5 : 6 \stackrel{?}{=} 2 : 3 : 4 : x$

(f) $\sin(x) = x + \cos(x), \;\; x = ?$

(g) $a = b = 4, \;\; 15\,(a - b) = -16\,(a^2 - b^2) = -16\,(a + b)\,(a - b)$
$\Rightarrow\;\; 15 = -16\,(a + b) = -16 \cdot 8 = -128 \;\Rightarrow\; 15 = -148$ ☹
Fehler? • *Faute?*

WIR

2.3 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇I / 2 ◇ I / 1

---

(1) Stelle Plots her: • *Fabriquer des plots:*

(a) $f(x) = 3\,x - 4$
(b) $f(x) = \sin(\cos(x))$
(c) $f(x) = |x| - [\sin(x)]$
(d) $f(x) = [4\,x] - sgn(x)$
(e) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$
(f) $f(x) = \cos(x^2 + x)$
(g) $f(x) = e^{-\frac{1}{2}\,x^2}$
(h) $f(x) = e^{x^2}$
(i) $f(x) = e^{-x^2} - 1$
(j) $f(x) = 3\,\sin(\cos(2\,x^2 + 1) + x)$
(k) $f(x) = (\sin(x))^{\cos(x)}$
(l) $f(x) = ln(\frac{x^2 + 2}{x^4 + 2}) - x^2$
(m) $f(x) = sgn(x^2 \cdot \sin(x - \frac{1}{x}))$
(n) $f(x) = x^4 - 2\,x + 1$
(o) $f(x) = [10\,\sin(x)]$
(p) $f(x) = x + [\frac{1}{x} + x^2],\;\; D_f = [1, 10]$
(q) $f(x) = x^x,\;\; D_f = [1, \infty)$

(2) Plot: • *Plot (dessin):*

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \sin(x) & x = n \in \mathbb{Z} \\ 0 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

(3) Zeichne in Polarkoordinaten: • *Dessiner en coordonnées polaires:*

(a) $r(\varphi) = 2 \cdot \cos(2\,\varphi)$
(b) $r(\varphi) = 2 \cdot \cos(2\,\varphi + 1)$
(c) $r(\varphi) = 4 + 2 \cdot \sin(4\,\varphi) + \cos(16\,\varphi)$
(d) $r(\varphi) = 1 + \frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi^2}{4},\;\; \varphi \in [0, 2\,\pi)$

(4) Sei • *Soit* $f(x) = x^2 - x + 1,\;\; g(x) = -\frac{1}{2}\,x^2 + x + 2$

$\rightsquigarrow$ Löse: • *Résoudre:* $f(x) \geq g(x)$

WIR

2.4 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ I1 ◇ I / 3

---

(1) Herleitung der Lösungsformel von $a\,x^2+b\,x+c=0$? (Koordinatensystem verschieben!)
• *Déduction de la formule des solutions de* $a\,x^2+b\,x+c=0$ *? (Déplacer le système de coordonnées!)*

(2) Studiere die Beschränktheit und Monotonie der folgenden Funktionen:
• *Etudier si les fonctions suivantes sont bornées et/ou monotones:*

(a) $f(x)=e^{\cos(x)}$

(b) $f(x)=ln(\dfrac{x^2}{x^2+1})$

(c)
$$f(x) \;=\; \begin{cases} -\sin(x)-2 & x\in[-\pi,-\frac{\pi}{2}] \\ +\sin(x) & x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \\ -\sin(x)+2 & x\in(\frac{\pi}{2},\pi] \end{cases}$$

(d) $f(x)=e^{-x^2}$

(3) Beurteile, um welche Funktionstypen es sich handelt! (Folge, konstant, linear, quadratisch, Potenzfunktion, beschränkt, mit Polen, mit Asymptoten, periodisch, D_f, W_f ...)
• *Classifier d'après les types de fonction! (Suite, constante, linéaire, quadratique, fonction puissance, bornée, avec pôle, avec asymptote, périodique* D_f, W_f *...)*

(a) $f(x)=\sin(\dfrac{1}{x})$

(b) $f(x)=e^{\sin(x)}$

(c) $f(x)=\dfrac{1}{\sin(x)}$

(d) $f(x)=\tan(\sin(x))$

(e) $f(x)=4\,x^2-3\,x+2,\;\; D_f=[-1,+1]$

(f) $f(x)=[x^7]$

(g) $f(x)=sgn(x^7)$

(h) $f(x)=x^7\cdot sgn(x^7)$

(4) Skizziere in Polarkoordinaten:
• *Esquisse dans le système de coordonnées polaires:*

(a) $r(\varphi)=\cos(2\,\varphi)+2$

(b) $r(\varphi)=\cos(\dfrac{\varphi}{2})$

(c) $r(\varphi)=\cos(4\,\varphi+\dfrac{\varphi}{2})$

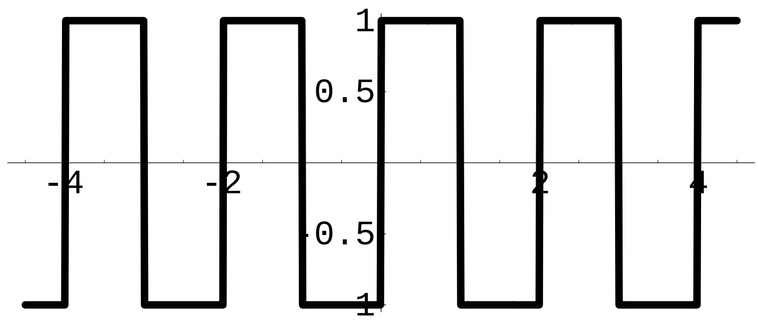
(d) $r(\varphi)=\cos(\varphi+\dfrac{\varphi}{2})+\dfrac{1}{3}\cos(3\,\varphi)+k,\;\; k=1,2,3,\ldots$ etc.

WIR

2.5 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ I1 ◇ I / 4

(1) Mache eine Zusammenfassung der verschiedenen Funktionstypen, die Du kennst.
• *Faire un résumé des différents types de fonctions qu'on connait maintenant.*

(2) Zeichne die folgende Funktion mit Hilfe eines Taschenrechners oder mit *Mathematica*:
• *Dessiner la fonction suivante à l'aide d'une calculatrice de poche ou à l'aide de Mathematica:*



Das ist ein *Mathematica*–Output. • *Ce dessin a été fait avec Mathematica.*

⇝ Man hat das Problem, die Funktion zu komponieren! • *On a le problème de composer la fonction!*

2.6 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ I1 ◇ I / 5

---

(1) Sei • *Soit* $f(x) = \cos(x),\;\; g(x) = \arccos(x),\;\; h(x) = e^x$

(a) $g(f(x)) = (g \circ f)(x) = \,?$
(b) $h(g(x)) = (h \circ g)(x) = \,?$
(c) $h((g \circ f)(x)) = (h \circ (g \circ f)(x)) = \,?$
(d) $(h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x) = \,?$

(2) Skizziere: • *Esquisse:*

$$u(t) \;\;=\;\; \begin{cases} \cos(t) & t \leq 0 \\ \arccos(t) & t \in (0, \dfrac{\Pi}{2}) \\ e^t & t \geq \dfrac{\Pi}{2} \end{cases}$$

(3) Ist f gerade/ ungerade? Wo ist f monoton? Wo gibt es Polstellen?
• *Où est–ce que la fonction f est paire/ impaire? Où est–ce que f est monotone? Où est–ce qu'on trouve des places de pôle?*

(a) $f(x) = \sin(\cos(x))$
(b) $f(x) = \cos(e^x)$
(c) $f(x) = \dfrac{2-x}{x^2 - 3\,x + 2}$

2.7 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ I1 ◇ I / 6

---

(1) Arbeite an der Einführung in *Mathematica* (Files)! Repetiere zudem den Stoff für den nächsten Test!
• *Travailler à l'introduction en Mathematica (fichiers)! En plus répéter la matière pour le futur test*

`http://www.rowicus/Wir/MathemDF/Mathem.html`

2.8 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ I1 ◇ I / 7

---

(1) Skizze des Graphen? • *Esquisse de la graphique?*

(a) $f_1(x) = \sinh(x)$, $f_2(x) = \cosh(x)$, $f_3(x) = \tanh(x)$, $f_4(x) = \coth(x)$

(b) $\varphi_1(x) = 0.5^x$, $\varphi_2(x) = 1^x$, $\varphi_3(x) = 2^x$, $\varphi_3(x) = e^x$

(c) $\eta_1(x) = 0.5^{-x}$, $\eta_2(x) = 1^{-x}$, $\eta_3(x) = 2^{-x}$, $\eta_4(x) = e^{-x}$

(d) $\psi_1(x) = \log_{0.5}(x)$, $\psi_2(x) = \log_2(x)$, $\psi_3(x) = \log_e(x) = ln(x)$

(e) $phi(x) = x^x$

(f) $\xi(x) = x + \sin(x)$

(2) Skizze des Graphen? • *Esquisse de la graphique?*

(a) $h_1(x) = \sinh(\sin(x))$

(b) $h_2(x) = \sin(\sinh(x))$

(c) $h_3(x) = \sinh(\cos(x))$

(d) $h_4(x) = \sinh(\arcsin(x))$

(3)

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}$$

Berechne eine numerische Näherung von x.
• *Calculer une approximation numérique de x.*

(4) Bestimme die Grenzwerte: • *Trouver les valeurs limites:*

(a) $a_n = \dfrac{1}{n}$

(b) $a_n = 2 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

(c) $a_n = \dfrac{2\,n^2}{1 + 3\,n^2}$

(d) $a_n = \dfrac{4\,n^3 - 3\,n + 1}{n^4 - 2\,n^2}$

(e) $b_n = \sin(n) \cdot \dfrac{1}{n}$

(f) $b_n = e^{-\frac{1}{n}}$

2.9 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ I1 ◇ I / 8

---

(1) $f(x) = e^{(x^2-\cos(2\,x))} \leadsto$ f gerade/ ungerade? • f *paire/ impaire?*

(2) $f(x) = y = e^{-x^2}$

(a) $x \geq 0 \leadsto$ $f^{-1}(x) = \,?$ Skizze! • *Esquisse!*

(b) $f^{-1}(0.5) \approx \,?$

(3) $\log(x^2) + \log(\frac{1}{x}) - \log(x) = \,?$

(4) $\sin(x + \frac{\pi}{3}) = \sin(x) \cdot (?) + \cos(x) \cdot (?)$

(a) $\sin(x + \frac{\pi}{3}) = \sin(x) \cdot (?) + \cos(x) \cdot (?)$

(b) $\tan(x + \frac{\pi}{3}) = \ldots\,? \ \ldots$

(5) $r(\varphi) = 1 + \cos(\frac{\varphi}{2}) \leadsto$ Polar...Skizze! • *Polaire... esquisse!*

(6) $2 \cdot 3^x = 5^x \leadsto$ $x = \,?$

(7) $0.367\overline{367}\ldots = \frac{p}{q},\ \ p, q \in \mathbb{N} \leadsto$ $p, q = \,?$

(8) $\langle a_n \rangle = \langle \frac{\sin(3\,\pi + \frac{4}{5}\,n^2)}{n^2} \rangle \leadsto$ $a_n \to \,?$

(9) $\langle a_n \rangle = \langle \frac{n^2 - 2\,n + 5}{n^3 + n^2 + 1} \rangle \leadsto$ $a_n \to \,?$

(10) $\langle a_n \rangle = \langle \frac{ln(n)}{n^2} \rangle \leadsto$ $a_n \to \,?$
Hinweis: Skizze! • *Indication: Exquisse!* $\leadsto$ $ln(n),\ n$

(11) $\langle a_n \rangle = \langle (1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}) \cdot (5 + \frac{2+n}{n}) \rangle \leadsto$ $a_n \to \,?$

(12) $\langle a_n \rangle = \langle e^{\sin(\pi + \frac{1}{n})} \rangle \leadsto$ $a_n \to \,?$

2.10 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ I1 ◇ I / 9

---

(1) $\langle a_n \rangle = \langle \dfrac{\cos(2\,\pi + \frac{1}{5}\,n^3)}{n^2} \rangle \rightsquigarrow \;\; a_n \to \,?$

(2) $\langle a_n \rangle = \langle \dfrac{n^2 - 2\,n + 4}{4\,n^3 + n^2 - 1} \rangle \rightsquigarrow \;\; a_n \to \,?$

(3) $\langle a_n \rangle = \langle \dfrac{ln(n)}{n^{1.5}} \rangle \rightsquigarrow \;\; a_n \to \,?$
Hinweis: Skizze! • *Indication: Exquisse!* $\rightsquigarrow \;\; ln(n), \;\; n$

(4) $\langle a_n \rangle = \langle (2 + \dfrac{3}{n} + \dfrac{4}{n^2}) \cdot (5 + \dfrac{6 + 7\,n}{8\,n}) \rangle \rightsquigarrow \;\; a_n \to \,?$

(5) $\langle a_n \rangle = \langle 5\,e^{\tan(\pi + \frac{2}{n^3})} \rangle \rightsquigarrow \;\; a_n \to \,?$

(6) $\langle a_n \rangle = \langle \dfrac{n + 1}{\sqrt{n} + 1} \rangle \rightsquigarrow \;\; a_n \to \,?$

(7) $\langle a_n \rangle = \langle \dfrac{(3\,n + 1)}{(\frac{n\,(2\,n-1)}{n+2})} \rangle \rightsquigarrow \;\; a_n \to \,?$

2.11 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇I1 ◇ I / 10

---

(1) Skizzen? • *Esquisses?*

(a) $f(x) = x^2 + \sin(x)$

(b) $f(x) = [x^2] + 1$

(c) $f(x) = \sin([x^2 + 1]) - 1$

(2) $x = 4 + \cfrac{4}{4 + \cfrac{4}{4 + \cfrac{4}{\ddots}}} \stackrel{?}{=} \frac{p}{q},\quad p, q \in \mathbb{N}$ $\qquad x = 5 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{3}{\ddots}}} \stackrel{?}{=} \frac{r}{s},\quad = ?$

(3)

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & y \arrow[r, "p"] & z \end{tikzcd}$$

$f(x) = \arccos(x) = y$
$h(x) = p(f(x)) = p(y) = y^2 - 2\,y + 2 = z$
$h(x) = (p \circ f)(x))$

(a) $h(x) \rightsquigarrow$ Diagramm?
$h(x) \rightsquigarrow$ • *Diagramme?*

(b) $D_h = ?,\ W_h = ?$

(c) $h(0) = ?,\ h(1) = ?$

(4) $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{4},\ \ g(x) = x^2 - x$

(a) Nullstellen von $h(x) = f(x) \cdot g(x)$? • *Zéros de* $h(x) = f(x) \cdot g(x)$*?*

(b) $u(x) = \dfrac{1}{f(x) - g(x)} \rightsquigarrow$
  i. Diagramm? • *Diagramme?*
  ii. Pole? • *Pôles?*

(5) $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} + x$

$f(x), g(x) \rightsquigarrow$ Probl. 4

(a) Diagramm? • *Diagramme?*

(b) Verhalten für grosse $|x|$?
• *Comportement pour des* $|x|$ *qui sont grands?*

(6) $f(x) = e^{-x^2},\ \ g(x) = x$

(a) Diagramm? • *Diagramme?*

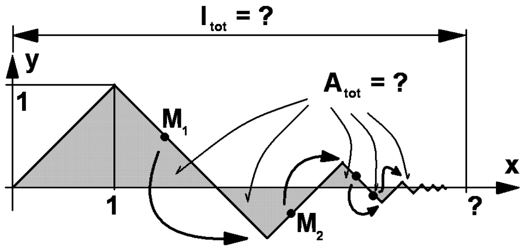
(b) $f(x) = g(x) \rightsquigarrow\ x \approx ?$

(c) $m \leq f(x) \leq M \rightsquigarrow\ m = ?,\ \ M = ?$

(d) $f(0) = ?,\ \ f(ln(e)) = ?,\ \ f(1) = ?$

(7) $3^x = 2^{2\,x} \cdot e^3 \cdot 3^{-2\,x} \rightsquigarrow\ x = ?$

(8) $A_{tot} = ?,\ \ l_{tot} = ?$



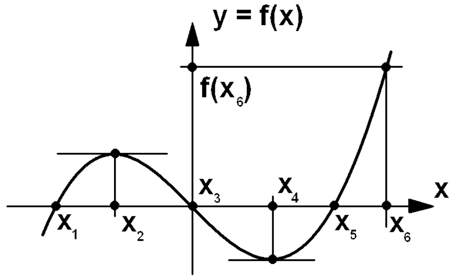
(9) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot \cos(2\,n) - \sin(n^2) + 8\,n^2 - 4\,n + 5}{2\,n^2 + 4\,n - 5\,\sin(n)} = ?$$

(10) $f(x) = a \cdot (x - x_1)\,(x - x_3)\,(x - x_5)$

$x_1 = -2,\ \ x_3 = 0,\ \ x_5 = 2$

$x_6 = 4,\ \ f(x_6) = 48$

$x_2 = ?\ ,\ \ x = 4 = ?$



(11) $\langle a_n \rangle = \langle (3 + \frac{3}{2^2} + \frac{3}{2^4} + \frac{3}{2^6} \ldots) \cdot (\frac{5}{2} + \frac{5}{2^3} + \frac{5}{2^5} + \ldots) \rangle \rightsquigarrow\ a_n \to ?$

(12) $\langle a_n \rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} (\frac{1}{2^k} - \frac{1}{3^k}) \rightsquigarrow\ a_n \to ?$

2.12 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇I1 ◇ I / 11

Verbesserung resp. Bearbeitung der letzten Prüfung:
• *Correction resp. étudier l'examen dernier:*

(1) Diagramme? • *Diagrammes?*

(a) $f_1(x) = \dfrac{x^2}{x^2+\sin(x)^2},\ \ D_{f_1} = [-6, 6]$

(b) $f_1(x) = 1 \ \Rightarrow\ x = ?$ Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

(c) $f_2(x) = -1 + \sin([x]),\ \ D_{f_2} = [-6, 6]$

(d) $f_3(x) = \cos(e^{|x|}),\ \ D_{f_3} = [-2.5, 2.5]$

(2) $x = 4 + \cfrac{5}{5 + \cfrac{5}{5+\cfrac{5}{\ddots}}} = ?$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ $x \in \mathbb{Q}$?

Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

(3)

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & y \arrow[r, "p"] & z \end{tikzcd}$$

$f(x) = e^x$
$p(x) = \dfrac{1}{2}\,ln(x^2)$

(a) $h(x) = (p \circ f)(x)) = ?$
$\rightsquigarrow$ Diagramm? • *Diagramme?*

(b) $h(x) = (f \circ p)(x)) = ?$
$\rightsquigarrow$ Diagramm? • *Diagramme?*

(c) $h(x) = (f(p(x)^2) = ?$
$\rightsquigarrow$ Diagramm? • *Diagramme?*

(4) $f(x) = (-1+x)\cdot\left(-1+x^2\right),\ \ p(x) = -8 + 12\,x - 6\,x^2 + x^3$

(a) $h(x) = f(x)\cdot p(x)$

i. Nullstellen? • *Zéros?* Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

ii. Diagramm? • *Diagramme?*

(b) $u(x) = \dfrac{f(x)}{p(x)}$

i. Pole? • *Pôles?* Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

ii. Diagramm? • *Diagramme?*

(5) $f(x) = e^{-\sin(x)^2},\ \ g(x) = -0.5\,x$

(a) Diagramm? • *Diagramme?*

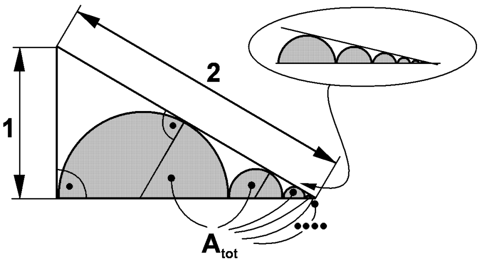
(b) Verhalten für grosse $|x|$?
• *Comportement pour des $|x|$ qui sont grands?*

(c) $m \leq f(x) \leq M \rightsquigarrow\ m, M = ?$ Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

(d) $f(x) = g(x) \rightsquigarrow\ x \approx ?$

(6) $4^{2\,x} = 3^x \cdot \pi^5 \cdot 4^{-3\,x} \rightsquigarrow\ x = ?$ Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!* $\rightsquigarrow$

(7) $A_{tot} = ?$



(8) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\,\left(-e^{-n} - 3\,n^2 + 4\,n^3 + n^2\,\cos(n)\right)}{4\,n^2 + 3\,n^4 - \sin(n^2)} = ?$ Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

(9) $(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{2\cdot 3^k} + \dfrac{1}{3\cdot 4^k}) - \dfrac{7}{6} = ?$ Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

(10) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n + 2\,ln(n)}{3\,n - 4\,ln(n) + 5\,\tan(\frac{1}{n})} = ?$ Ohne Rechner! • *Sans calculatrice!*

Viel Glück! • *Bonne chance!*

2.13 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇I1 ◇ I / 12

---

(1) $f(x) = \dfrac{\sin(x^2-2)}{x^2-2}$, $x_0 = 1$, $x_1 = \sqrt(2)$
f stetig für $x = x_0$ • *f continue pour $x = x_0$* $\leadsto$ $x = x_1 = ?$

(2) $f(x) = \dfrac{\tan(x)}{x^2-1}$
Wo ist f nicht stetig? • *Qù est–ce que f n'est pas continue?*

(3) $f(x) = \begin{cases} 3 & x \leq 0 \\ 7 & x \geq 6 \end{cases}$ Zeichnung? • *Esquisse?*
Vervollständige den Graphen derart, dass f stetig wird!
• *Completer la graphique de façon que f devient continue!*

(4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = ?$

(5) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{ln(x+1)}$

(a) Wo ist f nicht stetig? • *Oû est–ce que f n'est pas continue?*
(b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = ?$
(c) Skizziere: • *Esquisse de:* $f(x)$, $e^x - 1$, $ln(x+1)$

(6) $f(x) = \dfrac{3}{x-1}$, $x_1 = 1.1$, $x_2 = 10$, $\varepsilon = 0.1$
$f(x) \in U_\varepsilon(f(x_1)) \;\Rightarrow\; x \in U_\delta(x_1) \leadsto \;\delta = ?$
$f(x) \in U_\varepsilon(f(x_2)) \;\Rightarrow\; x \in U_\delta(x_2) \leadsto \;\delta = ?$

2.14 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇I1 ◇ I / 13

---

(1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \dfrac{1}{x-1}$

Wo ist f stetig?
• *Qù est–ce que f est continue?*

(2) $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{(\tan(x))^2}{x}$

Wo ist f stetig?
• *Qù est–ce que f est continue?*

(3) $f(x) = (x-1) \cdot (x+1), \;\; I = D_f = [-4, 4)$

Minimum und Maximum von f?
• *Minimum et maximum de f?*

(4) $f(x) = e^{\sin(x)}, \;\; x \in [0, 8\,\pi)$

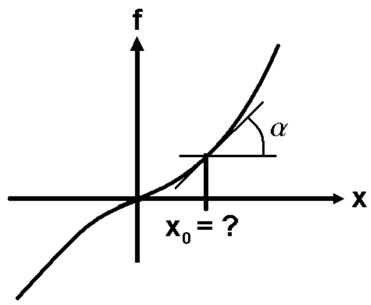
Minimum und Maximum von f?
• *Minimum et maximum de f?*

2.15 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇I1 ◇ I / 14

---

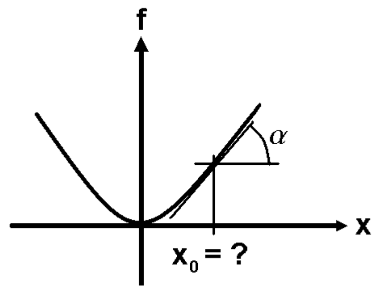
(1) $\alpha = 80^o \qquad f(x) = x^3$

$x_0 = ?$



(2) $f(x) = x^4$

$\alpha(x_0) = \alpha(1)$



(3) $f(x) = 3\,x^7 + 9\,x^4 + 2$

$f'(x) = ?$

(4) $f_1(x) = x^2,\;\; f_2(x) = a\,x^2 + b\,x + c$
$f_1(1) = f_2(1),$
$f_2(3) = 0,\;\; f_2(x) \geq 0$

Skizze? • *Esquisse?* Winkel zwischen den Tangenten an die beiden Kurven im Schnittpunkt? • *Angle entre les deux tangentes au point d'intersection des deux courbes?*

(5) $f(x) = x^2,\;\; f(x_0) = b,\;\; f'(x_0) = a$
$g(x) = a\,(x - x_0) + b \leadsto$ Tangente • *Tangente*
$g(x_1) = 0 \;\Rightarrow\; x_1$

$P_1 = P_1(x_1/0),\;\; P_2 = P_2(x_0/0)$
$P_3 = P_3(x_0/f(x_0)),\;\; P_4 = P_4(0/g(0))$
$P_5 = P_5(0/0)$

$\leadsto\;\; A(P_1P_2P_3) = ?,\;\; A(P_1P_4P_5) = ?$

2.16 Übungen in Analysis $\diamond$ Exercices en analyse $\diamond$I1 $\diamond$ I / 15

---

(1)	$f(x) = x^2 \cdot \cos(x)$	$\leadsto\ f'(x) = ?$
(2)	$f(x) = (\sin(x))^3$	$\leadsto\ f'(x) = ?$
(3)	$f(x) = 3\,x - \dfrac{x}{\cos(x)}$	$\leadsto\ f'(x) = ?$
(4)	$f(x) = x \cdot \sqrt{x}$	$\leadsto\ f'(x) = ?$
(5)	$f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{x^2}{x^2+2}$	$\leadsto\ f'(x) = ?$
(6)	$f(x) = \sin(2\,x)\ (= 2\,\sin(x) \cdot \cos(x))$	$\leadsto\ f'(x) = ?$
(7)	$f(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$	$\leadsto\ f'(x) = ?$
(8)	$f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 2\,x + \cos(x)}$	$\leadsto\ f'(x) = ?$
(9)	$f(x) = \cos(\sin(\cos(x^4)))$	$\leadsto\ f'(x) = ?$

2.17 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇I1 ◇ I / 16

---

(1) $f(x) = (x^x)^x \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = ?$

(2) $f(x) = x^(x^x) \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = ?$

(3) $f(x) = 1/2x - \cos(x) \quad \rightsquigarrow \quad Min. = ?,\ \ Max. = ?$

(4) $f(x) = x \cdot \sqrt{x} \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = 0 \ \Rightarrow\ x = ?,\ \ Min./\,Max.?$

(5) $f(x) = e^{-x^2} \rightsquigarrow \ f'(x) = 0,\ \ x = ?, \qquad f''(x) = 0,\ \ x = ?$
Graph von f? • *Graphique de f?*

(6) $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x - 5 \rightsquigarrow \ f'(x) = 0,\ \ x = ?, \qquad f''(x) = 0,\ \ x = ?$
Graph von f? • *Graphique de f?*

(7) $f(x) = x^4 - x^2 - 1 \rightsquigarrow \ f'(x) = 0,\ \ x = ?, \qquad f''(x) = 0,\ \ x = ?$
Graph von f? • *Graphique de f?*

2.18 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ I1 ◇ II / 1

---

(1) Programmiere für Deinen persönlichen Rechner die Verfahren für:
• *Programmer pour la calculatrice personnelle les méthodes pour:*

(a) Numerische Differentiation.
  • *Différentiation numérique.*

(b) Numerische Nullstellenberechnung.
  • *Calculer numériquement les zéros d'une fonction.*

Rechne je einige selbstgewählte Beispiele und vergleiche die Resultate mit den Resultaten von Mathematica.
• *Calculer quelques exemples que tu as choisis toi–même et comparer les résultats avec les résultats obtenus à l'aide de Mathematica.*

2.19 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇I1 ◇ II / 1b

---

(1) Ableitung mit Mathematica: • Dérivée à l'aide de Mathematica:

$$f_1(x) = e^{\frac{\sin(\cos(\cot(x)))}{\log(x\,\log(x^5-\log(x)))}}\,\tan(\cos(x^{-4}-3\,\sin(x)))$$

$$f_2(x) = x^{x^{x^{x^{x^{x}}}}},\quad f_3(x) = \left(\left(\left(\left(x^x\right)^x\right)^x\right)^x\right)^x,\quad f_4(x) = x^{\left(x^{\left(x^{\left(x^{\left(x^x\right)}\right)}\right)}\right)}$$

$$f_5(x) = \left(\left(\left(\left(x^x\right)^{x^x}\right)^{\left(x^x\right)^{x^x}}\right)^{\left(\left(x^x\right)^{x^x}\right)^{\left(x^x\right)^{x^x}}}\right)^{\left(\left(\left(x^x\right)^{x^x}\right)^{\left(x^x\right)^{x^x}}\right)^{\left(\left(x^x\right)^{x^x}\right)^{\left(x^x\right)^{x^x}}}}$$

(2) Iteration eines Gleichungssystems • Itération d'un système d'équations

Ein lineares Gleichungssystem soll rasch näherungsweise gelöst werden. Idee: Versuche eine Iteration mit Mathematica.
• *Il faut très vite résoudre un système d'équations linéaires approximativement. Idée: Essaie une itération avec Mathematica.*

$A\cdot\vec{x}+\vec{b}$

$$\begin{array}{rcl}
6.25\,\boxed{x_1}+2.08\,x_2-1.44\,x_3 &=& 2.59\\
1.78\,x_1-4.61\,\boxed{x_2}+0.44\,x_3 &=& 5.22\\
-1.36\,x_1+0.95\,x_2+3.75\,\boxed{x_3} &=& 3.61
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
x_1 &=& \frac{1}{6.25}(2.59 \qquad -2.08\,x_2+1.44\,x_3)\\
x_2 &=& \frac{1}{4.16}(5.22-1.78\,x_1 \qquad -0.44\,x_3)\\
x_3 &=& \frac{1}{3.75}(4.61+1.36\,x_1-0.95\,x_2 \qquad)
\end{array}
\rightsquigarrow
\begin{array}{rcl}
x_{1,k+1} &=& \frac{1}{6.25}(2.59-2.08\,x_{2,k}+1.44\,x_{3,k})\\
x_{2,k+1} &=& \frac{1}{4.16}(5.22-1.78\,x_{1,k+1}-0.44\,x_{3,k})\\
x_{3,k+1} &=& \frac{1}{3.75}(4.61+1.36\,x_{1,k+1}-0.95\,x_{2,k+1})
\end{array}$$

Start: Setze z.B. • *Valeurs initiales: Mettre p.ex.:* $x_{2,0}=0,\ \ x_{3,0}=0.$
8 Schritte. • *8 étapes.*

Vergleiche mit den exakten Werten! • *Comparer avec les valeurs exactes!*

Versuche: • *Essayer:*

$A \cdot \vec{x} + \vec{b}$

$$\begin{aligned} 1\,\boxed{x_1} + 2\,x_2 + 3\,x_3 &= 2.59 \\ 2\,x_1 + 3\,\boxed{x_2} + 4\,x_3 &= 5.22 \\ -1\,x_1 + 1\,x_2 + -1\,\boxed{x_3} &= 3.61 \end{aligned}$$

30 Schritte. Was passiert? • *30 étapes. Qu'est–ce que se passe?*

(3) Polynomkurve durch Punkte, Steigung • Courbe polynomiale par des points, pente

Geg.: • Donné: $P_1 = (-2; 2),\ P_2 = (\frac{1}{2}; 0),\ P_3 = (2; 0),\ \tan(\alpha(P_3)) = 2$

Versuche, eine Polynomkurve 3. Grades durch $P_1,\ P_2,\ P_3$ zu legen. • *Essayer à poser une courbe polynomiale à travers $P_1,\ P_2,\ P_3$.* $\leadsto\ f(x) = a_3\,x^3 + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$

Mathematica-Plot der Kurve? • *Plot de la courbe avec Mathematica?*

Ersetze $P_2 = (\frac{1}{2}; 0)$ durch $P_2 = (-\frac{1}{2}; 0)$ und suche den Wendepunkt (Mathematica-Plot).
• *Remplacer $P_2 = (\frac{1}{2}; 0)$ par $P_2 = (-\frac{1}{2}; 0)$ et trouver le point d'inflexion (Mathematica-Plot).*

(4) Extremalproblem • Problème de valeur extrême

Ein A4-Blatt ($210\,mm \times 297\,mm$) wird 4 mal so gefaltet, dass an jeder Ecke ein Quadrat entsteht. Nachdem die 4 Quadrate weggeschnitten worden sind, entsteht durch die Faltung ein Schachteldeckel. Dieser wird als Notbehausung einer Maus in einem Käfig verwendet werden. Wie gross muss die Quadratseite x gewählt werden, damit das Volumen maximal wird? Lösung mit Mathematica!
• *Une feuille A4 ($210\,mm \times 297\,mm$) soit pliée de façon qu'on obtienne un carré à chaque coin. Après avoir coupé les 4 carrés, on obtient par ce pliage un couvercle de boîte. Celui-ci est utilisé comme refuge d'une souris dans une cage. Quelle est la grandeur x du côté d'un carré pour que le volume soit maximal? Solution avec Mathematica!*

(5) Differentialrechnung in der Geometrie • Calcul différentiel dans la géométrie

$$f(x) = a(x-1)(x+1)$$

In den Nullstellen werden die Tangenten gezogen. Die x–Achse bildet mit den Tangenten ein Dreieck. Berechne den Punkt des Dreiecks auf der y–Achse in Abhängigkeit von a mit Mathematica.

• *Dans les points de zéro, les tangentes sont établies. L'axe x formen avec les tangentes un triangle. Calculer le point du triangle sur l'axe y dépendant de a avec Mathematica.*

2.20 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ I1 ◇ II / 2

---

(1) Approximiere $\int_0^1 x^2\,dx$ numerisch (Rechner) mit Hilfe von Riemannschen Summen!

• *Approcher* $\int_0^1 x^2\,dx$ *numériquement (calculatrice) à l'aide de sommes de Riemann!*

(a) Obersummen
• *Sommes supérieures.*

(b) Untersummen.
• *Sommes inférieures.*

2.21 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇I1 ◇ II / 2b

---

(1) Diskussion einer Funktion: • Discussion d'une fonction

$$f(x) = e^{-x^2+4\,x+1}$$

Bestimme: • *Calculer:*

(a) Verhalten weit aussen • *Comportement pour des valeurs de x très grandes*
(b) Extrema • *Extrémum*
(c) Nullstellen • *Zéros*
(d) Wendepunkte • *Points d'inflexion*
(e) Graph • *Graphique*

(2) Diskussion einer Funktion: • Discussion d'une fonction

$$f(x) = (2\,x-3) + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$$

Bestimme: • *Calculer:*

(a) Verhalten weit aussen • *Comportement pour des valeurs de x très grandes*
(b) Asymptoten • *Asymptotes*
(c) Extrema • *Extrémum*
(d) Nullstellen • *Zéros*
(e) Wendepunkte • *Points d'inflexion*
(f) Graph • *Graphique*

%

(3) Bernoulli:

Leite aus dem Restfunktion-Lemma die Regel von Bernoulli her. Wende die Regel dann auf die folgenden Beispiele an: • *Déduire la règle de Bernoulli du lemme de la fonction du reste. Appliquer la règle aux exemples suivants:*

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4\,e^x - 4}{3\,\sin(x) - 4\,sin(2\,x)}$

(b) $\lim\limits_{x\downarrow 0} x^x$

(c) $\lim\limits_{x\downarrow 0} \dfrac{7\,ln(x)}{8\,\cot(x)}$

(d) $\lim\limits_{x\downarrow 0} \dfrac{ln(x)}{x^n}$

(e) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{ln(x)}{x^n}$

(f) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^n}{e^x}$

(g) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^n}{e^x}$

2.22 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ I1 ◇ II / 3

---

(1) $f(x) = 3\,\sin(x) + 2\,x\,\cos(x) \rightsquigarrow \;\; F(x) = \,?$

(2) $f(x) = 5\,x^3 - 2\,x^2 + 3\,x + 4 \rightsquigarrow \;\; \int f(x)\,dx = \,?$

(3) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x} + e^x \rightsquigarrow \;\; F(x) = \,?$

(4) $\int\limits_1^5 5\,x^3 - 2\,x^2 + 3\,x + 4\,dx = \,?$

(5) $\int\limits_0^\pi \cos(x)\,dx = \,?$

(6) $\int\limits_0^\pi \sin(x)\,dx = \,?$

(7) $\int\limits_0^2 a\,x^2\,dx = 4 \rightsquigarrow \;\; a = \,?$

(8) $\int\limits_1^b x^2\,dx = 4 \rightsquigarrow \;\; b = \,?$

(9) $f(x) = x^3, \;\; g(x) = a\,x + b, \;\; f(0) = g(0), \;\; f(x1) = g(x_1)$

$\int\limits_0^{x_1} g(x)\,dx - \int\limits_0^{x_1} f(x)\,dx = 10 \rightsquigarrow \;\; x_1 = \,?$

Skizze! • *Esquisse!*

(10) Differenziere die nachfolgende Gleichung links und rechts nach x:
• *Calculer la dérivée de l'équation suivante à gauche et à droite, d'après x:*

$$\sin(x + \beta) = \sin(x) \cdot \cos(\beta) + \cos(x) \cdot \sin(\beta)$$

Was kann man folgern? • *Quelle est la conséquence?*

(11) Bestimme die Extrema:
• *Calculer les extrêmes:*

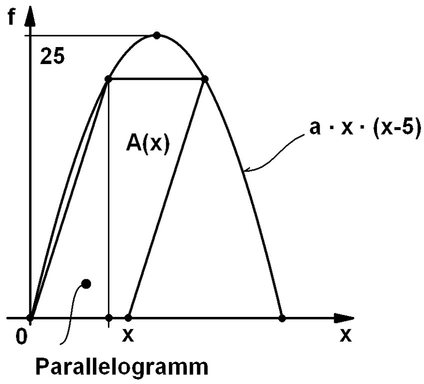
(a) $f(x) = \dfrac{1}{5}\,x^5 - \dfrac{1}{4}\,x^4 - \dfrac{1}{3}\,x^3 + \dfrac{1}{2}\,x^2$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{12}\,x^4 - \dfrac{1}{9}\,x^3 - x^2 + 1$

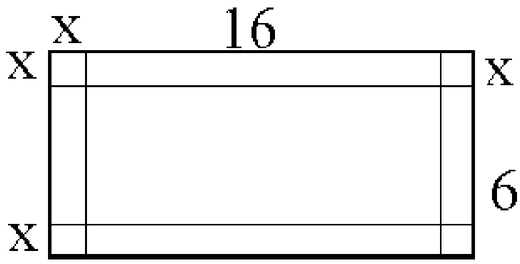
(c) $f(x) = \dfrac{1}{50}\,x^2\,(x-5)\,(x-9)$

(12)
(a) $a = ?$

(b) $A(x) \to Max. \leadsto \; x = ?$

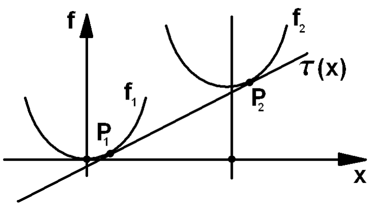


(13) Durch wegschneiden der quadratischen Ecken der Breite x und danach falten entsteht aus dem Papierbogen (16×6) eine Schachtel ohne Deckel. Wie gross muss man x wählen, damit der Inhalt maximal wird?
• *Nous coupons les coins carrés de la largeur x et après nous plions la feuille de papier (16×6). Ainsi nous recevons une boîte sans couvercle. Comment est–ce qu'il faut couisir x pour avoir un contenu maximal?*

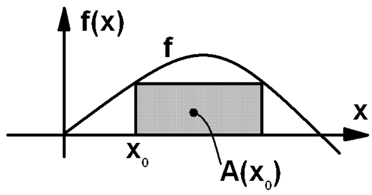


(14) Schwieriges Problem:
• *Problème difficil:*

$f_1(x) = x^2, \;\; f_2(x) = (x-2)^2 + 4$
$\overline{P_1P_2}$: Gemeinsame Tangente
• $\overline{P_1P_2}$: *Tangente commune*
$P_1 = P_1(x_1, y_1), \;\; P_2 = P_2(x_2, y_2)$
$x_1, x_2, y_1, y_2 = ?$



(15) $f(x) = \sin(x)$
$A(x_0)$ soll maximal sein
• $A(x_0)$ *doit être maximale*
$x_0 = ?$



(16) $f_1(x) = x^2, \;\; f_2(x) = x^4$
Maximaler Abstand der beiden Kurven von f_1 und f_2 in y–Richtung zwischen $x = 0$ und $x = 1$?
• *Distance maximale des deux courbes de f_1 et f_2 en direction y entre $x = 0$ et $x = 1$?*

2.23 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇I1 ◇ II / 3b

---

(1) (a) **Mittelwertsatz der Differentialrechnung: • Théorème de la valeur moyenne du calcul différentiel**

Gegeben sei $f(x) = \frac{1}{2}\,(x+1)(x-1)(x-2)$. An den Stellen $x = -2$ und $x = 3$ wird die Sehne gezogen. Berechne diejenigen Punkte auf der Kurve, in denen die Tangente die gleiche Steigung hat wie die gegebene Sehne.
• *Soit donnée:* $f(x) = \frac{1}{2}\,(x+1)(x-1)(x-2)$. *Aux places* $x = -2$ *et* $x = 3$ *on tire la corde. Calculer les points sur la courbe où la tangente a la même pente que la corde.*

(b) **Konkav — konvex: • Concave — convexe**

Bestimme die Intervalle, in denen die Funktion konkav bzw. konvex ist,
• *Calculer les intervalles, dans lesquelles la fonction est concave resp. convexe.*

(2) Approximation von Nullstellen: • Approximation de zéros:

(a) $\cos(x) = \frac{1}{2},\ \ f(x) = \cos(x) - \frac{1}{2} = 0$
(b) $e^x = -x^3,\ \ f(x) = e^x + x^3 = 0$
(c) $\cos(x) = 5\,x,\ \ \varphi(x) = \frac{\cos(x)}{5} = x$

Bestimme: • *Calculer:*

(a) Schachtelung • *Emboîtement* • $f(x)$
(b) Newton • *Newton* • $f(x)$
(c) Regula falsi • *Regula falsi* • $f(x)$
(d) Fixpunkmethode • *Méthode du point fixe* • $\varphi(x)$

(3) Interpolation: • Interpolation:

Finde ein Polynom, dessen Kurve durch die gegebenen Punkte geht. Suche Möglichkeiten zur Verbesserung des Resultats. • *Trouver un polynôme dont la courbe passe par les points donnés. Trouver des possibilités pour amméliorer le résultat.*

$P_1 = (0/0),\ P_2 = (1/1),\ P_3 = (2/2),\ P_4 = (3/3),\ P_5 = (4/s),\ P_6 = (5/5),\ P_7 = (6/6)$

$s \in \{5, 4, 3, 0, -6, -12\}$

WIR

2.24 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ I1 ◇ II / 4

---

(1) $\int\limits_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \,?\qquad \rightsquigarrow\ (!!!!!)\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

(2) $\int\limits_1^{e} x \cdot ln(x)\,dx = \,?$

(3) $\int\limits_1^{e} x^2 \cdot ln(x)\,dx = \,?$

(4) $\int\limits_0^{\pi} x^3 \cdot \sin x\,dx = \,?$

(5) Studiere: • *Etudier:*

$$\int\limits_{z=a}^{z=b} f(z)\,dz = \int\limits_{x=z^{-1}(a)}^{x=z^{-1}(b)} f(z(x)) \cdot \frac{dz}{dx}\,dx \qquad (\Delta z = \frac{\Delta z}{\Delta x}\,\Delta x \;\Rightarrow\; dz = \frac{dz}{dx}\,dx)$$

Sei • *Soit* : $\qquad f_1(x) = 4\,x \cdot ln(x^2)$

$$\rightsquigarrow\ \int\limits_1^{10} f_1(x)\,dx = 2 \cdot \int\limits_{??\ 1\ ??}^{??\ 10\ ??} 2\,x \cdot ln(x^2)\,dx = \,? \qquad (\text{Subst. } z = x^2)$$

(6) $\int\limits_0^{5} (x^5 - 6\,x^4 + 2\,x^3 + 11\,x^2 - x + 1) \cdot (5\,x^4 - 24\,x^3 + 6\,x^2 + 22\,x - 1)\,dx = \,?$

(7) (a) $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim\limits_{z\to\infty} \int\limits_1^{z} x^{-2}\,dx = \,?$

(b) $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \,?$

(c) $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \,?$

(8) $\int\limits_0^{1} e^{2\cdot x^2} \cdot x^3\,dx = \,?$

(9) $\int\limits_1^{2} ln(x) \cdot \sinh(x), dx = \,?$

2.25 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇I1 ◇ II / 4b

---

(1) Fixpunkt für Systeme • Point fixe pour des systèmes

$$\begin{aligned} x &= f(x,y) \\ y &= g(x,y) \end{aligned}$$

$(x,y) \in D$,
$|f'_x| < 1,\ |f'_y| < 1,\ |g'_x| < 1,$
$|g'_y| < 1$ in • *dans* D

$\leadsto$ **Bsp.: • Exemple:**

$$\begin{aligned} x &= \sin(x+y) \\ y &= \cos(x-y) \end{aligned}$$

$(x_1, y_1) = (0,0) \ \Rightarrow \ \ldots \ \Rightarrow \ (x_n, y_n) \simeq ?,\ \ n \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$
(Exakte Stellen!) • *(Places exactes!)*

(2) Numerische Differentiation • Différentiation numérique

$P_1 = (0/0),\ P_2 = (1/1),\ P_3 = (2/2),\ P_4 = (3/3),\ P_5 = (4/-5),$
$P_6 = (5/5),\ P_7 = (6/6)$

Programmiere ein Verfahren für die numerische Differentiation. Lege eine Polynomkurve durch die obigen Punkte und teste das Verfahren aus.
• *Programmer une méthode pour la différentiation numérique. Trouver un polynôme dont la courbe passe par les points donnés. Appliquer la méthode programmée.*

(3) Horner • Horner

$$f(x) = \sum_{k=0}^{10000} (-x \cdot \sin(\frac{k \cdot \pi}{8}))^k$$

Programmiere die Berechnung der Summe nach dem Hornerschema. $f(0.999) = ?$
• *Programmer le calcul de cette somme d'après la méthode de Horner.* $f(0.999) = ?$

(4) Interpolationsmethoden: Theorie • Méthodes d'interpolation: Théorie

Studiere und beschreibe die Methoden von: Etudier et décrire les méthodes de:

(a) Lagrange
(b) Newton
(c) Aitken–Neville

Skript. • *Script, ç.v.d. notes.*

(5) Interpolationsmethoden: Programmierung • Méthodes d'interpolation: Programmation

Programmiere die Interpolationskurven nach Lagrange und Newton. Studiere den Runge–Effekt.
• *Programmer les courbes dînterpolation d'après Lagrange et Newton.Etudier l'effet de Runge.*

(a) Programmiere das Lagrange-Polynom für die Punkte aus Problem 2.
• *Programmer le polynôme de Lagrange pour les points de problème 2.*

(b) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2},\ \ x \in [-5, 5],\ \ x_i = -5 + \dfrac{10}{n} \cdot i,\ \ 0 \le i \le n,\ \ n \in \{2, 4, 8, 16\}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^3},\ \ x \in [0, 5],\ \ x_i = \dfrac{10}{n} \cdot i,\ \ 0 \le i \le n,\ \ n \in \{2, 4, 8, 16\}$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^4},\ \ x \in [-5, 5],\ \ x_i = -5 + \dfrac{10}{n} \cdot i,\ \ 0 \le i \le n,\ \ n \in \{2, 4, 8, 16\}$

(6) Hermite–Polynome: Theorie • Polynômes de Hermite: Théorie

Studiere die Hermite–Polynome (Skript).
• *Etudier les polynômes de Hermite (script, ç.v.d. notes).*

2.26 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ I1 ◇ II / 5

---

(1) $\int\limits_0^\pi \sin(\frac{\pi}{6}\,t) + \frac{\pi}{8} dt = \,?$

(2) $\int\limits_1^2 x \cdot ln(5\,x^2+8)\,dx = \,?$

(3) $\int\limits_1^e x^2 \cdot ln(x^3)\,dx = \,?$

(4) $\int\limits_1^\pi \frac{1}{x\,(x+1)}\,dx = \,?$

(5) $\int\limits_1^\pi \frac{1}{x\,(x+1)^2}\,dx = \,?$

(6) $\int\limits_5^6 \frac{1}{(x+2)\,(x^3+x^2-x-1)}\,dx = \,?$

(7) $\int\limits_5^6 \frac{1}{x^4-x^3+x^2-x-1}\,dx = \,?$

2.27 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇I1 ◇ II / 5b

---

(1) Polynomkurven durch gegebene Punkte, Werkzeug
Gegeben sei die Funktion $f(x)$. Wir teilen das Intervall $[x_1, x_2]$ in k gleichlange Teilintervalle ein. Berechne die Polynomkurve von minimalem Grad, die durch die Teilpunkten $(x_i, f(x_i))$ geht. Messe den maximalen vertikalen Fehler $\|f(x) - p(x)\|$ (Runge-Effekt). Beschreibe die Beobachtungen. Erstelle ein *Mathematica*–Programm zur Darstellung der Punkte und der Funktionen $f(x)$ und $p(x)$.
• **Courbes polynomiales qui passent par des points donnés, outil**
• *Soit donnée une fonction $f(x)$. On partage $[x_1, x_2]$ dans k intervalles partielles de la même longueur. Calculer la courbe polynomiale de degrée minimal qui traverse les points $(x_i, f(x_i))$. Mesurer les erreurs $\|f(x) - p(x)\|$ (Effet de Runge). Décrire les observations.Ecrire un programme de Mathematicapour dessiner les graphiques des points et des fonctions $f(x)$ et $p(x)$.*

(2) Polynomkurven durch gegebene Punkte, Anwendung
Zeichne mit dem Programm:
• **Courbes polynomiales qui passent par des points donnés, application**
• *Dessiner à l'aide du programme:*

(a) $(f(x); x_1; x_2; k) = (\sin(x); 0; \pi; 1)$
(b) $(f(x); x_1; x_2; k) = (\sin(x); 0; \pi; 2)$
(c) $(f(x); x_1; x_2; k) = (\sin(x); 0; \pi; 3)$
(d) $(f(x); x_1; x_2; k) = (\sin(x); 0; \pi; 4)$
(e) $(f(x); x_1; x_2; k) = (\sin(x); 0; \pi; 5)$
(f) $(f(x); x_1; x_2; k) = (\sin(x); 0; \pi; 10)$
(g) $(f(x); x_1; x_2; k) = (e^{-x^2}; -2.5; 2.5; 11)$
(h) $(f(x); x_1; x_2; k) = (e^{-x^2}; -2.5; 2.5; 6)$
(i) $(f(x); x_1; x_2; k) = (\sin(x); -2.5; 2.5; 10)$
(j) $(f(x); x_1; x_2; k) = (\sin(x); -10; 10; 10)$
(k) $(f(x); x_1; x_2; k) = (e^{-x^4+x+1}; -2.5; 2.5; 11)$
(l) $(f(x); x_1; x_2; k) = (e^{-x^4+x+1}; -20; 20; 11)$
(m) $(f(x); x_1; x_2; k) = (\frac{1}{x^2+1}; -5; 5; 11)$
(n) $(f(x); x_1; x_2; k) = (\frac{1}{x^2+1}; -5; 5; k),\ k \in \{1, \ldots, 11\} \rightsquigarrow$ **Animate!**
(o) Fertige einen Plot von: • *Faire une esquisse de* $\dfrac{d^{12}\,\frac{1}{x^2+1}}{d\,x^{12}},\ x \in [-2.5, 2.5]$
(p) $(f(x); x_1; x_2; k) = (\sin(x); -10; 10; 10)$
(q) $(f(x); x_1; x_2; k) = (\sin(x); -10; 10; 12)$

2.28 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ I1 ◇ II / 6

$r(\varphi) \rightsquigarrow$ Polarkoordinaten • *Coordonnées polaires*
$f(\varphi) \rightsquigarrow$ Kartesische Koordinaten • *Coordonnées cartésiennes*
$\vec{v}(t) \rightsquigarrow$ Vektorkoordinaten • *Coordonnées vectoriels*

(1) $r(\varphi) = e^{\varphi}\,\sin(\varphi)(2+\varphi),\ \ \varphi \in [0, \pi]$ Flächeninhalt? • *Surface?*

(2) $r(\varphi) = e^{\varphi}\,\sin(\varphi)(2+\varphi),\ \ \varphi \in [0, \pi]$ Kurvenlänge? • *Longueur de la courbe?*

(3) $f(x) = e^{x}\,\sin(x)(2+x),\ \ x \in [0, \pi]$ Kurvenlänge? • *Longueur de la courbe?*

(4) $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 4\,\sin(t) \\ 7\,\cos(t) \\ t^2 \end{pmatrix},\ \ t \in [0, 4]$ Kurvenlänge? • *Longueur de la courbe?*

(5) $$f(x) = \frac{1}{(x-a)\,(x-b)\,(x-c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$$

$A, B, C = ?,\ \ \int f(x)\,dx = ?$

2.29 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇I1 ◇ II / 6b

---

(1) Splinekurven durch gegebene Punkte, Werkzeug • Courbes composée de splines qui passent par des points donnés, outil

Gegeben sind die folgenden Punkte:
• **Courbes composée de splines qui passent par des points donnés, outil**
• *Soyent donnés les points suivants:*

$$P_1 = (1; 2); P_2 = (2; 3); P_3 = (3; 0); P_4 = (4; 2)$$

Wir schätzen die Kurvensteigung in den Endpunkten P_1 und P_4, indem durch den gegebenen Punkt und die beiden Nachbarpunkte eine Parabel legen, die Koeffizienten berechnen und die Steigung der Parabel übernehmen. Im Innern nehmen wir als Kurvensteigung in einem Punkt die Sehnensteigung, die durch die beiden Nachbarpunkte gegeben ist. Schreibe ein Programm für *Mathematica*, das aus diesen Angaben die Splines berechnet und zeichnet.
• *Nous estimons dans les points extrêmes P_1 et P_4 la pente de la courbe en mettand une parabole qui passe par le point donné et les deux points voisins. Nous pouvons calculer les coefficients de la parabole et prendre la montée de la parabole comme montée de la courbe dans ces poins extrêmes. Dans les points à l'intérieur, nous prenons la montée de la corde, donnée par les deux points voisins, comme la montée de la courbe dans le point considéré. Écrire un programme de Mathematica qui calcule les splines à partir des informations données et qui dessine da courbe obtenue.*

(2) Zeichne mit dem Programm: • Dessiner à l'aide du programme:

(a) Gleiche Aufgabe wie bei Problem 1, aber mit $f(x) = \sin(x)$, $[x_1, x_2] = [0, 20]$ und $n = 40$, gleich grosse Teilintervalle.
• *Même problème que problème 1, mais avec $f(x) = \sin(x)$, $[x_1, x_2] = [0, 20]$ et $n = 40$, intervalles partiels de même longueur.*

$(f(x); x_1; x_2; n) = (\sin(x); 0; 20; 40)$

(b) $(f(x); x_1; x_2; n) = (\cos(x); 0; 10; 3)$

(c) $(f(x); x_1; x_2; n) = (\cos(x); 0; 10; 4)$

(d) $(f(x); x_1; x_2; n) = (\cos(x); 0; 10; 5)$

(e) $(f(x); x_1; x_2; n) = (\cos(x); 0; 10; 6)$

(f) $(f(x); x_1; x_2; n) = (\cos(x); 0; 10; 7)$

(g) $(f(x); x_1; x_2; n) = (\cos(x); 0; 10; 10)$

(h) $(f(x); x_1; x_2; n) = (\cos(x); 0; 10; 20)$

(i) $(f(x); x_1; x_2; n) = (\cos(x); 0; 10; 40)$

(j) $(f(x); x_1; x_2; n) = (\cos(x); 0; 10; 80)$

(3) Bezier-Kurven: • Courbes de Bezier:

Geg.: • Donné: $Q_1 = (1;2),\ Q_2 = (3;8),\ Q_3 = (7;9),\ Q_4 = (10;0)$

Suche eine Polynom-Vektorkurve, die durch Q_1 und Q_4 geht und in Q_1 die Gerade $\overline{Q_1Q_2}$ als Tangente sowie in Q_4 die Gerade $\overline{Q_3Q_4}$ als Tangente hat. Dabei sei $Q_{k,k+1}$ der Mittelpunkt von $\overline{Q_kQ_{k+1}}$, $Q_{k-1,k,k+1}$ der Mittelpunkt von $\overline{Q_{k-1,k}Q_{k,k+1}}$ und $Q_{1,2,3,4}$ der Mittelpunkt von $\overline{Q_{1,2,3}Q_{2,3,4}}$. Konstruiere die Kurve so, dass sie durch $Q_{1,2,3,4}$ geht und dort $\overline{Q_{1,2,3}Q_{2,3,4}}$ Tangente ist. Probiere erst einfachere Varianten aus.

• *Chercher une courbe polynomiale et vectorielle qui passe par Q_1 et Q_4 et qui a dans Q_1 la droite $\overline{Q_1Q_2}$ comme tangente ainsi que dans Q_4 la droite $\overline{Q_3Q_4}$ comme tangente. Soit $Q_{k,k+1}$ le centre de $\overline{Q_kQ_{k+1}}$, $Q_{k-1,k,k+1}$ le centre de $\overline{Q_{k-1,k}Q_{k,k+1}}$ et $Q_{1,2,3,4}$ le centre de $\overline{Q_{1,2,3}Q_{2,3,4}}$. Construire la courbe de manière qu'elle traverse $Q_{1,2,3,4}$ et que $\overline{Q_{1,2,3}Q_{2,3,4}}$ y soit la tangente. Essayer d'abord différentes variantes plus simples.*

(4) Animation: • Animation:

Selbe Aufgabe wie bei Problem 3, mit dem Unterschied $Q_2 = (3 + \frac{n}{5}; 8 + \frac{n^2}{10})$, $n \in \{-10, -9, -8, \ldots, 8, 9, 10\}$. Animiere den Output. Beachte, dass der Grad der Kurve bestehen bleibt, wenn ein Punkt wandert.

• *Même problème comme probème 3, avec la seule différence $Q_2 = (3 + \frac{n}{5}; 8 + \frac{n^2}{10})$, $n \in \{-10, -9, -8, \ldots, 8, 9, 10\}$. Animer l'output. Considérer que le degré de la courbe reste le même, aussi si un des points est déplacé.*

2.30 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ I1 ◇ II / 7

---

(1) Die Kurven $f(x) = r(x)$ werden um die x–Achse rotiert. Berechne die Mantelfläche sowie das Volumen des entstehenden Körpers.
• *Les courbes $f(x) = r(x)$ sont tournées autour l'axe x (pivoter sur l'axe). Calculer la surface (aire latérale) et le volume.*

(a) $r(x) = e^x \sin(x), \ \ x \in [0, \pi]$

(b) $r(x) = e^{-x}, \ \ x \in [0, \infty]$

(2) Eine Fläche ist gegeben durch die Kurven $f_1(x) = \sin(x)$ und $f_2(x) = \frac{\sin(x)}{2}$. Berechne den Flächenschwerpunkt.
• *Une surface soit donnée par $f_1(x) = \sin(x)$ et $f_2(x) = \frac{\sin(x)}{2}$. Calculer le centre de gravité.*

(3) Leite die exakte Formel her für die Mantelfläche eines Rotationskörpers.
• *Déduire la formule exacte pour la surface (aire latérale) d'un corps de révolution (rotationnel).*

2.31 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇I1 ◇ II / 7b

---

(1) Inhalte krummer Flächen oder Volumen, numerisch berechnet
• Contenus de surfaces ou volumes courbes, calculés de façon numérique

(a) Erkläre die Begriffe „Obersumme“ und „Untersumme“. Berechne damit den Flächeninhalt zwischen der Sinuskurve und der x–Achse von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ numerisch möglichst genau.
• *Expliquer les notions "somme supérieure" et "somme inférieure". Calculer numériquement à l'aide de ces notions le contenu de la surface entre la courbe du sinus et l'axe x de 0 jusqu'a $\frac{\pi}{2}$ aussi exacte que possible.*

(b) Gleiche Aufgabe wie vorhin, jedoch mit Trapezen.
• *Même problème que en haut, mais en utilisant des trapèzes.*

(c) Gleiche Aufgabe wie vorhin, jedoch mit Parabelkurven als Balkenbegrenzungen.
• *Même problème que en haut, mais en utilisant des courbes paraboliques comme arêtes des bâtons.*

(d) Was ist der Grenzwert der Differenz zwischen Obersumme und Untersumme im Falle einer Parabel bei einer Balkenbreite, die gegen 0 strebt? ($D_f = \mathbb{R}_0^+$.)
• *Quelle est la valeur limite de la différence de la somme supérieure et la somme inférieure au cas d'une parabole, si la largeur des bâtons va vers zéro? ($D_f = \mathbb{R}_0^+$.)*

(2) Hauptsatz der Infinitesimalrechnung:
• Théorème principal du calcul infinitésimal

Erkläre folgende Begriffe und Zusammenhänge:
• *Expliquer les notions et relations suvantes:*

Begründung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung:
• *Justification du théorème principal du calcul infinitésimal:*

(a) Was ist eine Stammfunktion?
• *Qu'est–ce que c'est qu'une fonction primitive?*

(b) Was ist die Ableitung einer Fläche als Funktion der oberen Grenze?
• *Qu'est–ce que c'est qu'une dérivée d'une surcace comme fonction de la borne supérieure?*

(c) Was ist ein bestimmtes Integral?
• *Qu'est–ce que c'est qu'une intégral définie?*

(d) Begründe den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung!
• *Justifier le théorème principal du calcul infinitésimal!*

(e) Was ist ein unbestimmtes Integral?
• *Qu'est–ce que c'est qu'une intégral indéfinie?*

(3) Einfache bestimmte Integrale: • Intégrales simples:

$f(x) = x^2$ etc... Bestimme: • *Trouver:*

(a) $\int\limits_{x=0}^{x=1} x^2\,dx$

(b) $\int\limits_{x=x_1}^{x=x_2} x^2\,dx$

(c) $x_2 \cdot f(x_2) - \int\limits_{x=0}^{x=x_2} f(x^2)\,dx$

(d) $\int\limits_{x=-10}^{x=10} f(x^2)\,dx$

(4) Stammfunktion: • Fonction primitive:

Bestimme die Stammfunktion: • *Calculer la fonction primitive:*

(a) $f(x) = x^n$

(b) $f(x) = e^x$

(c) $f(x) = 4\,x^3 - 5\,x^2 + 4\,x - 6$

(d) $f(x) = \sin(x)$

(e) $f(x) = x\,\sin(x^2)$

(5) Flächenberechnungen: • Calculer des surfaces:

Bestimme den Flächeninhalt: • *Calculer le contenu de la surface:*

(a) $f(x) = -\frac{1}{2}\,x^2 + 2,\;\; f(x_1) = f(x_2) = 0,\;\; \int\limits_{x=x_1}^{x=x_2} f(x^2)\,dx = \,?$

(b) $\int\limits_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx = \,?$

(c) $\int\limits_{x=-\infty}^{x=0} e^x\,dx = \,?$

(d) $\int\limits_{x=1}^{x=e} ln(x)\,dx = \,?$

(e) $\int\limits_{x=1}^{x=x_2} \frac{1}{x}\,dx = \,?$

(f) $\int\limits_{x=1}^{x=2} \frac{1}{x}\,dx = \,?$

(g) $\int\limits_{x=1}^{x=2} 4\,x^3 - 5\,x^2 + 4\,x - 6\,dx = \,?$

(h) $\int\limits_{x=0}^{x=x_2} \sin(x)\,dx = \int\limits_{x=0}^{x=x_2} \cos(x)\,dx \;\Rightarrow\; x_2 = ?$

(i) $\int\limits_{x=0}^{x=\pi} \sin(\frac{x}{2})\,dx + \displaystyle\int\limits_{x=0}^{x=\pi} \sin(x)\,dx + \int\limits_{x=0}^{x=\pi} \sin(2\,x)\,dx + \int\limits_{x=0}^{x=\pi} \sin(3\,x)\,dx + \int\limits_{x=0}^{x=\pi} \sin(4\,x)\,dx = ?$

(j) $\int\limits_{x=0}^{x=2\,\pi} \sin(x)\,dx + \int\limits_{x=0}^{x=2\,\pi} \cos(x)\,dx = ?$

2.32 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ I1 ◇ II / 8

---

(1) Gegeben sind die folgenden Punkte der Menge M. Lege durch die Punkte eine Polynomkurve $\{(x, y = p(x))\}$!
• *Soient donnés les points suivants de l'ensemble M. Trouver une courbe polynomiale $\{(x, y = p(x))\}$ qui passe par ces points!*

(a) $pgrad\,(p(x)) = |M_1| - 1$,
$M_1 = \{(1,4),(2,5),(3,6),(4,7),(5,3),(7,3),(8,5),(9,1),(10,4)\}$

(b) $pgrad\,(p(x)) = |M_2| - 1$,
$M_2 = \{(1,0),(2,0),(3,0),(4,10),(5,10),(7,0),(8,0),(9,0),(10,0),(11,0),(12,0)\}$

(c) Füge zu M_2 noch die folgende Punkte hinzu:
• *Agrandir M_2 en ajoutant les points suivants:*
$\{(-4,0),(-3,0),(-2,0),(-1,0),(11,0),(12,0),(13,0),(14,0)\}$

(2) Sei • *Soit* $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1,\ \ a = 0,\ \ b = 7$

(a) Approximiere $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ durch Obersummen und Untersummen. Vergleiche das Resultat mit dem exakten Wert.
• *Approximer $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ par des sommes inférieures et des sommes supérieures. Comparer le résultat avec la valeur exacte.*

i. Wähle $n = 10$ Teilintervalle. • *Choisir $n = 10$ intérvalles partiels.*
ii. Wähle $n = 100$ Teilintervalle. • *Choisir $n = 100$ intérvalles partiels.*
iii. Wähle $n = 1000$ Teilintervalle. • *Choisir $n = 1000$ intérvalles partiels.*
iv. Wähle $n = 10000$ Teilintervalle. • *Choisir $n = 10000$ intérvalles partiels.*

(b) Wähle $n = 100$ Teilintervalle. Benütze Trapeze an Stelle von Rechtecken.
• *Choisir $n = 100$ intérvalles partiels. Utiliser des trapèzes à la place des rectangels.*

(c) Wähle $n = 10$ Teilintervalle. Benütze Parabeln durch je drei benachbarte Punkte (z.B. durch $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$) an Stelle von Rechtecken oder Trapezen.
• *Choisir $n = 10$ intérvalles partiels. Utiliser des paraboles qui passent par trois points voisins (p.ex. par $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$) à la place des rectangles ou des trapèzes.*

(d) Vergleiche die Methoden. • *Comparer les méthodes.*

2.33 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ I1 ◇ II / 9

Prüfungsvorbereitung: Bearbeite soweit wie möglich die Aufgaben aus folgenden Testserien:
• *Préparation de l'examin: traiter aussi proffondement que possible les problèmes des séries de test suivantes:*

(1) Analysis Elektrotechnik, 1. Jahr: • *Analyse électrotechnique, 1ère année:*

- (a) Test 2, 1999–2000, (Probl. 2, 4, 5b!!)
- (b) Test 2, 2000–2001, (Probl. 4, 8!!)
- (c) Test 3a, 2000–2001, Probl. 3–6
- (d) PrTest, 2000–2001, Probl. 3–6

(2) Mathematik Architektur, 2. Jahr: • *Mathématiques architecture, 2ème année:*

- (a) (Test 1, 2000–2001)
- (b) Test 2, 2000–2001, Probl. 2–4
- (c) Test 3, 2000–2001

2.34 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇I1 ◇ II / 10

Verbesserung Test Analysis ◇ Correction examen analyse ◇ Type I1 ◇ II / 2

(1) **(24 Punkte)** • *(24 points)*

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig. Sie werden alle gleich bewertet. Alle Teilschritte der Lösung sind schriftlich auf dem Lösungsblatt festzuhalten.
• *Les problèmes partiels suivants sont indépendants. Pour chaque problème partiel on donne le même nombre de points. Toutes les étapes partielles de la solution sont à retenir par écrit sur la feuille de solution.*

(a) Integriere von Hand: • *Intégrer à la main:* $\int 5\,x^5 - 4\,x^\alpha + \frac{1}{2}\,x^2 - 4\,x + 9\,dx = ?$ $(\alpha > 0)$

(b) Integriere von Hand: • *Intégrer à la main:* $\int\limits_0^{t^2} x^2\,dx = ?$

(c) Integriere von Hand: • *Intégrer à la main:* $\int\limits_0^{\pi} \frac{1}{\omega}\,\cos(\omega t + \beta)\,dt = ?$

(d) Integriere von Hand: • *Intégrer à la main:* $\int\limits_{-1}^{1} y \cdot e^y\,dy = ?$

(e) Integriere von Hand: • *Intégrer à la main:* $\int\limits_0^{1} x \cdot e^{(x^2)}\,dx = ?$

(f) Integriere von Hand: • *Intégrer à la main:* $\int\limits_a^{t} \frac{d}{d\,x} ln(e^{x^2} + 2\,x\,\cos^2(3\,x - 2))\,dx = ?$

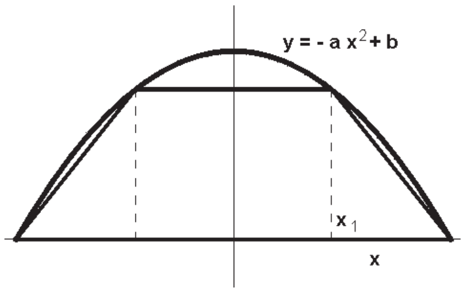
(g) Integriere von Hand: • *Intégrer à la main:* $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} 2\,e^{\sqrt{1-2\,x^2}}\,\frac{x}{\sqrt{1-2\,x^2}}\,dx = ?$ (Subst. $u := \sqrt{1-2\,x^2}$)

(h) Integriere von Hand: • *Intégrer à la main:* $\int \frac{1}{e^x\,x^2} - \frac{ln(\frac{1}{x})}{e^x}\,dx = ?$

(2) **(12 Punkte)**

Der Grundriss eines Hauses, das in einen Abhang hineingebaut wird, soll nach dem folgenden Prinzip festgelegt werden:
• *Le plan d'une maison, qui est construite dans une pente, devrait être fixé d'après le principe suivant:*

Zwischen der Parabel
$y = f_5(x) = -a\,x^2 + b \quad (a, b > 0)$
und der x–Achse wird ein Trapez eingeschrieben (vgl. Skizze).
• *Entre la parabole*
$y = f_5(x) = -a\,x^2 + b \quad (a, b > 0)$
et l'axe x on inscrit un trapèze (voir esquisse).



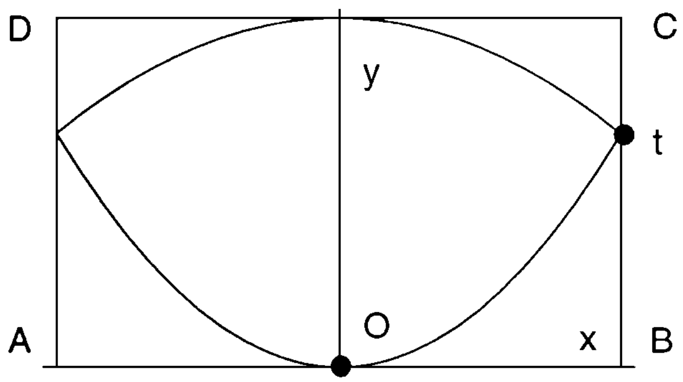
(a) Berechne die x–Koordinate x_1 des rechten oberen Punktes des Trapezes mit dem maximal möglichen Inhalt. (Der Lösungsweg muss sichtbar sein.)
• *Calculer la coordonnée x (qui soit x_1) du point supérieur droit du trapèze avec le contenu maximal possible. (Le chemin de solution doit être visible.)*

(b) Das Volumen des Aushubes beträgt schätzungsweise etwa einen Viertel des Volumens, das entsteht, wenn man die Parabel um die x–Achse rotieren lässt. Berechne dieses Volumen. (Der Lösungsweg muss sichtbar sein.)
• *Le volume de l'excavation fait approximativement un quart du volume qu'on obtient par rotation de la parabole autour de l'axe x. Calculer ce volume. (Le chemin de solution doit être visible.)*

(c) Berechne die Resultate für $a = \dfrac{1}{4}$ und $b = 36$.
• *Calculer les résultats pour $a = \dfrac{1}{4}$ et $b = 36$.*

(3) **(12 Punkte)**

Gegeben sei das Rechteck $A(-4, 0),\ B(4, 0),\ C(4, 4),\ D(-4, 4)$ sowie zwei Parabelbögen mit der y–Achse als Symmetrieachse (vgl. Skizze).
• *Soit donné le rectangle $A(-4, 0),\ B(4, 0),\ C(4, 4),\ D(-4, 4)$ ainsi que deux courbes de parabole dont l'axe y est l'axe de symétrie (voir ésquisse).*



(a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von t die Funktionsgleichungen der beiden Parabeln.
• *Calculer comment les équations des deux paraboles dépendent de t*

(b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die durch die beiden Parabelbögen begrenzt wird.
• *Calculer le contenu de la surface, qui est limité par les deux courbes paraboliques.*

(c) Berechnen Sie den Wert von t, für den der berechnete Flächeninhalt maximal ist.
• *Calculer la valeur t, pour laquelle le contenu de la surface devient maximal.*

(4) **(12 Punkte)**

Durch die Punkte $(0/0)$, $(\frac{\pi}{2}, 1)$, $(\pi, 0)$ geht eine Parabel.

• *Une parabole soit donnée par les points* $(0/0)$, $(\frac{\pi}{2}, 1)$, $(\pi, 0)$.

(a) Berechne die Länge des Parabelbogens über dem Intervall $[0, \pi]$.
• *Calculer la longueur de la courbe de la parabole sur l'intervalle* $[0, \pi]$.

(b) Berechne das Verhältnis der Länge des Parabelbogens über dem Intervall $[0, \pi]$ zur Länge der Sinuslinie über dem gleichen Intervall.
• *Calculer le rapport de la longueur de la parabole sur l'intervalle* $[0, \pi]$ *et de la longueur de la courbe du sinus sur le même intervalle.*

Fakultativ: • *Facultatif:*

(5) **(12 Punkte)**

Die Funktionskurve von $f(x) = y = e^{-x^2}$ wird um die y-Achse rotiert. Skizziere erst den Graphen von $f(x)$.
• *La courbe de la fonction $f(x) = y = e^{-x^2}$ soit pivotée sur l'axe y. Faire l'esquisse du graphe de $f(x)$.*

(a) Berechne das Volumen des entstehnden Rotationskörpers. (Achtung: die Mantelfläche sowie auch die Kurvenlänge sind ersichtlich unendlich gross!)
• *Calculer le volume du corps de révolution obtenu. (Attention: La surface et la longueur de la courbe sont infinies, comme il est bien visible.)*

(b) $f_1(x) = e^{-x^2 \cdot a}$.
Berechne a numerisch so, dass $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\, dx = 1$ wird.

• *Calculer a numériquement de façon qu'il soit* $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\, dx = 1$.

Viel Glück! • *Bonne chance!*

WIR

2.35 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇I1 ◇ II / 11

---

(1) Berechne eine Formel: • *Calculer une formule:*

$$\sum_{k=1}^{n} k^4$$

(2) (a) Berechne die Potenzreihe $p(x)$: • *Calculer la série de puissances* $p(x)$*:*

$$p(x) = \frac{f(x_0)^{(0)}}{0!}\,(x-x_0)^0 + \frac{f(x_0)^{(1)}}{1!}\,(x-x_0)^1 + \frac{f(x_0)^{(2)}}{2!}\,(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f(x_0)^{(n)}}{n!}\,(x-x_0)^n + O[x-x_0]^{n+1}$$

$$f(x) = ln(x), \;\; x_0 = 1$$

(b) Skizziere die Graphen von $f(x)$ und $p(x)$ für $n = 5$ und $n = 10$.
• *Faire l'esquisse des graphiques de* $f(x)$ *et de* $p(x)$ *pour* $n = 5$ *et* $n = 10$.

2.36 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇I1 ◇ II / 12

---

(1) Konvergenz? — Grenzwert, falls möglich? • *Convergence? — Valeur limite, si possible?*

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(3-4\,k)$

(b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 3\cdot 4^{k-1}$

(c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 3\cdot (\frac{1}{4})^{k-1}$

(d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\frac{k-1}{k^2})\cdot(\frac{1}{5})^{k+1}$

(e) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k\cdot(\frac{1}{k})^5$

(f) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\cdot x^k,\ \ |x|<1,\ \ |c_k|<10$

2.37 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇I1 ◇ II / 13

---

(1) Konvergenz? — Grenzwert, falls möglich? • *Convergence? — Valeur limite, si possible?*

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 4 * (\frac{1}{3})^{k-1} + 3 * (\frac{1}{4})^{k-1}$

(b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(1+k+k^2+k^3)}{(1+k+k^2+k^3+k^4+k^5)}$

(c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}, \qquad \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2\,k+1}$

(d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{3\,(1+k)}) - (\frac{1}{3\,(4+k)})$

(e) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (4\,x)^k$

(f) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$

2.38 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇I1 ◇ II / 14

---

(1) (a) Entwickle $ln(x)$ in eine Potenzreihe bis $n = 20$:
• *Calculer la série de puissances de* $\ln(x)$ *jusqu'à* $n = 20$*:*

$$p_1(x) = \frac{f(x_0)^{(0)}}{0!}(x-x_0)^0+\frac{f(x_0)^{(1)}}{1!}(x-x_0)^1+\frac{f(x_0)^{(2)}}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f(x_0)^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n+O[x-x_0]^{n+1}$$

$$f(x) = ln(x), \;\; x_0 = 1$$

(b) Entwickle $\frac{1}{x}$ in eine Potenzreihe bis $n = 20$:
• *Calculer la série de puissances de* $\frac{1}{x}$ *jusqu'à* $n = 20$*:*

$$p_2(x) = \frac{g(x_0)^{(0)}}{0!}(x-x_0)^0+\frac{g(x_0)^{(1)}}{1!}(x-x_0)^1+\frac{g(x_0)^{(2)}}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{g(x_0)^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n+O[x-x_0]^{n+1}$$

$$g(x) = \frac{1}{x}, \;\; x_0 = 1$$

(c) Berechne die Ableitung $p_1(x)'$. • *Calculer la dérivée* $p_1(x)'$.

(d) Berechne die Differenz $p_1(x)' - p_2(x)$. Was fällt auf?
• *Calculer la différence* $p_1(x)' - p_2(x)$*. Qu'est–ce qu'on voit?*

(2) (a) Entwickle $\sin(x)$ und $\cos(x)$ in eine Potenzreihe bis $n = 2$, $x_0 = 0$.
• *Calculer la série de puissances de* $\sin(x)$ *et de* $\cos(x)$ *jusqu'à* $n = 2$, $x_0 = 0$.

$\rightsquigarrow \quad p_{sin}(x), \;\; p_{cos}(x)$

(b) Löse die Gleichung $p_{sin}(x) = p_{cos}(x)$ algebraisch und berechne x.
• *Résoudre l'équation* $p_{sin}(x) = p_{cos}(x)$ *de façon algébrique et calculer* x.

(c) Löse die Gleichung $p_{sin}(x) = p_{cos}(x)$ numerisch mit Hilfe der Newton–Methode. Vergleiche das Resultat mit dem algebraischen Resultat.
• *Résoudre l'équation* $p_{sin}(x) = p_{cos}(x)$ *de façon numérique à l'aide de la méthode de Newton. Comparer le résultat avec le résultat algébrique.*

2.39 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇I1 ◇ II / 15

---

(1) Entwickle $ln(x)$ in eine Potenzreihe:
• *Calculer la série de puissances de* $\ln(x)$*:*

$$p_1(x) = \frac{f(x_0)^{(0)}}{0!}(x-x_0)^0 + \frac{f(x_0)^{(1)}}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f(x_0)^{(2)}}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f(x_0)^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n + O[x-x_0]^{n+1}$$

$$f(x) = ln(x),\ \ x_0 = 1$$

(a) $a_n(x) =?$

(b) Quotientenkriterium: • *Critère de d'Alembert:*
$q(x) := \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} < 1$ (für die Konvergenz) • *(pour la convergence)*

Grenzfall: $q(x) = 1$ • *Cas limite:* $q(x) = 1$

$\rightsquigarrow$ Berechne daraus x_{min} und x_{max}. Calculer de cette formule x_{min} et x_{max}.

$\rightsquigarrow$ Konvergenzradius r_∞: • *Rayon de convergence* r_∞*:*

$$I = (x_{min}, x_{max}),\ \ r_\infty := \frac{x_{max} - x_{min}}{2}$$

(2) Entwickle e^{x^2} in eine Potenzreihe:
• *Calculer la série de puissances de* e^{x^2}*:*

$$p_1(x) = \frac{f(x_0)^{(0)}}{0!}(x-x_0)^0 + \frac{f(x_0)^{(1)}}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f(x_0)^{(2)}}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f(x_0)^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n + O[x-x_0]^{n+1}$$

$$f(x) = e^{x^2},\ \ x_0 = 0$$

Idee: Verwende die Potenzreihenentwicklung von e^x. Ersetze darin x durch x^2.
• *Idée: Utiliser la série de puissances de* e^x*. Y remplacer* x *par* x^2*.*

(a) $a_n(x) =?$

(b) Quotientenkriterium: • *Critère de d'Alembert:*
$q(x) := \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} < 1$ (für die Konvergenz) • *(pour la convergence)*

Grenzfall: $q(x) = 1$ • *Cas limite:* $q(x) = 1$

$\rightsquigarrow$ Berechne daraus x_{min} und x_{max}. Calculer de cette formule x_{min} et x_{max}.

$\rightsquigarrow$ Konvergenzradius r_∞: • *Rayon de convergence r_∞:*

$$I = (x_{min}, x_{max}),\;\; r_\infty := \frac{x_{max} - x_{min}}{2}$$

(c) Von $f(x) = e^{x^2}$ ist keine elementare Stammfunktion bekannt. Berechne die Potenzreihe der Stammfunktion $F(x)$ durch Integration der Potenzreihe von e^{x^2}.
• *On ne connaît pas une fonction antidérivée de $f(x) = e^{x^2}$. Calculer la série de puissances $F(x)$ par intégration de la série de puissances de e^{x^2}.*

(d) Berechne mit Hilfe der ersten 4 Summanden der Potenzreihe eine Approximationsformel für $\int\limits_0^1 e^{x^2}\,dx$.
• *Calculer à l'aide des premiers 4 termes de la somme (de la série de puissances) une formule d'approximation de $\int\limits_0^1 e^{x^2}\,dx$.*

(e) Berechne eine Schranke für den Fehler der Approximation bei $n = 3$ (4 Glieder) nach der Formel von Lagrange (vgl. Script Seite 176, $h \leq 1,\;\; \mu = 1$).
• *Calculer une limite pour l'erreur de l'approximation pour $n = 3$ (4 termes) d'après la formule de lagrange (voir script page 176, $h \leq 1,\;\; \mu = 1$).*

(3) Studiere die Beispiele im Script Seite 177 und folgende Seiten.
• *Etudier les exemples dans le script aux pages 177 et aux pages suivantes.*

2.40 Lösungen ◇ Lines pour solutions

Die Lösungen werden bei Gelegenheit integriert, wenn der Autor dafür Zeit haben wird. • *Les solutions seront ajoutées prochainement à l'occasion, si l'auteur aura le temps.*

Lösungen siehe unter den Links: • *Solutions voir les liens:*

http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/Problems.html
(Schema) • *(Schéma)*

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html
(*Mathematica*–Quellencode) • *(Code de source en Mathematica)*

Kapitel • Chapitre 3

Analysis Mikrotechnik — Analyse microtechnique

Siehe Analysis Elektrotechnik oder Mikrotechnik
• *Voir analyse électrotechnique ou microtechnique*

Kapitel • Chapitre 4

Math. 2 B–Arch. — Math. 2 B–arch.

(Mathematik 2 Architektur (B)) • *(Mathématiques 2 architecture (B))*

4.1 Inhalt — Les matières

---

(1) Übungen 1. Semester • *Exercices semestre 1*

(2) Übungen 2. Semester • *Exercices semestre 2*

(3) Lösungen siehe unter den Links: • *Solutions voir les liens:*

http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/Problems.html
(Schema) • *(Schéma)*

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html
(*Mathematica*–Quellencode) • *(Code de source en Mathematica)*

(4) Vordiplome siehe unter Link: • *Diplômes préalables voir le lien:*

http://rowicus.ch/Wir/VDs/VDs.html

4.2 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ B2 ◇ I / 1

---

(1) (a) Ursprung der Mathematik?
• *Origine des mathématiques?*

(b) Wie $\mathbb{Q}$ nummerieren?
• *Comment numéroter* $\mathbb{Q}$*?*

(2) Zeigen: • *Montrer:*

(a) In einem Dreieck ist die Winkelsumme immer 180°.
• *Dans un triangle la somme des angles est toujours* 180°*.*

(b) Satz von Pythagoras.
• *Théorème de Pythagore.*

(c) Satz von Thales.
• *Théorème de Thales.*

Wieso muss man die mathematischen Sätze beweisen?
• *Pourquoi est–ce qu'il faut prouver les théorèmes mathématiques?*

(3) Bearbeite den Stoff der Lektionen (Verbesserungen . . .).
• *Elaborer la matière des leçons (corrections . . .).*

Organisation, Planung:

(a) Planung organisieren! (Strategie, Prinzipien, Tandem)

(b) Einarbeitung in die Lerntechnik

(c) A4-Seite mit den wichtigsten 7 Punkten abgeben.

• *Organisation, projets:*

(a) • *Organiser la planification! (Stratégie, principes, tandem)*

(b) • *Se mettre au courant concernant la "technique d'apprendre".*

(c) • *Livrer une page A4 avec les 7 points les plus importants.*

(4) Rechner-Probleme lösen, falls nötig beschaffen:
• *Résoudre les problèmes avec les ordinateurs, procurer si nécessaire:*

(a) Account (Schule) • *Account (école)*

(b) Mathematica–Zugang • *Possibilité d'utiliser Mathematica*

(c) Mathematica–Kurs (DOWNLOAD, WIR) • *Cours de Mathematica (DOWNLOAD, WIR)*

(d) Eigener Rechner, Mathematica, Zip, Internet • *Ordinateur privé, Mathematica, Zip, Internet*

(e) Taschenrechner. • *Calculatrice de poche.*

(5) Reglemente, Literatur: • *Règlements:*

(a) Schulreglemente studieren, Weisungen, Führer • *Etudier les règlements de l'école, directives , guides*

(b) Literatur (Lehrbuch, Formeln) beschaffen • *Procurer la littérature (livres de théorie, formules).*

(6) Porte–Feuille: • *Porte–feuille:*

(a) Eigene Formelsammlung, Zusammenfassungen

(b) Planungen, Lerntechnik: Strategien, Prinzipien, Schemata, wichtige Dinge

(c) Übungen

(d) Prüfungen, Verbesserungen

(e) Mathematica–Arbeiten

(f) Journal

(a) • *Collection de formules, abrégé*

(b) • *Planification, technique de travail: Stratégies, principes, schémas, choses importants*

(c) • *Excercices*

(d) • *Tests, corrigés*

(e) • *Travaux de Mathematica*

(f) • *Journal*

Benotet werden: • *On donne des notes pour:*

(a) Tests

(b) Porte–Feuille, Arbeiten, Mitarbeit

(a) • *Tests*

(b) • *Porte–feuille, traveaux, travail pendant la leçon*

Abgabe der Uebungen: Woche später. • *Rendre les excercices: une semaine plus tard.*

(7) (a)

$$x = 3 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{3}{3 + \ldots}}}} := 3 + \frac{3\,|}{|\,3} + \frac{3\,|}{|\,3} + \frac{3\,|}{|\,3} + \frac{3\,|}{|\,3} + \cdots = ??, \quad x \in \mathbb{Q}??$$

(b) $2 + 6 + 10 + 14 + 18 + 22 + \ldots + 2222 = ?$

(c) $x + y \geq 1, \;\; x - y \geq 2, \;\; \mathbb{L} \; = ?$ (Zeichnung • *Dessin*)

(d) Zeigen: • *Montrer:* $x, y \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; ||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$

(e) Erklären: • *Expliquer:* $3 : 4 : 5 : 6 \stackrel{?}{=} 2 : 3 : 4 : x$

(f) $\sin(x) = x + \cos(x), \;\; x = ?$

4.3 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ B2 ◇ I / 2

---

(1) Stelle Plots her: • *Fabriquer des plots:*

(a) $f(x) = 3\,x - 4$

(b) $f(x) = \sin(\cos(x))$

(c) $f(x) = |x| - [\sin(x)]$

(d) $f(x) = [4\,x] - sgn(x)$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$

(f) $f(x) = \cos(x^2 + x)$

(g) $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$

(h) $f(x) = e^{x^2}$

(i) $f(x) = e^{-x^2} - 1$

(2) Sei • *Soit* $f(x) = x^2 - x + 1,\;\; g(x) = -\dfrac{1}{2}\,x^2 + x + 2$

$\leadsto$ Löse: • *Résoudre:* $f(x) \geq g(x)$

(3) Plot: • *Plot (dessin):*

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} \sin(x) & x = n \in \mathbb{Z} \\ 0 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

4.4 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ B2 ◇ I / 3

Beurteile, um welche Funktionstypen es sich handelt! (Folge, konstant, linear, quadratisch, Potenzfunktion, beschränkt, mit Polen, mit Asymptoten, periodisch, D_f, W_f ...)
• *Classifier d'après les types de fonction! (Suite, constante, linéaire, quadratique, fonction puissance, bornée, avec pôle, avec asymptote, périodique* D_f, W_f ...*)*

(1) $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$

(2) $f(x) = e^{\sin(x)}$

(3) $f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$

(4) $f(x) = \tan(\sin(x))$

(5) $f(x) = 4\,x^2 - 3\,x + 2, \;\; D_f = [-1, +1]$

(6) $f(x) = [x^7]$

(7) $f(x) = sgn(x^7)$

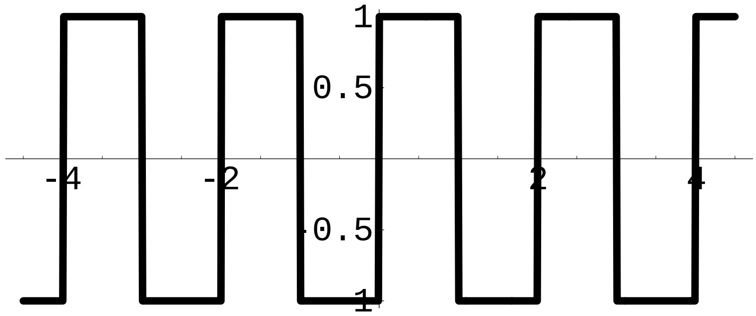
(8) $f(x) = x^7 \cdot sgn(x^7)$

4.5 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ B2 ◇ I / 4

---

(1) Mache eine Zusammenfassung der verschiedenen Funktionstypen, die Du kennst.
• *Faire un résumé des différents types de fonctions qu'on connait maintenant.*

(2) Zeichne die folgende Funktion mit Hilfe eines Taschenrechners oder mit *Mathematica*:
• *Dessiner la fonction suivante à l'aide d'une calculatrice de poche ou à l'aide de Mathematica:*



Das ist ein *Mathematica*–Output. • *Ce dessin a été fait avec Mathematica.*

$\rightsquigarrow$ Man hat das Problem, die Funktion zu komponieren! • *On a le problème de composer la fonction!*

4.6 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ B2 ◇ I / 5

---

(1) Sei • *Soit* $f(x) = \cos(x),\;\; g(x) = \arccos(x),\;\; h(x) = e^x$

(a) $g(f(x)) = (g \circ f)(x) = \,?$

(b) $h(g(x)) = (h \circ g)(x) = \,?$

(c) $h((g \circ f)(x)) = (h \circ (g \circ f)(x)) = \,?$

(d) $(h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x) = \,?$

(2) Skizziere: • *Esquisse:*

$$u(t) \quad = \quad \begin{cases} \cos(t) & t \leq 0 \\ \arccos(t) & t \in (0, \dfrac{\Pi}{2}) \\ e^t & t \geq \dfrac{\Pi}{2} \end{cases}$$

(3) Ist f gerade/ ungerade? Wo ist f monoton? Wo gibt es Polstellen?
• *Où est–ce que la fonction f est paire/ impaire? Où est–ce que f est monotone? Où est–ce qu'on trouve des places de pôle?*

(a) $f(x) = \sin(\cos(x))$

(b) $f(x) = \cos(e^x)$

(c) $f(x) = \dfrac{2 - x}{x^2 - 3\,x + 2}$

4.7 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ B2 ◇ I / 6

---

(1) Arbeite an der Einführung in *Mathematica*! Repetiere zudem den Stoff für den nächsten Test!
• *Travailler à l'introduction dans Mathematica! En plus répéter la matière pour le test prochain*

http://rowicus.ch/Wir/MathemDF/Mathem.html

4.8 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ B2 ◇ I / 7

---

(1) Skizze des Graphen? • *Esquisse de la graphique?*

(a) $f_1(x) = \sinh(\sin(x))$

(b) $f_2(x) = \sin(\sinh(x))$

(c) $f_3(x) = \sinh(\cos(x))$

(d) $f_4(x) = \sinh(\arcsin(x))$

(2)

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}$$

Berechne eine numerische Näherung von x.
• *Calculer une approximation numérique de x.*

(3) Bestimme die Grenzwerte: • *Trouver les valeurs limites:*

(a) $a_n = \dfrac{1}{n}$

(b) $a_n = 2 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

(c) $a_n = \dfrac{2\,n^2}{1 + 3\,n^2}$

(d) $a_n = \dfrac{4\,n^3 - 3\,n + 1}{n^4 - 2\,n^2}$

(e) $b_n = \sin(n) \cdot \dfrac{1}{n}$

(f) $b_n = e^{-\frac{1}{n}}$

4.9 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ B2 ◇ I / 8

---

(1) $f(x) = e^{(x^2 - \cos(2\,x))} \leadsto$ f gerade/ ungerade? • f *paire/ impaire?*

(2) $f(x) = y = e^{-x^2}$

(a) $x \geq 0 \leadsto$ $f^{-1}(x) = \,?$ Skizze! • *Esquisse!*

(b) $f^{-1}(0.5) \approx \,?$

(3) $\log(x^2) + \log(\frac{1}{x}) - \log(x) = \,?$

(4) $\sin(x + \frac{\pi}{3}) = \sin(x) \cdot (?) + \cos(x) \cdot (?)$

(a) $\sin(x + \frac{\pi}{3}) = \sin(x) \cdot (?) + \cos(x) \cdot (?)$

(b) $\tan(x + \frac{\pi}{3}) = \ldots\,?\ \ldots$

(5) $r(\varphi) = 1 + \cos(\frac{\varphi}{2}) \leadsto$ Polar…Skizze! • *Polaire… esquisse!*

(6) $2 \cdot 3^x = 5^x \leadsto$ $x = \,?$

(7) $0.367\overline{367}\ldots = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{N} \leadsto$ $p, q = \,?$

4.10 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ B2 ◇ I / 9

---

(1) $\langle a_n\rangle = \langle \dfrac{\sin(3\,\pi + \frac{4}{5}\,n^2)}{n^2}\rangle \leadsto \; a_n \to \,?$

(2) $\langle a_n\rangle = \langle \dfrac{n^2 - 2\,n + 5}{n^3 + n^2 + 1}\rangle \leadsto \; a_n \to \,?$

(3) $\langle a_n\rangle = \langle \dfrac{ln(n)}{n^2}\rangle \leadsto \; a_n \to \,?$
Hinweis: Skizze! • *Indication: Exquisse!* $\leadsto \; ln(n), \; n$

(4) $\langle a_n\rangle = \langle (1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}) \cdot (5 + \dfrac{2+n}{n})\rangle \leadsto \; a_n \to \,?$

(5) $\langle a_n\rangle = \langle e^{\sin(\pi + \frac{1}{n})}\rangle \leadsto \; a_n \to \,?$

4.11 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ B2 ◇ I / 9n

---

(1) $\langle a_n \rangle = \langle \dfrac{\sin(3\,\pi + \frac{4}{5}\,n^2)}{n^2} \rangle \qquad \leadsto \; a_n \to ?$

(2) $\langle a_n \rangle = \langle \dfrac{n^2 - 2\,n + 5}{n^3 + n^2 + 1} \rangle \qquad \leadsto \; a_n \to ?$

(3) $\langle a_n \rangle = \langle \dfrac{ln(n)}{n^2} \rangle \qquad \leadsto \; a_n \to ?$

Hinweis: • *Indication:* $ln(n) \geq ? \leq n \leadsto$ Skizze • *Esquisse*

(4) $\langle a_n \rangle = \langle (1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}) \cdot (5 + \dfrac{2+n}{n}) \rangle \leadsto \; a_n \to ?$

(5) $\langle a_n \rangle = \langle e^{\sin(\pi + \frac{1}{n})} \rangle \qquad \leadsto \; a_n \to ?$

4.12 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ B2 ◇ I / 10

---

(1) Arbeite an der Einführung in *Mathematica*! Repetiere zudem den Stoff für den nächsten Test!
• *Travailler à l'introduction dans Mathematica! En plus répéter la matière pour le test prochain*

http://rowicus.ch/Wir/MathemDF/Mathem.html

4.13 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ B2 ◇ I / 11

---

(1) $\langle a_n \rangle = \langle 1 - (\frac{1}{2})^n \rangle$ $\quad \rightsquigarrow \quad a_n \to \,?$

(2) $\langle a_n \rangle = \langle \frac{\cos(3\,n)}{n} \rangle$ $\quad \rightsquigarrow \quad a_n \to \,?$

(3) $\langle a_n \rangle = \langle \frac{2 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + 4\,n}{1 - n + \frac{4}{n}} \rangle$ $\quad \rightsquigarrow \quad a_n \to \,?$

(4) $\langle a_n \rangle = \langle e^{\frac{1}{n}} \rangle$ $\quad \rightsquigarrow \quad a_n \to \,?$

(5) $\langle a_n \rangle = \langle \frac{ln(n)}{n^2} \cdot sin(n) \rangle$ $\quad \rightsquigarrow \quad a_n \to \,?$

4.14 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ B2 ◇ I / 12

---

(1) Arbeite an der Einführung in *Mathematica*! Repetiere zudem den Stoff für den nächsten Test!
• *Travailler à l'introduction dans Mathematica! En plus répéter la matière pour le test prochain*

(2) *Mathematica*: Befehl: • *Ordre:* „Limit "⇝ Beispiele: • *Exemples:*

```
In:   Limit[(Cos[n^2] + 3n + 4n^2)/(1 + n + n^2 - 7 n^3), n -> Infinity]
Out:  0

In:   Limit[(Cos[n^2] + 3n + 4n^3)/(1 + n + n^2 - 7 n^3), n -> Infinity]
Out:  -4/7

In:   Sum[1/k^2, {k, 1, 20}]
Out:  17299975731542641/10838475198270720

In:   Sum[1/k^2, {k, 1, Infinity}]
Out:  (Pi^2)/6

In:   Limit[(1/n)^(1/n), n -> Infinity]
Out:  1

In:   Limit[(1/n)^(1 + 1/n), n -> Infinity]
Out:  0

In:   Limit[(n Cos[n^2] + 3n + 4n^3)/(1 + n + n^2 - 1/(7 n^3)), n -> Infinity]
Out:  Infinity
```

4.15 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ B2 ◇ I / 13

---

(1) $\langle a_n\rangle = \langle\frac{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi+3\,n}{4\,n}\rangle \quad \leadsto \quad a_n \rightarrow ?, \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = ?$

(2) $\langle a_n\rangle = \langle\frac{6\,n^3-5\,n^2+2\,n-6+\frac{1}{n}}{2\,n^3-4\,n+7+\frac{8}{n^2}}\rangle \quad \leadsto \quad a_n \rightarrow ?, \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = ?$

(3) $\langle a_n\rangle = \langle\frac{\cos^2(n)-\sin^3(n^2-4\,n+1)+8}{n^2-\sin(\tan(n))}\rangle \quad \leadsto \quad a_n \rightarrow ?, \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = ?$

(4) $\lim\limits_{n\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = ?$

(5) $\lim\limits_{n\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} = ?$

(6) $\lim\limits_{n\to 0}(x^2-x)\cdot\frac{\sin(x)}{x^2\cdot\cos(x)} = ?$

(7) $\lim\limits_{n\to 0}(\frac{\tan(x)}{x}+(x-1)\cdot(x+1)) = ?$

4.16 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ B2 ◇ I / 14

---

(1) $f(x) = \dfrac{\sin(x^2-2)}{x^2-2}, \;\; x_0 = 1, \;\; x_1 = \sqrt{(2)}$
f stetig für $x = x_0$ • *f continue pour $x = x_0$* $\quad \rightsquigarrow \; x = x_1 \rightsquigarrow$???

(2) $f(x) = \dfrac{\tan(x)}{x^2-1}$
Wo ist f nicht stetig? • *Qù est–ce que f n'est pas continue?*

(3) $f(x) \;=\; \begin{cases} 3 & x \leq 0 \\ 7 & x \geq 6 \end{cases}$ Zeichnung? • *Esquisse?*
Vervollständige den Graphen derart, dass f stetig wird!
• *Completer la graphique de façon que f devient continue!*

(4) $\lim\limits_{n\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \,?$

(5) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{ln(x+1)}$

(a) Wo ist f nicht stetig? • *Oû est–ce que f n'est pas continue?*
(b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \,?$
(c) Skizziere: • *Esquisse de:* $\quad f(x), \;\; e^x - 1, \;\; ln(x+1)$

4.17 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ B2 ◇ I / 15

---

(1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \dfrac{1}{x-1}$

Wo ist f stetig?
• *Qù est–ce que f est continue?*

(2) $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{(\tan(x))^2}{x}$

Wo ist f stetig?
• *Qù est–ce que f est continue?*

(3) $f(x) = (x-1)\cdot(x+1),\ \ I = D_f = [-4, 4)$

Minimum und Maximum von f?
• *Minimum et maximum de f?*

(4) $f(x) = e^{\sin(x)},\ \ x \in [0, 8\,\pi)$

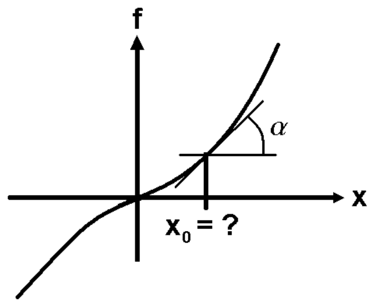
Minimum und Maximum von f?
• *Minimum et maximum de f?*

4.18 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ B2 ◇ I / 16

---

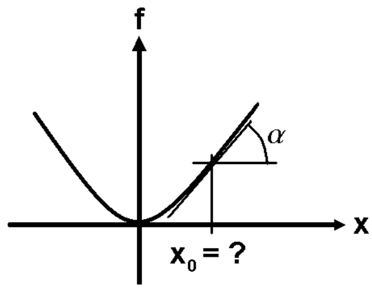
(1) $\alpha = 80^o \qquad f(x) = x^3$

$x_0 = ?$



(2) $f(x) = x^4$

$\alpha(x_0) = \alpha(1)$



(3) $f(x) = k \cdot x^n, \;\; n \in \mathbb{N}$ $\qquad f'(x) = ?$

(4) $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ $\qquad f'(x) = ?$
f_1, f_2 bekannt • *données*

(5) $f(x) = 3\,x^7 + 9\,x^4 + 2$ $\qquad f'(x) = ?$

4.19 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ B2 ◇ II / 1

---

(1) Arbeite am *Mathematica*–Kurs!
• *Travailler au cours de Mathematica!*

http://rowicus.ch/Wir/MathemDF/Mathem.html

4.20 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ B2 ◇ II / 1b

---

(1) Ableitung mit Mathematica:

$$f_1(x) = e^{\frac{\sin(\cos(\cot(x)))}{\log(x\ \log(x^5-\log(x)))}}\ \tan(\cos(x^{-4} - 3\ \sin(x)))$$

$$f_2(x) = x^{x^{x^{x^{x^{x}}}}},\ \ f_3(x) = ((((x^x)^x)^x)^x)^x,\ \ f_4(x) = x^{(x^{(x^{(x^{(x^x)})})})}$$

$$f_5(x) = \left(\left(\left((x^x)^{x^x}\right)^{(x^x)^{x^x}}\right)^{\left((x^x)^{x^x}\right)^{(x^x)^{x^x}}}\right)^{\left(\left((x^x)^{x^x}\right)^{(x^x)^{x^x}}\right)^{\left((x^x)^{x^x}\right)^{(x^x)^{x^x}}}}$$

(2) Ein lineares Gleichungssystem soll rasch näherungsweise gelöst werden. Idee: Versuche eine Iteration mit Mathematica.

$A\cdot\vec{x}+\vec{b}$

$$\begin{array}{rcl} 6.25\,\boxed{x_1} + 2.08\,x_2 - 1.44\,x_3 & = & 2.59 \\ 1.78\,x_1 - 4.61\,\boxed{x_2} + 0.44\,x_3 & = & 5.22 \\ -1.36\,x_1 + 0.95\,x_2 + 3.75\,\boxed{x_3} & = & 3.61 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclrcl} x_1 & = & \frac{1}{6.25}(2.59 \qquad - 2.08\,x_2 + 1.44\,x_3) & x_{1,k+1} & = & \frac{1}{6.25}(2.59 - 2.08\,x_{2,k} + 1.44\,x_{3,k}) \\ x_2 & = & \frac{1}{4.16}(5.22 - 1.78\,x_1 \qquad - 0.44\,x_3) \leadsto & x_{2,k+1} & = & \frac{1}{4.16}(5.22 - 1.78\,x_{1,k+1} - 0.44\,x_{3,k}) \\ x_3 & = & \frac{1}{3.75}(4.61 + 1.36\,x_1 - 0.95\,x_2 \qquad) & x_{3,k+1} & = & \frac{1}{3.75}(4.61 + 1.36\,x_{1,k+1} - 0.95\,x_{2,k+1}) \end{array}$$

Start: Setze z.B. $x_{2,0} = 0,\ \ x_{3,0} = 0.$
8 Schritte.

Vergleiche mit den exakten Werten!

Versuche:

$A \cdot \vec{x} + \vec{b}$

$$\begin{array}{rcl} 1\,\boxed{x_1} + 2\,x_2 + 3\,x_3 & = & 2.59 \\ 2\,x_1 + 3\,\boxed{x_2} + 4\,x_3 & = & 5.22 \\ -1\,x_1 + 1\,x_2 + -1\,\boxed{x_3} & = & 3.61 \end{array}$$

30 Schritte. Was passiert?

(3) **Geg.:** • **Donné:** $P_1 = (-2; 2),\ \ P_2 = (\frac{1}{2}; 0),\ \ P_3 = (2; 0),\ \ \tan(\alpha(P_3)) = 2$

Versuche, eine Polynomkurve 3. Grades durch $P_1,\ P_2,\ P_3$ zu legen.
$\leadsto\ f(x) = a_3\, x^3 + a_2\, x^2 + a_1\, x + a_0$

Mathematica-Plot der Kurve?

Ersetze $P_2 = (\frac{1}{2}; 0)$ durch $P_2 = (-\frac{1}{2}; 0)$ und suche den Wendepunkt (Mathematica-Plot).

(4) Ein A4-Blatt ($210\,mm \times 297\,mm$) wird 4 mal so gefaltet, dass an jeder Ecke ein Quadrat entsteht. Nachdem die 4 Quadrate weggeschnitten worden sind, entsteht durch die Faltung ein Schachteldeckel. Dieser wird als Notbehausung einer Maus in einem Käfig verwendet werden. Wie gross muss die Quadratseite x gewählt werden, damit das Volumen maximal wird?
Mit dem 4 abgschnittenen Quadraten der Seitenlänge x wird ähnlich verfahren. Man faltet jedes Quadrat bei jeweils $\frac{x}{3}$ und erhält nach wegschneiden der neuen Restquadrate 4 kleine kubische Deckel. Berechne x so, dass der Gesamtinhalt des Schachteldeckels und der kubischen Deckel zusammen maximal wird.

(5)

$$f(x) = a(x-1)(x+1)$$

In den Nullstellen werden die Tangenten gezogen. Die x–Achse bildet mit den Tangenten ein Dreieck. Berechne den Punkt des Dreiecks auf der y–Achse in Abhängigkeit von a.

(6) Berechne die Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} zu f.

(a)

$$f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x} = x^{(\frac{1}{5})}$$

(b)

$$f^{-1}(x) = \arcsin(x)$$

Berechne die Ableitung von $f^{-1}(x)$.

(7) Gegeben sei $f(x) = \frac{1}{2}\,(x+1)(x-1)(x-2)$. An den Stellen $x = -2$ und $x = 3$ wird die Sehne gezogen. Berechne diejenigen Punkte auf der Kurve, in denen die Tangente die gleiche Steigung hat wie die gegebene Sehne.

WIR

4.21 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ B2 ◇ II / 2

---

(1) $f(x) = x^2 \cdot \cos(x)$ $\leadsto$ $f'(x) = \,?$

(2) $f(x) = (\sin(x))^3$ $\leadsto$ $f'(x) = \,?$

(3) $f(x) = 3\,x - \dfrac{x}{\cos(x)}$ $\leadsto$ $f'(x) = \,?$

(4) $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$ $\leadsto$ $f'(x) = \,?$

(5) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{x^2}{x^2+2}$ $\leadsto$ $f'(x) = \,?$

(6) $f(x) = \sin(2\,x)\ (= 2\,\sin(x) \cdot \cos(x))$ $\leadsto$ $f'(x) = \,?$

(7) $f(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ $\leadsto$ $f'(x) = \,?$

4.22 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ B2 ◇ II / 2b

---

(1) Diskussion einer Funktion: • Discussion d'une fonction

$$f(x) = e^{-x^2+4\,x+1}$$

Bestimme: • *Calculer:*

(a) Verhalten weit aussen • *Comportement pour des valeurs de x très grandes*

(b) Extrema • *Extrémum*

(c) Nullstellen • *Zéros*

(d) Wendepunkte • *Points d'inflexion*

(e) Graph • *Graphique*

(2) Diskussion einer Funktion: • Discussion d'une fonction

$$f(x) = (2\,x - 3) + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$$

Bestimme: • *Calculer:*

(a) Verhalten weit aussen • *Comportement pour des valeurs de x très grandes*

(b) Asymptoten • *Asymptotes*

(c) Extrema • *Extrémum*

(d) Nullstellen • *Zéros*

(e) Wendepunkte • *Points d'inflexion*

(f) Graph • *Graphique*

%

(3) Bernoulli:

Leite aus dem Restfunktion-Lemma die Regel von Bernoulli her. Bei Schwierigeiten ist für die Regel ein Lehrbuch zu konsultieren. Oft findet man die Regel immer noch unter dem Namen „Regel von de l'Hospital", denn Bernoulli hat die Regel an de l'Hospital „verkauft". Wende die Regel dann auf die folgenden Beispiele an: • *Déduire la règle de Bernoulli du lemme de la fonction du reste. Appliquer la règle aux exemples suivants:*

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4\, e^x - 4}{3\, \sin(x) - 4\, \sin(2\, x)}$

(b) $\lim\limits_{x \downarrow 0} x^x$

(c) $\lim\limits_{x \downarrow 0} \dfrac{7\, ln(x)}{8\, \cot(x)}$

(d) $\lim\limits_{x \downarrow 0} \dfrac{ln(x)}{x^n}$

(e) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{ln(x)}{x^n}$

(f) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^n}{e^x}$

(g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^n}{e^x}$

4.23 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ B2 ◇ II / 3

---

(1) Studiere: • Etudier: $f(x) = ln(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$$x = f(z) = ln(z) \xmapsto{f^{-1}} z = f^{-1}(x) = e^x \qquad \Rightarrow \; (f^{-1}(x))' = \,?$$

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'_z(z)}\Big|_{z=f^{-1}(x)=e^x} = \frac{1}{ln(z)'_z}\Big|_{z=e^x} = \frac{1}{(\frac{1}{z})}\Big|_{z=e^x} = z_{|_{z=e^x}} = e^x$$

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

(2) $f(x) = e^{2\,x} \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = \,?$

(3) $f(x) = e^{(x^2)} \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = \,?$

(4) $f(x) = e^{\sin(x)} \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = \,?$

(5) $f(x) = e^{a\,x+b} \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = \,?$

(6) $f(x) = ln(x^7) \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = \,?$

(7) $f(x) = x \cdot e^x + ln(\cos(x)) \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = \,?$

(8) $f(x) = x^x \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = \,?$

(9) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(2\,x + 3) \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = \,?$

(10) $f(x) = \sin^3(x) - 2\,\sin^2(x) + 4\,\sin(x) - 5 \quad \rightsquigarrow \quad f'(x) = \,?$

(11) $f(x) = 2\,(x-4)\,(x-2)\,(x+1), \;\; f'(x_1) = f'(x_2) = 0$
$\rightsquigarrow \;\; x_1 = \,?, \;\; x_2 = \,?$

4.24 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ B2 ◇ II / 3b

---

(1) Hauptsatz der Infinitesimalrechnung:

Begründe den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

(a) Was ist eine Stammfunktion?
(b) Was ist die Ableitung einer Fläche als Funktion der oberen Grenze?
(c) Was ist ein bestimmtes Integral?
(d) Begründe den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung!
(e) Was ist ein unbestimmtes Integral?
(f) Was ist der Grenzwert der Differenz zwischen Obersumme und Untersumme im Falle einer Parabel bei einer Balkenbreite, die gegen 0 strebt? ($D_f = \mathbb{R}_0^+$.)

(2) Einfache bestimmte Integrale:

$f(x) = x^2$ etc... Bestimme:

(a) $\int\limits_{x=0}^{x=1} x^2\,dx$
(b) $\int\limits_{x=x_1}^{x=x_2} x^2\,dx$
(c) $x_2 \cdot f(x_2) - \int\limits_{x=0}^{x=x_2} f(x^2)\,dx$
(d) $\int\limits_{x=-10}^{x=10} f(x^2)\,dx$

(3) Stammfunktion:

Bestimme die Stammfunktion:

(a) $f(x) = x^n$
(b) $f(x) = e^x$
(c) $f(x) = 4\,x^3 - 5\,x^2 + 4\,x - 6$
(d) $f(x) = \sin(x)$
(e) $f(x) = x\,\sin(x^2)$

(4) Flächenberechnungen:

Bestimme die Stammfunktion:

(a) $f(x) = -\frac{1}{2}\,x^2 + 2,\;\; f(x_1) = f(x_2) = 0,\;\; \int\limits_{x=x_1}^{x=x_2} f(x^2)\,dx = \,?$

(b) $\int\limits_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx = \,?$

(c) $\int\limits_{x=-\infty}^{x=0} e^x\,dx = \,?$

(d) $\int\limits_{x=1}^{x=e} ln(x)\,dx = \,?$

(e) $\int\limits_{x=1}^{x=x_2} \frac{1}{x}\,dx = \,?$

(f) $\int\limits_{x=1}^{x=2} \frac{1}{x}\,dx = \,?$

(g) $\int\limits_{x=1}^{x=2} 4\,x^3 - 5\,x^2 + 4\,x - 6\,dx = \,?$

(h) $\int\limits_{x=0}^{x=x_2} \sin(x)\,dx = \int\limits_{x=0}^{x=x_2} \cos(x)\,dx \;\Rightarrow\; x_2 = ?$

(i) $\int\limits_{x=0}^{x=\pi} \sin(\frac{x}{2})\,dx + \int\limits_{x=0}^{x=\pi} \sin(x)\,dx + \int\limits_{x=0}^{x=\pi} \sin(2\,x)\,dx + \int\limits_{x=0}^{x=\pi} \sin(3\,x)\,dx + \int\limits_{x=0}^{x=\pi} \sin(4\,x)\,dx = ?$

(j) $\int\limits_{x=0}^{x=2\,\pi} \sin(x)\,dx + \int\limits_{x=0}^{x=2\,\pi} \cos(x)\,dx = ?$

4.25 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ B2 ◇ II / 4

---

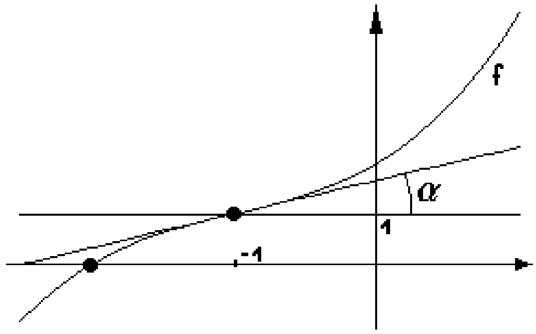
(1) $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d,$

$f(-2) = 0,\;\; f'(-1) = 0.5$

$f''(-1) = 0,\;\; f(-1) = 1,$

$\tan(\alpha) = 0.5,$

$f'(0) = \,?,\;\; f(1) = \,?,\;\; f(2) = \,?$



(2) $f(x) = a\; e^{-x^2},\;\; f(0) = 2,\;\; a = \,?$

$f'(x) = 0,\;\; x = \,?$

$f''(x) = 0,\;\; x = \,?$

Skizze? • *Esquisse?*

4.26 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ B2 ◇ II / 5

---

(1) (a) $f(x) = x^4 + x^6 \rightsquigarrow f'(x) = ?$

(b) $f(x) = x^4 \, ln(x) \rightsquigarrow f'(x) = ?$

(c) $f(x) = \dfrac{x^4}{ln(x)} \rightsquigarrow f'(x) = ?$

(d) $f(x) = ln(x^4) \rightsquigarrow f'(x) = ?$

(e) $f(x) = x \, e^{(\frac{1}{x})} \rightsquigarrow f'(x) = ?$

(2) $f(x) = 7\,x^4 + 12\,x^3 - x^2 + 8\,x + 9 \rightsquigarrow f'(x), f''(x), f''(x), f'''(x) = ?$, Plot ? • *plot ?*

(3) (a) $f(x) = \sin(x),\ f'(x_0) = 0.9 \rightsquigarrow x_0 = ?$

(b) $f'(x_0) = \tan(\alpha_0),\ \alpha_0 = ?$

(c) $x_1 = 0.9 \Rightarrow t_1(x) = ?$, Plot, Tangente! • *Plot, tangente!*

(d) $t(0) = ?,\ t(x_2) = 0 \Rightarrow x_2 = ?$

(4) $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d,\ f(2) = 0,\ f'(1) = 1,\ f''(-3) = 0,\ f(3) = -1$
$\rightsquigarrow a, b, c, d = ?$, Plot! • *plot!*

(5) Arbeite an der Einführung in *Mathematica*! Repetiere zudem den Stoff für den nächsten Test!
• *Travailler à l'introduction dans Mathematica! En plus répéter la matière pour le test prochain*

4.27 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ B2 ◇ II / 6

---

(1) $f(x) = 3\,\sin(x) + 7\,\cos(x) \leadsto \; f'(x) = \,?$

(2) $f(x) = 3\,\sin(x) \cdot \cos(x) \leadsto \; f'(x) = \,?$

(3) $f(x) = \dfrac{e^x}{\sin(x)} \leadsto \; f'(x) = \,?$

(4) $f(x) = \sqrt{x} \leadsto \; f'(x) = \,?$

(5) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3+1} \leadsto \; f'(x) = \,?$

(6) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{1+\sin(x)} \leadsto \; f'(x) = \,?$

(7) $f(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x) \leadsto \; f'(x) = \,?$

4.28 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ B2 ◇ II / 7

$F'(x) := f(x),\;\; A := \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$

(1) $f(x) = 3\,\sin(x) + 2\,x\,\cos(x) \rightsquigarrow\;\; F(x) = \,?$

(2) $f(x) = 5\,x^3 - 2\,x^2 + 3\,x + 4 \rightsquigarrow\;\; \int f(x)\,dx = \,?$

(3) $f(x) = \dfrac{ln(x)}{x} + e^x \rightsquigarrow\;\; F(x) = \,?$

(4) $\int\limits_1^5 5\,x^3 - 2\,x^2 + 3\,x + 4\,dx = \,?$

(5) $\int\limits_0^\pi \cos(x)\,dx = \,?$

(6) $\int\limits_0^\pi \sin(x)\,dx = \,?$

(7) $\int\limits_0^2 a\,x^2\,dx = 4 \rightsquigarrow\;\; a = \,?$

(8) $\int\limits_1^b x^2\,dx = 4 \rightsquigarrow\;\; b = \,?$

(9) $f(x) = x^3,\;\; g(x) = a\,x + b,\;\; f(0) = g(0),\;\; f(x1) = g(x_1)$

$\int\limits_0^{x_1} g(x)\,dx - \int\limits_0^{x_1} f(x)\,dx = 10 \rightsquigarrow\;\; x_1 = \,?$

Skizze! • *Esquisse!*

4.29 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ B2 ◇ II / 8

---

(1) Differenziere die nachfolgende Gleichung links und rechts nach x:
• *Calculer la dérivée de l'équation suivante à gauche et à droite d'après x:*

$$\sin(x+\beta) = \sin(x)\cdot\cos(\beta) + \cos(x)\cdot\sin(\beta)$$

Was kann man folgern? • *Quelle est la conséquence?*

(2) Bestimme die Extrema:
• *Calculer les extrêmes:*

(a) $f(x) = \dfrac{1}{5}\,x^5 - \dfrac{1}{4}\,x^4 - \dfrac{1}{3}\,x^3 + \dfrac{1}{2}\,x^2$

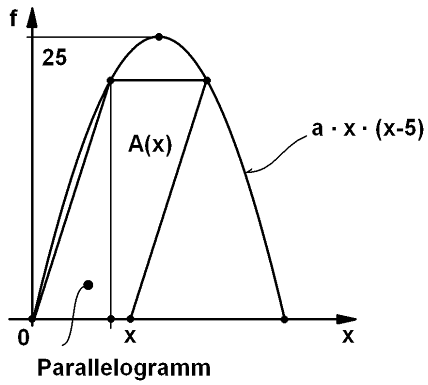
(b) $f(x) = \dfrac{1}{12}\,x^4 - \dfrac{1}{9}\,x^3 - x^2 + 1$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{50}\,x^2\,(x-5)\,(x-9)$

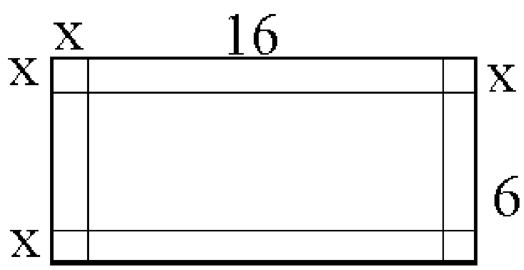
(3)

(a) $a = ?$

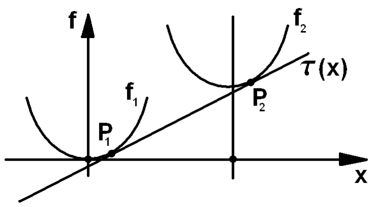
(b) $A(x) \to Max. \rightsquigarrow \ x = ?$



(4) Durch wegschneiden der quadratischen Ecken der Breite x und danach falten entsteht aus dem Papierbogen (16×6) eine Schachtel ohne Deckel. Wie gross muss man x wählen, damit der Inhalt maximal wird?
• *Nous coupons les coins carrés de la largeur x et après nous plions la feuille de papier (16×6). Ainsi nous recevons une boîte sans couvercle. Comment est–ce qu'il faut couisir x pour avoir un contenu maximal?*



(5) Schwieriges Problem:
• *Problème difficil:*

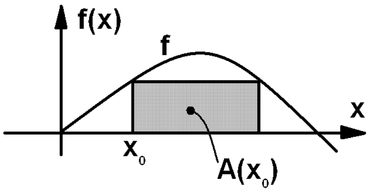


$f_1(x) = x^2,\ \ f_2(x) = (x-2)^2 + 4$
$\overline{P_1P_2}$: Gemeinsame Tangente
• $\overline{P_1P_2}$: *Tangente commune*
$P_1 = P_1(x_1, y_1),\ \ P_2 = P_2(x_2, y_2)$

$x_1, x_2, y_1, y_2 = \,?$

(6) $f(x) = \sin(x)$
$A(x_0)$ soll maximal sein
• $A(x_0)$ *doit être maximale*

$x_0 = \,?$



(7) $f_1(x) = x^2,\ \ f_2(x) = x^4$

Maximaler Abstand der beiden Kurven von f_1 und f_2 in y–Richtung zwischen $x = 0$ und $x = 1$?
• *Distance maximale des deux courbes de* f_1 *et* f_2 *en direction* y *entre* $x = 0$ *et* $x = 1$*?*

(8) Arbeite weiter an der Einführung in *Mathematica*! Repetiere zudem den Stoff für den nächsten Test!
• *Continuer le travail à l'introduction dans Mathematica! En plus répéter la matière pour le test prochain*

4.30 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ B2 ◇ II / 9

---

(1) Arbeite weiter an der Einführung in *Mathematica*! Repetiere zudem den Stoff für den nächsten Test!
• *Continuer le travail à l'introduction dans Mathematica! En plus répéter la matière pour le test prochain*

http://rowicus.ch/Wir/MathemDF/Mathem.html

4.31 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ B2 ◇ II / 10

---

(1) Arbeite weiter an der Einführung in *Mathematica*! Repetiere zudem den Stoff für den nächsten Test!
• *Continuer le travail à l'introduction en Mathematica! En plus répéter la matière pour le test prochain*

http://rowicus.ch/Wir/MathemDF/Mathem.html

4.32 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ B2 ◇ II / 11

---

(1) $\int\limits_0^\pi \sin^2 x \, dx = ?$ $\quad\leadsto$ (!!!!!) $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

(2) $\int\limits_1^e x \cdot ln(x) \, dx = ?$

(3) $\int\limits_1^e x^2 \cdot ln(x) \, dx = ?$

(4) $\int\limits_0^\pi x^2 \cdot \sin x \, dx = ?$

4.33 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ B2 ◇ II / 12

---

(1) Studiere: • *Etudier:*

$$\int\limits_{z=a}^{z=b} f(z)\,dz = \int\limits_{x=z^{-1}(a)}^{x=z^{-1}(b)} f(z(x))\cdot\frac{dz}{dx}\,dx \qquad (\Delta z = \frac{\Delta z}{\Delta x}\,\Delta x \;\Rightarrow\; dz = \frac{dz}{dx}\,dx)$$

Sei • *Soit* : $\qquad f_1(x) = 4\,x\cdot ln(x^2)$

$$\leadsto \int\limits_{1}^{10} f_1(x)\,dx = 2\cdot \int\limits_{??\ 1\ ??}^{??\ 10\ ??} 2\,x\cdot ln(x^2)\,dx = ? \qquad (\text{Subst. } z = x^2)$$

(2) $$\int\limits_{0}^{5}(x^5-6\,x^4+2\,x^3+11\,x^2-x+1)\cdot(5\,x^4-24\,x^3+6\,x^2+22\,x-1)\,dx = ?$$

(3) (a) $$\int\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{z\to\infty}\int\limits_{1}^{z} x^{-2}\,dx = ?$$

(b) $$\int\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{x}\,dx = ?$$

(c) $$\int\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{x^3}\,dx = ?$$

4.34 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ B2 ◇ II / 13

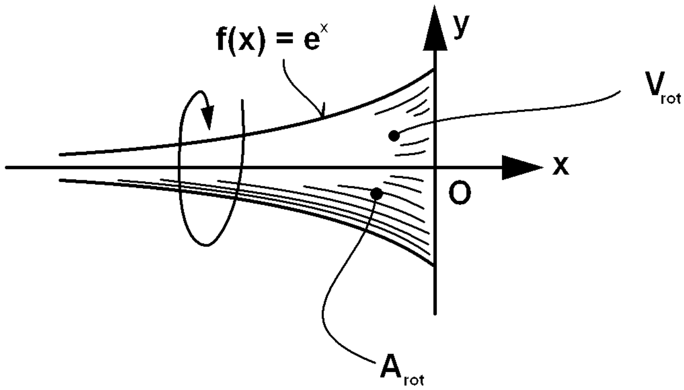
---

(1) (a) $\int\limits_1^2 (3\,x+5)^{1000}\,dx = \,?$

(b) $\int\limits_1^2 \frac{(ln(x))^2}{x}\,dx = \,?$

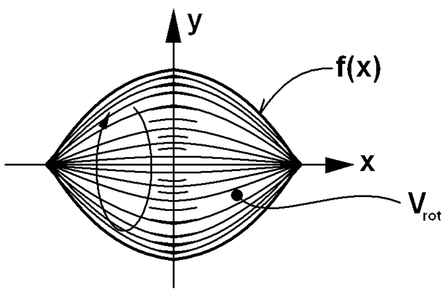
(c) $\int\limits_0^1 (e^{x^2})^2\,dx = \,?$

(2)



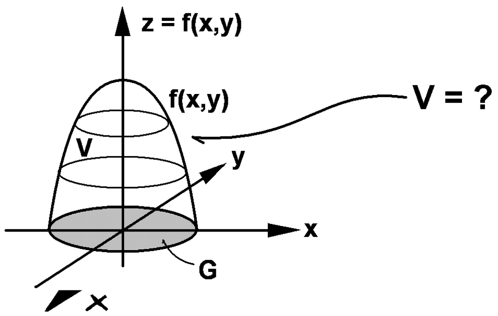
$V_{rot} = \,?$ $A_{rot} = \,?$

(3)



$f(x) = 1 - x^2$
$V_{rot} = \,?$

(4)



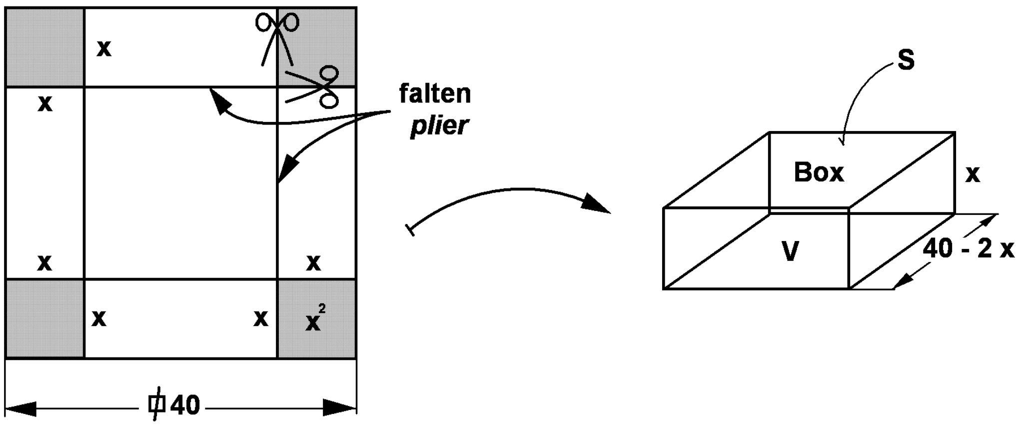
$z = f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$
$V_{rot} = \,?$

WIR

4.35 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ B2 ◇ II / 14

---

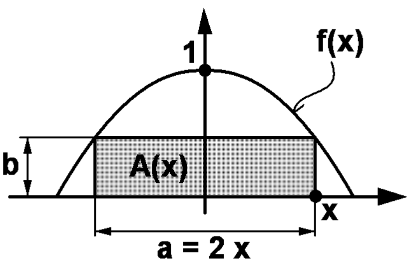
(1)



$S(x) = (40^2 - 4\,x^2) \to$ max, $x = ? \rightsquigarrow$ $x = 0,\ 4\,x^2 = 0,\ S = 40^2$

$V(x) = (40 - 2\,x) \cdot x \to$ max, $x = ?$

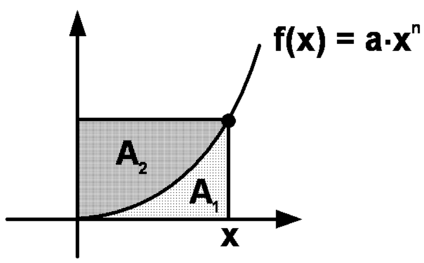
(2)



$A(x) = \ldots \to$ max, $x = ?$

$2\,(a+b) = \ldots \to$ max, $x = ?$

(3)

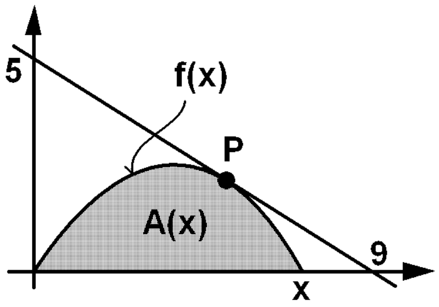


$f(x) = a \cdot x^n$

$A_1(x) = ?,\ A_2(x) = ?,\ \dfrac{A_2(x)}{A_1(x)} = ?$

%

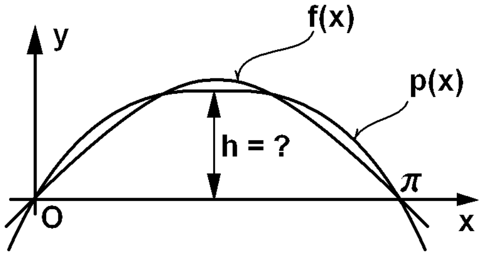
(4)



$A(x) \to \ \max, \ \ x = \,?$

$f(x) = \,?$

(5)



$f(x) = \sin(x)$

$p(x) = a\,x^2 + b\,x + c$

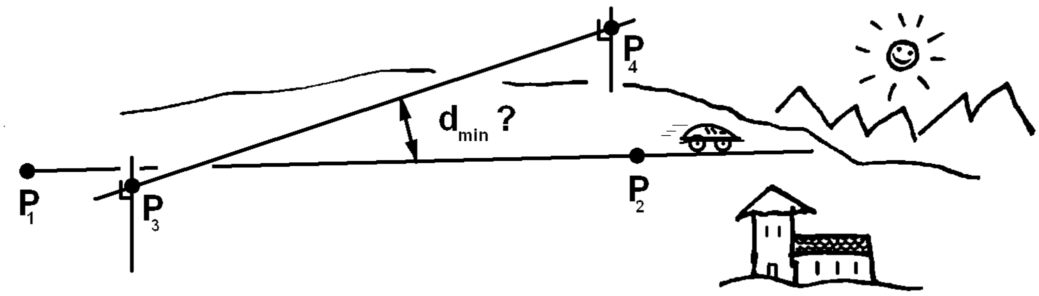
$\int\limits_0^\pi f(x)\,dx = \int\limits_0^\pi p(x)\,dx$

$h = \,?$

4.36 Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ B2 ◇ II / 15

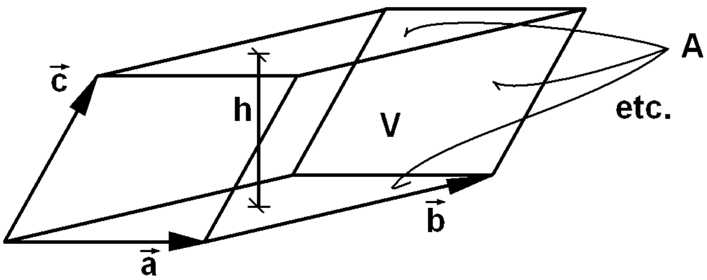
Repetition aus der Algebra: • *Répétition de l'algèbre:*

(1)



$P_1(1,2,3)$, $P_2(21,36,42)$, $P_3(-7,4,-3)$, $P_4(-16,-5,-1) \rightsquigarrow d_{min} = ?$

(2)



$A = ?$ $V = ?$ $h = ?$

4.37 Lösungen ◇ Lines pour solutions

Die Lösungen werden bei Gelegenheit integriert, wenn der Autor dafür Zeit haben wird. • *Les solutions seront ajoutées prochainement à l'occasion, si l'auteur aura le temps.*

Lösungen siehe unter den Links: • *Solutions voir les liens:*

http://rowicus.ch/Wir/TheProblems/Problems.html
(Schema) • *(Schéma)*

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutions/ProblemsSolutions.html
(*Mathematica*–Quellencode) • *(Code de source en Mathematica)*

Ende • *Fin*