Übungen und Selbststudium in Mathematik ◇ A1 01.1 ◇

Nach den Grundlagen des ECTS–Systems muss man bei uns auf eine Unterrichtslektion ca. eine bis vier Stunden Selbststudium rechnen. Damit sind Übungen, eigenständige Erarbeitung von Teilen des Stoffes, Prüfungsvorbereitungen, Arbeit mit Computerprogrammen u.s.w. gemeint. (1 ECTS entspricht 30 Stunden Arbeit. Bei 7 Lektionen z.B. entstehen so pro Lektion zusätzlich drei bis dreieinhalb Stunden Arbeit.)

Aufgabe: Bearbeite dieses Blatt 1, indem du dir dafür einen Studienplan bis zur nächsten Lektion machst. Halte diesen Studienplan dann auch ein.

Wichtig: Die Lösungen der folgenden Aufgaben sind aufzubewahren und an die Schlussprüfung mitzubringen. Sie werden da gebraucht!

Probl. 1 Stoffgruppe 1: Zahlendarstellung in Computern, Speicheraufwand, p-adische Zahlensysteme...

(a) Ein heute üblicher Computer speichert die Daten intern im Arbeitsspecher flüchtig durch Schalterstellungen (Transistoren als Schalter verwendet) oder in Festspeichern (Festplatten und anderen Speichermedien, z.B. durch Magnetisierung von kleinen Bereichen, durch Lasermarkierungen u.s.w.). Dadurch sind jeweils zwei Zustände möglich: „Strom fliesst oder nicht“, „magnetisiert oder nicht“ u.s.w.. Diese Zustände kann man durch die Zahlen 0 und 1 symbolisieren. Damit ist eine Übersetzung der physikalischen Situation in Zahlen möglich. Wegen den beiden möglichen Ziffern kommt hier das Dualzahlensystem (Binärsystem) im Gegensatz zum üblichen Dezimalsystem zur Anwendung (Positionssysteme, Ziffern erhalten ihren Wert durch ihre Position).
Beispiele:

$$\begin{aligned}54362 &= 5 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 \\ &= 1 \cdot 2^{15} + 1 \cdot 2^{14} + 0 \cdot 2^{13} + 1 \cdot 2^{12} + 0 \cdot 2^{11} + 1 \cdot 2^{10} + 0 \cdot 2^9 + 0 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 \\ &\quad +0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 1101010001011010_2\end{aligned}$$

$$1.3 = 1 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + \ldots = 1.010011001100110011_2$$

Ein Speicherplaz im Computer, der eine der beiden Ziffern 0 oder 1 aufnehmen kann, nennen wir **Bit**. In 8 Bits können wir daher $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 = 256$ verschiedene Schriftzeichen abspeichern (ASCII-System). Um die Ziffern 0, 1 bis 9 mit Vorzeichen und eventuell den Dezimalpunkt abzuspeichern genügen 4 Bits, was dann $2^6 = 16$ Speichermöglichkeiten entpricht. 4 Bits nennen wir ein **Halbbyte**, 8 Bits ein **Byte**. In 2 Bytes haben wir 65536 Speichermöglichkeiten, etwa die ganzen Zahlen von -32767 bis 32767 (Datentyp Integer in diversen Programmiersprachen). Für reelle Gleitkommezahlen (Datentyp Real) werden oft 8 Bytes, d.h. 16 Halbbytes verwendet, was dann etwa 15 Ziffern Platz bietet. Wichtig sind diese Überlegungen hier für die Speicherung grosser grahisch erzeugter Datenmengen, etwa bei Fotos und zum Verständnis der verschiedenen Graphikformate.

(b) In einer **Pixelgraphik** (z.B. Photo) werden zu jedem Pixel in der formatabhängigen Art Farbwerte abgespeichert, was normalerweise zu sehr grossen Datenmengen führt, die beim Übermitteln (z.B. Internet) oft unbrauchbar lange Übermittlungszeiten verursachen. Daher sind Kenntnisse in den einzelnen Graphikformaten wichtig. Im Gegensatz zur Pixelgraphik werden in der **Vektorgraphik** nicht Pixel, sondern Rechenanweisungen zur Berechnung der vorhandenen Kurven abgespeichert, was viel weniger Platz benötigt. Vektorgraphiken werden dann durch Vektoroperationen, Kurvenberechnungen u.s.w. manipuliert. Bei den Pixelgraphiken dagegen kommen Mengenoperationen zur Anwendung.

(c) Wichtig beim Speicherplatzbedarf sind die zur Anwendung kommenden Farbmodelle, z.B.

   i. **HSV** (**„Hue“** d.h. Farbe (eine Zahl für die Farbe). „Saturation“ d.h. Sättigung, „Value“ d.h. Wert. „Value“ wird auch manchmal in der bezeichnerenden Weise „Brightness“ d.h. Helligkeit genannt, das Farbmodell heißt dann entsprechend HSB).

   ii. **RGB** (Red, Gree, Blue). Bildschirm! Jeder der drei Farbanteile wird durch eine Zahl (Intensitätsstufe) festgelegt (z.B. 8 Bits).

   iii. **CMYK** (Cyan, Magenta, Yellow, Schwarz als Schlüsselfarbe (Key)). Jeder er Anteile wird wiederum durch eine Zahl definiert. Dieses System ist wichtig in der Drucktechnik, da mit diesen Farben (Cyan (spezielles Blau), Magenta (spezielles Rot), Yellow (spezielles Gelb), Schwarz (spezielles Schwarz) gegenüber von Weiss) die besten Ergebnisse erzeugt werden können.

(d) Beispiel zur Grösse einer Pixelgraphik:

Gegeben sei ein **BMP**–Bild (RGB) mit 1’024 mal 768 = 786’432 Bildpunkte (Pixel, ehemals etwa VGA–Bildschirm). 1’024 mal 768 ergibt 786’432 Bildpunkte (Pixel). Im RGB–Modell mit 8 Bit für die Farbe Rot ($2^8 = 256$ Intensitätsstufen), 8 Bit für die Farbe Grün und 8 Bit für die Farbe Blau ergibt das $8 + 8 + 8 = 24$ notwendige Bits, also $2^{24} = 16'777'216$ verschiedene Farben. Der Speicherbedarf ist dann mindestens die Pixelzahl 786432 mal 24, d.h. $786432 \cdot 24 = 18874368$ Bit, was 2359296 Bytes oder 2.304 kByte resp. 2.25 MByte entspricht. Also: Achtung vor zu grossen Bildern! (2^8 Bit sind ein Byte, $2^10 = 1024$ Bytes sind ein kByte u.s.w., denn bei der Speicherverwaltung zählt das Dualsystem. 786’432 mal 24 Bit ergibt 18’874’368 Bit Speicherbedarf. 18’874’368 Bit $\hat{=}$ 2’359’296 Byte = 2’304kByte = 2.25MByte.

Beim **JPEG**–Format (internettauglich) erfolgt eine Komprimierung, indem Pixelmengen mit gleichen Farben zusammengefasst werden. Die Farbspeicherung wird dadurch kleiner. Doch Achtung vor der Veränderung der Pixelzahl (d.h. bei einer Grössenveränderung des Bildes!).

Beim **GIF**–Format (internettauglich) wird die Anzahl Farben auf 256 beschränkt, was die meisten Leute sowieso nicht merken. (Achtung Patentschutz!)

Beim **TIFF**–Format kommt das Farbmodell CMYK zur Anwendung. In diesem Format ist eine verlustfreie Komprimierung möglich.

Weitere Formate siehe Literatur.

(e) **Aufgabe:** Beschaffe dir im Internet Literatur zu den Farbmodellen und Komprimierungen und schreibe eine Zusammenfassung.

Link 1:

`http://www.smarttrain.at/reframe/kompression_frame.htm`

Link 2:

`http://goethe.ira.uka.de/seminare/redundanz/`

Link 3: Selber suchen.

Probl. 2 Vektorrechnung:

(a) Schreibe eine Zusammenfassung über Vektorrechnung Teil 1 (Schema: Begriffe, Beziehungen, Anwendungsbeispiele). Inhalt: Stoffbereich Vektorbegriff, Addition, Multiplikation mit Skalar, Gesetze, lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit, Basis, Dimension, Darstellung von Vektoren in Koordinatensystemen, Länge, Rechengesetze in Koordinatensystemen. Link z.B.

`http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html   Skript Algebra`

oder eigene Literatur.

(b) Deute ein gefärbtes Pixel aus einer Pixelgraphik als Vektor. Welche Dimension ist bei dieser Betrachtung angebracht?

(c) Zeichne in der Darstellungsweise einer Isometrie (Falschperspektive) einen Würfel mit einer Ecke im Punkte $A(3; 2; 1)$. Ein Kantenvektor ist $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Ein zweiter Kantenvektor hat die Richtung von $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$. Ein drittet Kantenvektor steht natürlich senkrecht auf den ersten beiden und hat die Richtung so, dass die erste Koordinate negativ wird.
Zeichne einen zweiten Würfel, den man erhält durch Verschiebung des ersten Würfels um $\vec{v_1}$ plus den Raumdiagonalenvektor des Würfels durch A. Mache im Bild die jeweiligen vorderen Flächen sichtbar.
Zeichne einen dritten Würfel, der wie folgt entsteht: Interpretiere die drei Kantenvektoren als Basisvektoren eines neuen Koordinatensystems. Drehe den Würfel dann um 120^o in der Richtung des Gegenuhrzeigersinns im neuen Koordinatensystem um $\vec{v_1}$ und zeichne den Bildwürfel. Falls du diese Teilaufgabe noch nicht lösen kannst, so vertage dies auf später — oder frage bei Gelegenheit den Dozenten.