Übungen und Selbststudium in Mathematik ◇ A1 03 ◇

Zerlegung von Vektoren, Anwendung des Skalarprodukts

Probl. 1 Rechenregeln für Vektoren — (wie heissen sie?):

(a) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

(b) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

(c) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

(d) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

(e) $\lambda\,(\mu\,\vec{a}) = (\lambda\,\mu)\,\vec{a}$

(f) $\lambda\,(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\,\vec{a} + \lambda\,\vec{b}$

Probl. 2 Vektorlänge (3-dimensional):

$$l = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Aufgabe:

Gegeben: $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $|\vec{v}| = ?$

Probl. 3 Aufgabe:

Gegeben sind die Kräfte $\vec{F_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{F_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ sowie ein Dreibein aus Metall mit den Beinrichtungen (Ortsvektoren) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Kräfte werden auf das Dreibein dort übertragen, wo die Beine zusammengschweisst sind. (Skizze!) Berechne die Längen der Komponenten der Resultierenden $\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$ in Richtung der Beine.

Rückseite!

Probl. 4 **Skalarprodukt in einem Orthonormalsystem** im $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_3 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\varphi) = |\vec{a}| \cdot b_a$$

b_a ist die Länge der Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$.

Probl. 5 **Regeln für das Skalarprodukt** — (wie heissen sie?):

(a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

(b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \;\Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

(c) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

(d) $\lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b}$

Probl. 6 (a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \;\; \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \;\;\Rightarrow\;\; \varphi = ?, \;\; b_a = ?$

(b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \;\; \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ z \end{pmatrix}, \;\; b_a = 2 \;\Rightarrow\; z = ?$

Probl. 7 Gegeben ist ein Würfel im Raum mit der Kantenlänge 1. Gesucht sind die Projektionslängen der Kantenvektoren auf eine der Raumdiagonalen. (Skizze, Rechnung!)

Probl. 8 Gegeben ist ein reguläres Tetraeder T_1 im Raum. Aus den Seitenmittelpunkten wird wieder ein Tetraeder T_2 gebildet. Von jeder Ecke von T_1 zu den nächstgelegenen Ecken von T_2 sind drei Linien möglich. Diese werden gezogen. So entstehen vier „Zacken“, welche mit T_2 einen Stern bilden. Berechne die Zackenhöhe im Verhältnis zur Höhe von T_1 sowie das Sternvolumen im Verhältnis zum Volumen von T_1.