Übungen und Selbststudium in Mathematik ◇ A1 05 ◇

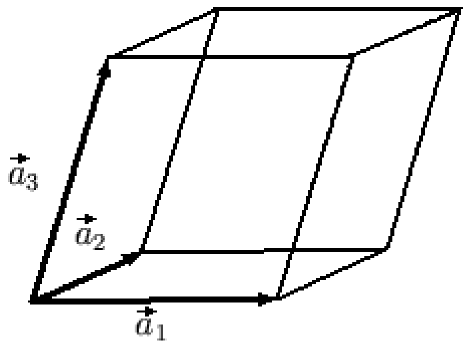
Spatprodukt, Abstände

Probl. 1 Spatprodoukt — (nachlesen in der Literatur):

(a) Ein durch durch vier Punkte im Raum, im zu betrachtenden Fall daher durch den Ursprung und drei linear unabhängige Vektoren gebildetes „räumliches Parallelogramm“ nennen wir

Spat oder **Parallelepiped**.

Im entsprechenden 2–dimensionalen Fall hätten wir es mit einem Parallelogramm zu tun.



(b) Das Spatvolumen erhalten wir aus Grundflächeninhalt A mal Höhe h:
$V = A \cdot h = |\vec{a}_1 \times \vec{a}_2| \cdot \vec{a}_3$ (Vektor– und Skalarprodukt).
Dabei ist $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \vec{n}$ der Normalenvektor auf $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ mit $|\vec{n}| = A$.
$\leadsto\ V = |\vec{n}| \cdot h = |\vec{n}| \cdot |(\vec{a}_3)_{\vec{n}}| = \vec{n} \cdot \vec{a}_3 = (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \vec{a}_3$.

Dieses Volumen kann auch negativ sein, denn es ist ein Skalarprodukt ($\vec{n} \cdot \vec{a}_3$). Vertauscht man die Reihenfolge der Vektoren, so ändert sich eventuell der Umlaufsinn dieser Vektoren. Oder man beginnt mit anderen zwei dieser drei Vektoren um die Grundfläche A zu definieren. $|V|$ kann daher damit nicht ändern. Bloss das Vorzeichen von V könnte wechseln.

(c) Zur Berechnung des Spatprodukts $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} := [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ kann man die Regel von **Sarrus** verwenden:

$$\left| \begin{array}{ccccccccc} a_1 & & b_1 & & c_1 & & a_1 & & b_1 \\ & \searrow & & \nearrow\!\!\!\searrow & & \nearrow\!\!\!\searrow & & \nearrow & \\ a_2 & & b_2 & & c_2 & & a_2 & & b_2 \\ & \nearrow & & \nearrow\!\!\!\searrow & & \nearrow\!\!\!\searrow & & \searrow & \\ a_3 & & b_3 & & c_3 & & a_3 & & b_3 \end{array} \right| \quad \text{mit} \quad \overset{+}{\searrow}, \quad \overset{-}{\nearrow}$$

(d) **Bsp.:** $[\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\8\\0\end{pmatrix}] = 1\cdot5\cdot0 + 4\cdot8\cdot3 + 7\cdot2\cdot6 - 3\cdot5\cdot7 - 6\cdot8\cdot1 - 0\cdot2\cdot4$
$= 27$

Probl. 2 Abstandsberechnungen — (nachlesen in der Literatur):

(a) Durch vier Punkte O, A, B, C sind drei Vektoren $\overrightarrow{OA}= \vec{a}, \overrightarrow{OB}= \vec{b}, \overrightarrow{OC}= \vec{c}$ und damit ein Spat gegeben. Will man den Abstand des Punktes C von der Fläche (O, A, B) wissen, so kann man die Formel $V = A \cdot h \;\Rightarrow\; h = \dfrac{V}{A} = \dfrac{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$ benutzen.

(b) In obigem Beispiel erhält man damit $h = 3\sqrt{\dfrac{3}{2}} \approx 3.67423$

Probl. 3 Regeln — (nachlesen in der Literatur):

Die Regeln für das Spatprodukt kann man aus den Regeln für das Vektorprodukt und das Skalarprodukt gewinnen. Sie werden daher hier nicht explizit dargestellt.

Das Spatprodukt bezeichnet man auch als 3×3–**Determinante**.

Möglichkeiten für kostenlose Literatur:

```
Beispiel: Vektorrechnung im Wikipedia
http://de.wikipedia.org/wiki/Vektorrechnung
http://de.wikipedia.org/wiki/Spatprodukt
http://de.wikipedia.org/wiki/Analytische_Geometrie
http://de.wikipedia.org/wiki/Kategorie:Geometrie
http://de.wikipedia.org/wiki/Kategorie:Lineare_Algebra

Beispiel 2: Differentialrechnung in mathe-online
http://www.mathe-online.at/mathint/anwdiff/i.html
http://www.mathe-online.at/mathint/diff1/i.html
```