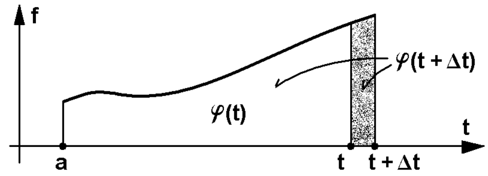
Übungen und Selbststudium in Mathematik ◇ A2 07 ◇

Stoffgruppe 7: Flächenfunktionen, Flächeninhalte unter krummen Kurven

Probl. 1 Wir definieren den Flächeninhalt zwischen der Kurve $f(x)$ und der x–Achse von $x = a$ bis $x = t$ als neue Funktion $A(t) = \varphi(t)$. Sicher wächst diese Funktion im nebenstehenden Beispiel, wenn t grösser wird.



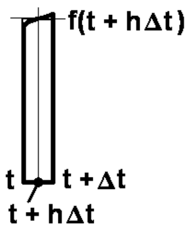
Was kommt wohl dabei heraus, wenn wir die Steigungsfunktion $\varphi\,'(t)$ (d.h. die Ableitung) berechnen? t ist der rechte, variable Endpunkt der x–Werte der Fläche unter der Kurve.

Es gilt: $\varphi\,'(t) = A\,'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t}$. Dabei ist die Differenz $A(t+\Delta t) - A(t)$ gerade der Flächeninhalt der dunkel gehaltenen Differenzfläche (Balken) rechts im Bild. Wir müssen danach hier den Inhalt des schmalen Balkens mit der Breite Δt und der ungefähren Höhe $f(t)$ bzw. $f(t+\Delta t)$ berechnen. Dabei können wir mit einer „mittleren Höhe“ $f(t + h \cdot \Delta t)$ rechnen.

Wie wir dem Bild rechts entnehmen, ist dann der Flächeninhalt

$$A(t+\Delta t) - A(t) = \Delta t \cdot f(t + h\,\Delta t)$$

$$\leadsto \quad \varphi\,'(t) \quad \approx \quad \frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t} \quad = \quad \frac{\Delta t \cdot f(t + h\,\Delta t)}{\Delta t} = \Delta t \cdot f(t + h\,\Delta t) \to f(t)$$



$\leadsto$ $\varphi\,'(t) = f(t)$. Das ist höchst erstaunlich und einfach. Die Flächeninhaltsfunktion $\varphi(t)$ ist demnach diejenige Funktion (Stammfunktion), deren Ableitung gerade $f(t)$ ist. Um $\varphi(t)$ herauszufinden, müssen wir uns daher fragen, welche Funktion abgeleitet f(t) ergibt. Konkret: Z.B. für $f(x) = x^2$ lautet die Frage: Welche Funktion $\varphi(t)$ ergibt abgeleitet $f(t) = t^2$? Da fällt einem natürlich sofort $\varphi(t) = \dfrac{t^3}{3} + const.$ ein. (Die Ableitung jeder Konstante ist ja 0.) Diese Konstante wird uns aber keine Schwierigkeiten machen, wie wir gleich sehen werden.

Will man z.B. die Fläche zwischen $x = 0$ und $x = t$ unter der Kurve $f(x) = x^2$ wissen, so kann man wie folgt argumentieren: Der Inhalt der Fläche unter der Kurve von einem unbekannten, als fix gedachten Punkt $x = x_0$ bis $x = t$ ist $\varphi(t) = \dfrac{t^3}{3} + const.$. Der Inhalt der Fläche unter der Kurve von $x = x_0$ bis $x = 0$ ist damit $\varphi(0) = \frac{0^3}{3} + const.$. Und so ist der Inhalt der Fläche unter der Kurve von $x = 0$ bis $x = t$ die Differenz

$$\varphi(t) - \varphi(0) = (\frac{t^3}{3} + const.) - (\frac{0^3}{3} + const.) = \frac{t^3}{3}.$$

Wir haben den Inhalt damit also berechnet! Z.B. für $t = 1$ ist er $\frac{1}{3}$.

Probl. 2 Berechne den Inhalt der Fläche unter der Kurve der Funktion $f(x) = \sin(x)$ zwischen $x = 0$ und $x = \frac{\pi}{2}$!

Die Stammfunktion von $f(x) = \sin(x)$ ist bekanntlich $-\cos(x) + const.$, denn $(-\cos(x) + const.)' = \sin(x)$. Damit ergibt sich:
$Inhalt = -\cos(\frac{\pi}{2}) + const. - (-\cos(0) + const.) = -0 + const. - (-1 + const.) = 1.$
Ein unerwartet schönes Resultat!

Probl. 3 Was ist der Inhalt der Fläche unter der Kurve der Funktion $f(x) = e^x$ zwischen $x = -\infty$ und $x = 0$?

Die Stammfunktion von $f(x) = e^x$ ist $e^x + const.$. Wir setzen links statt $x = -\infty$ vorerst $x = u$. Dann ist der Inhalt $A = e^0 + const. - (e^u + const.) = 1 - e^u$. Für $u \to -\infty$ geht $e^u \to \frac{1}{e^\infty} = 0$. Damit wird $A = 1$.

Dieses Resultat ist deshalb so erstaunlich, weil wir hier eine Fläche vor uns haben, die unendlich lang ist (negative x–Achse). Der Inhalt ist aber nicht unendlich, sondern exakt 1. Da es in der Natur keine unendlich langen Flächen gibt (Endlichkeit des Weltalls), haben wir hier keine physikalisch realisierbare Fläche vor uns.

Probl. 4 Ein derart (wie oben) berechneter Flächeninhalt nennt man „bestimmtes Integral“. Man schreibt:

$$A = \int\limits_{x=a}^{x=t} f(x)\, dx$$

Das Resultat ist dann die Masszahl der Fläche, wie wir sie oben in den Beispielen berechnet haben.

Eine einfache Darstellung dieses Stoffes für Mittelschulen findet sich z.B. unter:

`http://www.netschool.de/mat/dirs/dui_0.htm`

WIR1