Test ◇ E+M1 Algebra 02 ◇

Wichtig: Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen. Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen können korrigiert werden. Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen. Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.

Probl. 1 (a) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Löse $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit Hilfe des Gauss-Algorithmus. Zeige den Lösungshergang. Entscheide, ob es eine, keine oder unendlich viele Lösungen gibt und untersuche, was die Dimension der Lösungsmenge ist.

(b) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Löse $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit Hilfe des Gauss-Algorithmus. Zeige den Lösungshergang. Entscheide, ob es eine, keine oder unendlich viele Lösungen gibt und untersuche, was die Dimension der Lösungsmenge ist.

(c) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 5 & 9 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$

Löse $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit Hilfe des Gauss-Algorithmus. Zeige den Lösungshergang. Entscheide, ob es eine, keine oder unendlich viele Lösungen gibt und untersuche, was die Dimension der Lösungsmenge ist.

Probl. 2 Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & \alpha & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ \beta \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ \gamma \end{pmatrix}$

Löse $A \cdot \vec{x} = \vec{b}_k$ mit Hilfe von Determinanten.

(a) Für welche $\alpha, \ \beta$ hat $A \cdot \vec{x} = \vec{b}_1$ keine Lösung?

(b) Für welche $\alpha, \ \beta$ hat $A \cdot \vec{x} = \vec{b}_1$ unendlich viele Lösungen?

(c) Für welche $\alpha, \ \gamma$ hat $A \cdot \vec{x} = \vec{b}_2$ keine Lösung?

(d) Für welche $\alpha, \ \gamma$ hat $A \cdot \vec{x} = \vec{b}_2$ unendlich viele Lösungen?

Probl. 3 $M = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1+u \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

(a) Zeige die Berechnung von $\det(M)$.

(b) Für welches u hat die Matrix $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ einen Rang < 4?

Probl. 4 Sei $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 4 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $A = M^T \cdot D \cdot (M^T)^{-1}$

(a) Berechne A.

(b) Berechne A^T.

(c) Berechne A^{-1}.

(d) Löse $A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Probl. 5 Gegeben ist die Ebene Φ durch die Gleichung $2\,x - 3\,y + 5\,z = 4$. Der Punkt $P_0(5; 8; 11)$ soll senkrecht zur Ebene Φ so verschoben werden, dass er auf der andern Seite der Ebene zu liegen kommt und sein Abstand von der Ebene 10 beträgt. Berechne die Koordinaten vom P_1.