Lösungen

1

```
Remove["Global`*"];
```

a Idee

```
T = 2 Pi;
cc = 0;
f[t_] := t^3;
ω = 2 Pi / T;
a[0] := 2 / T Integrate[f[t], {t, cc, cc + T}];
a[k_] := 2 / T Integrate[f[t] Cos[k ω t], {t, cc, cc + T}];
b[k_] := 2 / T Integrate[f[t] Sin[k ω t], {t, cc, cc + T}];
c[k_] := 1 / T Integrate[f[t] E^(-I k ω t), {t, cc, cc + T}];
ff[t_] := a[0] / 2 + Sum[a[n] Cos[n ω t] + b[n] Sin[n ω t], {n, 1, Infinity}];
ff[t_, h_] := a[0] / 2 + Sum[a[n] Cos[n ω t] + b[n] Sin[n ω t], {n, 1, h}];
ffk[t_] := Sum[c[n] E^(I n ω t), {n, -Infinity, Infinity}];
ffk[t_, h_] := Sum[c[n] E^(I n ω t), {n, -h, h}];
ff[t, 6]
```

$$2\pi^3 + 12\pi\,\mathrm{Cos}[t] + 3\pi\,\mathrm{Cos}[2t] + \frac{4}{3}\pi\,\mathrm{Cos}[3t] + \frac{3}{4}\pi\,\mathrm{Cos}[4t] + \frac{12}{25}\pi\,\mathrm{Cos}[5t] + \frac{1}{3}\pi\,\mathrm{Cos}[6t] + \frac{(12\pi - 8\pi^3)\,\mathrm{Sin}[t]}{\pi} + \frac{\left(\frac{3\pi}{2} - 4\pi^3\right)\mathrm{Sin}[2t]}{\pi} + \frac{4}{9}(1 - 6\pi^2)\,\mathrm{Sin}[3t] + \frac{\left(\frac{3\pi}{16} - 2\pi^3\right)\mathrm{Sin}[4t]}{\pi} - \frac{4}{125}(-3 + 50\pi^2)\,\mathrm{Sin}[5t] + \frac{(\pi - 24\pi^3)\,\mathrm{Sin}[6t]}{18\pi}$$

```
a[0] / 2
```

$$2\pi^3$$

```
a[k] /. {Cos[2 k π] → 1, Sin[2 k π] → 0}
```

$$\frac{12\pi}{k^2}$$

```
b[k] /. {Cos[2 k π] → 1, Sin[2 k π] → 0}
```

$$-\frac{4(-3 + 2k^2\pi^2)}{k^3}$$

```
ff[t_, h_] := a[0] / 2 + Sum[a[n] Cos[n ω t] + b[n] Sin[n ω t], {n, 1, h}];
ff[t, 6]
```

$$2\pi^3 + 12\pi \operatorname{Cos}[t] + 3\pi \operatorname{Cos}[2t] + \frac{4}{3}\pi \operatorname{Cos}[3t] + \frac{3}{4}\pi \operatorname{Cos}[4t] + \frac{12}{25}\pi \operatorname{Cos}[5t] + \frac{1}{3}\pi \operatorname{Cos}[6t] + \frac{(12\pi - 8\pi^3)\operatorname{Sin}[t]}{\pi} + \frac{\left(\frac{3\pi}{2} - 4\pi^3\right)\operatorname{Sin}[2t]}{\pi} + \frac{4}{9}(1 - 6\pi^2)\operatorname{Sin}[3t] + \frac{\left(\frac{3\pi}{16} - 2\pi^3\right)\operatorname{Sin}[4t]}{\pi} - \frac{4}{125}(-3 + 50\pi^2)\operatorname{Sin}[5t] + \frac{(\pi - 24\pi^3)\operatorname{Sin}[6t]}{18\pi}$$

```
N[%]
```

```
62.0126 + 37.6991 Cos[t] + 9.42478 Cos[2. t] + 4.18879 Cos[3. t] + 2.35619 Cos[4. t] +
 1.50796 Cos[5. t] + 1.0472 Cos[6. t] - 66.9568 Sin[t] - 37.9784 Sin[2. t] -
 25.8745 Sin[3. t] - 19.5517 Sin[4. t] - 15.6954 Sin[5. t] - 13.1039 Sin[6. t]
```

Modul (als Idee)

```
Remove["Global`*"];

work[T_, cc_, f_] := Module[{},
  ω = 2 Pi / T;
  a[0] = 2 / T Integrate[f, {t, cc, cc + T}];
  a[k_] := 2 / T Integrate[f Cos[k ω t], {t, cc, cc + T}];
  b[k_] := 2 / T Integrate[f Sin[k ω t], {t, cc, cc + T}];
  c[k_] := 1 / T Integrate[f E^(-I k ω t), {t, cc, cc + T}];
  ff[t_] := a[0] / 2 + Sum[a[n] Cos[n ω t] + b[n] Sin[n ω t], {n, 1, Infinity}];
  ff[t_, h_] := a[0] / 2 + Sum[a[n] Cos[n ω t] + b[n] Sin[n ω t], {n, 1, h}];
  ffk[t_] := Sum[c[n] E^(I n ω t), {n, -Infinity, Infinity}];
  ffk[t_, h_] := Sum[c[n] E^(I n ω t), {n, -h, h}];
 ]

T = 2 Pi;
cc = 0;
f[t_] := t^3;
work[T, cc, f[t]];

a[0]
```

$4\pi^3$

```
a[k] /. { Cos[2 k π] → 1, Sin[2 k π] → 0}
```

$$\frac{12\pi}{k^2}$$

```
b[k] /. { Cos[2 k π] → 1, Sin[2 k π] → 0}
```

$$-\frac{4(-3 + 2k^2\pi^2)}{k^3}$$

```
ff[t_, h_] := a[0] / 2 + Sum[a[n] Cos[n ω t] + b[n] Sin[n ω t], {n, 1, h}];
ff[t, 6]
```

$$2\pi^3 + 12\pi\,\text{Cos}[t] + 3\pi\,\text{Cos}[2\,t] + \frac{4}{3}\pi\,\text{Cos}[3\,t] + \frac{3}{4}\pi\,\text{Cos}[4\,t] + \frac{12}{25}\pi\,\text{Cos}[5\,t] + \frac{1}{3}\pi\,\text{Cos}[6\,t] + \frac{(12\pi - 8\pi^3)\,\text{Sin}[t]}{\pi} + \frac{\left(\frac{3\pi}{2} - 4\pi^3\right)\text{Sin}[2\,t]}{\pi} + \frac{4}{9}(1 - 6\pi^2)\,\text{Sin}[3\,t] + \frac{\left(\frac{3\pi}{16} - 2\pi^3\right)\text{Sin}[4\,t]}{\pi} - \frac{4}{125}(-3 + 50\pi^2)\,\text{Sin}[5\,t] + \frac{(\pi - 24\pi^3)\,\text{Sin}[6\,t]}{18\pi}$$

```
N[%]
```

62.0126 + 37.6991 Cos[t] + 9.42478 Cos[2. t] + 4.18879 Cos[3. t] + 2.35619 Cos[4. t] + 1.50796 Cos[5. t] + 1.0472 Cos[6. t] − 66.9568 Sin[t] − 37.9784 Sin[2. t] − 25.8745 Sin[3. t] − 19.5517 Sin[4. t] − 15.6954 Sin[5. t] − 13.1039 Sin[6. t]

```
D[Evaluate[ff[t, 6]], t] // Simplify
```

$$(12 - 8\pi^2)\,\text{Cos}[t] + (3 - 8\pi^2)\,\text{Cos}[2\,t] + \frac{4}{3}\text{Cos}[3\,t] - 8\pi^2\,\text{Cos}[3\,t] + \frac{3}{4}\text{Cos}[4\,t] - 8\pi^2\,\text{Cos}[4\,t] + \frac{12}{25}\text{Cos}[5\,t] - 8\pi^2\,\text{Cos}[5\,t] + \frac{1}{3}\text{Cos}[6\,t] - 8\pi^2\,\text{Cos}[6\,t] - 12\pi\,\text{Sin}[t] - 6\pi\,\text{Sin}[2\,t] - 4\pi\,\text{Sin}[3\,t] - 3\pi\,\text{Sin}[4\,t] - \frac{12}{5}\pi\,\text{Sin}[5\,t] - 2\pi\,\text{Sin}[6\,t]$$

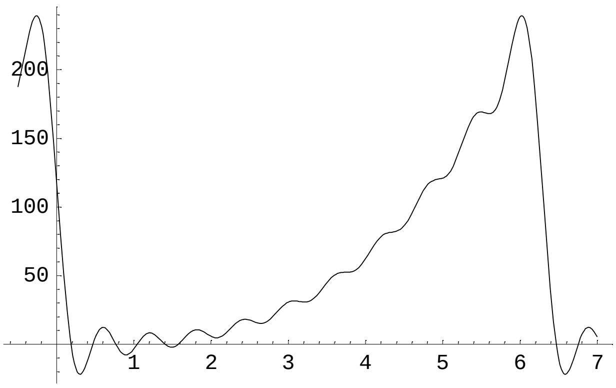
```
N[%]
```

−66.9568 Cos[t] − 75.9568 Cos[2. t] − 77.6235 Cos[3. t] − 78.2068 Cos[4. t] − 78.4768 Cos[5. t] − 78.6235 Cos[6. t] − 37.6991 Sin[t] − 18.8496 Sin[2. t] − 12.5664 Sin[3. t] − 9.42478 Sin[4. t] − 7.53982 Sin[5. t] − 6.28319 Sin[6. t]

```
(2 Pi)^3 // N
```

248.05

```
Plot[Evaluate[ff[t, 10]], {t, -0.5, 7}];
```



b

Es gilt:

```
a[0] / 2
```

$2\pi^3$

```
a[k] /. {Cos[2 k π] → 1, Sin[2 k π] → 0}
```

$\frac{12\,\pi}{k^2}$

```
b[k] /. {Cos[2 k π] → 1, Sin[2 k π] → 0}
```

$-\frac{4\,(-3 + 2\,k^2\,\pi^2)}{k^3}$

1

Für t=0 werden die Sinusterme und die Cosinusterme 1. Der Funktionswert ist das arithmetische Mittel zwischen dem links-und dem rechtsseitigen Limes.es gilt:linksseitiger Limes=ff[2Pi,6]

```
funktionswertBeiNull = ((2 Pi)^3 + 0) / 2
```

$4\,\pi^3$

Das führt auf die Gleichung

$4\,\pi^3 = 2\,\pi^3 + \mathrm{Sum}\left[\frac{12\,\pi}{k^2}, \{k, 1, \mathrm{Infinity}\}\right]$

Daraus berechnet man

```
Sum[1/k^2, {k, 1, Infinity}]
```

$\frac{\pi^2}{6}$

2

Für t=Pi werden die Sinusterme und die Cosinusterme +/-1. Der Funktionswert ist das arithmetische Mittel zwischen dem links-und dem rechtsseitigen Limes.es gilt:linksseitiger Limes=ff[2Pi,6]

```
funktionswertBeiPi = Pi^3
```

π^3

Das führt auf die Gleichung

$^3 \quad 2 \quad ^3 \quad \mathrm{Sum}\left[\frac{12}{k^2} \quad (\quad 1)^k, \{k, 1, \mathrm{Infinity}\}\right]$

$2 \quad ^3 \quad \mathrm{Sum}\left[\frac{12}{k^2} \quad (\quad 1)^{k \quad 1}, \{k, 1, \mathrm{Infinity}\}\right]$

Daraus berechnet man

```
Sum[(-1)^(k + 1)/k^2, {k, 1, Infinity}]
```

$\frac{\pi^2}{12}$

3

Um zur Summe der Terme $\frac{1}{k^4}$ zu kommen, wäre es notwendig die oben betrachtete Reihe zu differenzieren und dann Parceval zu verwenden. Das ist jedoch problematisch, da dann aus einem Teil von b[k] der Faktor k im Nenner herausfällt.Das zieht Arbeit nach sich, die man vermeiden kann, wenn man direkt die Reihe von t^2 an Stelle der Ableitung der Reihe von t^3 verwendet.

```
Remove["Global`*"];
```

```
T = 2 Pi;
cc = 0;
f[t_] := t^2;
ω = 2 Pi / T;
a[0] := 2 / T Integrate[f[t], {t, cc, cc + T}];
a[k_] := 2 / T Integrate[f[t] Cos[k ω t], {t, cc, cc + T}];
b[k_] := 2 / T Integrate[f[t] Sin[k ω t], {t, cc, cc + T}];
ff[t_, h_] := a[0] / 2 + Sum[a[n] Cos[n ω t] + b[n] Sin[n ω t], {n, 1, h}];
ff[t, 6]
```

$$\frac{4\pi^2}{3} + 4\,\mathrm{Cos}[t] + \mathrm{Cos}[2\,t] + \frac{4}{9}\,\mathrm{Cos}[3\,t] + \frac{1}{4}\,\mathrm{Cos}[4\,t] + \frac{4}{25}\,\mathrm{Cos}[5\,t] + \frac{1}{9}\,\mathrm{Cos}[6\,t] - 4\pi\,\mathrm{Sin}[t] - 2\pi\,\mathrm{Sin}[2\,t] - \frac{4}{3}\pi\,\mathrm{Sin}[3\,t] - \pi\,\mathrm{Sin}[4\,t] - \frac{4}{5}\pi\,\mathrm{Sin}[5\,t] - \frac{2}{3}\pi\,\mathrm{Sin}[6\,t]$$

```
N[%]
```

```
13.1595 + 4. Cos[t] + Cos[2. t] + 0.444444 Cos[3. t] + 0.25 Cos[4. t] +
 0.16 Cos[5. t] + 0.111111 Cos[6. t] - 12.5664 Sin[t] - 6.28319 Sin[2. t] -
 4.18879 Sin[3. t] - 3.14159 Sin[4. t] - 2.51327 Sin[5. t] - 2.0944 Sin[6. t]
```

```
a[0]
```

$$\frac{8\pi^2}{3}$$

```
a[k] /. { Cos[2 k π] → 1, Sin[2 k π] → 0}
```

$$\frac{4}{k^2}$$

```
b[k] /. { Cos[2 k π] → 1, Sin[2 k π] → 0}
```

$$-\frac{4\pi}{k}$$

```
intParceval = 1 / (2 Pi) Integrate[(t^2)^2, {t, 0, 2 Pi}]
```

$$\frac{16\pi^4}{5}$$

Parceval:
$\frac{16\pi^4}{5} = \frac{a[0]}{2} + \frac{1}{2}$ Sum[$a[k]^2 + b[k]^2$,{k,1,Infinity}]
Im $a[k]^2$ steckt der gesuchte Term. Die restlichen Terme kennen wir von oben. Man errechnet dataus das Resultat.

```
Sum[1 / k^4, {k, 1, Infinity}]
```

$$\frac{\pi^4}{90}$$

c

Gibbs'sches Phänomen: Es entsteht ein Overshoot resp. Undershoot.

d

Dehne die gegebene Funktion x^2wie folgt aus: Setze sie nach rechts bis zu
x = 4 einfach als x^2 fort und nach links als $-x^2$ bis zu x = -4 . Die entstehende Funktion soll periodisch sein, also 8 -periodisch. zudem ist sie symmetrisch zum Ursprung, hat also eine reine Sinusreihe.

2

```
Remove["Global`*"];
```

a

```
T = Pi;
cc = 0;
f[t_] := t;
ω = 2 Pi / T;
a[0] := 2 / T Integrate[f[t], {t, cc, cc + T}];
a[k_] := 2 / T Integrate[f[t] Cos[k ω t], {t, cc, cc + T}];
b[k_] := 2 / T Integrate[f[t] Sin[k ω t], {t, cc, cc + T}];
ff[t_, h_] := a[0] / 2 + Sum[a[n] Cos[n ω t] + b[n] Sin[n ω t], {n, 1, h}];
ff[t, 10]
```

$$\frac{\pi}{2} - \mathrm{Sin}[2\,t] - \frac{1}{2}\,\mathrm{Sin}[4\,t] - \frac{1}{3}\,\mathrm{Sin}[6\,t] - \frac{1}{4}\,\mathrm{Sin}[8\,t] - \frac{1}{5}\,\mathrm{Sin}[10\,t] - \frac{1}{6}\,\mathrm{Sin}[12\,t] - \frac{1}{7}\,\mathrm{Sin}[14\,t] - \frac{1}{8}\,\mathrm{Sin}[16\,t] - \frac{1}{9}\,\mathrm{Sin}[18\,t] - \frac{1}{10}\,\mathrm{Sin}[20\,t]$$

```
N[%]
```

```
1.5708 - 1. Sin[2. t] - 0.5 Sin[4. t] - 0.333333 Sin[6. t] -
 0.25 Sin[8. t] - 0.2 Sin[10. t] - 0.166667 Sin[12. t] - 0.142857 Sin[14. t] -
 0.125 Sin[16. t] - 0.111111 Sin[18. t] - 0.1 Sin[20. t]
```

b

Ersetze t durch - t. Dadurch wird Sin[k(-t)]=-Sin[k t]. Schiebe dann die Funktion um 3 nach oben.

```
-ff[t, 10] + 3
```

$$3-\frac{\pi}{2}+\text{Sin}[2\,t]+\frac{1}{2}\text{Sin}[4\,t]+\frac{1}{3}\text{Sin}[6\,t]+\frac{1}{4}\text{Sin}[8\,t]+\frac{1}{5}\text{Sin}[10\,t]+\frac{1}{6}\text{Sin}[12\,t]+\frac{1}{7}\text{Sin}[14\,t]+\frac{1}{8}\text{Sin}[16\,t]+\frac{1}{9}\text{Sin}[18\,t]+\frac{1}{10}\text{Sin}[20\,t]$$

Kontrolle:

```
T = Pi;
cc = 0;
f[t_] := 3 - t;
ω = 2 Pi / T;
a[0] := 2 / T Integrate[f[t], {t, cc, cc + T}];
a[k_] := 2 / T Integrate[f[t] Cos[k ω t], {t, cc, cc + T}];
b[k_] := 2 / T Integrate[f[t] Sin[k ω t], {t, cc, cc + T}];
ff1[t_, h_] := a[0] / 2 + Sum[a[n] Cos[n ω t] + b[n] Sin[n ω t], {n, 1, h}];
ff1[t, 10] // Simplify
```

$$3-\frac{\pi}{2}+\text{Sin}[2\,t]+\frac{1}{2}\text{Sin}[4\,t]+\frac{1}{3}\text{Sin}[6\,t]+\frac{1}{4}\text{Sin}[8\,t]+\frac{1}{5}\text{Sin}[10\,t]+\frac{1}{6}\text{Sin}[12\,t]+\frac{1}{7}\text{Sin}[14\,t]+\frac{1}{8}\text{Sin}[16\,t]+\frac{1}{9}\text{Sin}[18\,t]+\frac{1}{10}\text{Sin}[20\,t]$$

```
N[%]
```

```
1.4292 + Sin[2. t] + 0.5 Sin[4. t] + 0.333333 Sin[6. t] +
 0.25 Sin[8. t] + 0.2 Sin[10. t] + 0.166667 Sin[12. t] + 0.142857 Sin[14. t] +
 0.125 Sin[16. t] + 0.111111 Sin[18. t] + 0.1 Sin[20. t]
```

3

```
Remove["Global`*"];
```

a

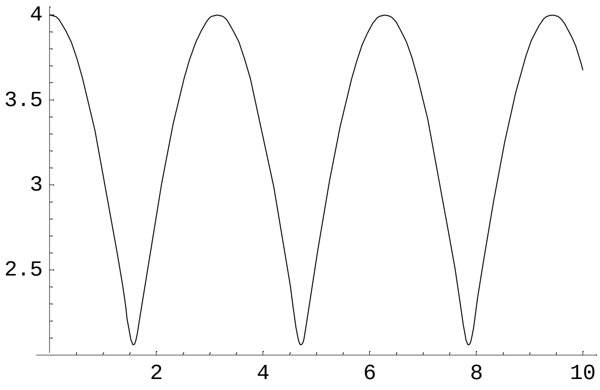
```
T = Pi;
cc = -Pi / 2;
f[x_] := 2 + 2 Cos[x];
ω = 2 Pi / T;
a[0] := 2 / T Integrate[f[x], {x, cc, cc + T}];
a[k_] := 2 / T Integrate[f[x] Cos[k ω x], {x, cc, cc + T}];
b[k_] := 2 / T Integrate[f[x] Sin[k ω x], {x, cc, cc + T}];
ff2[x_, h_] := a[0] / 2 + Sum[a[n] Cos[n ω x] + b[n] Sin[n ω x], {n, 1, h}];
ff2[x, 10] // Simplify
```

$$2+\frac{4}{\pi}+\frac{8\,\text{Cos}[2\,x]}{3\,\pi}-\frac{8\,\text{Cos}[4\,x]}{15\,\pi}+\frac{8\,\text{Cos}[6\,x]}{35\,\pi}-\frac{8\,\text{Cos}[8\,x]}{63\,\pi}+\frac{8\,\text{Cos}[10\,x]}{99\,\pi}-\frac{8\,\text{Cos}[12\,x]}{143\,\pi}+\frac{8\,\text{Cos}[14\,x]}{195\,\pi}-\frac{8\,\text{Cos}[16\,x]}{255\,\pi}+\frac{8\,\text{Cos}[18\,x]}{323\,\pi}-\frac{8\,\text{Cos}[20\,x]}{399\,\pi}$$

```
N[%]
```

```
3.27324 + 0.848826 Cos[2. x] - 0.169765 Cos[4. x] + 0.0727565 Cos[6. x] -
 0.0404203 Cos[8. x] + 0.025722 Cos[10. x] - 0.0178075 Cos[12. x] + 0.0130589 Cos[14. x] -
 0.00998619 Cos[16. x] + 0.00788384 Cos[18. x] - 0.00638215 Cos[20. x]
```

```
Plot[Evaluate[ff2[x, 10]], {x, 0, 10}];
```



b

Das Phänomen kommt nicht zur Wirkung, da die Funktion stetig ist und die Werte der Reihe mit n gegen unendlich die Werte der Funktion konvergieren.

c

```
a[k] // ExpandAll
```

$$\frac{8\,\mathrm{Cos}[k\,\pi]}{(1-4\,k^2)\,\pi}+\frac{4\,\mathrm{Sin}[k\,\pi]}{k\,\pi}$$

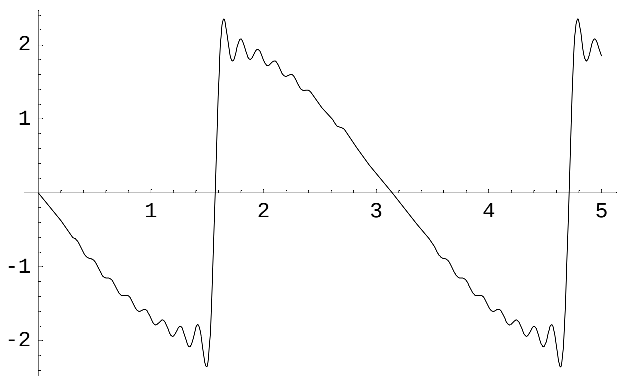
```
b[k] // ExpandAll
```

0

Beim Ableiten kommt ein Faktor k vor den Koeffizient a[k]. Der Term mit Sin[k] wird zu $\frac{4}{\pi}$ Sin[k]. Dabei nimmt Sin[k] immer den Wert 0 an. Der andere Teil von a[k] besitzt nach dem Ableiten den Faktor $\frac{8\,k}{(1-4\,k^2)\,\pi}$ vor dem Cosinus. Die Cosinusreihe konvergiert, da der Nenner mit k^2 wächst, der Zähler nur mit k. Dazu ist noch b[k] = 0. Damit konvergiert die Fourierreihe.

d

```
Plot[Evaluate[D[ff2[x, 20], x]], {x, 0, 5}];
```



Es ist die Funktion -2 Sin[x] auf [$-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$) = Grundintervall, sonst periodisch.

e

```
T = Pi;
cc = -Pi / 2;
f[x_] := 2 + 2 Cos[x];
ω = 2 Pi / T;
a[0] := 2 / T Integrate[f[x], {x, cc, cc + T}];
a[k_] := 2 / T Integrate[f[x] Cos[k ω x], {x, cc, cc + T}];
b[k_] := 2 / T Integrate[f[x] Sin[k ω x], {x, cc, cc + T}];
c[k_] := 1 / T Integrate[f[x] E^(-I k ω x), {x, cc, cc + T}];
ff[x_] := a[0] / 2 + Sum[a[n] Cos[n ω x] + b[n] Sin[n ω x], {n, 1, Infinity}];
ff[x_, h_] := a[0] / 2 + Sum[a[n] Cos[n ω x] + b[n] Sin[n ω x], {n, 1, h}];
ffk[x_] := Sum[c[n] E^(I n ω x), {n, -Infinity, Infinity}];
ffk[x_, h_] := Sum[c[n] E^(I n ω x), {n, -h, h}];
ffk[t, 10]
```

$$\frac{4 e^{-2 i t}}{3 \pi} + \frac{4 e^{2 i t}}{3 \pi} - \frac{4 e^{-4 i t}}{15 \pi} - \frac{4 e^{4 i t}}{15 \pi} + \frac{4 e^{-6 i t}}{35 \pi} + \frac{4 e^{6 i t}}{35 \pi} - \frac{4 e^{-8 i t}}{63 \pi} - \frac{4 e^{8 i t}}{63 \pi} + \frac{4 e^{-10 i t}}{99 \pi} + \frac{4 e^{10 i t}}{99 \pi} - \frac{4 e^{-12 i t}}{143 \pi} - \frac{4 e^{12 i t}}{143 \pi} + \frac{4 e^{-14 i t}}{195 \pi} + \frac{4 e^{14 i t}}{195 \pi} - \frac{4 e^{-16 i t}}{255 \pi} - \frac{4 e^{16 i t}}{255 \pi} + \frac{4 e^{-18 i t}}{323 \pi} + \frac{4 e^{18 i t}}{323 \pi} - \frac{4 e^{-20 i t}}{399 \pi} - \frac{4 e^{20 i t}}{399 \pi} + \frac{2 (2 + \pi)}{\pi}$$

f

```
amplitudenSpektrum = Table[c[n], {n, -10, 10}]
```

$$\left\{-\frac{4}{399 \pi}, \frac{4}{323 \pi}, -\frac{4}{255 \pi}, \frac{4}{195 \pi}, -\frac{4}{143 \pi}, \frac{4}{99 \pi}, -\frac{4}{63 \pi}, \frac{4}{35 \pi}, -\frac{4}{15 \pi}, \frac{4}{3 \pi}, \frac{2 (2 + \pi)}{\pi}, \frac{4}{3 \pi}, -\frac{4}{15 \pi}, \frac{4}{35 \pi}, -\frac{4}{63 \pi}, \frac{4}{99 \pi}, -\frac{4}{143 \pi}, \frac{4}{195 \pi}, -\frac{4}{255 \pi}, \frac{4}{323 \pi}, -\frac{4}{399 \pi}\right\}$$

```
phasenSpektrum = Table[0, {n, -10, 10}]
```

{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}

4a Einseitig

```
Remove["Global`*"];
```

a

Wir verwenden zuerst die Skalierung nach der Periode 2 Pi. Das vereinfacht die Rechung etwas.

```
n=3; w = 2 Pi/n;
{x[0],y[0]}={0 w,2};
{x[1],y[1]}={1 w,2};
{x[2],y[2]}={2 w,3};
```

```
p[k_]:= {x[k],y[k]};
Table[p[k],{k,0,n-1}]
```

$$\left\{\{0, 2\}, \left\{\frac{2\pi}{3}, 2\right\}, \left\{\frac{4\pi}{3}, 3\right\}\right\}$$

```
epi=Prepend[Map[Point,Table[p[k],{k,0,n-1}]],PointSize[0.03]]
```

$$\left\{\text{PointSize}[0.03], \text{Point}[\{0, 2\}], \text{Point}\left[\left\{\frac{2\pi}{3}, 2\right\}\right], \text{Point}\left[\left\{\frac{4\pi}{3}, 3\right\}\right]\right\}$$

```
epi1 = Prepend[Map[Point, Table[{k, y[k]}, {k, 0, n - 1}]], PointSize[0.03]]
```

{PointSize[0.03], Point[{0, 2}], Point[{1, 2}], Point[{2, 3}]}

```
r = E^(-I 2 Pi/n);
c[s_]:= 1/n Sum[y[k] r^(s k),{k,0,n-1}];
Table[c[s],{s,0,10}]//N
```

{2.33333, −0.166667 + 0.288675 i, −0.166667 − 0.288675 i,
2.33333, −0.166667 + 0.288675 i, −0.166667 − 0.288675 i, 2.33333,
−0.166667 + 0.288675 i, −0.166667 − 0.288675 i, 2.33333, −0.166667 + 0.288675 i}

```
fS[t_]:=Sum[c[k] E^(I k t),{k,0,n-1}];
fS[t]
```

$$\frac{7}{3} + \frac{1}{3} e^{2 i t}\left(2 + 3 e^{-\frac{2 i \pi}{3}} + 2 e^{\frac{2 i \pi}{3}}\right) + \frac{1}{3} e^{i t}\left(2 + 2 e^{-\frac{2 i \pi}{3}} + 3 e^{\frac{2 i \pi}{3}}\right)$$

```
% // ExpandAll
```

$$\frac{7}{3} + e^{\frac{2 i \pi}{3} + i t} + \frac{2}{3} e^{\frac{2 i \pi}{3} + 2 i t} + \frac{2 e^{i t}}{3} - \frac{2}{3}(-1)^{1/3} e^{i t} + \frac{2}{3} e^{2 i t} - (-1)^{1/3} e^{2 i t}$$

```
fS1[s_] := fS[s 2 Pi / 3];
fS1[s]
```

$$\frac{7}{3} + \frac{1}{3} e^{\frac{4 i \pi s}{3}}\left(2 + 3 e^{-\frac{2 i \pi}{3}} + 2 e^{\frac{2 i \pi}{3}}\right) + \frac{1}{3} e^{\frac{2 i \pi s}{3}}\left(2 + 2 e^{-\frac{2 i \pi}{3}} + 3 e^{\frac{2 i \pi}{3}}\right)$$

```
% // ExpandAll
```

$$\frac{7}{3} + \frac{2}{3} e^{\frac{2 i \pi s}{3}} - \frac{2}{3}(-1)^{1/3} e^{\frac{2 i \pi s}{3}} + \frac{2}{3} e^{\frac{4 i \pi s}{3}} - (-1)^{1/3} e^{\frac{4 i \pi s}{3}} + e^{\frac{2 i \pi}{3} + \frac{2 i \pi s}{3}} + \frac{2}{3} e^{\frac{2 i \pi}{3} + \frac{4 i \pi s}{3}}$$

```
% // N // Simplify
```

$$2.33333 - (0.166667 - 0.288675\, i)\, e^{2.0944\, i\, s} - (0.166667 + 0.288675\, i)\, e^{4.18879\, i\, s}$$

```
fS[t]//ExpToTrig
```

$$\frac{7}{3} - \frac{\text{Cos}[t]}{6} + \frac{i\,\text{Cos}[t]}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{6}\text{Cos}[2 t] - \frac{i\,\text{Cos}[2 t]}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{6} i\,\text{Sin}[t] - \frac{\text{Sin}[t]}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{6} i\,\text{Sin}[2 t] + \frac{\text{Sin}[2 t]}{2\sqrt{3}}$$

```
% // ExpandAll
```

$$\frac{7}{3} - \frac{\text{Cos}[t]}{6} + \frac{i\,\text{Cos}[t]}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{6}\text{Cos}[2 t] - \frac{i\,\text{Cos}[2 t]}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{6} i\,\text{Sin}[t] - \frac{\text{Sin}[t]}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{6} i\,\text{Sin}[2 t] + \frac{\text{Sin}[2 t]}{2\sqrt{3}}$$

% // N

$2.33333-(0.166667-0.288675\, i)\, \mathrm{Cos}[t]-(0.166667+0.288675\, i)\, \mathrm{Cos}[2.\, t]-(0.288675+0.166667\, i)\, \mathrm{Sin}[t]+(0.288675-0.166667\, i)\, \mathrm{Sin}[2.\, t]$

fS1[s] // **ExpToTrig**

$$\frac{7}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\mathrm{Cos}\left[\frac{2\pi s}{3}\right]+i\,\mathrm{Sin}\left[\frac{2\pi s}{3}\right]\right)+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(\mathrm{Cos}\left[\frac{4\pi s}{3}\right]+i\,\mathrm{Sin}\left[\frac{4\pi s}{3}\right]\right)$$

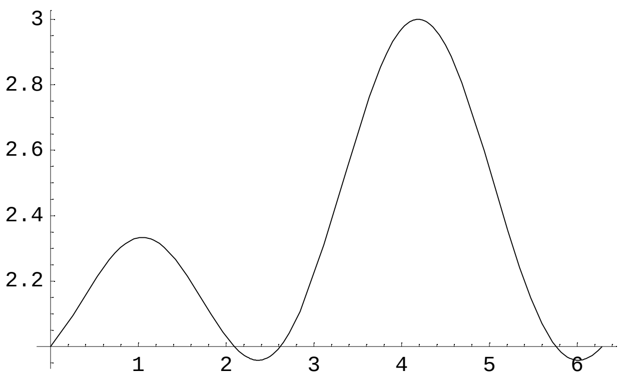
% // ExpandAll

$$\frac{7}{3}-\frac{1}{6}\mathrm{Cos}\left[\frac{2\pi s}{3}\right]+\frac{i\,\mathrm{Cos}\left[\frac{2\pi s}{3}\right]}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{6}\mathrm{Cos}\left[\frac{4\pi s}{3}\right]-\frac{i\,\mathrm{Cos}\left[\frac{4\pi s}{3}\right]}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{6}\,i\,\mathrm{Sin}\left[\frac{2\pi s}{3}\right]-\frac{\mathrm{Sin}\left[\frac{2\pi s}{3}\right]}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{6}\,i\,\mathrm{Sin}\left[\frac{4\pi s}{3}\right]+\frac{\mathrm{Sin}\left[\frac{4\pi s}{3}\right]}{2\sqrt{3}}$$

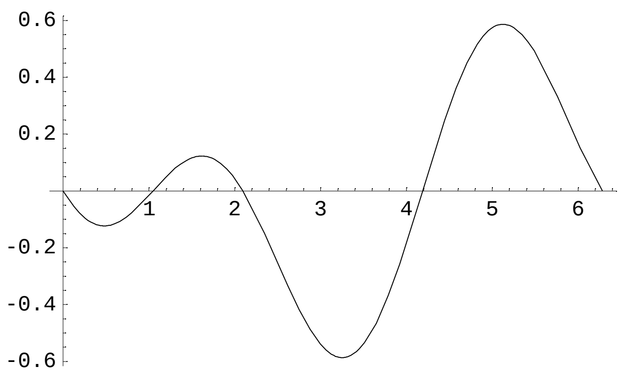
% // N

$2.33333-(0.166667-0.288675\, i)\, \mathrm{Cos}[2.0944\, s]-(0.166667+0.288675\, i)\, \mathrm{Cos}[4.18879\, s]-(0.288675+0.166667\, i)\, \mathrm{Sin}[2.0944\, s]+(0.288675-0.166667\, i)\, \mathrm{Sin}[4.18879\, s]$

Plot[Re[fS[t]],{t,0,2Pi}];

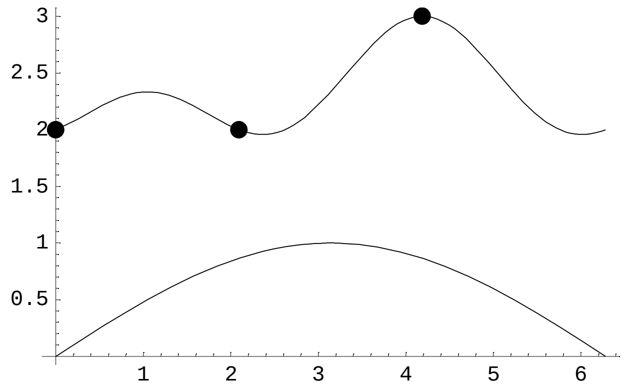


Plot[Im[fS[t]],{t,0,2Pi}];



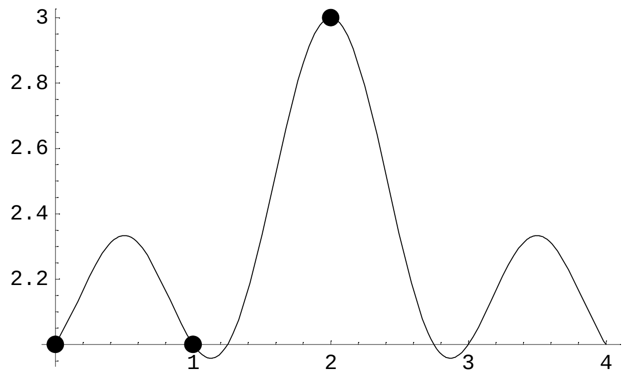
Man beachte im letzten Plot die Grösse der Amplitude.

```
Plot[{Re[fS[t]],Sin[t/2]},{t,0,2Pi},Epilog->epi];
```



Wie man sieht, liegen die verwendeten Punkte auf der Linie von Sin[t/2]. Der Fehler (z.B. grosser Imaginäranteil stammt vermutlich davon, dass so nur wenige Koeffizienten berechnet werden können.)

```
Plot[{Re[fS1[s]]}, {s, 0, 4}, Epilog → epi1];
```



b

Um eine FFT machen zu können, braucht man eine 2-er Potenz als Anzahl der Intervalle.

c

Man müsste z.B. 4 Messungen in einer Periode haben..

4b Beidseitig

```
Remove["Global`*"];
```

a

Wir verwenden zuerst die Skalierung nach der Periode 2 Pi. Das vereinfacht die Rechung etwas.

```
n=3; w = 2 Pi/n;
{x[0],y[0]}={0 w,2};
{x[1],y[1]}={1 w,2};
{x[2],y[2]}={2 w,3};
{x[-1],y[-1]}={-1 w,3};
{x[-2],y[-2]}={-2 w,2};
{x[-3],y[-3]}={-3 w,2};
```

```
p[k_]:= {x[k],y[k]};
Table[p[k],{k,-(n-1),(n-1)}]
```

$$\left\{\left\{-\frac{4\pi}{3}, 2\right\}, \left\{-\frac{2\pi}{3}, 3\right\}, \{0, 2\}, \left\{\frac{2\pi}{3}, 2\right\}, \left\{\frac{4\pi}{3}, 3\right\}\right\}$$

```
epi=Prepend[Map[Point,Table[p[k],{k,0,n-1}]],PointSize[0.03]]
```

$$\left\{\text{PointSize}[0.03], \text{Point}[\{0, 2\}], \text{Point}\left[\left\{\frac{2\pi}{3}, 2\right\}\right], \text{Point}\left[\left\{\frac{4\pi}{3}, 3\right\}\right]\right\}$$

```
epi1 = Prepend[Map[Point, Table[{k, y[k]}, {k, 0, n - 1}]], PointSize[0.03]]
```

{PointSize[0.03], Point[{0, 2}], Point[{1, 2}], Point[{2, 3}]}

```
r = E^(-I 2 Pi/n);
c[s_]:= 1/n Sum[y[k] r^(s k),{k,-Floor[(n-1)/2],n-1-Floor[(n-1)/2]}];
Table[c[s],{s,0,10}]//N
```

$$\{2.33333, -0.166667 + 0.288675\, i, -0.166667 - 0.288675\, i, 2.33333, -0.166667 + 0.288675\, i, -0.166667 - 0.288675\, i, 2.33333, -0.166667 + 0.288675\, i, -0.166667 - 0.288675\, i, 2.33333, -0.166667 + 0.288675\, i\}$$

```
fS[t_]:=Sum[c[k] E^(I k t),{k,-Floor[(n-1)/2],n-1-Floor[(n-1)/2]}];
fS[t]
```

$$\frac{7}{3} + \frac{1}{3} e^{-i t} \left(2 + 3 e^{-\frac{2 i \pi}{3}} + 2 e^{\frac{2 i \pi}{3}}\right) + \frac{1}{3} e^{i t} \left(2 + 2 e^{-\frac{2 i \pi}{3}} + 3 e^{\frac{2 i \pi}{3}}\right)$$

```
% // ExpandAll
```

$$\frac{7}{3} + e^{\frac{2 i \pi}{3} + i t} + \frac{2 e^{-i t}}{3} - (-1)^{1/3} e^{-i t} + \frac{2}{3} (-1)^{2/3} e^{-i t} + \frac{2 e^{i t}}{3} - \frac{2}{3} (-1)^{1/3} e^{i t}$$

```
fS1[s_] := fS[s 2 Pi / 3];
fS1[s]
```

$$\frac{7}{3} + \frac{1}{3} e^{-\frac{2}{3} i \pi s} \left(2 + 3 e^{-\frac{2 i \pi}{3}} + 2 e^{\frac{2 i \pi}{3}}\right) + \frac{1}{3} e^{\frac{2 i \pi s}{3}} \left(2 + 2 e^{-\frac{2 i \pi}{3}} + 3 e^{\frac{2 i \pi}{3}}\right)$$

```
% // ExpandAll
```

$$\frac{7}{3} + \frac{2}{3} e^{-\frac{2}{3} i \pi s} - (-1)^{1/3} e^{-\frac{2}{3} i \pi s} + \frac{2}{3} (-1)^{2/3} e^{-\frac{2}{3} i \pi s} + \frac{2}{3} e^{\frac{2 i \pi s}{3}} - \frac{2}{3} (-1)^{1/3} e^{\frac{2 i \pi s}{3}} + e^{\frac{2 i \pi}{3} + \frac{2 i \pi s}{3}}$$

```
% // N // Simplify
```

$$2.33333 - (0.166667 + 0.288675\, i)\, e^{-2.0944\, i\, s} - (0.166667 - 0.288675\, i)\, e^{2.0944\, i\, s}$$

```
fS[t]//ExpToTrig
```

$$\frac{7}{3} - \frac{\text{Cos}[t]}{3} - \frac{\text{Sin}[t]}{\sqrt{3}}$$

```
% // ExpandAll
```

$$\frac{7}{3}-\frac{\mathrm{Cos}[t]}{3}-\frac{\mathrm{Sin}[t]}{\sqrt{3}}$$

```
% // N
```

2.33333 − 0.333333 Cos[t] − 0.57735 Sin[t]

```
fS1[s] // ExpToTrig
```

$$\frac{7}{3}-\frac{1}{3}\,\mathrm{Cos}\left[\frac{2\pi s}{3}\right]-\frac{\mathrm{Sin}\left[\frac{2\pi s}{3}\right]}{\sqrt{3}}$$

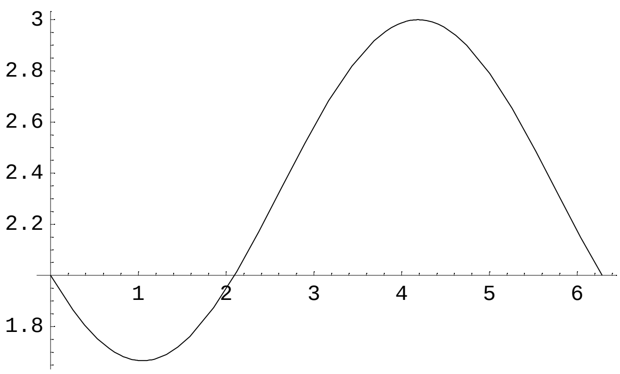
```
% // ExpandAll
```

$$\frac{7}{3}-\frac{1}{3}\,\mathrm{Cos}\left[\frac{2\pi s}{3}\right]-\frac{\mathrm{Sin}\left[\frac{2\pi s}{3}\right]}{\sqrt{3}}$$

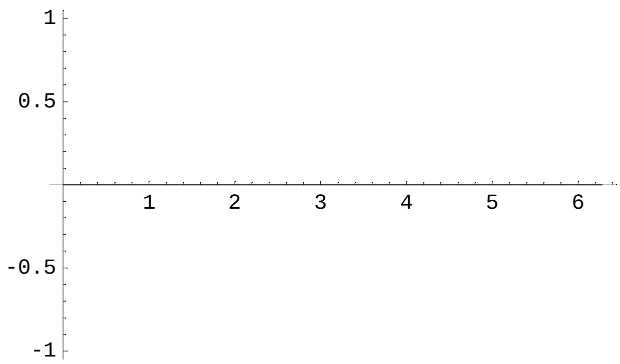
```
% // N
```

2.33333 − 0.333333 Cos[2.0944 s] − 0.57735 Sin[2.0944 s]

```
Plot[Re[fS[t]],{t,0,2Pi}];
```

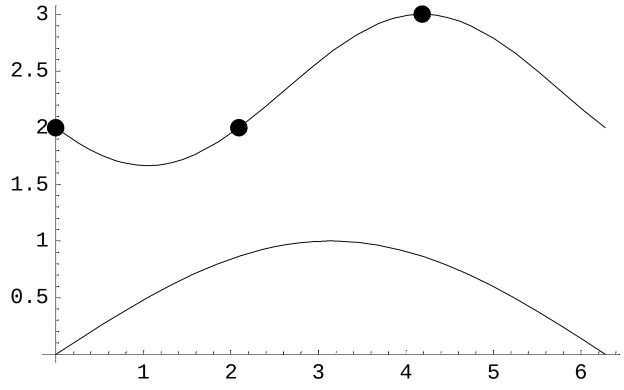



```
Plot[Im[fS[t]],{t,0,2Pi}];
```



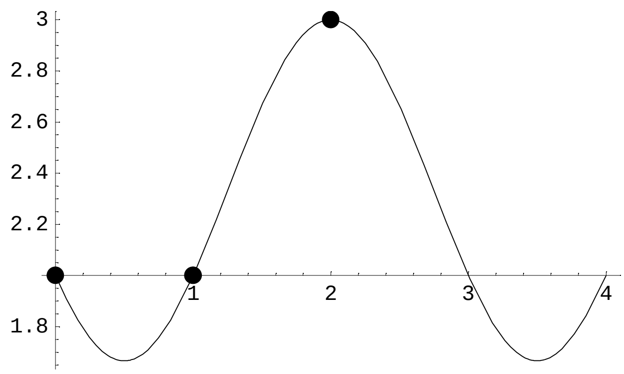
Man beachte im letzten Plot die Grösse der Amplitude.

```
Plot[{Re[fS[t]],Sin[t/2]},{t,0,2Pi},Epilog->epi];
```



Wie man sieht, liegen die verwendeten Punkte auf der Linie von Sin[t/2]. Der Fehler (z.B. grosser Imaginäranteil stammt vermutlich davon, dass so nur wenige Koeffizienten berechnet werden können.)

```
Plot[{Re[fS1[s]]}, {s, 0, 4}, Epilog → epi1];
```



b

Um eine FFT machen zu können, braucht man eine 2-er Potenz als Anzahl der Intervalle.

c

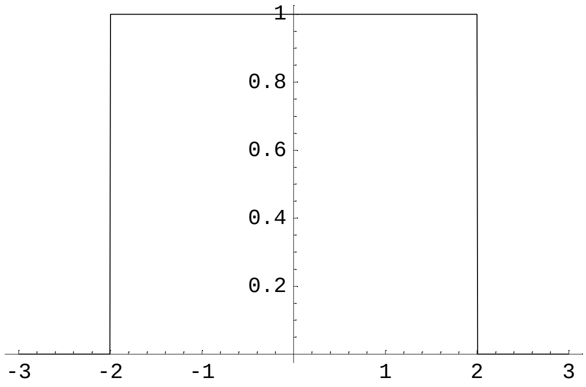
Man müsste z.B. 4 Messungen in einer Periode haben..

5

```
Remove["Global`*"];
```

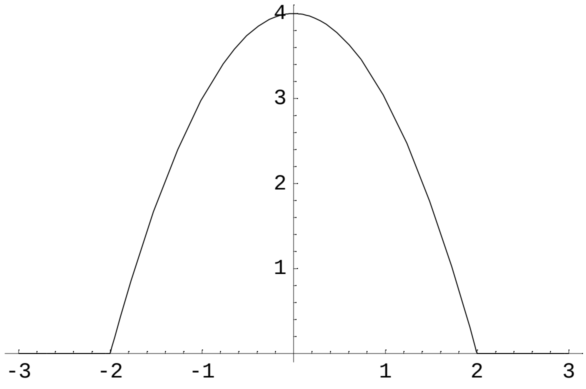
a

```
f1[t_] := UnitStep[x + 2] - UnitStep[x - 2];
Plot[f1[x], {x, -3, 3}];
```



b

```
f2[t_] := (4 - x^2) (UnitStep[x + 2] - UnitStep[x - 2]);
Plot[f2[x], {x, -3, 3}];
```



c (Achtung Faktor $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ bei anderer Definition der Fouriertransformation!!!)

```
FourierTransform[f1[x], x, ω]
```

$$\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{Sin}[2\,\omega]}{\omega}$$

d (Achtung Faktor $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ bei anderer Definition der Fouriertransformation!!!)

```
FourierTransform[f2[x], x, ω]
```

$$\frac{i\,e^{-2\,i\,\omega}\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\omega^3}-\frac{i\,e^{2\,i\,\omega}\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\omega^3}-\frac{2\,e^{-2\,i\,\omega}\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\omega^2}-\frac{2\,e^{2\,i\,\omega}\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\omega^2}$$

```
FourierTransform[f2[x], x, ω] // Simplify
```

$$-\frac{e^{-2 i \omega} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(-i + 2 \omega + e^{4 i \omega} (i + 2 \omega)\right)}{\omega^3}$$

```
% // ExpToTrig // Simplify
```

$$-\frac{2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(2 \omega \operatorname{Cos}[2 \omega] - \operatorname{Sin}[2 \omega]\right)}{\omega^3}$$

e

```
InverseFourierTransform[(Cos[Ω] + Sin[Ω]) / Ω, Ω, x]
```

$$\left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Sign}[-1 + x] + \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Sign}[1 + x]$$

```
InverseFourierTransform[(Cos[Ω] + Sin[Ω]) / Ω, Ω, x] // Simplify
```

$$\left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{Sign}[-1 + x] + i \operatorname{Sign}[1 + x]\right)$$

6

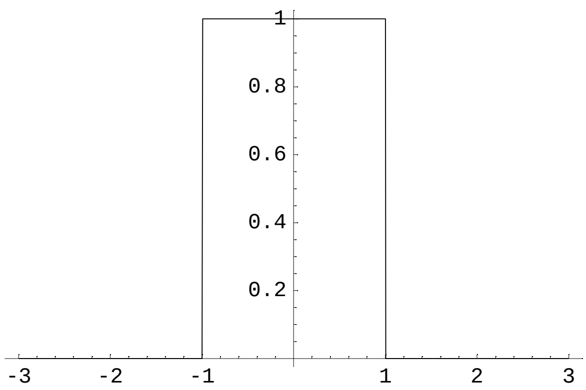
```
Remove["Global`*"];
```

a

Man kann die C_k ( ) berechnen.

b (Achtung Faktor $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ bei anderer Definition der Fouriertransformation!!!)

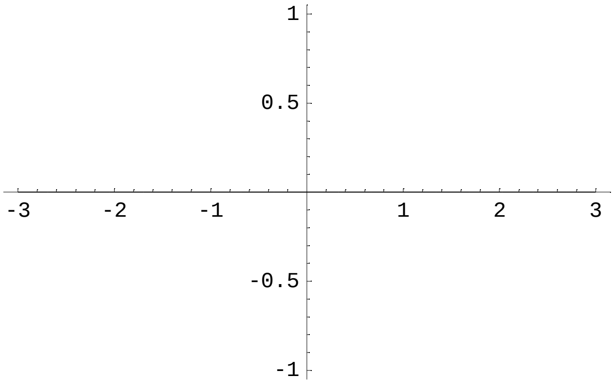
```
f[x_] := UnitStep[x + 1] - UnitStep[x - 1];
Plot[f[x], {x, -3, 3}];
```



```
FourierTransform[f[x], x, ω] // Simplify
```

$$\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \mathrm{Sin}[\omega]}{\omega}$$

```
g[x_] := f[x - 100] f[x];
Plot[g[x], {x, -3, 3}];
```



g[x] ist 0.

c (Achtung Faktor $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ bei anderer Definition der Fouriertransformation!!!)

```
u[1, 1] = Integrate[
  Evaluate[FourierTransform[f[x], x, λ] Cos[λ] E^(I λ)], {λ, -Infinity, Infinity} ]
```

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$