Test ◇ M2–11/12–02–01 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

Fourier

Probl. 1 Gegeben ist eine Funktion f:

$$f(t) \;=\; \begin{cases} t^2 - t & t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ (\frac{\pi}{2})^2 - \frac{\pi}{2} = const. & t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\,\pi}{2}) \\ f(t + n\,2\,\pi) & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(a) Skizziere den Graphen der Funktion.

(b) Berechne die reellen Koeffizienten a_0 sowie $a_1, \ldots a_4$ und $b_1, \ldots b_4$ der Fourierreihe f_4 von f numerisch und präsentiere die Resultate in einer **Tabelle**.

(c) Berechne damit numerisch die absoluten Differenzen zwischen Näherungen und Funktionswerten $|\tilde{f}_4(\frac{\pi}{2}) - f(\frac{\pi}{2})|$ sowie $|\tilde{f}_4(\frac{3\,\pi}{2}) - f(\frac{3\,\pi}{2})|$.

(d) Skizziere den Graphen der berechnete Näherung möglichst exakt. Was ist zur erreichten Genauigkeit auf einen Blick zu sagen?

(e) Könnte man aus der Beziehung $f(\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2})^2 - \frac{\pi}{2}$ und der Fourierreihe einen Näherungswert von π berechnen? (Erwartet wird eine mathematische Erklärung).

Probl. 2 (a) Suche die Fourierreihe für die Funktion

$$f_1(t) \;=\; \begin{cases} |t| + t & t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \text{sonst periodisch} & T = \pi \end{cases}$$

(b) Bestimme mit Hilfe der jetzt bekannten Fourierreihe die Fourierreihe der zweiten Funkton

$$f_2(t) \;=\; \begin{cases} 3 - |t| + t & t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \text{sonst periodisch} & T = \pi \end{cases}$$

Probl. 3 Gegeben sind die Messwerte $\{(0,\,2),\,(1,\,2),\,(2,\,3),\,(3,\,3),\,(4,\,2),\,(5,\,2),\,(6,\,3),\,(7,\,3),\,\ldots\}$. Wie man sieht, zeigt sich nach den ersten 4 Messwerten eine Periodizität: $y_k = y_{k+4}$.

(a) Bestimme mittels DFT eine Fourierreihe für diese Messserie und stelle die erhaltene Funktion sowie die Messwerte in einer Skizze dar.

(b) Ist es hier möglich, eine FFT zu machen?

(c) Beschreibe in wenigen Sätzen, wie man allegemin die Messungen gewinnen müsste, um mit FFT arbeiten zu können.

Probl. 4 Sei $H(x)$ die Einheitssprungfunktion mit der Sprungstelle $x = 0$ und $H(x-k)$ diejenige mit der Sprungstelle $x = k$. Weiter sind folgende Funktionen gegeben:

$$f_1(x) = (H(x+3) - H(x-3)), \qquad f_2(x) = (9 - x^2)\,(H(x+3) - H(x-3)),$$

$$F_3(\Omega) = \frac{(\cos(\Omega) - \sin(\Omega))}{\Omega}$$

(a) Skizziere die Funktion $f_1(x)$.

(b) Skizziere die Funktion $f_2(x)$.

(c) Berechne die Fouriertransformierte von $f_1(x)$

(d) Berechne die Fouriertransformierte von $f_2(x)$

(e) Berechne die inverse Fouriertransformierte von $F_3(\Omega)$

Probl. 5 Versuche von folgenden Funktionen die Fouriertransformierte herauszufinden:

(a) $f(x) = \cos(4\,x) + i\,\sin(4\,x)$.

(b) $f(x) = \sin(4\,x) + i\,\cos(4\,x)$.

(c) $\hat{f}(\omega) = \cos(4\,\omega) + i\,\sin(4\,\omega)$.

Probl. 6 Sei die $2\,\pi$–periodische Funktion $f_6(t)$ gegeben durch $f_6(t) = (|t-\pi| + \sin(\frac{t}{2}))$ über dem $FI = [-\pi,\,\pi)$.

(a) Bestimme die Fourierreihe $\tilde{f}_{6,\,4}(t)$ von $f_6(t)$ bis und mit $n = 4$ (Koeffizienten numerisch).

(b) Bestimme den Graphen der Fourierreihe $\tilde{f}_{6,\,4}(t)$ von $f_6(t)$ (bis und mit $n = 4$).

Probl. 7 Sei $f(x) = \frac{1}{2}\,e^{-(2\,x)^2}$

(a) Zeige die Berechnung der Fouriertransformierten $\hat{f}(\Omega)$ von $f(x)$, falls diese existiert.

(b) Skizziere $f(x)$ und $\hat{f}(\Omega)$, falls diese möglich ist.

(c) Was ist bemerkenswert am Resultat?

Viel Glück!

WIR1