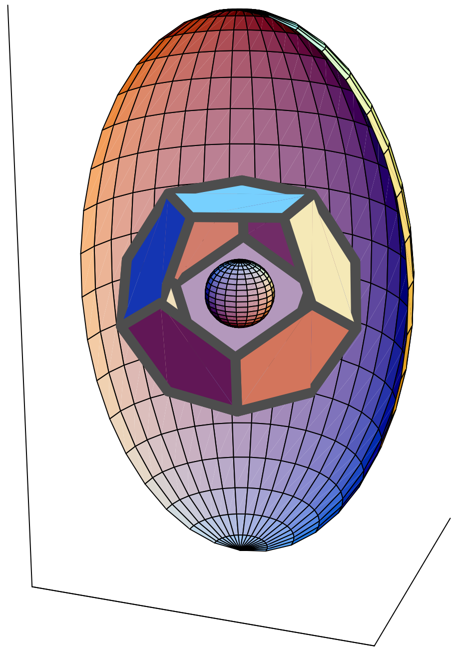
◇ Grundlagen Physik für Ingenieure ◇
◇ Zusammenfassungen — Ergänzungen ◇
◇ zum Lehrmittel und Skript ◇



von

Rolf Wirz

Ingenieurschule Biel / BFH–AHB / BFH–TI

Link zum Lehrmittel und Skript: Siehe Kapitel „Einleitung und Voraussetzung“

Neufassung V.1.1.(18) d   Druck vom 2. Juni 2011 **Deutsche Vers., nicht übersetzt**

WIR / Win XP / 2010 H_00.TEX unter Einbezug von älteren Textteilen

Hilfen für die Grundlagen der Physik.
Produziert mit LaTeX auf NeXT-Computer/ PCTeX / Win XP.

Einige Graphiken der Skriptreite des Autors sind auch mit *Mathematica* entstanden.

Wer den Kaktus nicht kennt, sieht etwas zwischen einem Igel, einem gestrüppartigen Körper, einem Gestrüpp mit Symmetrien. Wer ihn hingegen schon einmal angefasst hat, der weiss von den Stacheln in seiner Hand. . . . . .

„Volksweisheit aus Irgendwo“

Aktuelle Adresse des Autors (2007):

Rolf W. Wirz-Depierre
Prof. für Math.
Berner Fachhochschule (BFH), Dep. AHB und TI
Pestalozzistrasse 20
Büro B112 CH–3400 Burgdorf/BE
Tel. ++41 (0)34 426 42 30 / intern 230
Mail: Siehe http://rowicus.ch/Wir/indexTotalF.html unter „Koordinaten von R.W.“
Alt: Ingenieurschule Biel (HTL), Ing'schule des Kt. Bern, Fachhochschule ab 1997) // BFH HTA Biel // BFH TI //

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung und Voraussetzung

Liebe Leserin, lieber Leser

Dieses Skript soll es der Leserin + dem Leser ermöglichen, sich rasch ein einführendes Verständnis zum angegebenen Thema „theoretische Grundlagen der Physik, Niveau erstes Jahr an einer FH“ zu machen.

Der vorliegende Text ist zu einem Teil etwa um das Jahr 2000 entstanden aus dem Anliegen heraus, fachfremden und mathematisch wenig geschulten Studierenden einen Überblick über das moderne Weltbild zu ermöglichen. Zu einem anderen Teil ist der Text im Winter 2010 entstanden zur Ergänzung und Unterstützung eines einmaligen Kurses „Grundlagen der Physik, theoretischer Teil“ — und zur Unterstützung der Lernenden, welche so unterstützt werden möchten. Der Kurs dauert vier Stunden die Woche während vierzehn Wochen auf dem unteren technischen Fachhochschulniveau.

Das im Kurs und gemeinsam auch im Labor als **Pflichtlehrmittel und als Skript verwendete Werke** findet der Leser beschreiben auf:

http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Hilfen/PhysikSkript.htm

Im Winter März 2010 Der Autor

Kapitel 2

Zusammenfassungen des Skripts: Übersichten für den Theorieunterricht

2.1 Grundlagen zur Physik

2.1.1 Zur Wissenschaftstheorie — eine Einführung

Einiges aus der Theorie der exakten Wissenschaften (Wissenschaftstheorie) — eine Einführung

1. Ausgangssituation (Grundannahme)

Die äußere Natur ist für den Menschen evident nach Maßgabe seiner Sinneserfahrung (empirische, nach anderer Ansicht empiristische Erfahrung).
Physik ist seit ihrer Anerkennung als Wissenschaft Grundlage oder das Dach (Oberbegriff) anderer Naturwissenschaften. (Astronomie, Chemie, physikalische Chemie, Biochemie,...).
Am Beginn der Physik als überlieferte Wissenschaft stehen die alten Griechen (vor allem Aristoteles), aber auch Archimedes.

2. Die Anliegen der Physik

- Physik soll Erscheinungen der Natur (physis) *beschreiben*.
  - Heute vor allem die *nicht lebende* Natur.
- Die Physik soll in einem *Fachgebiet* betrieben werden, das einen *Wissensaustausch* ermöglicht.
  - Seit Thales oder seit Aristoteles bis heute haben sich von die Physik einige *Spezialgebiete abgespaltet:* Astronomie, Chemie, physikalische Chemie, Biochemie, ...

- Die Physik soll wenn möglich mindestens *Regeln* formulieren (z.B. oft das Niveau der Chemie). Regeln lassen auch *Ausnahmen* zu. Der Gültigkeitsbereich ist oft nicht so klar.

- Die Physik soll *Gesetze* formulieren (weitgehend das übliche Anliegen der Physik).

  – Gesetze sind ausnahmslos gültig. Sie sind bloß eingeschränkt auf den Gültigkeitsbereich. Dieser muss bekannt sein. Leider reicht die Kontrollmöglichkeit oft nicht über den Bereich hinaus, in dem der Mensch sich mit seinen Geräten räumlich und zeitlich bewegen kann.

3. Die Art der Gesetze

Physikalische Gesetze lassen sich einerseits mittels *quantitativer* und andererseits mittels *qualitativer* Kriterien ausdrücken.

Qualitativ: Zum Beispiel die Existenz und Abgrenzung der Aggregatszustände der Materie (fest, flüssig, gasförmig, plasmatisch). Unterscheidung geschieht hier nach qualitativen Typisierungs- oder Kontrollkriterien. (Z.B. fest bedeutet, dass ein Stück Materie einem geeigneten anderen Stück Materie Widerstand bezüglich dem Eindringen des anderen Stücks entgegensetzt. Darauf beruht dann die Härtebestimmung.)

Quantitativ: Hier handelt es sich bei den Kriterien in der Regel um Beziehungen zwischen Größen von folgenden Arten:

- Beziehungen zwischen *skalaren Größen*. Skalaren Größen sind Zahlen mit Einheiten (Z.B. die Zeitdifferenz).

- Beziehungen zwischen *vektoriellen Größen*, also zwischen Vektoren mit Einheiten. (Z.B. die Geschwindigkeit ist ein solcher Vektor. Er hat eine Richtung und eine Maßzahl, die Vektorlänge).

- Beziehungen zwischen *Matrizengrößen*, d.h. zwischen Matrizen mit Einheiten (z.B. die Spannungsmatrix).

- Oft hängen die Größen von andern Größen ab, sind also *mathematische Funktionen.*

4. Die Methode der Erkenntnisgewinnung

Hauptsächlich geht es bei der Suche nach physikalischen Gesetzen heute darum, *Modelle* zu suchen, sie experimentell zu überprüfen und dann zu akzeptieren oder zu verwerfen.
Aufgrund experimenteller Daten kann man manchmal Gesetze vermuten, formulieren und das Maß ihrer Güte oder ihrer Gültigkeit abschätzen.
Grundlagen zur Gewinnung von Gesetzen sind *Beobachtungen* oder *Experimente* sowie die *Sprache der Mathematik* zur Formulierung der Gesetze in Form von *Modellen.*

5. Was ist ein Modell?

Vergleich: Alle kennen *Modelleisenbahnen* und richtige, *originale Eisenbahnen.* Das Modell zeigt gewisse Aspekte, welche mit dem Original übereinstimmen. Andere stimmen jedoch nicht überein.

Beispiel: Mit der *Modelleisenbahn* kann man *Rangierprobleme lösen*, aber *nicht von Paris nach Wien fahren.*
Die Modelleisenbahn ist formuliert in der „Sprache der Modellbaustoffe" (z.B. Plastik, Weißguss,...). Sie lässt einem die grobe äußere Form und auch ein wenig Innenleben der richtigen Eisenbahn begreifen, falls man die Übertragung des Maßstabes gedanklich schafft.

Das **physikalische Modell** ist *formuliert* in der *Sprache der Mathematik:* In Formeln, Gleichungen, Funktionen,...

Beispiel: Die Tragkraft eines Trägers an einem Gebäude kann man Hilfe von Formeln vorhersagen, jedoch ist die Formel nicht im Gebäude einbaubar und anschließend belastbar wie der Träger.

6. Zum Problem der Beziehung zwischen Formel oder Modell (Mathematik) und physikalischer Wirklichkeit

(Siehe dazu Tabelle am Schluss dieser Einführung.)
In der genannten Tabelle kommt zum Ausdruck, dass auf der Seite der Formeln, der Mathematik also, mit Hilfe der Methode der *Deduktion* und der *kausalen mathematischen Logik* aus gegebenen *Modellen* oder Formeln neue Modelle, Formeln oder Gesetze gewonnen werden können (oft *Implikation*). Man schreitet hier oft *deduktiv* vom *Allgemeinen zum Besondern.* Auf der Seite der Beobachtungen wird dagegen mit Hilfe des Prinzips der *Induktion* das Gegenteil gemacht: Man versucht *aus einer endlichen Anzahl von besonderen Fällen ein allgemeines Gesetz* zu postulieren, das dann in allen, oft somit in unendlich vielen Fällen gültig sein muss. Dieses Vorgehen nennt man *Induktion.* Es läuft exakt in der umgekehrten Richtung wie die *Deduktion.*
Daneben ergeben sich aus physikalisch beobachteten Gesetzen oft weitere Gesetze, welche man mit der phänomenologischen Deduktion oder phänomenologischen Kausalität gewinnt (qualitative Gesetze). Diese stimmen, falls das Modell richtig ist, im Rahmen der Genauigkeit mit dem Resultat auf der Seite der Mathematik oder der kausalen logischen Deduktion überein. Das Prinzip welches besagt, dass das eine (die mathematische Deduktion) so herauskommt wie das andere (die phänomenologische Deduktion auf der Beobachtungsseite), nennt man *Analogie* oder manchmal auch (im Falle der Zeit) *Synchronizität*, im Gegensatz zur Kausalität.
Bei der Beziehung zwischen Ursache und ihrer Wirkung spricht man also von *Kausalität.* Wenn dagegen beim Vergleich zwischen mathematischer und phänomenologischer Ableitung das Modell an der Ausgangsposition mit dem zugehörigen Naturphänomen

hinlänglich übereinstimmt und auch das Modell nach der Ableitung mit dem zugehörigen abgeleiteten Naturphänomen, so spricht man von *Analogie*.
Der Schluss vom allgemeineren Fall (allgemeineres Gesetz) zu besonderen Fall (besondere Situation) ist also die *Deduktion*. Hier setzt man die *Regeln der Logik* ein. Beim Schluss vom besonderen Fall (besondere Situation, Beobachtung) auf den allgemeinen Fall (allgemeines Gesetz) handelt es sich um die *Induktion* (mit Hilfe der *Regeln der Hypothesenbildung oder Modellbildung*. Solche sind oft *Ausschlussregeln* (daher *indirekte* Regeln, die Komplementärmenge betreffend) oder *Einkreisungsregeln*, also Regeln, welche die Hierarchie der Begriffe betreffen. So wird zum Beispiel ausgeschlossen wird, was es nicht sein kann. Wir halten fest:

Kausalität und **Analogie** sind die *Prinzipien*, auf denen die *wissenschaftliche Beschreibung der Realität durch Modelle* beruht. *(Übersichtstabelle: Siehe Anhang.)*

7. Physik und Technik

An *physikalischen Gesetzen* ist man ungemein stark interessiert, weil sie **technische Anwendungen** ermöglichen, welche viel Geld, Kummer und Leid sparen, oder welche auch viel Geld einbringen. Anwendung solcher Gesetze findet man in der Prognostik, bei Vorhersagen von Phänomenen, welche z.B. den Raum-Ort, die Zeit oder die Qualität betreffen. Eine berechnete Brücke hält (mindestens sollte sie es, wenn richtig gerechnet worden wäre). Die Rechnung aufgrund des Modells erlaubt hier eine Vorhersage - man muss die Sicherheit Brücke nicht durch austesten mit Hilfe von „Versuchskaninchen“ ergründen. Man errechnet sie im Voraus.
Unsere Zivilisation ist bekanntlich zentral bedingt durch unsere Technik. Vieles in der Gesellschaft oder im Leben eines Menschen funktioniert heute so gut nur infolge der heute möglichen Technik. Wir haben deshalb nicht mehr bloß eine mittlere Lebenserwartung von höchstens 15 Jahren, sondern von ca. 70 Jahren. Wir hier in Europa frieren nicht mehr im Winter, haben Essen und Kleider, ärztliche Versorgung und können die Schönheit des Planeten mittels Reisen erkunden. Im Mittelalter war das alles anders für den Durchschnittsmenschen hier.
Technik ist aber *Anwendung von naturwissenschaftlichen Gesetzen*. Also von *Physik* und damit von *Mathematik*. Denn in deren Sprache werden die Gesetze formuliert und benutzt.

8. Das wissenschaftliche Experiment

Ein *Experiment* ist nur dann *wertvoll*, wenn es gewisse *Qualitätskriterien* erfüllt, die wir hier kurz streifen wollen. Die wissenschaftliche Güte von experimentellen Befunden beruht unter Anderem auf den nachfolgend beschriebenen *Descarteschen Prinzipien*. *Experimente* sollten möglichst *objektiv* und damit *wo auch immer durch alle nachvollziehbar* sein, welche die *notwendige Vernunft* dazu besitzen. Subjektiv im Sinne von eigenbrötlerisch und durch andere nicht einsehbar widerspricht den Regeln der in weiten Kreisen anerkannten *Qualität*. Statt *„Objektivität“* (mit Mitteln der Beobachtungen nicht immer

abschließend möglich) sagt man hier genauer „*Intersubjektivität*“ (anerkannt von denjenigen endlich vielen Vernünftigen, welche teilhaben können) und *Pragmatik*.
Descartesche und andere Prinzipien:

1. Man hüte sich vor *Übereilung*, *vorgefasster Meinung*, Übertreibung, *Ungenauigkeit*. (Im Labor bedeutet das exakt definierte Messanordnungen.)

2. Man halte nur das für wissenschaftlich, was man auch *wirklich eingesehen* hat (auf der Grundlage anerkannter Kriterien).

3. Man *zerlege jedes Problem in Teilprobleme*, die einfacher lösbar sind als das Ganze. So wird die Lösung des Ganzen erleichtert.

4. Man *beginne mit dem einfachsten Problem*, welches am leichtesten einzusehen ist und gehe schrittweise von hier aus zu Komplizierterem vor.

5. Exaktwissenschaftlichkeit im Sinne der Physik beinhaltet heute auch die *Forderung der Reproduzierbarkeit* oder der *Nachvollziehbarkeit* eines Experiments. (Eine wissenschaftstheoretische Forderung.) Reproduzierbarkeit oder Nachvollziehbarkeit bedeutet heute allgemein die Möglichkeit etwas wiederholen, noch einmal zu machen oder wiederholt herstellen zu können. Derselbe Weg, noch einmal gegangen, soll zum selben Resultat führen. *Das Resultat soll nicht z.B. von Ort, Zeit oder dem Experimentator abhängen*. (Forderungen, welche in anderen Wissenschaften, z.B. der Psychiatrie, nicht immer erfüllbar sind.)

6. Daraus ergibt sich das *Paradigma* der *pragmatischen Hypothese* (auch *Fehlerbereinigungsverfahren*): Erhebe immer das *einfachst mögliche Modell* zum Gesetz (Anerkennung als das momentan richtige Gesetz). Gehe *erst dann zu einem komplizierteren Modell* über, wenn dich *Beobachtungen* oder Messungen bei einem Experiment dazu *zwingen*.

7. *Einsteins Hypothese:* Überall und in jeder Zeit im Universum gelten die gleichen Naturgesetze. Naturgesetze verändern sich nicht mit Raum und Zeit. Sie sind im gesamten Naturreich anwendbar.

Beispiele zum Fehlerberichtigungsverfahren (neue Versuchsresultate zwangen zur Verbesserung eines Modells): Die *Atommodelle* von Demokrit, Dalton, Rutherford, Schalenmodell, Wahrscheinlichkeitsmodell. Jedes hatte in seinem Genauigkeitsbereich Gültigkeit, denn jedes hat die Wissenschaft weiter gebracht.
Ein *Modell* ist daher *nie* die *absolute Wahrheit über die Natur*, sondern immer nur eine *Annäherung* im Sinne dieser Pragmatik.
Naturgesetze sind so im Gegensatz zu mathematischen Gesetzen nicht exakt wahr, sondern nur *annähernd wahr* (im Rahmen der *Messgenauigkeit* und der *Messvoraussetzungen*).

9. Heutige Aufgaben der Physik

Aufgaben, welche sich die Physik heute gestellt hat, sind: *Untersuchungen der kleinsten und der größten Strukturen*. Jedes Teilgebiet stellt sich andere Aufgaben. (Mechanik – von Massepunkten, von festen, flüssigen, gasförmigen Körpern, Akustik, Wärmelehre, Optik, Lehre vom Schall, von der Elektrizität, Atomphysik, Kernphysik, Teilchenphysik, Quantenphysik, Relativitätstheorie, oder wie man die Gebiete sonst auch noch fassen, ordnen und Unterteilen mag.) Man konsultiere dazu die Literatur.

10. Begrifflichkeit und Irritationen

Jede Wissenschaft beginnt mit einem Aufbau der Fachbegriffe, des Begriffsapparates, genannt die *Begrifflichkeit*. Wenn man die einschlägigen Fachbegriffe nicht lernt, in dem man um ihr Begreifen nicht ringt und sie nicht memoriert, so wird man nie an der Wissenschaft teilhaben, um die man sich angeblich bemüht. Man kann diese Wissenschaft dann auch nie auf einem Niveau anwenden, das Vertrauen verdient. *Um die Begriffe muss man daher sehr oft ringen.* Und das ist manchmal kein Sonntagsspaziergang.

Ein Beispiel: Die Geschichte vom Laplaceschen Dämon:

Laplace hat zu seiner Lebenszeit einen Dämon folgender Art postuliert:
Man denke sich einen ganz großen Geist. Einen Geist der so groß, mächtig und potent ist, sodass er von allen Materieteilchen alle Koordinaten kennen kann. Er kennt dann von jedem noch so kleinen Masseteilchen zu einer gegebenen Zeit Zustandskoordinaten, das heißt die Schwerpunktskoordinaten, die Geschwindigkeit, die Drehgeschwindigkeit, die Beschleunigung, die kinetische wie die potentielle Energie, die mittlere Temperatur und so weiter. Nach den Gesetzen der Physik (Gravitationsgesetz und so weiter) kann er damit den Zustand aller dieser Teilchen für alle Zeiten vorausberechnen und daher exakt vorhersagen. Auch der Mensch besteht aus solchen Teilchen. Also ist die Situation des Menschen auch für seine gesamte Lebzeit in allen Zeitpunkten vorhersagbar. Konsequenz: Es gibt keinen freien Willen.
Es ist sehr schwierig, ja praktisch unmöglich, ohne Kenntnisse der Physik und der Mathematik dagegen etwas einzuwenden. Schon bei der Vorhersagetechnik mit Hilfe der genannten Berechnungen hat man ohne Kenntnisse nicht mitzureden. Man kann nur schweigend staunen, zweifeln oder gar sich ärgern, weil einem das Weltbild zerstört worden ist und man sich geistig nun im freien Fall ins Weissnichtwohin befindet, geplagt von Angst infolge Nichtwissen. Man kann Laplaces wissenschaftliche Argumente nur mit ebensolchen, noch weiter entwickelten Argumenten entkräften. Und dazu muss man diese Wissenschaft kennen lernen.
Eine Möglichkeit zu einer Auflösung des Problems zu kommen ist die Folgende:
Das mit dem Dämon ist Denken in der Punktmechanik des 19. Jahrhunderts. Der Dämon verwendet Massepunkte und deren Koordinaten. Punktmechanik ist eine makroskopisch akzeptierbare Näherung. Mikroskopisch jedoch ist sie falsch und sogar gegen die unverrückbaren Naturgesetze. Auch ein so großer Geist wie der Dämon kann nicht die ex-

akten Koordinaten von Ort, Zeit, Masse, Geschwindigkeit, Beschleunigung u.s.w. auch nur eines Massenpunktes kennen, weil es in der Physik diese Begriffe infolge der Heisenbergschen Unschärferelationen nicht mehr gibt. Es kann sie nicht mehr geben, weil Heisenbergs Unschärferelationen ein Naturgesetz sind, etwa ähnlich wie das Gravitationsgesetz ein Naturgesetz ist. Nur Isolierphilosophen, die keine Ahnung vom naturwissenschaftlichen Weltbild haben, weil sie die Naturwissenschaften und die Mathematik nicht studiert haben und diese daher nicht verstehen können, glauben noch an den Laplaceschen Dämon. Es handelt sich daher bei der Existenz dieses Dämons nicht um eine naturwissenschaftliche Realität, sondern um eine Wissens- und Bildungslücke in den diesen Dämon denkenden Gehirnen. Die Folgerung für etwaige Unfreiheiten bezüglich des Willens ist dadurch obsolet. Insbesondere lächerlich wirken dazu erhobene Statements von Biologen, Hirnforschern u.s.w., welche denselben Wert haben wie ein Statement eines Kaminfegers, der im Kamin den Weihnachtsmann gesucht und nicht gefunden hat. Er wird ihn wohl an keinem physikalischen Orte auf dem Planeten finden. Er findet ihn aber in der Sehnsucht der Kinder. Ähnlich verhält es sich mit der Geraden der Geometrie im Weltraum. Der Durchmesser des Weltraumes ist nach heutigen Erkenntnissen endlich. Man kann die Gerade darin nicht finden, denn diese ist unendlich lang. Doch kann man trotzdem erfolgreich mit ihr arbeiten und so technische Geräte bauen oder wissenschaftliche Resultate erzielen. Man findet Gerade aktual und auch prozesshaft in den Vorstellungen in den Köpfen, welche somit Größeres enthalten können als der Weltraum ohne den Geist in den Köpfen enthält. Die Gerade ist eben keine materielle, keine physikalische Realität. Neben dieser existieren somit noch andere Realitäten, wie die Gerade uns gerade zeigt.

11. Modellverständnis und wissenschaftliche Korrektheit

Bekanntlich ist ein Modell eine so weit wie möglich exakte Beschreibung einer äußeren Realität, jedoch nicht die Realität selbst. In exakten Naturwissenschaften fasst man Modelle gewöhnlich mittels Formeln, d.h. in der Sprache der Mathematik. So haben wir es oben diskutiert. Es wird schwierig sein, dem unter Berufung auf die Vernunft nicht zuzustimmen. Im weiteren Sinne sind Modelle immer eine Näherung an das System Mensch – äußere Natur, denn den das Modell denkenden Menschen kann man hier nicht entfernen, sonst hat das Modell keine Existenz in einem Bewusstsein. Es existiert ja nur als Gedachtes.

Nicht nur in der Physik arbeitet man mit Modellen, sondern auch in anderen Wissenschaften. Ihre Exaktheit reicht soweit es der jeweiligen Wissenschaft gelingt, ihre Sprache bzw. ihr Begriffs-Beziehungssystem exakt zu formen und der Gültigkeit logischer Regeln zu unterwerfen. Als ein Beispiel mag die Philosophie dienen, wo man wirtschafts- und gesellschaftsphilosophische oder auch ökonomische bzw. soziale Modelle diskutiert und auch schon unter ihren Anwendungen gelitten hat. Man denke an Ideologien oder an als solche eingesetzte Wahrheiten, wie sie etwa im Kommunismus vor dem Fall der Mauer vertreten worden sind. Man kann aber auch nicht behaupten, dass damals alles falsch gewesen sei.

Weitere Modelle sind jene der Naturphilosophen der Antike, in welchen es um das Wesen der Natur und ihre Erscheinungsformen geht. Jene Modelle waren nicht sehr exakt. Man ist

damals selten über die Disput-Phase um ihre Annahme oder Ablehnung hinausgekommen, sodass man sich mit dem Modellnachweis und der Verbesserung des Modells hätte befassen können.
Wir können aufgrund unseres Wissens zur Sache nun die Konsequenz ziehen: Nur ganz dumme Menschen (resp. solche, welche ihre Intelligenz nur in ganz bestimmte Richtungen ausgeprägt haben wie etwa gewisse Philosophen oder Diktatoren) halten ihre Modelle für die Wirklichkeit selbst und nicht nur für ein immer ungenaues Abbild dieser. Eine solche Verwechslung der Wirklichkeit mit dem Modell lässt dann keine Verbesserung des Modells mehr zu, denn dieses wird ja für die nicht veränderbare Wirklichkeit und damit für die Wahrheit selbst gehalten. Denn die Wahrheit wäre keine Wahrheit, wenn sie veränderbar wäre. Etwas, was ändern kann, ist nicht beständig und daher nicht immerfort gültig, nicht immerfort wahr wie es etwa Naturgesetze sein müssen um als Gesetze akzeptiert zu werden.
Wer nun zwei verschiedene Dinge derart verwechselt, dass er das eine für das andere hält, wer z.B. seine Gedanken, sein Modell, für die äußere Wirklichkeit hält, den bezeichnet man in unserer Kultur als krank: Geisteskrank. Seine Krankheit heißt Paranoia.
Also: „Warnung vor der Paranoia“! Man verwechsle nie das Modell mit der Wirklichkeit! Man behaupte aber auch nicht, die Wirklichkeit sei ganz anders als im Modell beschrieben. Denn wer erkennbaren Unterschied ausmacht ist dazu aufgerufen, das Modell zu verbessern. Anders verhält es sich, wenn man zeitlich und räumlich keine Möglichkeit zur Modellverbesserung hat. Wenn man z.B. behauptet, dass alle Naturgesetze überall und immer im Universum dieselben sind. Dann hat man eine Hypothese vor sich, mit der man leben muss. Verbessern könnte man sie ja nur aufgrund eines experimentellen Befundes. Und ein solcher ist schwer zu erbringen.
Ein Modell kann nur dann mit der Wirklichkeit in jeder Beziehung übereinstimmen, wenn es Modell von sich selbst ist. Solches kann man in der Mathematik finden. Ein Axiomensystem ist Modell von sich selbst.
Ansonst beziehen Modelle äußerer Erscheinungen ihre Rechtfertigung aus der Grundlage des vernunftgestützten überzeugenden experimentellen Befunds. Es ist in dieser Situation prinzipiell auch möglich, dass mehrere verschiedene Modelle zur Erklärung einer Sache tauglich sind. Das ist kein Widerspruch, sondern nur eine Station auf dem Weg zur Annäherung der Realität mittels Modellen.
Die Erfahrung durch die Jahrhunderte zeigt uns, dass an dieser Stelle eine große Gefahr lauert: Die Verabsolutierung und Verpolitisierung von Modellen bis zum staatlichen Erlass solcher oder bis zur Erhebung des Modells zur Wahrheit mittels gesetzlichem Erlass, wenn manchmal auch nur auf Vereinsebene. Derartige Verabsolutierung von Modellen dient gewöhnlich der Wahrung von Interessen Einzelner oder von Gruppen. Sei es aus Verblendung, sei es weil man vom Glauben einer Gemeinschaft an ein Modell profitieren kann oder sei es aus Gier oder auch nur aus Machtbesessenheit beziehungsweise Machtabsicherung. Bekannt sind die zu Glaubenssätzen erhobene Wirtschaftsmodelle im Namen einer Philosophie. Oder Modelle in der Rechtssetzung, auf die alles sich abzustützen geboten war, bis zum Zusammenbruch des darauf ruhenden Gebäudes, bis zur Revolution oder bis zur Massenflucht der Betroffenen.
Aus dieser Sicht erweist sich die Geschichte auch als die Geschichte der Verblendungen

bezüglich der Modelle wie auch der Sinngebung und somit der gültigen Weltbilder. Dass diese Geschichte der Modelle so turbulent verlaufen ist hat seinen Grund auch darin, dass das Streben nach Erkenntnis verbunden mit Ehrlichkeit und Toleranz gegenüber anderen Möglichkeiten, anderen Modellen, ein manchmal seltenes Gut ist.

12. Anhang: Tabelle siehe Beiblatt

Siehe am Ende dieser Ausgabe oder:

http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Hilfen/H_01_XLS.pdf

2.2 Einheiten, Messungen, Größen, Basisgrößen

2.2.1 Aus der Theorie des Messens und der verwendeten Einheiten

1. Grundlagen

Vor ca. 1793 benutzte man oft in vielen selbstständig regierten Orten jeweils andere Maßsysteme, auch wenn die Orte nahe beieinander lagen. Maßsysteme sind so alt wie die Kultur. In einer höher entwickelten Zivilisation lässt sich eine Sache nicht sorgenfrei tauschen, wenn nicht Klarheit über die verwendeten Masse herrscht.
Mit der französischen Revolution und Napoleon ist dann das *metrische System* verbreitet worden, das heute Grundlage des in der Physik verwendeten *SI–Systems* ist.

2. Die ursprüngliche Grundlage "Längenmessung" — ursprüngliche und abgeleitete Größen

- Um die *Längeneinheit Meter* zu definieren hat man ursprünglich die *Länge* des in Paris aufbewahrten *Urmeters* bei $0^o\ C$ genommen. Diese Länge entspricht etwa dem zehnmillionsten Teil des Quadranten des dortigen Erdmeridians. Der *Meter* wurde ursprünglich demnach aus den *Massen unseres Planeten Erde* abgeleitet.

- Davon hat man dann z.B. die *Einheit Kilogramm* für die *Masse* wie folgt weiter *abgeleitet:*

  - Ein *Liter* entspricht einem Kubikdezimeter.
  - Ein *Kilogramm* Wasser entspricht einem Liter. So konnte man die Masseneinheit definieren. Ursprünglich ist das Kilogramm aber dennoch durch einen Referenzkörper definiert worden: Das *Urkilogramm* in Paris. Denn da sind ja noch die Messbedingungen...
  - Eine der möglichen Arten der *Temperaturmessung (Einheit Celsius)* benützte wiederum die Länge (Höhe) einer Quecksilbersäule. Die Ausdehnungsdistanz dieser Säule zwischen dem Gefrierpunkt und dem Siedepunkt des Wassers wurde in 100 gleiche Teile eingeteilt. Ein Teil entspricht $1^o\ C$.

- Zur *Zeitmessung:* Eine *Zeit–Sekunde* ist der 86400ste Teil eines mittleren Sonnentages, z. B. ursprünglich bei einem als gleich bleibend angenommenen Pendelschlag einer Pendeluhr. (Da die Sonnentage je nach Sonnenstand verschieden lang sind, hat man sie seit 1790 erstmals in Genf mittlere Sonnenzeit eingeführt: Alle Stunden sind hier immer gleich lang. (Dabei bezog man sich auf das tropische Jahr, das Jahr z.B. von Frühlingspunkt zu Frühlingspunkt.)

- Mit Hilfe der Längeneinheit Meter und der Zeiteinheit Sekunde kann man z.B. die abgeleitete Einheit *Meter pro Sekunde* für die *Geschwindigkeit* definieren.

- Wenn wir Meter und Sekunde als konkret erfahrbare Einheit betrachten, so ist das damit gebildete Verhältnis Meter pro Sekunde *abstrakt. Noch abstrakter* ist die mit Hilfe der schon abstrakten Geschwindigkeit weiter abgeleitete Einheit *Meter pro Sekunde im Quadrat* für die *Beschleunigung*.

- Wichtig ist nach die **Benennung der Zehnerpotenzen** für die Einheiten:
  - $10^{27} \rightsquigarrow$ Radius des Weltalls
  - $10^{24} \rightsquigarrow$ Yotta-
  - $10^{21} \rightsquigarrow$ Zetta-
  - $10^{18} \rightsquigarrow$ Exa-
  - $10^{15} \rightsquigarrow$ Peta-
  - $10^{12} \rightsquigarrow$ Tera-
  - $10^{9} \rightsquigarrow$ Giga-
  - $10^{6} \rightsquigarrow$ Mega-
  - $10^{3} \rightsquigarrow$ Kilo-
  - $10^{2} \rightsquigarrow$ Hekto-
  - $10^{1} \rightsquigarrow$ Deka-
  - $10^{0} \rightsquigarrow = 1 \rightsquigarrow$ Ausgangseinheit
  - $10^{-1} \rightsquigarrow$ Dezi-
  - $10^{-2} \rightsquigarrow$ Centi-
  - $10^{-3} \rightsquigarrow$ Milli-
  - $10^{-6} \rightsquigarrow$ Mikro-
  - $10^{-9} \rightsquigarrow$ Nano-
  - $10^{-12} \rightsquigarrow$ Pico-
  - $10^{-15} \rightsquigarrow$ Femto- Elementarteilchenbereich
  - $10^{-18} \rightsquigarrow$ Atto-
  - $10^{-21} \rightsquigarrow$ Zepto-
  - $10^{-24} \rightsquigarrow$ Yokto-

- Für die Einheiten sollte man die *international genormten Abkürzungen* verwenden (Beispiel m für Meter, kg für Kilogramm).

3. Den heutigen Genauigkeitsanforderungen angepasste Definitionen

- Heute gilt *ein Meter* ($1\ m$) als die Länge der Strecke, welche Licht im leeren Raum in einer Zeit von $1/299792458\ s$ zurücklegt. Man bezieht damit die Längenmessung auf die Zeitmessung.

- *Eine Sekunde* (1 s) ist gleich der Dauer von 9 192 631 770 Schwingungen der Strahlung, die dem Niveauübergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes des Cäsiumatoms Ca–133 entspricht (also z.B. emittiert wird).

4. Zur Messung der Masse und anderer Größen

- Die *Länge* von etwas kann man z.B. mit einer *gleich geteilten Skala* durch *Vergleich* mit dieser Skala messen. Für genauere Messungen kennt man die Technik mit dem *Nonius* u.s.w.

- Zur *Zeitmessung* verwendet man seit dem späteren Barockzeitalter die *Pendeluhr* oder eine Abart davon. Heute ersetzt meist ein *Schwingquarz* das Pendel.

- Die *Temperaturmessung* wurde weiter oben bereits erwähnt.

- Für die Messung der *Masse* verwendet man folgende Prinzipien:

  - Die *Massen zweier Körper* nennen wir *gleich*, wenn sie am selben Beobachtungsort unter gleichen Bedingungen gleich stark vom Planeten (meist die Erde, in der Astronomie auch andere Himmelskörper) *angezogen* werden.
  - *Fügt* man k Körper derselben Masse *zusammen*, so erhält man einen Körper der k–fachen Masse.
  - Die *Dichte* eines Körpers ist der Quotient Masse pro Volumen. Eine mögliche Einheit wäre damit kg/m^3.
  - Bei *homogenen Körpern* ist die Masse dem Volumen proportional: Die Dichte ist demnach unter gleich bleibenden Umständen konstant. (Wichtig: Gleiche Temperatur, wegen der Massenausdehnung.)

Heute verwendete Basisgrößen (daraus werden andere abgeleitet):

Basisgröße	Basiseinheit	Symbol für Einheit	Variable
Länge	Meter	1 m	$l,\ s,\ r$
Zeit	Sekunde	1 s, 1 sec	t
Masse	Kilogramm	1 kg	m
Temperatur	Kelvin	1 K	T
Stoffmenge	Mol	1 mol	N
Stromstärke	Ampère	1 A	L
Lichtstärke	Candella	1 cd	l_L

5. Messgenauigkeit, Messfehler, Toleranz

Man unterscheidet verschiedene **Fehlertypen:**

- *Grobe Fehler:* Täuschungen, Irrtümer, falsche Notierungen, falsche Ablesung. Solche Fehler sind vermeidbar.
- *Systematische Fehler:* Z.B. verschobene Messskala. Solche Fehler sind ebenfalls vermeidbar.
- *Zufällige Fehler:* Solche Fehler sind oft nicht vermeidbar.
- *Mittlerer Fehler:* Der Mittelwertbegriff wird auf verschiedene Weisen verwendet. Z.B. der statistische *Erwartungswert* oder der *Mittelwert* der Fehler einer Messserie. Statt dem Mittelwert könnte manchmal auch der *mittlere Wert* gemeint sein. Etwas anders ausgedrückt: Mit *Durchschnittsfehler* kann z.B. der arithmetische Mittelwert von Einzelfehlern oder auch der Wert in der Mitte in der Reihenfolge aller Fehler gemeint sein. Was nicht klar definiert ist, kann nachher auch nicht beanstandet werden.
- Weitere Fehler sind solche wie maximale oder minimale Fehler u.s.w.

Messungen sind im Gegensatz zu *Zählungen* immer mit **Messfehlern** oder **Toleranzen** verbunden. Dabei versteht man unter dem *Messfehler* einer Einzelmessung die tatsächliche Abweichung vom ermittelten Maß und unter *Toleranz* die zulässige Abweichung vom Sollmaß.
Bei der Berechnung von Größen aus anderen Größen bedingen die Fehler der eingerechneten unabhängigen Größen die Fehler der abhängigen oder als Funktionswert berechneten Größen oder Zielgrößen. Bei fehlenden Mathematikkenntnissen berechnen Leute die Fehler der Zielgröße oft unter Verwendung der extremen Masse der eingehenden Größen. Das kann manchmal gut gehen, in andern Fällen jedoch kann es auch sehr falsch werden. Um die Fehler der abhängigen Größe zu berechnen, verwendet man das mit den Mitteln der Differentialrechnung formulierte Fehlerfortpflanzungsgesetz. (Vgl. dazu Mathematik, Literatur, Formelbuch usw.)

6. Fehlerfortpflanzungsgesetz für Funktionen (absoluter Fehler)

Hier wird der Fehler nach der lineare Näherung des wirklich vorhandenen realen Fehlers mit Hilfe der Absolutwerte der beitragenden Komponenten berechnet. Das bedeutet, dass man hier für den Vektor der Teilfehlerbeiträge die Betragsnorm verwendet. Z.B. bei zwei vorhandenen unabhängigen Eingangsvariablen und einer abhängigen Ausgangsvariablen oder Funktion bedeutet das, dass man den Funktionsgraphen durch die Tangentialebene im betrachteten Punkt ersetzt und in dieser Ebene die Approximation des Fehlers rechnet.

Gegeben:

- Zielgröße $u = f(t, x, y, z, w, \ldots)$
- Messpunkt (Werte): $(t_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ w_0,\ \ldots)$
- Zugehörige Messunschärfen (Werte): $(\Delta t,\ \Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z,\ \Delta w,\ \ldots)$

Gesetz: $\Delta t,\, \Delta x,\, \ldots \geq 0$

$\leadsto\ \Delta u \leq \quad |\Delta t \cdot {f_t}'(t_0, \ldots) + \Delta x \cdot {f_x}'(t_0, \ldots) + \Delta y \cdot {f_y}'(t_0, \ldots) + \ldots|$

$\leadsto\ \Delta u \leq \quad \Delta t \cdot |{f_t}'(t_0, \ldots)| + \Delta x \cdot |{f_x}'(t_0, \ldots)| + \Delta y \cdot |{f_y}'(t_0, \ldots)| + \ldots$

Beispiel:

- Für $a,\ b$ und γ sind Werte $a_0,\ b_0,\ \gamma_0$ gegeben. Ebenso kennt man die zugehörigen Messungenauigkeiten $\pm\Delta a_0,\ \pm\Delta b_0,\ \pm\Delta\gamma_0$.
- $c = f(a, b, \gamma) = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,cos(\gamma)$

  $\leadsto\ \Delta c \leq \quad \Delta a \cdot |{f_a}'(a_0,\, b_0,\, \ldots)\ | + \Delta b \cdot |{f_b}'(a_0,\, b_0,\, \ldots)| + \Delta\gamma \cdot |{f_\gamma}'(a_0,\, b_0,\, \ldots)|$

  $= \Delta a \cdot |2\,a_0 - 2\,b_0\,cos(\gamma_0)| + \Delta b \cdot |2\,b_0 - 2\,a_0\,cos(\gamma_0)| + \Delta\gamma \cdot |2\,a_0\,b_0\,sin(\gamma_0)|$

- Achtung: Die Winkel müssen beim Differenzieren immer im Bogenmaß sein.

7. Messunsicherheit für Funktionen nach der euklidschen Norm

Hier wird der Fehler resp. die Messunsicherheit oder die Toleranz im Gegensatz zur Methode der lineare Näherung neu ganz anders mit Hilfe der euklidschen Norm des Vektors der Teilfehlerbeiträge an die abhängige Variable oder Funktion berechnet. Es handelt sich hier um eine Konvention in Analogie zur Längenberechnung bei Ortsvektoren und nicht um ein zwingendes geoemtrisches Argument. Dieses Verfahren ist bei statistisch ermittelten Messunsicherheiten (z.B. Standardfehler) üblich geworden.

$$\|\vec{v}\|_{Euklid} = \| \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \|_{Euklid} = \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}$$

Es wird hier sofort evident, dass für die euklidsche Norm $\|\vec{v}\|_{Euklid}$ und die Betragsnorm $|\vec{v}|_{Betrag}$ die Beziehung gilt:

$$\|\vec{v}\|_{Euklid} \leq |\vec{v}|_{Betrag}$$

Daher liefert die euklidsche Messunsicherheitsberechnung in der Regel kleinere Resultate als die Berechnung des absoluten Fehlers.

Konkreter:

- Zielgröße $u = f(t, x, y, z, w, \ldots)$
- Messpunkt (Werte): $(t_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ w_0,\ \ldots)$
- Zugehörige Messunschärfen (Werte): $(\Delta t,\ \Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z,\ \Delta w,\ \ldots)$

Formel: $\Delta t,\ \Delta x,\ \ldots \geq 0 \quad \rightsquigarrow$

$$\Delta u \;\approx\; \sqrt{(\Delta t \cdot {f_t}'(t_0, x_0, \ldots))^2 + (\Delta x \cdot {f_x}'(t_0, x_0, \ldots))^2 + (\Delta y \cdot {f_y}'(t_0, x_0, \ldots))^2 + \ldots}.$$

2.3 Zur Materie

2.3.1 Das was einem im Äußeren begegnet

1. Atome als Bausteine der Materie

Was sind Atome? – Atome sind kleine Bausteine der Materie bei den uns als normal geltenden Verhältnissen. Es gibt davon etwas mehr als 100 Sorten, welche man in das *Periodensystem der Elemente* einteilt.
Früher galten Atome als unteilbar. Über ihre Existenz ist bis ins neunzehnte Jahrhundert gestritten worden. Erst dann entdeckte man quantitative Indizien, welche nach und nach durch weitere Entdeckungen erhärtet wurden. Heute kennt man auch wesentliche Dinge über das Innere der Atome, d.h. über die *Elementarteilchen*.
Als Übersicht kann man formulieren: *Körper sind aus Atomen aufgebaut. Das sind kleine Teilchen, welche sich ständig bewegen und in relativ wenige Klassen (Elemente) gleicher solcher Teilchen einteilbar sind. Atome welche sich zu nahe kommen, stoßen sich ab. Entfernen sie sich jedoch voneinander, so ziehen sie sich an.*

2. Atommodelle

- *Erste Postulate* über die *Existenz von Atomen* als gruppenweise einheitliche Bausteine der Materie stammen von antiken griechischen Philosophen. Bekannt sind *Leukipp* und *Demokrit*.

- Im 19. Jahrhundert hat man das **Gesetz der Erhaltung der Masse** bei chemischen Reaktionen entdeckt: Bei einer chemischen Reaktion bleibt die Gesamtmasse der Reaktionsteilnehmer unverändert.

- Weiter entdeckte man die *Gesetze der konstanten* und *der multiplen Proportionen*, welche *Dalton* (ursprünglich Bierbrauer) mittels der *Atomhypothese* erklären konnte.

- **Gesetze der konstanten Proportionen:** In reinen chemischen Verbindungen sind die Bestandteile immer in bestimmten gleich bleibenden und charakteristischen Massenverhältnissen vorhanden.

- **Gesetze der multiplen Proportionen:** Falls zwei Bestandteile mehrere chemischen Verbindungsarten bilden können, so stehen die Mengen des einen Bestandteils, welche sich mit derselben Menge des andern Bestandteils jeweils verbinden, in konstanten Verhältnissen ganzer Zahlen.

- *Rutherford* hat in den Atomen eine *innere Struktur* entdeckt. Atome bestehen aus einem sehr kleinen *positiv geladenen Kern* und einer *negativ geladenen Hülle (Elektronen)*. Fast die gesamte Atommasse befindet sich im Kern. Die Atomhülle ist für die Größe und die chemischen Eigenschaften des Atoms verantwortlich.

- Der *Atomkern* besteht aus positiv geladenen *Protonen* und neutralen *Neutronen*. Die Zahl der Protonen (Kernladungszahl) stimmt mit der Zahl der *Elektronen* überein.

- *Bohr* hat dann ein Atommodell gefunden, bei dem die Elektronen auf verschiedenen Schalen sitzen *(Schalenmodell)*, analog den Planeten auf ihren Bahnen. Für die Anzahl Elektronen pro Schale gibt es Gesetze. Die Elektronen können verschiedene Energieniveaus inne haben.
- Ein weiteres Atommodell ist das *Wahrscheinlichkeitsmodell*, in dem den Elektronen in gewissen Räumen um den Kern gewisse Aufenthaltswahrscheinlichkeiten zugewiesen werden.
- Die auffindbaren materiellen Substanzen bestehen aus etwa 120 Grundstoffen, den *chemischen Elementen*, welche wiederum aus *Isotopen* bestehen können (unterschiedliche Neutronenzahl) oder auch aus *Ionen* (fehlende oder zu viele Elektronen).
- Die chemischen Elemente können eine riesige Anzahl verschiedener *chemischer Verbindungen* eingehen, die man *Moleküle* nennt.
- Andererseits können Atome oder Moleküle *Kristallgitter* bilden.

3. Atommassen und Teilchenanzahlen

- *Relative Atommasse* A_r = Masse des Atoms pro Masse des Wasserstoffatoms
- *Relative Molekülmasse* M_r = Masse des Moleküls pro Masse des Wasserstoffatoms.
- M_r = Summe der A_r
- *Atomare Masseneinheit* $u = 1/12$ der Masse der Kohlenstoffisotops C–12
- $u = 1.66 \cdot 10^{-27}\ kg$.
- Beispiele:
  - Wasserstoff H: $A_r = 1.0$
  - Helium He: $A_r = 4.0$
  - Kohlenstoff C: $A_r = 12.0$
  - Stickstoff N: $A_r = 14.0$
  - Sauerstoff O: $A_r = 16.0$
  - Aluminium Al: $A_r = 27.0$
  - Eisen Fe: $A_r = 55.9$
  - Blei Pb: $A_r = 207.0$
- Größenordnung der Atomdurchmesser: $10^{-10}\ m$ bis $5 \cdot 10^{-10}\ m$.
- In $A_r\ g$ eines chemischen Elements mit der relativen Atommassenzahl A_r (entsprechend für M_r g einer chemischen Verbindung) befinden sich stets gleich viele resp. die gleiche Anzahl Teilchen. Die zu A_r resp. zu M_r gehörige *Stoffmenge* heißt ein *Mol* (mol).

- *Molare Masse* $M =$ Masse m pro Stoffmenge $n \rightsquigarrow$ (in g/mol oder kg/mol).
- 1 mol (1 Mol) einer Substanz enthält $N_A = 6.02 \cdot 10^{23}$ Atome bzw. Moleküle (*Avogadro'sche* Zahl oder Konstante).
- Teilchenzahl einer Substanz von n mol: $N = n \cdot N_A$ (n in mol).
- Folgerung: $n = \dfrac{N}{N_A} = \dfrac{m}{M}$ ($m =$ Masse, $M =$ molare Masse).

2.4 Punktmechanik

2.4.1 Mechanik idealisierter Massenpunkte

1. Begriffe (nach der üblichen Aufteilung):

- *Mechanik:* Sie besteht grob gesagt aus *Kinematik* und *Dynamik*. Sie ist keine geschlossene Theorie, jedoch der älteste Teil der Physik.
  - *Klassische Mechanik (Mechanik des 19. Jahrhunderts).*
    - *Kinematik:* Die Lehre von der Bewegung von Punkten (*Punktmechanik-Modell*) und *ausgedehnten Körpern* im Raum. Sie wird beschrieben durch die Größen Weg s (Ortänderung), Geschwindigkeit v und Beschleunigung a. Die Ursachen der Bewegungen (die Kräfte) werden hier nicht in die Betrachtung einbezogen.
    - *Dynamik:* Lehre von den Bewegungen unter dem Einfluss von Kräften.
      - *Statik:* Befasst sich mit ruhenden Körpern (Geschwindigkeit $v = 0\ m/s$) und Gleichgewicht.
      - *Kinetik* oder *technische Mechanik:* Diese befasst sich mit der Veränderung von Bewegungsgrößen unter dem Einfluss von Kräften im Raum.
  - Anteile der *Relativitätstheorie* (hier nicht behandelt).
  - Anteile der *Quantentheorie* (hier nicht behandelt).

2. Von Aristoteles zu Galilei

- *Aristoteles* (nach 400 v. Chr., nicht Beginn der Physik, doch Beginn der Systematik) beschreibt die Natur eher phänomenologisch, jedoch nicht analytisch. Seine Gesetze lassen kaum Rechnungen zu. Diverse äußere Einflüsse werden nicht beachtet.

- *Thomas v. Aquin* (13. Jhdt.) hat die aristotelische Lehre mit der christlichen Lehre verbunden.

- *Galilei* hat es gewagt unvoreingenommen zu denken. Dann hat man ihm den Prozess gemacht. (Papst Benedikt XVI hat als vormaliger Kardinal Ratzinger den Galileiprozess wieder aufrollen lassen. Galilei wurde nun posthum freigesprochen.)

Beispiel eines Gedankenexperiments von Galilei:

Fallen schwere Körper schneller als leichte Körper?

Aristoteles hat das so behauptet: Schwerere Körper fallen schneller als leichtere. Z.B. eine Vogelfeder fällt langsamer als eine Bleikugel. Galileis Einwand: Fällt ein etwas klebriger leichter Körper auf derselben Bahn wie nach diesem ein schwerer klebriger Körper, so holt der schwere den leichten einmal ein und klebt mit diesem zusammen. Zusammen bilden die beiden vereinten Körper einen neuen, schwereren Körper, der nun noch schneller fallen müsste, da er schwerer ist als der schwere Teilkörper von vorher. Andererseits bremst aber der leichte Teilkörper bei der Vereinigung den schwereren Teilkörper ab, sodass der neue schwerere Gesamtkörper zugleich langsamer fallen müsste. Daraus folgt, dass langsamer gleich schneller ist, also ein Widerspruch. Daher muss die Voraussetzung, nämlich die Behauptung des Aristoteles mit den unterschiedlichen gewichtsabhängigen Fallzeiten, falsch sein.

Das Problem der Frage — oder die Frage nach der Frage:

Man könnte fragen: „*Warum* rollt eine Kugel schiefe eine Ebene hinunter? — Weil die Erde unten sie liebt?“ Diese Frage scheint nicht sehr Erfolg versprechend. Einfacher beantwortbar ist die andere Frage: „*Wie* rollt eine Kugel schiefe eine Ebene hinunter?“ Denn dieses lässt sich experimentell genau untersuchen.

- Man misst die Abstände zwischen den Wegmarken, bei welchen die Kugel im Takt eines Zeitgebers vorbeirollt und findet ein *Proportionalitätsgesetz:* Der jeweils gesamthaft zurückgelegte Weg ist proportional zur verstrichenen Zeit im Quadrat (Galilei): $s \sim t^2 \rightsquigarrow \; s = const. \cdot t^2 = c \cdot t^2$.

- Naturgesetze können so anhand von Beobachtungsresultaten mathematisch formuliert und dann experimentell nochmals überprüft werden. Eine Größe, welche von einer anderen Größe abhängt, kann daher dann als *Funktion* dargestellt werden:

  $$s(t) = c \cdot t^2 = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot t^2. \text{ Hier ist } a \text{ eine neue Konstante: } a = 2 \cdot c.$$

- Funktionen wie $s = s(t)$ lassen sich in *Diagrammen* darstellen. Sind die *Parameter* (Konstanten) in der Funktion bekannt, so lassen sich die **Funktionswerte** für beliebige t über dem Definitionsbereich *berechnen*.

Physikalische Gesetze als Funktionen: Bei $s(t) = c \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ ist sichtbar geworden, dass physikalische Gesetze auch in Form von Abhängigkeiten oder *mathematischen Funktionen* formulierbar sind. Dabei geht es dann oft um die Bestimmung der auftretenden Konstanten.

Beispiel: Wie fällt ein Gegenstand zu Boden, wenn der Luftwiderstand nicht berücksichtigt werden muss? Man findet für die mittlere Geschwindigkeit v_m:

$$\frac{v_m}{t} = \frac{(\frac{s(t)}{t})}{t} = \frac{c \cdot t^2}{t^2} = c = const. = \frac{s(t)}{t^2}$$

Später wird man diese Formel mit Hilfe der *Differentialrechnung* einfach verstehen können.

Das Trägheitsgesetz: Der Grund, warum eine Bewegung praktisch immer zur Ruhe kommt (Ausnahme in unserem Zeitfenster: Himmelskörper) findet man in der *Reibung*. Bei Pendeln ist die Reibung schon viel kleiner als bei rollenden Kugeln. In einer Wanne beobachtet man, dass die Reibung umso mehr wirkt, je flacher der Wannenrand ist. Auf einem Luftkissen kann man die Reibung aber stark vermeiden. Macht man die Wanne nun total flach und stößt einen auf Luftkissen gelagerten Körper ganz wenig an, so wird die Reibung praktisch vermieden und der Körper behält seine Geschwindigkeit bei $\rightsquigarrow$ *Trägheitsprinzip*, bei *Newton lex prima:*

- **Trägheitssatz:** Ein Körper, auf den keine äußere verzögerte Kraft wirkt, verharrt im *Zustand der gleichförmigen* Bewegung. Ist $v = 0\ m/s$, so spricht man vom *Zustand der Ruhe*. Der Körper ist dann im *statischen Gleichgewicht*.

- **Das Problem der Kräftefreiheit:** Auf der Erde kann ein Körper nie ganz kräftefrei sein, da er immer von nahe oder auch entfernt liegenden Körpern irgendwie beeinflusst wird (siehe später Gravitationsgesetz). Jedoch ist es möglich, eine Kugel auf einer horizontalen Unterlage in horizontaler Richtung annähernd kräftefrei zu halten. Bei der Beurteilung der Kräftefreiheit ist demnach die *Richtung* mitbestimmend.

3. Bewegungsbegriffe und Gesetze

Bezugsysteme:

- Beschreibungen von Bewegungen sind in der physikalischen Realität nur in oder bezüglich gegebener *Maßsysteme* und *Koordinatensysteme* (KS) mit bekanntem *Ursprung* und bekannten *Achsen* sinnvoll (räumlich: 3D-KS). Solche Systeme nennt man *Bezugsysteme*.

- Ein *Inertialsystem* (iners lat. untätig oder träge) ist ein Koordinatensystem, in dem sich kräftefreie Körper geradlinig sowie gleichförmig (unbeschleunigt) bewegen. Hier gilt somit das Newtonsche Trägheitsgesetz in seiner einfachsten Form: Kräftefreie Körper behalten ihre Geschwindigkeit bei ($v \Rightarrow \vec{v}$ als *Vektor:* Richtung sowie Betrag). Beschleunigungen erfolgen proportional zur angelegten Kraft.

Massenpunkte oder materielle Punkte als Modell:

- Die Vorstellung eines **Massepunktes** ist eine *Idealvorstellung,* d.h. ein*Modell*, das so in der Realität *nicht existieren kann*, da man unterhalb einer kleinsten Länge nicht mehr messen kann (*Planck-Länge*). Jedoch lässt sich makroskopisch mit Massepunkten trotzdem erfolgreich arbeiten. Man stellt sich dabei die gesamte Masse eines Körpers in seinem Schwerpunkt konzentriert vor.

- Ein ausgedehnter Körper kann sich bezüglich eines *äußeren Koordinatensystems* bewegen (*Translation*) oder auch bezüglich eines *mitgeführten Koordinatensystems* (*Rotation, Drehbewegung*).

- Bei *Massenpunkten* ist *nur* die *Translation* behandelbar, da für die Rotation neben einer Achse etwa durch den Körperschwerpunkt auch die Ausdehnung entscheidend ist.
- Die Gesamtheit der anlässlich einer Bewegung von einem Massenpunkt durchlaufenen Raumpunkte bezüglich eines Koordinatensystems nennt man die *Bahn* oder die *Ortskurve* des Punktes. Eine solche Kurve ist üblicherweise eine *stetige Vektorfunktion* (3 Koordinaten $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$) der Zeitvariablen t. Diese 4-D-Situaion (x, y, z, t) lässt sich in einem 2D-Diagramm nicht darstellen.
- Bewegt sich ein Körper nach dem *Trägheitssatz*, so ist jede *Koordinatenfunktion linear*, d.h. der Graph zeigt eine *Gerade*.
- Die Vorstellung eines Massepunktes ist ein *Modell*, das die Bewegung des auf einen Punkt konzentrierten Körpers berücksichtigt, seine Ausdehnung und etwaige Rotationsbewegungen jedoch vernachlässigt.
- Wir reden dabei auch vom **Massenpunktmodell**.

Geschwindigkeiten und Beschleunigungen von Massenpunkten:

- **Definition** (Geschwindigkeit bei gleichförmiger geradliniger Bewegung, oder allgemein *mittlere Geschwindigkeit*):

$$v_m = \frac{\text{zurückgelegter Weg}}{\text{verstrichene Zeit}} = \frac{\text{Wegdifferenz}}{\text{Zeitdifferenz}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

- Bei gleichförmiger geradliniger Bewegung sind s und t proportional und daher v konstant. Allgemein ist v eine abstrakte Größe, welche aus s und t berechnet werden muss. s und t jedoch sind direkt messbar.
- Allgemeiner ist die Geschwindigkeit v ein *Vektor* $\vec{v}$, da der Weg $s \Rightarrow \vec{s}$ ein Vektor ist. Überlagerung von Geschwindigkeiten in der Realität bedeutet in der Rechnung Vektoraddition.

Beispiel: Schwimmer bei der Überquerung eines fließenden Gewässers.

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t}$$

- *Momentangeschwindigkeit:* $v_{mom} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \quad \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{d\,s}{dt} = s\,'(t)$
- Z.B. beim freien Fall nimmt die Geschwindigkeit zu. Sie verändert sich. Wir reden dabei von einer *Beschleunigung* a (negativ: *Verzögerung*). Analog zur Geschwindigkeit ist die *mittlere Beschleunigung:*

$$a_m = \frac{\text{Geschwindigkeitsdifferenz}}{\text{Zeitdifferenz}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

- Ebenso wie v ist die *Beschleunigung* ein *Vektor* : $\vec{a} = \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$.
- Analog zu v_{mom} gilt für die *Momentanbeschleunigung:*

$$\textit{Momentanbeschleunigung: } a_{mom} = \lim_{\Delta t \to 0} \quad \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

- Auf der Erdoberfläche ist die *Fallbeschleunigung* nahezu konstant:

$$a = g = 9.81\ m/s^2 = \text{ ca. } 10\ m/s^2$$

- Ein Massepunkt, auf den *keine Kraft* wirkt, erfährt *keine Beschleunigung*. Dann ist:

$$\vec{a} = \vec{0}\ m/s^2, \qquad \vec{v} = \vec{v}_0\ m/s = const., \qquad \vec{s} = \vec{v}_0 \cdot t\ [(m/s) \cdot s = m]$$

- Wirkt eine *konstante Kraft*, so ist die Bewegung des Massepunkt konstant oder *gleichmäßig beschleunigt*. Dann ist bei einer Anfangsgeschwindigkeit v_0:

$$\vec{a} = \vec{a}_0, \qquad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}_0 \cdot t, \qquad \vec{s} = \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \vec{a}_0 \cdot t^2$$

- $\vec{a} = \vec{a}(t), \qquad \vec{v} = \vec{v}(t), \qquad \vec{s} = \vec{s}(t)$ sind *Vektorfunktionen.*

Kreisbewegung: Das für die geradlinige Bewegung Gesagte lässt sich auch auf die Kreisbewegung übertragen.

- An die Stelle der Strecke tritt die *Bogenlänge* oder andererseits auch der *Winkel*, an die Stelle der Geschwindigkeit tritt die *Winkelgeschwindigkeit*, an die Stelle der Beschleunigung tritt die *Winkelbeschleunigung*.
- *Winkel* sowie die *Winkelgeschwindigkeit* resp. *Winkelbeschleunigung* sind ebenfalls *Vektoren*. Sie *zeigen in Achsenrichtung* (nach Euklid: die Richtung des Winkels als Richtung der Drehebene bzw. der Winkel als eine Punktmenge als Teil der Drehebene, der Winkel im Gegensatz zum Winkelmass).
- Die *Tangentialgeschwindigkeit* ist ein *Vektor* in Tangentenrichtung.
- Die Änderung der Tangentialgeschwindigkeit führt zu einer *Beschleunigung* in *Richtung Kreismittelpunkt*. (Um das exakt zu belegen bedarf es der Vektoranalysis.)

- Bei der Drehbewegung ist die *Umlaufzeit* T des Massepunks um das *Drehzentrum* wesentlich.
- $\frac{1}{T} = f$ heißt *Frequenz*. Einheit von f: $Herz = Hz = sec^{-1}$.
- *Winkelgeschwindigkeit* (u = Umfang):

$$\omega \quad = \frac{2\,\pi}{T} = \frac{2\,\pi\,r}{T\,r} = \frac{(\frac{u}{T})}{r} = \frac{(\frac{s}{T})}{r} = \frac{v}{r}$$

- Für die *Beschleunigung* gelten die folgenden *Formeln* (Plausibilitäts-Herleitung siehe z.B. Physik 1, Sexl et al., Seite 55):

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{4\,\pi^2\,r}{T^2} = \omega^2 \cdot r$$

Zur allgemeinen Weg-Zeit-Funktion und ihren Einheiten:

Beispiel: Gegeben sei die folgende *Weg-Funktion* $s_x(t)$ (x-Komponente, in m) *der Zeit t* (in sec):

$$s_x(t) = k_1 \cdot t^3 + k_2 \cdot t^2 + k_3 \cdot t + k_4 + \frac{k_5}{t} + k_6 \cdot \cos(k_7 \cdot t + k_8) + k_9 \cdot e^{(u*t)}$$

Frage: Welche *Dimensionen* müssen die *Koeffizienten* haben? – Und könnte man einige davon auch *weglassen*, wenn ihr Wert 1 ist?

- Die Koeffizienten (Parameter) sind Größen, welche mit Einheiten als jeweils interne Parameter verbunden sind. Man kann sie daher nicht weglassen.
- k_1 besitzt die Einheit $m\,sec^{-3}$.
- k_2 besitzt die Einheit $m\,sec^{-2}$.
- k_3 besitzt die Einheit $m\,sec^{-1}$.
- k_4 besitzt die Einheit $m\,sec^0 = m$.
- k_5 die Einheit $m\,sec^1 = m\,sec$.
- k_6 besitzt die Einheit $m\,sec^0 = m$.
- k_7 besitzt die Einheit sec^{-1}.
- k_8 besitzt keine Einheit.
- k_9 besitzt die Einheit $m\,sec^0 = m$.
- u besitzt die Einheit sec^{-1}.

So wird sichergestellt, dass $s_x(t)$ die Einheit m besitzt und dass im Cosinus und in der e–Funktion die Einheiten neutralisiert werden. Denn eine Einheit in einem Cosinus und in einer e–Funktion macht mathematisch keinen Sinn. Auch wenn die Rechnung aus der Physik stammt!

So kann man aus $s_x(t)$ dann $v_x(t) = s_x{}'(t)$ und $a_x(t) = v_x{}'(t) = s_x{}''(t)$ durch differenzieren gewinnen. Die Umkehrung, d.h. z.B. die Rückgewinnung von $s_x(t)$ aus $s_x{}'(t)$, geht über das Integrieren (Integralrechnung):

$$s_x(t_0,\, t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} v_x(t)\, dt, \qquad v_x(t_0,\, t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} a_x(t)\, dt, \qquad \ldots$$

2.5 Kraft, Masse und Gewicht (Gewichtskraft)

2.5.1 Mechanik idealisierter Massenpunkte

1. Kraft und Masse

- Es gibt zwei *Hauptgrößen* der *Newtonschen Physik* (vermutlich bekannt):
  - *Die Kraft:* Diese ist eine vektorielle Größe $\vec{F}$. Einheit [N, *Newton*], die gemessen wird z.B. mit einer *Federwaage*. Der Kraftbegriff ist abgeleitet aus der Alltagserfahrung der Kraftanwendung durch den Menschen. D.h. er ist eine Reduktion eines Alltagsbegriffs auf die Situation von exakten Messbedingungen. Zusammenhänge, in denen man die Kraft kennt:
    - *Kraft als Ursache* einer *beschleunigten Bewegung* eines Körpers mit einer Masse m.
    - *Kraft als Ursache* einer *Deformation* eines Körpers.
  - *Die Masse* m: Eine skalare Größe [Einheit kg], die gemessen wird mit der Balkenwaage.
  - Einheit: $1\ N\ (Newton) = 1\ kg \cdot m/sec^2$.

- **Die Kraft als Ursache einer Deformation:**
  Dieser Fall ist bekannt durch die *Federwaage*, wo die Feder *deformiert* (z.B. *verlängert*) wird.
  - Das *Hook'sche Gesetz* für eine auf Zug oder auf Druck beanspruchte Spiralfeder besagt:

$$F = D \cdot \Delta x \qquad [F \text{ in } N,\ x \text{ in } m]$$

(D = Federkonstante, Δx = Verlängerung oder Deformation der Feder)

- Die *Federkraft* (die in der Feder oder durch die Feder wirkende Kraft) wirkt entgegengesetzt zur der Deformation und ist proportional zur Stärke der Deformation D.

- **Die Kraft als Ursache einer beschleunigten Bewegung:** Dieser Fall ist bekannt z.B. durch die *beschleunigte Bewegung beim freien Fall* infolge der *Erdanziehungskraft* (elementare Erfahrung).

- Zieht man mit Hilfe einer Federwaage mit konstanter Kraft (Ablesung!) einen Wagen horizontal, so stellt man fest, dass die *Beschleunigung* umso kleiner ist, je größer die Wagenmasse ist. Exakte Messungen ergeben, dass $a \cdot m = const.$ gilt. Dabei ist die *Masse m unabhängig vom Messort* (Messung mit der *Balkenwaage*). Sie ist die *Summe der Massen der Atome*, aus denen sie besteht. Daher *addieren sich die Massen beim Zusammensetzen.*

- Man kann daher definieren:

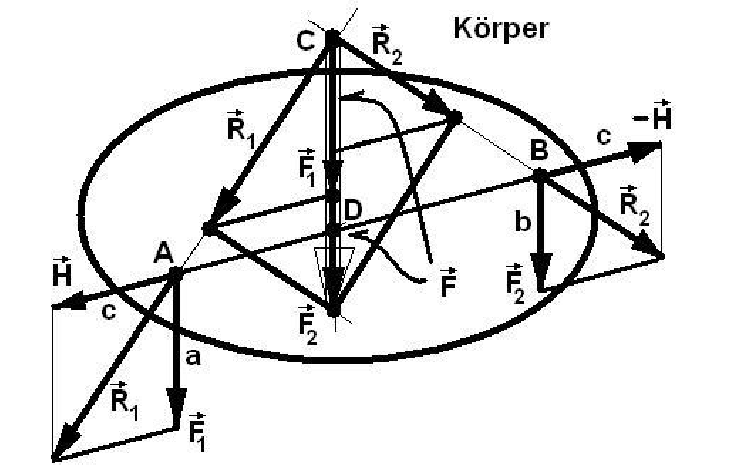
$$\text{Kraft} = \text{Masse mal Beschleunigung: } \vec{F} = m \cdot \vec{a}.$$

- Beim freien Fall ist die Beschleunigung bekanntlich g = ca. 10 m / s^2. Damit gilt für die *Gewichtskraft* (*Schwerkraft* in Richtung Erdmittelpunkt oder *Gravitationskraft*):

$$\text{Gewicht} = \text{Masse mal Erdbeschleunigung: } G = F_G = m \cdot g\ .$$

- g ist *ungefähr konstant* auf der Erdoberfläche.
- Exakt: *g hängt ab von der Distanz zum Erdmittelpunkt.* Nach dem *Gravitationsgesetz* gilt: $g = g(r) = k \cdot \dfrac{M_{Erde}}{r^2}$ mit r = Abstand vom Erdmittelpunkt.
- **Arten der in der Natur vorkommenden Kräfte:**
- Die *Gravitationskraft:* Sie wirkt immer zwischen zwei Massen (m, M) mit einem gewissen Abstand der Schwerpunkte r, beschreiben durch das *Gravitationsgesetz* von Newton $F = k \cdot \dfrac{m \cdot M}{r^2}$.
- Die *Elektromagnetische Kraft:* Sie ist wichtig im Bereich der Moleküle, Atome und Kerne. Die *elektrostatische* Kraft oder *Coulomb-Kraft* wirkt zwischen zwei *Ladungen* (Gesetz analog zum Gravitationsgesetz, jedoch für Ladungen statt Massen.) *Magnetische Kräfte* entstehen, wenn sich geladene Körper durch *Magnetfelder* bewegen.
- *Die starke Wechselwirkungskraft:* Diese ist verantwortlich für den Zusammenhalt der *Protonen* und *Neutronen* (*Nukleonen*) in Atomkernen. Ihre Rechweite ist auf den Bereich dieser Nukleonen begrenzt.
- *Die schwache Wechselwirkungskraft:* Diese hat eine *Reichweite unterhalb des Nukleonenbereichs.* Sie wirkt z.B. beim *Zerfall eines Neutrons* in ein Proton und ein schnelles Elektron (radioaktiver Zerfall).
- Die *elektromagnetische Kraft* sowie die *starke* und die *schwache Wechselwirkungskraft* konnten unter demselben *Ursachendach vereinigt* werden. Für die *Gravitationskraft* ist das bis zum Zeitpunkt des Erstellens dieser Fassung noch nicht gelungen.

2. Gesetze für die Kraft



$\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{H}$
$\vec{R}_2 = \vec{F}_2 - \vec{H}$
$|\vec{H}| = |-\vec{H}|$

Ähnliche Figuren:

$$\frac{|\vec{H}|}{|\vec{F}_1|} = \frac{|\overline{AD}|}{|\overline{CD}|}, \qquad \frac{|\vec{H}|}{|\vec{F}_2|} = \frac{|\overline{BD}|}{|\overline{CD}|}$$

Man dividiere die beiden Gleichungen beidseitig!

Bild oben: Addition von parallelem Kräften

- Da $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ gilt und m ein Skalar ist, gelten die *Additionsgesetze* für $\vec{a}$ auch für die Kräfte $\vec{F}$:
  - *Kräfte überlagern sich* ohne sich gegenseitig zu beeinflussen.
  - *Kräfte wirken* auf ihren *Wirkungslinien*. (An Wirkungslinien „gebundene“ Vektoren).
  - *Kräfte greifen* (bei der Lösung von Aufgaben) an ihren *Angriffspunkten* an.
  - Sie werden nach dem Gesetz der *Parallelogrammaddition* addiert.
  - Häufig studiert man Kräfte an *starren Körpern*. Bei diesen existiert ein *Schwerpunkt* S. Kräfte durch S wirken auf den Körper verschiebend. Eventuell existiert auch ein *Drehpunkt* D, um den eine Kraft eine *Drehung* des Körpers verursachen kann, falls die Wirkungslinie nicht durch den Drehpunkt geht.
  - *Beispiel:* Sitzt ein Körper auf einer *schiefen Ebene*, so wirken an ihm folgende Kräfte:
    - ∗ Die *Gewichtskraft* G,
    - ∗ die *Normalkraft* senkrecht zur Unterlage N
    - ∗ sowie die *Hangabtriebskraft* H, welche im Ruhefall durch die *Reibkraft* R ausgeglichen wird.
    - ∗ Im Bewegungsfall sorgt $(H - R)$ für die Beschleunigung.

$$\frac{\left(\frac{|\vec{H}|}{|\vec{F}_1|}\right)}{\left(\frac{|\vec{H}|}{|\vec{F}_2|}\right)} = \frac{\left(\frac{|\overline{AD}|}{|\overline{CD}|}\right)}{\left(\frac{|\overline{BD}|}{|\overline{CD}|}\right)} \Rightarrow \frac{|\vec{F}_2|}{|\vec{F}_1|} = \frac{|\overline{AD}|}{|\overline{BD}|} \Rightarrow |\vec{F}_1| \cdot |\overline{AD}| = |\vec{F}_2| \cdot |\overline{BD}|$$

- Bezüglich dem konstruierten Punkt D gilt hier das *Hebelgesetz:*

$$|\vec{F}_1| \cdot |\overline{AD}| = |\vec{F}_2| \cdot |\overline{BD}|$$

- Zudem liest man in der Skizze ab: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. D.h. *parallele Kräfte summieren sich zur Gesamtkraft.*

2. Grundgesetze der Mechanik

Wir unterscheiden hier drei Gruppen:

1. *Trägheits-, Bewegungs- und Reaktionsgesetze* (formuliert von Newton)
2. *Erhaltungssätze* (Energiesatz, Impulssatz, Drehimpulssatz)
3. *Gravitationsgesetz* (Newton)
    - $\rightsquigarrow$ Hier wird nur Gruppe 1 besprochen.

Zur Gruppe 1: *(Trägheits-, Bewegungs- und Reaktionsgesetze)*
Diese lassen sich experimentell untersuchen:

- Man misst die Abstände zwischen den Wegmarken, bei welchen die Kugel im Takt eines Zeitgebers vorbeirollt und findet ein *Proportionalitätsgesetz:* Der jeweils zurückgelegte *Weg* ist *proportional* zur verstrichenen *Zeit im Quadrat.*

  $\rightsquigarrow$ $\vec{s}(t) = const. \cdot t^2$. Durch Differenzieren findet man: $\vec{a}(t) = const.$.

- Das *Trägheitsgesetz* (Gleichgewicht eines Körpers, 1. Gesetz nach Newton): Ein *Körper* ist im *Gleichgewicht*, wenn er sich entweder im Zustand der Ruhe oder im Zustand der gleichmäßigen Bewegung befindet. (mit konstanter Geschwindigkeit auf geradliniger Bahn.) Dann ist er kräftefrei. Für ihn gilt daher: $\vec{v} = const.$. Will man diesen Zustand ändern, so muss eine Kraft dafür am Körper angelegt werden.

- *Kräftefreiheit* bedeutet hier, dass die Summe *aller angreifenden Kräfte null* ist und sich die *Wirkungslinien aller Kräfte in einem Punkt schneiden.*

- *Bewegungsgesetz* (2. Gesetz nach Newton): $\vec{F}_{resultierend} = m \cdot \vec{a}$. Eine Kraft an einer Masse hat also eine Beschleunigung zur Folge $\rightsquigarrow$ Bewegung. Umgekehrt hat eine Beschleunigung eine Kraft zur Folge.

- Wenn alle an einem Körper angreifenden *Kräfte verschwinden*, so sind die *Bedingungen des Trägheitsgesetzes erfüllt.*

- *Fallgesetz:* Körper fallen auf der Erde mit *gleichmäßiger Beschleunigung* $a = g$, wenn der Luftwiderstand vernachlässigt wird. Dann gilt:

  - $\leadsto \ \vec{v}(t) = \vec{g} \cdot t$ und $\vec{s}(t) = \frac{1}{2} \cdot \vec{g} \cdot t^2$.
  - Aus $\vec{s} = const. \cdot \vec{a} \cdot t^2$ findet man durch differenzieren:
    * $\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{s(t)}}{dt} = const. \cdot \vec{a} \cdot 2 \cdot t$
    * $\vec{a}(t) = \dfrac{d\,\vec{v}(t)}{dt} = const. \cdot \vec{a} \cdot 2 \leadsto \ const. = \frac{1}{2}$.

- Bekannt: Wenn sich ein *Massenpunkt* (m) gleichmäßig auf einer *Kreisbahn* bewegt, so wirkt auf ihn eine *Beschleunigung* (*Zentripetalbeschleunigung*), welche ihn von der geradlinigen Bahn abbringt und in *Richtung Kreiszentrum zwingt:* $a_Z = \dfrac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$. (Siehe Seite 37.)
  Dies ist die *Sichtweise von außen* in einem ruhenden Koordinatensystem.

- Damit wirkt auf einen Massenpunkt die Kraft: $F_Z = m \cdot \dfrac{v^2}{r} = m \cdot \omega^2 \cdot r$.

- Diese Kraft heißt *Zentripetalkraft.* Die Gegenkraft im Körper nach außen ist die *Zentrifugalkraft.* Die Zentrifugalkraft ist eine *Trägheitskraft* (Gegenkraft). Dies ist die *Sichtweise von innen* mit einem *mitbewegten Koordinatensystem* im Körper.

- Durch differenzieren gewinnt man: $\leadsto \ \vec{v}(t) = \dfrac{d\,\vec{s}(t)}{dt}, \qquad \vec{a}(t) = \dfrac{d\,\vec{v}}{t}$.

  - Das Differenzieren von Vektorfunktionen wird in der Differentialgeometrie behandelt. (Diese Technik ist relativ einfach.)
  - Damit lässt sich die Zentripetalbeschleunigung einfach erklären.

- Das *Reaktionsgesetz* (Prinzip von *Kraft und Gegenkraft*, *Wechselwirkungsgesetz*, z.B. Prinzip des Enterns von Schiffen, das Rückstossprinzip bei Raketen, die Seilziehkraft usw.):

  - *Aktionskraft = Reaktionskraft:* $F_a = F_r$.
  - Die Mannschaft eines Schiffes zieht das andere Schiff gegen sich. Gleichzeitig wird das eigene Schiff mit derselben Kraft gegen das andere gezogen.

- Das *Coulomb'sches Gesetz* für die trockene *Gleitreibung* oder bei *Haftreibung:*

  - Sei μ_G = *Gleitreibungszahl*, F_N = Normalkraft $\leadsto \ F_{Reib} = \mu_G \cdot F_N$.
  - Ebenso für die Rollreibung bei rollenden Kugeln, Rädern usw.. Sei c_R = Rollwiderstandskoeffizient $\leadsto \ F_{Rollw} = c_R \cdot F_N$

- Bei der *Haftreibung* gilt entsprechend:
  - Sei μ_H = *Haftreibungskoeffizient* bei trockener Oberfläche.
    Sei F_N = Normalkraft $\rightsquigarrow$ F ist *kleiner oder gleich* $\mu_H \cdot F_N$ (sonst gleiten).
- $s(t)$ bei der gleichmäßig beschleunigten Bewegung ist *nicht von der Masse* abhängig.

3. Berechnung der Zentripetalbeschleunigung

- Sei $\vec{s}(t) = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega \cdot t \\ \sin(\omega \cdot t) \end{pmatrix}$
- $\rightsquigarrow$ $\vec{v}(t) = \dfrac{d\,\vec{s}(t)}{dt} = r \cdot \omega \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\omega \cdot t \\ \cos(\omega \cdot t) \end{pmatrix}$
- $\rightsquigarrow$ $\vec{a(t)} = \dfrac{d\,\vec{v}(t)}{dt} = r \cdot \omega^2 \cdot \begin{pmatrix} -\cos(\omega \cdot t \\ -\sin(\omega \cdot t)) \end{pmatrix} = -\omega^2 \cdot \vec{s}(t) \;\Rightarrow\; \vec{a(t)} = -\omega^2 \cdot \vec{s}(t).$

2.6 Arbeit, Leistung, Energie, Impuls

2.6.1 Massenpunkte und ausgedehnte Körper

1. Arbeit

- Zum Begriff der *Arbeit:* Anknüpfung an die Idee der Handarbeit aufgrund der Erfahrung. *Arbeit* ist *Kraft mal Weg, längs dem die Kraft wirkt.*
  - Mehr Kraft führt zu mehr Arbeit, mehr Weg auch. Das lässt sich am eigenen Körper erfahren.
- Zur Darstellung der Arbeit: Kraft mal Weg ist ein *Produkt.* $W = F \cdot s$. Solche Produkte (2 Faktoren oder Parameter $\leadsto$ 2 Achsen) lassen sich als *Kurven in 2D-Diagrammen* graphisch darstellen. (W: work.)
- Genauer bei konstanter Kraft längs des Weges: *Arbeit* $=$ *W* $=$ *Kraftkomponente in Wegrichtung mal Weglänge* $=$ Skalarprodukt des Kraft- mit dem Wegvektors: $W = \vec{F} \circ \vec{s}$. („$\circ$" bedeutet hier Skalarprodukt.)
- Einheit der Arbeit: $1\ J\ (Joule) = 1\ N \cdot 1\ m = 1\ N\ m$.
- *Beispiele:*
  - Horizontales Tragen eines Koffers ist physikalisch keine Arbeit, sondern nur Kraftausübung.
  - Hochnehmen eines Koffers ist Arbeit (gegen die Erdschwerkraft).
- In den Fällen, wo $F = F(s)$ nicht konstant ist, wo somit $y(s) = F(s)$ somit eine *variable Funktion* oder eine von s abhängige Variable ist, versagt $W = \vec{F} \circ \vec{s}$. Wenn man annimmt, dass $F(s) = \vec{F}(s)$ auf kleinen Strecken Δx oder Δs praktisch nur unmerklich ändert, kann man kleine Arbeitsanteile $\Delta W = \vec{F}(s) \circ \Delta\vec{s}$ längs kleinen Streckendifferenzen $\Delta\vec{s}$ betrachten und die gesamte Arbeit als Summe solcher kleiner ΔW erhalten, denn die *Gesamtarbeit* summiert sich auf aus den Teilarbeiten.
  - $$W = \sum \Delta W = \sum \vec{F}(s) \circ \Delta\vec{s}.$$
  - Wer schon integrieren kann sieht, dass diese Summe zu einem *Integral* führt:
    $$W = \int\limits_{s_1}^{s_2} \vec{F}(s) \circ d\vec{s}$$
- $W = \sum \Delta W = \sum \vec{F}(s) \cdot \Delta\vec{s}$ kann man als Summe von Balkeninhalten (Inhalten von Rechtecksflächen) der Breite $\Delta\vec{s}$ und der Höhe $\vec{F}_s(s)$ auffassen. $\vec{F}_s(s)$ ist der Anteil der Kraft in Richtung $\vec{s}$. Das gibt den Inhalt der Fläche unter der Kurve von $\vec{F}_s(s)$.

- *Arbeit ist positiv*, wenn $\vec{F}_s$ und $\vec{s}$ dieselbe Richtung haben, *null* wenn die beiden Vektoren senkrecht zueinander stehen und *negativ* im andern Fall.
- **Beispiel:** *Arbeit gegen die Schwerkraft* (Koffer hochheben, *potentieller Fall,* Arbeit kann zurückgewonnen werden):
  - Formeln $\rightsquigarrow$ $s = h,\ \ a = g = const. \rightsquigarrow\ W = F \cdot s = m \cdot g \cdot h.$
- **Beispiel:** *Arbeit an einer Feder* (gegen die Federkraft), *Spannarbeit.*
  - Federkraft (Hookesches Gesetz): $F(s) = D\ s$. ($D =$ Federkonstante).
  - Das Diagramm von $F(s)$ zwischen $s = 0$ und $s = x$ zeigt daher eine Gerade mit der Steigung D. Die Fläche ist somit ein Dreieck
    - Formeln $\rightsquigarrow$ $W =$ Dreiecksinhalt $= \frac{1}{2} \cdot x \cdot (D \cdot x) = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x^2$.
- **Beispiel:** *Beschleunigungsarbeit*, zum Beispiel bei einer konstanten Beschleunigung (*kinetischer Fall:* Arbeit kann zurück gewonnen werden):
  - $F = m \cdot a = const.$ und $s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \rightsquigarrow\ W = m \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \rightsquigarrow$ Resultat:

$$W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (a \cdot t)^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2\,.$$

- **Beispiel:** *Reibarbeit* gegen die Reibkraft (äußert sich dann als *Wärme*):

$$F = F_{Reib}, \qquad W = F_{Reib} \cdot s\,.$$

- **Beispiel:** *Deformationsarbeit* $\rightsquigarrow$ Integral: $W = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \circ d\vec{s}$.
- Arbeit kann aus verschiedenen Arbeitstypen (siehe oben genannte Beispiele) *zusammengesetzt* sein $\rightsquigarrow$ Addition der Teilarbeiten).

2. Leistung

- *Leistung* (P, power) ist verrichtete Arbeit pro benötigte Zeit**.**
  - Formel: $P = \dfrac{W}{t}$ $\rightsquigarrow$ *Leistung in der Zeit* t (auch mittlere Leistung).
  - Resp. $P = \dfrac{\Delta W}{\Delta t} \rightsquigarrow$ *Leistung in der Zeitdifferenz* $\Delta t \rightsquigarrow\ P = \dfrac{dW}{dt}$.
- Einheit der Leistung: $1\ Watt = 1\ W = 1\ J/sec.$
- Umgekehrt ist $W = P \cdot t \rightsquigarrow$ (z.B. beim Gebrauch einer Glühlampe mit konstanter Leistung, z. B. 100 W).
- Für $P = P(t) \neq const.$ hat man ein Integral: $W = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\,dt$.

2. Energie und Energiesatz

- Die **Idee des Begriffs:** *Energie* (Abkürzung E) ist *gespeicherte Arbeit*.
  Oder: Energie ist die Arbeit, welche durch eine Sache verrichtet werden kann, welche also in einer Sache drin liegt. *Energie ist also Arbeit*. Oft sagt man fälschlicherweise: „Energie ist die Fähigkeit Arbeit zu verrichten". Dann wäre aber Energie Fähigkeit und nicht Arbeit. „Fähigkeit" ist hier kein exakt definierter Begriff.

- **Energiearten:**
  - *Potentielle Energie, Lageenergie:* Z.B. gespeicherte Energie durch Hubarbeit, $E = W = m \cdot g \cdot h$.
  - *Kinetische Energie, Bewegungsergie:* $E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$.
    * $E = F \cdot s = m \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{m}{2} \cdot (a \cdot t)^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$.
  - *Spannenergie in einer Feder:* $E = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x^2$. (Siehe oben.)
  - *Wärmeenergie, innere Energie* (z.B. bei der Reibarbeit): $E = F_{Reib} \cdot s$.

- *Arbeit an* einem *Körper* und *Körperenergie:*
  - Wenn an einem Körper durch eine äußere Kraft oder Einwirkung Arbeit geleistet wird, so ist diese Arbeit gleich der Energieveränderung des Körpers: $W = \Delta E$.
  - Wird umgekehrt durch den Körper Arbeit verrichtet, so nimmt seine Energie entsprechend ab.

- **Der Erhaltungssatz der Energie:**
  - *Abgeschlossene Systeme:* Ein *System* heißt *abgeschlossen*, wenn mit der *Umgebung keine Wechselwirkung* möglich ist. Mit solchen Systemen ist insbesondere kein Energieaustausch möglich.
  - Eine *Erhaltungsgröße* ist eine Größe, die ihren Wert nicht ändert. Dieser Wert bleibt somit in der Zeit erhalten.
  - *Energiesatz:* In einem abgeschlossenen System ist die Gesamtenergie für alle ablaufenden Vorgänge eine Erhaltungsgröße.
  - Bei einer Energieumwandlung, wenn also z.B. einem Körper Energie zugeführt wird, geht oft Energie *insofern verloren*, dass sie statt in den Körper anderswohin abgeführt wird (*Dissipationsverlust*). Z.B. Abfluss von Reibungsenergie beim Hochschieben eines Körpers, sodass nicht alle hineingesteckte Arbeit zu potentieller Energie des Körpers wird, weil ein Teil davon noch die Unterlage erwärmt. (Und natürlich auch den Körper selbst.)
  - Das Verhältnis η (Buchstabe eta) von erhaltener *Nutzenergie* E_N und hineingesteckter *Antriebsenergie* E_A ist daher gewöhnlich kleiner als 1:
    * Verhältnis: $\eta = \dfrac{E_N}{E_A} \leq 1$. η heißt auch *Wirkungsgrad*.

– *In einem abgeschlossenen System bleibt die Gesamtenergie mit der Zeit konstant.* Die Summe der Werte aller beteiligten Energiearten oder Energieformen ist unveränderlich. *Ein Perpetuum mobile ist unmöglich:* Energie kann weder geschaffen noch vernichtet werden. Energie kann nur *umgewandelt* werden.
– Mit *„Perpetuum mobile 1. Art“* wird ein hypothetisches Gerät bezeichnet, das Energie aus dem Nichts schaffen kann. Ein solches ist infolge des Energiesatzes *unmöglich.*

- **Begründung des Energiesatzes in einem Spezialfall:**
  – Wir betrachten in einem abgeschlossenen System die Situation, in der mit $a_{pot.} = const.$, $s_{pot.} = const.$, $v_{kin.} = const.$, $a_{kin.} = 0$ sind. Es gilt hier:
    * $W = E_{pot} + E_{kin} = m_1 \cdot a_1 \cdot s_1(t) + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2(t)^2 = const.$.
    * Hier ist $m \cdot a \cdot s = F \cdot s$. Wegen $a = const.$ gilt: $v\,'(t) = a = const.$
    * Dann folgt durch differenzieren (woraus dann $W = const.$ aus $P = 0$ folgt):

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d\left((m_1 \cdot a_1 \cdot s_1(t) + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2(t)^2\right)}{dt} = m_1 \cdot a_1 * v_1(t) + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot 2 \cdot v_2(t) \cdot v_2\,'(t)$$
$$= m_1 \cdot a_1 \cdot v_1(t) + m_2 \cdot a_2(t) \cdot v_2(t) = F_1 \cdot \underbrace{v_1(t)}_{=0} + \underbrace{F_2}_{=0} \cdot v_2(t) = F_1 \cdot 0 + 0 \cdot v_2(t) = 0$$

- Etwas tiefer in die Problematik der Rechtfertigung des Energiesatzes kann man mit Hilfe der Integralrechnung sehen, falls man diese Theorie versteht. Wir wollen das hier kurz versuchen und von der Annahme ausgehen, dass wir ein abgeschlossenes System haben und darin bloss potentielle und kinetische Energie. Die Spannenergie einer Feder oder die Wärmeenergie kann man, wie wir schon wissen, auf potentielle und kinetische Energie zurückführen, so dass die jetzt gemachte Annahme gerechtfertigt ist. Andere Energiearten wie etwa jene, welche in der Elektrophysik oder der Strahlenphysik behandelt werden, wollen wir hier ausschliessen. Ebenso wollen wir die Betrachtung der Einfachheit halber nicht vektoriell, sondern bloss skalar führen.

Wir studieren daher die Gesamtmasse m_{total} in einem abgeschlossenen System und dazu $E_{total} = E_{pot.,total} + E_{kin.,total}$. Soll nun E_{total} um ΔE_{total} verändert werden, so muss auf den Schwerpunkt der Gesamtmasse m_{total} eine Kraft $F(s)$ längs eines Weges Δs wirken, wobei $s = s(t)$ gilt. Denn die Koordinaten der Verschiebungsbahn ändern mit der Zeit. Weil das System abgeschlossen ist, kann aber keine Kraft F von aussen wirken. Daher muss im System jede Kraft F nach dem Aktions–Reaktionsprnzip eine Gegenkraft $-F$ hervorrufen, welche die Kraft F kompensiert, sodass die Summe $F + (-F) = 0$ ist.

Wenn man daher zur Verschiebung eine potentielle Energie $\Delta E_{pot.,total} = \int\limits_{\Delta s} F\,ds$ aufwenden muss, wird man folglich durch die Reaktionskraft $-F$ und daraus durch die zur Verschiebung der Masse notwendige Beschleunigung eine Geschwindigkeit und daher eine kinetische $E_{kin.,total}$ erhalten. Eine weitere Kraft kann nicht beteiligt sein, da diese sonst von aussen wirken müsste und so nicht im Systeminnern kompensiert werden kann. Wegen „Aktion = Reaktion " gilt daher mit $v_1 = 0,\ \ \Delta v = v_2 = v$:

$$F + (-F) = 0 \;\Rightarrow\; 0 = \int\limits_{\Delta s} F(s)\,ds + \int\limits_{\Delta s} -F(s)\,ds = \underbrace{\int\limits_{\Delta s} F(s)\,ds}_{=E_{pot.,\,total}} - \int\limits_{\Delta t} \underbrace{F(s(t))}_{=m\cdot a(t)} \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{=v(t)}\,dt$$

$$= E_{pot.,total} - m \int\limits_{\Delta t} \underbrace{v(t)}_{=v} \cdot \underbrace{a(t)\,dt}_{=\frac{dv}{dt}\cdot dt = dv} = E_{pot.,total} - m \int\limits_{0}^{v} v\,dv = E_{pot.,total} - m \cdot \frac{1}{2} \cdot v^2$$

$$= E_{pot.,total} - E_{kin.,total} \;\Rightarrow\; \Delta E_{total} = E_{pot.,total} - E_{kin.,total} = 0$$

Damit ist der Energiesatz im beschriebenen Fall gerechtfertigt: $E_{pot.,total} = E_{kin.,total}$.

3. Impuls und Impulssatz

- **Der Impulsbegriff:**
  - Das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit eines Körpers nennt man *Impuls:*

    $$\vec{p} = m \cdot \vec{v}.$$

  - Der Impuls ist ein Vektor, da die Geschwindigkeit ein Vektor und die Masse ein Skalar ist.
  - Den Impuls kann man auch als *Kraftstoß* interpretiere, denn es gilt:
    - $\rightsquigarrow\quad \Delta p = m \cdot \Delta v = m \cdot \dfrac{\Delta v}{\Delta t} \cdot \Delta t = m \cdot a \cdot \Delta t = F \cdot \Delta t.\ \ (m = const.)$
  - *Impulsänderung und Kraft:*
    - Es wirkt hier also infolge der Beschleunigung $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ eine Kraft während der kurzen Zeit Δt (siehe obige Formel). Das hat die *Impulsänderung* Δp zur Folge.
    - Das Produkt $F \cdot \Delta t$ bedeutet im Kraft-Zeit-Diagramm einen *Flächeninhalt:* Der des Rechtecks mit der Breite Δt und der Höhe $F = F(t)$.
    - Aus $\Delta p = F \cdot \Delta t$ folgt $F = \dfrac{\Delta p}{\Delta t} \rightsquigarrow\ \ F = \dfrac{dp}{dt}$. Die *Kraft F* kann also auch als *Impulsänderung pro Zeit* oder als *Ableitung* des Impulses nach der Zeit aufgefasst werden.
    - Man *definiert allgemeiner:* $F = \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{d\,(m(t) \cdot v(t))}{dt}$.
    - $F = \dfrac{\Delta p}{\Delta t}$ kann auch als Mittelwert verstanden werden: Der Mittelwert der angreifenden Kraft während der Zeit Δt bewirkt die Impulsänderung Δp.

- **Der Impulssatz:**
  - In einem abgeschlossenen System ist die Summe der Kräfte gleich null, sonst würde ja eine Kraft (die resultierende Summe) nach außen wirken. $\leadsto$

$$0 = F_1 + F_2 + \ldots + F_k = \frac{\Delta p_1}{\Delta t} + \frac{\Delta p_2}{\Delta t} + \ldots + \frac{\Delta p_k}{\Delta t} = \frac{\Delta p_1 + \Delta p_2 + \ldots + \Delta p_k}{\Delta t}.$$

$$\Rightarrow \; 0 = \frac{\Delta p_{total}}{\Delta t} \quad \text{resp.} \quad 0 = \frac{d\, p_{total}}{dt}.$$

- Wenn aber die Ableitung (Steigung) einer Funktion immer 0 ist, so muss die Funktion konstant sein. In einem abgeschlossenen System gilt: *Der totale Impuls oder die Summe aller Teilimpulse ist konstant.*
- Die Aussage, dass $p_{total} = const.$ ist, heißt *Impulssatz.*
- Eine andere Fassung des **Impulssatzes:**

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_k = const. \text{ in einem abgeschlossenen System.}$$

- **Elastische Stöße:** Ein Stoss heißt *elastisch*, wenn dabei keine kinetische Energie in innere Energie umgesetzt wird. Wenn hingegen ein Teil der kinetischen Energie in innere Energie umgesetzt wird, so ist der Stoss *unelastisch.* Man kann folgern:
- Bei ganz *elastischen Stößen* bleibt die *innere Energie* der beteiligten Körper *unverändert.* Die gesamte *kinetische Energie* bleibt *erhalten.* Der *Gesamtimpuls* bleibt ebenfalls *erhalten.*
- Bei *unelastischen Stößen nimmt* die *innere Energie* der beteiligten Körper in der Regel *zu.* Die gesamte *kinetische Energie* bleibt daher *nicht erhalten*, jedoch bleibt die *gesamte* Summe der Beiträge aller *Energiearten erhalten.* Der *Gesamtimpuls* bleibt *erhalten.*
- Interessant sind die Beobachtungen der Impulsübertragungstypen an *Billardkugeln.* Hier hat man *nahezu elastische Stöße.*
- Wichtig ist die Feststellung, dass der *Impuls* ein *Vektor* ist mit derselben Richtung wie die beteiligte Geschwindigkeit. Impulserhaltung bedeutet also Erhaltung von Vektoren und damit von Richtung.
- Einen *Grenzfall* erhält man z.B. wenn zwei Kugeln aufeinander stoßen, wobei der die eine Kugel eine sehr große Masse bezüglich der andern Kugel hat. Wenn eine Kugel mit kleiner Masse gegen eine mit großer Masse stößt, so kann es sein, dass die *Geschwindigkeitsänderung* der zweiten Kugel (große Masse) *praktisch nicht feststellbar* ist.

2.7 Mechanik der starren Körper (aus der Dynamik)

2.7.1 Ausgedehnte Körper

1. Statik: Gleichgewicht

- Eine *Gleichgewichtsbedingung* ist bekannt: Ein *Körper* ist im *Gleichgewicht*, wenn er sich in *Ruhe* oder in *geradliniger Bewegung* mit *konstanter Geschwindigkeit* $\vec{v}$ befindet. D.h. wenn er resultierend kräftefrei ist. Denn Kräfte haben Beschleunigungen zur Folge.

- *Für einen Körper existieren drei Arten von Gleichgewichten:*

  - *Stabiles Gleichgewicht.* (Z.B. ein Buch, das geschlossen auf einer horizontalen Tischplatte liegt).
  - *Indifferentes Gleichgewicht.* (Z.B. eine Kugel auf einer horizontalen geschliffenen Tischplatte. Ein noch so kleiner Anstoß kann sie ins Rollen bringen.)
  - *Labiles Gleichgewicht.* (Z.B. ein Ball, der auf einem Besenstiel balanciert wird. Er kann in jedem Moment herunterfallen.

- Das *Hebelgesetz* (ebenfalls bekannt): Kraft mal Kraftarm gleich Last mal Lastarm. Hier skalar geschrieben: $F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2$, wobei die Kraft *senkrecht* zum Abstand zum *Drehpunkt* gemessen wird. Die beiden Abstandsrichtungen dürfen jedoch in einem beliebigen Winkel zueinander stehen. Dieses Gesetz wird weiter unten *vektoriell* neu gefasst.

- Bei einer Drehung um den Drehpunkt kann die Größe

  $$F \cdot (\text{Bogenlänge } b) = F \cdot (r \cdot \alpha), \qquad \alpha = \text{ Drehwinkel}$$

  als *potentielle Energie* verstanden werden. b ist eine Länge ca. parallel zu F.

- Man formuliert dieses *Energiegleichgewicht* manchmal auch so: *Was an Kraft gewonnen wird, geht an Weg verloren.*

- Anwendung findet dieses Gesetz bei *Wellrädern* oder *Flaschenzügen*. Davon gibt es eine Anzahl *verschiedene Typen*. Beispiel: *Differenzialflaschenzug*. Man konsultiere und vergleiche dazu die Literatur oder auch Formelbücher.

- Das Produkt Kraftarm (senkrecht zur Kraft) mal Kraft heißt auch *Drehmoment* bezüglich des gegebenen *Drehpunkts*. (Statt Drehmoment sagt man auch *statisches Moment* oder *Drehgröße*.)

- Das *Drehmoment* ist ebenfalls ein *Vektor:* Das Vektorprodukt von $\vec{r}$ und $\vec{F}$: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ (auch Kreuzprodukt genannt).

  - Gerichtete Energieeinheitsbogenfläche!

- Die Einheit ist hier analog zur potentiellen Energie $[m \cdot N] \rightsquigarrow\ (= J)$. Das J wird beim Moment jedoch kaum verwendet. Im Unterschied zum Skalarprodukt $E_{pot.} = \vec{F} \circ \vec{s} = \vec{s} \circ \vec{F}$ gilt hier $\vec{M} = \vec{s} \times \vec{F}$. Üblicherweise hat man hier die Situation $\vec{s} \perp \vec{F}$. In diesem Falle wird $\vec{F} \circ \vec{s} = 0$.

- Ein Drehmoment hat eine *beschleunigte Drehbewegung (Rotationsbewegung)* zur Folge.

- Ein *positives Drehmoment* in Richtung der z–Achse *dreht den Körper im Gegenuhrzeigersinn*, wenn die *z–Achse aus* dem *Zifferblatt der Uhr* herausschaut.
  - *Quelle von Missverständnissen:* Von wo aus wird beobachtet, von hinter dem Zifferblatt oder von vor dem Zifferblatt?

- Die *Richtung des Drehmoments* kann man auch nach der *Korkzieherregel* (*Rechtsschraubenregel*) bestimmen.

- Mit *Drehmomenten* rechnet man somit wie mit gewöhnlichen *geometrischen 3D-Vektoren.*

- Das *Hebelgesetz* besagt, dass die *Summe der Drehmomente* bezüglich eines Drehpunktes *null* sein muss.

- Die Summe der Drehmomente ist null, wenn der *Drehpunkt auf* der auf der *Wirkungslinie* der *Summenkraft* liegt. Das heißt: Man kann den *Kraftvektor im Drehpunkt ansetzen.* (Um das zu verstehen, muss man erst den Vektorbegriff verstehen!)

- Damit lassen sich die **Gleichgewichtsbedingungen** wie folgt formulieren: Ein *Körper ist im Gleichgewicht*, wenn
  - die *Summe* aller an ihm angreifenden *Kräfte null* ist und
  - wenn ebenfalls die *Summe* aller an ihm angreifenden *Momente null* ist.

- Ein *ideal gelagertes Rad* befindet sich im *indifferenten Gleichgewicht*, wenn es nur auf der Achse aufliegt.

- Mit Hilfe der Momente kann man einen *Schwerpunktsabstand bestimmen.* Dazu ist die **Schwerpunktsdefinition** notwendig: Der *Schwerpunkt* ist derjenige Punkt, an dem man den Körper (theoretisch) unterstützen muss, so dass er sich in jeder Drehlage im indifferenten Gleichgewicht befindet. Praktisch kann man einen Körper im Schwerpunkt nicht immer unterstützen, denn oft befindet sich dieser *Punkt im Innern des Körpers*!
  - *Schwerpunktsberechnung:* Da der Schwerpunkt bezüglich er Schwerkraft bestimmt wird, muss das Moment der Summe aller Gewichtskräfte (der Gesamtkraft) mal den Schwerpunktsabstand von einem beliebig gewählten Ursprung des Koordinatensystems gleich sein zur Summe aller einzelnen Momenten (verursacht durch die Einzelkräfte) bezüglich dieses Ursprungs.

– $\rightsquigarrow$ $r_S \cdot (F_1 + \ldots + F_k) = r_1 \cdot F_1 + \ldots + r_k \cdot F_k$

– $\rightsquigarrow$ $r_S \cdot (m_1 \cdot g + \ldots + m_k \cdot g) = r_1 \cdot m_1 \cdot g + \ldots + r_k \cdot m_k \cdot g$

– $\rightsquigarrow$ $r_S \cdot (m_1 + \ldots + m_k) = r_1 \cdot m_1 + \ldots + r_k \cdot m_k$

– $\rightsquigarrow$ $r_S = \dfrac{(r_1 \cdot m_1 + \ldots + r_k \cdot m_k)}{(m_1 + \ldots + m_k)}$ oder vektoriell:

– $\rightsquigarrow$ $\vec{r}_S = \dfrac{(\vec{r}_1 \cdot m_1 + \ldots + \vec{r}_k \cdot m_k)}{(m_1 + \ldots + m_k)}$ Das fürt zu Integralen:

$$m_1 + m_2 + \ldots = \sum_{k=1}^{n} m_k \to \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} m_k = \sum_{k=1}^{\infty} m_k \to \int_{\ldots}^{\ldots} dm$$

$$r_1 \cdot m_1 + r_2 \cdot m_2 + \ldots = \sum_{k=1}^{n} r_k \cdot m_k \to \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} r_k \cdot m_k = \sum_{k=1}^{\infty} r_k \cdot m_k \to \int_{\ldots}^{\ldots} r(m)\, dm$$

2. Kinetik: Bewegungsgleichungen (starre Körper)

Die Translationsbewegung

- *Translationsbewegung:* Jeder Punkt des Körpers hat dieselbe vektorielle Geschwindigkeit (Richtung, Betrag).

- Da bei einem Körper anlässlich einer Translationsbewegung alle Körperpunkte dieselbe vektorielle Geschwindigkeit haben, *kann die Bewegung durch einen einzigen Körperpunkt beschrieben werden.* Üblicherweise nimmt man dazu den *Schwerpunkt* S. Wird der Körper beschleunigt, so werden *alle Körperpunkte* auch mit *derselben vektoriellen Beschleunigung* beschleunigt.

- Man kann daher die auf den Körper wirkende *Beschleunigungskraft durch die Beschleunigung eines einzigen Punktes ausdrücken.* Üblicherweise nimmt man dazu wieder den Schwerpunkt S: $\vec{F} = m_{\text{Körper}} \cdot \vec{a}$.

Die Dreh- oder Rotationsbewegung

- *Räumliche Rotationsbewegung (Kreiselung):* Der Körper dreht sich um einen im *Koordinatensystem* festen *Punkt.*

- *Ebene Rotationsbewegung (um eine Achse):* Der Körper dreht sich um eine im *Koordinatensystem* feste*Achse.*

- *Winkelgeschwindigkeit:* $\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t \;\Rightarrow\; \omega = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ (φ im *Bogenmaß!*)

– $\rightsquigarrow$ $\omega = \dfrac{(\text{durchlaufener Einheitskreisbogen})}{(\text{verstrichene Zeit})}$.

- $\rightsquigarrow \quad \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \to \frac{d\,\varphi}{dt}$ (Ableitung).
- Für $\omega = const.$ gilt $\omega = \frac{2\,\pi}{T} = 2\,\pi\,f$.
- $T =$*Umlaufzeit:* $f =$ *Frequenz* $= \frac{1}{T}$.
- *Tangentialgeschwindigkeit:* $v = \omega \cdot r, \quad r =$ Radius.
- Der *Winkel* ist als *Teil einer Ebene* definiert (*Euklid* $\rightsquigarrow$ zwei sich schneidende Geraden teilen die Ebene in vier Winkel, jeder Winkel ist also einer der vier Ebenenteile, also Punktmenge und als solche von zwei Vektoren (hier $\vec{r}$ und $\vec{v}$) orientiert.) Die *Orientierungsrichtung* der Ebene und somit des Winkels $\Delta\,\varphi$, also die Orientierungsrichtung von ω wird *mit Hilfe des Vektorprodukts festgelegt:* $\lambda \cdot \vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{v}$. Die Richtung von wird somit nach der *Korkzieherregel* oder Rechtsschraubenregel aus $\vec{r}$ und $\vec{v}$ bestimmbar. ($\lambda =$ Streckungsfaktor.)
- $\vec{\omega}$ ist ein *gebundener Vektor:* Gebunden an seine *Wirkungslinie*, die Rotationsachse.
- *Konsequenz:* Wegen $v = \omega \cdot r$ gilt $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. (Man mache sich eine Skizze zur Veranschaulichung, $\vec{\omega}$, $\vec{r}$, $\vec{v}$ sind paarweise orthogonal.)

- Zum *Bogenmaß:* $\Delta\varphi = \frac{\Delta b}{r} = \frac{\text{Bogenlänge}}{\text{Radius}}$ (*dimensionlos!!!!*).

  Weil viele Leute die Dimensionlosigkeit nicht ertragen, spricht man hier auch von *Radiant* (*rad*, eine überflüssige, künstliche Einheit, nützlich als Bezeichnung).

  - $\rightsquigarrow$ $2\,\pi$ entspricht $360^o = 360$ Altgrad.
    Das Bogenmaß ist nicht an einem physikalischen Gegenstand geeicht!

- Die „*Einheit*“ *der Winkelgeschwindigkeit* ist daher $1\ rad/sec = sec^{-1}$.

- Zum *Gradmaß:* Es gibt *verschiedene* Gradmasse.

  - Das *Altgradmaß* ist am mittleren Jahr geeicht. Es beruht auf dem Durchschnitt zwischen dem *vollen Sonnenjahr* (366 Tage) und dem *vollen Mondjahr* (12 mal von Vollmond zu Vollmond: Vollmondintervalle, 354 Tage): $\frac{366 + 354}{2} = 360$.
    - $\rightsquigarrow$ Das Gradmaß ist geeicht an der Sonne-Erde-Konstellation.

- Das *Neugradmaß* beruht auf der Einteilung des rechten Winkels in 100 gleiche Teilwinkel. $\rightsquigarrow$ $2\,\pi$ entspricht 400^o Neugrad.

- Weitere bekannte Winkelmasse werden im *Militär* verwendet. Z.B. *Flabpromille* gegenüber von *Artilleriepromillen* (je 2 π entspricht 6400 Promille, jedoch verschieden herum).

- Die *Winkelbeschleunigung* definiert sich nach dem Strickmuster der Definition der Winkelgeschwindigkeit: $\vec{\alpha} = \dfrac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} \rightarrow \dfrac{d\,\vec{\omega}}{dt}$ (Ableitung).
- Die Einheit der *Winkelbeschleunigung* ist $rad/sec^2 = sec^{-2}$.

• Für Winkel, Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung gelten die analogen *Gesetze* (Ableitungsregeln) wie für Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung:

  - Sei $\alpha = 0\ (sec^{-2})\ \Rightarrow\ \omega = \omega_0\ (sec^{-1})\ \Rightarrow\ \varphi = \omega_0 \cdot t\ (1 = 1\ rad)$ oder
  - Sei $\alpha = \alpha_0\ (sec^{-2})\ \Rightarrow\ \omega = \alpha_0 \cdot t(sec^{-1})\ \Rightarrow\ \varphi = \frac{1}{2} \cdot \alpha_0 \cdot t^2\ (1 = 1\ rad)$.
  - Sei $\varphi(t) = \frac{1}{2} \cdot const. \cdot t^2\ \Rightarrow\ \omega(t) = \dfrac{d\,\varphi}{dt} = const. \cdot \dfrac{2}{2} \cdot t = const. \cdot t$
    $\Rightarrow\ \alpha(t) = \dfrac{d\,\omega}{dt} = const. := \alpha_0\ \Rightarrow\ \omega(t) = \alpha_0 \cdot t = 2 \cdot \bar{\omega}\ \Rightarrow\ \varphi(t) = \dfrac{1}{2} \cdot \alpha_0 \cdot t^2.$

Kinetische Energie und Trägheitsmoment bei der Drehbewegung

• Wenn man ein *Rad* durch einen am Umfang angreifenden Treibriemen in *Drehung* versetzt, so nimmt das Rad *Energie* auf. Der Riemen leistet am Rad Arbeit. Diese lässt sich mit Hilfe der übertragenen Kraft messen. Wir betrachten den *Fall*, wo die *übertragene Kraft konstant* ist (gleichmäßige Winkelzunahme konstante Winkelbeschleunigung):

  - $W = F_{const.} \cdot s = F \cdot s = F \cdot b = F \cdot r \cdot \varphi = F \cdot r \cdot \bar{\omega} \cdot t = F \cdot r \cdot \frac{1}{2} \cdot \alpha_0 \cdot t^2$

• Jeder Massenpunkt m_k des Körpers hat dann dieselbe kinetische Energie:

  - $E_k = \frac{1}{2} \cdot m_k \cdot v_k^2 = \frac{1}{2} \cdot m_k \cdot (r_k \cdot \omega)^2.$ Damit wird die Gesamtenergie:

$$E_{resultierend} = \tfrac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \tfrac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 + \tfrac{1}{2} \cdot m_3 \cdot v_3^2 + \ldots + \tfrac{1}{2} \cdot m_n \cdot v_n^2$$
$$= \tfrac{1}{2} \cdot m_1 \cdot (r_1 \cdot \omega)^2 + \tfrac{1}{2} \cdot m_2 \cdot (r_2 \cdot \omega)^2 + \ldots + \tfrac{1}{2} \cdot m_n \cdot (r_n \cdot \omega)^2$$
$$= \tfrac{1}{2} \cdot \underbrace{(m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + \ldots + m_n \cdot r_n^2)}_{:=I} \cdot \omega^2$$
$$= \tfrac{1}{2} \cdot (m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + \ldots + m_n \cdot r_n^2) \cdot (\alpha_0 \cdot t)^2 = \tfrac{1}{2} \cdot I \cdot (\alpha_0 \cdot t)^2$$

• Nach dem Energiesatz gilt: $E_{resultierend} = W \quad \rightsquigarrow$

$$W = \tfrac{1}{2} \cdot (m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + \ldots + m_n \cdot r_n^2) \cdot (\alpha_0 \cdot t)^2 = F \cdot r \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \alpha_0 \cdot t^2$$
$$\rightsquigarrow\ (m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + \ldots + m_n \cdot r_n^2) \cdot \alpha_0 = F \cdot r\ (= \text{Kraft mal Weg})$$
$$\rightsquigarrow\ I \cdot \alpha_0 = F \cdot r = M \quad (\text{mit } I = m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + \ldots + m_n \cdot r_n^2\ ).$$

• In der letzten Formel ist α_0 die Winkelbeschleunigung und $F \cdot r$ das Drehmoment. Damit erhalten wir bezüglioch der *Drehachse Ax*:

- $W = F_{const.} \cdot s = E_{resultierend} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot (\alpha_0 \cdot t)^2 = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2, \quad M = I \cdot \alpha_0$.
- $I = m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + \ldots + m_n \cdot r_n^2$ heißt *Trägheitsmoment* bezüglich Ax.
- Das Trägheitsmoment lässt sich auch als *Integral* schreiben: $I = \int\limits_M r(m)^2 \, dm$.
- Die *Berechnung* von Trägheitsmomenten wird üblicherweise in der *Integralrechnung* eingeübt.
- Das Trägheitsmoment bezieht sich hier auf eine *axiale Rotation* bezüglich einer gegebenen Drehachse. Ohne Drehachse ist das Trägheitsmoment nicht definiert.
- Aus den Energieformeln $E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ und $E_{rot} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$ sieht man, dass das *Trägheitsmoment* bei der *Rotation* die Bedeutung der *Masse* m beim Vergleich mit der kinetischen Energie (*Translation*) hat. Dabei entspricht ω dem v.
- *Der Satz von Steiner für die Verschiebung der Drehachse:* Verschiebt man eine beliebige Drehachse, welche durch den Schwerpunkt geht, um die Distanz d nach außen, so gilt für das Trägheitsmoment der verschobenen Achse:

$$I_d = I_{\text{Schwerpunkt}} + m \cdot d^2.$$

- Zum Beweis des Satzes von Steiner konsultiere man die Literatur oder Skripte für die Integralrechnung.
- Nach *Jakob Steiner*, geboren in *Utzendorf* nahe Burgdorf 1796.
- Wie oben hergeleitet ist $M = I \cdot \alpha_0$ ein *Drehmoment*, $\alpha_0 = const.$ Winkelbeschleunigung bezüglich der gegebenen Drehachse. Vektoriell: $\vec{M} = I \cdot \vec{\alpha}_0$.

Drehimpuls

- Entsprechend zur Definition vom *Impuls* (Impuls (Vektor) $= \vec{p} = m \cdot \vec{v}$) für die Translation kann man für die Rotation um eine Achse den *Drehimpuls* definieren:

$$\text{Drehimpuls (Vektor)} = \vec{L} = I \cdot \vec{\omega} \qquad (I \text{ entspricht } m, \, \omega \text{ entspricht } v).$$

- Es gilt: $\vec{M} = I \cdot \vec{\alpha}_0 = I \cdot \dfrac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} \quad (I = const.) \leadsto \quad \vec{M} = \dfrac{d\,\vec{L}}{dt}$ (Ableitung.)

- Einzelne *Drehimpulse* sind *als Vektoren summierbar* zu einem gesamten Drehimpuls:

$$\vec{L} = I_1 \cdot \vec{\omega}_1 + I_2 \cdot \vec{\omega}_2 + \ldots = \sum_{k=1}^{n} I_k \cdot \vec{\omega}_k.$$

- Für einen einzelnen Punkt gilt:

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} = m \cdot r^2 \cdot \vec{\omega} = m \cdot \underbrace{\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{Grassmann-Produkt} = \vec{r} \times (m \cdot \vec{v}) = \vec{r} \times \vec{p}$$

(Grassmann-Produkt $\leadsto \quad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \circ \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \circ \vec{b})$.)

- Wenn das *System nicht abgeschlossen* ist, so wird das von *außen* angreifende *Drehmoment* gleich der *Drehimpulsänderung pro Zeit:*

$$\vec{M} = \frac{d\,\vec{L}}{dt}.$$

- Wenn von außen ein Drehmomentvektor angreift, sucht sich der schon vorhandene Drehimpulsvektor zum Drehmomentvektor *gleichsinnig parallel zu stellen.* Ein *Beispiel:* Man halte ein sich schnell drehendes Rad beidseitig an der Achse. Dann versuche man die Achse zu drehen. Die Drehimpulsänderung macht ein Drehmoment nötig, das spürbar ist.

- Für den Drehimpuls gilt der Drehimpulserhaltungssatz, analog zum Impulserhaltungssatz. Einheit: $kg\,m^2\,sec^{-1}$. Dimension: $m\,s^2\,t^{-1}$.

Vergleich:

Richtungskonstante Bewegung	Drehbewegung
• $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$	• $\vec{M} = I \cdot \vec{\alpha}$
	$I \cdot \alpha = m \cdot r^2 \cdot \alpha = (m \cdot r) \cdot (r \cdot \alpha) = (m \cdot r) \cdot a = (m \cdot a) \cdot r = F \cdot r = M$
$F = \frac{d\,p}{dt} = \frac{d\,(m \cdot v)}{dt} = m \cdot a$	$M = \frac{d\,L}{dt} = \frac{d\,(I \cdot \omega)}{dt} = I \cdot \alpha$
• v ändert plötzlich $\Rightarrow$ $\frac{d\,v}{dt} = a$	• ω ändert plötzlich $\Rightarrow$ $\frac{d\,\omega}{dt} = \alpha$
$\rightsquigarrow$ a tritt auf	$\rightsquigarrow$ α tritt auf
$\rightsquigarrow$ Kraft $F = m \cdot a$	$\rightsquigarrow$ Moment $M = I \cdot \alpha$
• $E_{kin} = \frac{1}{2}\, m \cdot v^2$	• $E_{kin} = \frac{1}{2}\, I \cdot \omega^2$

3. Trägheitskraft, Äquivalenzprinzip

- Wenn an einem *Körper* mehrere *Kräfte* $\vec{F}_1,\ \vec{F}_2,\ \ldots$ angreifen, so reagiert dieser mit einer *beschleunigten Bewegung* nach der Gleichung:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots = \vec{F}_{total} = m \cdot a \quad \text{oder}$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + (-m \cdot \vec{a}) = 0$$

- $\vec{F}_{total} = -m \cdot \vec{a} := \vec{F}_T$ heißt *Trägheitskraft.* Mit Hilfe dieser Trägheitskraft lassen sich die *Gesetze der Dynamik auf diejenigen der Statik zurückführen* (Gleichgewichtsbedingung). Ebenso bei den Momenten.

- $\rightsquigarrow$ *Gleichgewichtsbedingungen:*

  (a) Summe der Kräfte $\sum_k \vec{F}_k = \vec{0}$.

  (b) Summe der Momente $\sum_k \vec{M}_k = \vec{0}$.

- Die *Trägheitskräfte* sind *nur spürbar für Beobachter*, welche sich *auf den beschleunigten Körpern befinden.* (Beispiel: Starkes Bremsen im Auto, der Beifahrer knallt an die Frontscheibe.)

- Rotierendes Koordinatensystem und *Coriolis-Kraft:*

- **Situation:** Auf einer *gleichmäßig rotierenden Scheibe* bewegt sich eine kleine *Kugel* mit $\vec{v} = const.$ *radial nach außen.* Für einen *außerhalb der Scheibe* fest verankerten *Beobachter*, welcher nur die Scheibe, jedoch nicht ihr Rotieren bemerkt, bewegt sich die Kugel im Idealfall auf einer *geradlinigen Bahn.* Für einen auf der Scheibe *mitrotierenden Beobachter* treibt die Kugel immer mehr entgegen *der Rotationsrichtung zurück.* Die Scheibe rotiert unter ihr weg. Aus dieser Sicht ist die *Bahn der Kugel auf der Scheibe eine gekrümmte Kurve.* Diese *Tangentialbewegung* ist für den Beobachter auf der Scheibe die Folge der Wirkung einer *Trägheitskraft*, die *Coriolis-Kraft.*

- *Rechnung*: Die Bewegungsgeschwindigkeit $\vec{v}$ nach außen ist radial, die *Coriolis-Kraft* $\vec{F}_c$ jedoch zeigt tangential und steht somit senkrecht auf $\vec{v}$ sowie auf $\vec{\omega}$ ($\vec{\omega}$ parallel zur Achse). Für den infolge $\vec{F}_c$ zurückgelegten Weg (Bogenlänge der Auslenkung am jeweiligen Ort der Kugel) gilt: $b = \Delta s = r \cdot \Delta\varphi = (v \cdot \Delta t) \cdot (\omega \cdot \Delta t) = v \cdot \omega \cdot \Delta t^2$. Da Δs somit proportional zu Δt^2 ist, handelt es sich hier um eine gleichmäßig beschleunigte Auslenkung. Damit gilt: $\Delta s = \frac{1}{2} \cdot a_C \cdot \Delta t^2$ mit $a_C = 2\, v \cdot \omega$.

- *Resultat*: $F_c = m \cdot a_C = 2 \cdot m \cdot v \cdot \omega$.

- Vektoriell geschrieben: $\vec{F}_c = m \cdot \vec{a}_C = 2 \cdot m \cdot \vec{v} \times \vec{\omega}$.

- Die *rotierende Scheibe* kann man als *Projektion der Erdoberfläche* in Erdachsenrichtung auf die Äquatorebene auffassen. Auf der Erdoberfläche tritt daher diese Kraft auf der etwas komplizierteren Kugeloberfläche auf.

- Coriolis-Kräfte sind in der *Erdatmosphäre* für gewisse *Winde* verantwortlich.

$\rightsquigarrow$ **Fazit**

- Bei *bewegten Körpern* in der Natur existieren demnach **zwei Arten von Kräften:**

  – *Kräfte*, welche z.B. auf die Schwere, d.h. auf die *Anziehung* durch andere Körper zurückzuführen sind (z.B. *Gravitationskräfte*). Das sind *Kräfte*, deren *Grund* in der *Existenz anderer Körper* liegt (*„wahre Kräfte“*).

– Kräfte, welche ihre *Ursache* in der nicht-*gleichförmigen Bewegung* des Bezugssystems (*Koordinatensystem*) gegen den so genannten „Newton'schen absoluten Raum" haben. Es können aber Bezugssysteme festgelegt werden, in denen keine solchen zusätzlichen Trägheitskräfte auftreten resp. in denen keine Bewegung stattfindet.
– Der Begriff des *„Newton'schen absoluten Raumes"*, also eines *Bezugsystems ohne materielle Körper* zur Festlegung der Kardinalpunkte des Koordinatensystems, ist somit *problematisch*.
– In der *Relativitätstheorie* wird die *Vorstellung* eines *absoluten Raumes* und einer *absoluten Zeit aufgegeben*. Trägheitskräfte und „wahre Kräfte" sind dort äquivalent (*Äquivalenzprinzip*).

4. Allerlei

Bemerkung zu den Gezeiten

- Der *Mond* umkreist in ca. 25 Stunden einmal die Erde. (Mehr als 24 Stunden: Er rotiert ja mit um die Erde!) Alle 12.5 Stunden kommt es an der Meeresküste (je nach Lage in verschiedenem Ausmaß) zu einer *Flut*. Dazwischen kommt die *Ebbe*. Der eine *Flutberg* bildet sich auf der dem Mond zugewandten Seite der Erde, der andere auf der Gegenseite. Liegen Mond, Erde und Sonne auf einer Linie, so entsteht die *Springflut* (hohe Flutberge), dazwischen ist *Nippflut*. Es ist verständlich, dass man die *Ursache* der Flut hauptsächlich in den *Gravitationskräften des Mondes* gesucht hat. Der vorhandene Zusammenhang ist nicht ganz trivial.

- Es ist sofort klar, dass das *Wasse*r des dem Mond am *nächsten stehenden* Meeres vom *Mond stärker angezogen* wird als das weiter entfernte Wasser. Denn die Gravitationskraft nimmt mit der reziproken abnehmenden Distanz quadratisch zu. Auf der Gegenseite der Erde wiederum wird das Wasser durch die Anziehungskraft des Mondes an wenigsten weg gesogen.
  – Gravitationskraft: $F = \gamma \cdot \dfrac{M \cdot m}{r^2}$. (Siehe folgendes Kapitel.)

- Interessant ist hierbei auch die Idee, *dass Ebbe und Flut überall wirken müssen wo Flüssigkeiten vorhanden sind*, wenn auch nicht überall gleich stark. Speziell also müsste in den ortsfesten und lagefixierten *Pflanzen* eine solche Wirkung, quasi einen innere Uhr, vorhanden sein, die bei Neumond und Vollmond die Extremwerte der Beeinflussung erfährt.

Bemerkung zur Spannung in Körpern

- Die diversen Spannungsarten werden in der Festigkeitslehre behandelt. Daher wird hier auf eine umfassende Theorie verzichtet.

- Man unterscheidet in der Festigkeitslehre je nach Situation:

- Zugspannung und Druckspannung. Die Zug- und die Druckrichtung sind einander entgegengesetzt.
- Scherspannung.
- Schubspannung.
- Torsionsspannung.
- usw.

• Bemerkung zur Zug- und Druckspannung in einem Querschnitt eines festen Körpers:
  - Es gilt: Spannung $\sigma = \dfrac{F}{A}$.
  - Oder im Falle der vektoriellen Situation: $\vec{F} = \vec{A} \cdot \sigma$.

• Die in der Statik und Festigkeitslehre benötigten zulässigen Spannungen findet man in Normen und Unterlagen von Materiallieferanten.

2.8 Gravitation

2.8.1 Newtons Theorie, die Vorläufer und die Folgen

1. Weltbilder: Geozentrisches Weltbild

- *Grundlagen eines Weltbilds:* Der „naturwissenschaftliche“ Kenntnisstand, religiöse und philosophische Paradigmen, staatliche, gesellschaftliche, religiöse und politische Zwänge, Denkapparat, Fähigkeiten, begriffliche Entwicklung der Zeitgenossen.
- In alten Kulturen: Z.B. die *„Erde ist eine Scheibe“*. Z.B. im Zentrum ist Babylon (oder die Babylonier). Es gibt diverse andere Vorstellungen, besonders zur Entstehung der Welt, anders je nach Kultur. Quellen: Sagen, Mythen, alte Epen u.s.w.
- *Das geozentrisches Weltbild:*
  - Vertreter: Von *Ptolemaios*, ca. 65 – 160 n. Chr. bis zu *Kepler* (1571–1630).
  - Die *Erde ruht im Mittelpunkt* der Welt. Radius des *Himmelsgewölbes sehr groß* gegenüber der Erde.
  - Das Himmelsgewölbe ist *kugelförmig* (*Sphäre*). Daran sind die*Sterne befestigt.* (Andere Vorstellung: Sterne sind Löcher, durch die das Weltenfeuer außen sichtbar wird.) Das Gewölbe mit den Sternen *dreht sich einmal im Tag* von Osten nach Westen. Ebenso die *Sphären mit 7 Planeten:* Sonne, Mond und den andern Planeten Merkur, Venus, Mars, Jupiter und Saturn. Letztere führen noch zusätzliche Bewegungen aus (*Epizykeln*).
  - Die *Sonnensphäre* läuft am Sonnentag einmal um die Erde.
  - Kreisbahnebene der Sonne: *Ekliptik*. Der Winkel zwischen der Ekliptiknormalen und der Achse der Sonnensphäre ist 23.5^o. Diese *Achse rotiert* mit der Sternensphäre.
  - Die *Sonne* durchläuft in einem *Jahr einmal* das *Himmelsgewölbe* (Jahr: Von Frühlingspunkt zu Frühlingspunkt resp. Frühlings-Äquinoktium).
  - Der *Mond* und die andern *Planeten* bewegen sich in der *Ekliptik*.
  - Der *Mond* ist *epizykelfrei*.
  - Die *Deferenten* der Planeten (Mittelpunkte der Epizykeln) laufen auf *Kreisbahnen* um die Erde.
- *Kopernikanisches* oder *heliozentrisches* Weltbild:
  - Die *Sonne ruht im Mittelpunkt der Welt.*
  - Die *Sterne* sind in sehr *großer Entfernung* auf *der ruhenden Himmelskugel.*
  - Die *Erde ist ein Planet.* Sie dreht ca. auf einer *Kreisbahn* in einem Jahr *um die Sonne.* Sie dreht sich vom Westen nach dem Osten um ihre Achse.
  - Der *Mond* läuft etwa auf einer *Kreisbahn* um die Erde.

  - Ebenso bewegen sich die *anderen Planeten* auf ca. *Kreisbahnen* um die Sonne.
  - Die Bahnebene der Erde heißt *Ekliptik*. Auch die *anderen Planeten* und der *Mond* bewegen sich *in dieser Ebene*.
  - Die *Erde rotiert um eine Achse*, welche in einem *Winkel* von 23.5^o zur Ekliptiknormalen steht.
  - Die *Erdachse behält* ihre *Richtung* bei beim Umlauf um die Sonne.
  - *Epizykeln* sind *keine* mehr notwendig. Die *Erde verliert* ihre *herausragende Stellung*, dafür wird die Theorie einfacher.

- *Keplers Weltbilder:*

  - Kepler versuchte *erst noch*, das *alte Weltbild* in perfektionierter Form *mit dem kopernikanischen* zu *vereinigen*. Die Messungen von *Tycho Brahe* zwangen ihn dann aber, das aristotelische Weltbild fallen zu lassen.
  - *Die drei Gesetze von Kepler:*
    (a) *Ellipsensatz:* Die Planeten bewegen sich auf *Ellipsenbahnen*, in deren je einem gemeinsamen *Brennpunkt* die *Sonne* steht.
    (b) *Flächensatz:* Der jeweilige *Strahl von der Sonne zu einem der Planeten* überstreicht *in gleichen Zeiteinheiten gleiche Flächen* (nach heutiger Einsicht: Konsequenz der Drehimpulserhaltung).
    (c) *Proportionensatz:* Die Umlaufzeiten T_k und die großen Ellipsenhalbachsen a_k von je zwei Planeten verhalten sich nach dem *Gesetz:* $T_1^2 : T_2^2 = a_1^3 : a_2^3$. (Die Zeitquadrate verhalten sich wie die Volumen mit den Halbachsen.)

- Nach Kopernikus folgte eine *lange Zeit* der *Streitereien* der *Vertreter der Wissenschaften* mit den *Vertretern der Glauben*. Bekannt wurden dabei u.a. die Verfahren gegen *Giordano Bruno, Galileo Galilei* und *Johannes Kepler*. Bruno wurde im Jahre 1600 in Rom verbrannt, Galileo Galilei wurde 1992 von der Kirche rehabilitiert usw.

2. Das Gravitationsgesetz

- Newton konnte aus *Keplers Gesetzen ein Gesetz herausrechnen*, das besagt, dass *sich zwei Massen immer anziehen* und auch *wie* sie sich anziehen, also wie die Anziehungskraft zu berechnen ist. Das Gesetz sagt aber *nicht, warum* sich zwei Massen anziehen. Das *bleibt eine Erfahrungstatsache*.

- Wie man das *Gravitationsgesetz einsehen* kann: Dazu betrachten wir zwei Massen m_1 und m_2 , die auf kreisähnlichen Bahnen um die Sonne laufen.

  – Kepler: $T_1^2 : T_2^2 = a_1^3 : a_2^3$.

  – m_1 erfährt die Zentripetalkraft $F_1 = m_1 \cdot \dfrac{v_1^2}{r_1}$.

- m_2 erfährt entsprechend die Kraft $F_2 = m_2 \cdot \frac{v_2^2}{r_2}$.
- Umlaufgeschwindigkeiten: $v_1 = \frac{2 \cdot r_1 \cdot \pi}{T_1}, \qquad v_2 = 2 \cdot \frac{r_2 \cdot \pi}{T_2}$.
- $\rightsquigarrow \quad F_1 = m_1 \cdot \frac{v_1^2}{r_1} = m_1 \cdot \frac{4 \cdot r_1 \cdot \pi^2}{T_1^2}, \qquad F_2 = m_2 \cdot \frac{4 \cdot r_2 \cdot \pi^2}{T_2^2}$.

- $(\frac{F_1}{F_2}) = (\frac{m_1}{m_2}) \cdot (\frac{r_1}{r_2}) \cdot (\frac{T_2^2}{T_1^2}) = (\frac{m_1}{m_2}) \cdot (\frac{r_1}{r_2}) \cdot (\frac{r_2^3}{r_1^3}) \rightsquigarrow \quad (\frac{F_1}{F_2}) = (\frac{m_1}{m_2}) \cdot (\frac{r_2^2}{r_1^2}) = \frac{(\frac{m_1}{r_1^2})}{(\frac{m_2}{r_2^2})}$.

$$\rightsquigarrow \quad \frac{F_1}{F_2} = (\frac{m_1}{m_2}) \cdot (\frac{r_2^2}{r_1^2}) = \frac{(\frac{m_1}{r_1^2})}{(\frac{m_2}{r_2^2})}$$

- Behält man nun $F_2 = const.$, so muss für F_1 alleine gelten:

$$F_1 = C_1 \cdot (\frac{m_1}{r_1^2}), \qquad C_1 = const.$$

- Ebenso: Behält man nur $F_1 = const.$ so muss für F_2 alleine gelten:

$$F_2 = C_2 \cdot (\frac{m_2}{r_2^2}), \qquad C_2 = const.$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{(\frac{C_1 \cdot m_1}{r_1^2})}{(\frac{C_2 \cdot m_2}{r_2^2})} = \frac{(\frac{m_1}{r_1^2})}{(\frac{m_2}{r_2^2})}$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{C_1}{C_2} = 1 \text{ oder } \ C_1 = C_2 = C_{Sonne}.$$

- Somit ist allgemein:
$$F = C_{Sonne} \cdot (\frac{m_{Planet}}{r^2}) = \text{Anziehungskraft zwischen Sonne und Planet.}$$

- Setzt man $C_{Sonne} = G \cdot M_{Sonne}$, so wird $F = G \cdot \frac{M_{Sonne} \cdot m_{Planet}}{r^2}$.
Statt G benützt man oft auch γ.

- Damit wird auch $F = C_{Planet} \cdot (\frac{M_{Sonne}}{r^2})$ mit $C_{Planet} = G \cdot \frac{m_{Planet}}{r^2}$.
Dies besagt, dass die Sonne dieselbe Kraft F auf den Planeten gleichermaßen ausübt wie der Planet auf die Sonne.

- *Gravitationsgesetz.* Allgemein ziehen sich zwei Massen an nach dem Gesetz:

$$F = G \cdot \frac{M_{Sonne} \cdot m_{Planet}}{r^2} \qquad \leadsto \text{ Gravitationsgesetz.}$$

- $\leadsto\ G = \gamma = 6.67\ 10^{-11}\ N\,m/kg^2$ heißt *Gravitationskonstante*.
- Die *Massenanziehung* von *kugelförmigen Körpern* erfolgt so, als ob es sich eine *Punktmasse* mit *demselben Schwerpunkt* handeln würde. Man kann die Masse also als Punktmasse im Kugelmittelpunkt annehmen.

Bewegungsgesetze für Planeten und andere Körper

- Die *Bahnen von Himmelskörpern* bezüglich eines *Zentralgestirns*, welche nicht von dritten Himmelskörpern gestört werden, sind *Kegelschnitte*, also in der Regel *Ellipsen* (*Kreis* = Spezialfall) oder *Parabeln* oder *Hyperbeln*.
- Das *erste Keplergesetz* muss noch etwas *korrigiert* werden: *Zwei Massen* bewegen sich immer *um den gemeinsamen Schwerpunkt*. (Bei einem Paar Sonne - Planet liegt dieser allerdings sehr nahe beim Sonnenschwerpunkt.)
- Aus der Gleichung Zentripetalkraft $= F_Z = m \cdot a_Z = m \cdot (G \cdot \frac{M}{r^2}) = \frac{v^2}{r} = \omega^2\, r,\ \ v =$ Umlaufgeschwindigkeit, kann man die Umlaufgeschwindigkeit um eine Zentralmasse M im Abstand r berechnen. Das ergibt:
$$v = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{r}}, \quad \text{M = Zentralmasse.}$$
- Das *Gravitationsgesetz ist universell:* Es gilt *für beliebige Massenpaare.*
- Ebenso gilt der Flächensatz für beliebige Zentralkräfte.
- Auch das *dritte Keplergesetz* bedarf noch einer *Korrektur*, welche sich durch Rechnung mit dem Gravitationsgesetz und dem gemeinsamen Schwerpunkt ergibt:
$$\frac{a^3}{T^2} = G \cdot \frac{M_{Sonne} + m_{Planet}}{4\,\pi^2}.$$
- Aus dem Gravitationsgesetz folgt, wie man die *Gravitationsbeschleunigung* außerhalb der Erde in einer *gewissen Höhe* über dem Erdmittelpunkt *berechnen* kann:

$$F = G \cdot \frac{m_{Erde} \cdot m_{Gegenstand}}{r^2} = g \cdot m_{Gegenstand} \quad \Rightarrow \quad g = g(r) = G \cdot \frac{m_{Erde}}{r^2}.$$

- $g = g(r)$ nennt man auch *Gravitationsfeldstärke*. Es gilt:
$$\vec{g} = \frac{1}{m} \cdot \vec{F} \text{ (oder } \vec{F} = \vec{g} \cdot m).$$

- Will man die *potentielle Energie* eines Körpers berechnen, welchen man gegen die Erdschwere in eine große Höhe gebracht hat, so muss man berücksichtigen, dass die Formel $E = m \cdot g \cdot h$ nicht mehr genügt, denn die Beschleunigung $g = g(h)$ ist *höhenabhängig.* Man muss daher *kleine Anteile* der Energie, für die $g(h)$ etwa als konstant angenommen werden kann, *aufsummieren.* Will man exakt bleiben, so bedeutet das *integrieren.* Das führt unabhängig von der Form der Verschiebungskurve, auf der man den Körper transportiert, zur *Formel:*

$$W = G \cdot m_{Gegenstand} \cdot m_{Erde} \cdot (\frac{1}{r_{unten}} - \frac{1}{r_{oben}}).$$

- Es ist wichtig, sich ein *Bild über die Dimensionen in unserem Sonnensystem* machen zu können. Folgende Größen schlage man in der Literatur genauer nach:
  - Erdumfang ca. $40\,000\ km$ (Definition des Meters!)
  - Erdradius ca. $6400\ km$
  - Erdmasse ca. $6 \cdot 10^{24}\ kg$
  - Entfernung von der Erde zum Mond ca. $384\,000\ km$
  - Mondradius ca. $\frac{1}{4}\cdot$ Erdradius
  - Mondmasse ca. $\frac{1}{81}\cdot$ Erdmasse
  - Entfernung von der Erde zur Sonne resp. Erdbahnradius (astronomische Einheit) ca. $150\,Millionen\ km = 150 \cdot 10^6\ km$
  - Sonnendurchmesser ca. 100 Erddurchmesser
  - Sonnenmasse ca. 335 000 Erdmassen
  - Titus-Bode'sche Regel $z_{k+1} = (2^k$ resp. $0) \cdot 3 + 4$

2.9 Hydromechanik, Aeromechanik

2.9.1 Punktmechanik

1. Grundlagen: Idealisierte Modelle

- Wenn man in der *Statik* von *Druck* oder *Spannung* redet, so meint man *Kraft pro Fläche*. In unserer Zivilisation kennen die Menschen den Druck vom Reifendruck von Fahrzeugen. Druck ist daher vorerst ein *erfahrungsbasierter Begriff*. In diesem Kapitel wollen wir insbesondere den *Flüssigkeits-* und den *Gasdruck* behandeln und nicht den Drück in festen Körpern im Sinne dem *Spannungsdruck*.

- Auf die *Spannung* speziell *in festen Körpern* wird in diesem Kurs nicht speziell eingegangen, da dieser Begriff zentral in der *Festigkeitslehre* ist und dort sicher ausreichend behandelt wird.

- **Das Modell der idealisierten Flüssigkeit:** Eine *idealisierte Flüssigkeit* ist ein Medium mit folgenden *Eigenschaften:*

  - Sie ist völlig *inkompressibel*.
  - Die *Moleküle berühren sich fast* und *in einer idealen Art*, so dass sie sich *reibungsfrei* gegeneinander verschieben lassen. Diese *Teilchen* nimmt man als *sehr klein* an. Sie werden durch *Zusammenhangskräfte* so zusammengehalten, dass die Flüssigkeit weder verdampft (d.h. sich verflüchtigt) noch kristallisiert (d.h. fest wird).
  - Sie *passt sich der Form des Gefäßes* an und sucht darin ihre infolge der Schwerkraft *potentielle Energie* zu *minimieren*. Unter Schwerkrafteinfluss bildet sie daher (makroskopisch gesehen) eine horizontale Oberfläche aus.

- **Das Modell des idealisierten Gases:** Ein *idealisiertes Gas* ist ein Medium mit folgenden *Eigenschaften:*

  - Es ist *leicht kompressibel*. (Auf Kompression reagiert es mit *Druck*.)
  - Die *Moleküle* besitzen im Vergleich zu ihrem Abstand zu den Nachbarn eine verschwindet *kleine Ausdehnung*.
  - Ihre *Wechselwirkung* mit andern Molekülen besteht aus vollkommen *elastischen Stößen*.
  - Auf die *Wände* eines einschließenden Gefäßes reagiert das Medium mit *Druck*.

- Den *Druck bei Flüssigkeiten und Gasen* definieren wir wie in der Statik als *senkrechte Kraft pro Fläche*, auf die die Kraft wirkt. Die Fläche kann ein Stück Gefäßoberfläche sein oder auch eine Querschnittsfläche im Medium.

  - *Formel:* $\text{Druck} = \dfrac{\text{Betrag der Druckkraft}}{\text{Flächengröße}} \rightsquigarrow \; p = \dfrac{\Delta F}{\Delta A}$.

- Vektoriell schreibt man die Gleichung so: $\Delta\vec{F} = p\cdot\Delta\vec{A}$, wobei für die Vektoren gilt: $\vec{F} \,||\, \vec{A}$ resp. $\vec{F} = \vec{F}_A =$ Projektion von $\vec{F}$ auf $\vec{A}$.
- Der *Druck* p ist somit ein *Skalar*.
- *Einheiten des Drucks:* $1\ N/m^2 = 1\ Pa = 10^{-5}\ bar$, $\quad 1\ bar = 10^5\ N/m^2$. Pa bedeutet *Pascal*. Ein *bar* ist ungefähr der mittlere Druck auf Meereshöhe. Wetterbericht: $1\ hPa$ (Hektopascal) $=\ 100\ Pa = 10^{-3}\ bar = 1$ Millibar. *Normaldruck* (Labor!) $= 1013\ hPa$.

2. Statik: Hydrostatik, Aerostatik

- Für den Moment *nehmen wir an*, dass in einer gegebenen *eingeschlossenen Flüssigkeit* oder einem eingeschlossenen *Gas keine Schwerkraft* wirkt. Beide sein *ruhend*. Wir drücken irgendwo mit einem dicht geführten Kolben in das Gefäß, sodass sich anderswo ein ebensolcher Kolben nach außen bewegt. Dann muss die *Energiegleichung* gelten: $W_1 = W_2 \;\Rightarrow\; F_1\cdot s_1 = F_2\cdot s_2$. Für die dabei beteiligten inkompressiblen Flüssigkeitsvolumina gilt dann $V_1 = V_2 \;\Rightarrow\; A_1\cdot s_1 = A_2\cdot s_2$. Bei Gasen sind die beteiligten Volumina kompressibel, jedoch beide in gleicher Weise, sodass hier gilt: $V_1 = V_2 \;\Rightarrow\; A_1\cdot s_1 = A_2\cdot s_2$. Dividiert man die beiden gewonnenen Gleichungen durcheinander, so folgt daraus der
  - *Satz von Pascal:* $\dfrac{F_1}{A_1} = \dfrac{F_2}{A_2} \;\Rightarrow\; \qquad p_1 = p_2.$
- Anders ausgedrückt: *In idealen ruhenden Flüssigkeiten und Gasen herrscht im Innern überall der gleiche Druck auf die Gefäßwand.*
- Daher ist es *möglich*, mittels in Zylindern passgenau gelagerter Kolben, Rohren und Schläuchen *Kräfte* über Distanzen *flexibel* zu *übertragen*.
- **Das Gesetz von Boyle-Mariotte für Gase:** Ein Gas wird mit Hilfe eines Kolbens so zusammengepresst, dass dabei bei diversen Kolbenpositionen der Druck im Gas sowie sein Volumen gemessen werden können. Zudem soll die *Kompression isotherm* verlaufen, d.h. das Gas soll sich bei der Kompression nicht erwärmen. Dann findet man den *Zusammenhang:*
  - Druck mal Volumen = konstant, $\quad\rightsquigarrow\quad p\cdot V = const.$
    - ($\rightsquigarrow$ *Gesetz von Boyle-Mariotte für Gase*).
  - Wenn also p resp. F bei gleichem A zunimmt, so nimmt V resp. s bei konstantem Kolbendurchmesser entsprechend ab.
  - $p\cdot V = \dfrac{F}{A}\cdot V = F\cdot\dfrac{s\cdot A}{A} = F\cdot s = W = E_{pot}$ bleibt also konstant, was nach dem *Energiesatz* auch zu erwarten ist.
  - Da gilt: $m = V\cdot\rho = const. \;\Rightarrow\; V = \dfrac{m}{\rho} = \dfrac{const.}{p} \;\Rightarrow\; p = const.\cdot\rho$

    $\rightsquigarrow$ *Bei isothermer Kompression ist der Druck proportional zur Dichte.*

- Nun zum **Fall, wo die Einwirkung der Schwerkraft auf den Druck mit einbezogen** wird. Zuerst betrachten wir eine **Flüssigkeit**.

  Frage: Welche Last und damit *welchen Druck erzeugt* eine *Flüssigkeitssäule* mit dem *Querschnitt A in der Tiefe h* in Bezug auf die dortige *Querschnittsfläche A*?

  – Es gilt: $F = m \cdot g = A \cdot h \cdot \rho \cdot g$. Damit berechnet man der Druck wie folgt:

  $$p = \frac{F}{A} = \rho \cdot g \cdot h.$$

  – *Der durch die Schwerkraft verursachte Druck (Schweredruck) ist demnach proportional zur Tiefe.*

  – Der *Gesamtdruck* bezüglich einer Fläche ist die Gesamtkraft pro Fläche. Da sich die Kräfte addieren, addieren sich demnach auch die Drücke. *Resultat:* $p_{gesamt} = p_0 + \rho \cdot g \cdot h$, wobei p_0 der oben erwähnte *Kompressionsdruck* usw. ist.

  $$p_{gesamt} = p_0 + \rho \cdot g \cdot h$$

  – Dass der *Gewichtsdruck einer Flüssigkeit* in meinem *Gefäß* daher *nur von der Höhe des Gefäßes*, von der *Dichte* und von der örtlichen *Fallbeschleunigung* sowie vom *Aussendruck abhängt* und *nicht* von der *Form* des Gefäßes, nennt man das *hydrostatische Paradoxon.* Man denke dabei an kommunizierende Gefäße oder auch an artesische Brunnen.

- Bei **Gasen** sind die *Verhältnisse nicht so einfach.* Z.B. nimmt die *Dichte* ρ *der Luft* bekanntlich *nicht linear mit der Höhe h ab.* Sei der *Luftdruck am Boden* gleich p_0 und sei die *Temperatur* in einer Luftsäule über dem Boden etwa *konstant.*

  – In einer horizontalen Schicht in der Distanz $h = \Delta s$ (etwas weiter oben) ist dann der Druck $p_{1,h} = p_0 - \rho_0 \cdot g \cdot h = p_0 \cdot (1 - \rho_0 \cdot g \cdot \frac{h}{p_0})$.

  – Aus Boyle-Mariotte folgt: $p \cdot V = \frac{p \cdot m}{\rho} = const.$ Mit $m = const.$ wird somit auch $\frac{p}{\rho} = const.$, also auch $\rho_0 \cdot \frac{g}{p_0} = \rho \cdot \frac{g}{p} = const.$ Damit erhalten wir: $p_{1,h} = p_0 - \rho_0 \cdot g \cdot h = p_0 \cdot (1 - const. \cdot h)$.

    Dabei ist die Konstante $const. = \frac{\rho_0 \cdot g \cdot h}{p_0}$.

  – Wenden wir die Betrachtung nun statt auf das Niveau 1 auf des Niveau 2 an, so vertauschen sich die Rollen. Man erhält:

    ∗ $p_{2,h} = p_1 \cdot (1 - const. \cdot h) = p_0 \cdot (1 - const. \cdot h)^2$.

  – Entsprechend ergibt sich für das Niveau n an Stelle des Niveaus 2:

    ∗ $p_{n,h} = p_{n-1} \cdot (1 - const. \cdot h) = p_0 \cdot (1 - const. \cdot h)^n$. Anders geschrieben:

    * $p_{n,h} = p(n \cdot \Delta h) = p(h) = p_0 \cdot (1 - \rho_0 \cdot g \cdot \frac{\Delta h}{p_0})^n$. Mit $h = n \cdot \Delta h$:
    * $p(h) = p_0 \cdot (1 - \rho_0 \cdot \frac{g}{p_0} \cdot (\frac{h}{n}))^n \Rightarrow p_0 \cdot e^q, \quad q = -\rho_0 \cdot g \cdot \frac{h}{p_0}$, wie bei der Herleitung der Beziehung $(1 + \frac{1}{n})^n \to e$.
  - Daraus ergibt sich die *Barometrische Höhenformel:*
    * $$p(h) = p_0 \cdot e^q \quad \text{mit } q = -\rho_0 \cdot g \cdot \frac{h}{p_0}.$$

- *Archimedes* in der Badewanne – oder *heureka*, der **hydrostatische Auftrieb:** Jeder Schwimmer weiß es: Legt er sich regungslos im Wasser auf den Rücken, so reicht seine Nase aus dem Wasser und er kann atmen. Er schwimmt ohne sein Zutun! Taucht man einen anderen festen Körper in eine Flüssigkeit und misst man dort sein Gewicht mit der Federwaage, so ist der Körper leichter als draußen an der Luft. Seine Gewichtskraft wird kleiner, weil sich da jetzt noch eine Gegenkraft manifestiert: Die *Auftriebskraft* F_A. Für die Gewichtskraft im Wasser gilt somit: $F_{GW} = F_G - F_A$. Wie groß ist F_A?

  - Dazu ein *Gedankenexperiment:* Man stelle sich vor, ein eingetauchter Körper K werde ersetzt durch einen exakt formgleichen *Ersatzkörper* K_E, welcher ganz *aus der umgebenden Flüssigkeit gemacht* ist. Jener sei nur abgegrenzt nach außen durch eine äußerst dünne, umgebende gewichtslose Hülle, welche ihm die Form gibt. Dann erfährt der Körper K_E genau so wie die restliche Flüssigkeit im Gefäß *keinen speziellen Auftrieb.* Es gilt daher: $F_{GW} = F_G - F_A = 0$. Das heißt: Für den Körper K_E aus Flüssigkeit gilt $F_G = F_A$. F_A kann aber *nur von der Form und nicht vom Körperinnern abhängen*, da F_A außen am Körper angreift. *Die Auftriebskraft ist damit so groß wie das Gewicht des Ersatzkörpers* K_E .
  - $\rightsquigarrow$ *Auftriebskraft* $F_A = V \cdot \rho_{\text{Flüssigkeit}} \cdot g$. *In Worten:*
  - *Das Prinzip des Archimedes:* Ein fester Körper, welcher sich eingetaucht in einer ruhenden Flüssigkeit in einem Schwerefeld (z.B. dem Gravitationsfeld der Erde) befindet, erfährt eine Auftriebskraft F_A durch seinen Schwerpunkt vertikal nach oben. Der *Betrag von* F_A ist *so groß wie das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit.*
  - Das Prinzip des Archimedes *gilt sinngemäß auch für Körper*, welche sich *in umgebenden Gasen* befinden. (Ballonfliegen!):

2. Strömungslehre, Dynamik, Kinetik

- Wir betrachten jetzt an der Stelle von ruhenden idealen Flüssigkeiten und Gasen solche, welche *strömen*, d.h. solche in welchen die Teilchen nach einem gemeinsamen Prinzip ihren Ort verändern. Dazu zuerst die notwendigen *Begriffe* (*Strömung* bezieht sich dabei immer auf ein Medium):

- Eine *Strömung* heißt *stationär*, wenn sie sich mit der Zeit nicht verändert, d.h. wenn die Strömungsgeschwindigkeit v, der Druck p, die Dichte ρ usw gleich bleiben.
- Eine Strömung heißt *laminar*, wenn *keine Turbulenzen* (Verwirbelungen oder Querströmungen) auftreten. Das strömende Medium strömt in *Schichten, die sich nicht vermischen*. Ist die Geschwindigkeit *konstant*, so ist die laminare Strömung *stationär*.
- Eine Strömung heißt *wirbelfrei*, wenn kein genügend kleines irgendwo in die Strömung gesetztes Floß sich zu drehen beginnt.
- Wenn man in eine Strömung kleine Verunreinigungen streut (z.B. Aluminiumspähne), so wird an der Struktur der durch die Verunreinigungen gebildeten Muster das *Strömungsbild* sichtbar.

• Das *Strömungsbild* kann man als *Geschwindigkeitsvektorfeld* begreifen: In jedem Punkt wir die Richtung des Geschwindigkeitsvektors anhand der Tangenten an die sich zeigenden *Strömungslinien* oder *Stromlinien* sichtbar. Es gilt: *Je dichter die Stromlinien, desto größer die Geschwindigkeit.*

• Das **hydrodynamische Paradoxon:**

- Strömt ein inkompressibles Medium in einem Strömungsrohr mit sich veränderndem Querschnitt, so müssen durch alle Querschnitte in gleichen Zeiteinheiten gleiche Volumina strömen. Wird der *Querschnitt enger*, so muss das *durchströmende Volumen länger werden*, d.h. die *Geschwindigkeit wird größer*.
- Bringt man über einem durchsichtigen Strömungsrohr mit sich veränderndem Querschnitt, in welchem eine Flüssigkeit strömt, nach oben gerichtete *Steigeröhren für die Flüssigkeit* an, anhand welcher man den *Druck beurteilen kann*, so stellt man fest: *Je kleiner der Querschnitt und damit desto größer die Geschwindigkeit ist, desto kleiner ist der ablesbare Druck in der strömenden Flüssigkeit.*
- Verfährt man gleich mit einem entsprechenden *Strömungsrohr für ein Gas*, indem man aber hier die *Steigrohre nach unten* richtet und unten in eine Flüssigkeit eintaucht, so stellt man analog fest: Bei engeren Querschnitten steigt die Flüssigkeit höher. *D.h. je enger der Querschnitt, desto größer ist die Geschwindigkeit und desto kleiner ist dort der Druck im strömenden Gas.*

• Auf diesem Prinzip beruht die *Wasserstrahlpumpe* oder auch der *dynamische Auftrieb* am *Flügel* des *Flugzeugs*.

- Der *Flugzeugflügel* (auch das Rotorblatt eines Hubschraubers) hat das charakteristische, nach *oben gekrümmte Stromlinienprofil* in der Art einer nach oben gekrümmten Keule resp. eines fallenden Tropfens.

* Die *Keulen-* oder *Tropfenform* sorgt dafür, dass die entstehenden *Wirbel minimiert* werden, dass also hier nicht Energieverluste erzeugt werden, indem noch kinetische Energie in das Verwirbeln der Luft investiert wird.
* Die *Biegung* des Profils sorgt dafür, dass auf der Flügeloberseite die Strömungsdistanz der vorbeiströmenden Luft größer ist als unten, dass damit also die *Stromlinien oben enger werden* und dass diese zugleich unterhalb des Flügels weiter werden. Damit wird *unten* ein *Überdruck* und *oben gleichzeitig ein Unterdruck* erzeugt. Dadurch entsteht auf den Flügel eine *resultierende Kraft nach oben*, die bei genügend großer Geschwindigkeit das Flugzeug in der Luft zu tragen vermag. *Daher kann ein Flugzeug fliegen.*

- Bei *Fahrzeugen* ist heute oft die Rede vom **Strömungswiderstand**. Was versteht man darunter?
  - Der *Strömungswiderstand* (z.B. bei einem Fahrzeug) ist eine Kraft, welche sich infolge des umgebenden Mediums manifestiert, welches ja weg geschoben, also beschleunigt werden muss.
  - In der Formel für diesen Widerstand findet man in der Literatur eine Erfahrungskonstante c_W, der *Widerstandsbeiwert*, welcher von der Fahrzeugform abhängt und sich daher allgemeineren theoretischen Betrachtungen entzieht.
  - *Formel: Widerstandskraft* $F = \frac{1}{2} \cdot c_W \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$. D.h. die *Kraft nimmt mit der Geschwindigkeit im Quadrat zu.* Die Widerstandskraft hätte eine Bremsung des Fahrzeugs zur Folge, wenn der Fahrzeugantrieb nicht eine Gegenkraft zur Kompensation erzeugen würde.
  - Man kann jetzt aber trotzdem eine *Plausibilitätsüberlegung* anstellen um die *Formel qualitativ zu verstehen.* Wir betrachten dazu ein Fahrzeug zusammen mit der Luftsäule, welche das Fahrzeug in einer Zeit Δt durchfahren wird. Die Luftsäule hat eine Masse $m = m_L$ sowie ein mittlere Geschwindigkeit $v = v_L$, welche praktisch etwa 0 gesetzt werden kann. Diese Luftsäule erzeugt infolge ihrer Impulsänderung beim elastischen Zusammenstoss mit dem Fahrzeugfront-Querschnitt eine Kraft. Denn es gilt:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \;\Rightarrow\; F = \frac{d\,p}{dt} = \frac{d\,(m \cdot v)}{dt}$$

$$\leadsto \quad F = \frac{d\,m}{dt} \cdot v + m \cdot \frac{d\,v}{dt} = \frac{d\,(\rho \cdot A \cdot s)}{dt} \cdot v + \frac{m \cdot dv}{dt}$$

$$\leadsto \quad F = \rho \cdot A \cdot \frac{d\,s}{dt} \cdot v + m \cdot \frac{d\,v}{dt} \quad \text{mit} \quad m \cdot \frac{d\,v}{dt} = m_L \cdot const.$$

$$\leadsto \quad F = \rho \cdot A \cdot v \cdot v + m \cdot const. = \rho \cdot A \cdot v^2 + m_L \cdot const.$$

$$\text{Dabei ist} \quad m_L = const. \cdot \rho \cdot A \;\Rightarrow\; F = \rho \cdot A \cdot (v^2 + const.).$$

Andererseits muss infolge der Energiebilanz gelten: $F \cdot s = \frac{1}{2} \cdot m_L \cdot v_L^2$.

Hier sind F und v_L^2 konstant resp. $F = const. \cdot v_L^2$. (Ebenso s und m_L).

Nun ist es vernünftig anzunehmen, dass für den Impuls eines Luftteilchens auch gilt: $\Delta p_{\text{Luftteilchen}} = m_{\text{Luftteilchen}} \cdot \Delta v_L = const. \cdot v \;\Rightarrow\; F = \rho \cdot A \cdot (v^2 + const.) = const. \cdot v^2$.

$\rightsquigarrow \quad F = const. \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$. Die Konstante erweist sich im Experiment als $\frac{1}{2} \cdot c_W$.

- **Die Bernoulli-Gleichung:** Wir wollen für die *Strömung* einer *Flüssigkeit durch* ein *Rohr,* welches seinen *Querschnitt* und seine *Höhe* über dem *Boden ändert*, ein quantitatives *Gesetz* herleiten. Dazu benützen wir, dass die Energie $\Delta E_{kin} + \Delta E_{D+pot}$ einer abgegrenzten Flüssigkeitsmasse Δm mit dem Volumen ΔV konstant bleibt. Wir betrachten zwei Orte Ort_1 und den Ort_2 mit $\Delta E_{kin,1}$ und $\Delta W_{D+pot,1}$ sowie $\Delta E_{kin,2}$ und $\Delta W_{D+pot,2}$. ΔW_{D+pot} ist die Arbeit, welche durch die Gravitations- und die Druckkräfte geleistet wird. Dann muss infolge der Energiebilanz gelten:
  - Die Differenz der kinetischen Energie ist gleich der Differenz der potentiellen Energie: $\Delta E_{kin,1} + \Delta W_{D+pot,1} = \Delta E_{kin,2} + \Delta W_{D+pot,2}$.
    - Daraus folgt dann: $\Delta \mathrm{E}_{kin,1} - \Delta \mathrm{E}_{kin,2} = \Delta\ \mathrm{W}_{D+pot,2} - \Delta\ \mathrm{W}_{D+pot,1}$. Anders geschrieben:
    - $\Delta W_{D+pot} = \frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \Delta V \cdot (v_1^2 - v_2^2)$.
    - $\Delta W_{pot} = \Delta W_{pot,2} - \Delta W_{pot,1} = \Delta m \cdot g \cdot \Delta h = \rho \cdot \Delta V \cdot g \cdot (h_2 - h_1)$.
    - $\Delta W_D = p \cdot A \cdot \Delta s = p \cdot \Delta V \quad \text{mit} \quad \Delta V_2 = \Delta V_1$.
    - $\Delta W_D = \Delta W_{D,2} - \Delta W_{D,1} = p_2 \cdot \Delta V - p_1 \cdot \Delta V = (p_2 - p_1) \cdot \Delta V$.
    - $\Delta W_{D+pot,2} - \Delta W_{D+pot,1} = (p_2 - p_1) \cdot \Delta V + \rho \cdot \Delta V \cdot g \cdot (h_2 - h_1)$.

  $\rightsquigarrow \quad \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \Delta V \cdot (v_1^2 - v_2^2) = (p_2 - p_1) \cdot \Delta V + \rho \cdot \Delta V \cdot g \cdot (h_2 - h_1)$.
- Hier kann ΔV noch herausgekürzt werden.

$$\rightsquigarrow \quad \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v_1^2 - v_2^2) = (p_2 - p_1) \cdot + \rho \cdot g \cdot (h_2 - h_1)$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 + p_1 + \rho \cdot g \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 + p_2 + \rho \cdot g \cdot h_2 = const.$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 + p + \rho \cdot g \cdot h = const.$$

Diese **Bernoulli–Gleichung** ist gleichbedeutend mit dem **Energieerhaltungssatz**. Multipliziert man nämlich die Gleichung $\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 + p + \rho \cdot g \cdot h = const.$ umgekehrt mit einem konstanten $\Delta V = \Delta A \cdot \Delta H \neq 0$, so ergibt sich in bijektiver Weise:

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \Delta V \cdot v^2 + p \cdot \Delta V + \rho \cdot g \cdot \Delta V \cdot h = const. \cdot \Delta V = const._1 \qquad \text{und damit:}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot v^2 + \frac{\Delta F}{\Delta A} \cdot (\Delta A \cdot \Delta H) + g \cdot \rho \cdot \Delta V \cdot h = const._1 \qquad \text{und damit:}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} \cdot \Delta m \cdot v^2}_{E_{kin}(v)} + \underbrace{\Delta F \cdot \Delta H}_{E_{Druck}(\Delta F)} + \underbrace{\Delta m \cdot g \cdot h}_{E_{pot}(h)} = const._1 \qquad \rightsquigarrow \text{ Energiesatz}$$

- *Bernoulli-Gesetz:* In einer *stationären Strömung einer idealen Flüssigkeit* strömt jedes Teichen *nach dem Gesetz*

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 + p + \rho \cdot g \cdot h = const.$$

- Am Bernoulli-Gesetz kann man nun *studieren was passiert, wenn man Parameter ändert*. Vergrößert man z.B. in einem gegebenen Rohr v, dann kann das System nur durch eine Veränderung von p reagieren, da die andern Parameter fix sind. Damit *wird bei größerer Geschwindigkeit der Druck kleiner*. (Beispiel: *Flugzeugflügel*, Kraft nach oben.)

- Aus der Bernoulli-Gleichung kann man *Ausströmungsgesetze* für diverse Situationen *gewinnen:* Z.B. das *Bunsen'sche Ausströmungsgesetz* für den Fall, dass $p_2 - p_1$ viel größer ist als der Gewichtsdruck. Oder das *Toricelli'sche Ausströmungsgesetz* für den Fall, dass $p_2 - p_1$ viel kleiner ist als der Gewichtsdruck.

  - Toricelli'sches Ausströmungsgesetz:

$$p_1 \approx p_2, \;\; v_1 \approx 0 \;\; \Rightarrow \;\; v_2 = \sqrt{2\,g\,|h_1 - h_2|}$$

  - Bunsen'sches Ausströmungsgesetz:

$$h_1 \approx 0, \;\; v_1 \approx 0, \;\; p_1 \approx p_2 \;\; \Rightarrow \;\; v_2 = \sqrt{2\,g\,|h_2|}$$

2.10 Aus der Wärmelehre

2.10.1 Wärme, Temperatur, Thermodynamik

1. Begriffe und Grundlagen

- Die *Temperatur* ist den meisten Menschen bei uns eine Erfahrungstatsache. Man kennt sie vom Thermometer, vom Fieber messen, z.B. von der Celsius-Skala und weiß, dass dort $0^o\ C$ mit dem *Gefrierpunkt des Wassers* übereinstimmt sowie $100^o\ C$ mit dem *Siedepunkt des Wassers*. Dazwischen ist die Gradskala *linear eingeteilt*. An den Quecksilberthermometern sieht man, dass die Temperatur mit Hilfe der Volumenzuname einer Quecksilbersäule in einem dünnen Rohr gemessen wird. Die Vorstellung der Temperatur ist also via Volumenzunahme an der Längenmessung angehängt. Doch die Ursache einer Temperatur scheint damit noch nicht gefasst zu sein, denn die Eckpunkte der genannten Skala ist ursprünglich mit Hilfe der Übergänge der Aggregatszustände des Wassers geeicht worden. Mit der Länge alleine können wir die *Temperatur* daher nicht erfassen. Denn diese *erfasst* resp. berührt den *Zustand (Aggregatszustand) von Stoffen*, damit also das Stoffliche, das Materielle und nicht nur eine Länge. *Wir halten fest:*

- **Temperatur:** Die *Temperatur* ist eine *Zustandsgröße* und damit eine *neue physikalische Größe*, die nicht mit Hilfe der Größen etwa der Mechanik definiert werden kann. Sie ist *eine* der *sieben Basisgrößen* im *SI–System* (*internationales Einheitensystem*). Wir *messen* hier die *Temperatur* (Bezeichnung: ϑ, Buchstabe *theta*) mit Hilfe der *Celsius-Skala* bei *Normaldruck*. Gebräuchlich ist *auch* die *Kelvin-Skala*, eine verschobene Celsius-Skala, welche mit dem *absoluten Nullpunkt* beginnt: $0^o\ K$ entspricht $-273.15^o\ C$.

- **Wärme (oder Kälte als Abwesenheit von Wärme):** Die *Wärme* ist im Gegensatz zur Temperatur eine *Energieart*, welche aber mit der Temperatur zusammenhängt. Als *Wärme* bezeichnet man *die auf Grund von Temperaturdifferenzen übertragene Energie* (*Wärmeenergie*).

- *Wärme* kann man auch als *thermische Bewegungsenergie der Moleküle* eines Körpers auffassen. Wärme ist also quasi *kinetische Energie* von vielen sich wild nebeneinander bewegenden Molekülen. Wir halten daher fest:
  - Die *Atome* und *Moleküle* eines Stoffes (einer Masse, eines Körpers) vollführen *ständige ungeordnete* Bewegungen. Man nennt sie *thermische Bewegungen der Atome und Moleküle*.
  - Die *Temperatur* eines Körpers ist auch ein *Maß für diese thermische Bewegung*.

- **Wärmedehnung:** Die *Erwärmung eines Körpers* führt bekanntlich in der Regel zu einer Ausdehnung des Körpers. Bei *festen Körper* interessiert dabei aus verständlichen Gründen die *lineare Ausdehnung* in einer festgelegten Richtung, bei *flüssigen und gasförmigen Körpern* jedoch vor allem die *Volumenausdehnung*. Die

Temperatur nach den gängigen Skalen ist so definiert worden, dass die Größe der Ausdehnung der Körper, welche zur Definition verwendet worden sind, proportional zur Temperatur verläuft. Dieses Verhalten findet man, von Ausnahmen (*Anomalie* genannt), abgesehen, bei den meisten andern Körpern wieder.

- Die *Formel* für die *lineare Ausdehnung* mit der Temperatur bei *festen Körpern:* $\Delta l = l \cdot \Delta\vartheta \cdot \alpha$.
  - α = linearer Wärmeausdehnungskoeffizient, ϑ = Temperatur.
- Die *Formel* für die *Volumenausdehnung* mit der Temperatur bei *Flüssigkeiten und Gasen:* $\Delta V = V \cdot \Delta\vartheta \cdot \gamma$,
  - γ = Volumenausdehnungskoeffizient, ϑ = Temperatur.
- *Interpretation der Wärmeausdehnung eines Körpers:* Diese Ausdehnung ist die *Folge der thermischen Bewegung* (*kinetische Energie*) der *Moleküle*, welche in Wechselwirkung mit den anziehenden Molekularkräften steht. Die Ausdehnung ist *umso größer*, je *schwächer* die *intermolekularen Anziehungskräfte* sind (Gase!) und / oder je *stärker* die *thermischen Bewegung* ist.
- Die *Anomalie* des *Wassers:* Beim Abkühlen des Wassers *schrumpft* das *Volumen* bis die Temperatur $4^o\ C$ erreicht hat. *Dann dehnt sich das Wasser bis zu* $0^o\ C$ *wieder aus.* Der Grund liegt in der Geometrie Molekülstruktur (siehe Literatur). Das ist sehr *wichtig für das Leben* im Wasser. Wasser ist bei $4^o\ C$ am schwersten (Volumen am kleinsten) und sinkt daher auf den Seeboden. Somit kann ein See in der Regel nicht von unten her durchfrieren, wenn die Erde genügend Wärme nachliefert..
- *Anwendungen und interessante Phänomene:* Wärmeströmung (*Konvektion*), Windsysteme, Meeresströmungen, Spannungen und Verformungen bei Gebäuden und Apparaten, usw. So muss bei Konstruktionen vielfach darauf geachtet werden, dass Materialien mit ähnlichem *Wärmeausdehnungskoeffizient* zusammengebaut oder das Dehnungspufferzonen eingebaut resp. eingeplant werden.

2. Gasgesetze

- Solche Gesetze sind eine wichtige Basis für *Wärmekraftmaschinen.*
- Nochmals zum *Modell* eines *idealen Gases:*
  - Für ein *ideales Gas* fordern wir folgende *Eigenschaften:*
    - Es besteht aus *frei beweglichen Teilchen.*
    - Die Teilchen werden als *Massenpunkte* verstanden: Sie sind volumenlos.
    - Die *Wechselwirkungskräfte* zwischen den Teilchen werden *auf 0 gesetzt.*
    - *Stöße* gegen Hindernisse sind immer vollkommen *elastisch.*

- **Die Berechnung des Gasdrucks in einem Behälter:**
  - **Achtung:** Nachfolgend schreiben wir für den Impuls p auch das Symbol I. (Der Impuls p könnte ja mit dem Druck verwechselt werden — ebenso der Impuls I mit dem Strom I. Bei fixen Symbolen sind eben Verwechslungsmöglichkeiten gegeben: Z.B. das Maß Meter m und die Masse m. Was es jeweils ist, sollte daher aus dem Kontext entnommen werden können.)
  - Da der *Druck nicht von der Behälterform abhängig* sein kann (kommunizierende Gefäße!), dürfen wir uns den Behälter als *Würfel* vorstellen. Das verwendete Koordinatensystem sei parallel zu den Würfelkanten mit dem Ursprung in der Würfelmitte. Damit dürfen wir alle bezüglich der Gasteilchen betrachteten Vektoren ($\vec{a}$, $\vec{v}$, $\vec{F}$, $\vec{I}$) in *achsenparallele Komponenten zerlegt* denken. Die Rechengesetze für Vektoren gelten entsprechend immer auch für die Komponenten und umgekehrt. *Daher genügt es, ausschließlich mit diesen Komponenten zu rechnen resp. zu argumentieren.*
  - Ein Würfel hat *6 Innenwände*. In unserem Modell stoßen die Moleküle auf diese Wände, wobei wegen der Komponentenzerlegung der Vektoren immer alle *Stöße senkrecht* erfolgen.
  - Wir nehmen weiter an, dass *alle Moleküle dieselbe Masse* m haben.
  - Stößt ein Molekül, das vor dem Stoss den Impuls $\vec{I_v} = m \cdot v$ hatte, gegen die Wand, so hat es infolge der Elastizität des Stoßes nachher den *Impuls* $I_n = -m \cdot v$. Die *Impulsänderung* wird somit $\Delta I = I_n - I_v = -m \cdot v - m \cdot v \Rightarrow \Delta I = -2 \cdot m \cdot v$.
  - Wir betrachten das *Zeitintervall* Δt. In diesem Intervall stoßen *alle* jene *Moleküle* auf die Wand, welche sich *im Volumen* $\Delta V = \Delta s \cdot A$ befinden und bei denen $\vec{v}$ in Richtung Wand gerichtet ist. $\Rightarrow\ \Delta V = v \cdot \Delta t \cdot A$.
  - Wenn sich im Würfel N Moleküle befinden, so haben wir in ihm die *Teilchendichte* $\mu = \frac{N}{V}$. Im Teilvolumen ΔV nahe der Wand befinden sich daher $\Delta V \cdot \mu = \Delta V \cdot \frac{N}{V} = v \cdot \Delta t \cdot A \cdot \frac{N}{V}$ Teilchen, von denen 1/6 auf die Wand stößt: $N_{\text{Wand}} = \frac{1}{6} \cdot v \cdot \Delta t \cdot A \cdot \frac{N}{V}$. Alle diese Teilchen erfahren eine Impulsänderung von $\Delta I = -2 \cdot m \cdot v$. Daher wird die *totale Impulsänderung* bezüglich *einer Wand* im *Zeitintervall* Δt dann:

$$|\Delta I_{tot}| = 2 \cdot m \cdot v \cdot \frac{1}{6} \cdot v \cdot \Delta t \cdot A \cdot \frac{N}{V} = \frac{1}{3} \cdot m \cdot v^2 \cdot \Delta t \cdot A \cdot \frac{N}{V}$$

- Nun ist aber $\frac{\Delta I}{\Delta t} = F$ und $\frac{F}{A} = p$.
  - $\leadsto$ $p = \frac{\left(\frac{|\Delta I_{tot}|}{\Delta t}\right)}{A} = \frac{1}{3} \cdot m \cdot v^2 \cdot \frac{N}{V}$. Damit ist der *Gasdruck berechnet!*

- $\leadsto$ **Gasdruckformel:** $p = \frac{1}{3} \cdot m \cdot v^2 \cdot \frac{N}{V} = \frac{2}{3} \cdot \frac{N}{V} \cdot \frac{m \cdot v^2}{2}$.
  - $\frac{m \cdot v^2}{2}$ ist die *mittlere kinetische Energie der Moleküle* und der Quotient $\frac{N}{V}$ ist die *Teilchendichte* μ. Man kann daher auch schreiben (*andere Art der Formel*):
- $\leadsto$ **Gasdruckformel:** $p = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot E_{\text{kin, mittel}}, \quad p \cdot V = \frac{2}{3} \cdot N \cdot E_{\text{kin, mittel}}$.
- Da $E_{\text{kin, mittel}}$ ein *Maß für die Temperatur* ϑ ist, kann man damit postulieren: $\Delta p = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot const. \cdot \Delta\vartheta$ d.h. $\Delta p = const. \cdot \Delta\vartheta$.
- *Energie* kann *minimal* auch 0 werden. Wenn das geschieht, so ist der *Druck auch* 0. Bei Gasen kann man das wohl deshalb nicht erreichen, weil sich das *Gas vorher schon verflüssigt und die Flüssigkeit anschließend gefriert.*
- Wenn man jedoch die $(\Delta V$–$\Delta\vartheta)$–Diagramme, welche das oben genannte Gesetz $\Delta V = V \cdot \Delta\vartheta \cdot \gamma$ graphisch wiedergeben ($\leadsto$ Gerade), für verschiedene Gase in einem einzigen Bild darstellt, so sieht man, dass erstaunlicherweise sich *alle Geraden in einem Punkt* mit $V = 0$ *schneiden.*
- *Dasselbe* findet man für die gemessenen Δp in den $(\Delta p$–$\Delta\vartheta)$–Diagramme, womit die *postulierte Gleichung* $\Delta p = const. \cdot \Delta\vartheta$ *gerechtfertigt* ist.
- Im $(\Delta V$–$\Delta\vartheta)$–Diagramm und im $(\Delta p$–$\Delta\vartheta)$–Diagramm stimmt die *Temperatur* für $V = 0$ *mit der für* $p = 0$ *überein.* Diese übereinstimmende Temperatur *liegt bei* $-273.15^o\ C$. Diesen Punkt auf der Temperaturskala nennt man den *absoluten Nullpunkt.* Man kann den besagten Punkt so interpretieren, dass dort die *thermische Bewegung der Moleküle verschwindet*, dass also ihre *kinetische Energie* 0 geworden ist.
- Auf dem absoluten Nullpunkt beruht die *Kelvin-Skala* für die *Temperatur.*
- Man setzt: $\vartheta^o\ C - 273.15^o\ C = T^o\ K$ (Grad *Kelvin*). Mit T kann man nun obige *Gesetze einfacher schreiben:*
  - $\frac{V}{T} = const.(p)$ (*Gesetz von Gay-Lussac.*)
  - $\frac{p}{T} = const.(V)$ (*Gesetz von Amontons.*) Dazu passt noch
  - $p \cdot V = const.(T)$ (Gesetz von *Boyle-Mariotte*), früher behandelt.
  - $\leadsto$ $p \cdot \frac{V}{T} = p \cdot const.(p) = V \cdot const.(V) = \frac{1}{T} \cdot const.(T)$. In der Gleichung $p \cdot \text{const.}(p) = V \cdot const.(V) = (\frac{1}{T}) \cdot const.(T)$ sind *alle Variablen ersichtlich separiert.* (Sie liegen auf verschiedenen Seiten der Gleichheitszeichen.) D.h.

diese *Konstanten können nicht unabhängig von jeweils nur einer einzigen Variablen verändert werden.* Daher müssen sie alle *unabhängig von jeder Variablen* sein $\leadsto$ $p \cdot \frac{V}{T} = const.$. Die hier auftretende *Konstante* lässt sich *berechnen:*

- *Verdoppelt man* z.B. V alleine bei konstantem p und T, so muss auch die *Konstante verdoppelt* werden. Sie ist also *proportional* zur *Gasmenge* n (mol).
  $\leadsto$ $p \cdot \frac{V}{T} = n \cdot const.$ oder neu geschrieben mit Hilfe von $const. := R$ $\leadsto$

$$\textit{Gesetz:} \qquad p \cdot V = n \cdot R \cdot T.$$

- Die Gleichung $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$ heißt

  Gesetz von Avogadro oder die **Zustandsgleichung der idealen Gase**.

- R lässt sich *bestimmen*. Man wählt *Normalbedingungen*, d.h.:
  $T = T_0 = 273.15^o\ K$, $p = p_0 = 101325\ Pa$, $n\ (mol) =$ Masse $m/$ Molmasse M.
  Mit $n = 1\ mol$ findet man das molare Normalvolumen $V_0 = 22414\ dm^3$.
  $\leadsto$ R berechnet sich zu $R = 8.314\ J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$.

  - R heißt *universelle Gaskonstante*.

- *Details zu den Begriffen „mol“, „Molmasse“ usw. in* $n\ (mol) = \frac{Masse\ m}{Molmasse\ M}$.

  In $n\ (mol)$ ist M zahlengleich mit der *relativen Atommasse* resp. der *relativen Molekülmasse*. Die relative Atommasse findet man als *Atommassenzahl* im Periodensystem der Elemente. Die Einheit ist dort normiert durch den Bezug auf $\frac{1}{12}$ der relativen Masse des $^{12}_{6}$C–Isotops. Diese Grösse wird als *Atommassenzahl* 1 festgelegt. Die vielen vorhandenen Isotopen zu den verschiedenen Elementen machen dies notwendig. Im Unterschied zur zahlengleichen Atommasse hat aber die Molmasse oder *molare Masse* eine andere Einheit: M wird in $[kg/mol]$, $[g/mol]$, oder $[kg/kmol]$ angegeben. Man definiert nun n wie folgt:

  n in mol oder Mol ist die Menge eines Stoffes (aus reinen Elemente oder reine Verbindungen, Moleküle), welche n mal gleich viele Teilchen (Atome oder Moleküle) enthält wie $12\,g$ des ^{12}C–Isotops. Darin sind immer $N_A = 6.02214 \cdot 10^{23}$ Teilchen (Atome oder Moleküle) enthalten. N_A heisst auch *Avogadro–Zahl, avogadrosche Zahl* oder *Zahl von Avogadro*. $n\,mol$ bedeutet daher n mal $N_A = 6.02214 \cdot 10^{23}$ Teilchen der betreffenden reinen Substanz.

- Bei realen Gasen müssen Korrekturterme eingeführt werden.
  Die entstehende Gleichung heißt *Van-der-Waals-Gleichung:*

$$(p + a \cdot (\frac{n}{V})^2) \cdot (V - b \cdot n) = n \cdot R \cdot T.$$

- Die hier eingeführten *Konstanten* heißen *Van-der-Waals-Konstanten*. Sie sind abhängig vom jeweiligen Gas. Man findet sie in Tabellen- und Formelbüchern *tabelliert*.

- Sei $N =$ Anzahl Gasmoleküle. Dann gilt:

$$p = \frac{2}{3} \cdot \frac{N}{V} \cdot \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{N}{V} \cdot E_{\text{kin, mittel}}$$

$$\rightsquigarrow \; p \cdot V = \frac{2}{3} \cdot N \cdot E_{\text{kin, mittel}} = \frac{2}{3} \cdot n \cdot N_A \cdot E_{\text{kin, mittel}}$$

$$\rightsquigarrow \; E_{\text{kin, mittel}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{p \cdot V}{n \cdot N_A} = \frac{3}{2} \cdot \frac{n \cdot R \cdot T}{n \cdot N_A}$$

$$\rightsquigarrow \; E_{\text{kin, mittel}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{R}{N_A} \cdot T = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T$$

- Die hier auftretende Konstante $k = \frac{R}{N_A}$ heißt *Bolzmann-Konstante*. Sie ist eine wichtige Naturkonstante. Ihr Wert ist $1.38 \cdot 10^{-23} \; J \cdot K^{-1}$.

- Die *Gasgleichung* kann nun *mit der Bolzmann-Kosntante geschrieben* werden:

$$p \cdot V = N \cdot k \cdot T, \qquad \text{wobei } N \text{ die } \textit{Anzahl der Gasmoleküle} \text{ ist.}$$

- Daraus lässt sich die mittlere Geschwindigkeit der Gasmoleküle berechnen:

$$E_{\text{kin, mittel}} = \frac{m \cdot \bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T$$

$$\Rightarrow \; \bar{v}^2 = 3 \cdot \frac{k}{m} \cdot T = 3 \cdot \frac{R}{N_A \cdot m} \cdot T = 3 \cdot \frac{R}{M} \cdot T$$

$$\bar{v} = 0.921 \cdot (3 \cdot \frac{R}{M} \cdot T)^{0.5} \; .$$

- Der Faktor 0.921 ist ein *Korrekturfaktor*. Er ist notwendig, weil der *Mittelwert* der *quadratischen Geschwindigkeit* $\overline{(v^2)}$ *nicht gleich* dem *Quadrat* $\bar{v}^2$ *des Mittelwerts* $\bar{v}$ von v ist.

- Die Gasgleichung findet auch eine *Anwendung* bei der *Osmose*. Dort wird eine *semipermeable Membran* benutzt, welcher eine Lösung vom reinen Lösungsmittel trennt. Es wirkt dann der *Druck* $p = k \cdot T \cdot \frac{N}{V}$. Hier bedeutet $(\frac{N}{V})$ die *Teilchendichte* des *gelösten Stoffes*. Man konsultiere dazu die Literatur.

3. Wärmemengen, Zustandsänderungen

- **Zustandsgrößen:** Körper (vorliegende Materie oder Massen) werden in ihrem *Aggregarszustand* immer durch ihre *Zustandsgrößen charakterisiert*. Das sind Größen wie z.B. $p,\ V,\ T$. Zustandsänderungen sind mit *Energieaustausch* oder *Wärmefluss* (Austausch einer *Wärmemenge* Q) zwischen Körper resp. System und Umgebung verbunden. Aggregatszustandsänderungen oder Phasenumwandlungen von Stoffen sind spezielle Zustandsänderungen.

- Bei *idealen Gasen* ist wegen $\Delta Q = \Delta E_{\text{kin, mittel}} = \frac{3}{2}\cdot k\cdot \Delta T$ die ausgetauschte *Wärme der Temperaturdifferenz proportional*, wie wir schon wissen.

- **Wärmekapazität:**

  - Bei Gasen wird oft auch die *molare Wärmekapazität* C benutzt. Sie ist definiert durch die Gleichung: $\Delta Q = C\cdot n\cdot \Delta T$. Die Werte für C sind *tabelliert*. n ist die Stoffmenge. Die Werte von C sind unterschiedlich, je nachdem ΔQ bei *konstantem Druck* oder bei *konstantem Volumen zugeführt* wird. $\leadsto\ C_p,\ C_V$. Es gilt: $C_p > C_V$.
  - Bei Flüssigkeiten und festen Körpern hingegen findet man in gewissen Temperaturintervallen eine analoge Beziehung: $\Delta Q = c\cdot m\cdot \Delta T$.
    - c heißt *spezifische Wärmekapazität*. m ist die Masse.

- **Verdunstungskälte:** Man muss aber wissen, dass auch ohne spezielle Wärmezufuhr eine *Flüssigkeit verdunsten* oder auch ein *fester Körper* entsprechend *sublimieren* (zu Gas werden) kann. Das liegt daran, dass bei der Molekülbewegung *nicht alle Moleküle gleich schnell* sind. Es gibt *schnelle, energiereichere* Moleküle, welche wegen ihrer großen Geschwindigkeit *entweichen* können. Damit sinken die vorhandene kinetische Energie und damit die Temperatur. Diesen *Abkühleffekt* (*Verdunstungskälte*) kennt man vom Verdunsten einer Flüssigkeit auf der Haut. Sie ist bei höheren Temperaturen auch spürbar in der Nähe eines Wasserfalls.

- **Dampfdruck:**

  - *Dampf* ist die *Gasphase* über einer *festen* oder *flüssigen Phase* eines *Stoffes*.
  - Beim Dampf über einer Flüssigkeit in einem abgeschlossenen Gefäß spricht man von *gesättigtem Dampf*, wenn in einer Zeiteinheit im Mittel gleich viele Moleküle aus dem Dampfraum in die Flüssigkeit eintreten wie Moleküle aus der Flüssigkeit in den Dampfraum eintreten.
  - Bei *übersättigtem* Dampf kommt es an Keimen im Dampfraum zur Tropfenbildung.
  - Bei *untersättigtem Dampf* nimmt mit dem Heizen der Sättigungsgrad zu. Der *Dampfdruck steigt* aber mit der Temperatur *überproportional. (Van-der Waals-Gleichung!)*

- Wenn *in einem geschlossenen Gefäß* eine *Flüssigkeit* und damit der zugehörige *Dampf* immer mehr *aufgeheizt* wird (ϑ steigt), so *steigt* die *Dichte* des *Dampfes* an und diejenige der *Flüssigkeit nimmt ab*. Die beiden Dichten *nähern sich* einander an, bis beide *gleich* werden. *Dann verschwindet die Flüssigkeitsoberfläche*. Dort ist der *kritische Punkt* in der Dampfdruckkurve ((ϑ–p)–Diagramm) erreicht mit der zugehörigen *kritischen Temperatur* und dem *kritischen Druck*.
- Wird eine Flüssigkeit mit dem darüber sich befindenden Dampf in einem geschlossenen Gefäß soweit abgekühlt, dass sie zu erstarren beginnt, so ist der *Tripelpunkt* erreicht.
- Eine *Flüssigkeit siedet*, wenn der Dampfdruck gleich dem Umgebungsdruck ist. *Wärmezufuhr* führt *nicht* mehr zu einer *Temperaturerhöhung* in der Flüssigkeit, *sondern* zum *Verdampfen*.

• **Luftfeuchtigkeit:**

- *Warme Luft* kann *mehr Feuchtigkeit* aufnehmen als kalte (Wärme beim Haartrockner!).
- Die tatsächlich vorhandene *Wasserdampfdichte* ρ_W heißt *absolute Luftfeuchtigkeit*. Sei ρ_S die Sättigungsdichte. $\varphi = \frac{\rho_W}{\rho_S} \cdot 100\,\%$ heißt *relative Luftfeuchtigkeit*.
  * Es gilt: $\varphi = \frac{\rho_W}{\rho_S} \cdot 100\,\% = \frac{p_W}{p_S} \cdot 100\,\%$.
  * Die *Luftfeuchtigkeit* ist ein *wichtiges Thema* in der *Bauphysik* (wegen den zu erwartenden Schäden bei zu hoher Feuchtigkeit).
  * Angenehm ist eine Feuchtigkeit zwischen 50 % und 70 %.
  * Zu *große Feuchtigkeit* $\rightsquigarrow$ *schwitzen*.
  * Zu *geringe Feuchtigkeit* $\rightsquigarrow$ *austrocknen* der Atemwege.

• **Verdampfungswärme:**

- Die *Verdampfungswärme* ist die *Energiemenge*, welche bei der *Siedetemperatur* der *Flüssigkeit zugeführt* werden muss, damit eine Menge mit der Masse m verdampft. *Spezifische Verdampfungswärme:*
  * $L_v = \frac{\Delta Q}{\Delta m}$. (Tabelliert.)
- *Blasenbildung beim Sieden:* Wenn der Dampfdruck gleich dem äußeren Druck ist.
- Die *Siedetemperatur* ist abhängig vom Druck der Umgebung: *Je höher über Meer* man kocht, desto *tiefer* ist die *Siedetemperatur* und desto problematischer ist es mit dem Weichkochen.

• **Kondensieren, Erstarren:**

- *Kondensieren* ist der *umgekehrte* Vorgang zum *Verdampfen.*
- *Erstarren* ist der *umgekehrte* Vorgang zum *Verflüssigen* oder *Schmelzen.*
- So wie beim Verdampfen die spezifesche Verdampfungswärme existiert, so existiert beim Schmelzen die *spezifische Schmelzwärme:*
  * $L_f = \frac{\Delta Q}{\Delta m}$. (Tabelliert.)
- *Schmelzen* zieht oft eine beträchtliche *Volumenzunahme* mit sich.
  * Mit Hilfe von *Druckanwendung* kann man oft die *Schmelztemperatur herabsetzen.*

- **Kalorimetrie:** Bis 1967 war die *Kalorie* gesetzlich als *Maßeinheit* für die *Wärme* verankert. Heute gilt: *Kalorimetrie* = Messung von Wärmemengen.
  - 1 *Kalorie* = 1 *cal* erhöht die Temperatur von 1 g Wasser um $1^o\ C$.
    Es gilt: 1 *cal* $\approx 4.2\ J$.
  - *„Fühlbare Wärme“:* $\Delta Q = C \cdot n \cdot \Delta T$ oder $\Delta Q = c \cdot m \cdot \Delta T$.
  - Beim *Heizwert* gilt wie bei L_f oder L_v: $H = \frac{\Delta Q}{\Delta m}$ beim Verbrennen von m. (Ebenso beim *Nährwert.*)
  - Zur *Erzeugung hoher Temperaturen:*
    * Durch Verbrennung oder allgemeiner durch chemische Reaktionen.
    * Durch elektrische Heizung.
    * Mittels Parabolspiegel Wärmestrahlung auffangen.
    * Mit atomaren Prozessen wie Kernspaltung.
  - *Wärmeübertragungsarten, Wärmetransport:*
    * Wärmefluss durch *Berührung: Wärmeleitung.*
    * Durch *Konvektion.* (*Mitführung* der Wärme z.B. in einer zirkulierenden Flüssigkeit oder in einem Gas. $\leadsto$ Wetter!)
    * Durch *Wärmestrahlung.*
  - *Transport von Heizmaterial* ist nicht Wärmetransport. Das Resultat kann jedoch das gleiche sein wie beim Wärmetransport. Möglichkeiten:
    * *Transport von Heizmaterial* mit anschließender Verbrennung
    * *Transport von elektrischer Energie* und elektrische Heizung.

4. Zum Wärmetransport

- Eine wichtige Grundvoraussetzung, damit Wärme (Wärmeenergie) übertragen werden kann ist die Beobachtung, dass *Wärme ohne zusätzlichen Energieaufwand* immer nur *von einem Medium mit höherer Temperatur auf ein solches mit tieferer Temperatur übergeht*, falls dazu nicht noch *Arbeit* geleistet wird, wie z.B. bei der *Wärmepumpe.*

  - Soll also *Wärme von sich aus* von A nach B übergehen, so muss *für die Temperaturen* gelten: $\vartheta_A > \vartheta_B$.

- **Wärmeleitung:**
  - *Möglichkeiten bei festen Körpern:*
    - Leitung innerhalb eines Körpers.
    - Leitung durch die Kontaktflächen zwischen zwei oder mehreren Körpern.
    - Strahlung.
  - *Möglichkeiten bei Flüssigkeiten und Gasen:*
    - Konvektion.
    - Strahlung.
  - *Wärmetransport in der Form von Leitung und Konvektion* kann man sich durch Übertragung der kinetischen Energie durch *Anstoßen der Moleküle* vorstellen. Dabei ist auch die Querschnittsfläche maßgebend.
  - **Berechnungen bei der Wärmeleitung:** Gegeben sei ein Körper mit der Querschnittsfläche A, der Dicke d und der Temperaturdifferenz ΔT zwischen den Deckflächen senkrecht zur Dicke. In der Zeit Δt soll die Wärmemenge ΔQ durch den Körper zwischen den beiden Flächen fließen. Dann muss gelten:
    - $\dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$ muss *proportional* sein zu A.
    - $\dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$ muss *proportional* sein zu ΔT. (Man denke an ideale Gase, wo gilt: $\Delta Q = \Delta \mathrm{E}_{\text{kin, mittel}} = \dfrac{3}{2} \cdot k \cdot \Delta T$.)
    - d muss proportional sein zu Δt, da die Wärme langsam fließt.
    - Dann gilt: $\dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$ muss proportional sein zu $\Delta T \cdot \dfrac{A}{d}$.
  - $\rightsquigarrow$ **Wärmeleitungsgesetz:** $\dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = \lambda \cdot \Delta T \cdot \dfrac{A}{d}$.
    - λ ist die *materialabhängige Wärmeleitfähigkeit.*
    - $\dfrac{\lambda}{d}$ ist der *Wärmedurchlasskoeffizient.*
  - **Berechnungen bei der Konvektion:** Hier ist eine *ähnliche Situation* vorhanden wie bei der *Leitung* mit dem Unterschied, dass die Distanz d hier keine Messgröße ist. Das führt zu folgender *Formel:*
    - **Wärmetransportgesetz:** $\dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = \alpha \cdot \Delta T \cdot A = \alpha \cdot A \cdot (T_E - T_A)$. Dabei ist T_E die *Temperatur bei der Erwärmung*, T_A ist diejenige bei der *Wärmeabgabe.* A ist die Fläche. α hängt von der *Geschwindigkeit* des Mediums, von der *Viskosität* u.s.w. ab.

- **Wärmestrahlung:** Dies ist heute vor allem in der *Bauphysik ein Thema*, da warme Körper in kalter Luft *strahlen* (*emittieren*) und dadurch *Energie verloren* geht (Abgabe an die Umwelt). Umgekehrt will man heute wo auch immer die *Sonnenenergie nutzen*. Eine Form ist die Absorption der Strahlen in *schwarzen Körpern*, welche z.B. Wasser führen, das man hierdurch *aufheizen* kann. Die von einem Körper *emittierte* oder *absorbierte Leistung* hängt ab von der *Größe der Oberfläche* A und auch von ihrer Beschaffenheit. Hier gilt das *Strahlungsgesetz von Stefan und Boltzmann:*
  - Gesetz: $\frac{\Delta Q}{\Delta t \cdot A} = \varepsilon \cdot \sigma \cdot T^2.$
    - Dabei ist die Emissionszahl $\varepsilon < 1$ eine *Materialkonstante*, welche von der *Oberfläche* abhängt. (Idealer Strahler, *schwarzer Körper:* $\varepsilon = 1$.)
    - $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}\ W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$) ist die *Stefan-Boltzmann-Konstante.*
    - Für die *Wellenlänge* des *Strahlungsmaximums* gilt das *Wiensche Verschiebungsgesetz:* $\lambda_{max} = \frac{1}{T} \cdot 2.9 \cdot 10^{-3}\ m \cdot K.$

5. Zu den Hauptsätzen der Wärmelehre

- Die besagten Hauptsätze sind ein *Resultat des 19. Jahrhunderts.*
  - *Der „nullte“ Hauptsatz:* Wenn eine *Anzahl Systeme* mit einem *speziellen System* im *thermischen Gleichgewicht* sind, sind sie auch *untereinander* im thermischen Gleichgewicht.
  - *Der erste Hauptsatz:* Ein *System* ist *bezüglich* seiner *innern Energie abgeschlossen.* Es kann diese innere Energie *nur durch Austausch* von *Arbeit* oder *Wärme* mit der *Umgebung* ändern.
  - *Der zweite Hauptsatz:* In einem *abgeschlossenen System* kann die *Entropie nicht abnehmen. Entropie* kann man sich als ein *Maß für die Unordnung* vorstellen. Damit lassen sich Bedingungen formulieren, welche die Möglichkeiten der zeitlichen Folgen von erlaubten Energiezuständen einschränken.
  - *Der dritte Hauptsatz:* Jedes System hat beim absoluten Nullpunkt der Temperatur die *Entropie* 0. (Damit ist die Unmöglichkeit gegeben, den absoluten Nullpunkt zu erreichen.)
- **Zum nullten Hauptsatz:** Dieser ist eher logischer Natur, denn sonst könnte man keine Temperaturmessung definieren.
- **Zum ersten Hauptsatz:**
  - Man erinnere sich an den in der Mechanik behandelten *Energieerhaltungssatz:* In einem abgeschlossenen System bleibt die Summe der Energien der verschiedenen Formen konstant, wenn keine Reibungsverluste entstanden sind. *Reibungsverluste* bedeutet Reibungsarbeit, also mechanische Energie, welche in Wärmeenergie *umgewandelt* worden ist. Sie ist nicht verloren. Jedoch ist

sie nun in einer *Form vorhanden*, in welcher sie oft *praktisch nicht mehr in eine andere Form mechanischer Energie zurück verwandelt werden kann.* Man nennt sie *innere Energie* U. **Wir definieren die innere Energie genauer:**

- Unter der *innere Energie* U eines Systems verstehen wir die *Summe* aller derjenigen *Energien des Systems*, welche *nicht von der Umgebung abhängen* resp. welche nicht vom äußeren Bezugssystem abhängen.
- Damit kann man die Begriffe *Arbeit* und *Wärme* jetzt etwas mehr ausdifferenzieren resp. genauer fassen:
  - Unter **Arbeit** verstehen wir die *Übertragung geordneter Energie.*
  - Unter **Wärme** verstehen wir die *Übertragung ungeordneter Energie* (z.B. *kinetische Energie* von *Gasmolekülen*, von welchen jedes eine andere Richtung und Geschwindigkeit hat.).
  - Die *innere Energie* kann also durch *Zu–* oder *Abfluss* von Arbeit oder auch von Wärme v*erändert* werden. Das ergibt die *Formel:*
    - Differenz der inneren Energie: $\Delta U = \Delta W + \Delta Q$.
    - Positive ΔW und ΔQ bedeuten Zufuhr, negative bedeuten Abfuhr.

- **Zum zweiten Hauptsatz:**
  Bei diesem Satz trifft man *verschiedenen Formulierungen:*
  - *Wärme fließt von sich aus* (alleine) *nur* von einem *Medium höherer Temperatur zu einem Medium tieferer Temperatur.*
  - Jedes abgeschlossene System hat das *Bestreben*, einen Zustand *größtmöglicher Unordnung anzunehmen.* Der geschichtliche Ablauf ist *nicht umkehrbar.* Temperaturdifferenzen haben ohne äußeres Zutun die Tendenz, sich auszugleichen. (*Irreversibilität:* Naturvorgänge sind so meist *irreversibel.*) $\leadsto$ „Es ist schwierig, verschüttetes Wasser wieder einzusammeln!“
    - Der *Mensch benutzt* oft *mit großem Aufwand gewonnene Energiemengen*, indem er sie *in nicht mehr* weiter *verwertbare innere Energie umwandelt.* Dann ist diese Energie *entwertet.*

- **Entropie und Ordnung in der Materie** (als Ansammlung von Teilchen):
  - Wir verstehen *thermische Energie* als *ungeordnete Molekularbewegung*, als *chaotisch*, mit der *Tendenz zum Temperaturausgleich* und zum *Ausgleich der mittleren Bewegungsenergie* und der *Verteilung* der *Energie* in die *Umgebung* (Energiefluss). Damit *verringert* sich die *mittlere Energiedichte* ständig.
  - Außen verwendete *Nutzenergie* hingegen ist *geordnet* und *konzentriert* in *keinen Raumgebieten.* Z.B. *Rotationsenergie* ist beschränkt auf die rotierenden Körper, in denen die Teilchen schichtweise gleiche Winkelgeschwindigkeiten haben. Analog bei *potentieller Energie* oder *kinetischer Energie* von Massen. Hier hat man einen *hohen Anteil von Ordnung* in der Bewegung und damit in der kinetischen Energie. Die *Energiedichten* sind meistens *hoch.* Z.B. bei der *Verbrennung*

ist eine räumliche Trennung bemerkenswert zwischen den langsamen Teilchen vor der Verbrennung und den schnellen danach. Die beiden Bereiche sind getrennt und damit geordnet.

- Unter *Ordnung* kann man daher die *Konzentration der Energie auf ein Teilsystem* verstehen, sei es bezüglich Raumbereich, Geschwindigkeit oder Richtung der Geschwindigkeit. Der *Idealfall* ist die *gleiche Bewegung aller Teilchen des Systems*.
- **Entropie:** Die **Unordnung in einem System** wird durch den Begriff *Entropie* gefasst. *Entropie ist ein Maß für die gesamte Unordnung der Teilchenzustände in einem System*. Vorgänge laufen so ab, dass diese Entropie oder Unordnung nicht kleiner, jedoch *praktisch immer größer wird*. Entropie ist eine für ein System charakteristische *Zustandsgröße*.
- *Systeme unterscheiden sich durch ihre Entropie*. Die Entropieänderung anlässlich einer Zustandsänderung ist eine wichtige Größe.
- *Quantitativ* fasst man die *Entropie* ΔS durch die bei einem Wärmetransport *übertragene Wärme pro Temperatur*. Sie ist umso *größer*, je *größer* die übertragene *Wärme* bei *kleiner Temperatur* ist. Wenn die *Wärmeenergie in die Umgebung* diffundiert resp. verteilt wird, so ändert sich die Wärme nicht, doch die *Temperatur wird kleiner* und damit die *Entropie größer:*
  - $\leadsto$ *Entropieformel:* $\Delta S = \dfrac{\Delta Q}{T}$.
- Wärmeerzeugung resp. Umwandlung in *Wärme* resp. Wärmetransport ist damit *immer mit Entropie verbunden*.

• Damit kann man den **2. Hauptsatz der Wärmelehre neu** so fassen:

- *2. Hauptsatz: In einem abgeschlossenen System kann die Entropie nicht abnehmen.* ΔS ist immer ≥ 0. Sie erreicht den Maximalwert bei gleichmäßiger Verteilung der Energie und ausgeglichener Temperatur.
- *Folgerungen:*
  - *Entropiearme Nutzenergiemengen* sind *wertvoller* also energiereiche.
  - *Systemzustandsänderungen* laufen *spontan* ab, wenn die Entropie zunimmt.
  - Schließlich *strahlt ein Teil unsere Energie* noch in den *Weltraum* ab.
- *Vergleich:* So *wie die innere Energie verteilen sich auch Stoffe*. Z.B. ein Tropfen *Aquarellfarbe* in einem *Wasserglas*. Oder ein Tropfen *Parfüm* im *Zimmer* (*Diffusion!*). Beides, die Farbe und der Duft, kann man nach dem Verteilen nicht mehr ohne Aufwand zurückholen. Es handelt sich hier beim Verteilen um *irreversible Prozesse*. Ähnlich verhält es sich, wenn man ein Gas in einen Behälter ausströmen lässt.
  Die Chance, dass sich alle Gasteilchen zufällig und ungeachtet der Interaktionen der Teilchen in einer *Behälterhälfte* sammeln, ist 0.5^N, $N =$ Teilchenzahl. (Ein *irreversibler Prozess:* Aus Weizen Brot machen. Aus Brot kann man dann nicht wieder Weizen machen.)

- *Wahrscheinlichkeitsformel:* In der Literatur findet man für die Entropie auch noch eine Formel, in der die *Bolzmann-Konstante* k sowie eine *Wahrscheinlichkeit* W vorkommt:
  * $\rightsquigarrow \quad \Delta S = k \cdot \ln(W)$.
  * Dabei bedeutet $W = \dfrac{w_E}{w_A}$. Hier ist $w_A = (\dfrac{V_1}{V_2})^N$ die *Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Anfangszustand*, bei der sich in einem Volumen V_2 die N Teilchen ein einem Teilvolumen V_1 aufhalten. $w_E = (\dfrac{V_2}{V_2})^N = 1$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Teilchen *irgendwo* aufhalten. Es gilt:
  * $\ln(W) = \ln((\dfrac{V_1}{V_2})^{-N}) = \ln((\dfrac{V_2}{V_1})^N) = N \cdot \ln(\dfrac{V_2}{V_1})$
- Die *Herleitung der Formel* ist mathematisch mit etwas *Aufwand* verbunden.
- *Betrachtung zur Herleitung der Formel:* $\Delta S = \dfrac{\Delta Q}{T} = \dfrac{\Delta E_{kin}}{T}$.
  * Vorstellung: Wir vergrößern ein Gefäß um ΔV bei $p = const.$, indem wir die Energie $\Delta Q = p \cdot \Delta V$ zuführen. Dann ist nach der Gasgleichung:

$$\Delta Q = p \cdot \Delta V = N \cdot k \cdot \Delta T. \quad \text{Damit wird:}$$

  * $\Delta S = \dfrac{\Delta Q}{T} = p \cdot \dfrac{\Delta V}{T} = N \cdot k \cdot \dfrac{\Delta T}{T}$.
  * Wegen $p \cdot V = N \cdot k \cdot T$ ist nun $T = p \cdot \dfrac{V}{N \cdot k}$.
  * ΔT wird hier zu $\Delta T = \dfrac{p \cdot \Delta V + \Delta p \cdot V}{N \cdot k}$.
  * Wegen $p = const.$ ist aber $\Delta p = 0$. Daraus folgt:
  * $\Delta T = \dfrac{p \cdot \Delta V}{N \cdot k}. \quad \rightsquigarrow \quad \Delta S = N \cdot k \cdot \dfrac{\Delta T}{T} = N \cdot k \cdot \dfrac{p \cdot \Delta V}{N \cdot k \cdot T}$.
  * $\rightsquigarrow \quad \Delta S = \dfrac{p \cdot \Delta V}{T} = \dfrac{p \cdot \Delta V}{(\dfrac{p \cdot V}{N \cdot k})} = N \cdot k \cdot \dfrac{\Delta V}{V}$.
  * $\rightsquigarrow \quad \Delta S = N \cdot k \cdot \dfrac{\Delta V}{V} \rightarrow dS = N \cdot k \cdot \dfrac{dV}{V}$. Integration ergibt:
  * $S = \int_V N \cdot k \cdot \dfrac{dV}{V} = N \cdot k \cdot \displaystyle\int_V \dfrac{dV}{V} = N \cdot k \cdot \ln(V_2 - V_1)$.
  * $\rightsquigarrow \quad S = N \cdot k \cdot (\ln(V_2) - ln(V_1)) = N \cdot k \cdot \ln(\dfrac{V_2}{V_1})$.
  * Mit „$= N \cdot \ln(\dfrac{V_2}{V_1}) = \ln(W)$“ erhält man:
  * $\rightsquigarrow$ *Formel:* $\quad S = k \cdot \ln(W)$.
- *Was zu denken gibt:* Arbeit wird oft vom Menschen dazu benutzt, mehr Ordnung herzustellen. Dazu muss er Energie umwandeln. Dadurch nimmt die Entropie (Unordnung) in der Umgebung zu! *Entropiebilanz*?

- *Resultat: Die Entropie (Unordnung) nimmt in einem System unter Einbezug der Umgebung mit der Zeit zu.* Dies wird zum *Prinzip* erhoben. In der Physik geht man von der Annahme aus (Induktionsschluss), dass *dieses Prinzip streng immer gültig ist.* Das Prinzip ist *nicht umkehrbar.* Die laufend entstehende *„thermische Unordnung"* wird ins Weltall *abgestrahlt.* Die *materielle Unordnung* jedoch *bleibt* an Ort.

- **Anwendung auf Wärmekraftmaschinen:**
  - *Nutzenergie und Wirkungsgrad:* Man betrachte eine *Wärmekraftmaschine* mit der *Antriebswärme* Q_1 (z.B. aus einem Heizkessel oder aus einem brennbaren Benzin-Luft-Gemisch). Die dazugehörige Verbrennungstemperatur sei T_1. Zur Abwärme gehöre die Temperatur T_2. Bei idealen Maschinen müsste hier gelten: $\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$ resp. $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$. Bei realen Maschinen ist jedoch wegen der Entropiezunahme $\frac{Q_1}{T_1} < \frac{Q_2}{T_2}$ resp. $\frac{Q_1}{Q_2} < \frac{T_1}{T_2}$.
  - Die Energiedifferenz $W = Q_1 - Q_2$ ist die *Nutzenergie.* Den Quotienten $\frac{\text{Nutzenergie}}{\text{Antriebsenergie}}$ nennen wir *Wirkungsgrad* η. (Buchstabe „eta".) Dann gilt:
    * *Wirkungsgradformel:* $\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$.
    * $\leadsto \ \eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} < 1 - \frac{T_2}{T_1}$.
    * $\eta_{ideal} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ ist der *Wirkungsgrad einer idealen Wärmekraftmaschine.* Dieser heisst *Carnot-Wirkungsgrad* oder *thermodynamischer Wirkungsgrad.*
    * Beispiel: *Raketenmotor*, vgl. Literatur.
  - *Dampfkolbenmaschine:* Kolben mit Querschnitt A, Kraft $F = p \cdot A$, Hub Δs und Volumenzunahme $\Delta s \cdot A = \Delta V$.
    * $\leadsto$ *Arbeit* $\Delta W = F \cdot \Delta s = p \cdot A \cdot \Delta s = p \cdot \Delta V$ ($\Delta V \leadsto$ Volumenzunahme des Gases beim Druck p) $\leadsto \ \Delta W = N \cdot k \cdot \Delta T$. Wenn *keine Wärme zugeführt* wird, so *kühlt* sich das Gas um ΔT ab.
    * Wegen $\Delta W = p \cdot \Delta V$ kann man die *Arbeit* ΔW im *(p–V)–Diagramm unter der Kurve* $p = p(V)$ *ablesen.* $p \cdot \Delta V$ ist der *Flächeninhalt* eines Balkens der Breite ΔV und der Höhe p. Das Gas gibt Arbeit nach aussen ab, wenn p sinkt und V steigt (*Expansion*). Beim umgekehrten Durchlauf wird von aussen am Gas Arbeit verrichtet (*Kompression*).
    * Bei $T = const.$ (*Isothermen-Kurven*) sind die Kurven *Hyperbeln.* Man redet dann von *isothermer Expansion oder Kompression.*
    * Wenn $\Delta Q = 0$ ist, d.h. wenn das Gas während der Volumenänderung keine Wärme aufnimmt oder abgibt, spricht man von einer *adiabatischen*

Expansion resp. *Kompression*. Dann gilt: $p \cdot V^\kappa = const.$, $\kappa = \dfrac{C_p}{C_V}$.
Das *kann geschehen*, wenn der *Vorgang sehr rasch abläuft* und damit der Wärme keine Zeit für den Abfluss bleibt. Dieser Fall übersteigt den hier gesetzten Rahmen, vgl. Literatur.

- *Benennungen:*
  - Der *Energieaustausch mit der Umgebung* heisst
    - *isochor*, wenn das *Volumen konstant* bleibt,
    - *isobar* wenn der *Druck konstant* bleibt,
    - *isotherm* wenn die *Temperatur konstant* bleibt.
  - Wenn *kein Wärmeaustausch mit der Umgebung* stattfindet (z.B. bei schnellen Prozessen) heisst die Druck-Volumen-Veränderung
    - *adiabatisch*.
  - Zur *mathematischen Herleitung* der dazu bekannten *Formeln* sind vertiefte differentielle Modelle, Betrachtungen (speziell Energiebetrachtungen) notwendig, welche die momentanen mathematischen Möglichkeiten übersteigen.
  - $\rightsquigarrow$ *Formeln ohne Herleitung.*
    - $p \cdot V^\kappa = const.,\quad \dfrac{p_1}{p_2} = (\dfrac{V_2}{V_1})^\kappa,\quad \kappa = \dfrac{C_p}{C_V}.$
    - Eine *Herleitung* der wesentlichen Teile der Formel findet der Leser am Schlusse dieses Kapitels.
- Beim *Viertaktmotor* findet (vereinfacht ausgedrückt) ein so genannter *Carnotscher Kreisprozess* statt:
  - *Isotherme Expansion* mit Wärmeaufnahme aus dem Speicher.
  - *Adiabatische Expansion* ohne Wärmeaustausch.
  - *Isotherme Kompression* mit Wärmeabgabe an den Speicher.
  - *Adiabatische Kompression* ohne Wärmeaustausch.
  - Im *(V–p)–Diagramm* stellt dann die *eingeschlossene Fläche* die nach aussen abgegebene *Arbeit* dar.

- Weitere *Wärmeaustauschmaschinen*, *Wärmekraftmaschine* und *Themen*, welche hier des Rahmens wegen nicht weiter behandelt werden (in der Literatur nachlesen:):
  - Alle Arten von *Verbrennungsmotoren*
  - *Kältekompressoren* (Kühlschrank)
  - *Wärmepumpe* (Umkehrung des Kältekompressors)
  - Phänomene in der Nähe des absoluten Nullpunktes (Supraleiter u.s.w.)
  - Das Problem des Energiehaushalts der Menschen auf der Erde.
  - Treibhauseffekt.

- Energiehunger.
- Nachhaltigkeit.
- Solarkonstante: 1.4 $W \cdot m^{-2}$.
- Der Aufbau des Sonnensystems.

6. Zur Herleitung der Formel für die adiabatische Kompression / Expansion

- Es gilt: $\Delta U = \Delta W + \Delta Q$.
  - (U = Gesamtenergie, Q = Austauschenergie, W = Arbeitsleistung).
- $\rightsquigarrow$ $\Delta Q = \Delta U - \Delta W$ mit $\Delta W = -F \cdot \Delta s = -\frac{F}{A} \cdot \Delta s \cdot A = -p \cdot \Delta V$.
- $\rightsquigarrow$ $\Delta Q = \Delta U + p \cdot \Delta V$ mit $\Delta U = C_V \cdot n \cdot \Delta T$.
- $\rightsquigarrow$ $\Delta Q = C_V \cdot n \cdot \Delta T + p \cdot \Delta V$. Es ist hier $\Delta Q = 0$ (adiabatisch).
- $\rightsquigarrow$ $C_V \cdot n \cdot \Delta T = -p \cdot \Delta V$ mit $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$ oder $p = n \cdot R \cdot \frac{T}{V}$.
- $\rightsquigarrow$ $C_V \cdot n \cdot \Delta T = -n \cdot R \cdot \frac{T}{V} \cdot \Delta V$.
- $\rightsquigarrow$ $C_V \cdot \frac{\Delta}{T} = -R \cdot \frac{\Delta V}{V}$. Integration ergibt hier:
- $\rightsquigarrow$ $C_V \cdot \ln(T) = -R \cdot \ln(V) + const.$ $\Rightarrow$ $\ln(T) = const._1 \cdot \ln(V) + const._2$.
- $\rightsquigarrow$ $\ln(T) = \ln(V^{const._1}) + const._2$ $\Rightarrow$ $\ln(T) = \ln(const._3 \cdot V^{const._1})$.
- Beidseitig die Ausdrücke als Exponenten der Zahl e verwenden:
  - $\rightsquigarrow$ $T = const._3 \cdot V^{const._1} = const._3 \cdot V^{\kappa}$.
- $\rightsquigarrow$ $$\frac{T_1}{T_2} = (\frac{V_1}{V_2})^{\kappa}.$$

2.11 Schwingungen

2.11.1 Harmonische Schwingungen, harmonische Oszillatoren

1. Allgemeines zu Schwingungen

Wieso sind Schwingungen und Wellen wichtig? *Überall wo in unserer Umgebung Materie ist*, ist auch *Schwingung:* In den Lichtteilchen, den Photonen, den Kristallen, Elementarteilchen, in Erdbeben, Uhren, bei allen Apparaten mit ständig sich drehenden Teilchen, bei elektromagnetischen Wellen, bei Taktgebern in Computern bis zu den Himmelkörpern. Es gibt demnach neben *mechanischen* und *elektromagnetischen Schwingsystemen* auch noch *weitere* solche Systeme. Schwingung ist oft auch mit *Elastizität von Material* verbunden.

Charakteristische Fakten betreffend *mechanische Systeme*, welche *schwingungsfähig* sind:

- Bei *Abwesenheit* von *Störeinflüssen* können solche Systeme eine *Ruhelage* oder *stabile Gleichgewichtslage* (mit *stabilem Gleichgewicht*) und *minimaler potentieller Energie* einnehmen.
- Falls das System *schwingt*, so wird die *Gleichgewichtslage* immer wieder *durchquert* (Trägheitskräfte). Zur *Störung des Gleichgewichts*, d.h. um das System in Schwingung zu versetzen, muss *Energie zugeführt* werden.
- Schwingen bedeutet, dass sich *potentielle und kinetische Energie ständig gegeneinander austauschen.* (Energiesatz: Die *Energiesumme* bleibt *im Idealfall konstant.*)
- *Realfall:* Da die *Abführung* von *innerer Energie* praktisch fast nicht vermeidbar ist (*Dämpfung*), nimmt die *Stärke der Schwingung* (*Auslenkung*) *mit der Zeit ab.*

2. Das Federpendel und harmonische Schwingungen:

- *Das Federpendel:* An einer *Zugfeder* hängt eine *Masse*, welche vom Experimentator *kurz* einmal nach unten oder nach oben *gezogen* wird. Dann *schwingt die Masse auf und nieder*. Mit ihr schwingen auch die Materieteile der Feder, jedoch umso weniger, je weiter oben sie sich befinden.
- Befestigt man an der Masse einen Stift, welcher auf ein vorbeigezogenes Papier während dem Schwingen eine Spur aufzeichnet, so entdeckt man eine schöne *Sinus-* oder *Cosinuslinie.*
- Lässt man *neben der schwingenden Kugel* eine *gleich große*, auf einer *vertikalen Drehscheibe befestigte Kugel gleichmäßig rotieren*, wobei die *Auslenkung* des Federpendels dem Durchmesser der Rotationsbahn der Kugel auf der Scheibe *entspricht*, so sieht man bei einer Projektion der beiden Kugel auf einen Schirm, dass die beiden *schön synchron schwingen. Die Schwingung des Federpendels kann man also als*

Projektion der Rotation einer auf einer Scheiben befestigten Kugel verstehen. Das stimmt auch mit der vorhergehenden Entdeckung mit dem Sinus resp. dem Cosinus überein. Denn den Sinus resp. der Cosinus kann man ja an einem Dreieck in einem Kreis mit Radius 1 ablesen. (Üblicherweise der Einheitskreis.)

- Für die *Federkraft der Zugfeder* gilt: $F = -D \cdot y$. $D =$ *Federkonstante.*
- **Wichtige Begriffe** zur *Beschreibung der Schwingung:*
  - Die *momentane Auslenkung* (*Auslenkungslänge*) bezüglich der Position in der Ruhelage heißt *Elongation* $y = y(t)$. $\leadsto$ Einheit: m.
  - Die maximale Auslenkung aus der Ruhelage nennen wir *Amplitude.* Wir setzen: $y = y_{max} = y_A$. $\leadsto$ y_A ist gleich groß nach oben und nach unten, wie man in der vorhin beschriebenen Projektion sieht. $\leadsto$ Einheit: m.
  - Die *Schwingungsdauer* oder *Periodendauer* T ist die Zeit für eine Schwingung, z.B. von der maximalen oberen Auslenkung bis wieder zur maximalen oberen Auslenkung. $\leadsto$ Einheit: *sec.*
  - $f = \dfrac{1}{T}$ heißt *Frequenz* oder *Schwingungsfrequenz* oder auch *Häufigkeit* oder *Schwingungshäufigkeit:* Frequenz bedeutet Anzahl Schwingungen pro Sekunde. $\leadsto$ Einheit: sec^{-1}.
- **Gleichungen**, welche sich *am Modell der rotierenden Scheibe mit der Kugel ablesen* lassen (Projektion: Akzeptierbares Modell für das Federpendel):
  - Sei $T =$ *Umlaufzeit*, $y_A =$ *Amplitude*, $\omega = \dfrac{2\pi}{T} =$ *Kreisfrequenz*, $r = y_A =$ *Radius*, $v =$ *Bahngeschwindigkeit*, $a =$ *Zentripetalbeschleunigung*, $\varphi(t) =$ momentaner *Winkel* der Masse auf dem Rad bezüglich der Nullposition, welche wir wie folgt *normieren* wollen: $\varphi(0) = 0$ wenn sich die Masse oben in maximaler Auslenkung befindet $\leadsto$ $\varphi(T) = 2\pi$.
  - $\leadsto$ $v = r \cdot \dfrac{2\pi}{T} = \omega \cdot r, \quad a = \dfrac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r. \quad \leadsto \quad y(t) = y_A \cdot \cos(\omega \cdot t)$.
  - $\leadsto$ $y(t)$ ist die Projektion von $\vec{r}(t) = y_A \cdot \begin{pmatrix} \sin(\omega \cdot t) \\ \cos(\omega \cdot t) \end{pmatrix} = y_A \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.
  - $\leadsto$ $v_y(t) = \dfrac{\Delta y}{\Delta t}$ wird zu $v_y(t) = -\omega \cdot y_A \sin(\omega \cdot t)$ $\leadsto$ (Ableitung von $y(t)$).
  - $\leadsto$ $a_y(t) = \dfrac{\Delta v_y}{\Delta t}$ wird zu $a_y(t) = -\omega^2 \cdot y_A \cos(\omega \cdot t)$ (Ableitung von $v_y(t)$).
  - $\leadsto$ $a_y(t) = -\omega^2 \cdot y(t)$. D.h. die *Beschleunigung* $a_y(t)$ ist *proportional* zu $y(t)$.
- Diese Art Schwingung, bei der der Cosinus oder der Sinus involviert ist (wie beim Federpendel), heißt *harmonische Schwingung.* Hier ist bewerkenswert:
  - $v_{y,max} = -\omega \cdot y_A = \dfrac{2\pi}{T} \cdot y_A$ und $a_{y,max} = -\omega^2 \cdot y_A = (\dfrac{2\pi}{T})^2 \cdot y_A$.

- $a_y(t) = \frac{d\,y^2}{dt^2} = -\omega^2 \cdot y(t)$ ist die *Differentialgleichung* der *Schwingung.*

  Eine solche Differentialgleichung ist ein *Modell* für die harmonische Schwingung.

- *Die Zusammenhänge zwischen Schwingungsdauer, Federkonstante, Kraft, Masse:*
  - Es gilt (mathematisches Modell): Trägheitskraft $= -$ Federkraft
    $\leadsto\ F = m \cdot a(t) = m \cdot \frac{d\,y^2}{dt^2} = -D \cdot y(t)$. (Differentialgleichung.)
  - $\leadsto\ a(t) = y''(t) = -(\frac{D}{m}) \cdot y(t) = -\omega^2 \cdot y(t) \leadsto\ \frac{D}{m} = \omega^2.$
  - Eine Lösung der Differentialgleichung (erraten, einfach kontrollierbar):
    $y(t) = A_{max} \cdot \cos \omega t = A_{max} \cdot \cos{(\frac{D}{m})^{\frac{1}{2}} t}$
  - $\leadsto\ \omega = (\frac{D}{m})^{\frac{1}{2}} = \frac{2\,\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad T = 2\,\pi \cdot (\frac{m}{D})^{\frac{1}{2}}.$
  - $\leadsto$ Die *Schwingungsdauer hängt ab* von der *Masse* und von der *Federkonstante,* nicht aber von der Amplitude!

- *Energiebetrachtung:* Beim Federpendel stellen wir fest, dass während dem Schwingen in jeder Position eine gewisse potentielle Energie vorhanden ist, abhängig von der Höhe oder der Auslenkung der Schwingmasse.

- Während dem Schwingen ist die *Gesamtenergie immer konstant,* falls wir annehmen, dass keine Energie in *innere Energie* (Erwärmung der Feder) oder in Verwirbelung der *umgebenden* Luft abgeführt wird. $\leadsto\ E_{Schw} = E_{kin} + E_{pot}$.
  - E_{pot} = Spannenergie der Feder $= \frac{1}{2} \cdot D \cdot y(t)^2$. (Bekannt, siehe früher.)
  - $\leadsto\ E_{pot} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot (y_A \cdot \cos(\omega \cdot t))^2 = \frac{1}{2} \cdot D \cdot y_A^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t).$
  - $E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (-\omega \cdot y_A \cdot \sin(\omega \cdot t))^2$
  - $\quad = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\omega)^2 \cdot y_A^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t)) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\frac{D}{m}) \cdot y_A^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t))$
  - $\quad = \frac{1}{2} \cdot D \cdot y_A^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t)) \ \Rightarrow\ E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot y_A^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t))$
  - $\leadsto\ E_{Schw} = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot y_A^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t)) + \frac{1}{2} \cdot D \cdot y_A^2 \cos^2(\omega \cdot t).$
  - $\leadsto\ E_{Schw} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot y_A^2 \cdot (\sin^2(\omega \cdot t) + \cos^2(\omega \cdot t)) = \frac{1}{2} \cdot D \cdot y_A^2.$
  - $\leadsto\ E_{Schw} = E_{Schw}(t) = \frac{1}{2} \cdot D \cdot y_A^2 = const.$ Das ist auch die *Spannenergie* der Feder bis zur *maximalen Auslenkung* und ebenfalls die *kinetische Energie* der Masse beim *Durchgang durch die Ruhelage.*
  - Die *Amplitude* beeinflusst die Schwingenergie demnach *quadratisch.*

- Das Federpendel ist ein *harmonischer Oszillator,* d.h. ein System, das *harmonisch schwingt. Harmonisch schwingen* bedeutet hier, dass die Formel für die Auslenkung nach dem Muster $y(t) = a \cdot \cos(b \cdot t + c)$ gebaut ist.

3. Das Fadenpendel oder mathematische Pendel

- Wenn eine an einem *Faden* der *Länge* l *aufgehängte Masse* m hin und her schwingt, spricht man von einem *Fadenpendel*. Dabei soll das Fadenmaterial so biegsam sein, dass es beim Schwingen praktisch *keine Energie abführt* (keine Erwärmung). Ebenfalls soll die Pendelmasse dergestalt sein, dass praktisch *keine Energie* zur *Verwirbelung* der *Luft* abgeführt und auch *keine Energie* in *Dreh-* oder *Rotationsenergie* der Masse fließt. Wir reden hier von einem *idealen Pendel*.

- Das *Pendel* wird *in Schwingung* versetzt, indem man die Masse zur Seite zieht, los lässt und so schwingen lässt. Dadurch wird die Masse von unten aus der Ruhelage in eine *Höhe* h über dieser Ruhelage angehoben. Der *Winkel* zwischen der *Fadenrichtung* und der *Vertikalen* ist dabei $\varphi(t)$ mit $\varphi(0) = 0$.

- Die *Kräftesituation am Fadenpendel:* Es wirken hier *drei bestimmbare Kräfte:*
  - Die *Schwerkraft* oder Gravitationskraft $\vec{F}_G$ infolge der vorhandenen Erdbeschleunigung. Dabei gilt: $F_G = m \cdot g$.
  - Die *Spannkraft* $\vec{F}_F$ im Faden in Fadenrichtung.
  - Die *rücktreibende Kraft* $\vec{F}_s$ in Richtung der Bahntangente (Bahn der Masse des Pendels) diese Kraft wirkt in die der Auslenkung entgegen gesetzten Richtung.
  - Diese drei Kräfte bestimmen ein *Kräfteparallelogramm* mit den Seiten F_F und F_s sowie der Diagonalen F_G. Da wegen der Kreisbahn $\vec{F}_F$ senkrecht auf $\vec{F}_s$ steht, ist das Parallelogramm ein Rechteck.
  - Im soeben entdeckten Rechteck kann man *ablesen* (Skizze machen!):
    * $F_s = -F_G \cdot \sin(\varphi(t)) = -m \cdot g \cdot \dfrac{x}{l}$, wobei $x \leq s$ die *horizontale Auslenkung* ist. s ist die *Bogenlänge*.
    * $\rightsquigarrow \quad F_s = -m \cdot (\dfrac{g}{l}) \cdot x := -D \cdot x$ mit $D := m \cdot (\dfrac{g}{l})$.
  - Ist $\varphi(t)) \ll 1$ (sehr kleine Auslenkung), dann kann man bekanntlich $\sin(\varphi(t))$ approximieren durch $\varphi(t) \ \Rightarrow \ \sin(\varphi(t)) \approx \varphi(t) = \dfrac{s(t)}{l} = \dfrac{s}{l}$. ($\varphi$ im Bogenmaß!)
    * $\rightsquigarrow \quad F_s = -F_G \cdot \sin(\varphi(t)) = -m \cdot g \cdot \dfrac{s}{l} := -D \cdot s = -D \cdot s(t)$.
  - Das ist *dieselbe Gleichung wie bei der Zugfeder*, wobei wir dort $y(t)$ statt $s(t)$ geschrieben haben. Ebenso können wir wie dort eine auf einer Kreisscheibe angebrachte und synchron mit der Pendelschwingung rotierende Kugel mit gleich bleibender Winkelgeschwindigkeit zusammen mit der Pendelmasse nach unten auf einen Schirm projizieren. Dann stellen wir fest, dass wir dieselbe Situation haben wie beim Federpendel: Die *Schwingung* kann somit durch die *Gleichung* $\quad s(t) = s_A \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad$ beschrieben werden.
  - Damit ergibt sich die *Schwingungsdauer analog zum Federpendel:*

  * $T = 2\pi \cdot \left(\frac{m}{D}\right)^{\frac{1}{2}} = 2\pi \cdot \left(\frac{m}{\left(\frac{m \cdot g}{l}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} = 2\pi \cdot \left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}}.$
  * $\leadsto\ T = 2\pi \cdot \left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}}.$
  * $\leadsto$ T ist unter den *gemachten Voraussetzungen* nur *von der Fadenlänge l abhängig*. Insbesondere übt die *Pendelmasse* auf die Schwingungsdauer *keinen Einfluss* aus. Man sieht, dass hier die *Amplitude* und die *Masse T nicht beeinflussen*. (φ klein!)

- Das *Fadenpendel* (*mathematisches Pendel*) bei kleinen Auslenkungen ist somit ein *harmonischer Oszillator*.

3. Real existierende Schwingungen: Gedämpfte Schwingungen

- Real existierende *makroskopische Schwingsysteme* führen infolge von wirkenden *Reibkräften gedämpfte Schwingungen aus*. Daher kommen solche Schwingungen einmal *zur Ruhe*, wenn die abgeflossene Energie nicht wieder zugeführt wird. Die *Reibkräfte* sorgen dafür, dass ein Teil der Energie ständig in *innere Energie* (*Wärme*) *übergeführt* wird. Diese kann man nicht einfach zurückholen. Ein anderer Teil der Energie wird *abgestrahlt*. Man denke an *Musikinstrumente* (Schallabstrahlung). Das führt dazu, dass sich die *Frequenz* und damit die *Schwingungsdauer mit der Zeit verändern*. (Um die Energie konstant zu halten, müsste man hier von außen ständig Energie zuführen.)

- Wenn die *Dämpfung nur schwach* ist und die *Bremskraft* (Reibkraft) ebenfalls *proportional zur Geschwindigkeit* ist, kann man das *System* oft noch *einfach berechnen*. Um allgemein Schwingungen schnell zu modellieren, benützt man *Differentialgleichungen* und verwendet zur Lösung z.B. die *Methode der Laplace-Transformationen*. Diese Methoden können hier in diesem Rahmen nicht weiter erklärt werden. Doch kann man wenigstens zur Kenntnis nehmen, dass bei gedämpften Schwingungen oft eine *exponentielle Dämpfung* auftritt, in der Form einer Exponentialfunktion als Faktor. *Beispiel:*
  - $y(t) = y_{max} \cdot e^{-t \cdot const.} \cdot \cos(\omega \cdot t)$, Amplitude $= y_A = y_{max} \cdot e^{-t \cdot const.}$.
  - Bei einer gewissen *Dämpfungsstärke* wird der *Grenzfall* erreicht, dass der die *Masse nach der Auslenkung nur noch in die Ruhelage zurückkehrt* und nicht mehr weiter schwingt (*kritische Dämpfung* und dann *überkritische Dämpfung*).
  - Um die *Dämpfung* zu *kompensieren*, kann man das *System von außen periodisch anregen*. *Beispiele:* Unruhe der mechanischen Uhr, periodisches Anstoßen einer Feder usw.

4. Erzwungene Schwingungen

- *Schwingungen* kann man auch *erzwingen*. *Beispiel:* An einen drehbaren *Exzenter* hängen wir einen *Faden*, welcher über eine *Umlenkrolle* nach dieser Rolle in eine *vertikale Hängerichtung* gezwungen wird. An den Faden hängen wir eine *Zugfeder* und an die Zugfeder eine *Masse*.

- Schwingt die Masse bei *stillstehendem Exzenter*, so schwingt sie mit ihrer *Eigenfrequenz* (T oben berechnet, $f = \frac{1}{T}$).
- Dann lassen wir den *Exzenter drehen*. Die *Masse* wird zum *Mitschwingen* gezwungen (*erzwungene Schwingung*). Die Drehfrequenz des Exzenters heißt *Anregefrequenz* oder *Erregerfrequenz*. Was beobachtet man?
  * Bei einer sehr *kleinen Anregefrequenz schwing* die Feder mit der Masse gar *nicht* oder *fast nicht wirklich. Das System Masse-Feder wird einfach mitgezogen* und *reagiert nicht* merklich.
  * *Vergrößert* man die *Erregerfrequenz*, so *schwingt* die *Masse harmonisch* mit dem Exzenter *mit*.
  * *Vergrößert* man die *Erregerfrequenz* soweit, *dass sie mit der Eigenfrequenz der Systems Feder–Masse übereinstimmt*, so *vergrößert* sich die *Amplitude* mit jeder Exzenterumdrehung. Der *Höchstwert* der *Energiezufuhr* an das Schwingsystem ist hier bei der *Eigenfrequenz* erreicht. Man spricht hier von *Resonanz*. Interessant ist, dass das Schwingsystem um ca. eine Viertelperiode hinter dem Exzenter nachhinkt. (Beispiel: Zwei gleich lange Fadenpendel sind durch eine Zugfeder gekoppelt, Schwingung in der Ebene der Aufhängung.) **Achtung!** *Schwing das System* in dieser Art *zu lange*, so kann das zu *Zerstörungen* führen, da das System *immer Energie aufnimmt*.
  * Wenn die *Dämpfung groß* ist kommt es aber anders: Dann *ändert sich die Schwingfrequenz* des Systems Feder-Masse *mit der Zeit*.
  * *Vergrößert* man die *Anregerfrequenz noch mehr*, so nimmt die *Amplitude* des Schwingsystems wieder mehr und mehr *ab* bis zum *Stillstand der Masse*. Die *Schwingung* geht vorher in die *Gegenphase* über.
- *Problematik:* In real existierenden mechanischen Systemen (z.B. wenn drehende Teile vorhanden sind, z.B. beim Auto) oder *auch in elektrischen Systemen kann bei Schwingungen im* Falle der *Resonanz* soviel *Energie aufgenommen* werden, dass das *System zerstört wird*. Das kann zu *Schäden* an Mensch und Umwelt führen.

• Interessant ist es die mathematisch konstruierten und programmierten Modelle auszuprobieren, welche man heute auf dem Internet findet. (Applets.)

5. Überlagerte Schwingungen

• In der *Realität überlagern* sich *Schwingungen* oft *ungestört*. (*Beispiele: Wasserwellen* laufen „durcheinander hindurch“. Oder in einem Orchester werden *Töne* zusammengemixt. Das *Ohr* jedoch hört die verschiedenen Instrumente mit den zugehörigen Tonfrequenzen wieder heraus usw.)

- Solche *Schwingungen addieren* sich, wie man am Experiment sieht, *wie Vektoren.* Im Falle einer eindimensionalen Amplitude addieren sie sich wie Zahlen.

- Die *Überlagerung* von *harmonischen Schwingungen* lässt sich *rechnerisch einfach* handhaben, denn man hat es ja mit *gestreckten trigonometrischen Funktionen* zu tun. Vorteilhaft ist es, wenn man dazu die Theorie der *komplexen Zahlen und Funktionen* zur Verfügung hat.

- Der *einfachste Fall* ist der von *zwei Schwingungen* mit *gleicher Frequenz* und *gleicher Phase:*
  - Einzelschwingungen: $y_1(t) = y_{A,1} \cdot \cos(\omega \cdot t), \qquad y_2(t) = y_{A,2} \cdot \cos(\omega \cdot t)$.
  - *Überlagerung:* $y(t) = y_1(t) + y_2(t) = (y_{A,1} + y_{A,1}) \cdot \cos(\omega \cdot t)$.

- Oder der Fall von *zwei Schwingungen* mit *gleicher Frequenz* und *entgegengesetzter Phase:*
  - Einzelschwingungen:
    $y_1(t) = y_{A,1} \cdot \cos(\omega \cdot t), \qquad y_2(t) = y_{A,2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \pi)$.
    - $\leadsto \qquad y_2(t) = -y_{A,2} \cdot \cos(\omega \cdot t)$.
  - *Überlagerung:* $y(t) = y_1(t) + y_2(t) = (y_{A,1} - y_{A,1}) \cdot cos(\omega \cdot t)$.
    - $\leadsto$ *Destruktive Überlagerung*, kleinere Amplitude in dem Sinne, dass die zweite die erste v*ermindert*. Das kann bis zur *Auslöschung* gehen.

- Der Fall *mit verschiedenen Frequenzen*. Gegeben seien:
  - $y_1(t) = y_{A,1} \cdot \cos(\omega_1 \cdot t), \qquad y_2(t) = y_{A,2} \cdot \cos(\omega_2 \cdot t) = y_{A,2} \cdot \sin(\omega_2 \cdot t + \frac{\pi}{2})$.
    - Diese beiden Schwingungen lassen sich in der Regel *nicht mehr in der Art einer harmonischen Schwingung schreiben.* Es handelt sich nicht mehr um eine solche.

- Der Fall *mit verschiedenen Frequenzen* und *gleicher Amplitude* (Goniometrie!):
  - Gegeben seien: $y_1(t) = y_A \cdot \cos(\omega_1 \cdot t), \qquad y_2(t) = y_A \cdot \cos(\omega_2 \cdot t)$. $\leadsto$

$$y(t) = y_A\,(\cos(\omega_1 \cdot t) + \cos(\omega_2 \cdot t)) = 2\,y_A\,(\cos((\omega_1 - \omega_2) \cdot \frac{t}{2})\,\cos((\omega_1 + \omega_2) \cdot \frac{t}{2})).$$

- Die Auslenkung $2\,y_A\,\cos((\omega_1 - \omega_2) \cdot \frac{t}{2})$ mit der kleineren (langsamen) Kreisfrequenz $(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2})$ wird hier mit $\cos((\omega_1 + \omega_2) \cdot \frac{t}{2})$ mit der größeren (schnelleren) $(\omega_1 + \omega_2)\,\frac{t}{2}$ Kreisfrequenz multipliziert oder gestreckt oder verstärkt. *Auf einer zeitlich längeren Schwingung schwingt eine kürzere.* Das ergibt *periodische Verstärkungen.* Man nennt das *Schwebungen.* $\frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2\,\pi}$ heißt *Schwebefrequenz.*

- Überlagern sich zwei Schwingungen *mit senkrecht aufeinander stehenden Schwingungsrichtungen*, deren *Frequenzverhältnis rational* ist, so spricht man von *Lissajous-Figuren*.

- *Überlagern* sich *Schwingungen mit rationalem Frequenzverhältnis*, so kann man beide als Schwingungen mit einem Vielfachen einer gemeinsamen größten Grundfrequenz auffassen. Man sieht hier leicht, dass sich auch in der Summe diese gemeinsame Grundfrequenz zeigt. Damit wird sich auch die *Summe wieder periodisch* verhalten.

- An technischen Fachhochschulen behandelt man oft in der Mathematik die *Theorie der Fourierreihen*. Dort wird gezeigt, dass sich eine *periodische Schwingung als unendliche Summe (plus eine Konstante) von gestreckten Sinus- und Cosinusfunktionen* mit in der Art der natürlichen Zahlen steigenden Frequenzen *schreiben lässt*, wobei diese Frequenzen *ganzzahlige Vielfache einer Grundfrequenz* sind.
  - Die *Zerlegung* einer Schwingung in solche Teilschwingungen heißt *Fourieranalyse* (*harmonische Analyse*).
  - Die *Zusammensetzung* einer Schwingung aus solchen Teilschwingungen heißt *Fouriersynthese*.
  - Die Folgen der Frequenzen der Teilschwingungen oder der Amplituden nennt man *Spektren* (*Frequenzspektrum, Amplitudenspektrum*).

- Interessant ist es auch hier, die mathematisch konstruierten und programmierten Modelle auszuprobieren, welche man heute auf dem Internet findet. (Applets.)

6. Gekoppelte Schwingungen

- *Verbindet man* die *Fäden zweier Fadenpendel* mit einer *Schraubenfeder*, so überträgt sich die Schwingung des einen Pendels auf das andere. Die *Schwingenergie selbst pendelt zwischen den beiden Pendeln hin und her*. Wenn man mit zwei gleichen Fadenpendeln arbeitet, so entdeckt man zwei *Schwebungen*. Vermutlich lassen sich die beiden Pendel nicht exakt identisch bauen.

- Die *Eigenschwingung* des Systems kann man finden, wenn man beide Pendel simultan gleich auslenkt und los lässt. Die Pendel schwingen dann so, wie wenn sie nicht gekoppelt wären. Lenkt man sie entgegengesetzt aus, so verstärken sich die beiden Schwingungen. Wir finden so hier *zwei verschiedenen Eigenschwingungen*.

- Man kann nun *Systeme mit mehreren*, z.B. mit *n Pendeln* bauen. Dann findet man auch n *Eigenschwingungen*.

- Wenn Energie auf einer solchen Pendelkette weitertransportiert wird, spricht man von einer *Welle*. Man hat jetzt *zeitlich und örtlich verschiedene Amplituden*. Wir sehen: *Gekoppelte Pendel* sind ein diskretes *Übergangsglied* zwischen Schwingungen und Wellen mit kontinuierlichen örtlichen Verhältnissen. Aus den *Eigenschwingungen* entstehen dort die *stehenden Wellen*.

- Ebenfalls hier ist es interessant, die mathematisch konstruierten und programmierten Modelle auszuprobieren, welche man heute auf dem Internet findet. (Applets.)

Das logisch *folgende Gebiet* ist jetzt die *Wellenlehre*, da man sich eine Welle aus vielen zusammengekoppelten Pendeln entstanden denken kann.

2.12 Wellen

2.12.1 Von den harmonischen Schwingungen zu den Wellen

1. Allgemeines

Im letzen Kapitel haben wir erwähnt: Weil man sich eine *Welle aus vielen zusammengekoppelten Pendeln* (*Pendelketten* genannt) *entstanden* denken kann, ist die *Wellenlehre* das auf die Schwingungslehre logisch *folgende Gebiet*. Wie dort können wir vorangehend auch hier fragen und antworten:

Wieso sind Schwingungen und Wellen wichtig? *Überall wo Materie ist*, ist auch *Schwingung und damit meistens auch Welle:* In den Lichtteilchen, den Photonen, Elementarteilchen, in Materie allgemein (als Wellenpakete), in Erdbeben, bei den Wasserwellen, bei allen Apparaten mit ständig sich drehenden Teilen, bei elektromagnetischen Wellen, in Klang- oder Musikinstrumenten usw. Es gibt also neben *mechanischen* und makroskopischen *elektromagnetischen Wellen* auch noch *weitere* solche. Wellen ist oft auch mit *Elastizität von Material* verbunden. Absolut starres Material kann keine Wellen mit größeren Wellenlängen aufnehmen, da nichts sich bewegen kann.
Feststellung: Untersucht man bei *gekoppelten Pendeln* den *Einfluss der Federstärke*, so stellt man fest: Die *Energie wird umso rascher übertragen*, *je stärker* die Federn sind und damit die *Kopplung* ist.
Geltende Rahmenbedingung: In der Regel studieren wir hier Wellen in *homogenen Medien*.

2. Transversal- und Longitudinalwellen

- *Ein Wellenmodell in der Form einer Zusammensetzung von harmonischen Oszillatoren:*

  - Wir hängen eine *größere Anzahl n von Fadependel in identischen Abständen in einer Reihe* an einen Balken, welcher die *x–Achse parallel zur Balkenrichtung* markiert. Alle Fadependel seien gleichermaßen *durch Federn gekoppelt*, wie das am Schlusse der Schwingungslehre bei gekoppelten Schwingungen erklärt worden ist. Mit einem solchen System kann man nun *auf zwei verschiedene Arten Wellen erzeugen*. Man erhält *Transversalwellen* einerseits und *Longitudinalwellen* andererseits.
  - *Transversalwelle:* Wir ziehen das erste *Pendel seitlich (senkrecht zum Balken, 2 Möglichkeiten: links oder rechts) hoch* und lassen es *schwingen*. Mit der *seitlichen Richtung senkrecht zum Balken* ist hier auch eine *y–Richtung* gegeben. Wegen der *Koppelung* schwingt bald auch das zweite Pendel seitlich (*transversal*), dann das dritte usw. Die *Pendel regen sich gegenseitig an*, alle transversal, und die *zeitliche* Schwingung breitet sich räumlich dem Balken entlang von einem Pendel zum andern aus: Es entsteht so eine *Welle* mit einer *zeitlichen* sowie auch einer *räumlichen Auslenkung der beteiligten Massen*. Wir erhalten damit einen Prototyp einer *Transversalwelle*.

- *Projiziert* man die *schwingenden Massen von oben* auf eine *horizontale Fläche*, so stellt man fest, dass in einer *Momentaufnahme der Projektion* die *Massen* immer *auf einer* schönen *Sinus-* oder*Cosinuslinie* liegen. Die *Periodenlänge* einer solchen *Sinuslinie* nennen wir λ (= *Wellenlänge*). Innerhalb einer Wellenlänge liegen daher ein *Wellenberg* und ein *Wellental* resp. zwei *Bäuche* der Sinuslinie. Die Stellen, wo die *seitliche Auslenkung* 0 ist, nennen wir *Knoten* oder *Nulldurchgänge*. Weiter stellt man fest, dass sich eine solche Welle (Sinuslinie) in *x–Richtung* mit einer *Geschwindigkeit c* fortbewegt. D.h. die Knoten sowie die Bäuche wandern. Wenn wir die Wellenlänge ausgehend von einem Knoten Messen, so liegt am Ende der gemessenen Distanz wiederum ein Knoten und ebenfalls in der Mitte einer, genau so wie bei der Sinuslinie. Man sieht: *Innerhalb einer Wellenlänge hat es demnach immer mindestens zwei Knoten.*
    - $\leadsto$ Man kann auch sagen: *Die Distanz zwischen zwei Knoten beträgt eine halbe Wellenlänge.*
- *Longitudinalwelle:* Hier ziehen wir das erste *Pendel in x-Richtung hoch (parallel zum Balken,* 2 *Möglichkeiten: nach vorn oder zurück)* und lassen es *in x-Richtung schwingen.* Mit der*Längsrichtung (x–Richtung) parallel zum Balken* ist hier die oben erwähnte *y–Richtung* für die Betrachtung nicht notwendig. Wegen der *Koppelung* schwingt bald auch hier das zweite Pendel längs des Balkens (*logitudinal*), dann auch das dritte usw. Die *Pendel regen sich gegenseitig an*, alle logitudinal, und die *zeitliche* Schwingung breitet sich räumlich dem Balken entlang aus: Es entsteht so eine *Welle* mit einer *zeitlichen* sowie auch einer *räumlichen Auslenkung der beteiligten Massen*. Wir erhalten einen Prototyp einer *Longitudinalwelle*.
- *Projiziert* man die *schwingenden Massen von oben* auf eine *horizontale Fläche*, so stellt man fest, dass in einer *Momentaufnahme der Projektion* die *Massen* immer dichte und weniger dichte Zonen in periodischen Abständen bilden. Würde man die Auslenkung der Massen aus der Ruhelage senkrecht in y–Richtung umlegen und auftragen, so kämen diese *auf einer* schöner *Sinuslinie* zu liegen. Die *Periodenlänge* einer solchen *Sinuslinie* nennen wir wiederum λ (= *Wellenlänge*). Innerhalb einer Wellenlänge liegen daher wiederum ein *Wellenberg* und ein *Wellental* resp. zwei *Bäuche* der Sinuslinie. Die Stellen, so die *Auslenkung aus der Ruhelage* 0 ist, nennen wir *Knoten* oder *Nulldurchgänge*. Weiter stellt man fest, dass sich eine solche Welle (nach der Senkrechtstellung die Sinuslinie) in x–Richtung mit einer *Geschwindigkeit c* fortbewegt. D.h. die Knoten sowie die Bäuche usw. wandern. Wenn wir die Wellenlänge ausgehend von einem Knoten messen, so liegt am Ende der gemessenen Distanz wiederum ein Knoten und ebenfalls in der Mitte einer, genau so wie bei der Sinuslinie. Somit gilt auch hier: *Innerhalb einer Wellenlänge hat es demnach auch hier immer mindestens zwei Knoten.* Die *Wellenlänge* ist die *doppelte Distanz zwischen zwei Knoten.*
- Statt eine Sinuslinie zu verwenden kann man auch eine **Cosinuslinie** verwenden. Das bedeutet ja nur eine *Verschiebung des Startpunktes*, jedoch *keine*

Veränderung der Form. In den Formeln verwendet man öfters den Cosinus.

- *Diese beiden betrachteten Wellenarten können sich* in unserem Modell mit den gekoppelten Pendeln auch *überlagern* (Vektoraddition). So erhält man eine *Schwingung mit veränderlicher „Himmelsrichtung“*, die allgemein keinen speziellen Namen trägt. Umgekehrt kann man sich eine solche Welle auch als *Überlagerung von Transversal- und Logitudinalwelle* vorstellen und sie *in ihre Anteile aufteilen.* Daher wollen wir uns im Folgenden auf die *Hauptformen beschränken:* die *Longitudinal-* und die *Transversalwelle.*
- Wellen in der Art der eben besprochenen *Longitudinal-* oder der *Transversalwellen,* in welchen man eine *Sinus-* oder eine *Cosinuslinie* ausmachen kann, nennen wir *harmonische Wellen* (in Anlehnung an die zugrunde liegenden harmonischen Schwingungen).
- **Begriffe** im obigen Zusammenhang, *übernommen von den Oszillatoren:*
  - *Amplitude der Welle:* = Amplitude der beteiligte Oszillatoren.
  - *Schwingungsdauer der Welle:* = Schwingungsdauer der beteiligte Oszillatoren.
  - *Frequenz der Welle:* = Frequenz der beteiligte Oszillatoren.
- **Begriffe** im obigen Zusammenhang, *welche neu sind und daher nicht von den Oszillatoren übernommen werden können:*
  - *Wellenlänge* λ := Abstand der entsprechenden Maxima zweier benachbarter Wellenberge resp. Verdichtungsstellen oder doppelter Knotenabstand. Dies ist hier identisch mit einer Periode in Längsrichtung.
  - *Ausbreitungsgeschwindigkeit* c := *Geschwindigkeit*, mit welcher sich ein Wellenberg, Wellental, Knoten, eine Verdichtung usw. in der Fortpflanzungsrichtung x bewegt.
  - *Zwei Wellen* schwingen *in Phase*, wenn sie die größte Auslenkung immer *gleichzeitig* erreichen. Bei gleicher Frequenz resp. Periodendauer nennt man die *Differenz* $\varphi_1(t) - \varphi_2(t)$ aus den *Winkeln* $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$, welche bei den Schwingungen aufgetreten sind und so auch bei Wellen vorkommen, die *Phasenverschiebung.*

• Weiter unterscheidet man bezüglich ihrer *Dimension:*

- *Lineare Wellen* (z.B. in Saiten oder Schallrohren).
- *Ebene Wellen* (z.B. Wasserwellen).
  - Die *Wellenfront* ist hier eine *Kurve*. Den Begriff der *Wellenfront* kennt man von den *Wasserwellen.*
- *Raumwellen* (Radiowellen, elektromagnetische Wellen, Schallwellen).
  - Die *Wellenfront* ist hier eine *Fläche*.

- Während der Schwingungsperiode T eines einzelnen Oszillators vollführt dieser eine Pendelbewegung um die Ruhelage und befindet sich dann wieder am selben Ort, z.B. die Ruhelage. Das gilt für alle Oszillatoren. Befindet sich ein Oszillator zur Zeit $t = 0$ in Ruhelage, dann ist er später bei $t = \frac{T}{2}$ wieder in dieser Ruhelage und bei $t = T$ nochmals wieder. Es wurden also im Zeitintervall T an diesem Ort zwischen den Knoten zwei Bäuche durchlaufen oder vorbei geschoben und damit einmal die Wellenlänge. *Damit gilt folgender Zusammenhang zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit, der Wellenlänge und der Periodendauer:*

  - $\rightsquigarrow \quad c = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f$ oder $\lambda = c \cdot T$ resp. $\lambda = \frac{c}{f}$.

- Es gibt *Wellen*, bei welchen die *Fortpflanzungsgeschwindigkeit vom Medium abhängt* (z. B. Schallwellen oder Schwerewellen an der Oberfläche von Flüssigkeiten: Wellen ohne *Dispersion*).

- Zudem gibt es *Wellen*, bei welchen die *Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Frequenz abhängt* (z. B. Biegewellen in Stäben oder Wasserwellen in der Tiefe).

- *Die Wellengleichung im Falle harmonischer Wellen:* Hier gilt im Prinzip die Gleichung für harmonische Oszillatoren, in welchen ein Term für die Distanzabhängigkeit in Ausbreitungsrichtung eingefügt werden muss. Ist diese Distanz konstant, so muss ein harmonischer Oszillator entstehen. Ist der Zeitpunkt konstant, dann muss räumlich ebenfalls ein harmonischer Oszillator entstehen. Folgende Gleichung ergibt ein *Modell für das Gewünschte:*

  - Für die *in positiver x-Richtung laufende Welle* gilt:
    - $y(t, x) = y_A \cos(\omega \cdot t - k \cdot x) = y_A \cos(2\pi (\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}))$. Dabei ist:
    - $\frac{2\pi}{T} = \omega =$ *Kreisfrequenz*, $\frac{2\pi}{\lambda} = k =$ *Kreiswellenzahl.*
  - Läuft die Welle in umgekehrter Richtung, dann gilt:
    - $y(t, x) = y_A \cos(\omega \cdot t + k \cdot x) = y_A \cos(2\pi (\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}))$.
  - Diese Gleichungen gelten im Falle, in dem die Energie der Oszillatoren ohne Verlust weitergegeben wird. Falls aber ein Energieverlust entsteht, so muss die Amplitude der Schwingungen abnehmen. (Siehe Kapitel Schwingungen $\rightsquigarrow$ $E_{Schw}(t) = \frac{1}{2} \cdot D \cdot y_A^2$ proportional zu y_A^2.)
  - Beim Vorhandensein von *Erregerzentren* gilt:
    - Ist die Wellenfront eine Kurve (z.B. ein Kreis), so nimmt die Energie linear zum Abstand vom Erregerzentrum ab, denn sie verteilt sich bei doppeltem Abstand auf den doppelten Umfang. Pro Bogenlänge ist daher nur noch die Hälfte vorhanden.

    * Ist die Wellenfront eine Fläche (z.B. eine Kugelsphäre), so nimmt die Energie quadratisch zum Abstand vom Erregerzentrum ab, denn sie verteilt sich bei doppeltem Abstand auf die Vierfache Oberfläche. Pro Flächeneinheit ist daher nur noch ein Viertel vorhanden.

- *Wellen übertragen Energie*. Z.B. bei Longitudinalwellen entstehen *Kompressionszonen* mit *Druck*, wo demnach *Kompressionsarbeit* geleistet wird usw.
- Ebenfalls ist es hier interessant, die mathematisch konstruierten und programmierten Modelle auszuprobieren, welche man heute auf dem Internet findet. (*Applets.*)

3. Elastische Wellen

- *Elastische Wellen* sind solche, bei denen die *Kopplungskräfte* zwischen den *Schwingmassen* (Einzelpendel) durch *elastische Kräfte* bei der *Materialverformung* anlässlich der Schwingung verursacht werden.
  - $\leadsto$ Beispiel *Schallwellen.*
- Bei *elastischen Wellen* macht man *wie bei Pendelketten* die*Feststellung:* Die *Energie* wird *umso rascher übertragen*, *je stärker* die *Kopplung* ist.
  - Die *Ausbreitungsgeschwindigkeit steigt* daher mit der *Härte* des *Materials* und auch mit der *Dichte*. (*Beispiel:* Die Indianer im Western horchen an den Schienen, ob der Zug kommt. Man sieht den Zug noch nicht.)
  - Man findet damit die *Formel:* $c^2 = \dfrac{\text{Härte}}{\text{Dichte}}$.
    * Diese *Formel* ist erst einmal *quantitativ* zu verstehen, denn der *Härtebegriff* ist hier noch nicht exakt definiert. (Bekannt ist vielleicht die Brinellhärte aus der Materiallehre.) Die *Dichte* lässt sich durch *die Dehnung* (z.B. *Saite*) infolge der angelegten *Spannung ändern.*
- Ist die *Wellenlänge groß gegenüber den Abständen der Oszillatoren*, so hat die *Ausbreitungsgeschwindigkeit* praktisch *keinen Einfluss auf die Frequenz.*
- Bei *Transversalwellen* (*Scherwellen*) sind für die Schwingmassen *seitliche Rückstellkräfte notwendig.* Das *Material* wird auf *Scherung* beansprucht. Das führt zu einer *Formänderung* des Materials. Dieses muss daher *formfest* sein. *Daher gibt es Transversalwellen nur in festen Körpern.*
- In der Regel ist das Material *für die Kompression härter als* für die *Scherung.* Konsequenz:
  - $\leadsto$ *Longitudinalwellen* sind in der Regel *schneller als Transversalwellen.*
    * $\leadsto$ *Erdbeben*! Longitudinale *Primärwellen* oder *P-Wellen*, transversale *Sekundärwellen* oder *S-Wellen.*

- *Dehnwellen:* Longitudinalwellen in dünnen Stäben? diese werden *seitlich gedehnt* in den Kompressionszonen. Dadurch wird das Material weicher und die *Ausbreitungsgeschwindigkeit* c_D damit *kleiner*.
  - Es gilt: $c_D^2 = \dfrac{E}{\rho}$.
    - E = *Elastizitätsmodul*, definiert durch $\dfrac{F}{A} = \sigma = E \cdot \dfrac{\Delta l}{l}$
    - *Spannung = Elastizitätsmodul mal Dehnung*
- *Biegewellen* in Stäben, Platten usw.: Sie zeigen *Dispersion* $\leadsto$ *Schneller* bei *kurzen* Wellenlängen, *langsamer* bei *großen*.
- *Ausbreitungsgeschwindigkeit* in *Flüssigkeiten:*
  - Hier ist die *Kompressibilität* χ wichtig: $\leadsto$ χ wird definiert durch:
    - $\dfrac{\Delta V}{\Delta p} = -\chi \cdot V$. Dabei ist $\dfrac{1}{\chi}$ ein Härtemaß für das Medium.
  - Es gilt: $c^2_{\text{Flüssigkeit}} = \dfrac{1}{\chi \cdot \rho}$.
- *Ausbreitungsgeschwindigkeit* in*Gasen:*
  - Hier gilt Analoges zu den Flüssigkeiten. Wegen der Gasgleichung kann χ jedoch berechnet werden. Es gilt: $pV = n\,RT = \dfrac{m}{M}\,RT$. Wegen dem raschen Wechsel von Überdruck zu Unterdruck (z.B. bei Schallwellen) hat man die adiabatische Situation. Man findet schließlich die Formel: $c^2_{Gas} = \dfrac{1}{\chi \cdot \rho} = \dfrac{\kappa \cdot p}{\rho} = \dfrac{\kappa \cdot R \cdot T}{M}$.
    - Diese Formel zeigt auf der rechten Seite, dass die Schallgeschwindigkeit nur von der absoluten Temperatur T abhängt, jedoch nicht von p und ρ. Mit p ändert auch ρ, wenn T ändert.
- Zu den *Wellen in Saiten* (gespannte Drähte, Schnüre, Seile usw.):
  - Bekanntlich schwingen *gespannte Saiten* in *Transversalwellen.* Die Auslenkung ist oft von bloßem Auge beobachtbar. Die *Geschwindigkeit der Ausbreitung*, welche ja mit der *Frequenz gekoppelt* ist, hängt auch von der *Spannung* der Seite *ab*, wie jeder Gitarrist weiß. Die *Frequenz bestimmt* aber die *Tonhöhe.* Entscheidend für c ist der Quotient *Masse pro Länge* und die *Spannkraft.* Man findet:
    - $c^2_{Saite} = \dfrac{F}{(\dfrac{m}{l})} = F \cdot \dfrac{l}{m} = F \cdot \dfrac{l \cdot A}{m \cdot A} = \dfrac{F}{\rho \cdot A} = \dfrac{p}{\rho}$.
    - $\leadsto$ $c^2_{Saite} = \dfrac{\sigma}{\rho}$. Das ist *Spannung in der Seite pro Dichte.*
    - $\leadsto$ c^2_{Saite} ist *begrenzt* durch *die maximal mögliche Spannung.*

- Lässt man zwei sonst gleiche Wellen gegeneinander laufen, so hat man:
  - $y_1(t,\, x) + y_2(t,\, x) = y_A\, \cos(\omega \cdot t + k\, x) + y_A\, \cos(\omega\, t - k\, x)$
  - $\leadsto\;\; y(t,\, x) = y_1(t,\, x) + y_2(t,\, x) = 2\, \cos(\omega \cdot t)\, \cos(k\, x)$.
  - $\leadsto$ An jedem fixem Ort (x) ist somit $y(t,\, x) = \cos(\omega \cdot t) \cdot const.(x)$. Dabei kann an gewissen Orten x_0 das $y(t,\, x_0)$ gleich 0 werden, nämlich dann, wenn $\cos(k,\, x_0) = 0$ ist (also für $k\, x_0 = \frac{\pi}{2} + n\, \pi$).
  - $\leadsto$ Man hat hier eine *stehende harmonische Welle*. Die *Knoten* ($y(t,\, x_0) = 0$) wandern nicht, sondern sie *bleiben fix*. Dazwischen *oszillieren* die *Bäuche*. Alle Teilchen *zwischen* je zwei benachbart liegenden *Knoten* schwingen mit *gleicher Frequenz*, also *in Phase*.
  - Solche *stehende Wellen* kann man auch *durch Reflexion erze*ugen. Z.B. bringe man ein am anderen Ende fix angebundenes Seil durch Schwingen mit der Hand am eigenen Ende in Schwingung. Dann wird die sich bildende Welle ersichtlich beim Auftreffen am anderen, fixen Ende reflektiert.
  - *Stehende Logitudinalwellen* bilden sich auch in *Schallrohren* aus (Musikinstrumente). Die *Knoten* und *Bäuche* kann man durch *einstreuen von feinem Material* in einem *transparenten Rohr sichtbar* machen. Bei den Bäuchen (Bewegungsbäuchen) wird das Material aufgewirbelt und damit in der Umgebung verteilt, bei Knoten jedoch nicht.
  - *Knoten* findet man am *Ende von eingespannten Saiten* oder an *geschlossenen Enden von Schallrohren*. An *offenen Enden* findet man *Bäuche*.
  - Damit *kann die Anzahl Knoten in einer Saite oder in einem Schallrohr nicht beliebig sein*. In der *Saite* können sich *nur ganzzahlige Vielfache einer halben Wellenlänge* ausbilden. Im beidseitig offenen Schallrohr ebenso usw.
  - Zu den verschiedenen Knotenausbildungen und Bauchbildern bei Musikinstrumenten vergleiche man die Literatur.
  - Interessant ist die Folgerung bezüglich *Tonhöhe* für die *möglichen Frequenzen*, welche von *Saiten* oder aus *Schallrohren abgestrahlt* werden. *Diese Frequenzen sind für die Tonhöhe bestimmend*. In einer Saite der Länge h gilt für die möglichen Wellenlängen die Gleichung:
    * $h = n \cdot \frac{\lambda_n}{2} \;\Rightarrow\; \lambda_n = \frac{2\, h}{n}$.
    * Zudem gilt: $c^2 = \frac{\text{Härte}}{\text{Dichte}} = const. \;\Rightarrow\; c = const.$
    * $\leadsto\;\; c_{Saite} = \frac{\lambda}{T} = const. \leadsto$ Mit f:
    * $\leadsto\;\; f = \frac{1}{T} = \frac{const.}{\lambda} = \frac{const.}{(\frac{2\, h}{n})} = \frac{n \cdot const.}{2\, h}$.
    * $\leadsto\;\; f = n \cdot const.$

* Mit der Schwingungsdauer T und damit der *Frequenz* f wird die Luft zum Schwingen angeregt. Dort gilt:
* $c_{Luft} = \frac{\lambda_{Luft}}{T} = \lambda_{Luft} \cdot f$ oder $\lambda_{Luft} = c_{Luft} \cdot T$ resp. $\lambda_{Luft} = \frac{c_{Luft}}{f}$.
* $c_{Luft} \approx 343\ m\,s^{-1}$ $(\hat{=}1234.8\ km/h)$ für 20^oC in Luft ($1013\ hPa$).
* $\leadsto\ f = \frac{c_{Luft}}{\lambda} = \frac{c_{Luft}}{(\frac{2\,h}{n})} = \frac{n \cdot c_{Luft}}{2\,h} = n \cdot const.$
* $\leadsto\ \lambda_{Luft} = \frac{c_{Luft}}{f} = \frac{const.}{n}$.
* Die *möglichen Frequenzen einer Saite* sind also alle Vielfache einer gewissen Grundfrequenz. Die entsprechend möglichen *Wellenlängen* sind *reziproke Vielfache.*

- Bei schwingenden Membranen, Platten, Resonanzböden oder Kästen sowie Klangkörper sind die Betrachtungen mehrdimensional. Sie erfordern höhere Mathematik, welche weit über das an der Fachhochschule zeitlich noch erreichbare Niveau hinausgeht.

4. Brechung von Wellen, Totalreflexion, Interferenz, Beugung

- **Brechung.** Beobachtungen wie auch theoretische Herleitungen zeigen:

  – Die Frequenz einer Welle bleibt beim Übergang der Welle von einem Medium in ein anderes (mit unterschiedlichen physikalischen Parametern) *konstant:* $\leadsto\ f = const.$

  – Wegen $c = \lambda \cdot f$ oder $f = \frac{c}{\lambda}$ kann daher *nur* c und λ ändern.

  – Die *Wellenlänge* λ und die *Geschwindigkeit* c *ändern* auch.

  – An der *Grenzschicht* von zwei verschiedenen Medien findet (wie in der Optik) eine *Brechung* statt. Die Wellenfronten werden an der Grenzfläche *abgeknickt.* Die *Brechung* findet nach dem folgenden *Brechungsgesetz* statt:

    * Sei A die gegen die Grenzschicht einlaufende Welle und B die nach dem Grenzschichtdurchgang weiterlaufende Welle. Der kleinere Winkel der Wellenfront A gegen die Grenzschicht sei α, derjenige der Wellenfront B gegen die Grenzschicht sei β. Dann gilt:
    * $$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{\lambda_A}{\lambda_B} = \frac{c_A}{c_B}.$$
    * Das eben hergeleitete *Brechungsgesetz* kennt man sonst von den *Schallwellen* her. Es *gilt aber allgemein für Wellen*, wie die Herleitung zeigt.

  – *Wellen*, welche sich in *inhomogenen Medien* ausbreiten, können daher auf *gekrümmten Wegen* (*Bogen*) laufen.

        * Z.B. im Wasser hängt die Schallgeschwindigkeit von der Tiefe ab. Weiter unten ist das Wasser dichter usw. Dann ändert sich die Schallgeschwindigkeit und damit die Wellenlänge. Schall bereitet sich dort nicht geradlinig aus.

- **Prinzip von Fermat:** Das Brechungsgesetz ist eine Konsequenz eines höheren Prinzips, nämlich des *Prinzips von Fermat:*
    - *In einem inhomogenen Medium läuft eine Welle zwischen zwei Punkten so, dass ihre Laufzeit minimal ist.*
        * Betreffend Untersuchungen zu diesem Prinzip muss auf die höhere Mathematik verwiesen werden (z.B. Variationsrechnung).
        * Das Prinzip von Fermat kann aus dem nachstehend erklärten und als evident einsehbaren Prinzip von Huygens deduziert werden.
- **Überlagerungen beliebiger Wellen und Interferenz:**
    - Zwei *Wellen laufen wie folgt übereinander hinweg:*
        * Sie *beeinflussen* sich *gegenseitig nicht.*
        * An der *Überlagerungsstelle addieren* sich die beiden Wellen (Auslenkungen) *vektoriell.*
    - *Ungestörte Überlagerung* von *zwei Wellen gleicher Frequenz* bezeichnet man als *Interferenz.*
        * *Konstruktive Interferenz:* Zwei Teilwellen in Phase $\leadsto$ *Verstärkung* der Auslenkung.
        * *Destruktive Interferenz:* Zwei Teilwellen in Gegenphase $\leadsto$ *Abschwächung* oder gar *Auslöschung* der Auslenkung.
    - Von Interesse sind oft auch *Interferenzbilder* von *in der Fläche* sich ausbreitenden Wellen.
    - Sei s der *Abstand zu einem Wellenerreger.*
    - Dann gilt bei *konstruktiver Interferenz:*
        * *Gangunterschied:* $\Delta s = n \cdot \lambda$.
        * *Phasenunterschied:* $\Delta\varphi = 2\,\pi \cdot (\dfrac{\Delta s}{\lambda}) = 2\,\pi \cdot n, \quad n \in \mathbb{Z}$ (= ganze Zahl).
    - Und bei *destruktiver Interferenz:*
        * *Gangunterschied:* $\Delta s = (n + \frac{1}{2}) \cdot \lambda$.
        * *Phasenunterschied:* $\Delta\varphi = 2\,\pi \cdot (\dfrac{\Delta s}{\lambda}) = 2\,\pi \cdot (n + \dfrac{1}{2}), \ \ n \in \mathbb{Z}$ wie oben.
    - Bei *der Interferenz wird die Gesamtenergie der Wellen nicht verändert*, jedoch wird die Wellenenergieverteilung im Raum verändert. Es gibt Orte konstruktiver und Orte destruktiver Interferenz.

- **Beugung, Streuung und das Prinzip von Huygens:**
  - Läuft eine *Welle gegen ein Hindernis mit einer breiten Öffnung*, so läuft sie im *Bereich der Öffnung ungestört hindurch*. Hinter der Öffnung läuft sie ungestört weiter. *Neben* der Öffnung wird sie *reflektiert*. Hinter der Öffnung zeigt sich *an den Rändern* des durchlaufenden Wellenteils ein „*Wellenschatten*“.
  - Macht man die *Öffnung enger*, so tritt der *„Wellenschatten“* in der Schattenzone *stärker in Erscheinung*.
  - Macht man die *Öffnung* schließlich etwa so *breit wie eine Wellenlänge*, so entstehen *hinter der Öffnung kreisförmige Wellen* (nur noch Wellenschatten).
  - Das Phänomen des *Ausbreitens der Welle in die Schattenzone* heißt *Beugung*.
  - *Erklären* kann man die Beugung mit Hilfe *des Prinzips von Huygens*. Dieses Prinzip besagt:
    - Die Menge der *Punkte*, welche *von einer Welle gleichzeitig erreicht* werden, heißen *Wellenfront* (Wellenfläche oder gegebenenfalls Wellenkurve).
    - *Jeden Punkt* einer solchen *Front* kann man als *Ausgangspunkt* einer *Elementarwelle* mit gleicher Wellenlänge und Frequenz wie die Ausgangswelle ansehen.
  - *Steht im Ausbreitungsbereich einer Welle ein Hindernis*, so werden die *Hindernis-Enden* ebenfalls *Ausgangspunkte von Elementarwellen*. Diese nennt man *Streuwellen*. Der Effekt heißt *Streuung*. Speziell gilt:
    - Ein *kleines Hindernis* senden beim Durchgang einer Welle *Streuwellen* aus.
    - Wenn das *Hindernis größer* ist *als die Wellenlänge*, so kann man *anhand der Streuwellen* auf die *Form des Hindernisses* schließen.
    - Wenn das *Hindernis kleiner ist als die Wellenlänge*, so ist obiger Schluss *nicht* korrekt möglich.
    - Will man mit Hilfe von Struewellen Aussagen über das Hindernis gewinnen, so muss man Wellenlängen wählen, welche kleiner sind als das Hindernis.
    - Die Ortungsmöglichkeit mittels Streuwellen wird technisch genutzt (vgl. Literatur).
- **Die Reflexion von Wellen an einem Ende:**
  - Wir erzeugen mittels eines in Schwingung gebrachten Seils eine Welle.
  - Beobachtung:
    - An einem *festen Ende* (Seil befestigt) wird ein *Wellenberg als Wellental reflektiert*.
    - An einem *losen* oder *freien Ende* wird ein *Wellenberg als Wellenberg reflektiert*.

2.13 Schall

2.13.1 Schall, Schallwellen, Schallempfindung

1. Allgemeines

Die *Lehre vom Schall knüpft* von der inhaltlichen und begrifflichen Logik *an die Wellenlehre* an. Beim Schall geht es um *Schallwellen*. Vor allem in der Luft, aber auch in andern Medien, welche für den Menschen in angenehmer Weise oder auch in störender Weise Schall übertragen.
Rahmenbedingung: In der Regel studieren wir hier Wellen in *homogenen Medien*.
Dabei kommt man nicht um die *Diskrepanz* zwischen *Schallempfindung* durch den Menschen mit seinen Ohren und der *Schallmessung* durch physikalische Messgeräte herum. Man generell fest: Wenn man mit einem Gerät Töne aufgrund von Schwingungen mit einer gewissen Frequenz erzeugen kann (z.B. mittels einer Saite), so nimmt mit steigender Frequenz auch der empfundene Ton an Höhe zu. Der Zusammenhang scheint aber nicht linear zu sein. Denn man stellt z.B. fest, dass ein als *doppelt so hoch empfundener Ton* im Vergleich zu einem anderen Ton mittels Schall mit *doppelter Frequenz* verursacht ist. Als *doppelt so hoch* empfindet man das *Intervall von einer Oktave*. Ein *dreimal so hoher Ton* (2. Oktaven weiter oben) beruht auf *Schwingungen mit der vierfachen Frequenz*. Wenn man die *Tonhöhen addiert*, so muss man die *Frequenzen multiplizieren*.

2. Über die Höhe der Töne, die Klangfarbe und die Klanghöhe

Folgende Fakten erhält man durch *Messung*. Oder man hat sie gegebenenfalls durch *Definition* erhalten:

- Die *Höhe* eines *Tons* ist durch die *Frequenz* der *verursachenden Schallwelle* bestimmt.
- Bei *Verdopplung der Frequenz* steigt der *Ton* um eine *Oktave*.
- Das *Intervall zwischen zwei Tönen* wird *bestimmt* durch das *Verhältnis* der zugehörigen *Frequenzen*.
- Die Frequenz misst man in *Hertz*. Einheit: $1\ Hz = 1\ sec^{-1}$.
- Der *Grundton* unseres Tonsystems ist der *Kammerton* a^1. Er wurde 1939 auf 440 Hz festgelegt. (Früher war er tiefer.)
- Was die *Tonleitern, Tonarten, Intervalle, Stimmungen* usw. betrifft: Dazu konsultiere man die *Literatur*. Diese Dinge sind Teil unserer Kultur eher als Teil der Naturwissenschaft. Sie haben oft Gastrecht im Physikunterricht, gehören aber in andere Wissenschaften. (Vgl. http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KArch3.pdf.)
- Bei den *Frequenzverhältnissen* kann man ebenfalls die Bezeichnungen der Tonintervalle bebrauchen: *Prime, Sekunde, Terz, Quart, Quinte, Sext, Septime, Oktave*. Diese beruhten ursprünglich auf *ganzzahligen Frequenzverhältnissen*.

- Von Interesse ist das *Halbtonverhältnis* q bei der *temperierten Stimmung* (Frequenzverhältnis benachbarter Halbtöne): Da gilt $q^{12} = 2 \quad (= 2 : 1)$. (*12 Tonschritte* in einer *Oktave*. $\leadsto$ Verhältnis der Frequenzen in der Oktave z.B. $(c'' : c') = (2 : 1)$. *Sieben Intervalle* bei 12 Halbtönen machen eine *Tonleiter* aus.)

- Bei einer *Saite* gilt für die *Grundfrequenz* bzw. für die *größte Wellenlänge:*

  - $c = \dfrac{\lambda}{T} = \dfrac{2\,L}{T} = 2\,L \cdot f$ mit $L =$ *Saitenläge.* $\leadsto$ $f = \dfrac{c}{2\,L}$.
  - $\leadsto$ Größere Saitenlängen $L \leadsto$ kleinere Frequenz f und umgekehrt.

- Aus der *Wellenlehre* ist bekannt:

  - $c_{Saite}^2 = \dfrac{\sigma}{\rho} \leadsto$ Größere Spannung $\Rightarrow$ kleinere Dichte $\Rightarrow$ größeres c.
  - $\leadsto$ Wegen $f = \dfrac{c}{2\,L}$ wird f somit *grösser mit der Spannung.*

- *Hörbereich des Menschen:* Ca. 20 Hz bis ca. $20'000$ Hz.

  - $\leadsto$ Ca. $1'000$ mal die kleinste hörbare Frequenz (20 Hz).
    Es gilt: $2^{10} = 1024 \approx 1'000$.
  - Mit 2^{10} hat man 10-mal den Faktor 2 angewandt und jedes Mal eine Oktave erzeugt. Der *Hörbereich des Menschen* umfasst daher ca. 20 *Oktaven.* Im *Alter* reduziert sich das auf ca. 9 *Oktaven*, da die oberen wegfallen. (*Hörschäden* von den Kanonen und den ebenso lauten Lautsprechern $\leadsto$ „Schallkanonen"!)
  - Oberhalb des Hörbereichs liegt *Ultraschall*, unterhalb liegt *Infraschall.*

- **Klanghöhe und Klangfarbe:**

  - Ein *Klang* hat zwei Komponenten: Der *Grundton* und dazu eine Anzahl *Obertöne* (*Partialtöne*).
  - Die *Mischung der Obertöne mit ihren Stärken* (Amplituden) *ergibt* die *Klangfarbe.*
  - Die *Klangfarbe* bestimmt den Ausdruck oder das musikalische Wesen des *Instruments.*
  - Mittels *Fourieranalyse* man die die *Partialtöne eines Instruments darstellen.*
  - Z.B. bei einer *Saite* sind nur *Obertöne* möglich, deren *halbe Wellenlängen ganzzahlige Teile* der *halben Wellenlänge* des *Grundtones* (= Saitenlänge) sind.
  - Ähnliches gilt für *Schallrohre* (Blasinstrumente). (Hier muss man aber statt halbe Wellenlängen *Viertel* betrachten.)

3. Das Problem des Schallpegels und der Lautstärke

- *Wellen transportieren* bekanntlich *Energie*. Um diese Energie *rechnerisch fassen* zu können, muss man im konkreten Fall ein *Modell* entwickeln, das die durch den Anreger pro Zeiteinheit hinein *gesteckte Energie*, die pro Zeiteinheit *weitergegebene Energie* und die pro Zeiteinheit *abgestrahlte Energie* erfassen kann. Diese Dinge sind *situationsgebunden*, lassen sich daher *nicht allgemein beziffern*.

- Um ein geeignetes *Maß für den Energietransport* zu haben verwenden wir den *Intensitätsbegriff*. Wir betrachten dazu eine *Fläche senkrecht* zur Ausbreitungsrichtung der Welle.
  - *Schallintensität* = Durchfließende Leistung pro Fläche
    - $\leadsto \ I = \dfrac{P}{A}$ resp. $I = \dfrac{\Delta P}{\Delta A}$.
    - $\leadsto$ Einheit: Watt pro $m^2 = W\,m^{-2}$.
  - Das *menschliche Gehör registriert die Intensität:* Größere Intensität bedeutet lautere Geräusche.
  - Das *Gehör empfindet logarithmisch:*
    - *Reizschwelle:* Ca. $I_0 = 10^{-12}\ W\,m^{-2}$.
    - *Hörschäden:* Bei über ca. $I_1 = 1\ W\,m^{-2}$.
  - Man definiert daher den *Schallpegel* $L = 10 \cdot \lg(\dfrac{I}{I_0})$.
    - lg ist der 10-er *Logarithmus*.
    - Einheit: *Dimensionlos*. Künstliche Einheit: *Dezibel, dB* .
    - *Wichtig:* Wenn man zwei Intensitäten I_1 und I_2 addiert, so addieren sich die zugehörigen Schallpegel nicht.
  - *Beispiel:*
    $I_1 = 1\ W\,m^{-2}, \quad I_2 = 1\ W\,m^{-2}, \quad I_1 + I_2 = 2\ W\,m^{-2}, \quad I_0 = 10^{-12}\ W\,m^{-2}$
    $\Rightarrow\ L_1 = L_2 = 10 \cdot \lg(10^{12}) = 120, \quad L_{1 \text{ und } 2} = 10 \cdot \lg(2 \cdot 10^{12}) = 123.01$
    $\Rightarrow\ L_1 + L_1 = 240 \neq L_{1 \text{ und } 2} = 123.01.$
    - Die *Schallpegel* dürfen, wie man sieht, *nicht addiert* werden!
  - *Weber-Fechnersches Gesetz:*
    - *Empfindung* $E = c \cdot \dfrac{\ln(R)}{\ln(R_0)}$. $\quad R =$ *Reizstärke, Intensität.*
    - *Gesetz:* $\leadsto$ Bei einem *exponentiellen Anstieg* der *Reizstärke* R wächst die *Empfindung* E des Reizes im Sinnesorgan nur *linear* an. c ist eine von der jeweiligen Reizart abhängige Größe (*const.*).

- *Zusammenhang zwischen Schallintensität und Schalldruck.* (Die Herleitungen sind zu umfangreich: Sie sprengen den hier gegebenen Rahmen infolge der Komplexität des notwendigen Begriffsgefüges. Siehe Fachliteratur, z.B. Gerthsen, Kneser, Vogel, Physik.)

- Sei p_A = Schalldruckamplitude, $Z = \rho \cdot u$, u = Schallgeschwindigkeit und Z = „*Schallhärte*“ („*Schallimpedanz*“), v_S = Amplitude der Geschwindigkeit der Teilchenbewegung = *Schallschnelle*. Dann *gilt:*
  * $I = \frac{1}{2} \cdot \frac{p_A^2}{Z} = \frac{1}{2} \cdot v_S^2 \cdot Z, \qquad L = 20 \cdot \lg \cdot (\frac{p}{p_0}), \qquad p = \text{Druck}.$

- Da das *menschliche Ohr verschiedene Frequenzen verschieden intensiv empfindet*, hat man abweichend von der Dezibel-Skala zusätzlich noch die *Phon-Skala* eingeführt. Diese lässt sich am besten graphisch wiedergeben, vgl. *Fachliteratur.*

- Ebenso vergleiche man bezüglich *Richtungsempfindlichkeit* des menschlichen Ohrs die Fachliteratur.
  - Mit *nur einem Ohr* kann der Mensch die *Herkunftsrichtung eines Tons nicht orten.*

4. Doppler-Effekt

- Wenn eine *ruhende Schallquelle* in alle offenen Richtungen an *ruhende Beobachter* Töne oder *Geräusche* (= komplizierte Tongemische) aussendet, dann *erfahren* oder *registrieren* die *Beobachter die Frequenzen so wie sie ausgesendet worden sind.* Wenn das nicht so wäre, könnte man wohl niemanden für ein Kammermusikkonzert begeistern.

- Bei *bewegten Schallquellen* ist das anders. *Modellierung:*
  - Fährt ein vorne und hinten breites *Boot* oder Floss im *Wasser*, so *schiebt es vor sich die Wellenberge* in einer Weise *zusammen*, so dass man *kürzere Wellenlängen* sieht. *Hinter dem Boot* oder Floss stellt man *längere Wellenlängen* fest. Dort werden die Wellenberge infolge der Fortbewegung des Verursachers auseinander gezogen.
  - Ebenso verhält es sich bei einem *rasch vorbeifahrenden Feuerwehr- oder Polizeiauto* mit heulenden *Sirenen.* Kommt einem ein solches Auto mit entsprechender Geschwindigkeit *entgegen*, so nimmt man bekanntlich einen *höheren Ton* wahr als beim stehenden Auto. Fährt dieses Auto dann *von einem weg*, so ist bekanntlich der wahrgenommene *Ton tiefer.* Die bewegten *Sirenen* senden aber dennoch immer eine *fixe Frequenz* aus. Der ruhende *Beobachter* hingegen nimmt eine *andere Frequenz* wahr. Wir müssen hier somit zwei verschiedene Frequenzen unterscheiden: Diejenige des *ruhenden Beobachters* f_B und diejenige der *bewegten Quelle* f_Q .

- *In einem gegebenen Zeitintervall* Δt haben wir die folgende *Situation bezüglich den registrierten Schwingungen:*
  - *Ruhender Beobachter:* $\qquad n_B = \frac{\Delta t}{T_B} = \Delta t \cdot f_B$.

– *Bewegte Quelle:* $\quad n_Q = \frac{\Delta t}{T_Q} = \Delta t \cdot f_Q.$

– In Δt bewegt sich die Quelle um $\Delta s = \Delta t \cdot v$ ($v =$ Geschwindigkeit der Quelle).

– Die *entsprechende Situation* erhält man, wenn man die *Quelle fix* hält und dafür den *Beobachter bewegt*. Bewegt sich der Beobachter auf die Quelle zu, so durchquert er in der Zeit Δt eine Anzahl zusätzlicher Wellenberge. Bewegt er sich von der Quelle weg, so passiert er nicht so viele (resp. weniger) Wellenberge. Wie viele sind das jeweils?

– *Fall 1:* Die *Quelle ruht*, der *Beobachter bewegt sich* auf die Quelle zu oder von ihr weg. Die Situation sei so beschrieben, dass in der Zeit Δt genau n Wellenberge oder Wellenlängen von der Quelle her am Beobachter vorbeiwandern.

  * Eine Welle wandert in dieser Zeit um $d = n \cdot \lambda = \Delta t \cdot c$.
  * $\leadsto \quad n = \frac{d}{\lambda}$ mit $\lambda = c \cdot T_Q = \frac{c}{f_Q}$.
  * $\leadsto \quad n = (\frac{d}{c}) \cdot f_Q = (\frac{\Delta t \cdot c}{c}) \cdot f_Q = \Delta t \cdot f_Q$.
  * Der Beobachter bewegt sich in dieser Zeit um die Strecke Δs.
  * $\Delta s = v_B \cdot \Delta t$ ist positiv ($v_B > 0$), wenn sich der Beobachter auf die Quelle zu bewegt. Er durchquert somit in der Zeit Δt eine Anzahl $n_{Zus} = n_Z$ Wellenberge mehr als wenn er ruhen würde.
  * Im umgekehrten Fall ist Δs negativ ($v_B < 0$). Entsprechend für n_Z.
  * Es gilt: $n_Z = \frac{\Delta s}{\lambda} = \frac{v_B \cdot \Delta t}{(\frac{c}{f_Q})} = \frac{v_B \cdot \Delta t \cdot f_Q}{c}$ sowie:
  * $n_B = n + n_Z = \Delta t \cdot f_Q + \frac{v_B \cdot \Delta t \cdot f_Q}{c} = \Delta t \cdot f_Q \cdot (1 + \frac{v_B}{c})$.
  * Setzt man hier $\Delta t = 1\ sec$, so wird $n_B = f_B$ unter Anpassung der Einheiten.

– $\leadsto$ *Formel:* $\quad f_B = f_Q \cdot (1 + \frac{v_B}{c})$.

  * Die vom Beobachter wahrgenommene Frequenz unterscheidet sich hier also von der Quellenfrequenz um den Faktor $(1 + \frac{v_B}{c})$. Ist $v_B > 0$ (der Beobachter bewegt sich auf die Quelle zu), so wird $f_B > f_Q$. Entsprechend ist $f_B < f_Q$ für $v_B < 0$ (der Beobachter bewegt sich von der Quelle weg).

– *Fall 2:* Im Falle wo sich die *Quelle statt der Beobachter bewegt*, muss man die Rollen vertauschen. Dann gilt:

  * $\leadsto \quad f_Q = f_B \cdot (1 + \frac{v_Q}{c})$.

– $\leadsto$ *Formel:* $\quad f_B = \frac{f_Q}{(1 + \frac{v_Q}{c})}$.

– *Bemerkungen:*

* Eine interessante, übertragene *Anwendung des Doppler-Effekts* ist die bekannte *Rotverschiebung* von charakteristischen *Spektrallinien* im aufgefangenen *Lichte entfernter Galaxien*. Statt Schallwellen hat man dort *Lichtwellen*.
* Bezüglich Anwendungen und Naturphänomenen konsultiere man die *Literatur*.

5. Überschallgeschwindigkeit

- Bis jetzt war die *Geschwindigkeit* v der *Schallquelle kleiner* als die *Schallgeschwindigkeit* c.

- Im Falle von $v > c$ redet man von *Überschallgeschwindigkeit*. Das Verhältnis $\frac{v}{c}$ heißt *Machzahl*.

- Fliegt ein Flugzeug mit *Überschallgeschwindigkeit* v, so kann sich der von ihm erzeugte Lärm immer nur hinter dem Flugzeug in einem *Kegel* mit Achsenrichtung = Flugrichtung ausbreiten, wobei sich die *Kegelspitze im Flugzeug* befindet (*Mach'scher Kegel*). Der *Kegelmantel* ist gebildet durch eine *Schockfront*, auf der der *große Lärm schlagartig wahrnehmbar wird*, wenn diese Front vorbeizieht. Man sagt dann, dass das eben wahrgenommene Flugzeug die „*Schallmauer*“ durchbrochen hat, was sprachlich keineswegs korrekt sein kann.

  – Wenn das *Flugzeug* mit der *Geschwindigkeit* v vorwärts fliegt und sein Schall sich mit der *Geschwindigkeit* c jeweils vom Entstehungspunkt aus auf einer Kugelsphäre ausbreitet, bekommen wir einen *Kegel*, dessen *halber Öffnungswinkel* $\alpha = \arcsin(\frac{c}{v})$ ist.

- Ebenfalls hier ist es interessant, die mathematisch konstruierten und programmierten Modelle auszuprobieren, welche man heute auf dem Internet findet. (*Applets*.)

2.14 Optik

2.14.1 Geometrische Optik und Wellenoptik

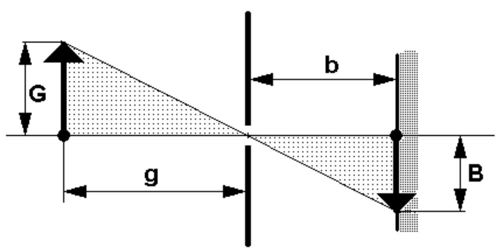
1. Allgemeines

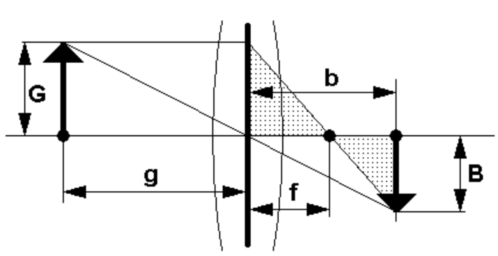
- **Was sehen wir?**
  - *Licht* fällt von einer *Lichtquelle* auf eine *äußere Oberfläche* eines *Gegenstands*. (Test: man kann den Gegenstand *abschirmen*. Dann fällt kein Licht auf ihn.) Licht wird vom Gegenstand *in unser Auge reflektiert*. (Test: Licht kann wieder abgeschirmt werden.) Das Licht dringt dann durch die *Hornhaut*, die *Linse*, den *Glaskörper* auf die *Netzhaut*. Dort wird es von den *Sehzellen* (*Stäbchen* und *Zäpfchen*) in *elektrische Impulse umgewandelt* (unterbrechbar: „*Chemie*“ dazu notwendig). (125 Millionen Stäbchen für *hell-dunkel* und 6 Millionen Zapfen für *Farben*, Verhältnis ca. 18 : 1.) Die *Impulse* werden dann durch den *Sehnerv* an das *Hirn* weitergeleitet (wiederum unterbrechbar). Im Hirn wird vom *Bewusstsein* ein *Bild* bewusst oder sonst ohne Bewusstsein unbewusst *registriert*. *Was sehen wir jetzt in Anbetracht dieser Stationen?* Das Licht der Lichtquelle? Das reflektierte Licht? Die Impulse auf der Hornhaut? Die Impulse im Sehnerv? Das Bild im Hirn? Oder das Bild im Bewusstsein usw.? Und was ist der *Unterschied zwischen den einzelnen Bildzuständen*? *Und wissen wir dann etwas über den Gegenstand oder über das Licht?*

- Einen *Gegenstand sieht man nur dann*, wenn *Licht vom Gegenstand* in unser *Auge fällt*. Wenn also der *Gegenstand selbst leuchtet* oder wenn er *Licht* von einer Lichtquelle in unser Auge *reflektiert*, wenn er somit *beleuchtet* ist.

2. Licht und Schatten, geometrische Optik

- **Projektion, Lochkamera:** *Projiziert* man einen *Gegenstand mittels einer Lichtquelle auf einen Schirm*, so sieht man die *linear vergrößerten Umrisse* des Gegenstands auf dem Schirm (*Ähnlichkeitsabbildung*). Sei B = Größe des Bildes, G = Größe des Gegenstands, b = Distanz vom Bild zur Lichtquelle, g = Distanz vom Gegenstand zur Lichtquelle. Für das Folgende orienteiren wir uns an den nachstehenden Bildern.





$\rightsquigarrow$ *Es gilt:*

–
$$\frac{B}{G} = \frac{b}{g}.$$

- Zwischen dem Gegenstand und dem Schirm ist der *Schatten* (*Schattenraum*), auf dem Schirm sieht man das *Schattenbild* (*Schlagschatten*).

- Bei *ausgedehnten Lichtquellen* spricht man vom *Kernschatten* (*Umbra*, ganz dunkel) und vom *Halbschatten* (*Penumbra*, halbdunkel). Thema bei *Sonnen-* und *Mondfinsternissen.*

- Beim *Projizieren eines Punktes* mittels einer *punktförmigen Lichtquelle* bemerkt man, dass das *Bild wieder ein Punkt* ist und dass die *Lichtquelle* sowie der *Urbild-* und der *Bildpunkt auf einer Geraden liegen.*

- **Brechung:** Tritt ein *Lichtstrahl aus der Luft* in ein *durchsichtiges Medium* ein (Glas, Wasser, ...), so wird der *Strahl in zwei Teile aufgeteilt.* Der eine Teil wird *reflektiert*, der andere wird *gegen das Lot* (Senkrechte auf die Oberfläche) *gebrochen.* (In der Antike schon bekannt.)

  - Wenn der Strahl beim Übergang von einem Medium 1 in ein Medium 2 zum Lot hin gebrochen wird, so nennt man das Medium 1 *optisch dünner* als das Medium 2 und dieses *optisch dichter* (*dicker*) als das Medium 1.

- **Erklärung der Brechung:**

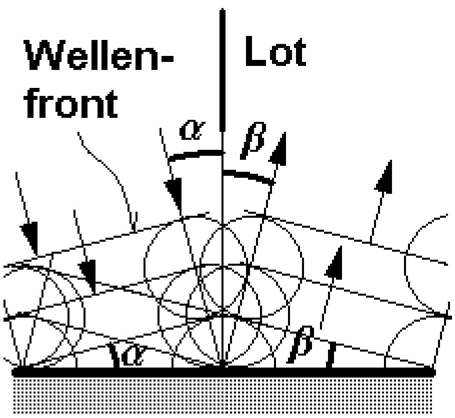
  - Die Brechung lässt sich *nach dem Prinzip von Huygens erklären*, indem man *für* das *Licht* die *Gültigkeit des Wellenmodells postuliert.*
  - *Das Prinzips von Huygens* (vgl. Wellenlehre):
    * Die Menge der *Punkte*, welche *von einer Welle gleichzeitig erreicht* werden, heißen *Wellenfront* (Wellenfläche oder gegebenenfalls Wellenkurve).
    * *Jeden Punkt* einer solchen *Front* kann man als *Ausgangspunkt* einer *Elementarwelle* mit gleicher Wellenlänge und Frequenz wie die Ausgangswelle ansehen.

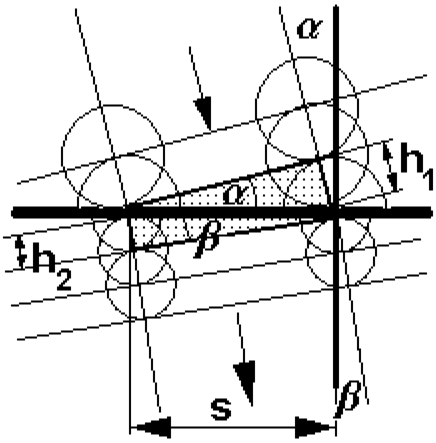
- **Beobachtung zur Reflexion:** Licht kann an Kristallen, verspiegelten Oberflächen, polierten Metalloberflächen oder Flüssigkeitsoberflächen, immer also an *Flächen*, *reflektiert* werden.

  - Die beiden Strahlen (*einfallender* und *reflektierter Strahl*) *liegen mit dem Lot in einer Ebene.*
  - *Einfallswinkel* = Winkel zwischen einfallendem Strahl und Lot.
  - *Reflexionswinkel* = Winkel zwischen reflektiertem Strahl und Lot.
  - *Es gilt* : Einfallswinkel = Reflexionswinkel.

- *Totalreflexion:* Von Totalreflexion spricht man, wenn alle Lichtstrahlen reflektiert werden und somit nichts gebrochen wird.
    - *Beispiel:* Bei einem sehr großen Reflexionswinkel, wenn z.B. der Strahl von untern her auf eine Wasseroberfläche trifft.
- *Anwendung der Reflexion: Spiegel* $\leadsto$ *Realer Gegenstand* und *virtuelles Bild.* (Virtuell: Nicht real, nicht auf einem Schirm auffangbar. . .) Sei B = Größe des Bildes, G = Größe des Gegenstands, b = Distanz vom Bild zum Spiegel, g = Distanz vom Bild zum Spiegel.
    - *Beim virtuellen Bild gilt:*
    - $\leadsto \qquad B = G,\ \ b = g, \qquad \frac{G}{B} = \frac{g}{b} = 1.$

- *Erklärung der Reflexion:*
    - Die Reflexion lässt sich nach dem *Prinzip von Huygens* erklären, indem man *für das Licht* die *Gültigkeit des Wellenmodells* postuliert.
    - Die *Reflexion* lässt sich aber auch *mit dem Korpuskelmodell erklären*, indem man *für das Licht postuliert, dass es aus kleinen Teilchen (Korpuskel) bestehe.*





- **Das Brechungsgesetz:**
    - Schon bei Ptolemaios (Ptolemäus) sind Messungen bekannt.
    - Die von *Snellius* formulierte Art des anhand der Messungen evidenten und so postulierbaren Gesetzes:
        - *Die beiden Strahlen (einfallender und gebrochener Strahl) liegen mit dem Lot in einer Ebene.*
            - $\sin(\textit{Einfallswinkel}) = n \cdot \sin(\textit{Brechungswinkel})$
            - Sei: Einfallswinkel = α, Brechungswinkel = β.
            - $\leadsto \ \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = n \quad$ oder $\quad \sin(\alpha) = n \cdot \sin(\beta).$

  * n heißt *Brechungsindex* (*materialabhängig*). Dieser Index ist *tabelliert* für den *Übergang von Vakuum ins Material* (Glas, Flüssigkeit).
    · Da *bei der Festlegung von* n der *Strahl vom Vakuum ins optisch dichtere Medium* geht, wird der *Strahl zum Lot gebrochen*. Daher ist $n \geq 1$. Man kann die Brechung auch mit Hilfe des *Prinzips von Fermat* gewinnen. Dieses Prinzip besagt, dass das *Licht seinen Weg immer so wählt, dass der die Zeit minimal ist*.
    · Wie wir im *Kapitel Wellenlehre* gesehen haben, gilt nach dem Wellenmodell des Lichtes:
      o $$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{\frac{\lambda_A}{s}}{\frac{\lambda_B}{s}} = \frac{\lambda_A}{\lambda_B} = \frac{\frac{\lambda_A}{T}}{\frac{\lambda_B}{T}} = \frac{c_A}{c_B} \Rightarrow \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{c_A}{c_B}\,.$$
      o Dabei sind c_A und c_B die *Lichtgeschwindigkeiten* in den beiden *Medien A* und *B*, $\lambda_A = h_1,\ \ \lambda_B = h_2$ (Skizze).

- Das *Prinzip der Umkehrung der Lichtwege:* Breitet sich ein Lichtstrahl bezüglich einem gegebenen Lichtstrahl irgendwo auf einem Teilstück des Weges genau in die umgekehrte Richtung aus, so gilt die Umkehrung für den gesamten Weg. Beide *Wege* sind *identisch*, die *Durchlaufrichtung* jedoch *umgekehrt*.

- Der Grenzfall *Totalreflexion:*

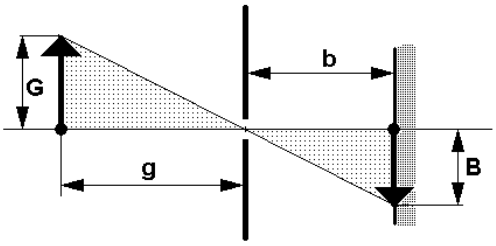
  – Wegen $\sin(\alpha) = n \cdot \sin(\beta)$ und $n \geq 1$ kann bei Vergrößerung von β dann $\sin(\alpha)$ einmal 1 *werden*. Dann ist Schluss, denn grösser als 1 kann ein Sinuswert nicht sein. Macht man β *dennoch grösser*, so findet *keine Brechung mehr* statt. Alles Licht wird jetzt *nur noch reflektiert*. Man redet hier von *Totalreflexion*.
    * Der Grenzwinkel tritt ein bei $\sin(90^o) = 1 = n \cdot \sin(\beta)$.
    * $\leadsto \ \sin(\beta) \geq \dfrac{1}{n}$.

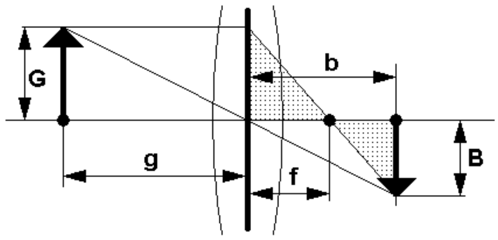
- *Übergang zwischen verschiedenen Medien:*

  – Um diesen Übergang zu studieren, betrachten wir den *Übergang vom Medium* 1 *in eine hauchdünne Schicht Vakuum und anschließend den Übergang vom Vakuum in das Medium* 2. Dann gilt zuerst:
    * $\dfrac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta_1)} = n_1$ (Strahl vom Vakuum ins Medium 1.)
    * $\dfrac{\sin(\beta_2)}{\sin(\alpha)} = \dfrac{1}{n_2}$ (Strahl vom Medium 2 ins Vakuum.)
    * $\dfrac{\sin(\beta_2)}{\sin(\beta_1)} = \dfrac{n_1}{n_2}$ (Produkt der obigen Gleichungen).

  – Der Übergang zwischen verschiedenen Medien *kann auch fließend sein*. Dann *ändert* der *Brechungsindex* bezüglich des Vakuums auch fließend oder *kontinuierlich*.

– *Beispiele:*
  * Lichtumlenkung in der Atmosphäre $\rightsquigarrow$ Sterne stehen ein wenig am falschen Ort.
  * Fata Morgana.
  * Luftspiegelung z.B. auf heisser Strasse.





- **Optische Elemente:**
  – *Planparallele Platte*
  – *Prisma* (z.B. Umlenkprisma im Feldstecher)
  – *Sammellinse* (mit Brennpunkt), Gegenstand und Bild auf verschiedenen Seiten der Linse:
    * Betrachte den *Mittelpunktstrahl* durch die Linse vom Gegenstand zum Bild.
    * Dann den *achsenparallelen Strahl* vom Gegenstand zur Linse und daran anschliessend den *Brennpunktstrahl* von der Linse zum Bild.
    * Dann den *achsenparallelen Strahl* vom Bild zur Linse und daran anschliessend den *Brennpunktstrahl* vom Gegenstand zum Bild.
    * Anhand dieser geometrischen Konstellation lassen sich *Proportionen* ablesen, denn der Gegenstand, das Bild, die Achse und der Mittelpunktstrahl vom Gegenstand zum Bild ergeben zwei *ähnliche Dreiecke*. Es ist mit
      · f = *Brennpunktabstand* vom Mittelpunkt aus.
      · b = *Bildabstand* vom Mittelpunkt aus.
      · g = *Abstand vom Gegenstand zum Mittelpunkt.*
    * $\frac{B}{G} = \frac{b}{g}$.
    * $\frac{B}{G} = \frac{b-f}{f} = \frac{b}{g} \rightsquigarrow \; g \cdot b - g \cdot f = b \cdot f \;\rightsquigarrow\; b \cdot g = b \cdot f + g \cdot f$
    * $\rightsquigarrow$ $$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}.$$
    * Man erhält *vergrösserte aufrechte virtuelle Bilder*, wenn der Gegenstand sich zwischen Linse und Brennpunkt befindet.
    * Man erhält *verkleinerte umgekehrte reelle Bilder* (auf Schirm auffangbar), wenn sich der Gegenstand ausserhalb der doppelten Brennweite befindet. Bild und Gegenstand sind *vertauschbar*.

- *Zerstreuungslinse* (mit Brennpunkt), Gegenstand und Bild auf der gleichen Seiten der Linse:
  - *Analoge geometrische Betrachtung* wie bei der *Sammellinse.*
  - Gleiche *Gleichung,* $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$, jedoch f *negativ.*
  - *Verkleinerte aufrechte, virtuelle Bilder.*
- *Lichtleiter:* Totalreflexion an der Aussenschicht des Leiters

- **Lichtgeschwindigkeit:**
  - Ca. 1675 Olaf *Römer:* Verschwinden der *Jupitermonde hinter dem Jupiter bei Erdposition diesseits der Sonne* und *jenseits der Sonne* $\leadsto$ *Zeitdifferenz* ca. $1000\ s$. Erdbahndurchmesser $= 2 \cdot 150 \cdot 10^6\ km$. Daraus berechnet sich die Lichtgeschwindigkeit zu da $300'000\ km/s$.
  - Versuch von *Fizeau:* Mit *rotierendem Zahnrad und Spiegel* in ca. $9\ km$ Entfernung.
  - Später *Foucault mit Drehspiegel* statt Zahnrad.
  - Dann von *Michelson* usw.
  - 1983: Im *Vakuum* $c = 299'792'458\ m/s$. $\leadsto$ *Unabhängig von der Lichtfarbe.*
  - *In der Materie* (Wasser usw.) ist das *Licht langsamer. Rotes* Licht läuft *schneller* als violettes Licht.
  - Die *Brechzahlen* sind für *verschiedene Farben unterschiedlich:*
    - $$n = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta_1)} = \frac{c}{c_{Materie}}.$$

- Zum *Prinzip von Fermat:* Brechungspunkt x so, dass t minimal ist bei der Brechung.
  - $t = t_1 + t_2 = \frac{s_1}{c_1} + \frac{s_2}{c_2} = \frac{((x-x_1)^2 + y_1^2)^{\frac{1}{2}}}{c_1} + \frac{((x_2-x)^2 + y_2^2)^{\frac{1}{2}}}{c_2}$
  - Differenzieren nach x, gleich 0 setzen für Minimum.
  - $\leadsto$ Brechungsgesetz $\leadsto \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = \frac{c_2}{c_1}$.

3. Unser Auge, optische Geräte

- *Fotoapparat:* Siehe Literatur oder Internet.
- Unser *Auge:* Siehe Literatur oder Internet.
  - *Deutliche Sehweite* ca. $s = 25\ cm$.
  - *Stäbchen* und *Zäpfchen* siehe oben.
  - *Kleinster noch auflösbarer Sehwinkel:* ca. 1 Winkelminute.

  - *Brechkraft D* einer *Korrekturlinse:* $D = \frac{1}{f}$,
    - Einheit: *Dioptrie* oder $dpt = m^{-1}$.

- *Lupe* oder *Vergrösserungsglas:* Siehe Literatur oder Internet.
  - Vergrösserung $V = \frac{B}{G} = \frac{s}{f} = \frac{25\ cm}{f}$.

- *Mikroskop:* Siehe Literatur oder Internet.
  - $V_{Mikroskop} = V_{Objektiv} \cdot V_{Okular}$.

- *Fernrohr:* Diverse *Typen*, siehe Literatur oder Internet.
  - Keplerfernrohr: $V = \frac{V_{Okular}}{V_{Objektiv}}$.
  - Fernrohre in der Astronomie dienen vor allem dazu, *mehr Licht einzusammeln.* Ein Stern lässt sich praktisch *nicht vergrössern*, denn das *Licht* kommt ziemlich *parallel* bei uns an.
  - Die *Planeten („Wandersterne")* lassen sich *vergrössern.*

4. Licht und Spektralfarben

- Nach dem *Durchgang durch ein Prisma* sieht man die *Farben des Regenbogens* in einem *Band*. Das war schon der *Antike* bekannt. Aristoteles hat es aber *anders interpretiert*, als man heute aufgrund von Experimenten zu sagen genötigt ist.

- *Resultate Newtons* (Modell des aus Spektralsorten zusammengesetzten Lichtes, *erklärbar mit dem Wellen- und dem Korpuskelmodell*):
  - Schickt man *Sonnenlicht durch ein Prisma*, so wird es auf der andern Seite in die Spektralfarben aufgefächert (das *Prismenspektrum*). Man spricht hier von *Dispersion* (*Dispersionsprisma*). Das *Sonnenlicht besteht* somit aus *verschieden farbigen Lichtsorten.* Wir unterscheiden die *sechs Regenbogenfarben* (*Hauptfarben*) *Rot, Orange, Gelb, Grün, Blau und Violett.* Die siebte, das *Lila* oder *Purpur* (Bereich, Mischung aus dem Violett und Rot) sieht man *nur*, wenn sich *zwei Regenbogen* mit Rot und Blau-Violett *überlagern* (sehr selten). Damit lassen sich die *Regenbobenfarben kontinuierlich in einem Kreis* anordnen, der sich dann beim Lila schliesst: der *Farbkreis.*
  - Schickt man anderes Licht wie z.B. das *Licht von Quecksilberdampf durch ein Prisma*, so sieht man auf der anderen Seite nur *einzelne farbige Linien*, die *Spektrallinien* des das Licht aussendenden *Materials.*
  - *Blaues* oder gar *violettes Licht* wird *stärker gebrochen als rotes.* Das Licht, welches die einzelnen Spektralfarben zeigt, wird *verschieden stark gebrochen.*

  - Einzelne entstehende *Spektralfarben* lassen sich durch anschliessend *dahinter geschaltete Prismen nicht weiter in andere Spektralfarben zerlegen.* Unzerlegbares Licht heisst *monochrom* oder *monochromatisch.*
  - Umgekehrt ergibt eine *Mischung aller Spektralfarben* wieder *weisses Licht.*
  - *Spektralfarbiges Licht* (einzelne Farben) lässt sich auch *mischen* oder *überlagern:* Die Mischung einzelner Spektralfarben *ergibt Mischfarben.* Z.B. *gelb* und *rot ergibt orange.*
  - Das *Auge* ist *kein Fourieranalysator:* Es kann in einer Mischung die *Anteile nicht einzeln unterscheiden* wie das *Ohr* die einzelnen *Töne* in einem Tongemisch *heraushören* kann.
  - *Mit unserem Lichtmodell* der *Zerlegbarkeit in einzelne Farben* hat man den *Vorteil*, dass das *Licht quantifizierbar* und daher *berechenbar* wird. Andererseits lassen sich *verschiedene Phänomene*, welche mit der *Lichtwahrnehmung durch das Auge verbunden sind, damit nicht erklären.* So etwa der Umstand, dass der *Farbeindruck* und auch die *Helligkeit* einer identischen farbigen Fläche *mit einer Veränderung der Umgebungsfarben stark ändern* können.
  - Im *Regenbogenspektrum* kommen *nicht alle Farben* vor. Es ist also *unvollständig.* So z.B. *fehlt* das *Braun* mit allen seinen Varianten. Ebenso alle *Grautöne.*
  - Die *Regenbogenfarben* lassen sich auf einem Kreis anordnen, dem *Farbkreis.* Die *Braun- und Grautöne* usw. finden in dieser linearen Anordnung jedoch *keinen Platz.* Schon früh hat man daher versucht, die *Farben in einer Fläche* oder *räumlich anzuordnen* (z.B. der *Farbkubus* von *Leonarde da Vinci*). Heute sind in der Industrie vielen Modelle im Gebrauch, z.B. um eine zweitmalige Herstellung derselben Farbe im Baubereich zu gewährleisten (z.B. Norm-Skala der *RAL-Farben*). *Keine der Varianten* vermach jedoch vollumfänglich zu *befriedigen.*

- Einen anderen Weg hat *Goethe* in seiner *Farbenlehre* beschritten. Er hat ebenfalls ein *Modell benutzt*, das auf den *Begriffen hell und dunkel aufbaut.* Mit diesem Modell sind die *Lichtphänomene ebenfalls erklärbar*. Goethes Modell lässt sich jedoch *nicht einfach auf elementarere Modelle zurückführen.* Ebenso kann das *Licht damit auch nicht auf einfache Weise berechenbar gemacht werden.* Das Modell hat aber *auf gewisse Kunstrichtungen* einen starken *Einfluss* ausgeübt.

- *Regenbogen entstehen durch Mehrfachreflexion* (Reflexion normalerweise zweimal) von Sonnenlicht *in Regentröpfchen.* Da mit der *verschieden starke Brechung* von *verschiedenfarbigem Licht* beim Eintritt in den Regentropfen zu verschiedenen Brechungswinkeln führt und dann beim Austritt auch wieder, sieht man in verschiedenen Richtungen am Himmel verschiedenen Farben.

- Die Zahl der *einzelnen unterscheidbaren Farben* umfasst *viele Millionen*, was nur die *Farbdarstellung in Computern* betrifft. Nur ein *Teil davon* ist überhaupt *auf einem Bildschirm darstellbar.* Und von diesen darstellbaren Farben kann man wiederum *nur einen Teil mit einem Farbdrucker ausdrucken.* Bezüglich Farben unterscheidet man hier *diverse Qualitäten:* Hellwert, Farbanteile, Helligkeit, Farbton, Sättigung, Einbettung oder Gegenüberstellung usw. Man konsultiere dazu die Fachliteratur.

- *Additive Farbmischung* (bekannt seit ca. 1800): Mit farbigem *Licht* aus den Grundfarben Rot, Grün und Blau lassen sich *durch Überlagerung die anderen Regenbogenfarben sowie das Weiss erzeugen.*
  - Bezüglich weiteren *Aspekten der Farbwahrnehmung* konsultiere man die Literatur. (Licht und Zäpfchen im Auge, Farbblindheitsarten, *Farbkonstanz* bei Veränderung der *Helligkeit* und der Veränderung der Zusammensetzung des Streulichts usw.)
- *Subtraktive Farbmischung:* Wenn *weisses Licht* von der Sonne auf die *Oberfläche eines undurchsichtigen Körpers* fällt, wird ein *Teil davon absorbiert.* Der Rest wird *zurückgestrahlt.* Vielleicht wird ein Teil auch wieder emittiert, zuvor aber vielleicht noch verändert. So *entstehen* die *Körperfarben.* Man *sieht* also die *zurückgestrahlten Lichtarten.*
  - *Mischt man pulverisierte Teile von verschiedenfarbigen Körpern*, so wird *mehr absorbiert.* Zurückgestrahlt wird zur Hauptsache jenes Licht, welches von keinem der Körper absorbiert wird.
  - *Dem weissen Licht* werden also *einige Anteile entzogen.* Man spricht daher von *Farbsubtraktion.* Man *sieht so die Mischfarbe der zurückgestrahlten Anteile.*
  - Bei *Farbdruck* oder *Farbdias* kommt *Farbsubtraktion* zum Einsatz. Mit *Gelb, Purpur und Blau-Grün (Cyan)* kann man in der Drucktechnik praktisch *alle notwendige Farbtöne durch Mischung erzeugen* (Subtraktion aller absorbierten Anteile des Gemisches vom darauf fallenden weissen Licht). Dasselbe passiert *beim Mischen von Farben zum Malen.*
  - Ein *schwarzer Körper absorbiert alle Farbanteile*, ein *weisser* dagegen *keine.* Dieser *reflektiert* das *Licht diffus*, sonst wäre er ein Spiegel.
  - *Durchsichtige Körper* lassen *bestimmte farbige Lichtanteile durch.* Die *Körperfarbe* entspricht der *Mischfarbe der durchgelassenen Anteile.*
  - *Beispiel:* Eine ganz dünne Goldfolie lässt rot-gelbes Licht durch, reflektiert jedoch grünes Licht.
- **Frauenhoferlinien:** Frauenhofer hat 1814 *im Spektrum des Sonnenlichts dunkle Linien* entdeckt (*Frauenhoferlinien*). Für dieses Experiment muss man den Raum sehr dunkel halten. Später konnte Kirchhof das Phänomen durch *Absorption von Licht in der Sonnenatmosphäre* erklären (Linien des *Heliums*).
  - *Bestimmte Elemente absorbieren bestimmte Frequenzen* aus dem elektromagnetischen Spektrum, zu dem auch das sichtbare Licht gehört. Die Elemente können oft genau die absorbierten Linien *wieder emittieren.*

- Die *Linienspektren* (*Absorptionsspektren* oder *Emissionsspektren*) sind für die einzelnen *Elemente charakteristisch*. Die Elemente lassen sich damit *identifizieren* (*Spektralanalyse*). Untersucht man so das *Licht von Sternen*, so sieht man dunkle Linien in den Spektren und weiss daher, welche *Elemente in den Sternatmosphären* vorhanden und somit verantwortlich für die Absorption sind.
- *Wieso ist der Himmel blau?* Blaues Licht wird *stärker gestreut* als rotes Licht. So erscheint der Himmel blau.

5. Die Wellennatur des Lichtes

- In der *Wellenlehre* (früheres Kapitel) haben wir *Beugung* und *Interferenz* kennengelernt. Rekapitulation:
  - *Beugung:* Übergreifen einer Welle in den geometrischen Schattenraum nach dem Durchgang durch einen *Spalt*.
  - *Bedingung für die Beugung:* Die *Breite der Spaltöffnung* muss von *gleicher Grössenordnung* wie die *Wellenlänge* sein.
  - *Interferenz am Doppelspalt:* Läuft eine Wasserwelle gegen eine doppelte Öffnung (Doppelspalt), so zeigen sich im *Beugungsmuster* dahinter *Interferenzphänomene*. Aufeinandertreffende Wellenberge wirken verstärkend, Wellenberg und Wellental auslöschend. Das ist an Wasserwellen einfach zu sehen.
- Macht man den *Versuch mit monochromatischem Licht* (einfarbigem Licht, Verwendung eines *Farbfilters*), so sieht man hinter dem Spalt, aufgefangen auf einem Schirm und vergrössert durch eine Linse, analoge *Beugungsmuster*. Interessanterweise ergibt sich *hinter der Abdeckung in der Symmetrieachse* eine *Verstärkung*.
  - Für den Winkel φ zwischen Achse und Geraden zu den die *Beugungsmaxima* (hell) findet man anhand der Geometrie des Experiments die
    - *Formel:* $\sin(\varphi) = \dfrac{k \cdot \lambda}{d}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$
  - Zwischen den *hellen Beugungsmaxima* liegen die *dunkeln Minima*.
  - Damit kann man die *Wellenlänge* λ *berechnen*.
  - *Ersetzt man den Doppelspalt durch einen Mehrfachspalt*, so werden die *Beugungsmaxima klarer*, *intensiver*, *schärfer* und daher besser sichtbar. Die Geometrie mit für λ bleibt dieselbe.
  - Da wir monochromatisches Licht verwenden, können wir daher *unter der Hypothese des Wellenmodells die Lichtwellenlänge berechnen*.
    - *Rot* hat die grösste Wellenlänge ($6.5 \cdot 10^{-7}\ m$).
    - Dann kommt Gelb, Grün, Blau ($4.8 \cdot 10^{-7}\ m$).
    - Zu Rot gehört mit der bekannten *Lichtgeschwindigkeit* gerechnet die *Frequenz* $4.6 \cdot 10^{14}\ Hz$ und zu Blau $6.2 \cdot 10^{14}\ Hz$.

        * Das Licht hat daher *sehr kleine Wellenlängen* und dazu unglaublich *grosse Frequenzen*. *Blau* hat eine *höhere Frequenz* und eine *kleinere Wellenlänge* als Rot.
    - Wegen dem Prinzip der Interaktion resp. der Anregung kann das Licht *beim Übertritt in ein anderes Medium die Frequenz nicht ändern.*
    - Die *Wellenlänge* und damit die *Lichtgeschwindigkeit* jedoch *ändern*. Diese wird *in einem dichteren Medium kleiner.*
    - Die *Farbe ergibt sich aus der Frequenz*. Diese bleibt daher *erhalten*.
    - Die *Lichtgeschwindigkeit im Vakuum* ist *nicht von der Farbe* und damit *nicht von der Frequenz abhängig*. In *Medien* gilt dasselbe *nicht*.
    - *Blaues Licht* läuft *in Medien langsamer* als rotes Licht.
    - $$\frac{c_{Vakuum}}{c_{Medium}} = n.$$
    - *Dispersion oder Aufspaltung:* Abhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Frequenz.

- An *dünnen Materialschichten* (Seifenblase, Ölfilm, Newtonsche Gläser $\leadsto$ Zwei Gläser mit äusserst dünnem luftgefüllten Zwischenraum) zeigen sich *faszinierende Farbmuster*.
    - Wir nehmen das *Wellenmodell* für Licht an und verwenden die im Kapitel Wellen gemachte Feststellung, dass bei *Reflexion einer Welle an einem festen Ende ein Wellenberg als Wellental* und an *einem freien Ende ein Wellenberg als Wellenberg reflektiert* wird. Wir nehmen an, dass bei der Reflexion an der Unterseite des oberen Glases und an der Oberseite des unteren Glases verschiedene Verhältnisse herrschen und sich daher bei zwei dermassen reflektierten Strahlen ein Gangunterschied von einer halben Wellenlänge ergibt.
        * Sei $d =$ *Distanz zwischen den Gläsern.*
        * Dann haben wir eine *Auslöschung* bei geradezahligen Vielfachen der halben Wellenlängen:
        * $2\,d = 2\,k \cdot \dfrac{\lambda}{2} \leadsto \quad d = k \cdot \dfrac{\lambda}{2}$ mit $k = 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, \ldots$.
        * Bei ungeradezahligen Vielfachen gibt es *Verstärkung:*
        * $2\,d = (2\,k + 1) \cdot \dfrac{\lambda}{2}$.

- Weiteres zu Farben an dünnen Medien und Interferenzfarben siehe Literatur.

- *Zum Hologramm:* Hier arbeitet man mit zwei *kohärenten Laserstrahlen* oder Wellen, einer *Objektwelle* und einer *Referenzwelle*, welche man trickreich umlenkt. Man kann so auf relativ komplizierte Weise infolge der Beugung und der Kohärenz *Bilder erzeugen*, welche *aus verschiedenen Richtungen der Betrachtung verschiedene Ansichtrichtungen* zeigen. Das bedeutet räumliches Sehen und die Möglichkeit, *um* *die Ecke zu sehen*, wenn man von woanders schaut. Die Anordnung der Strahlen und dazu die Theorie sind ein wenig kompliziert, sodass dies nicht in weinigen Sätzen erklärbar ist. Man konsultiere dazu die Literatur. *Das Hologramm ist nicht ein physikalisches Gesetz, sondern das Resultat* (ein Produkt also) *einer Herstellungsmethode.*

- Zum *Auflösungsvermögen optischer Instrumente:*
  - An einem *Spalt löschen sich in Richtung zum ersten dunklen Streifen immer zwei Wellen aus*, welche um $\frac{\lambda}{2}$ verschoben sind. Daher gilt für den *Richtungswinkel* α zwischen *Achse senkrecht zum Spalt* und *Richtung zum ersten dunklen Streifen:*
    * $\sin(\alpha) = \frac{\lambda}{D}$ mit $D =$ Breite des Spaltes. Für kleine Winkel α ist: $\alpha \approx \sin(\alpha)$. Da α gewöhnlich klein ist, folgt: $\alpha = \frac{\lambda}{D}$.
  - Wenn man in der *Astronomie zwei Sterne fotografieren* und dabei *zwei getrennte Bilder* auf der Fotoplatte erhalten möchte, so muss für die Beugung in der Brennebene gelten:
    * $r =$ Abstand Helligkeitsmaximum Stern zu 1. dunklem Ring bei der Beugung in der Brennebene.
    * $r = \alpha \cdot f = f \cdot \frac{\lambda}{D} \leadsto \alpha = \frac{r}{f} := \sigma_m =$ *kleinster Sehwinkel zur Unterscheidung von zwei Sternen.* Sonst überschneiden sich die beiden 1. dunklen Ringe der beiden Sterne. Die beiden sind nicht mehr trennbar oder auflösbar.
    * $\leadsto \sigma_m = \frac{\lambda}{D}$.
    * *Auflösungsvermögen* $:= \frac{1}{\sigma_m}$.
  - *Beispiel:* Beim Auge ist der kleinste Sehwinkel etwa eine *Bogenminute* (ca. $2 \cdot 10^{-4}$ *rad*) und daher das *Auflösungsvermögen* ca. $5'000$.

- **Zur Polarisation:**
  - Frage: *Besteht das Licht aus Transversal- oder Logitudinalwellen?*

- *Erste Erzeugungsart von polarisiertem Licht: Mittels optischen Filtern.*
  - Man kann durchsichtige optische Filter herstellen, die aus *langen gestreckten Molekülen* bestehen, welche man *alle parallel ausrichten* kann (recken der Moleküle). Damit entsteht in einer solchen Kunststoff-Folie eine *Vorzugs- oder Hauptrichtung.* Lässt man Licht durch eine solche Folie, so merkt man vorerst praktisch nichts, ausser einer kleinen Absorption. Legt man eine zweite parallel auf die erste, so geschieht wiederum nichts. *Dreht man die zweite* jedoch um 90^o, so geht *kein Licht mehr durch.* Blickt man jetzt durch die Folie, so sieht man *dunkel.* Die erste Folie heisst *Polarisator*, die zweite *Analysator.*

- *Vorstellung:* Tritt *Licht durch den Polarisator* und handelt es sich bei Licht um *Transversalwellen*, so kommt im Idealfall *nur derjenige Teil des Lichtes durch*, welcher *transversal parallel* zu den ausgerichteten *Molekülen* schwingt. Legt man den Analysator parallel vor den Polarisator, so kommt das Licht immer noch durch. Dreht man jedoch den Analysator um einen rechten Winkel, so sind die Lichtwege nun versperrt.
- *Würde* das *Licht aus Logitudinalwellen* bestehen, so könnte man dieses *Experiment nicht erklären*. Somit haben wir eine indirekte Bestätigung des Transversalwellenmodells. Wegen der Dunkelheit im gekreuzten Zustand der Filter kann das Licht auch *keinen logitudinalen Anteil* haben.
- Heute weiss man, dass eine *Lichtquelle sehr viele kurze linear polarisierte Lichtwellen (Wellenpakete) aussendet, dies aber in grosser Zahl*. Die einzelnen kleinen Lichtwellen haben *statistisch gleichmässig verteilte Richtungen*. Die senkrecht zur Folie schwingenden Anteile werden absorbiert, die anderen durchgelassen.
- Als *Kohärenz* (cohaerere lat. zusammenhängen) bezeichnet man in der Physik eine Eigenschaft von Wellen, welche zeitlich und räumlich unveränderliche, also *stationäre Interferenzerscheinungen* ermöglichen. Zwei Teilwellen heissen *kohärent*, wenn sie zueinander eine *feste Phasenbeziehung* haben. (Eine fixe Zeitdifferenz zwischen dem Erreichen eines Amplitudenmaximums an einem Orte). Sonst heissen sie *inkohärent*.

• *Zweite Erzeugungsart von polarisiertem Licht:* Mittels *Reflexion* an durchsichtigen Körpern.

  - An einer Glasplatte reflektiertes Licht mit den speziellen Einfallswinkel zum Lot auf die Glasplatte von $\alpha_P = 57^o$ erweist sich ebenfalls als *polarisiert*.
    $\alpha_P =$ *Polarisationswinkel*.
    * Bei Glas mit $n = 1.53$ gilt: $\dfrac{\sin(\alpha_P)}{\sin(\beta)} = 1.53$.
    * $\leadsto\ \sin(\beta) = \dfrac{\sin(\alpha_P)}{1.53} \approx \dfrac{0.838671}{1.53} = 0.548151$
    * $\leadsto\ \beta \approx 33^o$ und $\alpha_P + \beta = 57^o + 33^o = 90^o$.
    * $\leadsto$ Der *reflektierte und der gebrochene Strahl* stehen in diesem Fall *senkrecht* aufeinander.
  - Hier haben wir das *Brewster'sche Gesetz* vor uns:
    * *Stehen der reflektierte und der gebrochene Strahl senkrecht aufeinander, so ist der reflektierte Strahl linear polarisiert.* Er schwingt *parallel zur Reflexionsebene*. Diese steht senkrecht auf der Ebene Φ mit dem einfallenden Strahl, dem Lot und dem reflektierten Strahl.
    * Die *parallel zu* Φ schwingenden *Komponenten* werden *vollständig gebrochen*. Die *senkrecht schwingenden Komponenten* werden *zum Teil ge-*

brochen und *zum Teil reflektiert*. In der Regel ist der *reflektierte Strahl schwächer* als der gebrochene (vor Erreichung der Totalreflexion).

  - *Anwendung:* Die *Polaroidbrille*. An einer *Wasseroberfläche reflektiertes Sonnenlicht* schwingt hauptsächlich in *horizontaler Richtung*. Mit der Polaroidbrille kann man so *polarisiertes reflektiertes Licht reduzieren*.
    * Ebenso ist das *Streulicht am Himmel teilweise polarisiert*. *Bienen* und *Insekten* können das offensichtlich *wahrnehmen* und auch bei *bedecktem Himmel nach der Sonne navigieren*. Der *Mensch* hat diese *Fähigkeit nicht*. Er sieht so die Welt anders.

- Bei *Reflexion an Metallspiegeln* tritt *keine Polarisation* auf.

- *Doppelbrechende Materialien:* Durchsichtige Körper mit lang gestreckten und parallel ausgerichteten Strukturen, zur Herstellung von polarisiertem Licht.

  - Abhängig von der Polarisations- und Ausbreitungsrichtung breitet sich darin das Licht mit verschiedenen Geschwindigkeiten fort. Wegen der unterschiedlichen Geschwindigkeit wird das Licht in zwei Teile aufgetrennt, welche verschieden stark gebrochen werden:
    * $\leadsto$ Doppelbrechung
  - Beispiel: Kalkspatkristall.
  - Beispiel: Cellophan $\leadsto$ Farben
  - Beispiel: Doppelbrechende Flüssigkristalle in Flachbildschirmen (LCD).
    * Organische Kristalle.
    * Angelegte Spannungen richten die Kristalle aus. Dadurch ist die Polarisation beeinflussbar. Lichtwege sind so blockierbar. Die Pixel sind durch ein eingebautes Raster einzeln ansteuerbar.

- *Optisch aktive Substanzen:* Diese *können* die *Polarisationsebene von einfallendem Licht drehen*. Der *Drehwinkel* ist *abhängig* von Stoffkonzentration, Lichtfrequenz und Schichtdicke.

  - Damit kann man *Konzentrationen messen*.
  - Es gibt *links- und rechtsdrehende* Substanzen.

- Erklärungskraft der einzelnen Lichttheorien:

  - *Korpuskeltheorie:* Licht besteht aus grossen Mengen winzig kleiner Teilchen.
    * Damit sind die *Ausbreitungsgeschwindigkeit* und die Richtung auf Strahlen erklärbar.
    * Damit ist die *Reflexion* erklärbar.

  * Damit ist erklärbar, wieso die *Beleuchtungsstärke mit dem Quadrat der Entfernung abnimmt:* Auf einer Kugelsphäre um die Lichtquelle ist die pro Zeiteinheit die Oberfläche durchquerende Teilchenzahl immer konstant, da weder Teilchen gebildet werden noch solche verschwinden.
  * $\leadsto \quad (\frac{N}{\text{Oberflächeninhalt}}) = \frac{N}{4\,\pi\, r^2} = const. \leadsto \; N$ ist proportional zu r^2.
  * Es ist erklärbar, dass sich *Lichtstrahlen durchdringen*, da die Teilchen so klein sind.

- *Wellentheorie:* Licht besteht aus vielen *Wellenpaketen*, welche sich wie Korpuskel ausbreiten. (Erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts.)
  * $\leadsto$ Beugung erklärbar.
  * $\leadsto$ Brechung erklärbar.
  * $\leadsto$ Interferenz erklärbar.
  * $\leadsto$ Materialabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit erklärbar.
  * $\leadsto$ Polarisation erklärbar.
- *Problem der Korpuskeltheorie*, d.h. *Licht als mechanische transversale Welle:* Mechanische Wellen können in festen Körpern auch als longitudinale Wellen reflektiert werden.
- Das Licht zeigt es: *Nicht alle Naturphänomene sind mit den Mitteln der Mechanik erklärbar.*
- 1956 Maxwell, mathematische *Theorie der Elektrodynamik:* Die *Existenz von elektromagnetischen Wellen* war *voraussagbar*. Nachweis 1886 durch Hertz.
- Spätere *Erkenntnis: Licht* ist *keine mechanische*, sondern eine *elektromagnetische Welle.* $\leadsto$ *Wellenpakete, Photonen:* Siehe moderne Physik.

2.15 Elektrostatik

2.15.1 Elektromagnetismus, elektrische Landung, Kräfte, Felder, Spannungen, Materie im Feld

1. Grundlegendes: Elektromagnetismus

Die Situation vor Volta und dann die Situation nach Volta 1801

Elektrische und *magnetische Phänomene* waren schon den *alten Griechen* bekannt. Aus der Antike kennt man galvanisierte Vasen. Die Alten wussten, dass Bernstein welcher mit Seide gerieben wurde, Wolle anzieht. Man baute *Elektrisiermaschinen*, um an den europäischen Fürstenhöfen zur Ergötzung der Anwesenden den Damen die Haare zu Berge steigen zu lassen, mittels statischer Ladungen. Dabei sprangen Funken! Elektrische Funkten.
Um 1801 erfand *Volta* die *Batterie („Elektronquelle“).* Napoleon hat ihn gefördert. Mit der Batterie hatte man nun dauernd Strom zur Verfügung, nicht nur kurzzeitig wie bei den Elektrisiermaschinen. Damit waren jetzt ganz andere Techniken als früher möglich.
Um 1819 entdeckte man den *Zusammenhang zwischen Elektrizität und Magnetismus.* Um 1856 hatte man schon die *Grundgleichungen der Elektrodynamik* gefunden (*Maxwell'sche Gleichungen*). Um 1882 begann man dann schon *New York elektrisch* zu *beleuchten.* Um diese Zeit gelang auch der experimentelle Nachweis der vorausberechneten *elektromagnetischen Wellen*, welche sich mit der großen Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Fortan beherrschte *neben der Gravitationskraft die elektromagnetische Kraft* die Welt.
Um 1900 war ein großer Teil der Erfindungen elektrotechnischer Art gemacht. Was das 20. Jahrhundert noch nachlieferte sind die *Anwendungen der vorausberechneten Wellen:* Funkt, Radio und Fernseher sowie der *Transistor*, auf dem die heutige *Computertechnik* und *Digitaltechnik* beruht. Es handelt sich hier allerdings nicht um grundlegende neue Gesetze, sondern um *geschickte Anwendungsmethoden.* Das *19. Jahrhundert* ist also die *Zeit des Aufbaus der Elektrotechnik.* Das *20. Jahrhundert* die *Zeit des Ausbaus und der Perfektion.* Was wird wohl das 21. Jahrhundert bringen?

2. Elektrische Ladungen

Grundlagen: Ladung auf Körpern

Wir wollen hier einige Details als bekannt voraussetzen und in der Art einer Zusammenfassung auflisten.

- *Atome* besitzen im *Kern positiv geladene Protonen* und als *Hülle negativ geladene Elektronen.* Atome sind *elektrisch neutral*, im Gegensatz zu *Ionen*, welche überschüssige oder fehlende Elektronen aufweisen.
  - Atome, welche Elektronen abgegeben haben, sind positiv geladen.
  - Solche die zusätzliche Elektronen aufgenommen haben, sind negativ geladen.

  - In *Metallen* bildet sich ein so genannter *Elektronensee*. Metalle bilden gewöhnlich spezielle Kristallgitter (*Metallgitter*). Die *Atome* haben bis auf die Folgen der Wärmebewegung *feste Plätze*. Die *äußeren Elektronen jedoch bewegen sich frei*. Metalle sind oft *gute elektrische Leiter*. Die freien Elektronen nennt man *Leitungselektronen*.
  - *Ladungen* können so *durch Leitung* (Weitergabe von Elektronen) *von einem Ort zum andern*, von einem Körper auf einen anderen übergehen.
  - In anderen Stoffen geben die Atome die Elektronen nicht so leicht ab. Man nennt solche Stoffe *Isolatoren*.

- Es gilt der *Ladungserhaltungssatz:*
  - In einem *abgeschlossenen System* ist die *elektrische Ladung konstant*. (Anzahl der Elektronen oder fehlenden Elektronen, d.h. „Elektronenlöcher“.)

- *Elektrizität durch Kontakt* oder durch *Reibung:*
  - *Berühren* sich zwei Körper oder *reiben* sie sich aneinander, so *gehen an den Kontaktstellen einige Elektronen von einem auf den anderen Körper über*. Die Körper sind dann *elektrisch geladen*.
  - Reibung erhöht die Zahl der Berührungsstellen.
  - *Beispiele:*
    * Reibung von *Bernstein* mit einem *Seidentuch*.
    * Reibung eines *Glasstabes* mit einem Seidentuch.
    * Reibung eines *Hartgummistabes* mit einem *Katzenfell*.

- Hängt man *geladene Körper* an isolierenden Fäden auf, so kann man beobachten, dass sie sich *beim Annähern an andere geladene Körper anziehen oder abstoßen*. So sieht man, dass es zwei verschiedene Ladungsarten gibt. *Feststellung:*
  - *Gleich geladene Körper* (z.B. aus gleichem Material) *stoßen sich ab*.
  - *Verschieden geladene* Körper *ziehen sich an*.
  - Positiv: „Glasstabelektriziät“.
  - Negativ: „Harzkörperelektrizität“. (Z.B. Bernstein.)

- *Überträgt man die Ladung* von einem geriebenen *Stab durch Berührung* auf eine isolierte *Metallkugel*, so ist diese *geladen*. Ladungen kann man *messen* mit einem *Elektroskop* oder einem *Elektrometer*. Sobald ein solches Gerät Ladung aufnimmt, werden zwei *Metallzeiger*, welche Kontakt haben und gleiche Ladung aufnehmen *gespreizt*, denn gleiche Ladung wirkt abstoßend. Die Höhe des Zeigerausschlags ist bestimmt durch die *abstoßende Kraft*. So kann man auf einer *Skala Ladung ablesen*. Mit einem solchen Gerät kann man auch beobachten, wie lange die Ladung auf einem Körper erhalten bleibt.

- Bringt man einen *geladenen Stab* in die *Nähe* einer *neutralen isolierten Metallkugel* so *wandert* dem Stab *entgegen gesetzte Ladung* auf der Metallkugel auf der *Seite des Stabes*. Die andere Ladung wandert zur anderen Seite der Metallkugel. Diese Ladung kann *durch* eine *Erdleitung abgeführt* oder ausgeglichen werden. Danach ist die *Kugel geladen*. Kontrolle: *Entladungsfunken*.

Das Gesetz von Coulomb

- Hängt man *zwei Kugeln* (aus Holundermark oder aus Metall) *an Fäden* auf, so dass sie in kurzem Abstand voneinander hängen, und bringt man anschließend *gleiche Ladung auf die Kugeln*, so *stoßen sich* diese *ab*.

- Da man bei der Abstoßung die *Auslenkung messen* kann und auch das *Gewicht der Kugeln kennt*, kann man die *Abstoßungskraft berechnen*. Ebenso kann man wie oben beschreiben die *Ladungen messen*. Die Messungen zeigen dann, dass im Vakuum für die Schwerpunkte (Punktmassen) gilt:

  - Die *Abstoßungskraft* ist *proportional* zum *Produkt* der beiden *Ladungen*.
  - Die Abstoßungskraft ist *proportional* zum *reziproken Abstand* der geladenen Körper *im Quadrat*.
  - Man erhält so das *Coulombgesetz:* $F = k \cdot \dfrac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$.
  - Die *Einheit* der Ladung ist *Coulomb:* 1 Coulomb $= 1\ C$.
    * Das Coulomb ist so definiert, dass bei $r = 1\ m$ und $Q_1 = Q_2 = 1\ C$ im Vakuum die Kraft $F = 8.988 \cdot 10^9\ N$ ist.
  - Dabei ist $k = \dfrac{1}{4\,\pi \cdot \varepsilon_0}$. ε_0 ist die *Dielektrizitätskonstante* im Vakuum.
  - $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{4\,\pi \cdot 8.988 \cdot 10^9}\ C^2\,N^{-1}\,m^{-2} = 8.85 \cdot 10^{-12}\ C^2\,N^{-1}\,m^{-2}$.
  - $\leadsto \quad F = \dfrac{Q_1 \cdot Q_2}{4\,\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2} = \dfrac{Q_1 \cdot Q_2}{\sigma_{Kugeloberfl.} \cdot \varepsilon_0}$. Vektoriell: $\vec{F} = \vec{r} \cdot \dfrac{Q_1 \cdot Q_2}{4\,\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^3}$.
  - Dabei ziehen sich gleichnamige Ladungen mit dieser Kraft an, ungleichnamige stoßen sich ab.
  - Falls sich *zwischen den Ladungen* noch ein *anderes Material* befindet, so wird die *Kraft kleiner*. Die *Dielektrizitätskonstante* ist *abhängig vom Material*, vgl. weiter unten.

- Weitere Feststellungen:

  - *Elektrische Kräfte beeinflussen* sich *gegenseitig nicht*. Sie *überlagern* sich und *addieren* sich so *wie mechanische* Kräfte.
  - Die Wirkung der elektrischen Kräfte reicht *von den Kerndimensionen* ($10^{-15}\ m$) *bis* zu den *Distanzen des Weltraums*.

  - Die *Elektronenladung* ist $-e = -1.6 \cdot 10^{-19}\ C$. Dabei ist $e = +e$ die *Protonenladung.*
  - *Blitz:* 1 bis 10 C. Und *Kondensatoren:* 1^{-12} bis $10^4\ C$. $(\pm)$

2. Der Begriff es elektrischen Feldes und des Feldes allgemein

Der Fall einzelner punktförmiger Ladungen in dafür bezeichneten Zentren

- Die *Coulombkraft* wie auch die *Gravitationskraft* brachten ein *Problem* mit sich: Hier können *Kräfte auf Körper wirken, ohne dass sich die Körper berühren* und so durch Berührung die Kräfte übertragen können.

- Heute hat man zur *Erklärung* das *Konzept des Feldbegriffs: Auf* eine *Ladung* oder eine *Masse irgendwo im Raum wirkt eine Kraft* nach dem Coulomb- oder dem Gravitationsgesetz. Der *Raumpunkt*, wo sich die Ladung oder die Masse befindet, hat somit die *Eigenschaft* eine *Kraftwirkung zu erzeugen.*
  - Diese ist beim *Coulombgesetz*
    * $\vec{F} = \vec{r} \cdot \dfrac{Q_1 \cdot Q_2}{4\,\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^3} = \vec{E}(Q_2,\, \vec{r}) \cdot Q_1.$
  - Und beim *Gravitationsgesetz*
    * $\vec{F} = \vec{r} \cdot \dfrac{m_1 \cdot M_2}{r^3} \cdot k = \vec{g}(M_2,\, \vec{r}) \cdot m_1.$
  - Allgemein:
    * Also $\vec{F} = \vec{E}(Q_2,\, \vec{r}) \cdot Q_1$ oder $\vec{F} = \vec{g}(M_2,\, \vec{r}) \cdot m_1$. D.h. in beiden Fällen hat das Gesetz dieselbe Form „Kraft = Konstante E oder g mal die Probe Q_1 oder m_1“.
  - $\vec{E}(Q_2,\, \vec{r})$ nennt man *elektrische Feldstärke* im betreffenden Raumpunkt. $\vec{g}(M_2,\, \vec{r})$ ist die *Gravitationsfeldstärke* oder *Gravitationsbeschleunigung* in jenem Punkt. Diese neu definierten Feldstärken sind also nichts anderes als *Funktionen der Raumkoordinaten* im betreffenden Punkt sowie *der Zentralladung* Q_2 oder der *Zentralmasse* M_2 .
  - Ein *Feld* ist also ein *Zustand des Raumes mit der Eigenschaft*, dass *in jedem Raumpunkt auf* eine dorthin transportierte *Probe* (Ladung Q_1 oder Masse m_1) eine *Kraft wirkt.* Diese *Wirkung* lässt sich nach den *Gesetzen* $\vec{F} = \vec{E}(Q_2,\, \vec{r}) \cdot Q_1$ oder $\vec{F} = \vec{g}(M_2,\, \vec{r}) \cdot m_1$ *berechnen.* Allgemein ist (skalar ausgedrückt) die *Wirkung gleich Feldstärke* der betreffenden Art *mal Probegröße* der betreffenden Art.
  - Die *Feldrichtung* bei Punktladungen wird wie folgt *definiert:* In der Umgebung einer negativen Punktladung Q^- zeigt $\vec{E}$ in *Richtung auf* Q^- *zu*, bei einer positiven Punktladung Q^+ zeigt $\vec{E}$ in *Richtung von* Q^+ *weg.* Eine positive Probeladung q^+ in der Umgebung erfährt daher in jedem Fall eine Kraft in der Richtung von $\vec{E}$. Eine negative Probeladung q^- erfährt dagegen in jedem Fall eine Kraft in der Gegenrichtung zu $\vec{E}$.

- Einheiten:
  - E hat die Einheit $N\,C^{-1} := V\,m^{-1}$, V bedeutet Volt.
  - g hat die Einheit $N\,kg^{-1} := m\,sec^{-2}$.
- $\leadsto$ *Elektrische Feldstärke einer Punktladung:* $\vec{E} = \vec{r} \cdot \dfrac{Q_2}{4\,\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^3}$.
- $\leadsto$ *Gravitationsfeldstärke*: $\vec{G} = k \cdot \vec{r} \cdot \dfrac{M_2}{r^3}$.
- $\leadsto$ Allgemein:
  - $$\vec{\Gamma}_{\text{Feldstärke}} = k \cdot \vec{r} \cdot \frac{\text{Materiemaß}_2}{r^3}.$$
  - $$\vec{F}_{Kraft} = \vec{\Gamma}_{\text{Feldstärke}} \cdot \text{Materiemaß}_1.$$

- Die *Feldvorstellung* stammt *von Faraday.* Von ihm kennt man den *Grießkörnerversuch:* Feines Grieß wird in Öl in einer Schale gleichmäßig verteilt. Anschließend bringt man eine *positive* und in einem Abstand eine *negative Elektrode* hinein. Dann werden die Grießkörner zu *Dipolen:* Die positiven Ladungen im Grieß wandert auf die Seite der negativen Elektrode, die negative Ladung auf die Seite der positiven Elektrode. Diese *Dipole lagern sich kettenförmig aneinander* und bilden dadurch *Linien.* Diese Linien (genannt *Feldlinien*) geben jeweils die *Richtung* der *wirkenden elektrischen Kraft* an. Man sieht im *Feldlinienbild* ein *elektrisches „Feld“*, analog zu einem *Getreidefeld*, in dem die Ähren auch ausgerichtet sind.

- Analoges findet man, wenn man *zwei gleich geladene Elektroden* benutzt. Dann ergibt sich ein *Bild der Abstoßung.* Man kann auch *mehrere Elektroden* benutzen und so beliebige *Feldlinienbildvarianten* erzeugen.

- Wenn eine *Ladung* im Feld *frei wandern* kann, so verschiebt sie sich *entlang* einer *Feldlinie.*

- Eine *Feldlinie* bildet sich *immer zwischen zwei verschieden geladenen Polen* oder *zwischen einem Pol und dem Unendlichen* aus. Man gibt den Feldlinien *künstlich* die *Richtung vom positiven zum negativen Pol.*

- Man kann daher ein *Feld* auch als die *Gesamtheit* der *Feldstärkevektoren* auffassen. *Mathematisch* ist ein *Feld* einfach eine *Funktion.* Z.B. im Falle des elektrischen Feldes ist es eine *Vektorfunktion* mit den Variablen Raumkoordinaten und Zentralladung, also eine Vektorfunktion *mit vier unabhängigen Variablen* und *mit drei abhängigen Variablen*, die drei Ortskoordinaten des sich ergebenden Feldstärkevektors. Das ergibt daher eine Abbildung vom $\mathbb{R}^4$ in den $\mathbb{R}^3$. Zusammen ist das $(4 + 3) = 7$–*dimensional.* Dafür kann es also keinen Plot mehr geben!

- Ein weiterer, von Gauß stammender heute noch verwendeter Begriff ist derjenige des *„Feldflusses“*. Dabei hat man sich eine *Ausbreitung*, d.h. *ein Fluss des Feldes durch den seit Einstein abgeschafften Raumäther* oder *Weltäther* (fixes Bezugssystem des Universums) vorgestellt. Man definiert den *Fluss* durch eine *Fläche* der Größe ΔA (mit $\vec{A} \,||\, \vec{E}$) in einem Punkt mit der *Feldstärke E* wir folgt:

- *Elektrischer Fluss* $\Delta\Phi = \Delta A \cdot E$ und daher $E = \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta A} \to \dfrac{d\,\Phi}{dA}$.
- Auf eine vektorielle Formulierung wollen wir hier verzichten.
- E hat somit die *Qualität* einer *Flächendichte* des Flusses. Man könnte sich hier im übertragenen Sinne daher etwa auch eine „*Dichte von Feldlinien*" vorstellen. Dies obwohl diskrete Linien nur im Experiment sichtbar sind, weil die Grießkörner nicht unendlich klein und dazu unendlich viele sein können.
- Der *Gesamtfluss* durch eine Fläche kann man dann als *Integral* (Oberflächenintegral) über die dazu gehörige Fläche berechnen.
- Nimmt man an, dass man eine *Punktladung* Q_2 im Zentrum hat, dann ist die *Feldstärke* E in einem *fixen Abstand* auf einer *Kugelsphäre* um die Ladung *konstant*.
  * Dann ist der *gesamte Fluss* $\Phi = A \cdot E = 4 \cdot r^2 \cdot \pi \cdot E$.
  * $\leadsto \Phi = A \cdot E = 4 \cdot r^2 \cdot \pi \cdot E = 4 \cdot r^2 \cdot \pi \cdot \dfrac{Q_2}{(r^2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0)}$.
  * $\leadsto \Phi = \dfrac{Q_2}{\varepsilon_0}$.
  * Das nennt man auch den *Satz von Gauß*.
  * Der *Fluss durch eine Oberfläche* ist daher *bei jeder Kugelsphäre konstant*, *unabhängig* von r. Das gilt auch *für nicht kugelförmige Oberflächen*, welche die Zentralladung umschließen.
- *Maxwell* hat später Faradays Vorstellungen in der Sprache der *Mathematik* beschrieben. Seither erst kann man damit rechnen.
- Eine interessante Feststellung: Betrachte $\Phi = A \cdot E$. A nimmt auf einer Sphäre zu mit r^2 und E nimmt mit r^2 ab. *Der Fluss durch denselben Raumwinkel bleibt konstant*.
- Bemerkung: Bis jetzt haben wir *nur Felder von ruhenden Ladungen* betrachtet ($\leadsto$ Elektro*statik!*).

Der Fall spezieller Ladungsverteilungen

- *Beispiel 1:* Relative *große Entfernung* und *eng beieinander liegende Ladungen:*
  - Gegeben seien $q_1, q_2, q_3, \ldots$, mit $q_1 + q_2 + q_3 + \ldots = Q$. Zu q_k gehört r_k.
  - Es gilt: Alle r_k sind ungefähr gleich groß wie r.
  - Dann gilt:
    * $\vec{E} = \vec{r} \cdot \dfrac{Q}{(r^3 \cdot 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0)}$.
    * Damit ist unter den angegebenen Bedingungen das elektrische Feld gleich groß wie das Feld einer Punktladung.
    * Exakt richtig wird diese Formel, wenn man $\vec{r} =$ Ladungsschwerpunkt setzt. Dieser wird analog zum Massenschwerpunkt berechnet.

- *Beispiel 2:* Das *Feld* im *Innern* einer *geladenen Hohlkugel:*
  - Die *Feldstärke* ist *radial* gerichtet, da infolge der *gegenseitigen Abstoßungen* der *Ladungen* auf der Oberfläche eine *homogene Ladungsverteilung* entstehen muss.
  - Die zu einem beliebigen Punkt P im Innern auf einem Doppelkegel auf der Kugeloberfläche gegenüberliegenden Ladungen müssen in P *dasselbe Feld* erzeugen. Denn die Oberfläche nimmt ca. mit dem Abstand im Quadrat zu. Die Feldstärke für eine Ladung nimmt jedoch mit dem Abstand im Quadrat ab. Die *Ladungsdichte* ist überall auf der Kugeloberfläche *gleich.* Daher muss die Feldstärke einer Ladung mal die Ladungsdichte (Anzahl Ladungen pro Fläche) mal Flächeninhalt im Kegel beidseitig gleich sein.
  - Da die Ladungen infolge der Abstoßung sich auf die konvexe Seite der Kugel, also ihre Außenseite drängen, ist der Innenraum einer Hohlkugel ohne Ladungen und das Innere daher feldfrei.
  - Außen gilt: $E = \frac{\Phi}{A} = \frac{A \cdot E}{A} = \frac{(\frac{Q_2}{\varepsilon_0})}{A} = \frac{Q_2}{(r^2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0)}$.
    - * *E ist hier gleich der Feldstärke einer Punktladung.*
  - *Analog* verhält es sich *mit einer Vollkugel*, da alle Ladungen infolge ihrer Abstoßung sich auf der Oberfläche verteilen.
- *Beispiel 3:* Das *elektrische Feld der Erde* (bekannt infolge der Gewitter).
  - Hier gilt: $E \approx 200\ N C^{-1}$. Man berechnet damit $Q_{Erde} \approx 9 \cdot 10^5\ C$. (Erde negativ, Ionosphäre positiv.)
- *Beispiel 4:* Das *elektrische Feld* einer *unendlich ausgedehnten, ebenen, homogen geladenen Platte* mit der Ladungsdichte $\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta A}$. Hier gilt:
  - In zwei verschieden von der Platte entfernten Punkten nimmt die unter demselben Raumwinkel gesehene Plattenfläche mit dem Abstand quadratisch zu, die von dieser Zone herrührende Feldstärke jedoch quadratisch ab. Damit ist die über alle Raumwinkel summierte Feldstärke an beiden Orten gleich groß.
  - Der *Feldstärkenvektor* muss aus Symmetriegründen überall *senkrecht* auf der *Platte* stehen.
  - *Beidseitig* von der Platte weist der *Feldstärkenvektor senkrecht von der Platte weg.* Beidseitig ist der Raum betreffend die Feldstärke *homogen.*
  - Wenn die *Platte nur endlich groß* ist, entstehen *am Rande Abweichungen.*
  - Der *Fluss durch* eine die *endlich große Platte nahe umschließende Fläche* ist $\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0} \approx A \cdot E + A \cdot E = 2\,A\,E \;\Rightarrow\; E \approx \frac{Q_2}{2\,A \cdot \varepsilon_0}$.

- Beispiel 5: Das *elektrische Feld* von *zwei endlichen ausgedehnten, ebenen, homogen entgegengesetzt geladenen Platte* mit der konstanter und *gleicher Ladungsdichte*
$$\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta A}. \quad \text{Hier gilt:}$$
  - Bei zwei entgegengesetzt geladenen Platten (*Kondensator*) überlagern sich die konstanten Feldstärken.
    * Zwischen den Platten verdoppelt sich die Feldstärke wegen den Richtungen der ursprünglichen Feldstärkevektoren.
      · $\rightsquigarrow$ *Formel:* $E \approx \dfrac{Q_2}{A \cdot \varepsilon_0}$.
    * Außerhalb der Platten heben sie sich auf.
    * Plattenränder: *Streufelder*.

- *Bestimmung der Elementarladung* (*Milikan*-Versuch): Zwischen den Platten eines *Kondensators* mit regulierbarer Kapazität werden ionisierte *Öltröpfchen* in der *Schwebe* gehalten. Für dieses Gleichgewicht gilt:
  - $m \cdot g = q \cdot E$, wobei m bestimmbar ist (Größe, Dichte). g und E sind bekannt. $\rightsquigarrow \quad q = m \cdot \dfrac{g}{E}$.
  - *Resultat:* Alle q sind *ganzzahlige Vielfache von* $e = 1.602 \cdot 10^{-19}\ C$.
  - Abweichung: *Quarks*, die Bausteine der Protonen und Neutronen, haben abweichende Ladungen: $+\frac{2}{3}\,e$ und $-\frac{1}{3}\,e$.

In einem elektrischen Feld: Die Kräfte auf Ladungen

- **Grundlegendes. Geladene Platten, Kondensatoren und Teilchen in elektrischen Feldern:**

- *Problem:* Bringen wir *eine Ladung in ein Feld*, so *verändert diese Ladung* das vorherige *Feld*. Es *bilden sich Feldlinien von dieser Ladung* zu den das Feld erzeugenden *entgegengesetzten Ladungen*, während die Feldlinien zu den *gleichen Ladungen abgestoßen* werden.

- Für $\vec{F} = m \cdot \vec{a} = q \cdot \vec{E}$ gilt: $\vec{a} = \dfrac{q}{m} \cdot \vec{E}$.
  - Das *Vorzeichen* von q gibt dabei die *Richtung* bei gegebenem $\vec{E}$.
  - Wenn $\vec{E} = const.$ ist, so ist auch $\vec{a} = const.$.
  - Für $s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ wird $v = a \cdot t = a \cdot (\dfrac{2 \cdot s}{a})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2 \cdot s \cdot a}$.
    * $\rightsquigarrow \quad v = \sqrt{2 \cdot s \cdot q \cdot \dfrac{E}{m}}$.
  - Wenn die *Geschwindigkeit groß* wird, kommt die *Relativitätstheorie* zur Anwendung. Dann gilt obige *Formel nicht mehr*.

- Befindet sich in der *Kondensatorplatte* ein *Loch*, und beschleunigt man Elektronen, welche z.B. aus Glühdrähten austreten und das *Loch durchqueren*, so hat man eine „*Elektronenkanone*“.
- *Bewegt* sich ein *Teilchen senkrecht zu* den*Feldlinien* durch den Kondensator, so wird es *mit* einer *konstanten Kraft abgelenkt*. Das führt zu einer *Parabel*, mit der man dann weiterrechnen kann. Beispiel mit einem Elektron:
  * $s_y = \frac{a}{2} \cdot t^2,\ \ a = \frac{q}{m_e} \cdot E,\ \ s_x = v_x \cdot t\ \Rightarrow\ t = \frac{s_x}{v_x}\ \Rightarrow\ s_y = \frac{q}{m_e} \cdot E \cdot (\frac{s_x}{v_x})^2.$
- Damit kann man in mit einer *Braunschen Röhre* resp. mit einem *Kathodenstrahloszilloskop* (-graph) einen *abgelenkten Strahl sichtbar* machen und damit *messen* oder auch *Bilder* (Fernsehröhre) *zeigen*, die sich verändern.

• **Spannungsbegriff und Arbeit in einem elektromagnetischen Feld:**

- *Verschiebt* man eine *Ladung* in einem *elektromagnetischen Feld senkrecht* zu den *Feldlinien*, so wirkt von Feld her dort *keine Kraft*. Einen Zusammenhang zwischen Arbeit Feldes in dieser Richtung ist daher nicht gegeben. Anders verhält es sich *parallel* zu den *Feldlinien*. *Verschiebt* man das *Teilchen entgegen* der *vom Feld* her *wirkenden Kraft*, so muss *Arbeit geleistet* werden. In *umgekehrter Richtung* hingegen leistet das *Feld Arbeit*. In jedem Fall ist es daher so, dass *nur die Weganteile in der Richtung der Feldlinie bei der Arbeit einen Beitrag leisten*. Teilt man einen beliebigen Weg zwischen zwei Punkten auf in einen Anteil in Feldlinienrichtung und in einen Anteil quer zur Feldlinienrichtung, so leistet der der Quer–Anteil keinen Beitrag.
  * Die *Arbeit an einer Probeladung* (klein, ohne wesentlichen Einfluss auf die Feldlinien) in einem elektrischen Feld hängt daher *nicht vom gewählten Weg*, sondern *nur vom Anfangs- und Endpunkt ab*. Konsequenz:
  * *Auf* einem *geschlossen Weg* in einem *elektrostatischen Feld* ist die *Arbeit null*.
  * Auf *geschlossenen Wegen* kann man daher *keine Energie gewinnen*. Das elektrostatische *Perpetuum mobile* ist nicht möglich.

• **Die elektrische Spannung:**

• Wir berechnen die *Arbeit* anlässlich der *Verschiebung einer Ladung* in einem *elektrischen Feld:*

- $\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s} = m \cdot \vec{a} \cdot \Delta\vec{s} = q \cdot \vec{E} \cdot \Delta\vec{s} := q \cdot U(\Delta\vec{s}),\ \ U(\Delta\vec{s}) := \vec{E} \cdot \Delta\vec{s}.$
  * $\rightsquigarrow\ \ \Delta W(q) = q \cdot (\vec{E} \cdot \Delta\vec{s}) = q \cdot U(\Delta\vec{s}).$
  * $\rightsquigarrow\ \ W(q) = \sum \Delta W(q) = \sum q \cdot (\vec{E} \cdot \Delta\vec{s}) = q \cdot \sum U(\Delta\vec{s}) = q \cdot U.$
  * Die Summe wird zum Integral, wenn $\Delta\vec{s} = 0$ wird.
  * $\rightsquigarrow\ \ W(q)_{AB} = q \cdot U_{AB}.$

* Die *Arbeit* bei der Verschiebung einer Ladung q ist daher *proportional zu* q und *hängt nur vom Anfangs-* und vom *Endpunkt ab*. Für die *Proportionalitätskonstante* U gilt:
* $\leadsto \; U_{AB} = \dfrac{W_{AB}}{q}$.
* *Allgemein:* $U_{AB} = \dfrac{\Delta W_{AB}}{\Delta Q}$.
* Umgekehrt gilt auf dem *inversen Weg:* $\leadsto \; U_{BA} = -U_{AB}$.
* $U = U_{AB}$ heißt *elektrische Spannung zwischen A und B*. Sie ist ein *Maß für die Arbeit*, welche bei einer Feldstärke $\vec{E}$ und daher einer Kraft $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ bei der Verschiebung von q von A nach B geleistet wird resp. zu leisten ist: $W(q)_{AB} = q \cdot U_{AB}$. *Kurz geschrieben:* $W = q \cdot U$.
* *Einheit* von U: *Volt.* $1\;V = 1\;J\,C^{-1}$.

- **Das elektrische Potential:**

- Wir *wählen* im Zusammenhang mit einem *elektrischen Feld* einen *beliebigen, aber fixen Ursprung* O des Koordinatensystems. Seien dann $\varphi_A = U_{OA} = \dfrac{W_{OA}}{q}$ und $\varphi_B = U_{OB} = \dfrac{W_{OB}}{q}$ die *Spannungen zwischen A und O* bzw. *zwischen O und B*. φ_A heißt dann *elektrisches Potential im Punkte A* und φ_B *elektrisches Potential* im Punkte B. W_{OA} und W_{OB} können wir auch als *potentielle elektrische Energie* bezüglich der Punkte A und B verstehen. (Ist das Feld homogen, so gilt: $W = q \cdot E \cdot s$.) Weil die Arbeit proportional zur Spannung ist und umgekehrt, gilt daher infolge der Summierbarkeit der Arbeit:

  - $W_{AB} = q \cdot U_{AB} = W_{AO} + W_{OB} = W_{OB} - W_{OA} = q \cdot (U_{OB} - U_{OA})$.
  - $\leadsto \; U_{AB} = U_{OB} - U_{OA} = \varphi_B - \varphi_A$.
  - $\leadsto$ Die *Spannung* ist die *Potentialdifferenz* von Potentialen bei einem beliebigen, aber fix gewählten Ursprung O.

- **Beispiele:**

- *Plattenkondensator im Vakuum* (Distanz s zwischen den Platten klein, Ausdehnung A groß):

  - $\leadsto \; E = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 \cdot A}$.
  - $\leadsto \; U = E \cdot s = Q \cdot \dfrac{s}{\varepsilon_0 \cdot A} \leadsto \; Q = \varepsilon_0 \cdot U \cdot \dfrac{A}{s}$.
  - Damit definieren wir die *Kapazität* C:
    * $\leadsto \; C := \dfrac{Q}{U} = \varepsilon_0 \cdot \dfrac{A}{s}$.
    * *Einheit* der Kapazität C: *Farad* (F). $\leadsto \; 1\;F = 1\;C\,V^{-1}$.

- * Die Kapazität wird größer, wenn man die Fläche A vergrößert und auch wenn man den Abstand s verkleinert.
- * Üblich sind Kapazitäten im Bereich μF.
- * Wegen $W = q \cdot U = q \cdot \dfrac{Q}{C}$ können *Kondensatoren zur Energiespeicherung benützt* werden.

- *Das Elektronvolt:*
  - Durchläuft ein Elektron mit der Elementarladung e eine Spannung von 1 V, so verrichtet das Feld an ihm die folgende Arbeit
    - * $W = Q \cdot U = e \cdot U = (1.6 \cdot 10^{-19}\ C) \cdot (1\ V) = 1.6 \cdot 10^{-19} J.$
    - * Diese *Arbeit* oder *Energie* heißt 1 *Elektornvolt:*
    - * $1\ eV = 1.6 \cdot 10^{-19}\ J.$

- *Die Energiedichte im elektrischen Feld:*
  - *Problem:* Zwei *Kondensatorplatten* seien *zusammengefügt*, so dass die Distanz s praktisch 0 wird: $s = 0$. Es gilt bei einer winzigen Trennung und der Ladung Q auf einer der Platten für die Kraft auf die andere Platte:
    - * $E = \dfrac{Q}{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot A}$ (von einer Platte).
    - * $F = Q \cdot E = Q \cdot \dfrac{Q}{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot A}$ (Kraft auf die andere Platte).
    - * $\leadsto\ F = \dfrac{Q^2}{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot A}.$
    - * $\leadsto\ W = F \cdot s = s \cdot \dfrac{Q^2}{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot A}, \qquad C = \varepsilon_0 \cdot \dfrac{A}{s}$
    - * $\leadsto\ W = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{Q^2}{C}.$
    - * Diese *Energie sitzt im elektrischen Feld des Kondensators*. Durch *Veränderung* der *Kapazität* kann die *gespeicherte Energie verändert* werden. Es ist $C = \dfrac{Q}{U}$. Dann gilt:
    - * $\leadsto$ Es gilt: $W = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{Q^2}{C} = \dfrac{1}{2} \cdot Q \cdot U = \dfrac{1}{2} \cdot C \cdot U^2.$
  - *Folgerung für einen Plattenkondensator:*
    - * $W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot \dfrac{A}{s} \cdot (E \cdot s)^2 = \dfrac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot A \cdot s \cdot E^2.$
    - * $\leadsto\ W = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot V \cdot E^2$. Dabei ist V das Volumen $V = A \cdot s$.
    - * Sei $w_{\text{e–Feld}} = \dfrac{W}{V} = \dfrac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2$. Das ist die Energiedichte im Feld zwischen den Kondensatorplatten.
    - * $\leadsto\ w_{\text{e–Feld}} = \dfrac{\varepsilon_0}{2} \cdot E^2 \leadsto$ *Dichte der gespeicherten Energie im Kondensator.*

- *Punktladung und potentielle Energie:*
- *Ein Vergleich:* Nach dem Gravitationsgesetz gilt $F = \gamma \cdot M \cdot \frac{m}{r^2}$. Für die Arbeit mit dieser Kraft längs Δr gilt:
  - $\Delta W = F(r) \cdot \Delta r = \gamma \cdot M \cdot m \cdot r^{-2} \cdot \Delta r$, was aufsummiert zu
    - $W = -\gamma \cdot M \cdot m \cdot r^{-1}$ führt, denn es ist umgekehrt wieder:
    - $\frac{\Delta W}{\Delta r} \to \frac{dW}{dr} = \gamma \cdot M \cdot m \cdot r^{-2}$.
  - *Arbeit im Coulombfeld:* Da das Coulombgesetz formal gleich dem Gravitationsgesetz ist, muss für zwei gleiche Punktladungen q und Q gelten (Abstoßung nicht Anziehung wie beim Gravitationsgesetz):
    - *Formel:* $W = +\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot q \cdot Q \cdot r^{-1}$.
    - Dabei ist r der Abstand zwischen den Ladungszentren.
    - Ist der Abstand unendlich, so ist $W = 0$.
  - *Beispiel:* Gegeben sei eine Metallkugel mit dem Radius R. Hier ist für eine Probeladung, welche aus dem Unendlichen zur Kugel gebracht wird: $W = q \cdot U$. U = Spannung der Kugel gegenüber einem unendlich weit entfernten Punkt O.
    - $\leadsto$ $W = +\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot q \cdot Q \cdot R^{-1} = q \cdot U$.
    - $\leadsto$ $U = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot Q \cdot R^{-1}$ = Potential φ auf der Oberfläche bezüglich dem Punkt O unendlich weit weg.

Ausgedehnte Ladungen und Körper in einem elektrischen Feld

- Wenn man einen *leitender ausgedehnter Körper* (kurz: ein *Leiter*) *in* ein *elektrostatisches Feld* bring, so sorgt das Feld infolge seiner *Kraftwirkung* für eine *Verschiebung der Ladung bis an die Körperoberfläche.* Dadurch *entsteht im Körper Ladungstrennung* und er wird ebenfalls zum *Kondensator:* In *seinem Innern entsteht* ebenfalls ein *elektrisches Feld*, welches das *äußere Feld überlagert.* Die Ladungsverschiebung dauert *solange* an, bis das *gesamte Feld im Innern* die *Feldstärke null* hat. Daher *kann es im Innern keine Spannung geben.* Die *Oberfläche* somit eine *Äquipotentialfläche.* Der *Feldstärkenvektor* außerhalb an der *Oberfläche* steht *senkrecht* auf dieser, da sich sonst die Ladungen im Innern infolge der Kraftwirkung verschieben würden.
  - $\leadsto$ *Leiter in einem elektrischen Feld sind im Innern feldfrei und tragen die freien Ladungen auf der Oberfläche.*
  - $\leadsto$ *An der Oberfläche stehen die Feldstärkenvektoren senkrecht auf der Fläche.*
  - *Analog* verhält es sich mit *metallenen Käfigen* (durchlöcherte Körper). Im *Innern* ist die *Feldstärke null.* Einen solchen Körper nennt man *Faradaykäfig.*

- Aufgrund dieser Gesetze kann man eine *große metallene Hohlkugel* mit einem *Loch* somit *aufladen*, indem man mittels eines geladenen Körpers *Ladung durch das Loch ins Innere bringt*. Die *Ladung verteilt sich* dann auf der äußeren *Oberfläche*. Man kann das auch mit Hilfe eines *Transportbandes* aus *Gummi* tun, auf dem man ständig *Ladung durch Reibung* „erzeugt“. So kann man sehr große Ladungen und damit Spannungen erzeugen (Achtung: Gefahr bei Berührung!).
  - Ein solches Gerät heißt *Van de Graff-Generator*.
    - $\rightsquigarrow$ Spannungen bis zu $10^6\ V$.
- Bringt man *statt Leiter Isolatoren in ein elektrisches Feld*, so *richten sich Moleküle mit Dipolcharakter* (mit einem positiven und einem negativen Ladungsschwerpunkt, z.B. bei Wasser) parallel zu den Feldlinien aus. Dadurch entsteht *im Innern ein Feld (Dipolfeld)* E_D, welches das *ursprüngliche Feld des Kondensators im Körperinnern vermindert*. Weiter *verschieben sich* durch das *äußere Feld* auch die *Ladungen innerhalb der nicht dipolartigen Moleküle*, wodurch diese *ebenfalls zu Dipolen* werden. Diese erzeugen ein *Gegenfeld* $\vec{E}_D$ zum äußeren Feld. Daher tritt auch hier der *Dipoleffekt* auf:
  - $\rightsquigarrow\ \vec{E}_D + \vec{E}_0 = \vec{E}_{\text{innen gesamt}}$.
  - Dadurch *sinkt* die *Spannung am* das Feld erzeugenden *Kondensator*, da der *wirksame Abstand* zwischen den Platten resp. auf einem Teilabstand der Platten die Feldstärke *sinkt*. Man setzt:
    - $E_0 = const. \cdot \vec{E}_{\text{innen gesamt}} = \varepsilon_r \cdot \vec{E}_{\text{innen gesamt}}$.
  - Der *materialabhängige Faktor* ε_r heißt *Dielektrizitätszahl* oder *relative Dielektrizitätskonstante*.
  - *Beispiele:* $\varepsilon_{r,\,Luft} = 1.0006$, $\varepsilon_{r,\,Glas} \approx 4$ bis 10 $\varepsilon_{r,Wasser} = 81$.
    - In Wasser ziehen sich Ladungen 80-mal weniger an als im Vakuum. Man kann damit die Lösungsmitteleigenschaft von Wasser für Salze (Ionen) erklären.
  - Bei Bariumtitanat ist $\varepsilon_{r,\,BT} \approx 10\,000$.
  - Für ein beliebiges Material *schreiben* wir kurz ε_r.
- Mit Hilfe von Materialien mit großer Dielektrizitätszahl zwischen den Kondensatorplatten kann man bei *gleicher Ladung die Spannung an einem Kondensator senken* und dadurch die *Kapazität erhöhen*. Es gilt:
  - $U = E_{innen\,gesamt} \cdot s = E \cdot \dfrac{s}{\varepsilon_r} = \dfrac{1}{\varepsilon_r} \cdot Q \cdot \dfrac{s}{A \cdot \varepsilon_0}$.
    - $\rightsquigarrow\ C = \dfrac{Q}{U} = \dfrac{Q}{Q \cdot s} \cdot \varepsilon_r \cdot A \cdot \varepsilon_0 = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \dfrac{A}{s}$.
    - $\rightsquigarrow$ Die Kapazität wird durch das Anbringen von Material zwischen den Kondensatorplatten um den Faktor ε_r verändert.

        * Kleine Kondensatoren mit hoher Kapazität nennt man *Supercaps*. („cap“ für capacity).

    - *Wir setzen:* $\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$.
    - Achtung: In einem *Dielektrikum verändern sich verschiedene Formeln um den Faktor* ε_r . *Beispiele:* Coulombkraft, elektrische Feldstärke, Spannung, elektrischer Fluss, Kapazität, Energiedichte im Feld. Vgl. Formelnbücher.

- *Ferroelektrizität* (analog dem Ferromagnetismus) und *Piezoelektrizität:*
    - *Kristalle* wie z.B. Bariumtitanat bestehen aus Molekülen, welche sich *als Dipole fast vollständig nach der Feldrichtung ausrichten* und so einen *Makrodipol* bilden.
    - Kann man hingegen *Ladungen in einem Kristall mittels Einwirkung von Druck verschieben*, so redet man von *Piezoelektrizität* (z.B. Quarz). *Verwendung:* Z.B. in der Sensorik.

2.16 Elektrischer Strom, Elektrodynamik

2.16.1 Elektrischer Strom, Wirkung, Gesetze zur Elektrizität

1. Elektrischer Strom, speziell Gleichstrom

Grundlegendes:

In der *Natur vorkommenden Körper* erscheinen uns in der Regel als *ungeladen*, denn *getrennte Ladungen* drängen nach *Ausgleich*. Falls es zur *Ladungstrennung* kommt, so findet der *Ausgleich spontan* statt. Ladungen sind im beteiligt bei *Blitzen* oder bei der *Korrosion*. *Fließende Ladung* nennen wir *elektrische Strom* oder kurz *Strom*. *Verbinden* wir z.B. die *beiden Pole* einer *Batterie*, zwischen denen eine *Spannung* herrscht, durch einen *Draht*. Dann *fließt ein Strom durch den Draht*, z.B. nach den bei den Kondensatoren gefundenen Gesetzen.
Modell: Im *Metalldraht* befindet sich ein *Elektronensee* oder ein *Elektronengas*. *Ohne* die *Batterie verteilen* sich die *Elektronen* wegen der *gegenseitigen Abstoßung gleichmäßig* auf der *Leiteroberfläche*, bis im Leiter die *Feldstärke null* ist.
Betrachtung: Wenn an der Batterie die Spannung U vorhanden ist, so hat man bezüglich einer Ladung q vorerst qualitativ:

- $q \cdot U = W = F \cdot s = (q \cdot E) \cdot s = q \cdot (E \cdot s) \;\Rightarrow\; U = E \cdot s$ und $F = q \cdot E$.

Auf eine Ladung q wirkt also eine Kraft, wodurch *sich* die bewegliche *Ladung bewegt*. Damit setzt sich ein *Ladungsstrom* in Bewegung, Ladung, welche *im Leiter fließen* kann. Aus einem der *Pole* werden *Elektronen nachgeliefert*. So entsteht ein *andauernder Fluss* von Elektronen. Denn *zwischen den P*olen bildet sich ein *elektrisches Feld*, welches im *Drahtinnern* verläuft und die *Elektronen beschleunigt*.

- $\leadsto\; U = \dfrac{W}{q} = \dfrac{Q}{C} = \dfrac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot V \cdot \dfrac{E^2}{q}$. Dabei ist q eine verwendete Probeladung.
- Merke: *Elektrischer Strom* ist *bewegte Ladung*, bezogen auf die *Zeit*.
- Wenn bei einem Experiment oder in der Technik *elektrischer Strom fließt*, spricht man von einem *kontrollierten Entladungsvorgang*.
- *Historisch* hat man die *Stromrichtung* z.B. in der *Bewegungsrichtung der Metallionen in einer Salzlösung* definiert. Das entspricht der *Richtung der positiven Ladungen* (*Elektronenlöcher*) und ist leider der Bewegungsrichtung der Elektronen, wie man es der Einfachheit wegen erwarten würde, entgegen gesetzt. Die *Elektronen* wurden *erst nach der Definition der Stromrichtung entdeckt*.
  - Die „*technische*“ *Stromrichtung* ist daher *vom Pluspol zum Minuspol*.
  - Die *Richtung* des *Elektronenflusses* in den so oft verwendeten Metallen dagegen ist *genau umgekehrt*.

- Technisch *unterscheiden wir zwischen Gleichstrom und Wechselstrom.*
  - Beim *Gleichstrom behält* das *E–Feld*, nach dem sich die Elektronen bewegen, seine *Richtung immer* bei.
  - Beim *Wechselstrom wechselt* das *E–Feld* hingegen *periodisch* seine *Richtung.*
  - Beim bei uns technisch *verwendeten Wechselstrom ändert* die *Richtung* 100–mal in einer Sekunde und die zeitliche *Periode* der Wechsel ist *konstant.* Das macht *zwei Wechsel pro Periode*, den Beginn mitgezählt und das Ende erst zur nächsten Periode gezählt. Somit ist die *Wechselstromfrequenz* $\frac{100}{2}\ Hz = 50\ Hz$.

Gleichstrom:

Als *elektrischen Strom* haben wir die *pro Zeiteinheit fließende Ladung* Q bezeichnet. Daher muss für die *Stromstärke* (Buchstabe I, das große i) gelten:

- $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \;\Rightarrow\; \Delta Q = I \cdot \Delta t.$
- Bei *gleichmässig fließender Gesamtladung* ist $Q = I \cdot t$.
  - *Einheit: Ampère* (dt. Ampere) $\leadsto$ $1\ A = 1\ C\,sec^{-1}$.

Aus messtechnischen Gründen hat man die *Stromstärke* (Ampere) als *Grundeinheit* genommen und *nicht die Ladung* (Coulomb).

- Beim *Entladen eines Kondensators* gilt für die *Beschleunigungskraft* auf ein Elektron: $F = q_e \cdot E$ sowie $U = \frac{Q}{C} = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot V \cdot \frac{E^2}{q_e}$.
  - Nimmt man als *Modell* an, dass *die vom Kondensator pro Zeiteinheit abfließende Ladung proportional zur noch auf dem Kondensator vorhandene Ladung sein muss*, so erhält man eine *Differentialgleichung*, deren Lösung eine e-Funktion ist mit negativem Exponenten. Die im Kondensator *pro Zeiteinheit fließende Ladung nimmt daher ab.*
  - $\leadsto$ Die *Entladung eines Kondensators* kann *nicht* nach der *Art eines Gleichstroms* erfolgen. Ein Kondensator kann daher *nicht geeignet* sein um einen *Gleichstrom* zu erzeugen.
  - *Volta* hat aber ein *Gerät konstruiert*, welches *Gleichstrom liefern* kann: Die *Volta-Säule* oder *Batterie* (Batterie wiederaufladbar $\leadsto$ *Akkumulator* oder elektro–chemischer Energiespeicher).

Wie schnell fließen die Elektronen in einem Kupferdraht?

- *Betrachtung:* In einem Draht fließt bei Gleichstrom pro Zeit Δt etwa die Ladung $n \cdot e \cdot A \cdot \Delta s = \Delta Q$, wobei e die Elektronenladung und n die Anzahl Elektronen pro Volumen ist. Dabei *gilt:*
  - $A \cdot \Delta s = A \cdot v_m \cdot \Delta t = \Delta V, \qquad v_m =$ mittlere Geschwindigkeit $=$ *const.*
  - $\rightsquigarrow \;\; \Delta Q = n \cdot e \cdot A \cdot v_m \cdot \Delta t$ und $I = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = n \cdot e \cdot A \cdot v_m$.
  - $\rightsquigarrow \;\; v_m = \dfrac{I}{n \cdot e \cdot A}$.
  - Die *Elementarladung* e ist bekannt. Bei einem Draht von $A = 1\ mm^2$ Querschnitt und einem messbaren Strom von z.B. $1\ A$ muss man somit nur noch n abschätzen. Dies gelingt unter der Annahme, dass jedes Kupferatom ein Elektron beisteuert, denn die spezifische Dichte (Dicht pro Volumen) von Kupfer ist bekannt und ebenfalls die absolute Masse des Kupferatoms, womit die Anzahl Atome pro Volumeneinheit berechenbar ist.
  - Führt man die Berechnung durch, so erhält man $n \approx 8.5 \cdot 10^{28}$ Atome pro m^3 (siehe Angaben[1]). Das ergibt dann eine *Fliessgeschwindigkeit eines Elektrons im Draht* $v_m \approx 27$ *cm pro Stunde* (also erstaunlich wenig). Auf der anderen Seite findet man durch kompliziertere Überlegungen, dass der Elektronensee sich fast überall gleichzeitig in Bewegung setzt (die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Bewegungsimpulses ist ca. $\frac{3}{4}$ der Lichtgeschwindigkeit). Ähnliche Verhältnisse herrschen beim Wasser in einem langen Gartenschlauch, wobei hier die *Impulsausbreitung* mit der *Schallgeschwindigkeit* (Druck!) zu tun hat. (Interessant sind *Nervenzellen:* Geschwindigkeit Ausbreitung des Impulses ≈ 30 bis $100\ m\,sec^{-1}$).
- *In einem elektrischen Feld nimmt Q bei der Bewegung Energie aus dem Felde auf* (siehe Elektrostatik). Bei Gleichstrom ($I =$ *const.* mit t) *gilt* damit:
  - $W = Q \cdot U,\;\; U = E \cdot s \;\Rightarrow\; W = Q \cdot E \cdot s = I \cdot t \cdot U.$
  - Man kann daher die von der Ladung aufgenommene elektrische Energie berechnen zu (*Formel:*) $\;W_{el} = U \cdot I \cdot t$.
  - Diese *Energie* ist *in der Regel nutzbar.*
  - Daraus berechnet sich die *Gleichstromleistung:* $P = \dfrac{W_{el}}{t} = U \cdot I$.
  - Also *Leistung ist Spannung mal Strom.*
  - Dazu in den *Einheiten:*
    - $1\ V \cdot 1\ A = 1\ (J\,C^{-1}) \cdot 1\ (C\,sec^{-1}) = 1\ J\,sec^{-1} = 1\ W$.
    - Statt J benutzt man in der *Wirtschaft* oft kWh: $1\ kWh = 1kW\ \cdot 1\ h$.
    - h bedeutet die Stunden.

[1] Atommasseneinheit: $u = 1.66 \cdot 10^{-27}\,kg/Atom$, Atommasse von Kupfer $63.546\,u$, Dichte von Kupfer $= 8.92\,kg/dm^3$.

  - Über die heute üblichen *Verbraucherzahlen* und *Spannungen* informiere man sich in der Literatur.

- *Stromnutzung:* Diese orientiert sich an den *möglichen Wirkungen der Elektrizität.* Wir kennen:

  - Die *Wärmewirkung* (Bsp. Heizschlange, sich erwärmender Widerstand, heiß werdende Glühlampe).
  - Die *Kraftwirkung* (Bewegung von Elektronen infolge Kraftursache, Kraftentwicklung in Motoren, Coulombgesetz)
  - *Lichtwirkung* (Bsp. elektrische Lampen, Blitz) und *elektromagnetische Wirkung* (*Wellen*). Bsp. Radioübertragung).
  - *Chemische Wirkung* (Bsp. Elektrolyse).

- Die Ursachen dieser Wirkungen sollen später untersucht werden. Für den Moment ist aber klar: *Elektrische Energie lässt sich in andere Energieformen umwandeln und nutzen.* Dazu ist *von der Wärmelehre bekannt*, dass praktisch immer ein *kleiner Teil der Energie in innere Energie* (Wärme) *umgewandelt* wird (Entropiezunahme).

- Zum *elektrischen Widerstand* eine Betrachtung: *Entladet* man einen *Kondensator über* eine *Glühlampe*, so sieht man dass da *verschiedene Zeiten* möglich sind, je nach *Leuchtstärke* der Lampe. Am *schnellsten* geht die *Entladung ohne Lampe.* Wie auch von andern Gebrauchsgeräten bekannt ist, hat das *eingeschaltete Gerät* einen *Einfluss auf die Entladezeit.* Verschiedene Geräte nehmen bekanntlich *verschiedene Leistungen* auf. Bei gegebenem U ist somit $P = U \cdot I$ *abhängig vom Gerät.* Damit muss der *Strom* I *vom Gerät abhängig* sein.

  - Oben haben wir gesehen, dass für die mittlere Geschwindigkeit gilt:
    - $v_m = \dfrac{I}{n \cdot e \cdot A}$ proportional zu $\dfrac{I}{Q}$. (Q: pro Volumen).
  - Da bei Gleichstrom aber $I = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = const.$ sein muss, ist $\dfrac{I}{Q}$ sowie v_m konstant.
  - Weiter wird bei immer gleichartig nachgelieferten Ladungen damit auch $U = \dfrac{Q}{C} =$ konstant. Damit ist Q proportional zu U.
  - Somit wird v_m proportional zu $\dfrac{I}{Q}$ und dies proportional zu $\dfrac{I}{U}$.
  - Damit ist bei Gleichstrom und fixem v_m der Strom I proportional zur Spannung U.
  - *Konsequenz:* Es *existiert* eine *Konstante* R mit: $U = R \cdot I$ (in gewissen Bereichen der Temperatur).
    - $\leadsto$ Dieses Gesetz heißt das *Ohmsche Gesetz.*
    - R heißt *Widerstand.*

    * *Einheit* von R: *Ohm* Ω, $1\,\Omega = 1\,V\,A^{-1}$.

  - *Folgerung:* $P = U \cdot I = I^2 \cdot R = \dfrac{U^2}{R}$.

- Man kann das *Ohmsche Gesetz mit Elektronenstößen deuten*, welche wegen v_m proportional zu I mit der Stromstärke zunehmen. Dann wird ein Anteil in innere Energie verwandelt. Die kinetische Energie der angestoßenen Atome nimmt aber mit v_m^2 zu, was erklärt, dass I quadratisch in die Formel eingehen muss. v_m^2 und damit R sind *materialabhängig*.

- *Damit kann man bei einem Draht folgern:*

  - Die Länge des Drahtes ist proportional zur Anzahl der Stöße. Der *Drahtwiderstand vergrößert sich proportional zur Drahtlänge.*

  - Man kann auch so schließen: Es gilt $\dfrac{U}{R} = I = (n \cdot e \cdot A) \cdot v_m$. Hier ist n die Anzahl Elektronen pro Volumen, also eine Konstante. Die Elektronenladung e ist ebenfalls konstant. Bei gleichem $U =$ Arbeit pro Ladung wird die mittlere Energie nicht ändern, da die Arbeit pro Ladung ja in kinetische Energie pro Ladung übergeht. Wenn der Strom I ändert, muss daher A ändern. Nun ist wegen $\dfrac{U}{R} = I = (n \cdot e \cdot A) \cdot v_m$ das R proportional zu $\dfrac{1}{A}$, wenn hier sonst nur noch I ändern kann.

  - Daher ergibt sich mit der Drahtlänge L und der Querschnittsfläche A:

    * R proportional zu $\dfrac{L}{A} \;\Rightarrow\; R = const. \cdot \dfrac{L}{A} = \rho \cdot \dfrac{L}{A}$.
    * $\rho = R \cdot \dfrac{A}{L}$ ist der *spezifische Widerstand des Drahtmaterials.*
    * *Einheit:* $[\rho] = \Omega\, m$.
    * *Beispiel:* Kupfer $\rightsquigarrow$ $\rho = 1.7 \cdot 10^{-8}\ \Omega\, m$, Eisen $\rightsquigarrow$ $\rho = 9.7 \cdot 10^{-8}\ \Omega\, m$.
    * $\sigma = \rho^{-1} = \dfrac{1}{\rho}$ heißt *Leitfähigkeit.*
    * $G = \dfrac{1}{R}$ heißt *Leitwert.*
    * *Einheit: Siemens* $\rightsquigarrow$ $1\,S = 1\,\Omega^{-1}$.

  - Die *spezifische Leitfähigkeit* ist manchmal *linear temperaturabhängig* (es gibt aber Ausnahmen):

    * *Formel:* $\Delta\rho = \rho_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T$ und damit $\Delta R = R_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T$.
    * Der *Widerstand steigt mit* der Temperatur (Gitteratome brauchen mehr Platz. $\rightsquigarrow$ *Mehr Stöße.*)
    * α heißt *Temperaturkoeffizient des Widerstands.*
    * α ist *materialabhängig* und manchmal auch noch abhängig von der Temperatur, z.B. Wolfram oder Kohlenfaden.

  * *Ausnahmen:* Halbleiter, Elektrolyte: *Widerstand nimmt mit Temperatur* oft *ab*. (Mehr bewegliche Ladungsträger mit höherer Temperatur.)
  * *Widerstandskennlinie:* Aus dem $(U,\, I)$–Diagramm.

- *Anwendung von Widerständen* als: Schutzwiderstände, Messwiderstände, Schaltwiderstände usw. vgl. Literatur.

- *Supraleitung:* Der Widerstand nimmt oft mit *sinkender Temperatur* ab. Bei einer speziellen *Sprungtemperatur verschwindet er* dann plötzlich *ganz*. Diverse *Anwendungen* siehe Literatur.

Schaltungen: Typen und Kirchhoffsche Regeln

- *Der Begriff der Schaltung:* Zusammenhängendes *Netz* mit *elektrischen Bauteilen* und *Speisung* (Spannungsquelle, Batterie, „Elektronenpumpe“, Netzgerät). Spannungsquelle und Widerstände mit Schaltern bilden einen *Schaltkreis*. Wenn die *Schalter geschlossen* sind, kann *Strom fließen*. Ein Gebiet für sich sind die *Schaltsymbole* für Widerstände. Als *Widerstände* können (meistens im Zusammenhang mit *Wechselspannung*) *auch Spulen* und *Kondensatoren* auftreten.

- *Repetition aus der Elektrostatik:*

  - Spannung = *Potentialdifferenz*.
  - $U_{AB} = U_{OB} - U_{OA} = \varphi_B - \varphi_A$. U_{AB} kann positiv oder negativ sein.
  - Als *Potentialnullpunkte* werden in der Praxis oft die *Erdoberfläche* (*Erdung*) oder etwa ein *Gehäuse* definiert.

- In der *Praxis* sind die *Widerstände der Leitungen* gegenüber denjenigen der Verbraucher *oft vernachlässigbar*. Man geht daher überall in den Zuleitungen resp. den Ableitungen vom *gleichen Potential* aus.

- *In Schaltkreisen gelten zwei Prinzipien* (Kirchhoff):

  - Die *Ladungserhaltung*, wenn *Strom* fließt: *In jedem Punkt der Schaltung ist die Summe der (parallel) zugeführten Ladungen ist gleich der Summe der (parallel) weggeführten Ladungen.*

    * $\leadsto$ **Knotenregel:** In einem Knoten (*Verzweigungspunkt*) ist die *Summe der Ströme null*. (Ströme sind gereichtet: Zugeführte positiv, weggeführte negativ.) $\leadsto$ $I_1 + I_2 + I_3 + \ldots = \sum\limits_k I_k = 0$.

  - Die *Energieerhaltung: Die Summe der Spannungen in allen Maschen* (über allen Widerständen, in Serie) *ist null*.

    * $\leadsto$ **Maschenregel:** In einer *Masche* (Teilkreis) ist die *Summe der Spannungen null*. (Spannungen sind gerichtet: In Umlaufrichtung positiv, entgegen negativ.) $\leadsto$ $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots = \sum\limits_k U_k = 0$.

    * $W = Q \cdot U_1 + Q \cdot U_2 + Q \cdot U_3 + \ldots = \sum_k Q \cdot U_k = 0$, da die Masche geschlossen ist und es *kein Perpetuum mobile* geben kann.

- *Serienschaltung:* Hier greift vor allem die Knotenregel. *In jedem Punkt ist derselbe Strom* (zugeführter (Strom, pos.) = - weggeführter (Strom, neg.)).
  - $\leadsto$ $U_1 = I \cdot R_1, \quad U_2 = I \cdot R_2, \quad \ldots.$
  - $\leadsto$ $U = U_1 + U_2 + \ldots = I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + \ldots = I \cdot (R_1 + R_2 + \ldots) = I \cdot R.$
  - $\leadsto$ $R = R_1 + R_2 + \ldots.$
  - $\leadsto$ *Bei der Serienschaltung addieren sich die Widerstände zum Gesamtwiderstand.*

- *Parallelschaltung:* Hier greifen die Knotenregel und die Maschenregel. Über jedem Widerstand zwischen zwei Knoten ist dieselbe Spannung.
  - $\leadsto$ $I_1 = \frac{U}{R_1}, \quad I_2 = \frac{U}{R_2}, \quad \ldots.$ (U gleich: Maschenregel.)
  - $\leadsto$ $I = I_1 + I_2 + \ldots = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \ldots = U \cdot (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots) = \frac{U}{R}.$ (Spannungssumme: Knotenregel.)
  - $\leadsto$ $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots.$
  - $\leadsto$ *Bei der Parallelschaltung addieren sich die reziproken Widerstände zum reziproken Gesamtwiderstand.*
  - $\leadsto$ *Weitere parallele Widerstände vergrößern den Gesamtstrom.*
  - Anwendung: *Verbraucher* in *öffentlichen Netzen!*

- Der *Kurzschlusswiderstand:* Schließt man eine Spannungsquelle kurz, so wird der *Strom nicht unendlich* (Experiment). Es gibt daher *in der Spannungsquelle einen Kurzschlusswiderstand R_i*. Es gilt:
  - $U = I_{Kurzschluss} \cdot R_i$.
  - Bei einem angeschlossenen Verbraucher R gilt:
    * $U = I \cdot R_i + I \cdot R = I \cdot (R_i + R)$.
    * *Formel:* $U_{Klemme} = U - I \cdot R_i \leadsto$ zur Verfügung stehender Strom.
    * Es ist $U_{Klemme} < U$.
  - *Beispiele:*
    * *In Serie geschaltete Batterien:* Bringt doppelte Spannung $2 \cdot U$ und auch doppelten Kurzschlusswiderstand $2 \cdot R_i$ (bei 2 Batterien).
      · $\leadsto$ $I = \frac{2 \cdot U}{2} \cdot R_i = \frac{U}{R_i}$. $\leadsto$ *Kurzschlussstrom ändert nicht.*

* *Parallel geschaltete Batterien:* Bringt gleiche Spannung, und doppelten Strom (bei 2 Batterien).
  · $\leadsto$ $R_{i,\,neu} = \frac{U}{2 \cdot I} = \frac{(\frac{U}{I})}{2} = \frac{R_{i,\,alt}}{2}$

    $\leadsto$ *Der Kurzschlusswiderstand sinkt auf die Hälfte.*
* *Das Problem des Spannungsabfalls an der Steckdose:* In einer Zuleitung zu einem Haus kann man zwischen Phase und Nullleiter die Spannung von 230 V messen. Momentan ist im Haus ein Gerät (Glühlampe) in Betrieb, das ca. 0.1 A aufnimmt, wie es auf der Beschreibung des Gerätes zu lesen ist. Daher hat es einen Widerstand von $\frac{230\ V}{0.1\ A} = 2300\ \Omega$ und nimmt eine Leistung von $230\ V \cdot 0.1\ A = 23\ W$ auf. Die Zuleitung selbst hat einen Widerstand von ca. 1 Ω wie eine Rechnung bei bekannter Art des Drahts und bekannter Leitungslänge zeigt. Der Leitungsteil im Haus ist vernachlässigbar. Nun wird ein zweites Gerät parallel geschaltet, das 15 A aufnimmt. Damit fließen total 15.1 A durch die Zuleitung. Damit gibt es dort einen Spannungsabfall von $15.1\ A \cdot 1\ \Omega = 15.1\ V$. Die Zuleitung ist in Serie mit der Hausinstallation geschaltet. Daher hat man im Haus an der Steckdose nur noch eine Spannung von 230 V abzüglich 15.1 V, also eine Spannung von ca. 215 V. Das kann sich an der Lampe durchaus bemerkbar machen.

- *Zur Messtechnik:*
  - Wegen den Gesetzen der Serie- und Parallelschaltung *schaltet man ein Amperemeter* (Strommessgerät) *in Serie zu einem Verbraucher*. Man misst was durch den Verbraucher und das Messgerät fließt. Amperemeter müssen daher einen *möglichst kleinen Innenwiderstand* haben, um nicht in Serie große Spannungsabfälle zu erzeugen.
  - Ein *Voltmeter* hingegen *schaltet man parallel zum Verbraucher*. Man misst die Spannung zwischen den Anschlussklemmen des Verbrauchers, d.h. über dem Verbraucher. Voltmeter müssen daher einen *möglichst großen Innenwiderstand* haben, um nicht parallel große Ströme abzuzweigen.

Nochmals zu den Wirkungen des elektrischen Stromes

- Zur *Wärmewirkung* (infolge *Stößen* an den Materialatomen usw., ist *im Vakuum nicht vorhanden*, etwa bei einem Elektronenstrahl):
  - Es gilt *für einen Widerstand:*
    * $P = U \cdot I \;\Rightarrow\; W = P \cdot t = U \cdot I \cdot t = R \cdot I^2 \cdot t = \frac{U^2 \cdot t}{R}$.
    * An einem *Widerstand* wird also *Wärme produziert.*

  - Anwendung: *Schmelzsicherung.* Wenn der Strom infolge falsch geleiteter Ströme (Kurzschluss usw.) zu gross wird, erhitzt sich eine *Sollunterbruchstelle* zu stark, so dass dort der *Draht schmilzt* und den Stromkreis *unterbricht.*
  - Kochplatte: Siehe Literatur.

- *Zur Lichtwirkung:*
  - *Elektronen stossen auf Atome in Glühwendel oder in Gasen.* Durch die Stösse werden *äussere Elektronen der angestossenen Atome auf ein höheres Energieniveau gehoben* (Schalenmodell der Atome mit diversen möglichen Energieniveauschalen.) Diese Schalen haben dann mehr Energie und sind gewissermassen *instabil.* Sie *geben diese Stossenergie dann wieder ab in Form je eines Lichtquants* (*Photon*, Lichtteilchen einer bestimmten Energie, mit Wellennatur).
  - Es können auch Elektronen aus der äusseren Schale herausgeschlagen werden, welche dann wieder anderswo anstossen.

- Zur *Kraftwirkung* oder zur *magnetischen Wirkung:* Siehe unter Magnetismus.

- Zur *chemischen Wirkung* (z.B. in Elektrolyten, bei der Elektrolyse, Beispiel Aluminiumgewinnung) — oder:
  - *Faradays Gesetz zur Elektrolyse:*
    Sei die transportierte Stoffmenge = m, N = Anzahl Teilchen z = Vielfachheit der Elektronenladung, $\frac{M}{N_A}$ = Ionenmasse, M = Masse in g oder $kg\,mol^{-1}$.
    $$* \leadsto \; m = M \cdot \frac{Q}{t} \cdot \frac{t}{z \cdot N_A \cdot e} = \frac{M \cdot I \cdot t}{z \cdot F_A} \;\text{ mit }\; F_A = \text{Faradaykonstante} = 96500\; C\,mol^{-1}.$$
  - Batterie oder Akkumulator: Vgl. ausführliche Beschreibungen in der Literatur (auch Chemie-Probleme).
  - *Erste Batterie von Volta:* Kupfer und Zink-Platten, getrennt durch salzwassergetränkte Lederstücke.

Elektrizität und Information

Sachlage: Die *hohe Ausbreitungsgeschwindigkeit* der *elektromagnetischen Felder* macht diese Felder für die *Informationsübermittling interessant.* Man kann Signale auf *modulieren* und anderswo wieder *ablesen.*

- *Erfindungen:*
  - *Morsetelegraph* (Binärcodierung)
  - *Telefon* (früher analoge Modulation, heue meist binär)

  - *Radio*
  - usw.
  - *Transatlantikkabel* ....

- Von der Natur gegeben: *Nervenzellen*, chemische Signale und elektrische Reizübertragung (Ketten). Vgl. Spezialliteratur.

Wechselstrom:

Dieser wird in einem späteren Kapitel mit der Elektrotechnik behandelt. Ein großer Teil der Gesetze bleibt gleich wie beim Gleichstrom.

2.17 Magnetismus

2.17.1 Magnetfelder, Kraftwirkungen, Induktion

1. Magnetfelder

Grundlegendes:

Magnetismus war schon in der *Antike bekannt*. *Magneteisenstein* oder *Magnetit* übt eine *anziehende Kraft auf kleine Eisenstücke* aus. Angezogen werden *auch Nickel, Kobalt* und *Legierungen* davon. Das nennt man *Ferromagnetismus*. Ein Körper, welcher diese anziehende Kraft zeigt, heißt *Magnet*. *Premanentmagnete verlieren* diese *Kraft nicht* in sichtbarer Weise (zum Beispiel Magnetit).

- *Phänomene* und *Benennungen:*
  - *Magnetisierbare Gegenstände in der Nähe von Magneten werden selbst zu Magneten*. Das nennt man magnetische *Influenz* (Beeinflussung).
  - Werden solche Körper *mit Permanentmagneten bestrichen*, so werden sie *selbst* zu *Permanentmagneten*.
  - *Magnetismus wirkt durch nicht magnetisierbare Materialien hindurch* (Luft, Holz, Glas, Aluminium, Plastik, Papier,. . .).
  - Streut man auf einen Karton oder eine *Glasplatte*, unter der sich ein *Magnet* befindet, *Eisenfeilspäne*, so *richten sich* die Späne nach dem Magneten unter der Platte *aus*. Sie bilden *Feldlinienbilder* wie beim Grieskörnerversuch bei der Elektrizität.
  - Wegen den Feldlinienbildern spricht man von einem *Magnetfeld*.
  - Die beiden Konzentrationspunkte an den Magnetenden heißen Pole.
  - Die *Dichte des Feldlinienbildes* zeigt die *Stärke* des lokalen Magnetfeldes an.
  - Jeder Magnet besitzt *zwei Pole*.
  - Die Pole nennt heißen *Nord*- und *Südpol*.
  - *Gleichnamige Pole stoßen sich ab* (z.B. zwei Nordpole).
  - Ein *Nord- und ein Südpol ziehen sich an*.
  - *Schneidet* man einen *Magneten zwischen* den *Polen entzwei*, so entstehen zwei *Teile*, welche *wiederum Magnete sind*, also einen Nord- und einen Südpol aufweisen.
  - Körper, welche *nur einen Pol aufweisen* (*Monopole*) *existieren nicht*.
  - Das *Entzweischneiden* kann man *soweit treiben*, bis *kleinste mögliche Magnete* erreicht sind. Das ist oberhalb der Atomgröße.
  - Diese nennt man *Elementarmagnete* (kleine magnetische Dipole).

- Die Elementarmagnete sind in Magneten *in größeren Gebieten ausgerichtet*. Diese heißen *Weiß'sche Bezirke*.
- Beim *Entmagnetisieren* wird die *Ordnung* der Weiß'schen Bezirke *zerstört*.
- Bei einer gewissen *materialabhängigen Temperatur* (*Curie*-Temperatur) findet diese *Zerstörung* resp. die *Entmagnetisierung* statt.

Die Erde als Magnet

- Die *Erdkugel selbst ist ein Magnet*. Die *Pole* sind der *magnetische Nord-* und *Südpol*. Diese fallen *nicht* mit den *Polen* auf der *Rotationsachse* (*geographischer Nordpol*) zusammen.
- Die *magnetischen Pole wandern* auch.
- Man unterscheidet *diverse Pole bei der Erde*. Das *Beispiel Nordpol:*
  - *Geographischer* Nordpol (oben erwähnt).
  - Der *Nordpol der Unzugänglichkeit* ist der küstenfernste Punkt im Nordpolarmeer.
- Der *arktische Magnetpol* ist jener Punkt der nördlichen Hemisphäre, an dem die *magnetischen Feldlinien* des *Erdmagnetfelds vertikal* zur Erdoberfläche *Richtung Erdmittelpunkt* stehen. Im physikalischen Sinne ist er ein *magnetischer Südpol*, denn er *zieht die Nordpole unserer Eisenmagnete* an.
- Die *Achse* zwischen dem magnetischen Nord- und Südpol ist um ca. 10^o *gegen* die *Rotationsachse der Erde geneigt*.
- In *Mitteleuropa* ist die Abweichung (*Deklination*) praktisch nicht spürbar.
- Die *Inklination* ist die *Abweichung* der Magnetkompassnadel *gegen die Horizontale*.
- Man stellt heute eine *Veränderung des Erdmagnetfeldes* mit der *Zeit* fest.
- Der *arktische geomagnetische Pol* auf der nördlichen Halbkugel ist ein *theoretischer Pol*. Das *Erdmagnetfeld* ist *unregelmäßig*. Man kann es theoretisch *ausmitteln*, indem man annimmt, dass sich *im Erdmittelpunkt ein starker Stabmagnet* befände. Auf der *Erdoberfläche* errechnet man damit den *Punkt mit der größten Feldliniendichte:* den arktischen geomagnetischen Pol.
- Derjenige *Teil einer Magnetkompassnadel*, welche *zum magnetischen Nordpol der Erde zeigt*, nennen wir den *Nordpol unseres Magneten des Kompasses*. Mit dem Kompass kann man dann *alle anderen Nord- und Südpole von Magneten eichen*.

Magnetische Feldstärke und die Feldlinien

- *Versuch:*

- Wir erstellen auf einem Brett ein Koordinatenraster und bringen in *jedem Punkt drehbar kleine Magnetnadeln* an. Ins Innere legen wir einen *Stabmagneten.*
- *Beobachtung:* Die *Magnetnadeln richten sich nach den Feldlinien des Stabmagneten aus.* Dies geschieht nach der erwarteten Anziehung verschiedennamiger Pole. Dreht man eine der Nadeln, so erfährt die Nadel durch das Feld ein *Drehmoment.* Dieses ist *maximal* groß, wenn die *Nadel senkrecht zum Feld* steht. Das Drehmoment ist ein *Maß für die Feldstärke* des Magneten am Orte der Magnetnadel. Falls man eine *Magnetnadel auf einem schwimmenden Floß anbringt*, so beobachtet man neben dem Drehmoment auch noch die *Anziehungskraft* in *Richtung zunehmender „Feldstärke“ parallel zur Feldlinie.* Umgekehrt sagen wir, dass die *Feldstärke zunimmt*, wenn *die genannte Kraft größer* wird.
- Später können wir im Zusammenhang mit Magnetfeldern, welche mittels stromdurchflossenen Spulen gebildet werden, die Feldstärke mit einer messbaren Kraft in Verbindung bringen. Für den Moment begnügen wir uns mit vorläufigen *Beschreibung:*
  - Die *magnetische Feldstärke* ist ein *Vektor* $\vec{B}$, welcher vorläufig durch das *Phänomen* der *Drehmomente* und der *Kraftwirkung* auf *Magnetnadeln* wahrgenommen werden kann.
  - Man *misst* die *magnetische Feldstärke* im Zusammenhang mit stromdurchflossenen Spulen, wo der Strom I und die Spannung U als *messbare Größe* zur Verfügung steht.
  - Die *Einheit* der *magnetischen Feldstärke* ist *Tesla* (T).
  - $1\ T = 1\ N\,A^{-1}\,m^{-1} = 1\ V\,sec\,m^{-2}$.
  - $B\ [T]$ resp. Tesla ist eine *Grundeinheit* im Maßsystem.
  - *Größenordnung:* Erdmagnetfeld $2 \cdot 10^{-5}\ T$, Permanentmagnet bis zu $1.4\ T$.
  - Wir setzen die *Richtung des Feldstärkevektors* wie folgt fest: Ein *Magnetfeld zeigt außerhalb des Magneten vom Nordpol zum Südpol.*
- Analog zu den elektrischen Feldern kann man die *Größe* der *Feldstärke mittels der Dichte der Feldlinien* veranschaulichen. *Dichte Feldlinien* bedeutet *große Feldstärke.* Man kann daher wie bei elektrischen Feldern von der *magnetischen Flussdichte* reden.

• *Oestreds Beobachtung* oder der *Zusammenhang zwischen Magnetfeld und elektrischem Strom:*

- *Elektrische Ströme üben auf Magnete ein Drehmoment aus. Magnete* in der Nähe von stromführenden Leitern *zeigen* daher durch ihre Reaktion das *Vorhandensein* eines *vom elektrischen Leiter erzeugten Magnetfelds* an ihrem Orte an. *Elektrische Ströme erzeugen somit Magnetfelder.*

• Das *Magnetfeld langer* („unendlich“ langer) *gerader stromführender Leiter:*

- *Experiment:* Wir durchbohren ein *horizontales* Papierblatt mit einem *vertikalen* Leiter. Auf das Papier streuen wir *Eisenfeilspäne* und stellen auch noch einige drehbar gelagerte Magnetnadeln hin. Dann lassen wir durch den Leiter einen *genügend großen Strom* fließen. $\rightsquigarrow$ *Resultat:*
  - Auf dem *Papierblatt* zeigen die Eisenfeilspäne durch ihre Ausrichtung *kreisförmige magnetische Feldlinien um den Leiter* an.
  - Die *Magnetnadeln* zeigen dazu die *Richtung des erzeugten Magnetfeldes* an.
  - Die *Feldliniendichte* (*Stärke des Feldes*) nimmt *nach außen* hin *ab*.
  - *Messungen zeigen* (z.B. Drehmoment auf Nadel), dass die *Feldstärke* in *doppeltem Abstand* r vom Leiterzentrum sich *halbiert*.
  - Ebenso *verdoppelt* sich die *Feldstärke* bei *doppeltem Strom* I.
  - $\rightsquigarrow$ B ist *proportional* zu $\frac{I}{r}$. Die *Proportionalitätskonstante* nennen wir $\frac{\mu_0}{2\,\pi}$.
- $\rightsquigarrow$ *Formel:* $B(I,\,r) = \frac{\mu_0}{2\,\pi} \cdot \frac{I}{r} = \mu_0 \cdot \frac{I}{r \cdot 2\,\pi}$.
  - $\mu_0 = 4\,\pi \cdot 10^{-7}\ V\,sec\,(A\,m)^{-1}$.
  - μ_0 heißt die *magnetische Feldkonstante*.
  - $2\,\pi \cdot r$ ist der Umfang eines Feldlinienkreises.
- *Feldrichtung von* $\vec{B}$: Festlegung nach der *Rechtsschraubenregel*. Man dreht die Rechtsschraube nach rechts in Richtung $\vec{B}$, dann schraubt sie sich vorwärts in Richtung des Stromes I.

• Das *Magnetfeld von Kreisströmen:*

- *Kreisströme* sind *Ströme* in *kreisförmigen Drahtschleifen*.
- Die *Feldstärke in der Mitte* ist: $B(I,\,r) = \mu_0 \cdot \frac{I}{2\,r}$ (hergeleitet weiter unten).
- Wenn es sich um *mehrere Drahtschleifen* handelt, so redet man von einer *Spule* (Flachspule). Man muss dann B noch *mit* der *Anzahl* N der *Windungen multiplizieren* (Verstärkung).
- *Aus der Entfernung* sieht das *Magnetfeld eines Kreisstromes* aus *wie dasjenige einer Magnetnadel*.
  - Ein solches Feld heißt *Dipolfeld*.
  - *Kreisströme* verhalten sich *magnetisch wie Magnetnadeln*.
  - Die Feldlinien von Leitern sind geschlossen. Analog müssen daher auch die *Feldlinien im Permanentmagneten im Innern weitergehen*, bis sie sich *schließen*.
  - *Magnetfelder von Permanentmagneten* und solche *von Kreisströmen unterscheiden sich nicht* in ihren *Eigenschaften*.
- *Ampères Hypothese:* Auch die *Magnetfelder von Permanentmagneten* werden *durch Ströme hervorgerufen*, „*atomare Kreisströme*“.

- *Helmholzspule:* Zwei parallele *Kreisströme*, verschoben um den Radius r. Im Innern bildet sich ein nahezu *homogenes* und *zugängliches Magnetfeld.*

- *Magnetfelder von geraden, langen Spulen:*

  - *Innen nahezu homogen.*
  - *Außen fast null* (klein).
    * $B(I,\,r,\,L) = \mu_0 \cdot N \cdot \dfrac{I}{L} = \mu_0 \cdot \dfrac{I}{a}$ im Innern.
    * $\mu_0 =$ siehe oben.
    * $L =$ Länge, $N =$ Anzahl Windungen, $a =$ Windungsabstand.
    * *Feldform außen: Ähnlich Stabmagnet.*
  - *Zwei parallele Leiter mit gleich gerichteten Strö*men:
    * *Feldlinien* zwischen den Leitern *entgegengesetzt.*
    * *Leiter ziehen sich an.*
  - Zwei *parallele Leiter* mit *entgegengesetzt gerichteten Strömen:*
    * *Feldlinien* zwischen den Leitern *gleich gerichtet.*
    * *Leiter stoßen sich ab.*

- Allgemeines zu *Magnetfeldern:* Magnetfelder sind *Wirbelfelder.* Das heißt:

  - Feldlinien haben folgende *Eigenschaften:*
    * *Geschlossene Kurven*, also *ohne Anfang und Ende.*
    * *Umschließen* den erzeugenden *Leiter*
    * *Magnetische Ladungen existieren nicht.*
    * In der Nähe den Leiter umschließende *Kreise.*
    * *Feldstärken* sind *Vektoren*, welche sich entsprechend *addieren beim Überlagern der Felder.*
  - Sei der Leiter in kurze Wegstücke Δs eingeteilt resp. zerlegt. Dann gilt für die *Feldstärke* $\vec{B}$ *irgendwo in einem Punkte* P *bezüglich* Δs (Modellbildung nach *Laplace*) $\leadsto$ schwierige Rechnungen!!!:
    * *Formeln:* $\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{2\,\pi} \cdot \dfrac{I}{r} \cdot (\dfrac{\Delta\vec{s}}{r} \times \dfrac{\vec{r}}{r}) \cdot \dfrac{1}{2} = \mu_0 \cdot \dfrac{I}{4\,\pi} \cdot \dfrac{\Delta\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$.
    * $\leadsto \vec{B} = \dfrac{\mu_0}{2\,\pi} \cdot \dfrac{I}{r} \cdot \vec{h}, \quad \vec{h} = (\dfrac{\Delta\vec{s}}{r} \times \dfrac{\vec{r}}{r}) \cdot \dfrac{1}{2}.$ Hier sind:
    * $\leadsto B(I\,r) = (\dfrac{\mu_0}{2\,\pi}) \cdot (\dfrac{I}{r}) \leadsto$ Formel von weiter oben, Feldstärke in einem Punkt um r entfernt vom Leiter.
  - Zum Verständnis der Formel mit $\vec{h}$:

* $2\vec{h} = (\frac{\Delta\vec{s}}{r}) \times (\frac{\vec{r}}{r})$ = Kreuzprodukt in Feldlinienrichtung. $\frac{\vec{r}}{r}$ ist Einheitsvektor, $(\frac{1}{r} \cdot \Delta\vec{s})$ ist der auf r bezogene Anteil von Δs. $\Delta\vec{s}$ steht senkrecht auf $\vec{r}$.
* Richtung des Vektorprodukts: Die Richtung ist senkrecht zur Ebene durch $\Delta\vec{s}$ (Leiter) und P. Das ist die Richtung der Feldlinie im Punkt P.
* Betrag: $|(\frac{\Delta\vec{s}}{r}) \times (\frac{\vec{r}}{r})| = |\frac{\Delta\vec{s}}{r}| \cdot |\frac{\vec{r}}{r}| \cdot |\sin(\alpha)|$.
  $|\vec{h}|$ ist der *Inhalt* $A_\triangle$ der *Dreiecksfläche* mit der Grundlinie $|\frac{\Delta s}{r}|$ und der Höhe $|\frac{\vec{r}}{r}| = 1$. α ist der *Winkel* zwischen $\Delta\vec{s}$ und $\vec{r}$. Diesen Dreiecksinhalt $A_\triangle$ kann man auch mit anderen Seitenvektoren berechnen: $\leadsto$ Mit $\frac{\vec{r} - \Delta\vec{s}}{r}$ und $\frac{\vec{r}}{r}$.
* $A_\triangle = |\frac{\vec{r} - \Delta\vec{s}}{r}| \cdot |\frac{\vec{r}}{r}| \cdot \frac{1}{2} \cdot |\sin(\Delta\varphi)|$. (Kreuzprodukt, Betrag.)
  Weil $\Delta\vec{s}$ gegenüber $\vec{r}$ immer *kleiner* gemacht werden kann, ist der *Winkel* $\Delta\varphi$ zwischen $\vec{r}$ und $(\vec{r} - \Delta\vec{s})$ sehr klein. Für kleine $\Delta\vec{s}$ und damit kleine Winkel $\Delta\varphi$ ist $\sin(\Delta\varphi) \approx \Delta\varphi$ und $(\vec{r} - \Delta\vec{s}) \approx \vec{r}$.
  Somit gilt: $|\vec{h}| \approx |\frac{\vec{r}}{r}| \cdot |\frac{\vec{r}}{r}| \cdot \frac{1}{2} \cdot |\Delta\varphi| = \frac{\Delta\varphi}{2}$. Damit gilt mit $r = r(\varphi)$:
* $B(P,\, r,\, \Delta s) = B(P,\, r(\varphi),\, \varphi) = \frac{\mu_0}{4\,\pi} \cdot I \cdot \frac{\Delta\varphi}{r(\varphi)}$.
  Ist r_0 = senkrechter Abstand von P zum Leiter, so gilt:
* $r_0 = \frac{r(\varphi)}{\cos(\varphi)}$ und damit $B = \mu_0 \cdot \frac{I}{4\,\pi \cdot r_0} \cdot \cos(\varphi) \cdot \Delta\varphi$.
* Summiert man jetzt die Δs vom Lotfußpunkt P_L (Lot von P auf den Leiter) bis zur unendlichen Leiterlänge, so wird:
* $\sum \cos(\varphi) \cdot \Delta\varphi = 1$. Das kann auf elegante Weise zeigen mit der *Integralrechnung*. Tut man das beidseitig (für positive und negative φ), so erhält man 2 und B wird in P gleich $\frac{\mu_0 \cdot I}{2\,\pi r_0}$, womit man μ_0 geeicht hat. *Das Modell von Laplace zeigt sich hier also als richtig.* Betragsmäßig lautet die obige Formel: $B = (\frac{\mu_0}{4\,\pi}) \cdot (\frac{I}{r^2}) \cdot \Delta s$. (Beitrag des Stückes Δs zur Feldstärke.)

• *Berechnung des Magnetfeldes im Innern einer Stromschlaufe:*

  – Wir *biegen* einen *passend langen Leiter zu einem Kreis*, welcher an einer Stelle eine kleine *Lücke* aufweist, wo die Drahtenden an einer *Stromquelle angeschlossen* sind. Im *Kreis fließt* ein *Strom* der Stärke I.

  – In der Mitte der Schlaufe bekommen wir nach obiger Herleitung eine Feldstärke von $B_{total} = \sum (\frac{\mu_0}{4\,\pi}) \cdot (\frac{I}{r^2}) \cdot \Delta s = (\mu_0 \cdot \frac{I}{4\,\pi r^2}) \cdot \sum \Delta s$.

- Hier gilt: $\sum \Delta s =$ Kreisumfang $= 2\, r\, \pi$.
- Somit gilt im Zentrum $\leadsto$ *Formel:* $B_{total} = \mu_0 \cdot \dfrac{I}{2 \cdot r}$.

• Weiter gilt das *Durchflutungsgesetz von Ampère:*

- Für eine *geschlossene Kurve* in einem *magnetischen Feld* gilt, dass die unendliche „*Liniensumme*“ (entsprechend kleine Δs) $\leadsto$ $\sum (\vec{B} \circ \Delta\vec{s})$ (*Skalarprodukt*) gleich $\mu_0 \cdot I_{total}$ ist, wobei I_{total} der *Gesamtstrom durch* die *von der Kurve umrandete Fläche* ist. $\sum (\vec{B} \cdot \Delta\vec{s}) \to \int (\vec{B} \circ d\vec{s})$ ist ein Linienintegral. Im vorhin behandelten Kreis gilt: $\Delta\vec{s}$ beschreibt eine Feldlinie. $\vec{B}$ ist daher *parallel* zu $\Delta\vec{s}$ *längs einer Feldlinie.*
  - ∗ $\leadsto$ $\sum (\vec{B} \circ \Delta\vec{s}) = \mu_0 \cdot I_{total}$ (Ampère).
  - ∗ $\leadsto$ $\sum (\vec{B} \circ \Delta\vec{s}) = B \cdot 2 \cdot r \cdot \pi = \mu_0 \cdot I \;\Rightarrow\; B = \mu_0 \cdot \dfrac{I}{2 \cdot r \cdot \pi}$.
- Damit kann man *Magnetfelder berechnen.* Z.B. im *Innern eines Leiters* mit *Kreisquerschnitt* und Radius R:
  - ∗ Die *Magnetfeldlinien im Innern* müssen wieder *geschlossene Kurven* sein. Das Ganze muss *rotationssymmetrisch* sein. $\leadsto$ Die Feldlinien sind *Kreise.* Auf diesen Kreisen ist die *Feldstärke konstant.*
    $\leadsto$ $\sum (\vec{B} \circ \Delta\vec{s}) = B \cdot 2 \cdot r \cdot \pi = \mu_0 \cdot I(r)$.
  - ∗ Wenn man sich den *Strom gleichmäßig auf die Fläche verteilt* denkt, erhält man: $I(r) = I \cdot \dfrac{r^2 \cdot \pi}{R^2 \cdot \pi} = I \cdot \dfrac{r^2}{R^2}$.
  - ∗ $B \cdot 2 \cdot r \cdot \pi = \mu_0 \cdot I \cdot \dfrac{r^2}{R^2} \;\Rightarrow\; B = \mu_0 \cdot I \cdot \dfrac{r}{R^2 \cdot 2 \cdot \pi}$.
  - ∗ Sei $B_0 = \mu_0 \cdot \dfrac{I}{2 \cdot R \cdot \pi} \;\Rightarrow\; B = B_0 \cdot \dfrac{r}{R}$.
- *Magnetfeld in einer Spule*, Windungsabstand a, Strom I in der Spule, Weg s auf einem Rechteck um eine Spulenseite und parallel zur Achse:
  - ∗ Außen ist $B \approx 0$. Quer zur Achse heben sich die beiden Anteile zur Liniensumme wegen der entgegen gesetzten Wegrichtung auf. Längs der Länge s befinden sich $\dfrac{s}{a}$ Windungen. $\leadsto$ Gesamtstrom im Rechteck: $I_{total} = I \cdot \dfrac{s}{a}$.
  - ∗ $\sum (\vec{B} \circ \Delta\vec{s}) =$ Anteil im Spuleninnern (Rest fällt weg) $= B \cdot s$.
  - ∗ $\leadsto$ *Formel:* $B \cdot s = \mu_0 \cdot I_{total} = \mu_0 \cdot I \cdot \dfrac{s}{a}$.
  - ∗ $\leadsto$ $B = \mu_0 \cdot \dfrac{I}{a} = \mu_0 \cdot \dfrac{I}{(\dfrac{\text{Länge}L}{\text{Anzahl}N})} = \mu_0 \cdot \dfrac{I}{(\dfrac{L}{N})}$.

• *Der Elektromagnet:*

- Wenn man einen *Eisenkern in eine Spule* schiebt, so zeigt das *Magnetfeld an den Enden des Eisenkerns* bei einer Messung eine *Verstärkung um einen Faktor*

100 bis 1000. Das macht die Sache interessant: Wir haben einen *Elektromagneten*.

- *Erklärungsidee von Ampère: Atomare Kreisströme im Eisen*, welche sich *parallel zum Spulenfeld richten* und diese *verstärken.* (Effekt in der Quantenmechanik erklärbar). Diese Parallelrichtung und somit Verstärkung ist proportional zu I.
- Die *Proportionalitätskonstante* heißt *Permeabilität* μ_r (abhängig vom Material).
  - $\leadsto$ $\text{B}_{\text{Spule mit Kern}} = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot \frac{I}{(\frac{L}{N})} = B_{\text{Spule ohne Kern}} + B_{AKS}.$

    Dabei bedeutet AKS *atomare Kreisströme.*
- Bei *hartmagnetische Materialien* (Bsp. Stahl) *verliert das Material nach dem Abschalten des Spulenmagnetfeldes die Ausrichtung der atomaren Kreisströme nicht.* Man spricht von *Remanenz.*
  - Verwendung zur Datenspeicherung!
- *Verhaltensarten:*
  - *Diamagnetische Stoffe* werden *aus* einem *Magnetfeld hinaus gedrängt.*
  - *Paramagnetische Stoffe* werden *hineingezogen.*
  - *Zusammenhang mit Supraleitung: Meissnereffekt*, Magneten können von Supraleitern *in der Schwebe gehalten* werden.
  - Vgl. Literatur.

2. Kraftwirkung und Magnetfeld

Lorenzkraft

- *Elektronenstrahlen*, welche *Gase zum Leuchten* bringen und so ihre *Position verraten*, lassen sich *durch Magnete ablenken. Magnetfelder üben daher Kräfte auf bewegte Elektronen aus:* Die *Lorenzkräfte* (z.B. in der Fernsehröhre.) Man stellt bezüglich der *Richtung der Lorenzkraft* fest (Experiment):
  - Die Lorenzkraft $\vec{F}_L$ *wirkt senkrecht zum Magnetfeld* $\vec{B}$ und *senkrecht zur Bewegungsrichtung* $\vec{v}$ der *Ladung.*
    - Man kann nämlich *in einem homogenen Feld im Innern einer Spule die Elektronen auf Kreisbahnen zwingen.* Es wirkt demnach eine *Kraft in Richtung Zentrum*, während die *Geschwindigkeit tangential* zur Kreisbahn und das *Feld in Achsenrichtung senkrecht zur Kreisbahnebene* stehen.
    - Ist die *Geschwindigkeit nicht senkrecht* zum B–Feld, so entsteht eine *Schraubenlinie* mit konstanter Steigung.
  - Bezüglich der *Stärke der Lorenzkraft* stellt man fest:
    - Die *Lorenzkraft zeigt sich bei bewegten Teilchen.*

  * Bei *doppeltem Strom* in der Spule entsteht ein *doppelt so starkes Magnetfeld*. Dann wird der *Kreisbahnradius* der Elektronen *halbiert*.
  * Es gilt: $B = \mu_0 \cdot \frac{I}{2 \cdot r \cdot \pi} \;\Rightarrow\; \frac{B}{I} = const.$ bei $r = const.$
  * Doppelter Strom hat also doppelte Feldstärke zur Folge.
  * Man beobachtet, dass sich dann der Bahnradius r_{El} halbiert.
  * Es gilt: $|\vec{F}_L| = |\vec{F}_{zentripetal}| = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{v^2}{r_{El}} \;\Rightarrow\; r_{El} \cdot \frac{F_L}{v^2} = const.$
  * Bei gleicher Geschwindigkeit (Abschussgeschwindigkeit der Teilchen) verdoppelt sich somit in dieser Situation (halber Bahnradius) die Lorenzkraft F_L.
  * *Somit hat eine Verdoppelung des Stromes und damit des Feldes B eine Verdoppelung der Lorenzkraft zur Folge.*
  * $\rightsquigarrow \qquad F_L = B \cdot const..$
- Nun wird die *Abschussgeschwindigkeit der Teilchen erhöht:*
  * $E_{kin} = q \cdot U = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2, \qquad U =$ Beschleunigungsspannung.
  * $\rightsquigarrow \qquad \frac{v^2}{U} = const.$
  * Bei $a = const.$ ist $v = a \cdot \Delta t, \qquad \Delta t = const.$
  * $\rightsquigarrow\; \frac{v^2}{U} = const. = a^2 \cdot \frac{\Delta t^2}{U} = const. \;\Rightarrow\; \frac{a^2}{U} = const.$
  * $\rightsquigarrow$ Doppelte Beschleunigung $a_2 = 2 \cdot a_1$ und somit doppelte Geschwindigkeit $v_2 = 2 \cdot v_1$ bedeutet daher eine vierfache Spannung U.
    $\rightsquigarrow \qquad U_2 = 4 \cdot U_1.$
  * *Feststellung* (Experiment): Zu doppelter Geschwindigkeit v gehört ein doppelter Radius: $v = const. \cdot r$ oder $r_2 = 2 \cdot r_1$.
- Vergleichen wir dazu die Lorenzkräfte F_1 (vorher) und F_2 (nachher), so folgt:
  * $F_2 = m \cdot \frac{v_2^2}{r_2} = m \cdot \frac{(2 \cdot v_1)^2}{(2 \cdot r_1)} = m \cdot 2 \cdot \frac{v_1^2}{r_1} = 2 \cdot F_1.$
- Folgerung:
  * $v_2 = 2 \cdot v_1 \;\Rightarrow\; F_2 = 2 \cdot F_1.$
  * $\rightsquigarrow$ *Die Lorenzkraft ist proportional der Teilchengeschwindigkeit.*
  * Dabei ist *nur diejenige Komponente* der *Geschwindigkeit wirksam*, welche *senkrecht zum magnetischen Feld* steht.
- Weiter findet man im *Experiment*, dass $F_L = const. \cdot q$ ist, $q =$ Ladung.

• *Gesetz zur Lorenzkraft:*
  - $\vec{F}_L = q \cdot (\vec{v} \cdot \vec{B})$ oder *skalar:* $F_L = q \cdot v_{senkr} \cdot B = q \cdot v \cdot B \cdot \sin(\alpha)$.
  - *Beschleunigung:* $\vec{F}_L = m \cdot \vec{a} \;\Rightarrow\; a_{vec} = \frac{q}{m} \cdot (\vec{v} \circ \vec{B})$.

- *In einem Magnetfeld wirkt in Feldrichtung auf geladene Teilchen keine Kraft.* In dieser Richtung ist die Beschleunigung 0. *Damit eine Kraft auftritt, muss die Feldstärke ändern.*
- Bei *konstantem Bahnradius:*
  * Sei $\alpha = 90^o \Rightarrow F_L = q \cdot v \cdot B = m \cdot \frac{v^2}{r} \Rightarrow r = m \cdot \frac{v}{q \cdot B}$.

- Interessante Einsatzgebiete neben Kathodenstrahlröhren und solcherlei:
  - *Teilchenbeschleuniger.* Man konsultiere dazu die Literatur.

Gekreuzte Felder

- Die *Kraftwirkungen* eines *elektrischen* und eines *magnetischen Feldes können sich überlagern.* Die *Kraft* berechnet sich daher als *Vektorsumme:*
  - $\rightsquigarrow$ *Formel:* $\vec{F}_{total} = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$.
  - Ist $\vec{E}$ parallel zu $(\vec{v} \times \vec{B})$, so kann die Kraft auch 0 werden. Hier muss $\vec{E}$ senkrecht zu $\vec{B}$ stehen. Dann ist $\vec{v}$ senkrecht auf $\vec{B}$ und $\vec{E}$. *Dann findet keine Ablenkung statt. Da die Größe von v auch in die Formel eingeht, kann man das benutzen, um bestimmte Teilchen herauszufiltern* (*Wien-Filter* genannt).
  - Wegen $r = m \cdot \frac{v}{q \cdot B} = \frac{m}{q} \cdot \frac{v}{B}$ kann man bei bekanntem B und v die *Masse des Teilchens bestimmen*, da q immer ein Vielfaches des Bahnradius ist. B kann man wie oben behandelt einstellen. Um dazu v zu beherrschen benützen wir: $E = q \cdot U = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$.
    * $\rightsquigarrow \quad v = (2 \cdot q \cdot \frac{U}{m})^{\frac{1}{2}} \Rightarrow r = \frac{m \cdot v}{q \cdot B} = \frac{m}{q} \cdot \left(\frac{(2 \cdot q \cdot \frac{U}{m})^{\frac{1}{2}}}{B} \right)$
    * $\rightsquigarrow \quad r = \frac{\left((\frac{m}{q}) \cdot (2 \cdot U) \right)^{\frac{1}{2}}}{B} = \left(2\, m \cdot \frac{U}{(q \cdot B^2)} \right)^{\frac{1}{2}}$.
    * $\rightsquigarrow \quad m = r^2 \cdot q \cdot \frac{B^2}{(2 \cdot U)}$.
    * Fängt man ein *Teilchen auf eine Fotoplatte auf*, so kann man aus der *Ablenkung und den restlichen Parametern die Masse bestimmen*, so z.B. die *Elektronenmasse* (ca. 10^{-32} *kg*).
    * Das Gerät für solche Versuche heißt *Massenspektrograf*, vgl. Literatur. Das Verfahren nennt man *Massenspektroskopie.*

Magnetfeld und bewegte Ladung (Strom)

- *Auf bewegte Ladungen in Magnetfeldern wirken Lorenzkräfte.* In zwei Fällen hat das *für die Technik Folgen:*

  - *Befinden sich die bewegten Ladungen in einem Leiter im Magnetfeld, so übertragen sich die Lorenzkräfte auf den Leiter.* Dabei nehmen wir vernünftigerweise an, dass die *Bewegungsrichtung der Ladungen* im Falle eines Drahtes *parallel zur Drahtachse* verläuft. Die *Lorenz-Kraft wirkt dann quer zur Drahtrichtung* und somit *auf den Draht*, wenn die Ladungen den Draht seitlich nicht verlassen können. Man hat daher eine *Kraftwirkung auf den Draht.*
    * *Anwendungen:* Elektromotor, Lautsprecher usw.
  - Wie eben beschrieben werden daher die *Elektronen auf eine Seite des Drahtes gedrängt.* Zwischen den *beiden so definierten Drahtseiten entsteht daher eine elektrische Spannung*, welche zur *Messung von Magnetfeldern* verwendet werden kann (*Hall-Effekt*).

- *Die Lorenzkraft auf bewegte Ladungen in einem Leiter:*
  - Gegeben sei ein Leiter mit dem Strom I, darin Elektronen mit $q = -e$ und der Geschwindigkeit v. Der Leiterquerschnitt ist A. In der Zeit Δt durchqueren alle Elektronen eines Volumens $A \cdot \Delta s = A \cdot v \cdot \Delta t$ den Querschnitt. Wir nehmen an, dass $\vec{B}$ senkrecht auf $\vec{v}$ steht. Dann wirkt auf ein Teilchen die Kraft $F_L = q \cdot v \cdot B$. Das macht auf ein Leiterstück der Länge s: $F_{total,L} = N \cdot F_L = N \cdot q \cdot v \cdot B$ mit $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$.
    * Hier ist $N \cdot q = Q = I \cdot \Delta t \;\Rightarrow\; F_{total,L} = I \cdot \Delta t \cdot \dfrac{\Delta s}{\Delta t} \cdot B$.
    * $\leadsto\;\; F_{total,L} = I \cdot \Delta s \cdot B. \leadsto$ Kraft auf ein Stück der Länge Δs.
  - *Auf ein Stück Leiter der Länge s, welcher sich senkrecht zu einem magnetischen Feld bewegt, wirkt die Kraft*
    * *Formel:* $F = I \cdot s \cdot B$ oder $B = \dfrac{F}{I \cdot s} \;\Rightarrow\; 1\ T = 1\ N\,(A\,m)^{-1}$.
  - Vektoriell geschrieben:
    * $\vec{F} = I \cdot (\vec{s} \times \vec{B})$. I hat dabei die Richtung von $\vec{s}$.
  - Die *Kraftrichtung* kann man sich mit der *Rechtschraubenregel* merken:
    * $\vec{s}$ (resp. I) wird nach $\vec{B}$ gedreht, dann dreht sich die Rechtsschrauben in Richtung $\vec{F}$ hinein.
    * Die *Geschwindigkeit* der Elektronen geht *nicht in die Formel* ein.
    * Die Lorenzkraft bei Leitern heißt auch *Biot-Savart-Kraft.*

- Die *Umkehrung der Prozedur* nach „actio = reactio“:
  - *Strom* übt *umgekehrt* eine *Gegenkraft* auf das Erzeugersystem des Magnetfeldes aus. *Vom Leiter wirkt eine Kraft auf den Magneten.*
    * Beispiel: Lautsprecher.

- *Drehmomente auf stromdurchflossene Leiterschlaufen im Magnetfeld:*

- *Situation:* Rechteckige Leiterschlaufe, Bemessung:
  * Länge a, Breite b, Magnetfeld B homogen, senkrecht zu a.
  * a und b bilden die Rechtecksfläche A mit $\vec{A}$ = Normalenvektor.
  * Der Winkel zwischen $\vec{A}$ und $\vec{B}$ ist $= \varphi$.
  * Wegen den zueinander umgekehrten Stromrichtungen auf den Seiten b heben sich dort die Kräfte auf.
  * Kräfte auf $a \leadsto \; F = I \cdot a \cdot B$.
  * Zugehörige Hebelarme $h = (\frac{b}{2}) \cdot \sin(\varphi)$. Die beiden Kräfte (auf den beiden Seiten der Länge a) zeigen genau in die einander entgegengesetzte Richtung. Dies gilt aber auch für die beiden Hebelarme, sodass die beiden Drehmomente identisch sind:
  * $M_1 = F_1 \cdot h_1 = M_2 = F_2 \cdot h_2 = I \cdot a \cdot B \cdot \frac{b}{2} \cdot \sin(\varphi)$.
  * $\leadsto \; M_{total} = M_1 + M_2 = 2 \cdot I \cdot a \cdot B \cdot \frac{b}{2} \cdot \sin(\varphi)$
    $\leadsto \; M_{total} = I \cdot a \cdot b \cdot B \cdot \sin(\varphi) = I \cdot A \cdot B \cdot sin(\varphi)$.
- *Formel:*
  * *Vektoriell* geschrieben $\leadsto \; \vec{M}_{total} = I \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$.
  * *Dabei umfließt der Strom* $(+)I$ *die Fläche mit dem Normalenvektor* $\vec{A}$ im *Gegenuhrzeigersinn.*
  * *Skalar* geschrieben $\leadsto \; M_{total} = I \cdot A \cdot B \cdot \sin(\varphi)$.
- Man stellt beim Nachdenken über die Situation fest:
  * Es *existieren hier zwei Magnetfelder:* Das von *außen gegebene* Feld $\vec{B}$ und *ein vom Strom erzeugtes Feld um den Leiter*, von dem bisher nicht die Rede war.
  * Das von *außen gegebene Feld* $\vec{B}$ *sucht die Leiterschlaufe so zu drehen*, dass das *resultierende Feld des Leiters parallel zum angelegten Feld steht.*
  * Im besprochenen Beispiel geht die Drehung soweit, bis M_{total} gleich *null* ist, d.h. bis in $I \cdot A \cdot B \cdot \sin(\varphi)$ der Term $\sin(\varphi)$ null ist.
  * Die *Drehung kommt daher einmal zur Ruhe.* Will man, dass die *Drehung fortwährend aufrechterhalten bleibt*, so muss man dafür sorgen, dass *das von außen gegebene Feld* $\vec{B}$ *seine Richtung in geeigneter Art wechselt.* Das kann man mit dem *Feld eines Wechselstrommagneten* bewerkstelligen.

• *Kräfte zwischen Strom führenden parallelen Leitern:*

- Weiter oben haben wir gesehen, dass sich *solche Leiter anziehen* oder *abstoßen.* Jetzt wollen wir die Sache noch *rechnen.* Gegeben sei folgende *Situation:*
  * Zwei parallele Leiter mit dem Abstand d und den Längen s_1 und s_2 . Wir wählen $s_1 = s_2$.
  * In den Leitern entsprechend die Ströme I_1 und I_2.

  * I_1 bewirkt bei Leiter 2 ein Magnetfeld: $B_{1,2} = \mu_0 \cdot \dfrac{I_1}{d \cdot 2 \cdot \pi}$.
  * Dieses Magnetfeld bewirkt dort eine Kraft $F_{1,2} = I_2 \cdot s_2 \cdot B_{1,2}$.
  * $\rightsquigarrow \quad F_{1,2} = I_2 \cdot s_2 \cdot \mu_0 \cdot \dfrac{I_1}{2 \cdot \pi \cdot d} = s \cdot \dfrac{I_1 \cdot I_2 \cdot \mu_0}{2 \cdot \pi \cdot d}$.
  * Dieselbe Kraft wirkt umgekehrt auch auf Leiter 1 in umgekehrter Richtung.
  * *Bei gleichgerichteten Strömen wirkt eine anziehende Kraft. Bei umgekehrt gerichteten Strömen eine abstoßende Kraft.*

- Konsequenz:
  * *In Spulen entsteht eine Kraft zwischen benachbarten Drähten.*

- Damit kann man die *Einheit Ampère definieren.*
  * *Situation:* Zwei parallele Leiter mit dem Abstand $d = 1\ m$ und den Längen s_1 und s_2 mit $s = s_1 = s_2$. Wähle $s = 1\ m, \qquad F = 2 \cdot 10^{-7}\ N$.
  * $\mu_0 = 4\,\pi \cdot 10^{-7}\ V\, sec\,(A\,m)^{-1}$.
  * $F = s \cdot \dfrac{I^2 \cdot \mu_0}{2\,\pi \cdot d} \rightsquigarrow$
    $10^{-7}\ N = 1\ m \cdot \dfrac{I^2 \cdot 4\,\pi \cdot 10^{-7}\ V\, sec\,(A\,m)^{-1}}{2\,\pi \cdot 1\ m} \rightsquigarrow$ soweit wie möglich kürzen:
    $2\ N = 1 \cdot \dfrac{(I^2 \cdot 4\ V\, sec\,(Am)^{-1}}{2 \cdot 1} \rightsquigarrow$
    $1\ N = 1 \cdot I^2\ V\, sec\,(A\,m)^{-1}, \qquad 1\ V = 1\ J\,C^{-1} = 1\ N\,m\,C^{-1}$,
    $\rightsquigarrow\ I^2 = 1\ N \cdot 1 \cdot A\,m\,C\,(N\,m\,sec)^{-1} \rightsquigarrow\ I^2 = 1\ A\,C\,sec^{-1} = 1\ A^2$.
  * Damit diese Kraft eintritt, muss also $I = 1\ A$ betragen.

• *Zum Hall-Effekt* (oben erwähnt):

- Stromführender Leiter, Elektronen wandern auf eine Seite, senkrecht zu I entsteht ein elektrisches Feld und damit eine Kraft auf eine Ladung:
  * $F = q \cdot E$.
- Diese Kraft muss die Lorenzkraft kompensieren (Gleichgewicht):
  * $-F = 1 \cdot v \cdot B$.
- *Konsequenz:*
  * $E = -v \cdot B \rightsquigarrow$ Spannung über der Leiterbreite b: $\quad U = -b \cdot v \cdot B$.
  * Somit ist $U = const. \cdot B$. *Damit lässt sich B messen.*
  * Ebenso *kann man v messen sowie auch die Richtung von v.*

3. Die magnetische Induktion (Induktionsgesetz und Folgerungen)

Induktion

• *Experiment:* Wir *bewegen einen Leiter*, an den ein *Voltmeter angeschlossen ist, in einem Magnetfeld.* Oder wir *bewegen den Magneten mit dem Magnetfeld über den Leiter hin und her.*

- $\rightsquigarrow$ Feststellung: *Wenn magnetische Feldlinien senkrecht über Drähte bewegt werden oder wenn die Drähte senkrecht durch die magnetischen Feldlinien bewegt werden, wird in den Drähten eine elektrische Spannung erzeugt* (*induziert*).
  * Erklärung$\rightsquigarrow$ *Modell* $\rightsquigarrow$
- Wenn der Draht als Ganzes samt den Ladungen in senkrechter Richtung zum Draht durch das Magnetfeld bewegt wird, so haben die Ladungen eine Geschwindigkeit $\vec{v}$ durch diese Bewegung. Ist $\vec{v}$ senkrecht zu $\vec{B}$, so wirkt die Lorenzkraft senkrecht zu $\vec{v}$ und zu $\vec{B}$ und damit parallel zum Draht. Durch diese Kraft werden Elektronen längs des Drahtes verschoben: Es fließt also ein Strom. Wenn der Draht zwei isolierte Enden hat, so entsteht an einem Ende ein Elektronenüberschuss und am andern Ende ein Mangel. Damit entsteht eine elektrische Spannung zwischen beiden Drahtenden und damit wegen $U = E \cdot s$ ein elektrisches Feld E. Dabei ist s die Drahtlänge.
  * Diese Spannung heißt *Induktionsspannung.*
  * *Sie entsteht, weil infolge der Lorenzkraft die Elektronen „weggepumpt“ werden.*
- Weiter oben haben wir die resultierende Kraft aus der Überlagerung der Kraft infolge eines elektrischen Feldes und der Lorenzkraft hergeleiten: *Es gilt:*
  * $\vec{F}_{total} = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = q \cdot \vec{E} + q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$.
- Wenn die eine Kraft die andere gerade kompensiert, so ist die Summe gleich null. Dann *gilt:*
  * $q \cdot \vec{E} = -q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$ und gekürzt:
  * $\vec{E} = -(\vec{v} \times \vec{B})$. Skalar geschrieben ist das:
  * $E = -v \cdot B$, wobei hier $\vec{E}$, $\vec{v}$ und $\vec{B}$ senkrecht zueinander sind.
- Damit gilt nach Multiplikation mit der Drahtlänge:
  * $E \cdot s = U = -s \cdot v \cdot B$. Hier erscheint die induzierte Spannung.
- *Formel:*
  * $U_{ind} = -s \cdot v \cdot B = E \cdot s.$ Vektoriell geschrieben ergibt das:
  * $U_{ind} = -\vec{s} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = \vec{s} \cdot \vec{E}.$
- *Anwendungen:* Generatoren, Mikrofone. *Umkehrung:* Elektromotoren usw.

Flussänderung, Induktion und Selbstinduktion

- *Experiment:* Wir *bewegen* nochmals eine (oder ein *Stapel* aufeinander liegenderer) *Drahtschleifen*, an den ein *Voltmeter* angeschlossen ist, in einem *Magnetfeld einer Spule*. Oder wir *bewegen das Magnetfeld der Spule über die Drahtschleifen hinweg.* Möglichkeiten:
  - Die Schleifen ins Magnetfeld hineinführen, sie hinausziehen, drehen oder ihre Größe verändern.

- $\leadsto$ Feststellung: *Wenn magnetische Feldlinien senkrecht über Drahtschleifen bewegt werden oder wenn die Drahtschleifen durch die magnetischen Feldlinien bewegt werden wird in den Drähten infolge der Lorenzkraft eine elektrische Spannung erzeugt* (*induziert*).

• Fortsetzung des Experiments: *Schleifenebene senkrecht zum Magnetfeld* stellen. Dann *Stromstärke in der Spule* und damit die *magnetische Feldstärke ändern*. Oder die magnetische Feldstärke durch Einführen eines *Eisenkerns* (ungehärtet) in die Schleife *ändern*.

  - $\leadsto$ Feststellung: *Es wird wieder eine elektrische Spannung erzeugt* (*induziert*).
  - Gemeinsamkeit bei allen Experimenten: *Immer wurde die momentan noch hypothetische „Feldliniendichte" in der Schleife verändert.*
  - $\leadsto$ *Problem:* Wie soll man diese *Feldliniendichte genau definitorisch quantitativ fassen?* $\leadsto$
  - Historisch hat man hier wieder mit der „*Flussvorstellung*" argumentiert. Das Feld solle gewissermaßen fliessen und damit wie fließende grobe Materie eine Dichte besitzen. Dabei üben *folgende Größen* einen *Einfluss* aus:
    * Die *Flächengröße A in einer Schleife*, die *Magnetfeldstärke B* und die *Richtung* der *Feldlinien* (also Vektorisierung).
  - $\leadsto$ *Definition des magnetischen Flusses* Φ:
    * $\Phi = \vec{A} \circ \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos(\alpha)$ mit $\alpha = Winkel(\vec{A},\, \vec{B})$.
    * Mit dieser Definition sind die oben genannten Parameter eingebunden. Der *Fluss* ist ein *Skalarprodukt*, also ein Skalar.
    * *Einheit:* $1\ T\, m^2 = 1\ V\, sec = 1\ J\, sec\, C^{-1} = 1\ kg\, m\, (C\, sec)^{-1}$.
    * Damit wird $B = \dfrac{\Phi}{A \cdot \cos(\alpha)} = \dfrac{\Phi}{A_{proj}}$. Dabei ist A_{proj} die Größe der Projektion des Normalenvektors zu A auf den Feldstärkenvektor $\vec{B}$. *Feldstärke ist also Fluss pro Projektionsfläche. Daher ist die Feldstärke auch die magnetische Flussdichte.*
    * *Durch irgendwelche gekrümmten Flächen mit demselben Rand ist der Fluss immer gleich.*
  - *Flussänderungen* haben nun *induzierte Spannungen zur Folge*. Je größer und auch je schneller die Flussänderung erfolgt, desto größer ist die Spannung. Entscheidend ist daher die Flussänderung $\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$.
    * Das ist die Aussage des *Induktionsgesetzes von Faraday:*
  - *Induktionsgesetz bei Flussänderung:*
    * $U_{ind} = -\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t} \;\Rightarrow\; U_{ind} = -\dfrac{d\,\Phi}{dt}$ (Differentialquotient).
  - Kontrolle an der *rechteckigen Schleife* (Länge s), welche sich mit der Geschwindigkeit v in ein homogenes Magnetfeld B bewegt:

  * Erst eine Seite der Schleife eingeführt $\rightsquigarrow$ $U_{ind} = -s \cdot v \cdot B$.
  * Der Fluss steigt, da beim Einführen immer „mehr Feldlinien“ durch die Schleife treten.
  * Verschiebung in Δt um die Strecke $\Delta h = v \cdot \Delta t \rightsquigarrow$ Änderung des Flächeninhalts um $\Delta A = s \cdot \Delta h = s \cdot v \cdot \Delta t \rightsquigarrow \Delta\Phi = s \cdot v \cdot B \cdot \Delta t$.
  * $\rightsquigarrow U_{ind} = -s \cdot v \cdot B = -s \cdot v \cdot B \cdot \frac{\Delta t}{\Delta t} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$.
  * Spule mit N Windungen $\rightsquigarrow$ N mal der Fluss durch eine Windung!
  * $U_{ind} = -\frac{d\,\Phi}{dt} = -\frac{d\,(\vec{A} \circ \vec{B})}{dt}$.
  * $U_{ind} = -((\frac{d\,\vec{A}}{dt}) \circ \vec{B} + \vec{A} \circ (\frac{d\,\vec{B}}{dt}))$.

- *Spannungsstoss:* Umgekehrt

  - $U_{ind}(t) \cdot \Delta t = \Delta\Phi \rightsquigarrow$ Integral, analog zum *Kraftstoß!* $\rightsquigarrow$ $\Phi = \int_{\dots}^{\dots} U_{ind}(t)\,dt$
  - Wird in der Zeit Δt ein *Spulenfeld ausgeschaltet* (B sinkt auf 0, $\Delta B = B$), so ergibt sich ein *Spannungsstoss* von $U_{ind}(t) \cdot \Delta t = \Delta\Phi = \vec{A} \circ \vec{B}$ (Skalarprodukt).

- *Die nach dem Induktionsgesetz induzierten Spannungen existieren unabhängig davon, ob die Elektronen sich in einem Leiter befinden oder nicht.* Falls *nicht* ein allzu *großer Widerstand* vorhanden ist, *fließt ein Strom.*

- Für die *Richtung der induzierter Ströme* gilt die *Lenz'sche Regel:*

  - Die *Richtung von Induktionsströmen* ist *derart*, dass sie ihrer *Ursache entgegenwirkt.*
  - *Beispiele:* Transformator, Induktionsofen, Wirbelstrombremse, Generator, Thomson'scher Ringversuch $\rightsquigarrow$ In der Literatur nachlesen.

- *Selbstinduktion:*

  - Nach dem *Induktionsgesetz* wird eine *Spannung induziert*, wenn sich der *Fluss ändert.* Das kann durch Änderung der Fläche A geschehen oder durch Änderung des Feldes B. Das *Feld B kann sich* aber *ändern*, wenn z.B. *das außen angelegte Magnetfeld* (z.B. das einer Spule) *sich ändert*, oder *wenn sich das durch den Strom im Leiterkreis erzeugte Magnetfeld ändert.*
    * Wenn ein Strom induziert wird, weil sich das durch den Strom im Leiterkreis erzeugte Magnetfeld ändert, so redet man von *Selbstinduktion.*
    * *Selbstinduktion* ist also die *Induktionswirkung, welcher seine Ursache im eigenen Strom im eigenen Leiterkreis hat, in dem schon ein Strom induziert worden ist.*

- In einem Stromkreis ist das erzeugte Magnetfeld B_{eigen} bekanntlich proportional zum Strom I. Dadurch entsteht ein zusätzlicher Fluss Φ_{eigen} infolge des eigenen Magnetfeldes B_{eigen}, welcher proportional zum Strom I im Stromkreis ist. Damit gibt es eine *Proportionalitätskonstante* L, für welche gilt:
  * $\leadsto$ *Formel:* $\Phi_{eigen} = L \cdot I$.
  * L heißt *Selbstinduktionskoeffizient* oder *Induktivität* der Spule.
  * *Einflussfaktoren* auf L sind der *Kern der Spule*, in welcher I fließt und die *geometrische Situation*.
- *Beispiel:* Lange Spule, N Windungen, Länge h, Querschnitt $A \leadsto$
  * $\Phi_{Spule} = N \cdot B \cdot A = N \cdot (\mu_0 \cdot N \cdot \frac{I}{h}) \cdot A = L \cdot I$.
  * $\leadsto$ $L = N^2 \cdot A \cdot \frac{\mu_0}{h}$.
  * *Einheit* von L : *Henry* $\leadsto$ $1\ H = 1\ T\, m^2\, A^{-1} = 1\ V\ secA^{-1}$.
  * Ein *Kern* in einer Spule *vergrößert* die *Induktivität* enorm.
- Bei einer Flussänderung wird eine Spannung induziert, welche ihrer Ursache entgegenwirkt (*Lenz*). Sei die Ursache ein Anwachsen des Stromes. Um die Entgegenwirkung zu vermindern, muss man eine Gegenspannung U_L anlegen:
  * $\leadsto$ *Formel:* $U_L = -U_{ind} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = L \cdot \frac{d\,I}{dt}$.
  * Wie man an der Formel abliest, hat U_L *eine Veränderung des Stromes I mit der Zeit t zur Folge* (anwachsen oder abklingen).
- In der *Realität* ist immer noch ein durch den *realen* Spulendraht gegebener *ohmscher Widerstand vorhanden.* Ist der Spulendraht *dünn*, so kann dieser *Widerstand sehr groß werden.* Dann hat man eine Serienschaltung mit einer Spannungsteilung über einem ohmschen Widerstand (Spannung U_R) und dem induktiven Anteil U_L:
  * *Formel:* $U_{tot} = U_R + U_L = R \cdot I = L \cdot \frac{d\,I}{dt}$.

Energiedichte im Magnetfeld

- Schon beim elektrischen Feld haben wir gesehen, dass *ein Feld Energie speichern kann.*
- *Gedankenexperiment:* Wir legen eine konstante Spannung an eine Spule. Dann *gilt:*
  - $U_L = L \cdot \frac{d\,I}{dt} \;\Rightarrow\; \frac{U_L}{L} = const. = \frac{d\,I}{dt}$ resp. $= \frac{\Delta I}{\Delta t}$.
    * $I = I(t)$ nimmt daher mit der Zeit konstant zu. Die eben erwähnte Konstante ist die Steigung der Funktion $I(t)$. Weil diese Steigung konstant ist, ist der Graph der Funktion $I(t)$ eine Gerade. $\leadsto$
    * $I(t) = const. \cdot t = \frac{U_L}{L} \cdot t$.

    * Der Strom $I(t)$ ist Ladung pro Zeit $\rightsquigarrow$ $I(t) = \frac{U_L}{L} \cdot t = \frac{d\,Q(t)}{dt}$.
    * Die Ableitung von $Q(t)$ ist eine lineare Funktion. Dann muss $Q(t)$ eine quadratische Funktion sein, denn nur diese haben lineare Ableitungen. $\rightsquigarrow$ $Q(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{U_L}{L} \cdot t^2$.
    * Nun gilt für die zugeführte Energie: $W = Q(t) \cdot U(t)$, denn die Spannung ist früher definiert worden als Arbeit W pro Ladung Q.
    * $\rightsquigarrow$ $W = Q(t) \cdot U(t) = (\frac{1}{2} \cdot \frac{U_L}{L} \cdot t^2) \cdot (L \cdot \frac{d\,I}{dt})$ wobei gilt:
    $$\frac{d\,I(t)}{dt} = \frac{d(\frac{U_L}{L} \cdot t)}{dt} = \frac{U_L}{L}.$$
    * $\rightsquigarrow$ $W = (\frac{1}{2} \cdot \frac{U_L}{L} \cdot t^2) \cdot (L \cdot \frac{U_L}{L}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{U_L}{L} \cdot t^2 \cdot U_L$.
    * $\rightsquigarrow$ $W = \frac{1}{2} \cdot (\frac{U_L^2}{L}) \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot L \cdot (\frac{U_L}{L})^2 \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot L \cdot (I(t))^2$.
    * $\rightsquigarrow$ *Formel:* $W = W_m = \frac{1}{2} \cdot L \cdot (I(t))^2$ oder kurz: $W_m = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2$.
    * Hier sieht man, dass die *geflossene Energie nur vom Endstrom abhängt. Sinkt dieser aus irgendeinem Grunde, so gibt die Spule wieder Energie ab.* Die *Spule* hat also die *Energie gespeichert.* Mit dem Anwachsen des Stromes ist ein Magnetfeld aufgebaut worden. *Die Spule hat ihre Energie im Magnetfeld gespeichert.*
    * *Energiedichte:* $W_m = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2$ ist analog zu $W_e = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2$ beim elektrischen Feld.

- *Zur Energiedichte im magnetischen Feld:*
  - Gegeben sei eine *Spule ohne Kern* (d.h. mit $\mu_r = 1$). Dann *gilt:*
    * $\rightsquigarrow$ $W_m = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 = \frac{1}{2} \cdot L \cdot (N^2 \cdot A \cdot \frac{\mu_0}{h}) \cdot I^2$.
    * $\rightsquigarrow$ $W_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mu_0} \cdot (\mu_0^2 \cdot N^2 \cdot \frac{I^2}{h^2}) \cdot h \cdot A = \frac{1}{(2\,\mu_0)} \cdot (B^2) \cdot V$.
    * Dabei ist V das Volumen im Innern der Spule. Wenn man dieses wegdividiert, so erhält man die *Energiedichte.* $\rightsquigarrow$ $w_m = \frac{B^2}{2\,\mu_0}$.
  - Vergleich der Energiedichten:
    * *Elektrisches Feld:* $w_e = E^2 \cdot \frac{\varepsilon_0}{2}$.
    * *Magnetfeld der Spule ohne Kern:* $w_m = \frac{B^2}{2 \cdot \mu_0}$.

2.18 Elektrotechnik

2.18.1 Grundlagen, Geräte, Halbleiter

1. Grundlagen: Generatoren, Motoren, Geräte, Wechselstrom

Zur Vorgeschichte der heutigen Elektro-Situation:

- *Batterie* von *Volta* ca. 1800.
- Grundlegende Entdeckungen: 1820 – 1835.
- Theorie von *Maxwell:* Um 1850.
- *Anwendungen:* 1. Elektrizitätswerk 1882.
- Danach: Kampf zwischen den *Anhängern* des *Gleichstroms* und des *Wechselstroms.*
- Und dann: 1886 rief angeblich das Parlament des Staates New York eine Kommission ins Leben, die eine ,,*menschliche und bequeme*“ *Art der Hinrichtung* finden sollte. Thomas Edison wurde mit der Untersuchung einer Hinrichtungsmethode per Elektrizität beauftragt. Der *elektrische Stuhl* wurde dann von Edisons Mitarbeiter Harold Brown entwickelt. Edison gilt jedoch infolge seines Einsatzes für die Sache als Erfinder des elektrischen Stuhls. Hier gab es darauf *Streit zwischen der Wechselstrom- und der Gleichstrompartei.* Die elektrische Hinrichtung wurde so am 1. Januar 1889 eingeführt. Im Staat New York setzte man ein *Gesetz* in Kraft, das die Hinrichtung von zum Tode verurteilten Verbrechern durch Benutzung des elektrischen Stuhls vorsah. Diese gegenüber dem Erhängen als ,,menschlicher“ empfundene Todesart kam am *6. August 1890* im Auburn-Staatsgefängnis im Bundesstaat New York *erstmals zum Einsatz.* Der erste auf einem elektrischen Stuhl hingerichtete Mensch war William (oder Willhelm) Kemmler.
- Am meisten elektrische Energie braucht man heute in Privathaushalten vermutlich immer noch zum Kochen.
- Wie weiter, angesichts der Energieprobleme der Menschheit? — Die Zeit drängt!
- Jemand hat geschrieben, er habe die Lösung gefunden! Die Energie komme ja aus der Steckdose. Wieso sich also Sorgen machen?

Generatoren und Motoren

- *Der Wechselstromgenerator:* Mittels *mechanischer Energie* werden eine oder mehrere *Drahtschleifen* in einem *Magnetfeld um ihre eigene Achse bewegt.* Dadurch ändert sich $\Phi(t) = B \cdot A \cdot \cos(\alpha(t))$. Infolge der *induzierten Spannung* $U_{ind} = -\frac{d\,\Phi}{dt}$ entsteht ein *Strom.* Damit kann ein Strom abgegriffen werden. Für die Spannung errechnet man bei $B = const.$ und $\alpha(t) = \omega \cdot t$, d.h. bei gleich bleibender Drehgeschwindigkeit:

- $U_{ind}(t) = -B \cdot A \cdot \frac{d\, \cos(\omega \cdot t)}{dt} = B \cdot A \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) = u_S \cdot \sin(\omega \cdot t)$.
- u_S ist die *Maximalspannung* oder *Scheitelspannung*.
- *Konvention:* Beim *Wechselstrom* schreiben wir die *Symbole für die Spannung und den Strom klein*: $u(t)$, $i(t)$ — jetzt abhängig von t.
- Bei n Schleifen hat man eine n mal *größere Spannung*.
- Am *Generator* kann man die Wechselspannung *an zwei Ringen abgreifen* (*Schreifringe*), wobei jeder mit einem der Enden der Drahtschleifen verbunden ist.
- Der *Magnet* kann auch ein *Elektromagnet* sein.
- Auf jedem achsenparallelen Stück der Schleife der Länge s wirkt die *Lotenzkraft:*
  * $F(t) = I(t) \cdot s \cdot B$ resp. $F(t) = i(t) \cdot s \cdot B$..
- Diese Kraft sucht nach Lenz die *Bewegung* zu *hemmen*. Daher braucht es zur Bewegung *mechanische Arbeit*.
- Die erhaltene Spannung kann man als *Spannungsquelle eines Stromnetzes nutzen*.

• *Wechselstrommotor* (*Synchronmotor*): Hier *kehrt man* das *Prinzip des Generators um*. In einem gleich gebauten Gerät kann man den erhaltenen *Wechselstrom in die Schleife(n) einspeisen*. Der Strom führt zu einer *Lorenzkraft*, welche die Drahtscheife(n) in *Bewegung* versetzt. Damit kann man ein *mechanisches Gerät antreiben*. Das macht die *Elektrizität bedeutend:*

  - Es ist also möglich, in einem Generator mechanische Energie in elektrische Spannung zu verwandeln und damit in Netzen einen elektrischen Strom zu übertragen, welcher fern, anderswo, in einem Motor wieder in mechanische Energie verwandelt wird. *Damit wird Energie über weite Strecken einfach übertragbar. Das System besitzt einen relativ hohen Wirkungsgrad.*
  - *Der Motor läuft hier synchron im Takt des Wechselstroms des Generators.* Will man *andere Drehzahlen*, so muss man mittels eines Getriebes die gegebene Drehzahl *übersetzen*.
  - Der *Synchronmotor* hat allerdings einen *Nachteil:* Er *läuft nicht von sich aus dem Stillstand an*, sondern stottert nur. Denn im Generator und dann auch im Motor existiert ein maximales Drehmoment, welches periodisch null wird und darauf das entgegen gesetzte Maximum erreicht und so fort. Das im Motor hervorgerufene Drehmoment ändert daher ständig die Richtung. Es kommt nur zur Wirkung, wenn der Motor schon dieselbe Drehzahl hat wie der Generator, also synchron läuft. *Daher müssen solche Motoren angeworfen werden.* Andererseits haben sie eine *hohe Konstanz der Drehzahl*. Bei *hoher Belastung* kann er außer Takt geraten und darauf stotternd *stehen bleiben*.

- *Der Gleichstromgenerator und Gleichstrommotor:* Ersetzt man die beiden *Schleifringe* am Generator durch *voneinander isolierte Halbzylinder*, so kann man eine *pulsierende Gleichspannung* abgreifen. Der *Kollektor* (Sammler) *vertauscht* immer dann die *Anschlüsse ans Netz*, wenn die Spannung das *Vorzeichen wechselt*. Das Spannungs-Zeit-Diagramm zeigt dann statt einer Sinuslinie eine *Kurve des absoluten Betrages des Sinus*. Die negativen Teile sind z.B. nach oben gespiegelt worden.
  - Man kann die *pulsierende Spannung* anschließend durch *geeignete Schaltungen* mit Kondensatoren usw. *glätten*.
  - Man kann auch die Leiterschleifen durch *mehrere gegeneinander verdrehte Schleifen* und *geteilte Kollektoren* ersetzen, um die *Spannung* oder den *Strom* zu *glätten*.
  - Den *Gleichstromgenerator* kann man *umgekehrt auch als Motor verwenden*. Dieser *springt* jetzt *selbständig an*. Er stottert nicht.
- Das *dynamo-elektrische Prinzip* (*Siemens*): Das *Problem* von Motoren und Generatoren mit Permanentmagnetfeldern ist das *schwache Magnetfeld*.
  - Man kann dieses *Problem* damit *beheben*, dass man den *Magneten durch einen Elektromagneten mit Eisenkern ersetzt*, der *ebenfalls vom erzeugten Strom gespiesen* wird. Infolge des Eisenkerns bleibt ein genügend starkes Magnetfeld, um den Generator anzuwerfen.
  - Solche Motoren nennt man *Hauptschlussmotoren*. Erst durchfließt der erzeugte Strom die Spule des Elektromagneten (Wicklung) und verstärkt so dessen Magnetfeld. Dann wird er über den Kollektor dem Rotor (Drahtschleifen, Wicklung) zugeführt.
  - Solche Motoren *kann man als Gleichstrommotoren verwenden* (mit dem notwendigen Kollektor, siehe oben). Das Magnetfeld behält ja seine Richtung. Man kann den Motor aber *auch als Wechselstrommotor* verwenden. Denn wenn der Strom die Richtung wechselt, wechselt auch das Magnetfeld die Richtung, und die Richtung der Lorenzkraft bleibt infolge der Regel mit der Rechtsschraube gleich.
  - Solche Motoren sind daher *Universalmotoren*.
  - Will man den Motor *rückwärts laufen* lassen, so muss man die *Anschlüsse vertauschen* (Schaltung!).
  - Durch *Spannungsregelung* kann man das *Drehmoment verändern*.

Zum Wechselstrom

- *Der Effekt von Spulen:* Wir schalten eine Lampe mit einer anderen Lampe gleichen Typs parallel in einem Gleichstromkreis. Vor eine der Lampen schalten wir noch eine Spule. *Beobachtung:* Die Lampe ohne Spule leuchtet nach dem Einschalten des ganzen Stromkreises sofort auf. Die andere leuchtet verzögert auf, da die in der Spule induzierte Spannung der angelegten Spannung entgegenwirkt. Die zweite Lampe leuchtet erst dann voll, wenn das Magnetfeld der Spule aufgebaut ist und der Strom dann nicht mehr ändert.

- *In einem Wechselstromkreis dagegen muss das Magnetfeld in der Spule periodisch aufgebaut und umgebaut werden. Der Strom ändert damit immer.* Die induzierte Spannung $U_L = L \cdot \frac{dI}{dt}$ ist immer vorhanden. Daher *wirkt eine Spule in einem Wechselstromkreis als Widerstand.*
- *Ähnliche Beobachtungen* macht man, wenn man einen *Kondensator* in einen *Wechselstromkreis* schaltet.
- In einem Wechselstromkreis kennen wir somit bis jetzt *drei Widerstandsarten:*
  - Der *ohmsche Widerstand.*
  - Der *induktive Widerstand* infolge einer Spule.
  - Der *kapazitive Widerstand* infolge eines Kondensators.
- *Zum ohmschen Widerstand.* Hier hat man u.a. folgende *Zusammenhänge:*
  - $u(t) = u_S \cdot \sin(\omega \cdot t)$. Man kann diese Spannung auch an einem Kreis mit Zentrum im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems und dem Radius u_S auf der y-Achse ablesen. $\varphi = \omega \cdot t$ ist dabei der *Winkel des Zeigers* (des *Pfeils*, im Polarkoordinatensystem) zum zugehörigen Punkt auf dem Kreis.
  - Es gilt wegen $U = R \cdot I$ unabhängig vom Zeitpunkt, also wegen $u(t) = R \cdot i(t)$ (der Index S bedeutet *Scheitel* $\rightsquigarrow$ *Scheitelwerte*):
    - $i(t) = \frac{u(t)}{R} = (\frac{u_S}{R}) \cdot \sin(\omega \cdot t) = i_S \cdot \sin(\omega \cdot t), \qquad i_S = \frac{u_S}{R}.$
  - *Für die Leistung gilt:*
    - $P(t) = u(t) \cdot i(t) = i_S \cdot u_S \cdot \sin^2(\omega \cdot t).$
    - $\Rightarrow \; P(t) = \frac{u_S^2}{R} \cdot \sin^2(\omega \cdot t) = i_S^2 \cdot R \cdot \sin^2(\omega \cdot t).$
  - Berechnet man die *mittlere Leistung über eine Periode*, so erhält man die *Formeln:*
    - $P_{mittel} = \frac{u_S^2}{R} \cdot \frac{1}{2} = i_S^2 \cdot R \cdot \frac{1}{2}.$
    - $\rightsquigarrow \; \frac{u_S^2}{R} = i_S^2 \cdot R \; \Rightarrow \; u_S = i_S \cdot R.$
    - Um die Formel mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ einzusehen, benötigt man die *Integralrechnung.*
  - Wir setzen:
    - $P_{mittel} = \frac{u_S^2}{R} \cdot \frac{1}{2} = \frac{U_{mittel}^2}{R} \; \Rightarrow \; U_{mittel} = \frac{u_S}{\sqrt{2}}.$ Ebenso:

  * $P_{mittel} = i_S^2 \cdot R \cdot \frac{1}{2} = I_{mittel}^2 \cdot R \;\Rightarrow\; I_{mittel} = \frac{i_S}{\sqrt{2}}$.
  * $P_{mittel} = \frac{U_{mittel}^2}{R} = I_{mittel}^2 \cdot R \;\Rightarrow\; U_{mittel} = I_{mittel} \cdot R$.
  * $\leadsto$ *Formel:* $P_{mittel} = U_{mittel} \cdot I_{mittel}$.
- Diese Mittelwerte über eine Periode heißen auch *Effektivwerte*. Damit gilt:
  * $P_{eff} = \frac{U_{eff}^2}{R} \;\Rightarrow\; U_{eff} = \frac{u_S}{\sqrt{2}}$. Ebenso:
  * $P_{eff} = I_{eff}^2 \cdot R \;\Rightarrow\; I_{eff} = \frac{i_S}{\sqrt{2}}$.
  * $U_{eff} = I_{eff} \cdot R$.
  * $P_{eff} = U_{eff} \cdot I_{eff}$.

• *Wichtig im Handel:* In den Verkaufsangaben im Zusammenhang mit Wechselstrom werden sinnvollerweise die zu *bezahlenden Mittelwerte*, also die *Effektivwerte* und nicht die Scheitelwerte angegeben.

- Wichtig: $u_{eff} = 230\ V \;\Rightarrow\; u_S \approx 325\ V$.
- Die *Effektivwerte des Wechselstroms* bringen die *gleiche Leistung wie* beim *Gleichstrom.*

• *Die Spule im Wechselstromkreis.* Hier haben wir es mit einem in *induktiven Widerstand* zu tun und mit dem *Wechselstrom* $i(t)$. Den *Widerstand* nennen wir *Impedanz*, mit Symbol: Z. Wir wissen:

- $U_L = -U_{ind} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = L \cdot \frac{d\,i(t)}{dt}$. Zudem ist $u(t) = u_S \cdot \sin(\omega \cdot t)$.
- Es muss gelten (Lenz) $\leadsto$ $u(t) + U_L(t) = 0 \;\Rightarrow\; L \cdot \frac{d\,i(t)}{dt} = -u_S \cdot \sin(\omega \cdot t)$.
- $\leadsto$ $\frac{d\,i(t)}{dt} = -(\frac{u_S}{L}) \cdot \sin(\omega \cdot t) \;\Rightarrow\; i(t) = (\frac{u_S}{L \cdot \omega}) \cdot \cos(\omega \cdot t)$.
- Dabei schreiben wir:
- Hier ist $i_S = (\frac{u_S}{L \cdot \omega})$ und $\cos(\omega \cdot t) = \sin(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2})$.
- Wir nennen jetzt $Z_L = L \cdot \omega$ die *Impedanz* (lat. impedire: hemmen). Dann finden wir nach analoger Betrachtung wie beim ohmschen Widerstand die *Formeln:*
  * $Z_L = \frac{u_S}{i_S} = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = L \cdot \omega \;\Rightarrow\; u_S = i_S \cdot L \cdot \omega = i_S \cdot Z_L \;\Rightarrow\; u_S = i_S \cdot Z_L$.
  * Damit ist der Ausdruck „Impedanz“ gerechtfertigt.
  * Der *Spulenwiderstand* im *Wechselstromkreis* ist somit *frequenzabhängig.* Ebenso können wir festhalten:
  * *Der Strom in einer Spule in einem Wechselstromkreis folgt der Spannung um eine Viertelperiode hinten nach.*

- *Der Kondensator im Wechselstromkreis.* Hier haben wir es mit einem in *kapazitiven Widerstand* zu tun und ebenfalls mit dem *Wechselstrom* $i(t)$. Wir wissen:
  - Wenn ein Kondensator in einen Gleichstromkreis geschaltet wird, so lädt sich dieser auf. Während der Ladezeit fließt ein Strom. Nach dem Aufladen fließt kein wesentlicher Strom mehr.
  - In einem Wechselstromkreis wechselt aber der Ladestrom infolge der wechselnden Spannung immer die Richtung. Was passiert?
  - Die Spannung, welche infolge der Ladung zwischen den Platten des Kondensator liegt, beträgt $U = \frac{Q}{C}$. *Diese muss gleich der äußeren Spannung sein.* Denn wir könnten die Kondensatorplatten ja als Spannungsquelle benutzen. Und zwischen einer Kondensatorplatte und einem Punkt im angeschlossenen Leiter kann kein wesentlicher Spannungsabfall sein. Zudem ist Spannung gleich Arbeit, also Energie pro Ladung. Energie ist dem Energiesatz unterworfen. Somit gilt:
    - $U_{Kond}(t) = \frac{Q(t)}{C} = u(t) = u_S \cdot \sin(\omega \cdot t) \;\Rightarrow\; Q(t) = u_S \cdot C \cdot \sin(\omega \cdot t)$.
    - $\leadsto$ *Formel:* $i(t) = \frac{d\,Q(t)}{dt} = u_S \cdot C \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) := i_S \cdot \cos(\omega \cdot t)$.
    - Dabei ist $i_S = u_S \cdot C \cdot \omega$ und $\cos(\omega \cdot t) = \sin(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2})$.
  - Ergebnis nach analoger Betrachtung zu oben:
    - Der *kapazitive Widerstand* des *Kondensators* im *Wechselstromkreis* (*Impedanz*) ist gleich $Z_C = \frac{u_S}{i_S} = \frac{1}{(C \cdot \omega)} = \frac{u_{eff}}{i_{eff}} \;\Rightarrow\; u_S = \frac{i_S}{(C \cdot \omega)}$.
    - *Der Strom eilt der angelegten Spannung um eine Viertelperiode voraus.*
  - *Generelles Ergebnis:* Wenn man *ohmsche, induktive und kapazitive Widerstände kombiniert*, so ergibt sich eine *Mischung von Strom* der gegenüber vorauseilt, hinterherhinkt oder synchron schwingt. *Allgemein schreiben wir:*
    - $i_{Schaltung}(t) = \sin(\omega \cdot t - \varphi)$.
    - φ nennt man den *Verschiebungswinkel.* Im Falle von Stromabgriff zwischen den Phasenleitern bei *Drehstrom* redet man hier von der *Phasenverschiebung.* Allgemein gilt:
    - Im Falle von *Drehstrom* wird vom Elektrizitätswerk *dreiphasiger Wechselstrom geliefert.* Dazu sind *drei Leiter* (auch *Phasen* genannt) und ein *Nullleiter* notwendig. In jedem der drei Leiter schwingt um $\frac{2\,\pi}{3}$ verschoben eine Wechselspannung. Sie sind daher *phasenverschoben. Allgemein* sind zwei *Sinusschwingungen gegeneinander phasenverschoben*, wenn deren *Periodenlängen zwar übereinstimmen*, die *Zeitpunkte ihrer Nulldurchgänge aber nicht.* Phasenverschiebung lässt sich mit *Zeigerdiagrammen veranschaulichen.* Phasenverschobene Spannungen und Ströme können sich *überlagern.* Dann gibt es *zu rechnen.*

    * Hier kann man also den Phasenverschiebungswinkel mit Hilfe von Überlagerungen in Zeigerdiagrammen *berechnen*.

- *Über die Leistung:*
  - Es gilt allgemein: $P(t) = u(t) \cdot i(t) = u_S \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot i_S \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi)$.
  - $\leadsto$ $P(t) = u_S \cdot i_S \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi)$.
  - Durch *trigonometrische Umformungen* (Additionstheoreme und goniometrische Formeln) findet man:
    * $\frac{1}{2} \cdot (\cos(\varphi) - \cos(2 \cdot \omega \cdot t - \varphi)) = \sin(\omega \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi)$.
    * Dabei ist der *Mittelwert* von $\cos(2 \cdot \omega \cdot t - \varphi)$ über eine volle Peiode gleich *null*, denn die positiven und negativen Punkte werde alle gleich oft erreicht und heben sich dadurch weg (Skizze machen!).
    * Somit ist der Mittelwert von $\sin(\omega \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi)$ gleich dem Mittelwert von $\frac{1}{2} \cdot \cos(\varphi)$. Und diese Zahl ist bekannt, wenn φ bekannt ist.
    * Damit gilt: $P_{mittel} = P_{eff} = u_S \cdot \dfrac{i_S}{2 \cdot \cos(\varphi)} = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos(\varphi)$.
  - *Ergebnis (Wechselstromsystem):* $P_{eff} = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos(\varphi) =$ *Wirkleistung*.
  - Die *Phasenverschiebung* φ heißt auch *Leistungsfaktor* oder *Wirkfaktor*.
    * Achtung: Wenn $\cos(\varphi)$ nicht nahe bei 1 liegt (z.B. $\varphi \not\approx 0$), so treten im Netz *Blindströme* auf, die das Netz belasten, jedoch keine Leistung übertragen. Diese sollten durch angepasste Schaltelemente kompensiert werden.
  - *Beispiele:*
    * Bei reinem ohmschen Widerstand ist $\varphi = 0 \;\Rightarrow\; P_{eff} = u_S \cdot \dfrac{i_S}{2}$.
    * Bei reinem induktivem Widerstand ist $\varphi = \dfrac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; P_{eff} = 0$.
    * Bei reinem kapazitivem Widerstand ist $\varphi = -\dfrac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; P_{eff} = 0$.

Der Transformator

- Wir nehmen einen *Ring aus Weicheisen*, genügend dick, und *wickeln auf der einen Seite isolierten Draht um das Ringmaterial*, sodass dort eine *Spule mit Weicheisenkern* entsteht. Wir nennen sie *Primärspule*. Auf der *anderen Seite* machen wir *dasselbe*. Die zweite Spule nennen wir *Sekundärspule*. Dann *schließen wir die eine Spule* über einen Schalter *an Wechselstrom* an. Die *andere Spule* schließen wir an eine *Glühbirne* an. Wenn wir mit den Spulenwindungen Glück haben und die Glühbirne zufällig richtig dimensioniert ist, so *leuchtet diese Lampe auf*, obwohl *zwischen den Drähten der beiden Spulen kein Kontakt* herrscht. Was ist passiert? — Wir haben einen *Transformator* gebaut! (Achtung, bitte so einfach nicht nachbauen, bis wir die Sache auch richtig berechnen können!)
- $\leadsto$ Wie soll man sich diesen *Effekt erklären?*

- *Situation:* Die Primärspule hat N_1 Windungen, die Sekundärspule hat N_2 Windungen. Der Inhalt der von einer Drahtschleife umschlossenen Fläche ist überall gleich. Der an die Primärspule angeschlossene Wechselstrom erzeugt im Innern der Spule, also im Weicheisenring, ein sich zeitlich *veränderndes Magnetfeld* mit dem Fluss $\Phi(t) = \vec{A} \circ \vec{B}(t)$. Dabei ist $\vec{A}$ konstant und $\vec{B}_1(t) \approx \mu_r \cdot \mu_0 \cdot \frac{I}{(\frac{L}{N})}$, dies wenn wir davon ausgehen, dass das Feld einer langen Spule eine gute Näherung ist. Dieses Magnetfeld besitzt *geschlossene Feldlinien im Weicheisenring*, welcher auch *durch die Sekundärspule* läuft und infolge des Wechsels der Feldrichtung $\vec{B}_2(t)$ dort eine *Spannung induziert.* Diese Spannung hat einen Strom zur Folge, welche die Glühbirne zum Leuchten bringt.
- Für die *Berechnung* nehmen wir in unserer Situation an, dass in beiden Spulen der magnetische Fluss durch eine Windung derselbe ist. Damit stimmen beidseitig die Flussänderungen pro Zeit und pro Windung $\frac{d\,\Phi}{dt}$ überein. *Dann gilt:*
  * $U_{ind,\,2} = u_2(t) = -N_2 \cdot \frac{d\,\Phi}{dt}$. An der Primärspule hingegen gilt:
  * $U_{L,\,2} = u_1(t) = N_1 \cdot \frac{d\,\Phi}{dt}$.
  * $\leadsto \quad \frac{d\,\Phi}{dt} = -\frac{u_2(t)}{N_2} = \frac{u_1(t)}{N_1}$.
  * $\leadsto$ *Formel:* $-\frac{u_2(t)}{u_1(t)} = \frac{N_2}{N_1}$.
  * *Die Spannungen an den Spulen verhalten sich* (bis auf das Vorzeichen) *wie die Anzahlen der Windungen.*
- *Zur Leistung in den Spulen:* Wegen dem Energiesatz muss die in der Primärspule aufgenommene Leistung gleich der in der Sekundärspule abgegebenen Leistung sein. Da sich das Magnetfeld im Ring unheimlich schnell ausbreitet, muss die Spannung auf der anderen Seite bis auf das Vorzeichen synchron laufen. Daher müssen beidseitig ca. dieselben Phasenverschiebungswinkel vorhanden sein. *Somit erhalten wir:*
  * $P_{eff,\,1}(t) = \frac{1}{2} \cdot i_{S,\,1} \cdot \cos(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot u_{S,\,2} \cdot i_{S,\,2} \cdot cos(\varphi) = P_{eff,\,2}(t)$.
- Normalerweise treten auch *in Transformatoren leichte Energieverluste* auf. Obige *Gleichung stimmt dann nicht ganz.* Verantwortlich dafür sind hauptsächlich *Wirbelströme* im Weicheisen. Um das zu verhindern baut man heute die *Weicheisenringe aus Schichten von Blechen.* Man erreicht so *Wirkungsgrade* über 99 %. Für $\cos(\varphi_1) = \cos(\varphi_2)$ gilt damit die *Formel:*
  * *Formel:* $\frac{i_{S,1}}{i_{S,2}} = \frac{u_{S,2}}{u_{S,1}}$.

  Das heißt, dass sich die Spannungen umgekehrt verhalten wie die Ströme.

Hochspannungsleitungen und Verluste

- Wir studieren die *Situation einer Hochspannungsleitung mit Widerstand R vom Produzent zum Konsument*. Wegen R werden die *Leitungen aufgeheizt*. Für die *Verlustleistung* gilt dann:
  - $P_V = U \cdot I = I \cdot R \cdot I = I^2 \cdot R$.
    Die vom Produzenten *eingegebene Leistung* ist dagegen $P_P = U \cdot I$.
    * $\leadsto\ \dfrac{P_V}{P_P} = I^2 \cdot \dfrac{R}{(U \cdot I)} = I \cdot \dfrac{R}{U}$.
    * $\leadsto\ \dfrac{P_V}{P_P} = U \cdot I \cdot \dfrac{R}{U^2} = P_P \cdot \dfrac{R}{U^2}$.
    * Dabei ist $R = \rho \cdot \dfrac{h}{A}$, $A =$ Querschnittsinhalt, $h =$ Länge, $\rho =$ spezifischer Widerstand.
    * Bei Kupfer ist $\rho \approx 3 \cdot 10^{-8}\ \Omega$. Sei $A = 3\ cm$, $h = 400\ km$.
    * *Daraus berechnet man:* $R = 40\ \Omega$.
    * Bei einer Einspeisleistung von $P_P = 100$ Megawatt, einer Spannung von 110 kV und einer Leitungslänge von 400 km erhält man somit: $\dfrac{P_V}{P_P} = 0.33$. Das heißt, dass man *rund* $\frac{1}{3}$ *Verluste* hinnehmen muss, weil man die *Leitungen aufheizt*.
    * Da in der Formel $\dfrac{P_V}{P_P} = P_P \cdot \dfrac{R}{U^2}$ die *Spannung im Nenner quadratisch eingeht*, werden *mit höheren Spannungen die Verluste kleiner*. Bei $U = 380\ kV$ erhält man: $\dfrac{P_V}{P_P} \approx 0.0277$, also nicht ganz 3 % Verlust. Der Unterschied zum vorhergehenden Resultat ist wesentlich.
- *Bemerkung zu den Haushalten und den Netzen in Ortschaften bzw. Städten:*
  - In der hiesigen Umgebung verwendet man *Drehstrom* oder 3–*Phasen–Wechselstrom*. Die Spannung wird in lokalen *Transformatorenstationen* auf *Gebrauchsspannung herunter transformiert*. Dann wird der Strom in die Häuser phasenverschoben um $\dfrac{2\,\pi}{3}$ mittels 3 Leiter und einem Nullleiter geliefert, wobei man zwischen zwei Phasen ca. 380 V oder einer Phase und dem Nulleiter ca. 230 V abnehmen kann. Oft sind die Stromstärken auf 16 A oder 10 A durch Sicherungen begrenzt.
  - Bezüglich *Vorschriften* zu Hausinstallationen, Sicherungsvorschriften, Verteilervorschriften, Erdung, Schutzleiter, Fehlerstromschutzschalter, Kabelvorschriften usw. benutze man die Literatur. Strom kann gefährlich sein. Daher sah sich der *Gesetzgeber* vielerorts gezwungen, *Vorschriften* zu erlassen. Früher übliche Dinge wie die Benutzung des Nulleiters als Erdung und Ähnliches werden heute nicht mehr toleriert.

2. Zum Thema Halbleiter und Elektronenröhren

Grundlegendes

- Hier sollen zu den im Titel genannten Dingen *nur stichwortartige Hinweise* gegeben werden. Das *Gebie*t ist heute *äußerst umfangreich*. Daher muss auf die Literatur verwiesen werden.

- Früher hat man in Radios und ähnlichen Apparaten *Trioden-Vakuumröhren zur Steuerung stärkerer Ströme durch schwächere Ströme benutzt*. Heute haben *Transistoren* diesen Platz eingenommen. Sie sind aus *Halbleitern* aufgebaut.

- *Bauelemente aus Halble*itern haben in den vergangenen Jahrzehnten eine extreme und früher nicht vorstellbare *Verkleinerung* erfahren. Daher *stieg die Anzahl auf kleinstem Raume integrierter Elemente*. Dadurch ist eine nie da gewesene *Komplexität* der gebauten Systeme *möglich geworden*, welche dem Menschen vor allem *Hirnarbeit abnehmen*. Das bringt für ihn Vorteile und auch Gefahren. — Welche?

- Heute verwendet man in der *Elektronik komplexe integrierte Halbleiter-Bauelemente*, was zu *Computern* mit sehr *niedrigen Preisen* führt.

- *Computer* oder *Prozessoren* werden heute vermehrt *in allen möglichen Arbeits- und Entscheidungsprozessen eingesetzt*. Das hat die Arbeitswelt stark verändert. *Neue Kulturtechniken* sind entstanden: Vor allem die *Informatik* und die *Telekommunikation*.

- *Halbleiter* sind etwas *zwischen Leitern aus Metallen und Isolatoren*. Sie *leiten* ohne Zutaten nur *wenig*. Und ihre *Leitfähigkeit* kann *durch Tricks gesteuert* werden. Man konsultiere zu dieser Sache die Literatur.

- Wichtige Halbleiter werden als *große gezüchtete Kristalle* geliefert. In ihnen gibt es *frei bewegliche Ladungsträger*, jedoch in *viel kleinerer Zahl als in Metallen*. Daneben bestehen *Elektronenlöcher*, Orte, wo Elektronen fehlen. Solche *Elektronenlöcher verhalten sich so wie positive Ladungen*. Die *Leitfähigkeit* von Halbleitern ist *temperaturabhängig*. Sie nimmt *mit steigender Temperatur zu*.

Dotierte Halbleiter, Dioden, Transistoren, optoelektronsiche Bauelemente

- Man unterscheidet zwischen *reinen* (oder *intrinsischen*) *Halbleitern* und *dotierten* (oder *verunreinigten*) Halbleitern.

- In *reinen Halbleitern* existieren etwa *gleich viele Leitungselektronen* wie *Elektronenlöcher*.

- Bei den *dotierten Halbleitern* unterscheidet man zwischen *Elektronenüberschussleitern* (n-Leiter) und *Elektronenmangelleitern* (p-Leiter).

- *Dotiert man Halbleiterkristalle mit Fremdatomen, so wird die Leitfähigkeit erhöht.*

- Die *Konzentration der Fremdatome* ist *bestimmend für die Leitfähigkeit.*

- *Fünfwertige Fremdatome* sind *Elektronendonatoren.* Sie ergeben *p-Leiter.*

- *Dreiwertige Fremdatome* sind *Elektronenakzeptoren.* Sie ergeben *n-Leiter.*

- *Dioden* bestehen aus *zwei Halbleitern mit pn-Übergang.* In *eine Richtung* kann der *Strom durch die Diode* fließen, in die *andere Richtung nicht.* Bezüglich der Vorgänge an der *Sperrschicht* zwischen den beiden Halbleitern konsultiere man die Literatur. *Dazu nur kurz:*

  - In der Grenzschicht zwischen p- und n-Leitern können freie Elektronen vom n-Leiter in den p-Leiter diffundieren und dort freie Löcher neutralisieren. Es entsteht damit eine Schicht ohne freie Ladungen im Grenzbereich. Im p-Leiter ist diese nun allerdings negativ geladen und im n-Leiter entsprechend positiv. Die Diffusion kommt bald wegen der Abstoßung dieser Ladungen zum Erliegen.

    * Legt man nun einen Pluspol außen an den n-Leiter und einen Minuspol an den p-Leiter, so werden die noch freien Elektronen im n-Leiter nach außen abgezogen und entsprechend auch die freien Löcher des p-Leiters. Die neutrale Schicht wird so vergrößert und vor allem sind keine Ladungen mehr im Innern bei der Trennschicht, welche wandern können. Damit *sperrt die Diode einen Ladungsfluss.* Der Strom ist so praktisch gesperrt.
    * Legt man umgekehrt einen Minuspol außen an den n-Leiter und einen Pluspol an den p-Leiter, so werden die noch freien Elektronen im n-Leiter nach innen gedrückt und entsprechend auch die freien Löcher des p-Leiters auch. Die neutrale Schicht wird so verkleinert, ja sie wird aufgehoben und *die Ladungen im Innern können wandern.* Der *Strom kann fließen.*

- *Dioden* können *als Gleichrichter* benutzt werden.

- *Transistoren* sind *Trioden.* Sie bestehen aus *drei Halbleitern.*

- Bezüglich Aufbau und die Funktionsweise des Transistors sei auf die Literatur verwiesen. *Dazu hier nur kurz:*

- Man kann sich einen *Transistor* als *Turm mit drei Stockwerken* vorstellen, wobei immer zwei benachbarte Stockwerke aus verschiedene Leitern (n- oder p-Leiter) bestehen. *Zwei benachbarte Stockwerke bilden somit eine Diode.*

- Es gibt *pnp-* und *npn-Transistoren* (*Bipolar-Transistoren*).

- Ein *pnp-Transistor* besteht aus folgender *Kombination:* Erstens ist da ein *p-Leiter*, welcher mit einem *dünnen n-Leiter* zusammengefügt ist. Auf der anderen Seite des n-Leiters ist *wieder ein p-Leiter* angefügt.

- Bei einem *npn-Transistor* sitzen die *p-Schicht in der Mitte* und die n-Schichten außen.

- *Beispiel:* Setzt man bei einem *pnp-Transistor* einen *Pluspol an den einen* und einen *Minuspol an den andern p-Leiter* (*Kreis 1*) und zugleich einen *zweiten Pluspol* an den *einen p-Leiter* und einen *Minuspol an den n-Leiter* in der Mitte und hier dazu noch einen *Spannungsregler* (*Kreis 2*), so hat man mit *Kreis 2 eine Diode in Fliessrichtung geschaltet*, durch welche man mit Hilfe des *Spannungsreglers einen Strom fließen lassen kann* (*Basisstrom*). Der p-Leiter hier heißt hier *Emitter*, der n-Leiter heißt *Basis*. Den noch übrig gebliebenen p-Leiter nennen wir *Kollektor*.
  - Wenn der *Basisstrom* I_B *nicht fließt*, so ist der *Transistor über den Kollektorkreis gesperrt*, denn eine der beiden Trennschichten wirkt wegen der *Diodeneigenschaft* als Sperrschicht.
  - Jetzt lassen wir einen *Basisstrom* I_B *fließen*. Nun hat es im Bereich *Basis-Kollektor aber genügend freie Ladungen*. Es kann daher *auch ein Strom vom Emitter zum Kollektor fließen*. Dieser Strom heißt *Kollektorstrom* I_C. *An einem Transistor lässt sich so mittels des Basisstromes der Kollektorstrom steuern.* Man kann einen *Transistor* daher als *Stromverstärker* und in der Folge also *als Schalter* einsetzen.
  - Der *Kollektorstrom* verhält sich ungefähr *linear zum Basisstrom.*
  - Es zeigt sich, dass bei einem *kleinen Basisstrom* (infolge Vorwiderstand) der *Kollektorstrom um einen Faktor 100 übersteigen kann.* So kann man *durch einen kleinen Strom einen größeren Strom steuern.*
  - Wie erwähnt kann man infolge dieser Steuerungsmöglichkeit *Transistoren als Schalter verwenden.* Man kann so den *Strom fließen lassen oder nicht fließen lassen.* Das ist *bei Computern zentral*, bei welchen *dieses Fliessen oder Nichtfließen zur Binärcodierung verwendet werden kann.* Z.B. nicht fließen bedeutet Ziffer 0, fließen bedeutet Ziffer 1.
- Es gibt auch *unipolare Transistoren* (*Feldeffekt-Transistoren*, kurz Fet). Man konsultiere dazu die Literatur.
  - *Optoelektronsiche Bauelemente:* Man konsultiere dazu die Literatur. Der *Strom* wird in solchen Elementen *durch Licht steuerbar*. Oder: *Licht erzeugt Strom.* Einige Typen und Bezeichnungen:
  - *Photozelle*
  - *Photoleiter* (LDR)
  - *Photodiode*
  - *Solarzelle* (photovoltaisches Element)
  - *Leuchtdiode* (LED)
- Bezüglich *Mikroelektronik* resp. *integrierte Schaltungen* konsultiere man ebenfalls die umfangreiche Spezialliteratur.

2.19 Elektromagnetische Schwingungen - Wellen

2.19.1 Schwingungen, Wellen und Verwandtes

1. Schwingungen

- Idee: *Bewegte Ladungen haben bewegte elektrische Felder zur Folge.*

- *Faraday* schon *vermutete* die *Existenz von Schwingungen in den Feldlinien*, welche sich *im gesamten Raum ausbreiten.*

- Aus den *Maxwellschen Differentialgleichungen* kann man herleiten, dass *beschleunigte elektrische Ladungen Wellen im elektrischen und magnetischen Feld erzeugen.* Solche Wellen *koppeln sich von den Ladungen ab* und breiten sich aus mit der Geschwindigkeit:

  - $c = (\varepsilon_0 \cdot \mu_0)^{-0.5} \approx 3 \cdot 10^8 \; m\,sec^{-1}$. Das ist die *Lichtgeschwindigkeit.*
  - Erst 1886 konnte *Hertz diese Wellen nachweisen.*
  - Die daraus sich ergebende *Vermutung: Licht ist elektromagnetische Welle.*
  - Diese Vermutung konnte experimentell bestätigt werden (vgl. Lit.).
  - Markstein 1899: Marconi $\rightsquigarrow$ *Funksignale über* den*Ärmelkanal.*
  - Markstein 1901: *Nachrichtenübertragung über* den *Atlantik.*
  - *Notwendig* zur Nachrichtenübertragung:
    - *Schnelles Ein-* und *Ausschalten* von Strömen.
    - *Verstärkung* von Spannungsschwankungen.

- *Der Schwingkreis* (die Ladungsschaukel),

  - *Aufbau:* An eine Gleichspannungsquelle mit der Spannung U_0 ist über einen Widerstand in Serie eine Parallelschaltung angeschlossen. In dieser Parallelschaltung befindet sich auf der einen Seite ein Kondensator und auf der anderen Seite eine Spule. Zwischen dem ohmschen Widerstand und der Parallelschaltung ist ein Umlegeschalter eingebaut, sodass man entweder den Stromkreis zwischen ohmschem Widerstand und Kondensator oder zwischen Kondensator und Spule schließen kann.
  - Zuerst wird der *Kondensator aufgeladen*, indem der Schalter zwischen ohmschem Widerstand und Kondensator geschlossen wird. Die *Spule* ist jetzt *ausgeschaltet.* Der Kondensator nimmt die Ladung $Q_0 = C \cdot U_0$ auf.
  - Anschließend wird der *Schalter umgelegt:* Der ohmschem Widerstand ist jetzt ausgeschaltet. *Der Kondensator ist mit der Spule verbunden.* Damit liegt die Spannung U_0 an der Spule.

- Nach dem Gesetz $U_L = L \cdot \frac{d\,I}{dt}$ wird danach *Ladung über die Spule* von der positiven Platte des Kondensators zur negativen Platte geleitet. Damit *sinkt die Spannung* U_0 und damit *auch der Strom.*
- Durch die *Veränderung des Stromes* werden das Magnetfeld der Spule aufgebaut und das elektrische Feld andem*Kondensator abgebaut.* So *fließt die im Feld gespeicherte Energie vom Kondensator zur Spule.*
- Der Strom wird in der Spule dann maximal, wenn das Feld im Kondensator null geworden ist. Wegen dem Erreichen des Maximums des Stroms kann dieser nicht sofort null sein. Er muss noch eine Zeit lang weiter fließen und *lädt somit den Kondensator umgekehrt auf.*
- Durch die entstehende negative Spannung sinkt der Strom ab, *bis die Energie aus dem B–Feld der Spule wieder im E–Feld des Kondensators gespeichert ist.*
- Nun geht die Geschichte wieder neu los in die andere Richtung.
- An der Spule und am Kondensator muss die gleiche Spannung liegen, denn sie sind ja verbunden. Auch fließt der gleiche Wechselstrom durch beide Bauteile. (Wir nehmen hier an, dieser Wechselstrom sei sinusförmig. Eine Rechnung mittels höherer Mathematik kann das auch bestätigen, wenn keine Verluste vorhanden sind.) *Somit können wir rechnen:*
- An der Spule gilt: $u_S = i_S \cdot L \cdot \omega$ und am Kondensator: $u_S = \frac{i_S}{C \cdot \omega}$.
- Damit gilt: $i_S \cdot L \cdot \omega = \frac{i_S}{C \cdot \omega} \;\Rightarrow\; \omega^2 = \frac{1}{C \cdot L}$.
  - $\omega = \frac{2\,\pi}{T} = \frac{1}{(C \cdot L)^{\frac{1}{2}}}$.
- *Formel:*
  - $\frac{1}{T} = f = \frac{1}{2\,\pi} \cdot \frac{1}{(C \cdot L)^{\frac{1}{2}}} = \mathit{Schwingfrequenz}.$
  - *Große* C und L machen die Schwingung langsam.
- In der Praxis muss der Schwingkreis angeregt werden, um die Verluste zu kompensieren (Rückkoppelung).

• *Zur Schwingungsdifferentialgleichung:*

- $U_L = L \cdot \frac{d\,I}{dt} = U_C = \frac{Q}{C} = L \cdot \frac{d\,I}{dt} = L \cdot \frac{d\,(\frac{d\,Q}{dt})}{dt}$.
- $\rightsquigarrow$ *D'Gl.:* $Q = C \cdot L \cdot \frac{d\,(\frac{d\,Q}{dt})}{dt} \;\Rightarrow\; Q = (C \cdot L) \cdot \frac{d^2Q}{dt^2}$.
- $\rightsquigarrow$ Daraus errechnet man $Q(t)$ und damit $I(t) = \frac{d\,Q}{dt}$ usw.

- *Der Trick mit der Antenne:* Wir *biegen* den Schwingkreis beim Kondensator so *auf*, dass die *Kondensatorplatten* jetzt *an den Enden eines geraden Leiters* zu finden sind und die Feldlinien weit in den Raum reichen. So erhält man eine *Dipolantenne*. Gleichzeitig macht man die *Anzahl Windungen der Spule klein*. Da C nun klein wird, wird die Frequenz gleichzeitig groß $\rightsquigarrow$ *Hochfrequenz*, *offener Schwingkreis*, *Dipolantenne*, kurz Dipol.
  - $\rightsquigarrow$ *Wellenlänge* $\lambda = 2\cdot$ Dipolantennenlänge.
  - *Antennenende:* Stromknoten und Spannungsbauch.
  - $\rightsquigarrow$ *Stehende Welle*.
- Stellt man einen *Dipol gleicher Bauart parallel in einem Abstand daneben*, so passiert das, was wir schon früher immer festgestellt haben: Der *Dipol daneben* ist einem *wechselnden elektromagnetischen Feld ausgesetzt*. Jetzt hat dieses Wechselfeld *im Nachbardipol* umgekehrt einen *Wechselstrom zur Folge*, so wie oben der *Wechselstrom* ein *elektromagnetisches Feld* zur Folge hatte. Es wird also diesmal *Energie aufgenommen* und *Ladung bewegt*. *Feststellungen:*
  - Der *anregende Dipol* ist ein *Sender*, der *angeregte Dipol* ist ein *Empfänger*. Der *Sender löst Ladeschwingungen im Empfänger aus*.
  - Wenn man *auf das elektromagnetische Feld des Senders Signale aufmoduliert*, so kann man *über weite Strecken im Empfänger* diese *Signale wieder isolieren* und damit *lesen*.
  - Das *elektromagnetische Feld in einem Punkt der Umgebung eines Dipols schwingt linear polarisiert in der Ebene durch den Punkt und den Dipol*. Richtet man daneben den *zweiten Dipol*, den Empfänger also, welcher angeregt werden soll, statt parallel zum Sender nun *senkrecht zum Sender* aus, so werden die *Ladeschwingungen im Empfänger schwächer*.

2. Wellen

- Heinrich Hertz hat gezeigt, dass die *Dipolstrahlung Wellennatur* besitzt. Diese wird klar, indem man nachweist, dass die Dipolstrahlung die *Phänomene der Reflexion, Polarisation, Interferenz* und *Beugung* aufweist.
  - Durch *geeignete Abschirmung* (*Trichter*) kann man die *Wellen in eine bestimmte Richtung* (Winkel) auf *eine Metallschirmwand aussenden*. Dann kann man mit einem Empfänger feststellen, ob ein *maximaler Empfang* (Antennenstrom) beim *erwarteten Reflexionswinkel* stattfindet.
  - Beim *Aussenden der Wellen senkrecht auf den Schirm stellt man Reflexion* fest, wobei je nach gewähltem Abstand *Verstärkung oder Auslöschung* eintritt. Damit kann man die *Wellenlänge ermitteln*. Man stellt fest, dass *bei einem Dipol der Länge h eine Wellenlänge $\lambda = 2\,h$ entsteht*.

– Bei bekannter Sendefrequenz kann man damit die *Geschwindigkeit der Ausbreitung berechnen:* $c = \dfrac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f$.

– Man findet: $c \approx 300'000'000\ m\,sec^{-1} \approx 300'000\ km\,sec^{-1}$.

– Diese Zahl entspricht offenbar der *Lichtgeschwindigkeit*, welche schon vor langer Zeit von Olaf Römer am Jupitersystem bestimmt worden war. (Inzwischen genauere Resultate durch Michelson usw.)

– *Zur Polarisation:* Richtet man, so wie oben beschrieben, vor dem Trichter des Senders (Trichter zur Erzeugung eines Richtstrahls) den *Empfänger statt parallel zum Sender nun senkrecht zum Sender* aus, so werden die Ladeschwingungen im Empfänger so *schwach*, dass kein Signal mehr empfangen werden kann. Man hat daher mit der gerichteten Senderantenne *polarisierte Wellen* erzeugt. Diese kann man auch drehen, um die Polarisationsrichtung zu ändern.

– *Ein Stabgitter als Polarisator:* Stellt man *zum Sender parallele Stäbe*, welche unter sich parallel in einem Abstand kleiner als die Wellenlänge auseinander liegen (wir nennen das ein *Gitter*), zwischen Sender und Empfänger, so werden diese Stäbe angeregt. Sie nehmen Energie weg, sodass *hinter dem Gitter im Empfänger kein Empfang mehr ist*. Stehen die *Gitterstäbe jedoch senkrecht zum Dipol*, so *absorbieren sie nichts*. Sie lassen die Welle durch: Man kann die Wellen des Dipols im Empfänger hinter dem Gitter nachweisen.

– *Interferenz: Überlagert* man die *senkrecht gegen einen Schirm ausgesendete Welle mit der dort reflektierten Welle*, so kann man durch Veränderung des Abstandes eine *stehende Welle* erzeugen mit *Knoten* (Amplitudenauslöschung) und *Bäuchen*, welche durch den Strom im Empfangsdipol *nachgewiesen* werden können.

– *Beugung* und *Interferenz:* Lässt man eine *Welle durch einen schmalen Spalt hindurch*, so stellt man *hinter dem Spalt Beugung* fest: Die Welle ist dort in alle Richtungen nachzuweisen. Lässt man sie aber durch einen *Doppelspalt hindurch treten*, so stellt man *hinter dem Spalt Interferenz* fest: *Orte der Verstärkung* und *Orte der Auslöschung*.

– $\leadsto$ *Diese Phänomene lassen sich nur durch die Wellennatur erklären.*

– Eine weitere Anwendung: Der *Mikrowellenofen.*

  * Hochfrequente Schwingungen (mit $\lambda \approx 12\ cm$) werden im Ofen durch geeignete Umlenkung homogen verteilt. Die *Wassermoleküle in der Nahrung sind Dipole*. Wie werden zum *Rotieren angeregt*. Die dadurch erzeugten *Stöße* erhöhen die *thermische Energie*. So kann man *kochen*. Materialien, welche Wellen absorbieren, können dabei die *Homogenität stören.*
  * *Therapeutische Anwendung:* Gezielte Erwärmungen usw.

3. Maxwellsche Gleichungen

- *Maxwell* konnte aufgrund seiner Gleichungen 1856 die *Existenz elektromagnetischer Wellen vorhersagen.* Maxwell hat *vier* für die *Elektrodynamik grundlegende Gleichungen* formuliert. Diese Gleichungen benützen die *Sprache der höheren Mathematik* (Vektoranalysis, mehrdimensionale Differentialgleichungen höherer Ordnung oder entsprechende Integralgleichungen). Wer Elektrotechnik verstehen will, der muss daher vorher sehr *viel Mathematik lernen*, sonst ist er nicht wirklich dabei.

  Das Problem der Elektrizitätslehre (wie auch anderer Gebiete der Physik) liegt darin, dass man die untersuchten Realitäten nicht „sehen“ kann. *So kann man speziell ein Elektron eben nicht direkt sehen.* Daher ist man gezwungen, es mathematisch zu berschreiben, um sein Verhalten studieren oder voraussagen zu können. Unsere einzige Möglichkeit zum umfassenden Verständnis solcher Dinge liegt somit in den Modellen: Um Zusammenhänge zwischen messbaren und sonst (abgesehen von den besprochenen äusseren Wirkungen) weiter oft nicht erfahrbaren Größen zu untersuchen und zu nutzen, welche damit zwangsweise mathematischer Natur sind.

- Die *Maxwellgleichungen erfassen Zusammenhänge zwischen Erscheinungen betreffend elektromagnetische Felder.* Wir wollen versuche, sie etwas „in Prosa“ anzunähern:

  - *Magnetische Felder*, welche sich *zeitlich verändern*, werden von *elektrischen Wirbelfeldern umschlossen.* (Das führt zum Induktionsgesetz.)
  - *Elektrische Felder*, welche sich *zeitlich verändern*, werden von *magnetischen Wirbelfeldern umschlossen.* (Das führt zur Existenz von Magnetfeldern zwischen den Platten beim Aufladen des Kondensators.)
  - *Elektrische Ladungen* sind *elektrische Feldquellen.* (Feldlinien zwischen Ladungen.)
  - *Magnetfelder* sind *quellenfrei:* Magnetische Ladungen können nicht existieren. (*Magnetische Feldlinien* sind immer *geschlossene Kurven ohne Quellen und Senken.*)

- *Konsequenzen* (vergleiche dazu die Literatur):

  - Während sich ein *magnetisches Felds ändert*, ist es *von ringförmigen geschlossenen elektrischen Feldlinien umgeben.* Veränderliche magnetische Felder *erzeugen elektrische Wirbelfelder.* (Die Spannung in einer Spulenschleife ist ein Hinweis auf ein ringförmiges elektrisches Feld.)
  - Während sich ein *elektrisches Feld ändert*, ist es *von ringförmigen geschlossenen magnetischen Feldlinien umgeben.* Veränderliche elektrische Felder *erzeugen magnetische Wirbelfelder.* (Im Dipol um den Kondensator!)

- *Beschleunigte Ladungen strahlen elektromagnetische Wellen ab, am stärksten senkrecht zur Beschleunigung.*
  * Bei der gleichförmigen Bewegung einer Ladung wird auch das Feld gleichförmig mitbewegt. Wird die Ladung beschleunigt, so muss sich das Feld ändern. Denn *wegen der Beschleunigung verdichten sich die Feldlinien senkrecht zur Ladung.* Die *Information der Änderung breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit aus.* An der Informationsfront entsteht senkrecht zur Ausbreitungsrichtung eine *Transversalwelle.*
- *Elektromagnetische Wellen* breiten sich mit *Lichtgeschwindigkeit frei in den umgebenden Raum* aus. *Sie existieren weit weg also auch noch dann, wenn der Sender bereits abgeschaltet ist.* Sie machen sich somit *selbstständig.*
- Elektromagnetische Wellen sind *Transversalwellen.* $\vec{E}$ steht immer senkrecht zu $\vec{B}$.
- *Die Energiedichte des elektrischen* und des *magnetischen Feldes* ist *überall gleich groß.* Man findet für die Feldstärken $E = c \cdot B$.
- Mittels *elektromagnetischen Wellen* kann man *Energie übertragen.* Es gilt:
$$\text{Intensität} = \frac{\text{Leistung}}{\text{Flächeninhalt}}.$$
  * $\rightsquigarrow$ $\text{Intensität} = \dfrac{P}{A} = E \cdot \dfrac{B}{\mu_0} = E^2 \cdot (\varepsilon_0 \cdot \mu_0)^{\frac{1}{2}}.$
- Es gilt für die Geschwindigkeit: $\vec{v} = \text{Skalar} \cdot \vec{E} \times \vec{B}$.
- In stofflichen Medien gilt: $c_{Stoff} = \dfrac{c}{(\varepsilon_r)^{\frac{1}{2}}}$.

• *Zusammenhang zur Theorie des Lichtes:* Weil *elektromagnetische Wellen dieselben Eigenschaften* haben *wie Licht* (Lichtwellen) lag die Vermutung nahe, dass es sich bei Licht um dieselbe Wellenart mit größeren Frequenzen und kleineren Wellenlängen handelt.

• *Das Problem mit der Atomtheorie und den Elektronenbahnen:* Die Vorstellung von Elektronen als Korpuskeln auf Bahnen führt dazu, dass beim Umkreisen des Kerns eine *Zentripetalbeschleunigung* auftreten muss und daher ein *Elektron ständig beschleunigt* wird. Beschleunigte Ladung jedoch muss *elektromagnetische Strahlung zur Folge* haben. Dazu müsste wegen der *abgestrahlten Energie* das Elektron ständig an *kinetischer Bewegungsenergie verlieren* und schließlich *auf den Kern stürzen.* Das konnte nicht sein, denn sonst wäre die Welt nicht so wie wir sie vorfinden.

• Zum *Frequenzspektrum* und zum *Wellenlängenspektrum* elektromagnetischer Wellen vergleiche man die Literatur. Grob unterscheiden man nach steigender Frequenz und sinkender Wellenlänge: *Radiowellen, Mikrowellen (Wärmestrahlung), Lichtwellen, weiche und dann harte Röntgenstrahlung, Gammastrahlung.*

- Der *Mensch* ist somit *von elektromagnetischer Strahlung umgeben*, also von Strahlungsquellen, welche *teils einen natürlichen Ursprung* haben und teils auch *vom Menschen selbst gemacht* werden.

- *Röntgenstrahlen* entstehen infolge von Kathodenstrahlen beim Aufprall der Elektronen auf die Anode. Dabei wird Ladung sehr schnell abgebremst. Man hat es also mit *Bremsstrahlung* zu tun.

- *Synchrotronstrahlung* entsteht in *Teilchenbeschleunigern* beim *Beschleunigen von Ladungen*. Im Spektrum gehört sie in den Bereich zwischen Ultraviolett und Röntgenstrahlung. Um sie abzumindern, d.h. damit beschleunigte Teilchen nicht ständig viel Energie verlieren, wählt man sehr *große Bahnradien* in den Speicherringen (z.B. CERN).

- *Temperaturstrahlung:* Jeder Körper mit einer Temperatur über dem absoluten Nullpunkt sendet ständig *Temperaturstrahlung* aus (Wärme der Sonne im Wintergarten usw.). Es gilt:
  - Die *Strahlungsleistung* bei gleicher Temperatur und Körperart ist *proportional zur Fläche:*
    * $P_T = E_T \cdot A, \qquad E_T =$ Proportionalitätskonstante.
    * $E_T = \dfrac{P_T}{A}$ heißt *Emssionsvermögen*.
    * E_T *hängt ab* von der *Temperatur* und der *Oberflächenart* des Körpers (*Farbe, Rauheit*). Schwarzfarbige Körper strahlen mehr als weiße usw.
  - Man unterscheidet zwischen *emittierter Strahlung*, *absorbierter* Strahlung und *reflektierter* Strahlung. Auf einer *Körperoberfläche* findet in der Regel *ständig ein Austausch* statt.
  - Das *Absorptionsvermögen* gibt an, *welcher Anteil einer auf einer Oberfläche auftreffenden Temperaturstrahlung absorbiert* wird.
  - Im *Gleichgewichtszustand* herrscht hier ein *Energiegleichgewicht* zwischen *Absorption* und *Emission*.
  - *Strahlungsgesetz von Kirchhoff:* Bei einem Körper ist das *Absorptionsvermögen dem Emissionsvermögen proportional*.
  - Ein *perfekter schwarzer Körper* kann man sich *näherungsweis*e als *Inneres eines Holraumes* vorstellen, welcher durch ein *kleines Loch* mit dem Äußeren verbunden ist und alle ins Innere *eindringenden Strahlen absorbiert*.
    * Von einem *schwarzen Körper ausgehende Strahlung* nennen wir *„schwarze“ Strahlung*. Damit ist jedoch *nicht* die *Schwärze gemeint*, obwohl absorbierende Körper schwarz aussehen.
  - *Das Gesetz von Stefan und Boltzmann:* Für das *Emissionsvermögen eines schwarzen Körpers* gilt:

  * $E_{Emiss} = \sigma \cdot T^4$ mit $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}\ W\,(m^{-2}\,K^{-1})$.
  * Die *Strahlungsleistung realer Körper* ist *nicht so groß* wie diejenige von *schwarzen Körpern*.
- *Beispiele* zum *Emissionsvermögen:*
  * Heizkörper, $T = 100^o\ C = 373^o\ K \ \Rightarrow\ E_{Emiss} = 1098\ W\,m^{-2}$.
  * Solarkonstante: $S = E_{\text{von Sonne}} = 1370\ W\,m^{-2}$.
  * Mit diesen Kenntnissen kann man die *mittlere Temperatur auf einem Planeten* ermitteln.
- *Abhängigkeit* des *Emissionsvermögen* eines *schwarzer Körper* von der *Temperatur* und der *Wellenlänge:* Das *Verschiebungsgesetz von Wien:*
  * Ein *Schwarzer Körper* hat in seinem Strahlungsspektrum ein *Maximum. Zu höheren Temperaturen gehören dazu kürzere Wellenlängen.* Für die Temperatur T und die Wellenlänge $\lambda_{\text{max. Strahlung}}$ *gilt:*
  * *Formel:* $const. = b = \lambda_{\text{max. Strahlung}} \cdot T = 2.9 \cdot 10^{-3} K\,m.$
  * Damit kann man die *Oberflächentemperatur von Sternen und auch der Sonne bestimmen.*
  * *Sonne:* $5800K$. *Sterne:* Zwischen 2000 K und 20 000 K.

• *Das Problem Elektrosmog:* Dazu und zu den zugehörigen Gesetzen konsultiere man die Literatur. Folgende *Aspekte* sind dabei *wesentlich:*
  - Durch den *Menschen verursachte* Energie infolge *Strahlung.*
  - Zugehörige *Strahlungsleistung.*
  - Zugehörige *Intensität.*
  - Problem von *„sensiblen“ Wellenlängen* und *Frequenzen* oder *Schwingungsmustern*, auf die der Mensch oder andere Wesen des Planeten besonders sensitiv reagieren.

2.20 Weitere geplante Teile

(Momentan nicht Unterrichtsstoff)

Die folgenden Teile sind eher Bildungsstoff im Rahmen der Allgemeinbildung, als dass man sie für Anwendugnsstoff an einer Fachhochschule halten könnte. Da an einer Fachhochschule infolge der gegebenen Rahmenbedingungen weitgehend nur das Utilitaristische, das praktisch für den Beruf Nützliche „bezahlt“ wird, muss sich der Leser hier vorläufig mit Hilfe der Literatur informieren, falls er dazu Zeit und Verlangen hat. Eine mögliche Gliederung wäre:

2.20.1 Theorien des 20. Jahrunderts

Spezielle und allgemeine Relativitätstheorie, Quantenphysik.

2.20.2 Zur Struktur der Materie

$\leadsto$ Die „Mikrophysik“.

Teilchen, Wellen, Atomphysik, Kernphysik, Elementarteilchenphysik.

2.20.3 Astrophysik und Kosmologie

$\leadsto$ Die „Makrophysik“.

Kapitel 3

Theorien der Mathematik und Physik mit prägendem Einfluss

Hier geht es um den Problemkreis der Entwicklung von Mathematik, Physik und Weltbild sowie um einige Entdeckungen, die das Weltbild verändert haben. Dies mag ein Anstoss sein zum Nachdenken über deren Einfluss auf das gestalterische Tun, Denken und Empfinden in den „bildenden Künsten“.

3.1 Gelehrte der Antike

Hier sind kurz diejenigen Gelehrten aufgeführt, die für die in unserem Rahmen besprochenen Weltbilder besonders wichtig sind.

3.1.1 Ägypten, altes Reich

Ca. 2600 v. Chr.: Nach der Legende empfängt der Baumeister der ersten Pyramide bei Sakkara Imohtep die Elle vom Gotte Ptah, dem Gott der Handwerker (altes Reich).
Ca. 1800 v. Chr.: Papyrus Rhind, vermutlicher Versuch zur Berechnung von π mit Hilfe des „goldenen Schnittes“...

3.1.2 Schule des Pythagoras

Pythagoras lebte ca. 580–500 v. Chr. Er ist der Gründer des Ordens der Pythagoräer. Aus diesen Kreisen stammt die Entdeckung der pythagoräischen Zahlentrippel sowie die Tatsache der Existenz inkommensurabler Strecken. Damit waren die irrationalen Zahlen entdeckt. Der innere Kreis der Pythagoräer, die Mathematiker, verstanden Herleitungen und Resultate ihrer Mathematik. Der äussere Kreis, die Akusmatiker, hatten nur zu den Resultaten zugang. Im Gegensatz dazu hatten Bauleute vermutlich wenige abstrakte mathematische Kenntnisse, verstanden aber ihr Metier und damit auch die konkrete Geometrie. Ihre Konstruktionen waren oft nach dem Mass des Menschen, eingebettet im Kosmos.

3.1.3 Platon

Platon lebte ca. 429–348 v. Chr. Er gilt als einer der wesentlichsten Philosophen der Geschichte. Sein Lehrer war Sokrates, sein Schüler Aristoteles. Er ordnet das Reich der Erkenntnisse: Da gibt es die sinnlich–sichtbaren Dinge, daneben aber das Reich der Ideen, wo die mathematischen Begriffe einzuordnen sind. Die Mathematik ist ein bedeutendes Mittel zur Erforschung des Reiches der Ideen, welche durch den Staat gefördert werden müsste. Damit ist die wahrnehmbare Realität eingeteilt in die sinnlich wahrnehmbare, äussere Realität und die geistige Realität, das heisst das Reich der Ideen.

3.1.4 Aristoteles

Aristoteles (384–322 v. Chr.) war ebenfalls einer der wesentlichsten Philosophen. Auf ihn stützten sich lange Zeit die Naturwissenschaften. Er gilt auch als Vater der Logik. Er stellte fest, dass schwere Körper schneller fallen als leichte Körper. Es ist auch offensichtlich, dass eine leichte Vogelfeder nicht so rasch zu Boden fällt wie eine Bleikugel. Für Fragen nach dem Luftwiderstand und nach der Existenz des Vakuums war die Zeit damals noch nicht reif.
Für Aristoteles war die Erde das Zentrum des Kosmos; sie war klein und ruhend. Um sie bewegten sich die Planeten auf Kreisbahnen. Von Aristoteles kennen wir auch die Lehre der vier Elemente. Interessanterweise hat Geist (griech. „pneuma“) auch die Bedeutung des Elementes Luft (Nicht zu verwechseln mit „Anima“ oder „Psyche“). Das fünfte Element ist die „quinta Essenzia“. Den Elementen sind die platonischen Körper zugeordnet worden.

3.1.5 Euklides von Alexandria

Euklid lebte um 300 v. Chr. Er hat in seinen Elementen (13 Bücher) ein Sammelwerk mathematischen Wissens zusammengetragen, das erstmals in der Wissenschaftsgeschichte nach der Methode der strengen Axiomatik aufgebaut ist. Ziel des Werkes ist es, aus wenigen plausiblen Grundannahmen (Definitionen, Axiomen und Postulaten) heraus streng logisch–deduktiv zu zeigen, dass es an regelmässigen Körpern nur die bekannten fünf platonischen Körper gegen kann. (Definitionen sind Begriffserklärungen, Axiome sind allgemeine plausible, Aussagen, die am Beginn einer Theorie stehen, und Postulate sind z.B. Aussagen über Möglichkeiten von Konstruktionen.)
Bei Euklid wird offenbar, dass es kein Naturgesetz gibt, welches besagt, dass jede Sicht der Realität einfach zu sein hat. Denn ohne seine Elemente gab es keine Lösung des Problems der platonischen Körper. Und eine einfachere Lösung war nicht zu haben, auch für den König nicht...

> *Die* **Antworten Euklids** *zur Frage der Vereinfachung der Weltsicht (Reduzierbarkeit eines Denksystems) und dem Sinn deduktiver Systeme:*
> *Euklid wagte es seinem König Ptolemaios zu sagen, dass es keinen Königsweg zur Geometrie gibt. Noch heute hört man oft die Frage des Königs aus dem Munde von Zeitgenossen: „Kann man das nicht einfacher machen?“*
> *Ein Schüler fragte den Euklid, was er denn verdienen könne, wenn er diese Dinge lerne. Euklid soll darauf einen Sklaven gerufen haben mit der Aufforderung: „Gib ihm drei Obolen; der arme Mann muss Geld verdienen mit dem was er lernt.“*
> *Frei übersetzt heisst das: „Sind sie jemand, oder arbeiten sie für Lohn?“ Noch heute hört man oft die Frage des Schülers aus dem Munde von Zeitgenossen: „Wo kann man das gebrauchen?“*

An den beiden Fragen an Euklid hat sich seit ca. 2000 Jahren nichts geändert. Sie stehen am Tor zur Schule der Bildung des Denkens. Der König ging wohl von der Idee aus, dass sich die Schwierigkeiten der Realität nach seinem Massstab zu richten hätten: Eine Mischung von Hochmut und Paranoia. Auch den Schüler hat die Idee geleitet, dass sein momentanes Denkniveau die Beurteilungsgrundlage des Sinnes der Dinge sei. Daher hat er gewagt zu urteilen: Er hat sich darauf für befähigt gefühlt, die Brauchbarkeit und daher die Güte einer Sache einsehen zu können, ohne sich die dafür notwendigen methodischen Denkkompezenten und Erfahrungsgrundlagen angeeignet zu haben. Da liegt der Schluss nicht weit, dass alles, was nicht sofort als brauchbar erkennbar ist, daher schlecht sein muss. Speziell also wäre eine Denkschule schlecht...
Interessant in diesem Zusammenhang ist die Zielsetzung der hierzulande aus den Nöten der industriellen Revolution um ca. 1750 geborenen Volksschule: Lesen, schreiben, rechnen sind die vielgepriesenen grossen Kulturleistungen. Die Ausbildung des Denkens fehlt (z.B. Ausbildung von Kompetenzen wie Ziele setzen, urteilen und beurteilen, Massstäbe hinterfragen...). Sie war dem Gymnasium vorbehalten, gehörte nicht in die Schule des Volks... Und noch heute kann man beobachten: Viele, die mekern gelernt haben meinen, sie hätten auch denken gelernt...

3.1.6 Archimedes von Syrakus

Archimedes lebte ca. 287–212 v. Chr. Er gilt bei uns als Vater der technischen Hochschulen. Noch erhaltene Schriften sind: Methodenlehre, Quadratur der Parabel (einfache Integration!!), über Kugel und Zylinder, über Spiralen, über Konoide und Sphäroide, das Buch der Lemmata, die Konstruktion des regulären Siebenecks, die Sandzahl, vom Gleichgewicht ebener Flächen, von den schwimmenden Körpern (Gesetz des Archimedes!), teilw. über Kreismessung (Abschätzung von π).

3.1.7 Erathostenes von Kyrene

Erathostenes lebte von ca. 276 – 194 v. Chr. und war u.a. Leiter der Bibliothek in Alexandria. Be-kannt ist das Sieb des Erathostenes zur Auffindung der Primzahlen, seine Lösung des delischen Problems (Kubusverdoppelung, mit Zirkel u. Lineal alleine nicht möglich) und seine Berechnung des Erdumfanges. (Die Erde ist keine Scheibe mehr, sondern sie ist eine Kugel.)

3.1.8 Vitruv

Vitruv lebte vermutlich von 80-70 v.Chr. bis ??. Sein uns bekanntes Werk umfasst 10 Bücher. Es ist vermutlich um 33 – 20 v. Chr. entstanden.

1. Buch 1: Ausbildung des Architekten und architektonische Grundbegriffe
2. Buch 2: Baumaterialien
3. Buch 3: Tempelbau
4. Buch 4: Tempelbau
5. Buch 5: öffentliche Gebäude
6. Buch 6: Privathäuser
7. Buch 7: Privathäuser
8. Buch 8: Wasserleitungen
9. Buch 9: Astronomie
10. Buch 10: Maschinen

3.1.9 Ptolemaios

Ptolemäus (ca. 90–160 n Chr.) war der Lehrer des geozentrischen „ptolemäischen“ Weltbildes, das bis zu Kopernikus (ca. 1500) weit verbreitet war. Ptolemäus wusste schon, dass die Planeten manchmal langsamer und manchmal schneller laufen. Sonne und Mond bewegten sich auf Kreisbahnen, die Sonne in der Ekliptik. Um die Planetenbewegungen zu erklären, genügten Kugelsphären nicht mehr. Da griff die Epizyklentheorie: Die Planeten bewegten sich auf Kreisbahnen um einen jeweils zentralen Punkt der grossen Planetensphären. Man war also gezwungen, Sphären auf den Sphären einzuführen.

3.1.10 Rom

Roms Leistung war der Staat, die rechtsbasierte Organisation und die grandiose Technik. Die Wissenschaften scheinen davon eher erdrückt worden zu sein — vielleicht ist auch vieles verloren gegangen. Jedenfalls ist das heutige Erbe eher beschränkt.

3.2 Nachantike, Mittelalter

Vor dem Zusammenbruch des Römerreiches im Westen war der Hauptschauplatz der Kultur der östliche Teil des Römerreiches mit den Zentren Alexandria und Athen. In diesem Teil der Welt wurde die Kultur auch weiterhin „bewahrt“, wenn auch nicht unbedingt sehr viel weiter entwickelt. Im Westen hingegen lief nicht mehr viel auf mathematisch–naturwissenschaftlichem Gebiet. Das Feld gehörte der Theologie und der Scholastik. Erst im Hoch– und Spätmittelalter begann der Kontakt mit der Antike wieder, zur Hauptsache über die spanischen Mauren. Wegen unseres Rahmens verzichten wir hier darauf, auf einzelne Gelehrte einzugehen. Wichtig ist der Einfluss des Falls von Byzanz 1453: Der Einfluss griechischer Gelehrter begann in Italien zu wirken. . .

3.2.1 Albertus Magnus

Albertus Magnus (1193 – 1280 zu Köln), Dominikaner, Provinzial, Bischof von Regensburg, Scholastiker, Lehrer an europäischen Hochschulen. Er war der grosse Lehrer und Verbreiter des Aristoteles und Kenner der Naturwissenschaften. Heimlich soll er bereits damit begonnen haben zu experimentieren: Die Natur wird hier befragt auf der Grundlage des Glaubens an die Erfahrung, im Gegensatz zur Befragung der Schrift auf der Grundlage des Glaubens an die Schrift. Er war Lehrer des Ulrich von Strassburg und des Thomas von Aquin.

3.2.2 Fibonacci

Leonardo Fibonacci lebte von 1170 (Pisa) bis nach 1240. Erwähnenswert: Arabische Zahlen, Dezimalsystem, zahlentheoretische Beiträge.

3.3 Renaissance, Barock, Mechanik, neue Himmelskörper

In der Renaissance beginnt wieder stärker die Beschäftigung mit Geometrie, auch der Malerei (Perspektive) wegen (aber auch auch wegen der neuen Kriegstechnik mit Artillerie). Erwähnenswert sind die Schriften von Pacioli (De Divina Proportione, 1509, illustriert von Leonardo). Pacioli ist einer der grossen Vertreter des Humanismus und der Mathematik am Hofe der Montefeltre in Urbino, wo Raffaels Vater Hofmaler war (. . . „Lehrer“ Raffaels). Weiter: Albrecht Dürer (1471–1528, Proportionenlehre, 1528). — Von Michelangelo berichtet sein Schüler Condivi nur von einem einzigen Buch, dass der Meister stets um sich hatte: Dürers Proportionenlehre. Doch Dürers Figuren seien „starr wie Pfähle“. (Über Michelangelo haben wir Kunde von Vasari, Zeitgenosse und erster Kunstkritiker, und in einer Gegendarstellung von Condivi als Schüler. Nach denselben Quellen soll Michelangelo über seine Zeitgenossen geurteilt haben, sie hätten den Zirkel in der Hand statt im Auge. Kein Wunder: Aufgewachsen beim Steinbruch musste in seiner „Lehre“ sehr, sehr lange das Zeichnen üben.)

Wichtige Ereignisse: 1453 Fall von Byzanz, Ende Ostroms. 1468 Gutenberg erfindet den Buchdruck mit beweglichen Lettern. 1492 Entdeckung Amerikas, Ende der Rekonquista. Um 1517 Beginn der Reformation.

3.3.1 Kopernikus

Nikolaus Kopernikus lebte von 1473–1543. Er propagierte das heliozentrische Weltbild, wagte aber sein Werk zu Lebzeiten nicht zu veröffentlichen. Im Zentrum des Kosmos steht die Sonne. Erde und Planeten kreisen auf Kreisbahnen um sie. Der Mond läuft auf einer Kreisbahn um die Erde. Kopernikus fand offenbar auch Sätze der Geometrie und der Trigonometrie.

3.3.2 Galilei

Galileo Galilei lebte von 1564–1642. Er stellte zum Fallgesetz des Aristoteles ein Gedankenexperiment an, das in einen Widerspruch mündet: Lassen wir einen leichten, langsam fallenden Körper fallen und anschliessend einen schweren, schneller fallenden Körper auf exakt derselben Bahn, so muss der schwerere, schnellere den leichteren, langsameren bald einmal einholen. Weil der leichtere langsamer ist, muss er den schwereren und schnelleren beim Zusammenstoss abbremsen. Das heisst, dass beide Körper dann zusammen (zusammenklebend) langsammer sind als der schnellere Körper. Andererseits ist das Ganze dann aber schwerer als der anfängliche, schwerere Körper. Somit muss das Ganze auch schneller fallen. Somit fällt das Ganze zugleich langsamer und schneller! Dieser Widerspruch lässt sich dadurch beseitigen, dass man das Fallgesetz des Aristoteles verwirft. Aristoteles anzuzweifeln war damals jedoch eine gefährliche Sache!
Galilei fand auch das heute bekannte Fallgesetz. Lässt man eine Kugel eine schiefe Ebene herunterrollen, so nimmt ihre Geschwindigkeit linear zu. Die Geschwindigkeitszunahme pro Zeitdifferenz ergibt eine Konstante: Die Beschleunigung ist gefunden. Mit diesem Begriff beginnt für die Wissenschaftshistoriker die Neuzeit, denn erstmals ist hier etwas theoretisch gedacht worden, das die Antike noch nicht konnte: Mit Hilfe des abstrachten Begriffs der Geschwindigkeit (Verhältnis von Weg– zu Zeitdifferenz) ist ein neuer abstrakter Begriff definiert worden, die Beschleinugung nämlich als Verhältnis von Geschwindigkeits-differenz zu Zeitdifferenz. Das hier eingegangene Prinzip der doppelten Abstraktion scheint der Antike fremd gewesen zu sein.
Von Galilei stammt auch der Trägheitssatz. Ohne Einwirkung einer äusseren Kraft bleibt ein Körper im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung. Systeme, in denen dieser Satz gilt, heissen Inertialsysteme.
Weiter hat Galilei sein Fernrohr erfunden und damit erstmals in der Weltgeschichte neue Himmelskörper entdeckt, nämlich die Jupitermonde. Der damalige, dem geozentrischen Weltbild verhaftete Klerus hat diese Interpretation jedoch abgelehnt: Das was er da sähe in seinem Fernrohr, das sei nur Dreck, bekam er zu hören. Bekannt ist auch der Galileiprozess vor der Inquisition. Im mittelalterlichen Weltbild mit den Planetensphären sah man Gott als Energielieferanten, der die Bewegungen der Sphären aufrecht erhielt. Damit war ein

Existenzbeweis Gottes gegeben. Wer das Weltbild anzweifelte, entzog der darauf gebauten Sicherheit die Grundlage. Das musste Gotteslästerung sein...
Von Galilei ist auch die Einsicht überliefert, dass die geraden Zahlen und die natürlichen Zahlen sich bijektiv aufeinander abbilden lassen, sie also gleichmächtig sind. (Galileische Paradoxie.)

3.3.3 Tycho Brahe

Tycho Brahe (1546 - 1601) beobachtete einen Kometen (1577) und einen neuen Stern (1572, Super Nova). Seine astronomischen Messungen übertraffen erstmals den antiken Ptolemaios an Genauigkeit. Die Zeit ist bei Tycho auf die Minute und der Ort (Winkel) auf die Viertelminute genau festgehalten.

3.3.4 Jost Bürgi

Der „Ostschweizer“ Jost Bürgi (1552 – 1632) gilt als einer der Erfinder der Logarithmentafeln. Er konstruierte im Umfeld des Hofes von Kaiser Rudolf II von Habsburg in Prag eine Uhr mit bisher in unserer Geschichte nie gekannter Genauigkeit, die offensichtlich die genauen Messungen des Tycho Brahe ermöglicht hat. (Das Prinzip dieser Uhr ist erst an der Schwelle zum 21. Jahrhundert wieder rekonstruiert worden.)

3.3.5 Kepler

Johannes Kepler aus Württenberg lebte von 1571–1630. Neben seiner Theorie der Kegelschnitte und seiner Fasslehre stammen von ihm die drei „Keplerschen Gesetze“, die er aufgrund der Messungen von Tycho Brahe mit Hilfe der Rechnungen von Jost Bürgi begründen konnte::

1. Die Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet.

2. Flächensatz: Der Leitstrahl von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiteinheiten gleiche Flächen.

3. Für die grosse Halbachse und die Umlaufzeit zweier Planeten gilt: $\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = const.$

(Keplers Mutter wollte man noch als Hexe verbrennen.)

Bevor Kepler seine Gesetze fand und damit die alte Ordnung des Kosmos in Frage stellen musste, hatte er diese Ordnung mit Hilfe der Geometrie der platonischen Körper noch zu perfektionieren versucht.

3.3.6 Descartes

René Descartes (Kartesius) lebte von 1596–1650. Er ist als Mathematiker und als Philosoph zu würdigen (Cartesianismus). Von ihm stammt die analytische Geometrie. Geometrische Gebilde werden hier durch Gleichungen beschrieben.
Als Philosoph gab er den „empirischen positiven (d.h. mathematischen) Wissenschaften" die methodischen Grundlagen. Er rät uns zu folgenden methodischen Kartinalprinzipien:

1. Hege keine vorgefasste Meinung. Halte physikalisch nur für wahr, was auch eingesehen ist.

2. Zerlege ein Problem in Teilprobleme, die als solche für sich lösbar sind. (Grundlage der Aufteilung der heutigen Wissenschaften!)

3. Gehe bei der Erklärung einer Naturgegebenheit immer vom einfachsten Modell aus, solange dich nicht die Messungen zwingen, ein komplizierteres Modell anzunehmen.

4. Spezielles einfachstes Modell: Die Naturgesetze sind im Universum vermutlich überall die gleichen.

3.3.7 Guericke

Otto von Quericke lebte von 1602–1686. Er ist der Entdecker des Luftdrucks (Magdeburger Halbkugeln!).

3.3.8 Pascal

Blaise Pascal lebte von 1623–1662. Er ist gross in der Philosophie, der Mathematik und der Physik. In der Mathematik ist er bekannt als Geometer, als Wegbereiter der Infinitesimalrechnung und der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von ihm stammt das Prinzip der vollständigen Induktion. In der Physik stammt von ihm das Pascalsche Gesetz in der Hydormechanik: In einer idealen Flüssigkeit oder einem solchen Gas ist der Druck bei Vernachlässigung der Schwerkraft überall gleich.

3.3.9 Huygens

Christian Huygens lebte von 1629–1695. Er entdeckte den Impulssatz, baute die erste Pendeluhr nach dem heutigen Prinzip (Leonardo da Vinci hatte allerdings sich damit auch schon befasst) und behandelte Kurven.
Heute formuliert man den Impulssatz so:

$$\text{Sei } \vec{p} = \sum m_i \cdot \vec{v}_i$$

$\leadsto$ In einem abgeschlossenen System bleibt der Gesamtimpuls $\vec{p}$ konstant.

3.3.10 Newton

Isaak Newton lebte von 1642–1727. In der Mathematik ist er neben Leibniz (und Jackob Bernoulli) der Erfinder der Infinitesimalrechnung (Fluxionsrechnung). Von Newton stammt die Bewegungsgleichung $F = m \cdot a$ (für die Erde $F = m \cdot g$), das Wechselwirkungsgesetz: *Actio* = *Reactio* (Kräfte treten immer paarweise und entgegengesetzt auf) sowie das Gravitationsgesetz: $F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$. (Werk „Philosophia naturalis principia mathematica".) Als Idealisierung verwendet man in der Newtonschen Mechanik statt Massen als vereinfachte Modelle Massepunkte, die in der Realität allerdings nicht existieren.
1665 hatte Newton die Idee, dass die Schwerkraft auch für Erde und Mond vorhanden sein könnte. Das Gravitationsgesetz lässt sich im Idealfall einer Kreisbahn eines Planeten (z.B. Erde) via Zentripetalkraft sehr einfach aus dem 3. Keplerschen Gesetz ableiten:

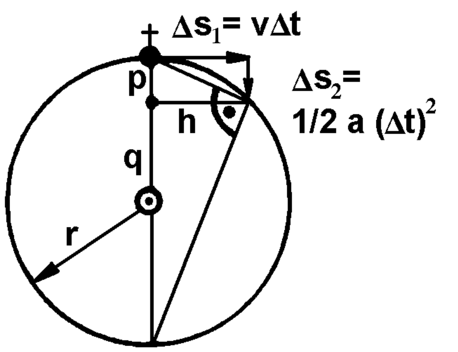


Abb. 1: Bewegung der Erde um die Sonne

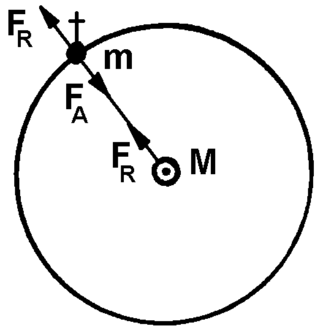


Abb. 2: Erde, Sonne und Kräfte

Z.B. die Erde bewegt sich um die Sonne mit einer gleichförmigen absoluten Geschwindigkeit v. Aus Symmetriegründen wirkt immer dieselbe Zentripetalbeschleunigung a und dieselbe Zentripetalkraft F. Wegen der gekrümmten Kreisbahn gehört zum tangentialen Weg $\Delta s_1 = v \cdot \Delta t$ der Weg zum Zentrum $p = \Delta s_2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (\Delta t)^2$. Wegen dem Höhensatz $h^2 = p \cdot q,\ \ h = \Delta s_1,\ \ p = \Delta s_2,\ \ q = 2\,r - p = 2\,r - \Delta s_2$ gilt somit:

$$\tfrac{1}{2} \cdot a \cdot (\Delta t)^2 \cdot (2\,r - \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot (\Delta t)^2) = (v \cdot \Delta t)^2 \ \Rightarrow\ a\,r - \tfrac{1}{4} \cdot a^2 \cdot (\Delta t)^2 = v^2$$
$$\Delta t \to 0 \ \Rightarrow\ a\,r = v^2 \ \Rightarrow\ a = \frac{v^2}{r} \leadsto\ F = m \cdot a = m \cdot \frac{v^2}{r} \text{ (Zentripetalkraft)}\ .$$

Wegen dem 3. Keplergesetz ist nun für Planeten $\frac{T^2}{r^3} = \mathit{const.} = c(M) \ \Rightarrow\ T^2 = c(M) \cdot r^3$

Die Umlaufgeschwindigkeit ist $v = \frac{U}{T} = \frac{2\,\pi\,r}{T}$

$$\Rightarrow\ F = m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot \frac{(2\,\pi\,r)^2}{T^2 \cdot r} = m\,4\,\pi^2 \cdot \frac{r}{T^2} = m\,4\,\pi^2 \cdot \frac{r}{r^3 \cdot c(M)} = \frac{4\,\pi^2}{c(M)} \cdot \frac{m}{r^2} = c_1(M) \cdot \frac{m}{r^2}$$

Denkt man sich für einen Moment die Erde fix und die Sonne beweglich um die Erde (Relativbewegung), so hat die Sonne dieselbe Winkelgeschwindigkeit bezüglich der Erde wie vorher die Erde bezüglich der Sonne hatte. Bei gleichem Radius führt das auf dieselbe

Geschwindigkeit und auch auf dielselbe Kraft, allerdings bei anderer Masse M. Lässt man auch hier das 3. Keplergesetz mit einer andern Konstante gelten, so folgert man wie oben:
$F = c_2(m) \cdot \frac{M}{r^2} \rightsquigarrow\ c_1(M) \cdot m = c_2(m) \cdot M = c_3 \cdot m \cdot M := G \cdot m \cdot M \ \Rightarrow\ F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$
$\rightsquigarrow$ Gravitationsgesetz

Aus dem Gravitationsgesetz wiederum gewinnen wir:
$F = G \cdot \frac{\cancel{m} \cdot M}{r^2} = \cancel{m}\, 4\,\pi^2 \cdot \frac{r}{T^2} \ \Rightarrow\ \frac{r^3}{T^2} = \frac{G \cdot M}{4\,\pi^2}$ (Kepler–Konstante).

3.3.11 Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz lebte von 1646–1716. Er gilt als der letzte Universalgelehrte, der das gesamte Wissen seiner Zeit beherrschte. U.a. war er der Gründer der Preussischen Akademie der Wissenschaften in Berlin. In der Mathematik wie auch in der Philosophie (als Lehrer der „besten aller möglichen Welten“ — im nichtmaterialistischen Sinne) ist er einer der Grossen, die nicht nur Sätze, sondern Methoden entdeckt haben. Er hat gewisse unendliche Reihen berechnet und ist auf dieser Grundlage zur Infinitesimalrechnung gekommen (unabhängig von Newton, fast gleichzeitig, vielleicht etwas später). Neben Arbeiten in der formalen Logik ist der der Entdecker der Dualzahlen. Auch hat er an der ersten mechanischen Rechenmaschine gearbeitet, gedacht zur Ermittlung der Planetenbahnstörungen. Für ihn war Gottes Bau der Welt so gut, dass sie nun alleine funktioniert. Seine philosophische Monadenlehre hat sich in der Non–Standardanalysis als fruchtbar erwiesen.

3.3.12 Bernoullis

Jacob I. Bernoulli lebte von 1654–1705. Er stand im Briefwechsel mit Leibniz. Es wird erzählt, dass er Leibnizes Unterlagen verloren habe und daher die Infinitesimalrechnung nacherfinden musste, um bei der Beantwortung von Leibnizes Fragen das Gesicht zu wahren. Er hat die Infinitesimalrechnung weiterentwickelt, die Polarkoordinaten eingeführt und viele Kurven bearbeitet. Mit ihm beginnt die Bernoulli–Dynastie in der Mathematik.

Sein Bruder Johann I. (1667–1748) hat mit Erfolg auf dem gleichen Gebiet Grosses geleistet. Von ihm stammen Bezeichnungen wie „Integral“. Johann I. war der Lehrer von Euler.

Daniel Bernoulli (1700–1784) befasste sich mit Kettenbrüchen, trigonometrischen Funktionen und anderem mehr. Daneben gilt er aber als der Begründer der theoretischen Physik. Von ihm stammt z.B. das Strömungsgesetz (Bernoulligleichung), das eine zum Energiesatz analoge Form hat:

$$\rho \cdot g \cdot h + \frac{1}{2}\,\rho \cdot v^2 + p = const.$$

Daniel Bernoulli befasste sich bereits mit der Herzleistung des Menschen (Mensch als „Strömungsmaschine“?).

3.3.13 Euler

Leonard Euler lebte 1707–1783. Man sagt, dass er mehr Mathematikseiten geschrieben habe, als je ein bekannter Schriftsteller Romanseiten. An der Herausgabe seines Gesamtwerkes (Opera omnia) wird immer noch gearbeitet (momentan ca. 80 Bände). Euler hat auf praktisch allen Gebieten der Mathematik Grosses geleistet. Von ihm stammen geometrische Sätze, die Variationsrechnung, die Eulersche Zahl, die Eulersche Konstante, das Eulersche Multiplikationsverfahren zur Lösung von Differentialgleichungen, das Eulersche Prinzip der kleinsten Wirkung, die Eulerschen Differentialgleichungen in der Mechanik (Kreiseltheorie!), die Eulersche Formel für die komplexe Exponentialfunktion u.s.w., u.s.f..

Eine Anektote: Euler arbeitete damals gerade am russischen Hof, als Diderot zu Besuch war. Man erzählte Diderot, dass Euler einen „algebraischen Beweis Gottes“ habe. Diderot, der an-geblich nichts von Mathematik verstand, eilte hin. Da dozierte Euler:

„Monsieur, es gilt $\dfrac{a+b^n}{n} = x$*. Also existiert Gott. Antworten Sie!“*

Diderot soll das — so wird erzählt — einleuchtend gefunden haben.

3.3.14 Kant

Immanuel Kant lebte 1724–1804, war also Zeitgenosse Goethes, Beethovens und Napoleons. Er und Platon gelten oft als die grossen Sterne der Philosophie. Sein Erbe ging einerseits an die Materialisten, andererseits an die Idealisten, die dann verschiedene Prioritäten gesetzt haben. Doch hat er u.a. auch über Kosmologie geschrieben.
Wichtig ist Kants kritische Philosophie (Z.B. die Kritik der reinen Vernunft) und damit seine Erkennt-nistheorie. Er stellte ein begründetes Gleichgewicht her zwischen der Position einerseits, dass alle Erkenntnis aus der Erfahrung (Sinneserfahrung) fliesse und der Position andererseits, dass die Erfahrung durch die angeborene Ratio entstehe. Erfahrung ist für die Erkenntnis zwar notwendig, jedoch nicht hinreichend, denn die z.B. angenommene Form der Erkenntnis, die Kathegorie, stammt nicht aus der Erfahrung. Es gibt für Kant analythische und synthetische Aussagen. Die Subjekt–Prädikat–Logik des Aristoteles ist gültig. „A priori“ ist Erkenntnis, wenn sie nicht aus der Erfahrung fliesst (z.B. Teile der Mathematik) und „a posteriori“, wenn sie durch Erfahrung bedingt ist. In der Mathematik gibt es synthetische Urteile, die zugleich a priori sind, während üblicherweise sonst synthetisch gleichbedeutend mit a posteriori wäre. Kathegorien sind Begriffe, die nicht aus der Erfahrung stammen, dort jedoch sehrwohl wirken. Eindrücke durch die Sinnesorgane müssen von der Tätigkeit der Vernunft organisiert werden,

bevor sie sich als Erfahrung äussern können. Erkennen oder Verstand geht so durch das „Verarbeitungsorgan Vernunft". Kathegorien in Form von Sätzen und Urteilen sind Quantität (Einheit, Vielheit, Allheit), Qualität (Realität, Negation, Limitation), Relation (Inhärenz und Subsistenz, Kausalität und Dependenz, Gemeinschaft) sowie Modalität (möglich–unmöglich, dasein–nichtsein, notwendig–zufällig). Dazu gibt es die a priorischen Formen der Anschauung: Raum und Zeit. Erfahrung selbst ist a priori subjektiv, also immer nur Abbild von einem Objekt, immer Phänomen, nie Objekt selbst, immer nur Aspekt, nie Ding an sich oder Noumen. Letzteres entspricht nicht den Kategorien. Noumen sind also z.B. befreit von Kausalität, sind nicht deterministisch. So kommt dem Menschen als noumeales Wesen, als moralisch Handelnder, ein freier Wille zu.
Kants Fragen lauten reduziert: Was kann ich erkennen? Was kann ich wollen, wie kann ich urteilen? Was soll ich tun?... Wichtig ist folgender kategorischer Imperativ als sein höchstes Prinzip der formalen Ethik: Handle nach der Maxime, durch die du zugleich wollen kannst, dass sie allgemeines Gesetz werde.

3.3.15 Coulomb

Charles Augustin Coulomb lebte 1736–1806. 1784 fand er das nach ihm genannte Gesetz der Elektrostatik. Elektrisch geladene Körper üben aufeinander Kräfte aus, die sich nach einer zum Gravitationsgesetz formal gleichen Formel berechnen lassen.

3.3.16 Lavoisier

Antoine Laurent de Lavoisier (1743–1793) gilt als der Begründer der modernen, messenden Chemie und als Entdecker des Sauerstoffes. Damit war die Luft – Pneuma – Geist – entgeistet, denn Luft hat mit Verbrennung zu tun. Lavoisier hat offenbar herausgefunden, dass Diamanten aus Kohlenstoff bestehen, denn er konnte zeigen, dass sie verbrannt werden konnten. Diese bei Hofe in Versailles demonstrierten Diamantenverbrennungen haben den Marktweiberzug ausgelöst, der als der Beginn der französischen Revolution gilt. — Bei Hofe verbrennen sie die Diamanten, während das Volk nichts zu essen hat! Lavoisier starb durch die Guilliotine.

3.3.17 Volta

Alessandro Volta lebte 1745–1847. Ihm verdanken wir die Erfindung der Batterie (1801). Napoleon hat ihn unterstützt. Damit war jetzt die schon vorher bekannte Elektrizität jederzeit für Experimente greifbar. Mit Ausnahme der Herzschen Wellen (Radiowellen) und Dingen wie der Transistor war die gesamte Elektrizitätslehre (insbesondere die Elektrodynamik) in weniger als 100 Jahren aufgebaut. Die Erfindungen waren gemacht und es ging nur noch um die technische Perfektion. Man sieht, dass wenn sich einmal ein neues Tor geöffnet hat, das neu erreichbare Gebiet dann sehr rasch erobert ist.

3.3.18 Laplace

Pierre Simon Laplace lebte von 1749–1827. Sein Hauptwerk ist die 5 bändige Traité de méchanique céleste. Darin hat er die Stabilität des Sonnensystems bewiesen. (Behandlung der Bahnstörungen.) Von Napoleon auf Gott angesprochen, soll er geantwortet haben, dass er diese Hypothese nicht brauche.... Von ist die Idee des „Laplaceschen Dämons“ bezeugt (Uhrenmacheruniversum): Ein Geist, der in einem gegebenen Moment alle Kräfte, Geschwindigkeiten und Positionen aller Teilchen im Universum kennen würde, könnte auf alle Zeiten jeden Zustand voraussagen (Determiniertheit).

3.3.19 Dalton

John Dalton lebte von 1766 – 1844. Er war angeblich auch Bierbrauer, entdeckte z.b. das Gesetz der multiplen Proportionen in der Chemie und führte damit die Atomtheorie abschliessend in die Chemie ein. Weiter das Gesetz von Daltons: In einem Gasgemisch ist der Druck gleich der Summe der der Drucke der Komponenten (jede für sich allein).

3.3.20 Gauss

Karl Friedrich Gauss lebte von 1777–1855. Er hat den Hauptsatz der Algebra bewiesen, die komplexen Zahlen zu einem Abschluss gebracht, die Theorie der quadratischen Formen entwickelt, das Theoremum Aureum bewiesen (Reziprozitätsgesetz der quadratischen Reste), Beiträge zur Konstruierbarkeit von n–Ecken geleistet, den Hauptsatz der Funktionentheorie (bekannt als Satz v. Cauchy) gefunden, die Methoden der kleinsten Quadrate gefunden, eine nichteuklidsche Geometrie entdeckt (Unbeweisbarkeit des Parallelenaxioms!). Von ihm stammen Entdeckungen in der Differentialgeometrie (Gausssche Krümmung!) u.s.w. Berühmt wurde Gauss aber eher in der Astronomie als in der Mathematik. Er hat als erster auf Grund von Bahnstörungen die Position eines neuen Himmelskörpers (der Planetoid Ceres) vorausberechnet, den man dann so entdecken konnte. Die Theorie hat nun über das Experiment gesiegt.

Eine wesentliche Entdeckung des 19. Jahrhunderts war, dass es ausserhalb der euklidschen Geometrie noch andere Geometrien gibt, die auch möglich sind. Gauss hatte daran seinen Anteil.

3.3.21 Cantor, Gödel und andere

Eine weitere verblüffende Entdeckung des 19. Jahrhunderts war, dass es unendlich viele verschiedene Arten von unendlich gibt — und in der Konsequenz gilt dasselbe auch von null. Zudem stiess man im 20. Jahrhundert an die Grenzen logischer Machbarkeit und somit des deduktiven Denkens. (Gödel, Turing)

3.3.22 Die Entdeckung neuer Himmelskörper

Galilei

Galileo Galilei (1564 – 1642vgl. oben): Erste Entdeckung neuer Himmelskörper (Jupitermonde).

Herschel

Friedrich Willhelm Herschel (beim Hanovranerkönig Gregor III. von England): 1781 Entdeckung des ersten neuen Planeten, des Uranus.

Gauss, Piazzi

Die Titus–Bodesche Regel (empirische Regel) gibt folgendes Bild der ungefähren Planetenentfernungen in 0.1 AE:

Merkur	$0+4$	$=$	4
Venus	$3+4$	$=$	7
Erde	$6+4$	$=$	10
Mars	$12+4$	$=$	16
(Astroidengürtel, Lücke, Phaeton??)	$24+4$	$=$	28
Jupiter	$48+4$	$=$	52
Saturn	$96+4$	$=$	100
Uranus	$192+4$	$=$	196

Die Titus–Bodesche Reihe weist eine Lücke auf. Es war also naheliegend, nach einem Objekt Ausschau zu halten, das diese Lücke schliesst. In der Neujahrsnacht 1801 hatte dann der Italiener Piazzi ein kleines Objekt entdekt, das sich bewegte und das er später wieder verlor. Zufällig erhielt Gauss davon Nachricht. Gauss hatte eine Methode entwickelt, mit deren Hilfe sich auf der Grundlage von wenigen Beobachtungen und viel Mathematik die gesamte Bewegung errechnen liess. Das führte zur ersten mathematischen Positionsvorhersage der Geschichte der Wissenschaften. Das Objekt ist dann so wiedergefunden worden. Es ist der Planetoid Ceres. Heute kennt man ca. 2000 (oder mehr) Planetoiden. Sie bilden ungefähr einen Gürtel in einer Ebene, haben alle etwa die gleiche Bewegungsrichtung und bewegen sich auf nahezu Kreisbahnen.

Bessel, Leverrier, Galle

Friedrich Bessel vermutete um 1840 aufgrund von Uranusbahnstörungen die Existenz eines weiteren Planeten. J.J. Leverrier versuchte auf dieser Grundlage eine mathematische Positionsbestimmung. 1846 fand in Berlin J.G. Galle nach diesen Daten den Neptun.

Tombaugh

1930 entdeckte der Amerikaner C. W. Tombaugh durch Zufall ausserhalb der Neptunbahn einen weiteren Planeten, den Pluto.

Neuste Entdeckungen

Seit einigen Jahren (gegen Ende des 20. Jahrhunderts, Beginn 21. Jahrhundert) weiss man, dass der Pluto ein Doppelplanet ist. Hinter Pluto erstreckt sich dann der Kuipergürtel (wieder ein Astroidengürtel). In dieser Gegend kriesen die Planetenanwärter Xena ($d \approx 3000\ km$), Orcus ($d \approx 1600\ km$), Quaoar ($d \approx 1300\ km$) und Santa ($d \approx 2000\ km$) und weiter aussen noch Sedana auf einer sehr stark elliptischen Bahn ($d \approx 1600\ km$). Unser Erdmond hat im Vergleichzu diesen Himmelskörpern einen Durchmesser von $d \approx 3500\ km$. Ganz aussen finden wir die Oort'sche Wolke, eine Ansammlung von vermutlich einer unglaublich grossen Zahl von Kometen.
Zudem fand man in den letzten Jahren Planeten, die zu anderen Sonnensystemen gehören. Wir sind nicht das einzige Planetensystem. Erwähnenswert sind dabei die Schlüsselarbeiten aus der Zeit um das Jahr 2000, die an der Universität Genf geleistet worden sind.

3.3.23 Faraday und Maxwell

Michael Farady lebte 1791-1867. Von ihm stammt der Feldbegriff, formuliert für elektrische und magnetische Felder (Griesskörnerversuch, Einsenfeilspäne). Seine experimentellen Befunde wurden von James Clerk Maxwell (1831–1879) ca. 1856 in den vier Maxwellgleichungen mathematisch gefasst (Differentialgleichugen mit mehreren Variablen).
Zum dabei verwendete Feldbegriff: Ein Feld ist z.B. im Raume eine Funktion auf den Raumpunkten als Definitionsbereich mit Wertebereich z.B. Vektoren. So wird z.B. jedem Raumpunkt als Funktionswert eine Kraft (Vektor) zugeordnet. Der Feldbegriff ist später auch auf die Gravitation ausgedehnt worden.

3.3.24 Mayer, Helmholz, Joule

Robert Mayer (1814–1878) erkannte bereits 1840 den Energiesatz. Hermann von Helmholz (1821–1894) hat ihn im Jahre 1847 ausformuliert. James Prescott Joule (1818–1889) entdeckte die wechselseitige Umwandlung der Energieformen. Sei U die „innere Energie". Heute formulieren wir für ein abgeschlossenes System:

$$E = m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2}\, m \cdot v^2 + U = const.$$

3.3.25 Das Problem des absoluten Raums

Noch Leibniz und Kant haben an den „absoluten Raum" geglaubt, d.h. den „durchwegs erfüllte Ort oder der Ort aller Örter" (nach Leibniz). Für sie stand ausser Zweifel, dass die euklidsche Geometrie die einzig mögliche Geometrie des Raumes ist. Diese Vorstellung wurde durch die Entdeckung nicht-euklidscher Geometrien (Gauss, Lobatschevsky 1829, Bolay 1832 u.s.w.) ausgeräumt. Unter dem Eindruck der Vorstellung des absoluten Raumes mit einem Ursprung eines Koordinatensystems ist der Streit nach dem Zentrum der Welt (Kopernikus, Kepler, Galilei, geozentrisches und heliozentrisches Weltbild) verständlich. Ansätze zur Vorstellung höherdimensionaler Räume finden sich schon beim bernischen Mathematiker Ludwig Schläfli (1814 – 1896).

3.3.26 Forschung heute

Es scheint, dass heute die grossen Fortschritte in der naturwissenschaftlichen Forschnung nicht mehr so sehr auf dem Gebiet von Physik und Chemie geleistet werden. Bahnbrechende sind Arbeiten aus der Mikrobioligie, speziell der Gen– und Zellforschung. Parallell dazu ist mit der Informatik ein Entwicklungszweig entstanden, der die Arbeitswelt verändert. Jedoch ist zu vermuten, dass man in der Zeit um 2020–2030 die theoretischen Verkleinerungsgrenzen erreicht haben wird. Dann müsste wohl das Tempo der Erneuerungen ändern. . .

Für die Architektur interessant:

3.3.27 Fechner

Gustav Theodor Fechner (1801 – 1887) war ein deutscher Physiker und Philosoph. Bekannt sind von ihm statistische Untersuchungen zur idealen Teilung, wo sich der goldene Schnitt hervorgetan hat.

3.3.28 Le Corbusier

Le Corbusier (geb. Charles Edouard Jeanneret(-Gris), 1887 in Chaux de Fonds bis 1965) entwickelte ab 1942 bis 1955 den Modulor.

3.4 Einstein und die Relativitätstheorie

3.4.1 Äthertheorie und Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Um ca. 1900 glaubten viele, dass die Physik in den wesentlichsten Teilen vollendet sei. Man rätselte noch über den Aufbau der Atome. Auch ging man davon aus, dass im Universum ein ruhender „Weltäther“ (auch Quinta Essenzia, oft Verbindung zwischen Materie und Geist) als Trägermedium existiere, durch den sich die Himmelskörper bewegen und in dem sich z.B. auch die elektrischen und magnetischen Felder ausbreiten. Lichtwellen begriff man als Ätherwellen. Viele Begriffe der Physik zeugen noch von der Äthervorstellung, unter deren Herrschaft sie entstanden sind. Man denke z.B. an den magnetischen Fluss: Das Magnetfeld fliesst durch den Äther. Dieser ruhende „Weltäther“

konnte man als ausgezeichnetes Inertialsystem begreifen, auf das man die gesamte „Newtonsche Physik“ beziehen konnte. (In einem Inertialsystem gilt das Trägheitsgesetz.)

Man dachte damals wohl insgeheim, nicht mehr fern von der absoluten Wahrheit über das Universum zu sein. 1905 erschien dann Albert Einsteins Schrift „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“. (Einstein: 1879–1955.) Danach wurde wieder alles anders. Es war wieder einmal klar, wie problematisch „absolute und endgültige Wahrheiten“ sind. Man muss immer damit rechnen, dass die Grenzen des Erkennbaren erweitert werden könnten. Die Sache hatte Jahre später auch extreme politische Folgen: Die Existenz der Atombombe führte zum Gleichgewicht des Schreckens. (Masse wurde in Energie umwandelbar)

Ausgangspunkt zur neuen Betrachtungsweise war eine genauere Analyse der Begriffe Raum und Zeit. Um im Wissen weiterzukommen, suchte man vor 1900 experimentell zu klären, mit welcher Geschwindigkeit sich die Erde durch den Äther bewegt. Die elektrostatischen beziehungsweise brechungsoptischen Versuche von Fizeau (1860), Amscart (1872) und Raileigh (1902) brachten kein Resultat. 1886 gelang es Michelson und Morley , die Lichtgeschwindigkeit c auf der Erde in verschiedene Richtungen zu messen. Bewegte sich die Erde mit der Geschwindigkeit durch den Äther und das Licht mit der Geschwindigkeit c, so müsste in Bewegungsrichtung der Erde durch den Äther die Geschwindigkeit $c_1 = c - v$ und in entgegengesetzter Richtung die Geschwindigkeit $c_2 = c+v$ herauskommen. Das Resultat des heute mit moderneren Mitteln wiederholbaren Versuches ist jedoch, dass $c_1 = c_2$ ist: Die Lichtgeschwindigkeit ist auf der Erdoberfläche in alle Richtungen immer gleich gross. (Anderswo hatte man nicht gemessen. . .) Für die Geschwindigleit der Erde um die Sonne findet man ca. 30'000 m/s oder $3 \cdot 10^4$ m/s gegenüber von $c \approx (2.997925 \pm 0.0000001) \cdot 10^8$ m/s. Der Effekt müsste bei diesen Zahlen messbar sein!

Wie sollte man sich das nun erklären? Durch eine Rückkehr zum geozentrischen Weltbild? — Etwa mit dem Postulat, dass es ja die Erde sein muss, die im Zentrum steht und daher als Konsequenz im Äther ruht? — Einstein schlug eine andere Idee vor. Den Äther hat noch niemand gemessen. Seine Existenz ist ein Postulat, ein Axiom. Wieso sollte man es nicht mit einem gegenteiligen Axiom versuchen, nämlich mit der Annahme, dass der Äther gar nicht existiert? Die Konsequenz daraus wäre, dass es gar kein ausgezeichnetes Inertialsystem gibt (wo der Trägheitssatz gilt). Jedes soche wäre demnach gleichberechtigt. Einerseits wäre das das einfachste Modell im Sinne von Descartes. Andererseits müsste man andernfalls ein Auszeichnungsprinzip haben, etwa ein Minimalprinzip. c ist aber offensichtlich in keinem System minimal, sondern in jedem System gleich. Die Konsequenz ist das von Einstein *postulierte* Prinzip (Axiom):

Relativitätsprinzip: *Die Naturgesetze nehmen in allen Inertialsystemen dieselbe Form an.*

Bei gleichförmig bewegten Inertialsystemen ist keines vor dem andern ausgezeichnet:
$\rightsquigarrow$ Spezielle Relativitätstheorie.

Bei beschleunigten Inertialsystemen ist keines vor dem andern ausgezeichnet:
$\rightsquigarrow$ Allgemeine Relativitätstheorie.

> *Das „geozentrische Weltbild“ hat sich nun ins Innere des Menschen verlegt. Nur er ist „hier und jetzt und einzig“. (Der Mensch ist kein „Herdentier“ mehr.) Diese Welt existiert so wie sie ist, hier und jetzt, weil es eben jetzt den Menschen gibt, der das wahrnimmt — und nicht umgekehrt gibt es den Menschen, weil die Welt eben gerade „zufällig“ jetzt so ist. Aussen im materiellen Bereich haben wir uns aber vom geozentrischen Weltbild verabschiedet.*

Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ist jetzt als Konsequenz aus dem Relativitätsprinzip begreifbar. Sie hat im Vakuum in jedem Inertialsystem etwa den Wert $c \approx 300'000\ km/s$.

Es ist wichtig zu beachten, dass die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit wohlverstanden nur auf der Erdoberfläche festgestellt worden ist. Einsteins Vermutung war es, dass die Gültigkeit dieses Prinzips überall angenommen werden kann. Bis heute hat man dazu keine Widersprüche gefunden.

3.4.2 Systemzeit und Zeitdiletation

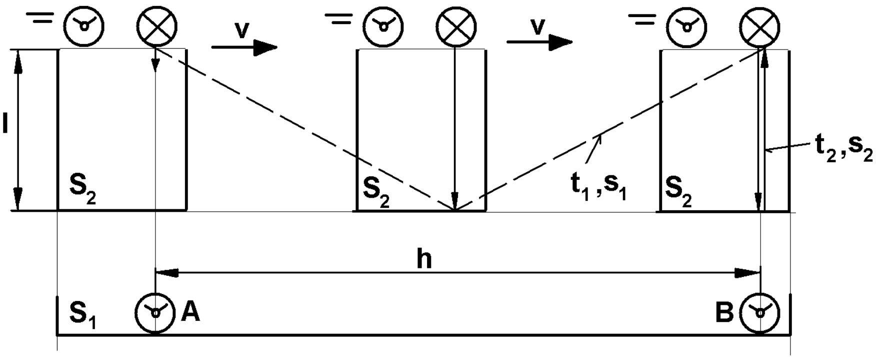


Abbildung 3: Gedankenexperiment zur Zeitdiletation

Wir machen jetzt ein Gedankenexperiment. Wir gehen davon aus, dass wir als Bezugssysteme zwei Inertialsysteme S_1 und S_2 haben, die sich gegeneinander horizontal mit gleichbleibender Geschwindigkeit v bewegen. Im System S_2 befindet sich ein senkrecht stehender, im System ruhender Zylinder der Höhe l, der unten verspiegelt ist und in dem oben eine Blitzlampe angebracht ist. Offensichtlich bewegt sich der beschriebene Zylinder im System S_1 mit der Geschwindigkeit v. Im Zylinder (bewegtes System S_2) sei eine Uhr angebracht, mit der sich die Laufzeit t_2 eines Lichtblitzes messen lässt, der den Zylinder nach unten durchläuft, dort gespiegelt wird und wieder oben ankommt. Der Blitz wird losgelassen, wenn sich das System S_2 am Ort eines Beobachters A im System S_1 vorbeibewegt. Für den *halben* Lichtweg finden wir im System S_2:

$$l = c \cdot t_2, \;\; t_2 = \frac{l}{c}$$

Im ruhenden System S_1 wird ebenfalls die Laufzeit des Lichtblitzes gemessen. Bei der Aussendung des Blitzes befinde sich der Zylinder beim Beobachter A im System S_1 und bei der Registrierung der Rückkehr des Blitzes beim Beobachter B im System S_1. Wir gehen davon aus (Annahme), dass A und B vorher mit synchron gehenden Uhren ausgerüstet worden sind. Die von A und B festgestellte Laufzeit des Blitzes sei t_1. Ein im System S_1 ruhender Beobachter C muss feststellen, dass sich der Zylinder während der Laufzeit des Blitzes aus seiner Sicht um die Distanz $h = v \cdot (2\,t_1)$ horizontal verschoben hat. Dabei ist t_1 die Zeit, die das Licht braucht um ebenfalls den *halben* Weg zurückzulegen. Aus der Sicht von C ergibt sich für den *halben* Lichtweg nach Pythagoras:

$$s_1 = c \cdot t_1 = \sqrt{(\frac{h}{2})^2 + l^2} = \sqrt{(\frac{2\,t_1\,v}{2})^2 + l^2} \;\Rightarrow\; c^2\,t_1^2 = t_1^2\,v^2 + (c \cdot t_2)^2$$

$$\Rightarrow\; t_2 = \frac{1}{c}\sqrt{t_1^2 \cdot (c^2 - v^2)} = t_1\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}$$

Konsequenz: *Die Zeit ist* **systemabhängig***!*

$$t_2 = t_1\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}, \;\; \frac{t_2}{t_1} = \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}, \;\; v \neq 0 \;\Rightarrow\; t_1 \neq t_2$$

Da die Zeit systemabhängig ist, redet man auch von der **Eigenzeit**. Wichtig ist auch die Feststellung, dass für den Beobachter in S_2 sich das System S_1 bewegt, er aber in Ruhe ist (Relativität). t_2 ist im allgemeinen kleiner als t_1.

Konsequenz: *Im bewegten System S_2 vergeht weniger Zeit als im ruhenden System S_1. In System S_2 ist auch der Lichtweg kürzer als im System S_1. Die Lichtgeschwindigkeit ist aber in beiden Systemen dieselbe.*

Für das Experiment sind drei Uhren nötig: Eine im System S_2 und zwei im System S_1. Dass die Sache auch mit materiellen Uhren klappt, zeigen die Experimente. Das sensationelle Ergebnis ist erstmals 1938 gemessen worden. Eine denkwürdige Konsequenz ist das **Zwillingsparadoxon**. Der Effekt ist angeblich auch bei den Mondflügen im

Grössenbereich von Mikrosekunden gemessen worden. Der Effekt ist heute mit Atomuhren in Flugzeugen messbar.

Noch ein Beispiel aus Elementarteilchenphysik (CERN, 1959): Myonen haben beim Zerfall eine Halbwertszeit von $\tau = \tau_2 = 1.52\ \mu s$. Die Halbwertszeit ist messbar (Intensität!). Die Myonen bewegen sich nun mit $v = 0.99942\,c$ im Speicherring. Für sie gilt in ihrem System die Halbwertszeit $\tau = \tau_2$. Für den Beobachter aussen ist dann $\tau_1 = \dfrac{\tau_2}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \approx 44.6\ \mu s$, was mit der Beobachtung übereinstimmt. ($\leadsto$ Problem: Schnelle, beim Zerfall entstehende Teilchen können weit gelangen. Z.B. zur Erde, wenn sie in den oberen Luftschichten zerfallen...)

Interessant ist der Fall eines Photons, das mit Lichtgeschwindigkeit fliegt. Für ein solches Teilchen gilt $v = c$. Daraus folgt $t_2 = t_1\sqrt{1-(\frac{c}{c})^2} = 0$. Das heisst: Die Systemzeit eines solchen Photons ist immer 0. Es wird also auf dem Lichtweg zwischen Aussendung und Ankunft um die Zeit 0 „älter“!

Bemerkung: Für fixes t_1 und $v \to c$ geht $t_2 \to 0$. Für $v \to c$ und fixes t_2 muss aber $t_2 \to \infty$ gehen.

3.4.3 Die Lorenzkontraktion

Nach Definition ist $c = \dfrac{s}{t} = const.$, unabhängig vom System. Da t nun systemabhängig ist, muss dies auch für die Weglänge s gelten, sonst wäre ja eben c systemabhängig.

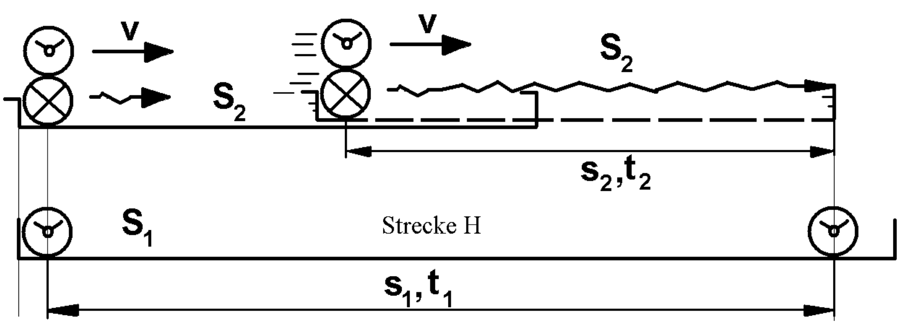


Abbildung 4: Gedankenexperiment zur Lorenzkontraktion

In einem Gedankenexperiment lassen wir nun wieder einen Beobachter in einem Inertialsystem S_2 an einem System S_1 vorbeifliegen, während nun in S_2 ein Lichtblitz in horizontaler Richtung losgelassen wird. Für den Beobachter in S_2 braucht das Licht für ein Wegstück H, das für ihn die Länge s_2 hat, die Zeit t_2. Der Beobachter in S_1 hat aber für H die Strecke s_1 gemessen und registriert jetzt die Zeit t_1. Beide Beobachter können die für sie geltenden Streckenlängen nach der Formel „Weglänge gleich Geschwindigkeit c

mal Zeit“ berechnen. Wegen der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in beiden Systemen gilt daher:

$$c = \frac{s_1}{t_1} = \frac{s_2}{t_2} \Rightarrow s_2 = s_1 \cdot \frac{t_2}{t_1} = s_1 \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}$$

> **Lorenzkontraktion:** *Für einen Beobachter in einem mit der Geschwindigkeit v vorbeifliegenden Inertialsystem S_2, in dem der Beobachter ruht, ist eine Strecke s_1 gegenüber der von S_1 aus wahrgenommenen Realität verkürzt:*
>
> $$s_2 = s_1 \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}$$

Dieser Effekt ist beobachtbar z.B. bei der Kontraktion des elektrischen Feldes schnell fliegender Teilchen (Spurenexperimente in Blasekammern. . .).

Weiter gilt in diesem Experiment: $v_1 = \frac{s_1}{t_1} = \frac{s_1 \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}{t_1 \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} = \frac{s_2}{t_2} = v_2$

Geschwindigkeiten können aber auch systemabhängig sein, wie ein weiterer Ausbau der Theorie zeigt.

Interessant ist auch hier wieder der Fall eines Photons, das mit Lichtgeschwindigkeit fliegt. Für ein solches Teilchen gilt $v = c$. Könnte man auf einem solchen Teilchen reiten, so würde man sich als ruhender Beobachter in S_2 vorkommen und die Strecke H zwischen Aussendungsort und Ankunftsort des Photons (System S_1) überwinden. Die Länge dieser Strecke würde man als der besagte Beobachter infolge der Lorenzkontraktion verkürzt wahrnehmen. Wie lange ist jetzt die Strecke für einem als Beobachter? Aus obiger Formel folgt mit der Länge $s_1(H)$ im System S_1: $s_2 = s_1(H) \sqrt{1 - (\frac{c}{c})^2} = 0$. Das heisst: Die Wegstrecke, die das Photon auf seinem „Flug“ zu überwinden hat, ist vom Photon aus gesehen immer 0! Für ein Photon im Vakuum (Lichtgeschwindigkeit c) existieren also gar keine Distanzen und somit gar keine Wege! Alles ist „unendlich nahe“.

3.4.4 Die Unüberschreitbarkeit der Lichtgeschwindigkeit

Die Quadratwurzel $\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2} \geq 0$ ist nur für $v \leq c$ eine reelle Zahl. Daher gilt:

> **Unüberschreitbarkeit der Lichtgeschwindigkeit:** *v kann nie grösser sein als c.*

Diese Tatsache wird sichtbar anhand von Experimenten mit Beschleunigern.

3.4.5 Das Paradoxon der Gleichzeitigkeit

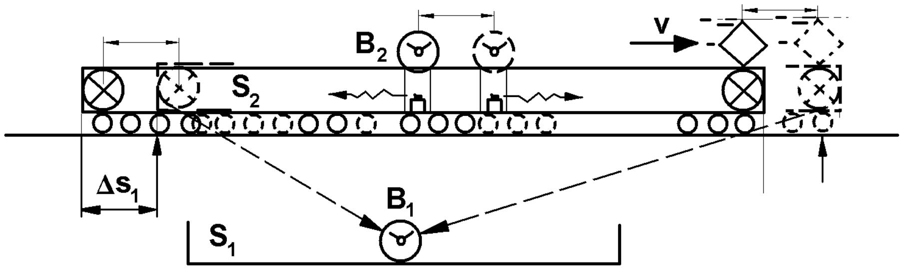


Abbildung 5: Gedankenexperiment zur Gleichzeitigkeit

Wir stellen uns einen langen Eisenbahnzug vor, der unser Inertialsystem S_2 bildet. Er hat die im System gemessene Länge $2\,s_2$. In seiner Mitte sitzt ein Beobachter B_2. Vorn und hinten ist der Zug mit je einer Blitzlampe ausgerüstet, die B_2 gleichzeitig zünden kann. Wenn B_2 den Knopf drückt, geht das Signal mit Lichtgeschwindigkeit zu den beiden Lampen. Es braucht dazu die Zeit $t_2 = \frac{s_2}{c}$. Beide Lampen senden dann einen Blitz aus, den B_2 wiederum nach der Zeit t_2 registriert, beide Blitze natürlich gleichzeitig.
Nun fährt der Zug mit grosser, aber gleichbleibender Geschwindigkeit nach Osten an einem Beobachter B_1 vorbei, der wiederum sich in einem Inertialsystem S_1 befindet. B_2 drückt genau dann den Knopf der Blitzlampen, wenn er sich exakt auf der Höhe von B_1 befindet. In dem Moment sei angenommen, dass B_1 von B_2 nur um eine minimale Distanz voneinander entfernt sind, sodass die Zeit um einander wahrzunehmen vernachlässigbar klein ist. Für B_1 beträgt die Länge des Zuges $2\,s_1 = 2\,\frac{s_2}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$. Auch für B_1 sitzt B_2 in der Mitte des Zuges.

Für B_1 beträgt die Zeit des Signals vom Knopf bis zur Lampe $t_1 = \frac{t_2}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$. Während dieser Zeit bewegt sich der Zug für ihn um die Strecke $\Delta s_1 = v \cdot \Delta t_1 > 0$ nach Osten. Im Moment wo jeweils die Lampe aufleuchtet, befindet sich daher die westliche Lampe für B_1 in der Distanz $d_1 = s_1 - \Delta s_1$ und die östliche Lampe in der Distanz $d_2 = s_1 + \Delta s_1$. Wegen $\Delta s_1 > 0$ ist daher $d_1 < d_2$. Die Zeiten, die die beiden Blitze bis zu B_1 brauchen, sind daher verschieden. Es gilt daher:

$$t_{1,1} = \frac{d_1}{c} < \frac{d_2}{c} = t_{1,2}$$

Konsequenz: *Was von B_2 gleichzeitig wahrgenommen wird, kann für B_1 als ungleichzeitig erscheinen. Der Begriff der Gleichzeitigkeit ist daher systemabhängig!*

Das hat Anwendngen z.B. beim Dopplereffekt. Beispiel: Rotverschiebung der Spektrallinien fliehender, sehr entfernter Sterne.

3.4.6 Ruhemasse und dynamische Masse

Was passiert mit einer Masse m, wenn man sie mit konstanter Beschleunigung a beschleinigt? — Es gilt $v = a \cdot t \leq c = a \cdot t_0$. Für $a = 10\ m/s^2$ beträgt dann t_0 etwa eine Zeit in der Grössenordnung eines Jahres. Eine grössere Geschwindigkeit als c kann nicht sein. Was muss somit passieren?

Weil t systemabhängig ist, muss bei gleichmässiger Beschleunigung wegen $a = \dfrac{v}{t}$ auch a systemabhängig sein. Es gilt hier:

$$a_2 = \frac{v}{t_2} = \frac{v}{t_1\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} = a_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

$$\Rightarrow\ a_1 = a_2 \cdot \sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}$$

Wenn für einen Beobachter in S_2 die Beschleunigung konstant ist, muss sie daher für einen Beobachter in S_1 abnehmen. Das könnte man sich durch die Annahme erklären, dass eine Widerstandskraft gegen die Beschleunigung auftritt. Wegen $F = a \cdot m$ kann man daher vermuten, dass bei gleichbleibender Kraft F und abnehmender Beschleunigung a für den Beobachter B_1 die Masse zunehmen müsste:

$$F = a_1 \cdot m_1 = a_2 \cdot \sqrt{1-(\frac{v}{c})^2} \cdot m_1 = a_2 \cdot m_2\ \Rightarrow\ m_1 = \frac{m_2}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

Kann das Stimmen?

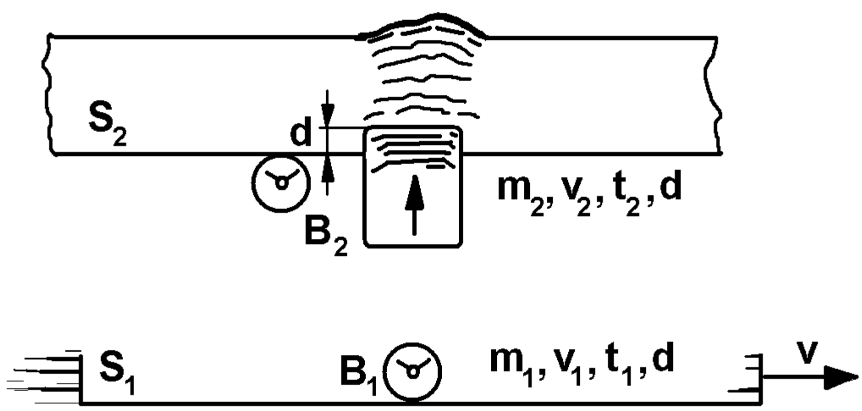


Abbildung 6: Gedankenexperiment zur dynamischen Masse

Wir machen wiederum ein Gedankenexperiment. In einem System S_2 fahre ein Auto der Masse m_2 mit der Geschwindigkeit v_2 senkrecht in Richtung Norden in eine Wand. Dabei wird der Impuls $p_2 = v_2 \cdot m_2$ auf die Wand übertragen und schlägt dabei ein Loch der Tiefe d, die als Mass für den Impuls gelten soll. Ein fast mit Lichtgeschwindigkeit v nach Osten vorbeifliegender Beobachter B_1 (System S_1) registriert eine etwas andere Situation: Einerseits fühlt er sich in Ruhe, das System S_2 mit dem Crash-Auto ist für ihn in Bewegung. Anererseits ist die Lochtiefe d für den vorbeifliegenden Beobachter B_1 dieselbe wie für einen Beobachter B_2 im System S_2, da für beide der Abstand zur Wand nicht ändert und beide sich in Nordrichtung nicht bewegen. Der Impuls muss daher in beiden Systemen derselbe sein: $p_1 = m_1 \cdot v_1 = p_2 = m_2 \cdot v_2$. Nun ist

$$v_1 = \frac{d}{t_1},\;\; v_2 = \frac{d}{t_2} = \frac{d}{t_1\,\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \;\Rightarrow\; v_1 = \frac{v_2}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

Wegen $m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2$ muss daher gelten:

$$m_2 = m_1 \cdot \frac{v_1}{v_2} = m_1 \cdot \frac{v_2}{v_2 \cdot \sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} = \frac{m_1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

Nach dem Gefühl des „vorbiefliegenden“ Beobachtes B_1 ist S_1 in Ruhe. Er erfährt das System mit dem Crash–Auto als in Bewegung befindlich. $m_1 := m_0$ nennen wir daher die **Ruhemasse**, die in einem anderen bewegten System nach der folgenden Gleichung zu $m_2 := m'$ wächst:

$$\boxed{m' = \frac{m_0}{\sqrt{1-(\dfrac{v}{c})^2}}}$$

m' heisst die **dynamische Masse**. Auch diese Formel ist experimentell geprüft.

3.4.7 Masse und Energie

Wenn auf eine frei bewegliche Masse m ständig eine Kraft F wirkt, so wird die Masse nach der Formel $F = a \cdot m$ durch die Beschleunigung a beschleunigt. Wir bezeichnen hier die dynamische Masse mit m und die Ruhemasse mit m_0. Wir betrachten vorerst einmal nur kleine Geschwindigkeiten v. Ohne uns mal gross um die letzte Sauberkeit zu kümmern, versuchen einmal rein explorativ mit kleinen Grössen zu rechnen. Die kinetische Energie der Masse nimmt dann nach der folgenden Formel zu: $dE_{kin} = F \cdot ds$ (dE, ds „infinitesimal“klein, entstanden gedacht aus $\Delta E, \Delta s$). Die Kraft F ist in der Physik im allgemeinen Fall die Impulsänderung pro Zeit, d.h. die Ableitung des Impulses $p = m \cdot v$ nach der Zeit t:

$$F = \frac{d\,p}{d\,t} = \frac{d\,(m \cdot v)}{d\,t} = \frac{d\,m}{d\,t} \cdot v + m \cdot \frac{d\,v}{d\,t} = \frac{d\,m}{d\,t} \cdot v + m \cdot a$$

$$\Delta E_{kin} = \int_0^s F\,ds = \int_0^s (\frac{d\,m}{d\,t}\cdot v + m\cdot a)\,ds = \int_0^s \frac{d\,m}{d\,t}\cdot v\,ds + \int_0^s m\cdot a\,ds = \int_0^s \frac{d\,m}{d\,t}\cdot v\,ds\,\frac{d\,t}{d\,t} + \int_0^s m\cdot$$
$$\frac{d\,v}{d\,t}\,ds = \int_0^t \frac{d\,m}{d\,t}\cdot v\,\frac{d\,s}{d\,t}\,dt + \int_0^v m\cdot\frac{d\,s}{d\,t}\,dv = \int_0^t \frac{d\,m}{d\,t}\cdot v^2\,dt + \int_0^v m\cdot v\,dv = \int_{m_0}^m v^2\,dm + \int_0^v m\cdot v\,dv$$

Nun rechnet man:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \quad\Rightarrow\quad v = c\cdot\sqrt{1-(\frac{m_0}{m})^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{d\,v}{d\,m} = \frac{c\cdot m_0}{m^3\sqrt{1-(\frac{m_0}{m})^2}} \quad \text{und}$$
$$v\cdot\frac{d\,v}{d\,m} = \frac{c^2\,m_0^2}{m^3} \;\Rightarrow\; dm = \frac{v\,m^3}{c^2\,m_0^2}\,dv \;\rightsquigarrow\; \Delta E_{kin} = \int_{m_0}^m v^2\,dm + \int_0^v m\cdot v\,dv = \int_{m_0}^m v^2\,dm +$$
$$\int_{m_0}^m \frac{c^2\,m_0^2}{m^2}\,dm = \int_{m_0}^m (c\cdot\sqrt{1-(\frac{m_0}{m})^2})^2 + \frac{c^2\,m_0^2}{m^2})\,dm = \int_{m_0}^m (c^2\cdot(1-(\frac{m_0}{m})^2) + \frac{c^2\,m_0^2}{m^2})\,dm =$$
$$c^2\cdot\int_{m_0}^m (1-(\frac{m_0^2}{m^2}) + \frac{m_0^2}{m^2})\,dm = c^2\cdot\int_{m_0}^m dm = c^2\cdot(m-m_0) = \Delta m\cdot c^2$$

Wir erhalten also hier eine aus der Literatur sehr, sehr bekannte Formel:

$$\boxed{\textit{Es gilt:}\qquad \Delta E_{kin} = \Delta m\cdot c^2 = (m-m_0)\,c^2 \qquad\rightsquigarrow\qquad m = m_0 + \frac{E_{kin}}{c^2}}$$

Masse ist also Energie! Das zeigt sich bei der Kernspaltung oder der Atomexplosion infolge Kettenreaktion! Der **Massedefekt** Δm ist proportional der oft äusserst grossen freigesetzten Energie: $\Delta E = (m-m_0)\,c^2$. Daher können wir allgemein Masse und Energie als äquivalente Begriffe ansehen und daher auch der **Ruhemasse** m_0 die **Ruheenergie** $E_0 = m_0\cdot c^2$ zuordnen. Das Experiment zeigt, dass Massen vollständig in Energie umsetzbar sind. Z.B. beim Zusammenstoss eines Teilchen mit seinem Antiteilchen (1932 schon beobachtet!). Die **gesamte Energie** bewegter Materie ist:

$$E_g = E_{kin} + m_0\cdot c^2 = m\cdot c^2$$

Umgekehrt ist Energie immer auch Masse, auch wenn sie in einem Feld steckt (Feldenergie). So haben auch Photonen eine Energie und somit eine Masse. Auf Licht wirkt daher auch das Gravitationsgesetz. Ist die Gravitationskraft so gross, dass Licht aus einem Stern nicht mehr entfliehen kann, so spricht man von einem **schwarzen Loch**.

3.4.8 Zeitdehnung in der Nähe grosser Massen

Wir denken uns zwei Beobachter in grosser Entfernung voneinander (mit dem geraden Weg s_1 zwischen ihnen). Sei t_1 die Zeitspanne welche ein Lichtstrahl benötigt, um die

Distanz s_1 zurückzulegen. Nun denken wir uns in der Mitte der beiden Beobachter ein schwarzes Loch mit sehr grosser Masse, welches eben auf seiner Bahn dort angekommen ist. Nun ist es nicht mehr möglich, zwischen den beiden Beobachtern einen Lichtstrahl auf direktem Weg hin und her zu senden, da dieser vom schwarzen Loch absorbiert würde. Da das Licht eine Energieform ist und Energie wegen $E = m \cdot c^2$ zur Masse m äquivalent ist, besitzt ein Lichtteilchen auch die Masse m und wird demzufolge nach dem Gravitationsgesetz vom schwarzen Loch angezogen. Das ergibt nun eine neue Möglichkeit, per Lichtstrahl zwischen den Beobachtern Information auszutauschen. Man kann sich den Lichtstrahl in einem gewissen Winkel zur Achse zwischen den Beobachtern gesendet denken, so dass das schwarze Loch dann den Strahl so ablenken kann, dass dieser auf einem gebogenen Weg vom einen Beobachter zum andern gelangt. Man denke sich die Bahn etwa wie bei einer Wurfparabel. Auf dieser neuen Bahn ist aber der neue Weg s_2 grösser als der alte direkte Weg s_1. Zum neuen Weg gehört die Zeit t_2. Wegen der Konstant der Lichtgeschwindigkeit gilt: $c = \frac{s_1}{t_1} = \frac{s_2}{t_2}$. Daher ist auch t_2 grösser als s_2. Grosse Massen dehnen daher die Reisezeit von vorbeifliegendne Objekten. Man könnte sich nun ein System von schwarzen Löchern vorstellen, das einen Lichtquant so ablenkt, dass er zuerst eine recht grosse Zahl von Spiraldrehungen um die und zwischen den Löchern vollführen muss, bevor er davon wieder los kommt. In diesem Falle würde der Lichtstrahl eine Zeit lang in einer „Falle stecken“. Für einen Beobachter aussen wäre er eine gewisse Zeit „eingefrohren“...

Für weitere solche Phänomente und Aspekte von Raum (Weg) und Zeit sei auf die Fachliteratur verwiesen.

3.5 Materiewellen, Quantentheorie, Kosmologie und Weltbild

3.5.1 Dualismus Wellen–Korpuskel

Was ist die Natur des Lichtes? Betrachten wir die Lichtbrechung (z.B. beim Übergang von Luft in Glas). Diese lässt sich durch Wellen erklären. Man spricht von der **Wellennatur** des Lichtes.

1988 beobachtete Heinrich Hertz, dass mit UV-Licht bestrahlte Metalloberflächen Elektronen aussenden (Photoeffekt). Heinrich Lenard konnte später zeigen, dass die kinetische Energie der Elektronen unabhängig ist von der Lichtintensität. Das lässt sich nicht mit Lichtwellen als elektromagnetische Wellen erklären. Es gilt $E_{kin} = \frac{1}{2}\, m\, v^2 = h\, \nu - W$. W ist eine Materialkonstante, ν die Lichtfrequenz und h das Plancksche Wirkunsquantum. (Max Planck war 1900 erstmals auf h gestossen.) 1905 gelang es Albert Einstein in seinem Artikel „Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt“ die Ergebnisse zu deuten: Er ging von der Annahme aus, das Licht bestehe (parallel zu seiner Wellennatur) aus **Photonen** (**Korpuskeln**) der Energie $E = h\, \nu$ (Plancksches Gesetz). Damit war die Dualität Welle–Korpuskel geboren.

Dafür erhielt Einstein 1921 den Nobelpreis. Der scheinbare Widerspruch lässt sich nur lösen, wenn man tiefer in die Physik eindringt (Wahrscheinlichkeitsinterpretation, Wellenpakete etc.).

Da Energie und Masse äquivalent sind, kann man jetzt die Photonenmasse berechnen:

$$E = h\,\nu = m\,c^2 = (m_0 + \frac{E}{c^2})\,c^2$$

Daraus folgt, dass die Ruhemasse des Photons $m_0 = 0$ sein muss. Daher muss auch die Ruheenergie des Photons $E_0 = m_0 \cdot c^2 = 0 \cdot c^2 = 0$ sein! Wir fassen das bisher über das Photon Gesagte zusammen:

> **Konsequenz:** *Ein Beobachter, den wir in Gedanken auf einem Photon zwischen Aussendungs-ort und Ankunftsort reiten lassen, muss feststellen, dass die Übermittlungszeit, die Länge des Übermittlungsweges , die Ruhemasse und die Ruheenergie für ihn alle 0 sind. Das heisst, dass das Photon aus dieser Sicht gar nicht in Erscheinung tritt oder gar nicht existiert. Es ist nur für einen Betrachter ausserhalb des Teilchens durch seine Ankunft wahrnehmbar. Seine Realität kann immer nur durch seine Ankunft wahrgenommen werden, nie aber unterwegs! Damit wird das heimliche Postulat der bedingungslosen Existenz alles physikalisch Wahrnehmbaren in Frage gestellt resp. relativiert.*

Da Photonen eine Masse haben, müsse sie auch einen Impuls $p = m\,v = m\,c$ haben. Für diesen gilt mit der Wellenlänge λ und $c = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \nu$:

$$p = m\,c = \frac{E}{c^2} \cdot c = \frac{\nu \cdot h}{c^2} \cdot c = \frac{\nu \cdot h}{c} = \frac{c \cdot h}{c \cdot \lambda} = \frac{h}{\lambda} \;\Rightarrow\; p = \frac{h}{\lambda}$$

1923 stellte Prinz Louis de Broglie die Hypothese auf, dass diese Wellen–Korpuskel–Dualität auch für Elektronen gelten. Tatsächlich gelang es dann, die Wellennatur der bisher als Korpuskel bekannten Elektronen (Träger der Elementarladung) auch experimentell durch Beugungserscheinungen nachzuweisen (Clinton Davisson, George Thompson). Interessant ist, dass Vater Joseph Thompson den Nobelpreis für den Beweis der Teilcheneigenschaft der Elektronen und Sohn George Thompson 30 Jahre später den Nobelpreis für den Beweis der Welleneigenschaften der Elektronen bekommen hatte!

Man kann das Prinzip von de Broglie auch auf andere Materiearten anwenden und z.B. nach der Formel $E = m\,c^2 = h\,\nu = h\,\frac{c}{\lambda}$ aus der Masse m eines Stückes Materie die Wellenlänge λ oder die Frequenz ν bestimmen ($\leadsto \; \nu = \frac{m \cdot c^2}{h}, \;\; \lambda = \frac{h}{m \cdot c}$).

3.5.2 Die Unschärferelation

Z.B. bei Elektronen und anderen Teilchen zeigt es sich, dass die Teilchenbahnen wegen den Beugungseffekten nur mit der Genauigeit der de–Broglei–Wellenlänge festlegbar ist. Speziell bei Elektronen ist es nicht möglich, einen Strahl zu erzeugen, in dem die Teilchen einen genau bestimmten Ort (z.B. Durchgangsort durch eine Lochblende mit festgelegter Öffnung) und eine genau bestimmte Geschwindigkeit haben. Werner Heisenberg formulierte die Gegebenheiten mathematisch in den **Unschärferelationen** (hier in der nicht-statistischen Formulierung):

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq h, \quad \Delta E \cdot \Delta t \geq h$$

Solche Gesetze schränken die Genauigkeit der Berechenbarkeit des Ablaufs von Naturvorgängen ein. Vor allem aber werden die oben gemachten Überlegungen für $t_2 = 0$ und $s_2 = 0$ bei einem Lichtquant wieder relativiert.

Heisenberg (1901-1076) fiel an der Abschlussprüfung in Physik fast durch. Zusammen mit Max Born und Pascual Jordan entwickelte er 1926 die Quantentheorie (heute Quantenmechanik). 1927 stellte er die Unschärferelation auf. 1932 erhielt er den Nobelpreis. Ein Beitrag stammt auch von Schrödinger (Wellenmechanik), der 1933 den Nobelpreis erhielt.

Schon Immanuel Kant hat von der philosophischen Seite her gefolgert, dass ein Subjekt nie ganz Objekt der Erkenntnis sein kann. Objektive Erkenntnis ist immer nur in einem eingeschränkten Rahmen von Voraussetzungen und Begriffen möglich. Entfernt man den Rahmen, so fällt man ins Bodenlose. Kant unterscheidet zwischen „meiner Welt“ , der subjektiv wahrgenommenen Welt also, und „der Welt an sich“, der so gedachten objektiven Welt, die in letzter Konsequenz sich der Wahrnehmung immer entzieht. Kant zeigt so die **Grenzen der Erkenntnis**. Heisenberg hat nun Grenzen der Erkenntnis in der Mikrowelt der physikalisch messbaren Grössen mit einem mathematisch formulierten Gesetz sichtbat gemacht. Damit werden diese Grössen als gut gemeinte Begriffsbildungen entlarvt, deren Sinnhaftigkeit bei genauerem Studium an Grenzen stösst.

3.5.3 Ausblick auf die Teilchenstruktur der Materie

Demokrit postulierte schon in der Antike, dass sich die Materie aus Atomen (unteilbaren Teilchen) zusammensetzt.
Dalton (bekannt als der erste Chemiker, Bierbrauer) fand das Gesetz der konstanten und multiplen Proportionen, was auf kleinste Einheiten schliessen lässt.
1885 entdeckte der Gymnasiallehrer **Balmer** aus Basel die Balmer–Serie (Spektrallinienserie im Wasserstoff). Damit beginnt die **Atomphysik**.
1909 entdeckte Ernest **Rutherford** den Atomkern aufgrund von Streuexperimenten. Sein Atommodell hat die Struktur eines Planetensystems (Kern, kreisende Elektronen).

Nach Niels **Bohr** (ca. 1913) ist die nächste Verfeinerung des Atommodells benannt. In ihm können sich die Elektronen nur auf bestimmten Bahnen bewegen, die eine sogenannte „Quantenbedingung“ erfüllen (**Quanten** sind kleinste Einheiten). Bei stehenden Elektronenwellen ist der Bahnumfang ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge. Man spricht schon von der Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens, die zeitlich nicht ändert. Wegen der Unschärferelation verliert das Modell für kleine Bahnen aber den Sinn.
In der nächsten Verfeinerung operiert man mit dem Begriff des Orbitals. Ein Bereich mit hoher Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons heisst Orbital $\leadsto$ **Orbitalmodell**.

In der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts ist klar geworten, dass die Atome eine innere Struktur besitzen. Man hat dann nach und nach entdeckt, dass die Teilchen, welche diese innere Struktur ausmachen (z.B. Kern: Protonen und Neutronen) wieder eine innere Struktur haben. Auf diese Weise gelangt man zu den Elementarteilchen, welche man sich heute wiederum aus den Quarks aufgebaut denkt. Das Atom, das Unteilbare, ist also teilbar geworden — zum Nutzen und zum Schaden der Menschen, wie man auch aus den nie endenden Energiediskussionen weiss.

3.5.4 Ausblick auf die Kosmologie

Stand um die Jahrhundertwende

Heute wissen wir aus den Beobachtungen und ihren plausibelsten Erklärungshypothesen auf der Grundlage der Physik und der Mathematik sehr viel über das für uns vorläufig unerreichbar ferne Weltall. Die wichtigsten Punkte seien hier zusammengefasst:

1. Es gibt noch andere Sonnensysteme, die Planeten besitzen. Wir sind nicht die einzigen.

2. Sterne oder Sonnen haben eine beschränkte Lebensdauer. Sie haben eine Geburt aus einer Gaswolke und später einmal einen Tod als weisser Zwerg, Neutronenstern oder als schwarzes Loch.

3. Unsere Sonne ist in der Klassifikation im Herzsprung–Russel–Diagramm (Spektraltyp–Temparatur–Beziehung) ein G5 –Stern im mittleren Lebensalter. Später wird sie sich einmal zu einem roten Riesen ausdehnen und dann auch die Erdbahn mitsamt der Erde schlucken, bevor die später dann kollabiert.

4. Viele Sterne als Gruppe können Sternhaufen diverser Art bilden. Sternhaufen bilden wiederum lokale Haufen und dann Galaxien diverser Art. Wir gehören zur Galaxie der Milchstrasse, die noch niemand von aussen gesehen hat. Dass die Milchstrasse eine Galaxie ist, wurde von Becker in Basel durch Abstandsvermessungen an sehr vielen Sternen festgestellt. Im Diagramm werden so Spiralarme sichtbar. Wir sind also in einer Spiralgalaxie zuhause.

5. Viele Galaxien bilden Galaxienhaufen. (Wir gehören zum Virgo–Haufen.) Man kann auch Superhaufen finden. Schliesslich bildet das Ganze den Kosmos.

6. Je entfernter eine Galaxie ist, desto stärker sind die Spektrallinien ins Rote verschoben. Mit Hilfe des Doppler–Effektes erklärt man die Rotverschiebung durch eine Fluchtbewegung. Die Fluchtgeschwindigkeit kann man berechnen. Das Hubbelsche Entfernungsgesetz sagt, dass die Fluchtgeschwindigkeit mit dem Abstand etwa proportional zunimmt. Grenzgeschwindigkeit ist aber die Lichtgeschwindigkeit. Auf diese Weise kommt man zum Begriff des Radius des Universums.

7. Rechnet man aus dem Radius des Universums und der Fluchtgeschwindigkeit c die Fluchtzeit zurück, so kommt man zum Begriff des Alters des Universums. An den Beginn stellt man den Urknall.

8. Die Frage, ob sich das Universum in alle Ewigkeit ausdehnen wird — oder ob es einmal wieder in sich zusammenfallen wird, letztlich also auch eine Frage nach der kinetischen und der potentiellen u.s.w. Energie — ist in den letzten Jahren beantwortet worden: Das Universumm wird sich immer ausdehnen und somit ausdünnen. (Doch inzwischen gibt es schon wieder eine Verfeinerung der Theorie die besagt, dass sich das Universum nach dem Ausdünnen wieder zusammenziehen wird und vermutlich dann wieder kollabiert.)

9. Ein Blick an das Firmament ist für uns immer ein Blick in die Vergangenheit. Denn das Licht, dass im Moment in unser Auge fällt, war während der Zeit $t = \frac{s}{c}$ unterwegs, kommt also aus der Vergangenheit. Diese Vergangenheit ist umso ferner, je weiter das Licht herkommt. Wäre es seit dem Urknall unterwgs, so müsste man also den Urknall sehen, und dies in allen Richtungen! Das aber geht leider nicht, weil damals die physikalischen Realitäten anders waren. Es gab insbesondere noch keine Sterne und Galaxien, die Licht ausgesendet haben, denn diese haben sich erst später gebildet. Will man diese Dinge verstehen, so muss man sich tiefer in die Theorie einarbeiten.

10. Die Frage, ob nicht neuere Messungen und feinere Beobachtungen uns irgendwann einmal zu einem verfeinerten Modell des Universums zwingen, ist von der Natur der Frage her eine immer ungelöste Frage. Denn wir kennen immer nur die Resultate der Messungen der Vergangenheit mit Bestimmtheit, nie aber die Resultate der Messungen der Zukunft.

11. Alle diese Einsichten sind nicht möglich aufgrund direkter Wahrnehmung. Es handelt sich immer um Deduktionen mit Hilfe der Mathematik aus Modellen resp. Axiomensystemen (Axiome sind hier physikalische Annahmen). Sie stimmen nur solange, wie auch die Mathematik stimmt und die verwendete Mathematik auch die richtige ist für den betrachteten Fall — und auch nur solange, als die Axiome gültig sind. Vor allem ist die Annahme, dass überall die gleichen Naturgesetze gelten, ein Axiom, das bisher nur auf der Erde resp. in der näheren Sonnenumgebung überprüfbar war.

12. Wer mehr über diese Dinge erfahren und auch mitreden will, der hat ein Studium vor sich.
    Jedoch ist kaum bestreitbar, dass mit dem Alter, der Grösse, der Masse und der künftigen Ausdünnungsdauer des Universums auch die Grenzen der makroskopischen physikalischen Welt sichtbar gemacht sind. Auch hier stellt sich schliesslich die Frage der Sinnhaftigkeit der Begriffsbildungen des Mikrokosmos bei der Anwendung auf den Makrokosmos.

Paradoxien und Lösungsvorschläge

Nimmt man an, das Weltall sei in jede Richtung unendlich und die Sterne ewig, so sieht man sich sehr rasch mit fürchterlichen Paradoxien konfrontiert. Dies bleibt auch so, wenn man die gemachten Grundannahmen nur zum Teil einschränkt.

1. **Das Paradoxon von Johannes Kepler und Willhelm Olbers:** Nimmt man an, das Weltall sei in jede Richtung unendlich und die Sterne ewig, so müsste man in jeder beliebigen Richtung am Himmel einmal auf einen Stern treffen. Summiert man die so entstehende Helligkeit auf, so müsste der Nachthimmel in jedem Punkt mindestens so hell erscheinen wie die Sonne am Tag. Das stellen wir aber nicht fest.

2. **Das Paradoxon von Isaac Newton:** Gäbe es im Weltall seit ewig unendlich viele Sterne und daher unendlich viele Massen, so würden wegen diesen Massen bei uns unendlich grosse Anziehungskräfte resultieren. Alles würde zerrissen! Das stellen wir eben nicht fest.

3. **Das Paradoxon von Ernst Mach:** Erklärt man das Trägheitsgesetz durch die Massen ferner Sterne und Galaxien, so würden bei unendlich vielen Sternen die Trägheitskräfte unendlich. Es gäbe keine Bewegung. Alles stünde still! Das stellen wir auch nicht fest.

4. **Das Paradoxon von Lichtgeschwindigkeit, Wellenlänge und Zeit:** Bisher konnten durch Messung keine Wellenlängen über einer gewissen grössten Länge gefunden werden. Man müsste daher annehmen, dass die Wellenlängen beschränkt sind. Wenn es so eine grösste Wellenlänge gibt, gibt es wegen $c = const. = \dfrac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \nu$ auch eine grösste Zeit T und daher eine kleinste Frequenz ν, in Widerspruch zur Ewigkeit der Zeit in beide Richtungen.

5. **Der Lösungsvorschlag von Edgar Allan Poe:** (Poe war auch Kosmologe, nicht nur Schriftsteller.) Obige Paradoxien sind entschäfbar, wenn man annimmt, dass das Alter des Weltalls nicht unendlich ist. Wir gelangen so zur Idee des Urknalls.

6. **Der Lösungsvorschlag von Bernhard Riemann:** Eine wesentliche Entdeckung des 19. Jahrhunderts war, dass es verschiedene Geometrien gibt. Dass unsere Welt nach der euklidschen Geometrie funktioniert, ist keine Tatsache, sondern bloss eine Annahme. Es könnte auch anders sein. Der vierdimensionale Raum (inkl. Zeit)

könnte gekrümmt sein (z.B. analog einer Kugeloberfläche). Der Raum könnte daher endlich sein, gleichwohl aber unbegrenzt.

7. **Der Lösungsvorschlag von David Hilbert und Albert Einstein:** Diese hatten es geschafft, eine Formel zu berechnen, die den gekrümmten Raum beschreibt. Die Krümmung ist dabei eine Folge der Massenverteilung, welche jedoch nur durch Messung gefunden werden kann. Heute ist man aufgrund der Kenntnisse der Ansicht, dass der Raum sehr wenig gekrümmt ist.

8. **Der Lösungsvorschlag von Schwarzschild:** Der Raum könnte „verschlungen“, d.h. die Krümmung nicht überall gleich sein.

9. **Der Lösungsvorschlag von Luminet und Jeff Weeks:** Der vierdimensionale Raum könnte „sechsfach verschlungen“ sein. So wie man einen Torus (Ring) aus Papier durch vorausgehendes Verkleben zu einer Röhre und nachgängiges Verkleben zu einem Ring gewinnen kann, d.h. durch zweimaliges Verkleben, müsste man hier sechsmal verkleben. Statt einmal zu verkleben kann man auch am Papierende je einen Spiegel, also zwei Spiegel anbringen. Man erhält so als Bewohner auf dem Papier ein analoges Bild. Bei sechsmaligem Verkleben führt das zu sechs Achsen mit je zwei Spiegeln, also zu zwölf Flächen. Das Modell dazu in der Dimension drei ist der Dodekaeder(!).

Dem Architekten sollte nun die folgende Frage sehr wichtig sein: Wie tangieren diese Weltsichten bewusst oder unbewusst die Architektur? — Eines kann der Architekt sicher nie, nämlich aus der Realität austreten. Er ist immer irgendwie ein Kind seiner Zeit, tangiert von den Weltbildern, die zu seiner Zeit gehören.

Zentral im aktuellen Weltbild ist die Erkenntnis und die Bezifferbarkeit der Grenzen des physikalischen Makro– und auch des Mikrokosmos vor dem Hintergrund der bereits abgesteckten Grenzen der Erkenntnis und der Begrifflichkeit (im Vergleich zu den „Chiffern“ Jaspers). Dabei mutet es seltsam an, des gerade jetzt, in dieser unseren Zeit, auch die Grenzen des Menschen auf dem Planeten Erde ins Scheinwerferlicht der Aktualität treten: Bewusst geworden sind ebenso die ökologischen Grenzen, die Grenzen der Verdreckung, der Ernährbarkeit, der Reserven, des Wohlstandes, des Wachstums, die Grenzen der Abgrenzbarkeit diverser Kulturen, und die Grenzen der Beschränkbarkeit von Konflikten vor dem Abgrund zur totalen Vernichtung und so fort.

Neuere Erkenntnisse (Februar 2003) finden sich auf:

http://www.rowicus.ch/Wir/News/Kosmologie.pdf oder

http://map.gsfc.nasa.gov/

3.6 Rückblick auf die Ursprünge mathematischer Begriffsbildungen

Man kann sich nun rückblickend fragen, wie der Mensch denn dazu gekommen sein mag, überhaupt mathematische Begriffe wie Zahlen, oder geometrische Objekte, zu bilden. Sicher ist die Entwicklungsstufe solcher Begriffsbildungen kulturabhängig. Jedoch kennen wir vermutlich keine Kultur, die keinen Ansatz etwa zum Zahlbegriff entwickelt hat, obwohl je nach Nutzen der beobachtbare Fortschritt gross oder klein ist. Am Polarkreis z.B., wo die Menschen im ständigen Kampf gegen Kälte und Eis nur wenige Dinge ansammeln konnten und immer nur wenige Tiere zum Essen gejagt hatten, denn viele konnten sie nicht schleppen, kennt man teils in den Sprachen nur Ausdrücke für die ersten Zahlen. Weitere, grössere Zahlen waren ja nutzlos. In unseren Breiten dagegen war es nützlich, wenn auch vorerst nur theoretischer Art, sogar unendliche Mächtigkeiten zu denken und damit zu arbeiten. Der Mensch hat also die mathematischen Begriffe bedarfsabhängig entwickelt.

Es ist gut vorstellbar — und aus Plausibilitätsgründen auch zu vermuten, dass der Mensch die mathematischen Grundbegriffe vorerst aus der Wahrnehmung abgeleitet hat. Geometrische Grundgebilde wie Punkt, Gerade, Kreis, Ebene, Raum beruhen aus dieser Sicht auf dem Gesichtssinn und der Fähigkeit der Bewegung, des Durchschreiten des Raumes und der daraus folgenden Urerfahrungen. Symmetrie hätte daher seine begrifflichen Wurzeln im Gleichgewichtssinn sowie in der durch den Gesichtssinn gegebenen Fähigkeit zum Vergleich. Zahlen wiederum haben in dieser Sichtweise ihren Geburtsort im Rhythmus, z.B. gegeben durch die Atmung oder den Herzschlag. Andererseits vielleich auch im Gesichtssinn: Infolge der Fähigkeit zur Unterscheidung von Objekten, also infolge der Urteilsfähigkeit, oder infolge der Fähigkeit zur Zusammenfassung, zum „Zusammensehen“ von Objekten oder auch in der Fähigkeit zur abfolgeartigen Identifikation von Dingen. Historisch gesehen mag der Prozess der Teilung einer Einheit, oder einer Sache, zu den natürlichen Zahlen geführt haben bevor der Prozess des ständigen Anreihens oder Weiterschreitens zentral wurde, wie etwa bei Perlen auf einer Schnur ohne Ende. Das kann die späte Entdeckung der Null als Zahl erklären. Teilen ist zudem moralischer als anhäufen.

Jedoch der Schritt vom prozesshaft durch zählen gewonnenen Unendlichen, der Schritt also vom Unendlichen von der Art der natürlichen Zahlen zum Unendlichen hin von der Art der Mächtigkeit der reellen Zahlen zwischen 0 und 1, kann nicht aus der endlichen materiellen physikalischen Welt begründet werden, denn diese bleibt immer endlich. Unendliche Mächtigkeiten verschiedener, unvergleichbarer Stufen zu erkennen wie etwa die erwähnten natürlichen Zahlen oder reellen Intervalle, bedarf neu des Willens zur Abstraktion, zur Bildung neuer Begriffe, aufgrund eines reifen Urteils. Ebenso reicht die Hoffnung ins Unendliche, wenigstens zeitlich. Ähnlich verhält es sich mit unendlich ausgedehnten Gebilden in der Geometrie (Geraden, Ebenen u.s.w.) und unendlich fernen Gebilden in der projektiven Geometrie. Wille, Urteil und Modell mögen in der endlichen Welt gereift sein, doch reicht die Erkenntnis der verschiedenen Unendlichkeiten dann durch den Prozess der Abstraktion über diese endliche Welt hinaus in eine andere, nicht mehr durch das Endliche abschliessend begründbare Begriffswelt, die daher keine materielle mehr sein kann. Man mag sie, sofern man will, eine Welt der geistigen Objekte oder Realitäten nennen. Durch den Tatbeweis steht jedoch fest, dass der Mensch durch Abstraktion den Sprung in eine höhere Organisationsform schafft, die in der materiellen Wirklichkeit nach heutigem Wissensstand keine physikalische Entsprechnung mehr findet. Oder doch? Und wenn ja, dann wo?

Neugierig machen einem diese Fragen allemal, und staunen können wir über die Resultate. Wir erfahren hier etwas über die Grenzen unserer Erkenntnismöglichkeiten, wir schreiten, doch noch halbwegs begreifend, ins „Umgreifende“. Weiter kommen wir dort nur, wenn wir uns keine Bilder mehr machen, die ja immer aus der materiellen, physikalischen Erfahrungswert entlehnte Bilder sind; wenn wir also abstrakt, abstrahiert vom Bildhaften, nach unseren Möglichkeiten nur noch formal, weiterschreiten im Vertrauen auf das schon errichtete Fundament...

ENDE CRASH–KURS

Kapitel 4

„All in one“— Aufbau — Ausbau — Anhang

4.1 Wie weiter?

Diese Materialiensammlung oder Zusammenfassung einzelner Themenbereiche wird bei Gelegenheit erweitert oder engänzt. Wann das stattfinden wird, hängt von den zeitlichen Möglichkeiten und den äusseren Umständen ab, welche sich im Moment weder voraussehen noch wirksam steuern lassen. Dasselbe gilt für etwaige Korrekturen am Text. Bis dann gilt der Grundsatz:

Das Studium findet auf der Grundlage des Lehrmittels statt.

Fremde Zusammenfassungen sind auch ein „Ent-Leer“– und „Stopfmittel“.

Weitere beplante Teile: In Arbeit — jedoch nicht zuoberst auf dem Workload-Haufen!

4.2 Anhang

Tabelle siehe nächste Seite.

Beziehung zwischen Mathematik (inneres Gedankenmodell) und Physik (wahrnehmbare äussere Realität)

<====> **Analogie** <====>

Deduktion, logische Kausalität

Modell	<===>	**Physikalische Realität**
Maßzahlen	<===>	Zustand der Messinstrumente Angezeigtes in den Voraussetzungen
$U = R * I$, Parallelschaltung	Beispiel	
$U = R_1 \cdot I_1 = R_2 * I_2 = R_{tot} * I_{tot}$	<===>	Experimenteller Befund: Formel für die Parallelschaltung
Summe der $I_k = 0$ in Knoten (Kirchhoff)		Experimenteller Befund
$I_{tot} = I_1 + I_2$ $U = R_1 * I_1 = R_2 * I_2 = R_{tot} * (I_1 + I_2)$ $1/R_1 = I_1/U,\ 1/R_2 = I_2/U,\ 1/R_{tot} = (I_1+I_2)/U$ $1/R_{tot} = 1/R1+1/R2$		
Logische Deduktion oder logische Kausalität (Implikation)	<===> <===>	Phänomenologische Deduktion oder phänomenologische Kausalität
Resultat in Zahlen	<===>	Zustand der Messinstrumente, Anzeigewerte

Phänomenologische (qualitative) Kausalität, Induktion

<====> **Analogie** <====>

Ende