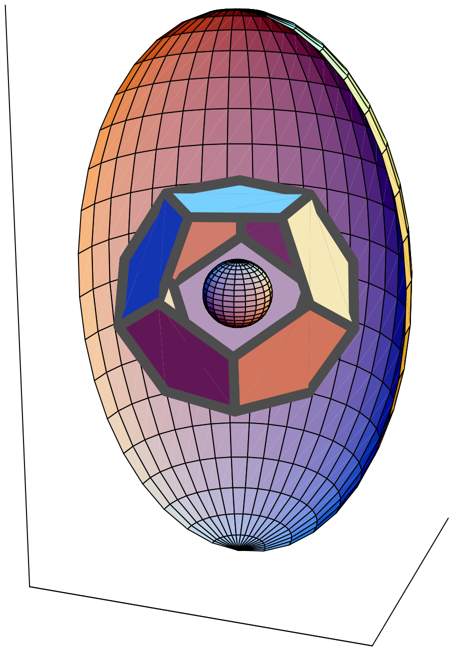
Script ◇ Math ◇ Ing

◇ Algebra ◇ Algèbre ◇

kurz & bündig ◇ concis



Scripta bilingua

von

Rolf Wirz

Berner Fachhochschule BFH ◇ TI und AHB

V.2.26.12a d/f / 24. Mai 2012 **!Draft! Deutsche Version!**

WIR/NeXT/WIN98/ XP /1998–2007/.../KursAlg.tex

Produziert mit LaTeX/PCTEX auf NeXT/ WIN98/ XP.
Einige Graphiken sind auch mit *Mathematica* entstanden.

!Draft! Deutsche Version, Formatierung nicht kontrolliert! Gebrauch auf eigene Verantwortung!

Je mathematischer und wirkungsvoller eine Theorie ist, desto unanschaulicher ist sie. Die moderne Wissenschaft erkauft sich ihre Möglichkeit die Welt zu verändern — oft durch Verzicht auf die Anschaulichkeit der Beschreibung. . . .

Fleckenstein

Aktuelle Adresse des Autors (2007):

Rolf W. Wirz-Depierre
Prof. für Math.
Berner Fachhochschule (BFH), Dep. AHB und TI
Pestalozzistrasse 20
Büro B112 CH–3400 Burgdorf/BE
Tel. ++41 (0)34 426 42 30 / intern 230
Mail: Siehe http://rowicus.ch/Wir/indexTotalF.html unter „Koordinaten von R.W.“
Alt: Ingenieurschule Biel (HTL), Ing'schule des Kt. Bern, Fachhochschule ab 1997) // BFH HTA Biel // BFH TI //

!Draft! Deutsche Version

(Gebrauch auf eigene Verantwortung.)

Dieses Script ist mit LaTeX für den doppelsprachigen Unterricht programmiert worden. Dabei wurden alle französischsprachigen Textteile jeweils mit dem Aufruf einer Subroutine verbunden, um den Font Style *Italics* aufzurufen. Diese Subroutine ist hier modifiziert worden um den französischsprachiggen Text zu unterdrücken. Titel, Inhaltsverzeichnis und deutschsprachiger Text können so nicht sofort behandelt werden. Es wäre hier auch bei jedem Textstück ein Unterprogramm–Aufruf notwendig, was nur durch eine grösssere Arbeit zu erreichen ist. Dafür fehlt im Moment die Zeit.

Bei offensichtlich fehlenden kleinen Textteilen, unschönen oder missverständlichen Zeilenumbrüchen kann es sich um automatisch schwer auffindbare Programmierfehler handeln. In einem solchen Fall ist es ratsam, den doppelsprachigen Referenztext zu konsultieren. (Der Autor bittet in einem solchen Fall um eine Benachrichtigung und dankt dafür im voraus.)

Information erscheint nur in der deutschen Ausgabe.

Inhaltsverzeichnis • Table des matières

Kapitel • Chapitre 1

Organisatorisches – Quant à l'organisation

Kurze Übersicht

1. Organisation, Rahmen
2. Stoff
3. Ziel, Weg, Methoden, Feedback, Team
4. Übungen, Selbststudium
5. Lerntechnik, Arbeitstechnik, Selfmanagement
6. Rechte und Pflichten des Studenten und der Schule
7. Prinzipien, Grundsätze
8. Rechner, Computer, Mathematiksoftware
9. Semesterorganisation Mathematik (Anzahl Noten, Prüfungsreglement, Prüfungsplan, Prüfungsrahmen, erlaubte Unterlagen, formale Anforderungen, Benotungskriterien, Benotung der Übungen und Projekte, Arbeitsnachweismappe, Klassensprecher, Klassenbetreuer, Kopierchef, Sprechstunden)
10. Hilfsmittel (Bibliothek, Taschenrechner, Mathematiksoftware, Literatur)
11. Zeitplanung
12. Einführung: Über das Wesen der Mathematik
    (a) Beispielhafte Beweise
    (b) Wieso beweisen?
    (c) Modell und Wirklichkeit
    (d) Geschichtlicher Rahmen und Auftrag

Kapitel • Chapitre 2

Aussagenlogik – Logique des propositions

2.1 Elementare Logik, Studium – Logique élémentaire, études

$\longrightarrow$ Grundlage und Sprache der Mathematik, Denkschule. (Repetition!)

Lit. fürs Selbststudium: Vgl. spezielle Literaturliste : Voir liste de littérature spéciale.

`http://www.hta-bi.bfh.ch/~wir/Scripts/Teil2logikd.pdf`
`http://www.hta-bi.bfh.ch/~wir/Scripts/Teil2logikf.pdf`

2.2 Wichtig – Important

1. **Aussage:** (In Math..) Sprachliches Gebilde, das Wahrheit oder Unwahrheit ausdrückt. $(2 = 2,\ 5 \in \mathbb{N})$

2. **Aussagenvariable:** Platzhalter für Aussage.

3. **Wahrheitswerte:** $\{f, w\}$, $\{f, t\}$, $\{0, 1\}$.

4. **Belegung:** Einer Menge von Aussagenvariablen zugeordneter Satz von Wahrheitswerten. $\longrightarrow$ Aussage. (Statt der Aussage wird direkt der Variablen der Wahrheitswert zugeordnet.)

5. **Zusammensetzung, Manipulation von Aussagen:** Durch Junktoren

2.3 Beispiele für Wahrheitstabellen – Exemples pour des tableaux de vérité

	A	$\neg A$
Nicht	0	1
	1	0
Negation		

Var	A	B	$A \wedge B$
$t(Var)$	0	0	0
Und	0	1	0
Konjunktion	1	0	0
	1	1	1

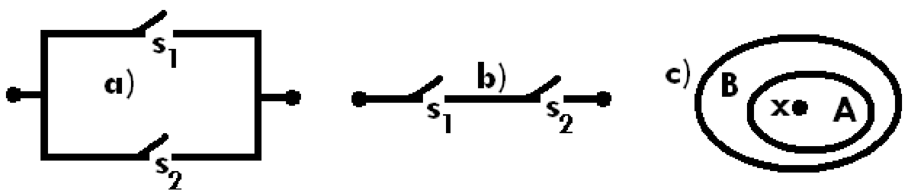
Var	A	B	$A \vee B$
$t(Var)$	0	0	0
Oder	0	1	1
Adjunktion	1	0	1
	1	1	1

Var	A	B	$A \dot{\vee} B$
$t(Var)$	0	0	0
exor	0	1	1
Exklusion	1	0	1
	1	1	0

Var	A	B	$A \Rightarrow B$
$t(Var)$	0	0	1
	0	1	1
Subjunktion	1	0	0
	1	1	1

Var	A	B	$A \Leftrightarrow B$
$t(Var)$	0	0	1
	0	1	0
Bijunktion	1	0	0
	1	1	1

Bsp.:



Parallelschaltung: Beispiel für $\vee$. Der Strom fliesst, wenn der Schalter s_1 oder s_2 geschlossen ist.

Serieschaltung: Beispiel für $\wedge$. Der Strom fliesst, wenn die Schalter s_1 und s_2 geschlossen sind.

Teilmengenbeziehung: Beispiel für $\Rightarrow$. Für $x \in A$ muss auch $x \in B$ wahr sein.

2.4 Aussageformen, Klammerungen – Formes propositionnelles, parenthèses

Bsp.: $(A \wedge B) \vee C \not\equiv A \wedge (B \vee C)$

- ⊘ **Wichtig:** Bei Klammerungen gilt die Prioritätenregelung
  $\neg$ vor $\wedge \ldots \vee \ldots \Rightarrow \ldots \Leftrightarrow \ldots \leadsto$ Linksassoziativität ...
- ⊘ **Aussageform:** Aussagevariablen oder Verknüpfung von solchen durch endlich viele Junktoren.

Probleme :

- ⊘ Herstellung der Wahrheitstabelle von Aussageformen.

⊘ Übersicht über alle 16 möglichen Verknüpfungen mit nur 2 Aussagevariablen. (Wahrheitsfunktionen mit 2 Variablen.)

$\longrightarrow$ **Bsp.:**

Var	A	B	$A f B$
$t(Var)$	0	0	0
Identisch	0	1	0
falsch	1	0	0
	1	1	0

Var	A	B	$A \downarrow B$
$t(Var)$	0	0	1
	0	1	0
Nicod	1	0	0
NOR	1	1	0

Var	A	B	$A w B$
$t(Var)$	0	0	1
Identisch	0	1	1
wahr	1	0	1
	1	1	1

Var	A	B	$A \uparrow B$
$t(Var)$	0	0	1
Scheffer–	0	1	1
strich	1	0	1
NAND	1	1	0

Reduktionssatz: Jede Wahrheitsfunktion $(X_1 \dots X_n) \longmapsto f((X_1 \dots X_n))$ lässt sich durch eine Aussageform darstellen, die nur die Verknüpfungen $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ enthält.

Théorème de réduction:

Illustration :

	X_1	X_2	$f(X_1, X_2)$
1.	0	0	1
2.	0	1	1
3.	1	0	1
4.	1	1	0

$f(X_1, X_2)$ wahr in den Fällen 1, 2, 3.
Fall 1 wahr, wenn $\neg X_1$ wahr und $\neg X_2$ wahr.
...

$\Rightarrow$ f wahr, wenn $(\neg X_1 \wedge \neg X_2) \vee (\neg X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge \neg X_2)$ wahr. Sonst falsch.

2.5 Spezielle Aussageformen – Des formes propositionnelles spéciales

Begriffe :

1. **Tautologie:** Identisch wahre Aussage.
   Beispiele:

1.1	$A \Rightarrow A$	1.2	$A \Rightarrow \neg\neg A$
2.1	$A \vee \neg A$	2.2	$\neg(A \wedge \neg A)$
3.1	$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$	3.2	$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
4.1	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg B \wedge \neg A$	4.2	$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg B \vee \neg A$
5.1	$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	5.2	$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
6.1	$A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$	6.2	$A \Leftrightarrow \neg(\neg A)$

Man beachte: Kommutativgesetz, Assoziativgesetz, Regeln von De Morgan, Distributivgesetz. Sind $P(X_1, \dots, X_n)$ Tautologie und $P_j(X_1, \dots, X_k)$ $j = 1, \dots, k$ beliebige Aussageformen, so ist

$(P_1(X_1, \ldots, X_k), \ldots, P_1(X_1, \ldots, X_k))$ wieder Tautologie.

2. $P(X_1, \ldots, X_n) \Leftrightarrow P(X_1, \ldots, X_n)$ Tautologie bedeutet
   $P(X_1, \ldots, X_n) \equiv P(X_1, \ldots, X_n)$ (äquivalent).
3. **Kontradiktion** (Widerspruch): Aussageform, die bei jeder Belegung falsch ist.
4. P impliziert Q: $P \Rightarrow Q$ ist Tautologie (immer wahre Implikation)
5. $Q \Rightarrow P$ Konversion von $P \Rightarrow Q$.
6. $\neg P \Rightarrow \neg Q$ Inversion von $P \Rightarrow Q$.
7. $\neg Q \Rightarrow \neg P$ Kontraposition von $P \Rightarrow Q$.

$$(\neg Q \Rightarrow \neg P \equiv P \Rightarrow Q.)$$

2.6 Korrekter logischer Schluss – Conclusion logique correcte

$P_1, \ldots, P_n \vdash Q$ falls gilt $(P_1 \wedge \ldots \wedge P_n) \Rightarrow Q$ ist Tautologie .

Beispiele: $A, B \vdash ((A \wedge A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$, $(A \Rightarrow B \wedge A \Rightarrow C) \vdash (A \Rightarrow C)$.

2.7 Polnische Notation – Notation polonaise

$\longrightarrow$ **Klammerlose Schreibweise** von Lukasiewics .

$\wedge AB$ statt $A \wedge B$, $\vee AB$ statt $A \vee B$,
$\Rightarrow AB$ statt $A \Rightarrow B$, $\Leftrightarrow AB$ statt $A \Leftrightarrow B, \ldots$
Beispiele: $\Rightarrow A \Leftrightarrow \neg B \vee AC$ statt $A \Rightarrow ((\neg B) \Leftrightarrow (A \vee C))$.

2.8 Quantoren – Des quantificateurs

Aussagenlogik :
Aristotelische Aussagen der Form Subjekt, Prädikat, Objekt. .

Prädikatenlogik :
Innere Struktur der Aussagen massgebend .

$\longrightarrow$ Subjektvariablen, Prädikatenvariablen. . . . , Quantifizierungen.

Allquantor : $\forall$ oder $\bigwedge$ (für alle . . .)
Existenzquantor : $\exists$ oder $\bigvee$ (es gibt . . .)

Bsp.: Sei $M = \{x \in \mathbb{N} | x < 20\}$. $\exists_{x \in M} : x = 4$.

Durch „$\exists$“ wird die Aussage quantifiziert. x ist gebundene Subjektvariable.

2.9 Aussagenlogische Normalformen – Des formes normales de la logique propositionnelle

Seien : $H_j, j = 1, \ldots, n+m \rightsquigarrow$ Aussagevariablen .

Konjunktionsterm : $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg H_{n+1} \wedge \ldots \wedge \neg H_{n+m}$

Adjunktionsterm : $H_1 \vee H_2 \vee \ldots \vee H_n \vee \neg H_{n+1} \vee \ldots \vee \neg H_{n+m}$

Enthaltensein von Termen: Term Teil eines andern.

Konjunktive Normalform (kNF) :

$$K = A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k = \bigwedge_{j=1}^{k} A_j$$

(A_j: Alternativterme, keiner im andern enthalten)

Adjunktive Normalform (aNF) : $A = K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_k = \bigvee_{j=1}^{k} K_j$ (K_j: Konjunktionsterme, keiner im andern enthalten)

Entartete Fälle $K \equiv T,\ K \equiv F,\ A \equiv T,\ A \equiv F$
($T \equiv W$: Immer wahre Aussage; F: Immer falsche Aussage) .

Einfacher Term: Aussage oder Aussagenvariable.

Negationsterm: $\neg$ einfacher Term $\rightsquigarrow$ Sonst Affirmationsterm.

Bsp.: $(A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge C) \rightsquigarrow$ aNF

Existenzsatz: Zu jeder Aussageform existiert eine äquivalente aNF und kNf.

Vollständige Normalform: In jedem Term kommt jede Variable genau einmal vor.

Erzeugung der Vollständigkeit: Fehlende Variablen ergänzen.

Bsp.: X_k fehlt in A_i

$\rightsquigarrow$ $A_i \equiv A_i \vee F \equiv A_i \vee (X_k \wedge \neg X_k) \equiv (A_i \vee X_k) \wedge (A_i \vee \neg X_k)$.
$\rightsquigarrow$ A_i vorhanden .

Geordnete vollständige Normalform :
Ordne die Variablen nach den Nummern der Indices, stelle Negationsterme nach den Affirmationstermen.

Eindeutigkeitssatz: Zu jeder Aussageform existiert *genau* eine äquivalente geordnete vollständige aNF und kNf.

2.10 Einige Resultate – Quelques résultats

1. Die Aussagenlogik ist **vollständig**. D.h. alle ihre wahren Sätze sind in endlichen Beweisketten darin herleitbar.
2. Die höhere Prädikatenlogik ist **nicht mehr** vollständig.
3. Die Aussagenlogik ist **widerspruchsfrei**.
4. Die Aussagenlogik genügt für die Maschinenverarbeitung.
5. In der Prädikatenlogik gibt es wahre Sätze, die nicht durch Maschinenverarbeitung bewiesen werden können.

2.11 Literatur – Littérature

`http://www.hta-bi.bfh.ch/~wir/Scripts/Teil4Bool.pdf`

`http://www.hta-bi.bfh.ch/~wir/Scripts/Scripts.html ......`
`http://www.hta-bi.bfh.ch/~wir/Scripts/Teil2logikd.pdf`
`http://www.hta-bi.bfh.ch/~wir/Scripts/Teil2logikf.pdf`

Kapitel • Chapitre 3

Mengen, Relationen, Abbildungen – Ensembles, relations et applications

http://www.hta-bi.bfh.ch/~wir/Scripts/Teil4Bool.pdf

3.1 Mengen – Ensembles

3.1.1 Definitionen – Des définitions

Menge nach Cantor: Wohldefinierte Ansammlung oder Auflistung von Objekten des Denkens (Elemente). $\rightsquigarrow$ „Naive Definition“. $\rightsquigarrow$ ” Définition naïve”.

Wie kann eine **Menge angegeben** werden? Durch Aufzählung der Elemente oder durch Angabe einer charakteristischen Eigenschaft (bei unendlichen Mengen!).

3.1.2 Bildung neuer Mengen – Constructions d'ensembles nouveaux

Begriffe – Notions

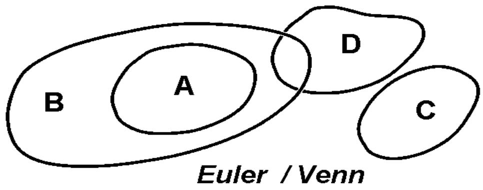
- **Grundmenge**
- **Leere Menge** $\{\,\}$, $\emptyset$
- **Antinomien:** (Widersprüchliche Mengenbildung)

  Z.B. sei M Menge , $R = \{M | M \in R \Leftrightarrow M \notin M\}$.
  Dabei gilt : $M \notin M$,
  Denn M ist Menge, also nicht Element.
  (R: Russels Menge.)

  $\rightsquigarrow$ Bsp.: In einem Dorf ist ein Barbier, der genau alle diejenigen rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Rasiert er sich selbst?

- **Mächtigkeit** einer Menge $|M|$: Anzahl Elemente, falls M endlich viele Elemente hat, $M = \infty$ falls M überendlich viele Elemente hat. Man unterscheidet dann verschiedene Stufen oder Typen von unendlich. Z.B. gilt: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^2| = \ldots$, vgl. Analysis–Script, Sektion „Reelle Zahlen und Folgen“.

⊘ **Euler– (Venn–) Diagramme**

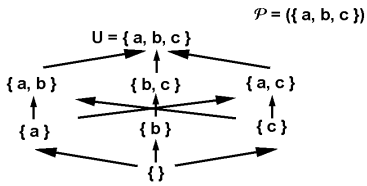


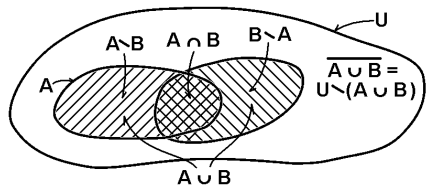
⊘ **Teilmengen, Obermengen**
$A \subseteq B$ ('=' zugelassen)) $\rightsquigarrow$ $A \subseteq B \iff \forall_{x\in A}: \ x \in B$
$A \subset B$ (echte Teilmenge) $\rightsquigarrow$ $A \subset B \iff A \subseteq B \ \wedge \ \exists_{x\in A}: \ x \notin B$

Gesetze $A \subseteq A$
$(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow (A \subseteq C)$
$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

⊘ **Potenzmenge**
$\mathcal{P}(M)$ = Menge aller Teilmengen von M .

$\rightsquigarrow$ Darstellbar durch **Hasse–Diagramme** .





3.1.3 Mengenverknüpfungen – Opérations de composition

Definitionen – Définitions

(Auf Aussagenlogik abgestützt .)

⊘ **Vereinigungen von Mengen**
$A \cup B = \{x \in G \mid x \in A \vee x \in B\}$, $\quad G$ Grundmenge

⊘ **Schnitt von Mengen**
$A \cap B = \{x \in G \mid x \in A \wedge x \in B\}$

⊘ A, B **disjunkt** $\Leftrightarrow A \cap B = \{\ \}$

⊘ **Relatives Komplement, Differenz**
$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$

⊘ **Absolutes Komplement** $\bar{A} = \{x \in G \mid x \notin A\}$

⊘ **Symmetrische Differenz** $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Einige Gesetze ($\rightsquigarrow$ Skizze machen!)

⊘ **Idempotenz** $A \cup A = A, \ A \cap A = A$

⊘ **Assoziativität** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

⊘ **Kommutativität** $A \cup B = B \cup A, \ A \cap B = B \cap A$

- $\oslash$ **Distributivität** $A \cup (B \cap C) = ((A \cup B) \cap (A \cup C))$,
  $A \cap (B \cup C) = ((A \cap B) \cup (A \cap C))$
- $\oslash$ **Identität** $A \cup \{\} = A,\ \ A \cap \{\} = \{\},\ \ A \cup G = G,\ \ A \cap G = A$
- $\oslash$ **Komplement** $\bar{A} \cup A = G,\ \ A \cap \bar{A} = \{\},\ \ \overline{\{\}} = G,\ \ \bar{G} = \{\}$
- $\oslash$ **De Morgan:** $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B},\ \ \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
- $\oslash$ **Mächtigkeit** $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$,
  $|A \cup B| = |A| + |B|$, falls A, B disjunkt .
- $\oslash$ $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|} \leadsto$ Vgl. Kombinatorik.

Problem:
Wo gibt es mehr Punkte: Auf einer Geraden oder in einem Kreis? Was bleibt noch von der reellen Zahlengerade, wenn man die natürlichen Zahlen wegnimmt? ... Theorie der transfiniten Kartinalzahlen oder Mächtgkeiten!

3.2 Relationen – Relations

3.2.1 Definitionen – Définitions

Geordnete Paare Reihenfolge wesentlich. :

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Konsequenz: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow (a = c \wedge b = d)$

Produktemenge von A, B
$A \times B = \{\text{geordnete Paare }\} = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$

Es gilt: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
$\leadsto$ $A \times A = A^2,\ \ |A \times B| = |A| \cdot |B|,\ \ \text{allgemein}\ \ A \times B \neq B \times A$

Verallgemeinerung $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n := (A_1 \times \ldots \times A_{n-1}) \times A_n)$

Bsp.: $n = 3$: $A \times B \times C = (A \times B) \times C) = \{\{a, b\}\{\{a, b\}, c\}\}$
(1. Element $\{a, b\}$ schon Paar.

Wahrheitsmengen

Sei $P = P(X_1, \ldots, X_n)$ Aussageform ,

$$U = \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \ldots \times \{0, 1\}$$

(0, 1 $\leadsto$ Wahrheitswerte, n Faktoren) ,

$$\tau(P) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in U | P \ \text{ wahr für die Belegung } (x_1, \ldots, x_n)\}$$

$\leadsto$ $\tau(P_1 \wedge P_2) = \tau(P_1) \cap \tau(P_2),\quad \tau(P_1 \vee P_2) = \tau(P_1) \cup \tau(P_2),\quad \tau(\neg P) = \overline{\tau(P)}$ etc..

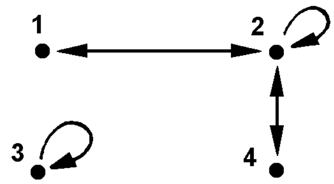
Zweistellige Relation $\mathcal{R}$

Teilmenge $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ (Paarmenge)

Symbol: $a \smile b \Leftrightarrow (a,b) \in \mathcal{R} \subseteq A \times B$, $\quad a \not\smile b \Leftrightarrow (a,b) \notin \mathcal{R}$, $(a,b) \in A\bar{\mathcal{R}}$

Bsp.: $\mathcal{R} = \{(1,2),(2,2),(2,4),(2,1),(3,3),(4,2)\} \in \{1,2,3,4\}^2$.

$\rightsquigarrow$ Darstellung durch **Pfeildiagramme**



Achtung :

$(3,3)$ ist isoliert

Bemerkung: Zur Bildung einer Teilmenge muss natürlich das Bildungsgesetz bekannt sein.

3.2.2 Spezielle Relationen – Relations spéciales

Die nachfolgenden Relationen sind durch die angegebenen logischen Aussagen definiert, die als wahr angenommen werden:

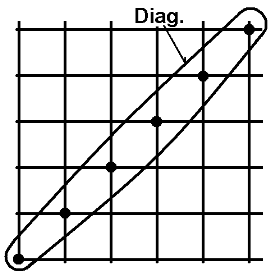
- ⊘ **Identitäts– oder Diagonalrelation:** $\mathcal{R} = \triangle_A = \{(a,a) \mid a \in A\}$
- ⊘ **Inverse Relation:** $\mathcal{R}^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in \mathcal{R}\} \rightsquigarrow \quad |\mathcal{R}^{-1}| = |\mathcal{R}|$
- ⊘ **Involution:** $f = f^{-1},\ f \neq \triangle$.
- ⊘ **Reflexive Relation:**
  $\triangle_A \subseteq \mathcal{R}, \qquad \mathcal{R}$ reflexiv $\Leftrightarrow \forall_{a\in A} : (a,a) \in \mathcal{R} \subseteq A^2$
- ⊘ **Antireflexive Relation:** $\forall_{a\in A} : (a,a) \notin \mathcal{R}$
- ⊘ **Symmetrische Relation:** $\forall_{(a,b)\in\mathcal{R}} : (a,b) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b,a) \in \mathcal{R}$
- ⊘ **Streng antisymmetrische Relation:**
  $\forall_{(a,b)\in\mathcal{R}} : (a,b) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b,a) \notin \mathcal{R}$
- ⊘ **Milde antisymmetrische Relation:**
  $\forall_{(a,b)\in\mathcal{R}} : (a,b) \in \mathcal{R} \ \wedge \ (b,a) \in \mathcal{R} \Rightarrow a = b$
- ⊘ **Asymmetrische Relation:** $\forall_{(a,b)\in\mathcal{R}} : (a,b) \in \mathcal{R} \ \dot{\vee} \ (b,a) \in \mathcal{R}$
- ⊘ **Transitive Relation:** $\forall_{(a,b)\in\mathcal{R}} : ((a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,c) \in \mathcal{R}) \Rightarrow (a,c) \in \mathcal{R}$
- ⊘ **Äquivalenzrelation:**
  Reflexiv, symmetrisch und transitiv.

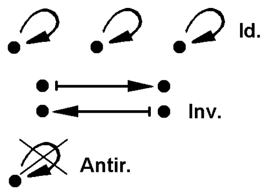
  $\rightsquigarrow$ Führt zu Klasseneinteilung: **Äquivalenzklassen** .
- ⊘ **Totale Relation:** $\forall_{(a,b)\in\mathcal{R}} : ((a,b) \in \mathcal{R} \ \vee \ (b,a) \in \mathcal{R})$
- ⊘ **Teilordnungsrelation:**
  Reflexiv, antisymmetrisch und transitiv.
- ⊘ **Ordnungsrelation (mild):**
  Reflexiv, antisymmetrisch, transitiv und total.

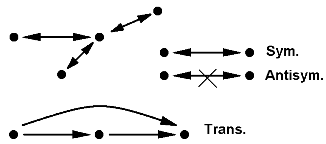
- ⊘ **Strikte Halbordnung:**
  Asymmetrisch und transitiv.

- ⊘ **Strenge Ordnungsrelation:**
  Antireflexiv, streng antisymmetrisch und transitiv.

- ⊘ **Lexikographische Ordnung:**
  Nach dem Ordnungsprinzip des Alphabeths.







Man sieht sofort:

Satz: **Vor.:**

$\mathcal{R}$ streng antisymmetrisch und total

Beh.:

$\mathcal{R}$ asymmetrisch

Satz: **Vor.:**

$\mathcal{R}$ Teilordnung auf M
$SR = \{(x,y) \in M \times M \mid ((x,y) \in \mathcal{R}) \ \wedge \ (x \neq y)\}$

Beh.:

SR ist strikte Teilordnung (Halbordnung)

Beweis:

$\mathcal{R}$ Teilordnung $\leadsto$ SR antisymmetrisch

Problem: SR strikt? D.h. SR asymmetrisch, transitiv?

Nach Definition von SR:

$SR = \{(x,y) \in M \times M \mid ((x,y) \in \mathcal{R}) \wedge (x \neq y)\} \leadsto ((x,y) \in SR \wedge (y,z) \in SR) \Rightarrow ((x \neq y) \wedge (y \neq z))$

$\leadsto$ Problem: $(x \neq z)$? ($\leadsto$ $(x,z) \in SR$?)

Sei $x = z \leadsto (SR \ni (x,y) = (z,y)) \ \wedge \ (SR \ni (y,z) = (y,x))$
$\Rightarrow ((x,y) \in SR \subseteq \mathcal{R}^2 \ \wedge \ (y,x) \in SR \subseteq \mathcal{R}^2) \ \Rightarrow \ x = y \ \Rightarrow \ y = x = z \ \Rightarrow \ ((x,y) \notin SR \ \wedge \ (y,z) \notin SR)$
$\leadsto$ Widerspruch! ☺

3.2.3 Partitionen – Partitions

Partition P_M einer Menge M: $\rightsquigarrow$ Menge, Aufteilung von M in paarweise disjunkte Teilmengen:

$\rightsquigarrow$:

$$P_M = \{A_1, \ldots, A_n\}, \quad A_i \cup A_j = \{\} \ (i \neq j), \quad A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = M.$$

Durch eine Partition wird eine Menge vollständig in disjunkte Teilmengen oder **Klassen von äquivalenten Elementen** unterteilt: **Die Äquivalenzklassen**.

Definition: x **äquivalent** a_i:
$x \sim a_i :\Leftrightarrow \{x \in A_i \wedge a_i \in A_i\}$

Andererseits ist durch eine Partition immer eine Äquivalenzrelation gegeben. :

$$A_i = \{x \in M | x \sim a_i \wedge a_i \in M fix\}$$

Achtung: Partition nicht verwechseln mit Potenzmenge
Es gilt : $|P_M| \leq |M|$.

Sei P_M die zur Äquivalenzrelation $\mathcal{R}$ ($\mathcal{R} \subseteq M^2$) gehörige Partition.

P_M heisst dann auch **Quotientenmenge** von M nach $\mathcal{R}$: $P_M := {}^{M}/_{R}$

3.3 Abbildungen und Funktionen – Applications et fonctions

3.3.1 Definitionen – Définitions

Linkstotale Relation :

$\mathcal{R} \subseteq D \times M$ **linkstotal:** $\Leftrightarrow$ $\forall_{a \in D} \exists_{b \in M} : (a, b) \in \mathcal{R} := A$

$\mathcal{R} = A$ heisst dann **Abbildung**, a heisst **Urbild**, b heisst **Bild**.

D ist der **Definitionsbereich (Urbildbereich)** ,
M ist der **Wertevorrat** ,

$W = \{b \in M | \exists_{a \in D} : (a, b) \in A\} \rightsquigarrow$ **Wertebereich (Bildbereich)** ,

Symbol: $a \mapsto b$ für $(a, b) \in A$.

Umkehrabbildung : $A^{-1} = \{(b, a) | (a, b) \in A\}$

Funktion : Rechtseindeutige Abbildung .

(D. h. : $(a, b_1) \in A \wedge (a, b_2) \in A \Rightarrow b_1 = b_2$).

Ein Urbild hat also immer nur ein einziges Bild, niemals zwei verschiedene Bilder.

Symbol:
Sei die Abbildung $A = F$ Funktion .
$\leadsto$ Für $(x, y \in F = A$ schreiben wir:

$$f : x \mapsto y = f(x) \text{ oder } a \stackrel{f}{\longmapsto} b = f(a).$$

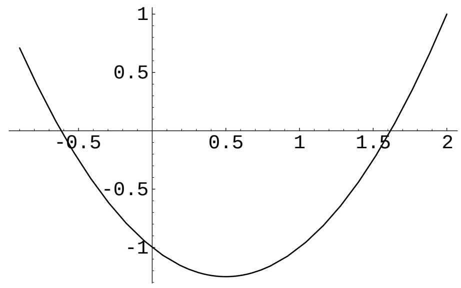
(f nennen wir kurz 'Funktion')

Achtung F ist Relationsmenge. F^{-1} muss nicht wieder Funktion sein.

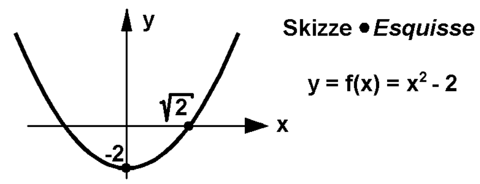
Seien $D_f \subseteq \mathbb{R}, M \subseteq \mathbb{R}$ (resp. $W_f \subseteq \mathbb{R}$),
Sei f Funktion oder Funktionsvorschrift .
$\leadsto$ $\{(x, y) | x \in D_f, y = f(x) \in W_f\}$ darstellbar in einem passenden Koordinatensystem .

Bsp.:

$f : x \longmapsto y = f(x) = x^2 - x - 1,$
$D_f = \mathbb{R},\ W_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1.25\}$



Die Menge der so gegebenen “geometrischen„ Punkte in einer solchen Darstellung nennen wir den **Graphen**.



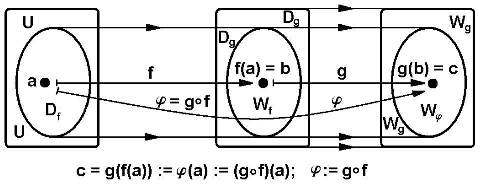
x	....	-3	-2	-1	0	-1	2	3	....
y = f(x)	....	7	2	-1	-2	-1	2	7	....

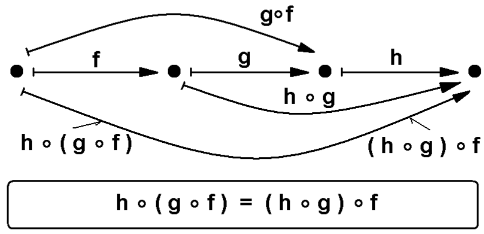
Graphen skizziert man schnell mit Hilfe von **Wertetabellen** .

3.3.2 Verketten, hintereinanderschalten von Funktionen – Composition de fonctions (produit de relation)

Verketten, Bijektion – Composition, bijection

Betrachte :





B ist das Bild der Restriktion von g auf W_f.

$$g(b) = c = g(f(a))$$

$\rightsquigarrow$ Neue Funktion φ definierbar :

$\varphi(a) := c = g(f(a))$ **(Verkettung)** , $\varphi(a) := (g \circ f)(a)$.

$\rightsquigarrow$ Name der Fkt. : $(g \circ f)$

Hinweis: Wir verwenden hier die „Nach–Links–Schreibweise“ $(g \circ f)(a)$ analog zu $g(f(a))$. Dagegen ist in der Literatur auch die „Nach–Rechts–Schreibweise“ $(f \circ g)(a) = g(f(a))$ in Gebrauch, die sich an die oft von links nach rechts gezeichneten Pfeile in Diagrammen anlehnt. Es spielt keine Rolle, welche Schriebweise man wählt. Man darf die beiden Varianten nur nicht mischen.

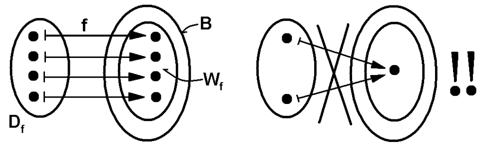
Es ist :
$w = h(z), \;\; z = g(y), \;\; y = f(z)$
$w = h(z) = h(g(y)) = h(g(f(x))) = (h(g \circ f)(x)) = (h \circ g)(f(x))$.
Daraus folgt die **Assoziativität von Abbildungen** .

Satz: **Vor.:** $W_f \subseteq D_g, \;\; W_g \subseteq D_h$

Beh.: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

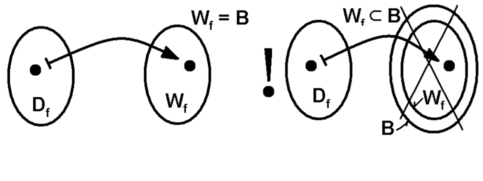
Definitionen: :

- $\oslash$ f **injektiv** :
  $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$



- $\oslash$ f **surjektiv auf** M :
  $f(D_f) = W_f = M$

  Wichtig:
  Surjektiv braucht man für die Definition der Umkehrabbildung f^{-1} auf M!



- $\oslash$ f **bijektiv** : f injektiv und surjektiv (ein–eindeutig) .

Wichtig: $\Rightarrow$ Bijektiv garantiert, dass f^{-1} wieder Funktion ist. .

Bemerkung:

Injektiv auf W_f bedeutet bijektiv.

Eigenschaften

1. $f^{-1} \circ f \equiv \triangle_{D_f}$, $f \circ^{-1} \equiv \triangle_{W_f}$
   (Identitäts– oder $\triangle$–Relation.)
2. $\triangle_{W_f} \circ f \equiv f \equiv f \circ \triangle_{D_f}$
3. $(f^{-1})^{-1} \equiv f$
4. f, g bij. $\Rightarrow \triangle_{W_f} \circ g \equiv g \equiv g \circ \triangle_{D_f}$
5. Allgemein ist : $f \circ g \not\equiv g \circ f$
   Es gibt Ausnahmen! !
6. $f : A \longmapsto B \wedge f : A \longmapsto B \wedge g \circ f \equiv \triangle_A \wedge f \circ g \equiv \triangle_B$
   $\Rightarrow f,\, f^{-1}$ existieren , $f^{-1} \equiv g,\, g^{-1} \equiv f$

Gleichmächtige Mengen – Ensembles de même puissance

Jetzt können wir neu genauer definieren:

Definition:

$$|A| = |B| \;\Leftrightarrow \exists_{(f\ bij.)} :\ A \overset{f}{\longmapsto} B$$

$$|A| < |B| \;\Leftrightarrow \exists_{(f\ surj.)\,\wedge\,(f\ \neg bij.)} :\ A \overset{f}{\longmapsto} B$$

Konsequenz:

$|A| = |B| \;\Rightarrow\; \exists_{Relation\ R} :\ R = \{(a,b) \mid (a \in A)\ \wedge\ (b \in B)\} \subseteq A \times B$ mit
$(\forall_{a \in A}\ \exists^!_{b \in B} :\ (a,b) \in R)\ \wedge\ (\forall_{b \in B}\ \exists^!_{a \in A} :\ (a,b) \in R)$

($\exists^! \equiv$ „Es gibt genau ein Element ...“)

Bemerkung:

Bei dieser Definition wird $\mathbb{N}$ nicht benutzt. Die Zahlen $\in \mathbb{N}$ können aber jetzt, gestützt auf diese Definition, umgekehrt als Mächtigkeiten (Kardinalzahlen) von endlichen Mengen gewonnen werden. Ebenso werden mit dieser Definition unendlichen Mengen vergleichbar.

3.4 Lösungsmengen — Ensembles de solution

Sei $\mathbb{L}$ = Menge der Lösungen einer Gleichung oder eines Gleichungssystems S: ($\mathbb{L}$ = **Lösungsmenge, Erfüllbarkeitsmenge**, G = **Grundmenge** oder **Definitionsmenge**). Dann sagen wir:

Begriffe:

1. $\mathbb{L} \neq \{\} \rightsquigarrow$ S heisst **erfüllbar**.

2. $\mathbb{L} = \{\} \leadsto S$ heisst **nicht erfüllbar**.
3. $\mathbb{L} = G \leadsto S$ heisst **allgemeingültig**.
4. $\mathbb{L}(S) =$ Erfüllbarkeitsmenge von S.
5. $G(S) =$ Grundmenge für S.
6. $(S_1 \Leftrightarrow S_2) :\Leftrightarrow [G(S_1) = G(S_2) \wedge \mathbb{L}(S_1) = \mathbb{L}(S_2)]$

Regeln:

1. $\mathbb{L}(S_1 \wedge S_2) = \mathbb{L}(S_1) \cap \mathbb{L}(S_2)$
2. $\mathbb{L}(S_1 \vee S_2) = \mathbb{L}(S_1) \cup \mathbb{L}(S_2)$
3. $\mathbb{L}(\neg S) = G \setminus \mathbb{L}(S)$

Kapitel • Chapitre 4

Zahlen, Induktion, Rekursion – Nombres, induction, récursion

($\mathbb{N}$, Induktion, Rekursion Zahlenaufbau, alg. Strukturen)

4.1 Natürliche Zahlen N – Nombres naturels N

4.1.1 Axiomatische Einführung – construction axiomatique

Bemerkung: Die natürlichen Zahlen kann man als Kardinalzahlen oder Mächtigkeiten endlicher Mengen gewinnen. Eine natürliche Zahl wäre dann als eine Äquivalenzklasse gleichmächtiger Mengen zu definieren. Ein Modell davon kann man durch das Axiomensystem von Peano gewinnen. In unserem Rahmen ist es sinnvoller, sich diesem Modell direkt zuzuwenden.

Bsp.: ($\mathbb{N}$ als Kartinalzahlen gewinnen)
$\leadsto$ $|\{\}| := 0,\ |\{0\}| := 1,\ |\{0,1\}| := 2,\ |\{0,1,2\}| := 3,\ \ldots \leadsto\ 0 \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,\ldots\},\ \mathbb{N} = \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}$

$\leadsto$ $1 = |\{0\}| = |\{a\}| = |\{b\}| = |\{c\}| = |\{\bullet\}| = |\{\dagger\}| = |\{\ddagger\}| = |\{\amalg\}| = |\{X\}| = |\{\clubsuit\}| = |\{\spadesuit\}| = \ldots\ldots$
Wir wollen hier aber anders vorgehen:

$\mathbb{N}$ aus wenigen klaren Grundregeln ableiten $\leadsto$ $\mathbb{N}$ widerspruchsfrei? Zahlen 'sicher'?

Bekannt sind **Axiomensysteme** von Peano, Schmidt .... Wir verwenden **Peano** :

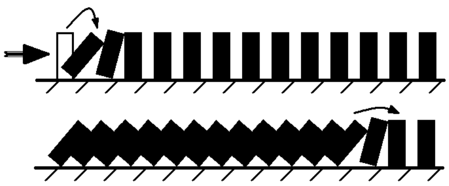
P I. $\mathbb{N}$ enthält mindestens „ein“ Element : $\exists_{El.1} : 1 \in \mathbb{N} \leadsto \mathbb{N} \not\subseteq \{\}$

P II. Jedes Element n hat einen Nachfolger n^* :
($\forall_{n\in\mathbb{N}}\exists_{n^*\in\mathbb{N}}$: $n \longmapsto n^*$ eindeutig) $\leadsto$ Nicht $\begin{smallmatrix}\nearrow\\ \searrow\end{smallmatrix}$

P III. Kein Nachfolger ist 1 : $\forall_{n\in\mathbb{N}} : n^* \neq 1$

P IV. Verschiedene Elemente haben verschiedene Nachfolger : $\forall_{n,m\in\mathbb{N}} : n^* = m^* \Rightarrow n = m \leadsto$ Nicht $\begin{smallmatrix}\searrow\\ \nearrow\end{smallmatrix}$

P V. **Induktionsaxiom**
(Sei ($\leadsto$ $\exists$) $K \subseteq \mathbb{N}$: $1 \in K \wedge (k \in K \Rightarrow k^* \in K)) \Rightarrow K = \mathbb{N}$



Darauf baut das Prinzip der vollständigen Induktion .

4.1.2 Operationen auf N – Opérations sur N

Operationen auf $\mathbb{N}$ müssen erst definiert werden, $(+, \cdot, \ldots)$

Definition: :
$\leadsto$ $''+''$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ resp. $(n, m) \longmapsto k := n + m$ mit

1 $\forall_{n \in \mathbb{N}} : n + 1 := n^*$

2 $\forall_{n,m \in \mathbb{N}} : n + m^* := (n + m)^*$

Damit ist die Nachfolge geregelt.

$\leadsto$ **Schreibweisen :**

$$1^* := 2, 2^* := 3, 3^* := 4, \ldots$$

Regeln:

- $\oslash$ Abgeschlossenheit von $''+''$:
  $\forall_{n,m \in \mathbb{N}} : n + m \in \mathbb{N}$
- $\oslash$ Kommutativität :
  $\forall_{n,m \in \mathbb{N}} : n + m = m + n$
  $\leadsto$ $(n, m) \longmapsto (n + m)$ nicht injektiv
- $\oslash$ Assoziativität :
  $\forall_{n,m,k \in \mathbb{N}} : (n + m) + k = n + (m + k)$
- $\oslash$ Integrität (Kürzungsregel) :
  $\forall_{n,m \in \mathbb{N}} : n + k = m + k \Rightarrow n = m$

Konsequenz:
$(\mathbb{N}, +)$ ist kommutative Halbgruppe (abgeschlossen und assoziativ)

Definition: :
$\leadsto$ $''.''$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ resp. $(n, m) \longmapsto k := n \cdot m$ mit

1 $\forall_{n \in \mathbb{N}} : 1 \cdot n := n$

2 $\forall_{n,m \in \mathbb{N}} : n \cdot m^* := (n \cdot m) + n$

Damit ist wieder die Nachfolge geregelt.

Regeln:

- ⊘ Abgeschlossenheit von $''\cdot''$:
  $\forall_{n,m\in\mathbb{N}} : n \cdot m \in \mathbb{N}$
- ⊘ Kommutativität : $\forall_{n,m\in\mathbb{N}} : n \cdot m = m \cdot n$
  $\rightsquigarrow \quad (n,m) \longmapsto (n \cdot m)$ nicht injektiv
- ⊘ Assoziativität : $\forall_{n,m,k\in\mathbb{N}} : (n \cdot m) \cdot k = n \cdot (m \cdot k)$
- ⊘ Integrität (Kürzungsregel) :
  $\forall_{n,m\in\mathbb{N}} : n \cdot k = m \cdot k \Rightarrow n = m$

$\rightsquigarrow \quad (\mathbb{N}, +)$ ist kommutative Halbgruppe (abgeschl. und assoziativ).

Verbindung zwischen Addition und Multiplikation:

- ⊘ Distributivgesetz : $\forall_{n,m,k\in\mathbb{N}} : n \cdot (m + k) = n \cdot m + n \cdot k$

Bemerkung:

- ⊘ $''+'', ''\cdot'' : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ linkstotal und rechtseindeutig
  $\rightsquigarrow$ Funktion !
- ⊘ $(\mathbb{N}, \cdot)$ ist kommutative Halbgruppe mit 1–Element

4.1.3 Vollständige Induktion – Induction complète

Das Prinzip – Le principe

Wichtig:

- ⊘ Abgrenzung vom **Induktionsprinzip in den Naturwissenschaften** als „empirisches Schlussprinzip ": Schluss vom Besonderen, der einzelnen Messung zum allgemeinen Gesetz. Nach Descartes vernünftiges Prinzip, legitimiert durch die Erfahrung. Man soll immer die einfachste Interpretation (d.h. das einfachste Modell) zum Gesetz erheben, solange nicht genauere Messungen ein komplizierteres Gesetz verlangen.

- ⊘ Vollständige Induktion in der Mathematik dagegen ist Deduktion (vom Allgemeinen zum Besonderen), gestützt auf das Induktionsaxiom von Peano.

⊘ **Bsp.:**

Sein $A(m)$ eine Aussage in Funktion von $m \in \mathbb{N}$.

Zu zeigen :
$A(m)$ wahr $\forall_{m\in\mathbb{N}} : (|\mathbb{N}| = \infty)$!

$\boxed{(1)}$ Zeige (**Verankerung**)
$A(1)$ wahr resp. $A(k)$ wahr für ein erstes $k \in \mathbb{N}$.

$\boxed{(2)}$ (**Vererbung, Induktionsschritt, Induktionsschluss**):
Sei $n \in \mathbb{N}, \quad n \geq k$ beliebig .
Zeige : $A(n)$ wahr
(Induktionsvoraussetzung)
$\Rightarrow \quad A(n+1) = A(n*)$ wahr
(Induktionsbehauptung)
($\leadsto$ Wahrer logischer Schluss, Tautologie .

$\boxed{(3)}$ Nach dem Induktionsaxiom ist dann :

$$\{m \in \mathbb{N}, m \geq k \mid A(m) \text{wahr } \} = \mathbb{N}$$

$\leadsto \quad \forall_{m\in\mathbb{N},m\geq k} : \quad A(m)$ wahr .

Beispiel (Paradigma) zum Prinzip der vollständigen Induktion – Exemple pour le principe de l'induction complète

Beh.:

$$\forall_{m\in\mathbb{N}} : \sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

Verankerung : $m = 1$ $\quad \sum_{k=1}^{m} k^2 = 1^2 = 1 \stackrel{?}{=} \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$ $\quad \surd$

Vererbung:

Induktionsvoraussetzung:

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
(wahr für $m = n$)

Induktionsbehauptung:
$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$
(wahr für $m = n + 1$)
Beweis:
$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = (\sum_{k=1}^{n} k^2) + (n+1)^2$
$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} =$
$\frac{(n+1)\,(n(2n+1)+6(n+1))}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ $\quad \surd$

Beispiele zu möglichen Trugschlüssen – Exemples concernant des conclusions fausses

Unter einer Induktion (Physik) versteht man den allgemein Übergang von einer speziellen zu einer allgemeinen Aussage. Das kann in der Mathematik zu einer wahren oder auch zu einer falschen Aussage führen. (Vollständige Induktion ist dagegen eine Deduktion nach dem Induktionsaxiom von Peano.)

Beispiele:

1 Gewöhnliche Induktion:
$(5|200) \wedge$ (200 endet mit 0) $\Rightarrow$ ($\forall_{n\in\mathbb{N}}$: (n endet mit 0) $\Rightarrow$ $(5|n)$)
$\leadsto$ **wahre Aussage**

2 Gewöhnliche Induktion:
$(5|200) \wedge$ (200 3-stellig) $\Rightarrow$ ($\forall_{n\in\mathbb{N}}$: (n 3-stellig) $\Rightarrow$ $(5|n)$)
$\leadsto$ **falsche Aussage**

3 Euler hatte gefunden, dass $\forall_{n\leq 39}\,(n^2+n+41)\in\mathbb{P}$ gilt. Gilt das auch $\forall_{n\in\mathbb{N}}$?

4 Fermat hatte vermutet, dass gilt: $\forall_{n\in\mathbb{N}} : f(n)_{=}2^{(2^n)}+1\in\mathbb{P}$.
Denn es gilt: $f(0)=3,\ f(1)=5,\ f(2)=17,\ f(3)=257,\ f(4)=65'537\in\mathbb{P}$
Jedoch gilt: $f(5)=4'294'967'297=641\cdot 6700417\not\in\mathbb{P}$

5 Früher hatte man vermutet, dass das Polynom x^n-1 immer nur Faktoren hat mit Koeffizienten ± 1. Etwa um die Mitte des 20. Jahrhunderts hat jedoch der Russe Ivanow gefunden, dass $x^{105}-1$ einen Faktor mit Koeffizienten -2 hat:
$(-1+x)\left(1+x+x^2\right)\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)\left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)\cdot$
$\cdot\left(1-x+x^3-x^4+x^5-x^7+x^8\right)\left(1-x+x^3-x^4+x^6-x^8+x^9-x^{11}+x^{12}\right)\cdot$
$\cdot\left(1-x+x^5-x^6+x^7-x^8+x^{10}-x^{11}+x^{12}-x^{13}+x^{14}-x^{16}+x^{17}-x^{18}+x^{19}-x^{23}+x^{24}\right)\cdot$
$\cdot(1+x+x^2-x^5-x^6-2\,x^7-x^8-x^9+x^{12}+x^{13}+x^{14}+x^{15}+x^{16}+x^{17}-x^{20}$
$-x^{22}-x^{24}-x^{26}-x^{28}+x^{31}+x^{32}+x^{33}+x^{34}+x^{35}+x^{36}-x^{39}-x^{40}-2\,x^{41}-x^{42}-x^{43}+x^{46}+x^{47}+x^{48})$

6 Vermutung: $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}k=\dfrac{(2n+1)^2}{8}$
Man kann zeigen, dass die Behauptung zwar vererbbar ist, jedoch nirgends verankerbar.

4.1.4 Zur Rekursion – Quant à la récursion

Problem: In der Informatikliteratur findet man die Begriffe „Induktion“ und „Rekursion“ nicht immer im mathematischen Sinne sauber getrennt. „Induktion“ meint „im Sinne der vollständigen Induktion“ wie definiert. „Rekursion“ erläutern wir an einem Beispiel. :

In einem Programm ist die **Fibonacci-Folge** definiert worden : $a_1 := 1,\ a_2 := 1,\ a_n := a_{n-1}+a_{n-2},\ n\geq 3$.

Mit der Maschine soll a_5 gerechnet werden. Die Maschine rechnet:

(1.) Absteigen : $a_5=a_4+a_3$, $a_4=?$, $a_4=a_3+a_2$, $a_3=?$, $a_3=a_2+a_1$, $a_2=?$, $a_2=1$, $a_1=?$, $a_1=1$
(Unfertige Prozesse immer Abspeichern

(2.) Aufsteigen: Unfertige Prozesse jetzt ausführen : $a_3=a_2+a_1=1+1=2$, $a_4=a_3+a_2=2+1=3$, $a_5=a_4+a_3=3+2=5$

Die Rekursion ist im Unterschied zur Induktion ein endlicher Prozess mit Abstieg und Aufstieg. In der rekursiven Definition einer Folge benützt man das vom Beweis mit vollständiger Induktion her bekannte Schema (Verankerung, Vererbung).

4.1.5 Ordnungsrelation auf N – Relation d'ordre sur N

Sei $n < m :\Leftrightarrow \exists_{k \in Nin} : \ n + k = m.$

Durch $\mathcal{R} = \{(n, m) | n < m\} \subseteq \mathbb{N}^2$ ist eine **strenge Ordnungsrelation** definiert .

Regeln:

$$1 \ \forall_{n,m \in \mathbb{N}} : (n = m) \ \dot{\vee} \ ((n < m) \ \dot{\vee} \ (n > m))$$

$$2 \ \forall_{n,m,k \in \mathbb{N}} : (n < m) \quad \Rightarrow \quad (n + k < m + k)$$

Dagegen definiert man die **gewöhnliche Ordnungsrelation** : $\quad n \leq m : (n < m) \dot{\vee} n = m)).$

Entsprechend : $n \geq m$

Sei $A \subseteq \mathbb{N}$.
$a \in \mathbb{N}$ heisst **kleinstes Element** von A:

$$\Leftrightarrow \forall_{n \in \mathbb{N}} : a \leq n.$$

Entsprechend „grösstes Element" .

Wichtig:
$A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \{\ \} \Rightarrow \quad A$ besitzt ein kleinstes Element .

Eine Menge mit der Eigenschaft, dass jede nichtleere Teilmenge ein kleinstes Element besitzt, heisst **wohlgeordnet**. .

4.1.6 Beispiel der Induktion: Potenzen in N – Exemple pour l'induction: Puissances dans N

Definiere induktiv :

$$n^1 := n, \ \ n^2 := n \cdot n, \ \ n^{k+1} := n^k \cdot n$$

Regeln:

$$\oslash \ \forall_{n,r,s} : \ n^r \cdot n^s = n^{r+s}$$

$$\oslash \ \forall_{n,r,s} : \ (n^r)^s = n^{r \cdot s}$$

$$\oslash \ \forall_{n,m,r} : \ (n \cdot m)^r = n^r \cdot m^r$$

Beweis mit vollständiger Induktion .

4.1.7 Teiler und Vielfache in N – Diviseurs et multiples dans N

Definition: $m \in \mathbb{N}$ Teiler (Faktor) von $n \in \mathbb{N}$:

$$\Leftrightarrow \ \exists_{k \in \mathbb{N}} : n = k \cdot m$$

$\rightsquigarrow$ **Symbol:** $m|n$

Grösster gemeinsamer Teiler

$$\rightsquigarrow \quad ggT := \text{g} : \quad \forall_{d\in\mathbb{N},\ d|a\ \wedge\ d|b} : d|g$$

Kleinstes gemeinsames Vielfaches

$$\rightsquigarrow \quad kgV := \text{k} : \quad \forall_{m\in\mathbb{N},\ a|m\ \wedge\ b|m} : k|m$$

Regeln:

$$\oslash\ m|n_1 \wedge m\ n_2\ \Rightarrow m|(n_1+n_2) \wedge m^2|(n_1\cdot n_2)$$

$$\oslash\ ggT(n_1,n_2)\cdot kgV(n_1,n_2) = n_1\cdot n_2$$

4.2 Ganze Zahlen Z – Nombres entiers Z

4.2.1 Konstruktion von Z – Construction de Z

Die ganzen Zahlen muss man jetzt nicht mehr axiomatisch einführen wie $\mathbb{N}$. Man kann sie mit Hilfe von Definitionen auf $\mathbb{N}$ aufbauen. .

Problem: Gleichungen wie $10 + x = 5$ haben in $\mathbb{N}$ keine Lösung. Um die Lösbarkeit zu ermöglichen, muss man $\mathbb{N}$ erweitern, d.h. $\mathbb{Z}$ konstruieren. .

Seien $m, s, k \in \mathbb{N}$ beliebig .

Idee: In $m + x = s$ gehört x zum geordneten Paar (s, m): $x \mathrel{\hat{=}} (s, m)$ (Zuordnung).

Forderung zur Konstruktion von $\mathbb{Z}$: :

$$\forall_{m,s,k\in\mathbb{N}} : n + x = m + k + x = t = s + k = ,\ \ x \mathrel{\hat{=}} (s + k, m + k) = (t, n)$$

$\rightsquigarrow$ Die Relation gegeben durch $(s, m) \sim (t, n)$ $:\Leftrightarrow m + t = m + s + k = s + n = s + m + k$ ist Äquivalenzrelation .

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ zerfällt somit in Äquivalenzklassen :

$$[(s, m)] \ = \ \{(s, m)|(t, n) \sim (s, m)\}.$$

$[(s, m)] := (s - m) := x$ ist somit die Menge der formalen Lösungen des obigen Problems .

Definition: $\mathbb{Z} := \{(s - m)|s, m \in \mathbb{N}\}$

4.2.2 Definition von Operationen auf Z – Définition d'opérations sur Z

Addition $''+''$ **:** $x_1 + x_2 = (s - m) + (t - n) := ((s + t) - (m + n))$

Multiplikation $''\cdot''$**:**

$x_1 \cdot x_2 = (s - m) \cdot (t - n) := ((m \cdot n + s \cdot t) - (m \cdot t + s \cdot n))$
Gesetze für $''+''$**,** $''\cdot''$**:**

Abgeschlossenheit, Kommutativität, Assoziativität, Distributivität,
neutrales Element $(2-1) = (3-2) = (4-3)\ldots$ für $''\cdot''$

4.2.3 Interpretation der Def. von Z – Interprétation de la définition de Z

Einbettung von $\mathbb{N}$ **in** $\mathbb{Z}$ **:**

Seien : $m^- =$ Vorgänger von m m,
$m^* =$ Nachfolger von m m.
Sei $m + x = s,\ s > m$ z.B. $s = m + k = m^- + 1 + k = m^- + k^*$
$\rightsquigarrow$ $m^- + 1 + x = s = m^- + k^*,\ 1 + x = k^*,\ x = (k^* - 1) := k \rightsquigarrow$
Eindeutige Identifikation von x und k möglich .

$\rightsquigarrow$ Für $s > m$ kann man definieren **(Einbettung)** :

$$x = (k^* - 1) := k \in \mathbb{N},\ \ \mathbb{N} \subset \mathbb{Z},\ \ \mathbb{N} = \mathbb{Z}^+.$$

Man findet damit, dass $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ isomorph (bijektiv und operationstreu) zu $(\mathbb{Z}^+, +, \cdot)$ ist. :

$(\mathbb{N}, +, \cdot) \cong (\mathbb{Z}^+, +, \cdot)$ (Operationen führen beidseitig zu entsprechenden Resultaten .

4.2.4 Definition von 0 und Z $^-$ – Définition de 0 et de Z $^-$

Definition: : (von '0') $0 := (1 - 1) \rightsquigarrow \forall_{r \in \mathbb{N}} : 0 = (r - r)$

Eigenschaften:

$''+''$ $\forall_{r \in \mathbb{Z}} z + 0 = z$ (neutrales Element)

$''\cdot''$ $\forall_{r \in \mathbb{Z}} z \cdot 0 = 0$ (Nullelement)

Wir definieren weiter :

$$\mathbb{Z}^- := \{x = (s - m) \,|\, (m - s) \in \mathbb{Z}^+ \ (m > s)\},\ \ \mathbb{Z}_0^+ := \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$$

Definition: : (Inverse) Sei $k = (s - m) \in \mathbb{Z}^+ = \mathbb{N},\ (-k) := (m - k) \in \mathbb{Z}^-.$

Additives Inverses :

$k = (s - m) \in \mathbb{Z} = \mathbb{N} \ \Rightarrow\ (-k) := (m - k) \in \mathbb{Z}.$

Eigenschaften: $k \in \mathbb{Z}^+ \Leftrightarrow (-k) \in \mathbb{Z}^-$,

$k + (-k) = 0$,

$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^-$

4.2.5 Zur Struktur – Quant à la structure

Struktur von $(\mathbb{Z}, +)$:
Kommutative (abelsche) Gruppe, d.h. Operation abgeschlossen, assoziativ, $\exists$ neutrales Element (die 0), $\forall_{z\in\mathbb{Z}}$ $\exists$ Inverses $(-z)$: $z + (-z) = 0$, Kommutativgesetz gilt.

Wichtig:
Eine Gruppe ist eine Struktur, in der bezüglich der gegebenen Operation **Gleichungen lösbar** sind.

Struktur von $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ **: Integritätsbereich** (kommutativer, nullteilerfreier Ring mit 1–Element) .

Nullteilerfreiheit hat zur Folge, dass man in Gleichungen Faktoren kürzen darf ($n \cdot a = m \cdot a \Rightarrow n = m$ für $a \neq 0$). Z. B. bei der Matrixmultiplikation ist das nicht mehr der Fall.

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ **Ring** : $(\mathbb{Z}, +)$ kommutative Gruppe ,
$(\mathbb{Z}, \cdot)$ Halbgruppe , Distributivgesetz

4.2.6 Ausdehnung der Ordnungsrelation auf Z – Extension de la relation d'ordre sur Z

Definition: $a = (s - m),\ \ b = (t - n).\ \ a < b :\Leftrightarrow (n + s = m + t)$
(in $\mathbb{N}$)

Regeln:

1 $\forall_{a,b\in\mathbb{Z}}$: $a < b \dot{\vee} a = b \dot{\vee} a > b$

2 $\forall_{a,b,c\in\mathbb{Z}}$: $a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a = b$

3 $\forall_{a,b,c\in\mathbb{Z},\ c>0}$: $a \cdot c < b \cdot c \Rightarrow a < b$

4 $\forall_{a,b,c\in\mathbb{Z},\ c\leq 0}$: $a \cdot c = b \cdot c \Leftrightarrow a = b$

5 $\forall_{a,b,c\in\mathbb{Z},\ c<0}$: $a \cdot c < b \cdot c \Rightarrow a > b$

6 $\forall_{a,b\in\mathbb{Z}}$: $a \cdot c = 0 \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0)$

7 $\forall_{a\in\mathbb{Z}}$: $(a < 1 \wedge a \leq 0) \Rightarrow (a < 0)$

4.2.7 Weitere Ausdehnungen – D'autres extensions

Definition: : (Subtrakt.) $\forall_{a,b\in\mathbb{Z}}$: $a - b := a + (-b)$

Definition: : (Absolutbetrag) (Siehe Analysiskurs):

$$|z| = z \cdot sgn(z)$$

Wichtig: $|a+b| \leq |a| + |b|$ „Dreiecksungleichung“ . Regeln siehe Analysiskurs

Weitere Regeln :

1 $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$

2 $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$

3 $a\,(b-c) = a \cdot b - a \cdot c$

4 $a < b \Leftrightarrow (a-b) < 0$

5 $a \cdot b = 1 \Leftrightarrow (a = b = 1 \dot{\vee}\ a = b = -1)$ ☺

Bemerkung: Sei $a\mathbb{Z} = \{a \cdot z \mid z \in \mathbb{Z}\}$
$\Rightarrow a\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ für $a \in \mathbb{Z}$.
$\leadsto$ $(a\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist auch Integritätsbereich .

4.2.8 Teiler in Z – Diviseurs dans Z

Definition: : (Teiler in $\mathbb{Z}$) Seien $a, t \in \mathbb{Z}, a \neq 0$.
$t|a\ :\Leftrightarrow\ \exists_{b \in \mathbb{Z}}:\ a = t \cdot b$. a Vielfaches von t.
t Teiler, Faktor .

Trivialteiler zu a : $\pm 1, \pm a$.

Primzahlen : Haben nur Trivialteiler .

$$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$$

Primteiler : $p|a,\ p \in \mathbb{P}$

Satz: $\forall_{t,a,b,x,y \in \mathbb{Z}}:\ t|a \wedge t|b \Rightarrow t|(x \cdot a + y \cdot b)$

Satz: $|\mathbb{P}| = |\mathbb{N}|$.
(Es gibt unendlich viele Primzahlen.)

$\mathbb{P}$ berechnen: Mit dem „Sieb des Eratosthenes“ .

Für ggT (ggT) und kgV (kgV) gilt:

$$ggT(p_1, p_2) = 1,\ \ kgV(p_1, p_2) = p_1 \cdot p_2.$$

$ggT(a, b) = 1$ heisst : a, b relativ prim .

Berechnung des ggT: **Euklidscher Algorithmus**.

Beispiel für den Euklidschen Algorithmus.

Problem: Berechne $ggT(758, 242)$:

$758 = 242 \cdot 3 + 32,\ t|758 \wedge t|242 \Rightarrow t|32,\ 242 = 32 \cdot 7 + 18,\ t|242 \wedge t|32 \Rightarrow t|18,\ 32 = 18 \cdot 1 + 14,\ t|32 \wedge t|18 \Rightarrow t|14,\ 18 = 14 \cdot 1 + 4,\ t|18 \wedge t|14 \Rightarrow t|4,\ 14 = 4 \cdot 3 + 2,\ t|14 \wedge t|4 \Rightarrow t|2,\ 4 = 2 \cdot 2 + 0$
$\leadsto \quad t|2,\ 4 = 4 \cdot 2 \Rightarrow t|4 \Rightarrow t|14 \Rightarrow t|18 \Rightarrow t|32 \Rightarrow t|242 \Rightarrow t|758, \quad \Rightarrow t = 2$ ☺

Sei $\dot{\mathbb{Z}} := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Folgerung: $\forall_{a,b \in \dot{\mathbb{Z}}} : \exists_{m,n \in \mathbb{Z}} : ggT(a, b) = a \cdot m + b \cdot n$

Speziell :
$\exists_{m,n \in \mathbb{Z}} : 1 = a \cdot m + b \cdot n \Leftrightarrow ggT(a, b) = 1$

Eigenschaften:

1 $ggT(a, s) = ggT(b, s) = 1 \ \Rightarrow \ ggT(a \cdot b) = 1$

2 $p \in \mathbb{P} \wedge p|a \cdot b \ \Rightarrow \ p|a \vee p|b$

3 Die Primfaktorenzerlegung von $a \in \mathbb{N}$ ist eindeutig bis auf die Reihenfolge:

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} = \prod_{i=0}^{k} p_i^{\alpha_i}$$

Definition: **Hauptideal** :

$n \cdot \mathbb{Z} := (n) := \{n \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{N} fix\}$

Satz: <u>**Vor.:**</u>

Sei $K \neq \{\},\ K \subset \mathbb{Z},\ (K, +, \cdot)$ abgeschlossen .

<u>**Beh.:**</u>

K ist Hauptideal: $\exists_{n \in \mathbb{Z} resp. \mathbb{N}} :\ K = n \cdot \mathbb{Z}$

Definition: : (Linearkombination) Seien :
$a_1, \ldots, a_n \in M,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ beliebig .
$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = \sum\limits_{i=1}^{n}$ heisst **Linearkombination** der a_i über K .

Damit definieren wir: **Definition:**

Sei $M = \{a_i \in \mathbb{Z} | i = 1, \ldots, n\}$ und $K = \mathbb{Z}$, $(\lambda_i \in \mathbb{Z})$
$\bar{M} :=$ { Linearkomb. v. M über $\mathbb{Z}$ M *sur* $\mathbb{Z}$}
:= **Lineare Hülle** von M M.

Satz: $\bar{M}$ ist Hauptideal.

$\exists_{m\in\mathbb{Z}} : \; \bar{M} = m \cdot \mathbb{Z}$

4.2.9 Über Kongruenzen – Sur les congruences

Wir definieren „a kongruent b *modulo* m" . Sei $m \in \dot{\mathbb{Z}}$:

Definition: a kongruent b *modulo* m :

$$a \equiv b \; mod \; m \; :\Leftrightarrow \; m | (a - b)$$

Man findet : $(a - b) \equiv 0 \; mod \; m \; \Leftrightarrow \; a \equiv b \; mod \; m.$

Die verwendeten Zahlen seinen aus $\mathbb{Z}$:

Regeln:

1 $a \equiv b \; mod \; m \quad \Leftrightarrow \quad a + m \cdot t \equiv b \; mod \; m$
$\Leftrightarrow a + t \equiv b + t \; mod \; m \;\; (\Rightarrow \;\; a \cdot t \equiv b \cdot t \; mod \; m)$

2 $a \equiv b \; mod \; m \wedge c \equiv d \; mod \; m$
$\Rightarrow \;\; (a \pm c \equiv b \pm d \; mod \; m) \wedge (a \cdot c \equiv b \cdot d \; mod \; m)$

3 $a \equiv b \; mod \; m \;\; \wedge \;\; ggT(c, m) = t$
$\Rightarrow \;\; ((a \cdot c \equiv b \cdot d \; mod \; m) \;\; \Leftrightarrow \;\; a \equiv b \; mod \; k, \;\; m = k \cdot t)$

4 $mod \; m$ stiftet auf $\mathbb{Z}$ eine Äquivalenzrelation

$\leadsto$ Äquivalenzklassen: **Restklassen modulo m** .

Quotientenmenge :
$\mathbb{Z}_m := (\mathbb{Z}/_{mod \; m}) = \{[0]_m, [1]_m, \ldots, [m - 1]_m\}$

4.2.10 Rechnen mit Restklassen, Strukturen – Calculer avec des classes de restes, structures

Definition: $''+''$ $\quad [a]_m + [b]_m := [a + b]_m$

Definition: $''.''$ $\quad [a]_m \cdot [b]_m := [a \cdot b]_m$

Bsp.:

$\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$: Additions– und Multiplikationstabellen .

"+"	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[1]	[2]
[1]	[1]	[2]	[0]
[2]	[2]	[0]	[1]

"."	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]
[2]	[0]	[2]	[1]

"+"	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]
[1]	[1]	[2]	[3]	[0]
[2]	[2]	[3]	[0]	[1]
[3]	[3]	[0]	[1]	[2]

"."	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]
[2]	[0]	[2]	[0]	[2]
[2]	[0]	[3]	[2]	[1]

Wichtig:
Man beachte, dass hier $mod\ 4$ die Multiplikation nicht nullteilerfrei ist. :
$\rightsquigarrow$ $[2]_4 \cdot [2]_4 = [0]_4$. $[2]_4$ hat kein Inverses .
$\rightsquigarrow$ $[2]_4 \cdot [x]_4 = [1]_4$ hat keine Lösung .

Ein anderes Beispiel modulo 6:

$[3]_6 \cdot [2]_6 = [3]_6 \cdot [4]_6 = [0]_6 \not\Rightarrow [2]_6 = [4]_6$
$\rightsquigarrow$ Es ist nicht erlaubt zu kürzen!
$\rightsquigarrow$ $[3]_6$, $[2]_6$, $[4]_6$ sind Teiler von $[0]_6$.

Wichtige Strukturen

Halbgruppe $(M, \circ)$
(M = Menge , $\circ$ = Operation auf M):
$\rightsquigarrow$ $'\circ'$ abgeschlossen, assoziativ .

Gruppe $(M, \circ)$:
$\rightsquigarrow$ $\circ$ abgeschlossen, assoziativ, es gibt ein neutrales Element m_0, $\forall_{m\in M}$ $\exists$ ein Inverses (m^{-1}) .

Wichtig:
Die Gruppe ist diejenige Struktur, in der Gleichungen lösbar sind.

Abelsche oder kommutative Gruppe $(M, \circ)$:
$(M, \circ)$ Gruppe, Operation kommutativ

Körper $(M, \circ, *)$ $(\circ, *$ Operationen auf $M)$:
$(M, \circ)$ abelsche Gruppe ,
$M \setminus \{m_0\}, *$ ebenfalls abelsche Gruppe ,
Distributivgesetz für $\circ, *$.

Ring $(M, \circ, *)$:
$(M, \circ)$ abelsche Gruppe ,
$M \setminus \{m_0\}, *$ nur Halbgruppe ,
Distributivgesetz für $\circ, *$.

Kommutativer Ring $(M, \circ, *)$:
$(M, \circ, *)$ Ring, $*$ kommutativ.

Integritätsbereich $(M, \circ, *)$:
Nullteilerfreier kommutativer Ring.

Satz:

Vor.:

Sei $m \in \mathbb{N}$

Beh.:

- $\oslash$ $(\mathbb{Z}_m, +)$ ist abelsche Gruppe (**Restklassengruppe**)
- $\oslash$ $(\mathbb{Z}_m, \cdot)$ ist kommutative Halbgruppe mit 1–Element
- $\oslash$ $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ Integritätsbereich mit 1–Element

Vor.:

Sei $m \in \mathbb{P}$

- $\oslash$ $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ ist Körper (**Restklasskörper**)

Bemerkung: **Geg.:** $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$.

Sei $[a]_m \cdot [x]_m = [b]_m, \ \ ggT(a, m) := d.$
Dann kann man zeigen :

- $\oslash$ $d|b \ \Rightarrow$ die Gleichung hat d inkongruente Lösungen .
- $\oslash$ $d \not| b \ \Rightarrow$ die Gleichung hat keine Lösungen .

4.2.11 Polynomringe – Anneaux de polynômes

Ein Beispiel von wichtigen Ringen sind die **Polynomringe** :

Polynom :
Endliche Summe von Produkten von Variablenpotenzen und Koeffizienten (Exponenten $\in \mathbb{N}$) .

$\leadsto$ (Berechenbar auch nach dem **Hornerschema**.)

Polynome über $\mathbb{Z}$: Koeffizienten $\in \mathbb{Z}$.

Sei $P = \{$ Polynome über $\mathbb{Z}$ $\}$.

Satz: $(P, +, \cdot)$ ist Integritätsbereich mit 1–Element.

Speziell: $(P, +, \cdot)$ nullteilerfrei .

D. h. : $p_1(x) \cdot p_2 x \equiv 0 \ \wedge \ p_1(x) \not\equiv 0 \ \Rightarrow \ p_2(x) \equiv 0.$

4.2.12 Positionssysteme zur Zahlendartstellung – Des systèmes de position pour la représentation des nombres

Sei $a \in \mathbb{Z}, \ b \in \mathbb{N}$. a lässt sich wie folgt schreiben: :

$$a = r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + \ldots + r_0 b^0 = \sum_{i=1}^{n} r_i b^i, \;\; b^0 = 1, \;\; |r_i| < b,$$
$$r_i \geq 0 \;\text{ für }\; a > 0, \;\; r_i < 0 \;\text{ für }\; a < 0$$

Bsp.:
Dualsystem (Binärsystem), Oktalsystem, Dezimalsystem, Hexagesimal– oder Hexadezimalsystem.

Probleme:
Arithmetik in solchen Systemen, Verwandlung einer gegebenen Darstellung einer Zahl in eine Darstellung in einem anderen System. .

$\leadsto$ Grundlage für Codierung (Bitmaschinen).

Speziell: $b = 2, \;\; b = 8, \;\; b = 16.$

4.3 Ergänzungen zu N und Z – Annexe pour N et Z

Lemma:

Vor.:

$p \in \mathbb{P}, \;\; k \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$
$\binom{p}{k}$ Binomialkoeff.

Beh.: $p \mid \binom{p}{k}$

Beweis:
$$0 < k < p \in \mathbb{P} \;\Rightarrow\; \binom{p}{k} = \frac{p!}{k! \cdot (p-k)!} = p \cdot r \;\Rightarrow\; ggT(p, r) = 1 \;\Rightarrow\; r \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; p \mid \binom{p}{k}$$

Satz: $p \in \mathbb{P}, \;\; a, b \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; (a+b)^p \equiv a^p + b^p \; mod \; p$

Beweis:
$$(a+b)^p = a^p + \binom{p}{1} a^{p-1}\, b + \ldots + \binom{p}{p-1} a\, b^{p-1} + b^0 \equiv a^p + b^p \; mod \; (p) \quad \text{(Lemma)}$$

Kleiner Fermatscher Satz:

Satz: $p \in \mathbb{P}, \;\; a \in \mathbb{N}, \;\; p \not| a \;\Rightarrow\; a^p \equiv a \; mod \; p \;\leadsto\; a^{p-1} \equiv 1 \; mod \; p$

Beweis:
$$a^p = (\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{=a})^p \overset{\text{Lemma}}{\equiv} \underbrace{1^p + 1^p + \ldots + 1^p}_{=1+1+\ldots+1=a} = a \; mod \; (p) \;\Rightarrow\; a^{p-1} \equiv 1 \; mod \; (p)$$

Allgemeiner für Kongruenzen $mod \; m$:

Definition der Eulerschen Funktion $\varphi(n), \;\; n \in \mathbb{N}$:

$\varphi(n)$:= Anzahl zu n relativ prime Reste modulo n (zwischen 1 und $n-1$). $\leadsto$

Satz:

1 $p \in \mathbb{P} \;\Rightarrow\; \varphi(p) = p - 1$

2 $n, k \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; n = \sum\limits_{k|n} \varphi(k)$

3 $ggT(m,n) = 1 \;\Rightarrow\; \varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$

4 $\varphi(n) = n \cdot \prod\limits_{p|n} (1 - \frac{1}{p})$

Beweis:

1 Nach Definition von φ.

2 **Symbol:** Sei $\# =$ Anzahl ...

Sei $i \,|\, n \;\Rightarrow\; z(k,i) := \frac{k \cdot n}{i} \in \mathbb{N}$

Betrachte zu $i \in \mathbb{N}$ alle Zahlen folgender Art: $z(k,i) = \frac{k \cdot n}{i}, \;\; k \leq i$

Sei $ggT(k,i) = 1 \;\Rightarrow\; \#(z(k,i)) = \#(\frac{k \cdot n}{i}) = \varphi(i)$

$\leadsto \;\; \frac{k \cdot n}{i} = \frac{k' \cdot n}{j} \;\Rightarrow\; k \cdot j = k' \cdot i, \;\; ggT(k,i) = 1$

$\leadsto$ k ist bestimmt durch genau einen Teiler i.

$\leadsto$ Die Zahlen $\{1, 2, \ldots, n\}$ zerfallen daher in durch die Teiler i bestimmte disjunkte Klassen C_i, welche die Zahlen k enthalten.

Andererseits:

Sei $m \leq n, \;\; ggT(m,n) = \frac{n}{i} \;\Rightarrow\; m = k \cdot ggT(m,n) \leq i \cdot ggT(m,n) = n$

$\Rightarrow\; m \in \{k \mid k \leq i \;\wedge\; ggT(i,k) = 1\}$

$\leadsto$ m ist eindeutig bestimmt durch $i, \;\; m \in C_i$.

$\leadsto$ Wenn m die Zahlen $\{1, 2, \ldots, n\}$ durchläuft, werden daher auch alle zugehörigen Zahlen k durchlaufen. Die gesamte Anzahl n ist aber die Summe der φi über alle i.

3 Beweis mit vollständiger Induktion über die Zahl $m \cdot n$. Vgl. Lit..

4 $n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n} \;\Rightarrow\; \varphi(n) = \varphi(p_1^{k_1}) \cdot \ldots \cdot \varphi(p_n^{k_n})$

$\varphi(p_j^{k_j}) := \varphi(p^k) = |\{1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, 2\,p-1, 2\,p+1, \ldots, p^k - 1\}|$

$= |\{1, 2, \ldots, p^k - 1\} \setminus (\{p, 2\,p, \ldots, p \cdot p, \ldots (p-1) \cdot p^{k-1}\} \setminus \{p^k\})|$

$= |\{1, 2, \ldots, p^k - 1\}| - |\{p, 2\,p, \ldots, p \cdot p, \ldots p \cdot p^{k-1}\}| + |\{p^k\}$

$= (p^k - 1) - k^{k-1} + 1) = k^{k-1} \cdot (p-1) = p^k \cdot (1 - \frac{1}{p})$

Satz: **(Euler)**

$a, m \in \mathbb{N} \;\wedge\; ggT(a, m = 1) \;\Rightarrow\; a^{\varphi(m)} \equiv 1 \; mod \; m$

Beweis: Vgl. Lit..

Definition: **Ordnung** von $a \ mod \ m$:

$Ord(a) \ mod \ m$:= kleinstes $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n \equiv 1 \ mod \ m$

Der chinesische Restsatz :

Satz: **Vor.:**

Seien $m_j \in \mathbb{N}$
$m_1, \ldots, m_r$ relativ prim ,
$m = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_r$,
$a_1, a_2, \ldots, a_r$ beliebig .

Beh.:

Die Lösung des Systems
$x \equiv a_j \ mod \ m_j, \ \ j = 1, 2, \ldots, r$ mit
$x \in [0, m)$ ist eindeutig.

Beweis: Vgl. Lit..

4.3.1 Ausblick – Autres faits divers

Primzerlegung – Décomposition en nombres premiers

Die Primzerlegung einer natürlichen Zahl $n < 1$ ist eindeutig.
(Beweis indirekt.)

Primzahldichte – Densité des nombres premiers

Asymptotische Verteilung:
Sei $\pi(x) =$ (Anzahl Primzahlen $\leq x$) $= \#(p \in \mathbb{P}), \ \ p \leq x. \ \leadsto$

Satz: $$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{(\frac{x}{ln(x)})} = 1$$ (Gauss, Hadamard, de la Vallée–Poissin)

Stärkere Form:

Sei $$Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{ln(t)} \quad \Rightarrow \ \pi(x) = Li(x) + 0(x \, e^{-C \sqrt{ln(x)}})$$

$O \leadsto$ Landau-Symbol, vgl Analys

Eulersche Anzahlfunktion – Fonction de nombres d'Euler

Die in der Algebra wichtige Eulersche φ–Funktion wird vorerst hiier wie folgt definiert:

Definition: $a|_! \, n : \Leftrightarrow (\exists_{b \in \mathbb{N}, \ \ 1 < b \leq n} \ n = a \cdot b)$

Definition: Sei $n \in \mathbb{N}$

$\varphi(n) = \#(a \in \mathbb{N}), \ \ 1 \leq a \leq n, \ \ a \not|_! \, n$

$\rightsquigarrow$ $\varphi(n) =$ Anzahl der zu n relativ primen Divisionsreste bei der Division durch n (modulo n)

Bsp.:

$$1 \not|_! 2 \;\Rightarrow\; \varphi(2) = 1, \qquad (1 \not|_! 3) \;\wedge\; (2 \not|_! 3) \;\Rightarrow\; \varphi(3) = 2$$
$$(1 \not|_! 4) \;\wedge\; (3 \not|_! 4) \;\Rightarrow\; \varphi(4) = 2, \qquad (1 \not|_! 5) \;\wedge\; (2 \not|_! 5) \;\wedge\; (3 \not|_! 5) \;\wedge\; (4 \not|_! 5) \;\Rightarrow\; \varphi(5) = 4, \ldots,$$
$$(2|\,16) \;\wedge\; (4|\,16) \;\wedge\; (8|\,16) \;\Rightarrow\; \varphi(16) = 15 - 3 = 12, \ldots$$

Elementar kann man beweisen:

Satz: $$p, q \in \mathbb{P} \;\Rightarrow\; \varphi(p) = p - 1,\;\; \varphi(p\,q) = (p-1)(q-1)$$

Kryptologie – Cryptologie

RSA-Verfahren: Siehe Anhang.

4.4 Rationale Zahlen Q – Nombres rationnels Q

4.4.1 Definition – Définition

Problem: Z. B : $7 \cdot x = 8$
$\rightsquigarrow$ in $\mathbb{Z}$ nicht lösbar

Allgemeiner :
Sei $m \cdot x = s$ in $\mathbb{Z}$ nicht lösbar .

Beseitigung des Mangels: $\mathbb{Z}$ erweitern!!

Konstruktion : Sei $n, m \in \dot{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \setminus \{0\},\;\; t, s \in \mathbb{Z},\;\; m \cdot t = s \cdot n$

$\rightsquigarrow$ Definiere eine Relation in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

$$(s, m) \sim (t, n) \quad :\Leftrightarrow \quad m \cdot t = s \cdot n$$
$$\rightsquigarrow \quad \text{Klassen} \qquad [(s, m)] = [(t, n)]$$

Definition: $\mathbb{Q}$

$$\frac{s}{m} := (s, m) \rightsquigarrow \text{ Bruch}$$

$$[\frac{s}{m}] := [(s, m)] \text{ rationale Zahl . } \mathbb{Q} = \{[\frac{s}{m}]\}.$$

Sei $t = x,\;\; n = 1 \rightsquigarrow \quad m \cdot x = s \cdot 1 = s,\;\; (t, m, s \in \mathbb{Z})$.
Setze : $x \;:= [\frac{x}{1}] = [(x, 1)] = [(s, m)] \;:=\; \frac{s}{m}$.
($\frac{s}{m}$ ist ein **Repräsentant** oder Stellvertreter der Klasse $[\frac{s}{m}] = [(s, m)]$. Durch ihn ist die Klasse eindeutig festgelegt.)

$\rightsquigarrow$ Die Lösung der Gleichung $m \cdot x = s$ ist $\frac{s}{m} \in \mathbb{Q}$.

Damit ist: $t \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow t \in \mathbb{Q},\;\; \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \rightsquigarrow$ Einbettung.

Wir stellen fest :

$\forall_{m,s,n,t,k\in\mathbb{Z},\ k\neq 0}$: $m\cdot t = s\cdot n \Leftrightarrow (m\cdot k)\cdot t = (s\cdot k)\cdot n$, also
$\Leftrightarrow m_1\cdot t = s_1\cdot n$ für $m = m_1\cdot ggT(m,s),\ s = s_1\cdot ggT(m,s)$.
Sei $m > 0$.
k sei so gewählt, dass $m < 0$ gilt .

$\rightsquigarrow \frac{s}{m} = \frac{s_1}{m_1} \in \mathbb{Q}$: **Gekürzte Bruchdarstellung**,eindeutig!

Wichtig:

Rationale Zahlen : $\mathbb{Q} = \{\dfrac{s}{m} \mid \dfrac{s}{m} := [(s,m)]\ s\in\mathbb{Z},\ m\in\dot{\mathbb{Z}}\}$

4.4.2 Operationen in Q – Opérations dans Q

Definition: :
$''+''$, $''\cdot''$

$$1\ \ \frac{s}{m}+\frac{t}{n} := \frac{s\cdot n + t\cdot m}{m\cdot n}$$
$$2\ \ \frac{s}{m}\cdot\frac{t}{n} := \frac{s\cdot t}{m\cdot n}$$

Damit ergibt sich die Struktur $(\mathbb{Q},+,\cdot)$. .
Man kann nun zeigen, dass in $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ die Rechenregeln von $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ gültig bleiben. .
(Integritätsbereich mit 1–Element .)

Speziell ist :
Nullelement (neutrales Element) der Addition $(\frac{0}{1})$: $(\frac{0}{1})$,
Einselement (neutrales Element) der Multiplikation $(\frac{1}{1})$. : $(\frac{1}{1})$.
Zusätzlich gelten aber **weitere Regeln**:

Neuheit in $\mathbb{Q}$: $\forall_{q\in\dot{\mathbb{Q}}}\exists_{Invers.q^{-1}}$: $q\cdot q^{-1} = (\frac{1}{1})$, kurz : $\frac{1}{1}$.

Satz:

Vor.:

$$q = \frac{s}{m} \in \dot{\mathbb{Q}},\ \ \dot{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}\setminus\{0\}$$

Beh.:

1 $q^{-1} = \dfrac{m}{s}$

2 $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ ist Körper

$\rightsquigarrow$ $(\mathbb{Q},+)$, $(\dot{\mathbb{Q}},\cdot)$ abelsche Gruppen .
Es gilt das Distributivgesetz:

Sinnvolle Schreibweise
:

$$\frac{m}{s}\cdot\frac{t}{n} := \frac{(\frac{m}{s})}{(\frac{t}{n})} \qquad (\rightsquigarrow \quad = \frac{s}{m}\cdot\frac{n}{t})$$

4.4.3 Zur Einbettung von Z in Q – Plongement de Z dans Q

In $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ ist : $\quad \frac{s}{1}+\frac{t}{1}=\frac{s+t}{1},\ \frac{s}{1}\cdot\frac{t}{1}=\frac{s\cdot t}{1}$

(Den Zahlen $s,t\in\mathbb{Z}$ entsprechen die Zahlen $\frac{s}{1},\frac{t}{1}\in\mathbb{Q}$ etc. .)

Es spielt offensichtlich keine Rolle, ob man die Operationen $+,\cdot$ in $\mathbb{Z}$ oder in $\mathbb{Q}$ ausführt.

Genauer :
Sei $\quad \varphi:\ \mathbb{Z}\longmapsto\mathbb{Q}$ mit $\varphi(s)=\frac{s}{1}$. $\leadsto$ Dann ist :

$$Fi(s+t)=\varphi(s)+\varphi(t),\ \ \varphi(s\cdot t)=\varphi(s)\cdot\varphi(t)$$

$\leadsto$ φ ist also structurerhaltend .
(φ ist „vertauschbar“ mit $+,\cdot$.

Eine Abbildung mit solchen Eigenschaften heisst **Homomorphismus**)

$\leadsto$ Identifikation (**Einbettung**) möglich.

$$\mathbb{Q}\ni\frac{s}{1}\ :=:\ s\ \in\mathbb{Z}\ \Rightarrow\ \mathbb{Z}\subset\mathbb{Q},\ \ s^{-1}:=(\frac{s}{1})^{-1}=\frac{1}{s}$$

4.4.4 Ausdehnung der Ordnungsrelation – Etendre la relation d'ordre

Sei $q,r\in\mathbb{Q},\ \ s,m\in\mathbb{Z}$.

Wir definieren : $\quad q=\frac{s}{m}>0\ \Leftrightarrow\ s\cdot m>0.$

Entsprechend für $'<'$.

Weiter : $\quad q>r\ \Leftrightarrow (q-r)>0.$

Entsprechend für $'<'$.

Regeln: (für ’<’)

- $\oslash$ $'>'$ resp $'<'$ ist Ordnungsrelation.
- $\oslash$ $\forall_{q,r\in\mathbb{Q}}:\ r>q\ \dot\vee\ r=q\ \dot\vee\ r<q$
- $\oslash$ $\forall_{q,r\in\mathbb{Q}^+}:\ q+r>0\ \wedge\ q\cdot r>0$
- $\oslash$ $\forall_{q\in\mathbb{Q}^+,\ \ r\in\mathbb{Q}^-}:\ q\cdot r<0$
- $\oslash$ $\forall_{q,r\in\mathbb{Q}}:\ q\cdot r>0\ \wedge\ q>r\ \Rightarrow\ \frac{1}{r}>\frac{1}{q}$

4.4.5 Eigenschaften von Q – Qualités de Q

Eigenschaft der Dichtheit: $\mathbb{Q}$ ist **dicht**.

Das bedeutet : $\quad \forall_{q,r\in\mathbb{Q},\ \ q<r}\exists_{x\in\mathbb{Q}}:\ r<x<q.$

Archimedische Eigenschaft : $\forall_{q,r\in\mathbb{Q}^+}\exists_{n\in\mathbb{N}}:\ n\cdot r>q.$

p–adische Entwicklung

(Spezialfall: Dezimalbruchentwicklung.)

$\forall_{q\in\mathbb{Q},\ \ n\in\mathbb{N}}$: q lässt sich nach $\mathbb{N}$ eindeutig in einen periodischen Bruch (ev. abbrechenden) p-adischen Bruch entwickeln .

Umgekehrt stellt jeder solcher Bruch eine rationale Zahl dar.

4.5 Die Wurzel — La racine

Da die Wurzeln in den Mittelstufenschulen normalerweise ausführlich behandelt werden, sind hier nur Definitionen und Regeln wiedergegeben. Der Leser ist gebeten, die einfachen Beweise als Übung selber herzuleiten.

Auf die Natur der Wurzeln wollen wir dann später eingehen. Auf Seite 41 ff werden wir zeigen, dass die Wurzeln aus rationalen Zahlen in den häufigsten Fällen nicht mehr zu $\mathbb{Q}$, dafür aber zu $\mathbb{R}$ gehören.

4.5.1 Die Quadratwurzel — La racine quarrée

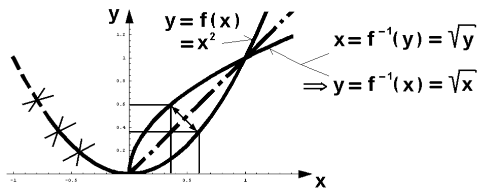
Sei $\quad f(x)=y=:=x^2=,\ \ x\in\mathbb{R}_0^+\ \ (x\geq 0)$

Definition: $\qquad f^{-1}(y):=\sqrt{y}=+\sqrt{y}$ ist die Umkehrfunktion von f auf $\mathbb{R}_0^+$

Skizze:

$$\begin{array}{ccc} x & \xmapsto{f} & y=x^2 \\ x=\sqrt{y} & \xleftarrow[f^{-1}]{} & y \end{array}$$

$\rightsquigarrow\ \ f^{-1}(y)=x:=+\sqrt{y}$



Regeln:

1 $x\in\mathbb{R}_0^+\ \Rightarrow\ (x^2=a\ \Leftrightarrow x=\sqrt{a}=+\sqrt{a})$

2 $+\sqrt{a}\geq 0$

3 $+\sqrt{a}\in\mathbb{R}\ \Rightarrow\ a=x^2\in\mathbb{R}_0^+$

4 $a\in\mathbb{R}_0^+\ \Rightarrow\ +\sqrt{a^2}=a$

5 $|a|=+\sqrt{a^2}$ (auch Definition)

6 $a,b\in\mathbb{R}_0^+\ \Rightarrow\ \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$

7 $a\in\mathbb{R}_0^+,b\in\mathbb{R}^+\ \Rightarrow\ \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

4.5.2 Die n–te Wurzel — La n–ème racine

1 Sei $n = 2\,m,\ \ m \in \mathbb{N},\ \ f(x) = y := x^n = ,\ \ x \in \mathbb{R}_0^+\ \ (x \geq 0)$ oder

2 Sei $n = 2\,m + 1,\ \ m \in \mathbb{N},\ \ f(x) = y := x^n = ,\ \ x \in \mathbb{R}$

Definition: $f^{-1}(y) := \sqrt{y} = \sqrt[n]{y}$ ist die Umkehrfunktion von f auf W_f

Definition: $a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}$

Konsequenz:

1 Sei $a \in \mathbb{R}_0^+\ \ (a \geq 0)\ \Rightarrow\ \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ definiert.

2 Sei $a \in \mathbb{R}^-\ \ (a < 0),\ \ n = 2\,m + 1,\ \ m \in \mathbb{N}\ \Rightarrow\ \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ definiert.

Regeln:

1 $\sqrt[n]{0} = 0^{\frac{1}{n}} = 0$ — Siehe Analysis.

2 $\sqrt[n]{1} = 1^{\frac{1}{n}} = 1$

3 $a \geq 0\ \Rightarrow\ \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \geq 0$

4 $a < 0,\ \ n = 2\,m + 1,\ \ m \in \mathbb{N}\ \Rightarrow\ \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = -\sqrt[n]{|a|} = -|a|^{\frac{1}{n}}$

5 $(a \geq 0)\ \Rightarrow\ \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$

6 $(a \geq 0)\ \Rightarrow\ \sqrt[n]{a^n} = (a^n)^{\frac{1}{n}} = a = (\sqrt[n]{a})^n = (a^{\frac{1}{n}})^n$

7 $a, b \in \mathbb{R}_0^+\ \Rightarrow\ \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b},\ \ a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}}$

8 $a \in \mathbb{R}_0^+, b \in \mathbb{R}^+\ \Rightarrow\ \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}},\ \ \dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}}$

Definition: $a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a},\ \ m \in \mathbb{N}_0 \leadsto\ \ a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m}$

$$a \neq 0 \leadsto\ \ a^{-\frac{1}{n}} = a^{\frac{-1}{n}} := \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}$$

Bemerkung: Für Wurzeln resp. Potenzen mit gebrochenen Exponenten gelten entsprechend die üblichen Rechenregeln wie für Poteznen mit ganzzahligen Exponenten (wie in $\mathbb{Q}$).

Regeln:

1 $a^{-\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^{-m}} = \sqrt[n]{\dfrac{1}{a^m}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[n]{\dfrac{1}{a^m}}$

2 $q := \dfrac{m}{n}\ \Rightarrow\ a^q \cdot b^q = (a \cdot b)^q$

3 $q := \frac{m}{n} \;\Rightarrow\; a^{q_1} \cdot a^{q_2} = a^{q_1+q_2}$

4 $q := \frac{m}{n} \;\Rightarrow\; (a^{q_1})^{q_2} = a^{q_1 \cdot q_2}$

5 u.s.w

4.6 Reelle Zahlen und Folgen — Nombres réels et suites

4.6.1 Darstellungsarten — Façons de représentation

Dezimalbrüche — Fractions décimales

In 3.3.1 auf Seite 14 haben wir die reellen Zahlen bereits getroffen. Sie bilden unsere wichtigste Grundmenge für Definitions– und Wertebereiche.

Von früher wissen wir, dass die reellen Zahlen diejenigen Zahlen sind, die als **Dezimalbrüche** darstellbar oder vorstellbar sind. Z.B. π oder e (**Eulersche Zahl**):

$$\pi = 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164\ldots$$

π ist nicht periodisch! Ebenso:

$$e = 2.7182818284590452353602874713526624977572470936999595749669676277240 77\ldots$$

Weiter sind bekanntlich die rationalen Zahlen genau diejenigen Zahlen, die sich auch als **periodische Dezimalbrüche** schreiben lassen und umgekehrt. Die Periode kann dabei auch 0 sein. Z.B.:

$$\frac{1}{4} = 0.25 = 0.250000000\ldots \quad \text{oder} \quad \frac{1}{7} = 0.142857142857142857\ldots$$

$\frac{a}{b} \leadsto$ Periodenlänge $< b$ (Wiederholung der Ziffern bei der Division, Vorrat beschränkt!).

Oder:

$x = 0.333\ldots \;\Rightarrow\; 10x = 3.333\ldots \;\Rightarrow\; 10x - x = 9x = 3.333\ldots - 0.333\ldots = 3 \;\Rightarrow\; x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow\; 3x = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1 = 3 \cdot 0.333\ldots = 0.999\ldots \;\Rightarrow\; 1 \stackrel{?}{=} 0.999\ldots\,?$

Stimmt das: $1 = 0.999\ldots$? — Das bedarf einer Erklärung. Wir müssen über die reellen Zahlen mehr in Erfahrung bringen!

Wir merken uns:

Wichtig:
$x \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow x$ darstellbar als unendlicher Dezimalbruch .
$x \in \mathbb{Q} \;\Leftrightarrow x$ darstellbar als unendlicher periodischer Dezimalbruch .

Bemerkung: Statt Dezimalbrüche (im Dezimalsystem, Basis 10) kann man auch p–**adische Brüche** (Basis p) mit beliebigem $p \in \mathbb{N},\ p > 1$ verwenden.

Kettenbrüche — Fractions continues

Beispiel eines **Kettenbruchs**:

$$x = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}} := 1 + \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{1\,|}{|\,1} + \cdots \left(= \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}\right)$$

$\leadsto$ Es gilt : $x = 1 + \dfrac{1}{x} \;\Rightarrow\; x^2 - x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Da sicher gilt $x \geq 0$, kommt nur die Lösung $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ in Frage.

Oder:

$$x = 1 + \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\ldots}}}} = 1 + \frac{\frac{1}{4}\,|}{|\,1} + \frac{\frac{1}{4}\,|}{|\,1} + \frac{\frac{1}{4}\,|}{|\,1} + \frac{\frac{1}{4}\,|}{|\,1} + \cdots \;\Rightarrow\; x = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

Interessanterweise gilt hier z.B.:

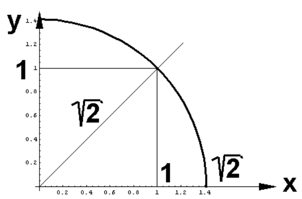
Lemma: $\sqrt{2}, \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$

Indirekter Beweis für $\sqrt{2}$:

Annahme: $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ gekürzter Bruch , $p, q \in \mathbb{N}$ (teilerfremd). $\Rightarrow\; 2 = \dfrac{p^2}{q^2} \;\Rightarrow\; 2q^2 = p^2 \;\Rightarrow\; p$ gerade $\;\Rightarrow\; p = 2k,\; k \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; 2q^2 = 4k^2 \;\Rightarrow\; q^2 = 2k^2 \;\Rightarrow\; q$ gerade $\;\Rightarrow\; p, q$ haben den gemeinsamen Teiler 2 $\;(ggT(p, q) > 1) \;\Rightarrow\;$ Widerspruch!

$\leadsto$ Annahme $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ falsch.

Bemerkenswert ist, dass sich einerseits $\sqrt{2}$ resp. $\sqrt{5}$ sofort als geometrische Strecke bestimmen lässt (Pythagoras: $1^2 + 1^2 = \sqrt{2}^2 = 2$), dass $\sqrt{2}$ resp. $\sqrt{5}$ einfache Kettenbruchentwicklungen haben, dass sie jedoch wegen $\sqrt{2}, \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ keine periodische Dezimalbruchentwicklungen haben.



Folgende Zahleneinteilung ist geläufig:

$$\begin{array}{lllll}
 & & & \mathbb{Z} \begin{array}{l}\nearrow \\ \searrow\end{array} & \begin{array}{l}\mathbb{N} \\ \mathbb{Z}_0^-\end{array} \\
 & \mathbb{Q} \ldots\ldots & \begin{array}{l}\nearrow \\ \rightarrow\end{array} & \text{gebrochen rat.} & \\
\mathbb{R} \begin{array}{l}\nearrow \\ \searrow\end{array} & & & & \\
 & \text{irrat.Z.} & \begin{array}{l}\rightarrow \\ \searrow\end{array} & \begin{array}{l}\text{algebraisch irrational} \\ \text{transzendent,z.B. } \pi\end{array} &
\end{array}$$

Irrationale Zahlen als nichtperiodische Dezimalbrüche lassen sich sofort aufschreiben, z.B.:

$$x = 0.101101110111101111101111110 11\ldots$$

Eine Möglichkeit, die reellen Zahlen mit Hilfe exakter mathematischer Grundlagen zu gewinnen, sind auch die **Dedekindschen Schnitte** (vgl. Lit.).

4.6.2 Zahlenerweiterung — Elargir les ensembles de nombres

Bekanntlich muss man die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ einführen, weil in den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ Gleichungen wie $2 + x = 1$ nicht lösbar sind. $\mathbb{Q}$ führt man ein, weil in $\mathbb{Z}$ Gleichungen wie $2 \cdot x = 1$ nicht lösbar sind. Und die irrationalen Zahlen muss man einführen, weil in $\mathbb{Q}$ Gleichungen wie $x^2 = 2$ nicht lösbar sind. Die letzte Gleichung nennt man **algebraisch**, weil sie mit den Mitteln der Arithmetik formulierbar ist. So gelangt man zu reellen Zahlen. Dabei begegnet man aber sofort zwei neuen Problemen: Einmal hat eine Gleichung wie $x^2 = -1$ in $\mathbb{R}$ keine Lösung. Man kann die Lösbarkeit solcher Gleichungen wieder erzwingen, indem man $\mathbb{R}$ zu den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ erweitert. Andererseits lässt sich z.B. die Zahl π nicht durch einen endlichen arithmetischen Ausdruck beschreiben, ist also nicht algebraisch. (Der Beweis dieser Tatsache ist recht kompliziert und daher momentan hier nicht möglich). Es zeigt sich jedoch, dass man Zahlen wie π oder e (Eulersche Zahl) durch „Grenzprozesse“ gewinnen kann. Z.B. wenn man die Folge $\langle a_n \rangle = \langle (1 + \frac{1}{n})^n \rangle$ studiert, so beobachtet man, dass sich a_n immer mehr e nähert (gegen e **konvergiert**), beliebig genau, wenn man n genügend gross wählt.

Wie wir später beim Studium der Folgen sehen werden, hat $\mathbb{R}$ Eigenschaften, die in $\mathbb{Q}$ nicht vorhanden sind. Zwar ist $\mathbb{Q}$ **dicht** (d.h. zwischen zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Q}$ gibt es immer eine dritte, z.B. $c = \frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q},\ a < c < b$). $\mathbb{Q}$ hat aber **Lücken**, z.B. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ oder $\pi \notin \mathbb{Q}$. $\mathbb{R}$ hingegen ist nicht nur dicht, sondern auch **lückenlos**. Zwischen die reellen Zahlen kann man nichts Vernünftiges, nicht Reelles, von reellen Zahlen durch endliche Differenzen Verschiedenes mehr einpacken. Später zeigen wir:

Satz:

1 Jede monotone und beschränkte Folge konvergiert in $\overline{\mathbb{R}}$:
$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ist „**abgeschlossen**“.

2 Jede nichtleere Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$, die eine **untere Schranke** hat (Zahl s unterhalb allen Elementen von M), hat auch eine maximale untere Schranke.

(Die Konvergenz wird später besprochen. Danach gilt z.B.:
$x = 0.9\bar{9}\ldots \Rightarrow 10\,x = 9.9\bar{9}\ldots \Rightarrow 9\,x = 9 \Rightarrow x = 1$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{0 + 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + \ldots + 10^{-n}}_{=0.999\ldots9} = 1$ d. h. $1 - 0.\underbrace{999\ldots9}_{n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$)

Konsequenz:
Reelle Zahlen sind daher Klassen von Dezimalbrüchen mit gleichem Grenzwert.

4.6.3 Das Problem der Mächtigkeiten unendlicher Mengen — Le problème de la puissance des ensembles infinis

Zwei endliche Mengen nennen wir bekanntlich **gleichmächtig**, wenn sie die gleiche Anzahl Elemente haben — oder, was dasselbe bedeutet, wenn sich die Elemente gleich durchnummerieren oder bijektiv aufeinander abbilden lassen. Wie ist das nun entsprechend bei sogenannten „unendlichen Mengen“ wie $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$? Ersichtlicherweise hat es in $\mathbb{Q}$ oder in $\mathbb{R}$ Zahlen, die in $\mathbb{N}$ fehlen: Es hat also in $\mathbb{N}$ weniger Zahlen als etwa in $\mathbb{R}$. Es gilt ja $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Andererseits hat es in $\mathbb{N}$ und in $\mathbb{R}$ unendlich viele

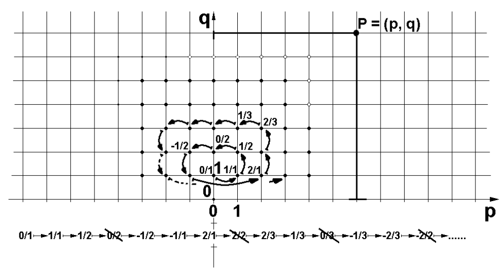
Elemente. Ist daher etwa „weniger unendlich“ wie in $\mathbb{N}$ das Gleiche wie „mehr unendlich“ wie in $\mathbb{R}$ — oder ist es anders? Man merkt schon: Unendlich ist noch kein scharf gefasster Begriff. Er bedarf einer Untersuchung oder Präzisierung. Den Anstoss zu solchen Untersuchungen hat Kummer[1] gegeben mit seiner Mengenlehre oder „Theorie der transfiniten Kardinalzahlen“ (d.h. überendliche Mächtigkeiten).

Um die Mächtigkeit zweier unendlicher Mengen vergleichen zu können, definieren wir:

Definition: M gleichmächtig wie N
$(|M| = |N|) \ : \ \Leftrightarrow \exists_{Bijection\ f} : M \overset{f\ bji.}{\longmapsto} N$
Falls alle f höchstens injektiv, nie aber surjektiv sind:
$$|M| < |N|$$

Wir wollen nun zeigen: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$. ($\Rightarrow$ $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$.)
Das gelingt, wenn wir jeder rationalen Zahl $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ eine Nummer (oder ein Index) $n \in \mathbb{N}$ zuordnen können. Dann haben wir $\mathbb{Q}$ abgezählt oder bijektiv auf $\mathbb{N}$ abgebildet.

Trage dazu die Zahlen $\frac{p}{q}$ in ein Koordinatensystem ein. $\frac{p}{q}$ ist eindeutig einem Punkt $P_{p,q} = (p, q)$ zugeordnet. Diese Punkte lassen sich wie folgt abzählen: Gehe die Punkte vom Ursprung aus einer Spirale folgend im Gegenurzeigersinn durch, einer nach dem andern, und verteile jedem Punkt eine Nummer, falls er eine Zahl darstellt, die noch nicht vorgekommen ist. Auf diese Weise erhält jede rationale Zahl eine Nummer. $\mathbb{Q}$ ist daher so abgezählt.



Lemma: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$

$\rightsquigarrow$ **Problem:** Wie verhält es sich mit $|\mathbb{Q}|$ und $|\mathbb{R}|$?

Wir wollen zeigen: $|\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$ indem wir wesentlich mehr zeigen:

Lemma: $|\mathbb{Q}| < |[0, 1]|$

$[0, 1] \subset \mathbb{R}$ ist die Menge Zahlen, deren Dezimalbrüche, die mit '0.' beginnen. $(1 = 1.00\bar{0}\ldots = 0.99\bar{9}\ldots)$
Wir führen die Begründung indirekt: Wir nehmen an, es gelte $|\mathbb{Q}| = [0, 1]$. D.h. die Zahlen im Intervall $[0, 1]$ lassen sich vollständig durchnummerieren: . Z.B. :

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.z_{11}z_{12}z_{13}z_{14}\ldots \\ x_2 &= 0.z_{21}z_{22}z_{23}z_{24}\ldots \\ x_3 &= 0.z_{31}z_{32}z_{33}z_{34}\ldots \\ x_4 &= 0.z_{41}z_{42}z_{43}z_{44}\ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Es gilt demnach:
$\{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\} = \{x_1 \mid i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q}$

[1] Kummer: 1810-1893

mit $z_{ij} \in Z = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (Ziffern)

Nun kann man aber sofort eine Zahl $x = r \in [0, 1]$ konstruieren, die nicht in der Liste resp. Aufzählung vorkommt:
Sei $r = 0.z_1 z_2 z_3 z_4 \ldots,\ z_i \in Z = \{0, \ldots, 9\}$. Wähle für diese Konstruktion: $z_1 \neq z_{11},\ z_2 \neq z_{22},\ z_3 \neq z_{33} \ldots,\ z_i \neq z_{ii},$. (Wegen $z_i \neq z_{ii}$ stehen für z_i jeweils 9 Ziffern zur Auswahl!)
$\Rightarrow\ r \neq x_1$ (da $z_1 \neq z_{11}$), $r \neq x_2,\ r \neq x_3 \ldots r \neq x_i \ldots \Rightarrow\ r$ fehlt in der Liste, die Nummerierung ist nicht vollständig.

$\rightsquigarrow$ **Problem:**

Lässt sich $\mathbb{C}$ so wie $\mathbb{R}$ ordnen?

Untersuchungen zeigen, dass man sehr einfach in $\mathbb{C}$ eine strenge Ordnungsrelation definieren kann. Jedoch ist bis jetzt keine totale Ordnung bekannt, die elementargeometrisch Sinn macht. Der Preis für die Erweiterung von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{C}$ ist also der Verzicht auf eine geometrisch sinnvolle Ordnung.

Bsp.:

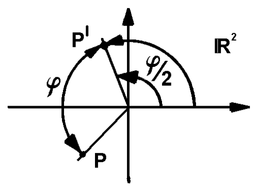
(Definition einer Ordnungsrelation in $\mathbb{C}$:)

Wir werden dabei zeigen:

Lemma: $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^2| = |\mathbb{C}|$

(In der Algebra wird gezeigt, dass man die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ als Punkte einer Ebene auffassen kann.)

Seien $(x, y) \in \mathbb{R}^2_{y+} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+_0$ $(y \geq 0)$.
$\mathbb{R}^2 \xmapsto{bij.} M_2$ mit $\varphi \xmapsto{bij.} \dfrac{\varphi}{2}$,
$\mathbb{R}^2 \xmapsto{bij.} M_4$ mit $\varphi \xmapsto{bij.} \dfrac{\varphi}{4}$,
$\mathbb{R}^2 \xmapsto{bij.} M_{3/4}$ mit $\varphi \xmapsto{bij.} \dfrac{3\,\varphi}{4}$



$\Rightarrow\ |M_4| = |M_2| = |M_{3/4}| = |\mathbb{R}^2|$ (*Bij.*) $\wedge\ M_4 \subset M_2 \subset \mathbb{R}^2_{y+} \subset M_{3/4} \subset \mathbb{R}^2\ \Rightarrow\ |\mathbb{R}^2_{y+}| = |\mathbb{R}^2|$
Trotz der Anschaulichkeit obiger Abbildung haben wir noch keine Bijektivität. Das kann man aber wie folgt erreichen:

Sei

$$f(x) = \begin{cases} (\dfrac{1}{1-x}) - 1 & x \in [0, 1) \\ -x + 1 & x \in [1, \infty) \end{cases}$$

f bildet $\mathbb{R}^+_0$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ ab. $\rightsquigarrow$ $h = f^{-1}$ bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}^+_0$ ab.

$\rightsquigarrow$ Mit h können wir daher $\mathbb{C}$ auf die obere komplexe Halbebene ($Im(z) \geq 0$) abbilden.

$\leadsto$ Seien somit: $z_1 = a_1 + i\,b_1,\ \ z_2 = a_2 + i\,b_2,\ \ a_k \in \mathbb{R},\ \ b_k \in \mathbb{R}_0^+ . \leadsto\ \ Im(z) \geq 0$

$\leadsto\ \ x = v_j\, v_{j-1} \ldots v_2\, v_1 . x_1\, x_2\, x_3 \ldots,\ \ y = w_k\, w_{k-1} \ldots w_2\, w_1 . y_1\, y_2\, y_3 \ldots,\ \ v_i, x_i, w_i . y_i \in Z = \{0, \ldots, 9\}$
Betrachte den Fall $j \geq k$. Fülle nun y vorne bis zur j–ten Stelle mit 0 auf.
$\leadsto\ \ y = 0_j\, 0_{j-1} \ldots 0_{k+1}\, w_k\, w_{k-1} \ldots w_2\, w_1 . y_1\, y_2\, y_3 \ldots := w_j\, w_{j-1} \ldots w_{k+1}\, w_k\, w_{k-1} \ldots w_2\, w_1 . y_1\, y_2\, y_3 \ldots$

Für die Abbildung $(x, y) \in \mathbb{R}^2_{y \geq 0} \longmapsto z \in \mathbb{R}$ „mischen" wir die Dezimalbrüche wie folgt:

$$(x, y) := (x/y) = (v_j\, v_{j-1} \ldots v_2\, v_1 . x_1\, x_2\, x_3 \ldots /\ w_j\, w_{j-1} \ldots w_2\, w_1 . y_1\, y_2\, y_3 \ldots) \longmapsto z = \\ = v_j\, w_j\, v_{j-1}\, w_{j-1} \ldots v_2\, w_2\, v_1\, w_1 . x_1\, y_1\, x_2\, y_2\, x_3\, y_3 \ldots$$

mit $sgn(z) := sgn(x)$
(Für $j \leq k$ argumentiert man ebenso.)

Ersichtlicherweise ist diese Abbildung „beinahe" bijektiv, denn die „Entmischung" bei der Rückabbildung geht stellenweise eindeutig und ist somit problemlos möglich.
Es besteht noch das Problem, dass einige reelle Zahlen nicht eindeutig darstellbar sind.

Bsp.: $1.000\bar{0} \ldots = 0.999\bar{9} \ldots$

Das Problem besteht aber nur für abzählbar viele periodische Dezimalbrüche, d.h. für rationale Zahlen, für die gilt:

$$|\mathbb{Q}|\ <\ |\mathbb{R}|,\ \ |\mathbb{Q}| + |\mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$$

$$\leadsto\quad \exists_f\ \mathbb{R} \overset{f\ bji.}{\longmapsto} \mathbb{R}^2 \qquad ☺$$

Als erste Konsequenz haben wir nun:

Satz: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^2| = |\mathbb{C}|$

Konsequenz: Es gibt somit verschiedene Typen von „unendlich": Z.B. ∞ vom Typ $|\mathbb{N}|$ ($\leadsto \infty_{\mathbb{N}}$) oder ∞ vom Typ $|\mathbb{R}|$ ($\leadsto \infty_{\mathbb{R}}$)

Wir werden weiter unten sehen, dass für immer grösser werdende n (n geht „gegen unendlich") die Folgenglieder $a_n = \frac{1}{n}$ von $\langle a_n \rangle$ immer näher zu 0 rücken, was uns dann später zu Feststellungen wie „$\frac{1}{0^+} = \infty$" führt. Daraus sieht man, dass zu verschiedenen Typen von ∞ auch verschiedene Typen von 0 gehören müssen, eine Entdeckung, die sich in der „Non–Standard–Analysis" ausbeuten lässt. Elemente aus diesem Bereich werden uns für die Anschaulichkeit und das Verständnis im Folgenden eine grosse Hilfe sein.

Konsequenz: Dimension $\neq$ Mächtigkeit

4.6.4 Weitere Resultate — D'autres résultats

Siehe Seite 44:

$((\frac{p}{q} \hat{=} P_{p,q} = (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N})\ \wedge\ (|\mathbb{Z} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|))\ \Rightarrow\ \mathbb{Q} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$
$\leadsto\ \ (|A_1| = |A_2| = |\mathbb{N}|\ \Rightarrow\ |A_1 \times A_2| = |\mathbb{N}|$
$\leadsto\ \ (|A_1| = \ldots = |A_k| = |\mathbb{N}|)\ \Rightarrow\ |A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k| = |\mathbb{N}|$

Satz: $(|A_1| = \ldots = |A_k| = |\mathbb{N}|) \Rightarrow |A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k| = |\mathbb{N}|$

Analog sieht man (vgl. Seite 46):

Satz: $(|A_1| = \ldots = |A_k| = |\mathbb{R}|) \Rightarrow |A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k| = |\mathbb{R}|$

Weiter gilt:

Satz: $|A| < |\mathbb{N}| \Rightarrow |A| \in \mathbb{N}_0$

Zum Beweis: Sonst Widerspruch zum zornschen Lemma (Lit.).

Satz: $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |[0,1]| = |\mathbb{R}| < |\mathcal{P}(\mathbb{R})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))| < \ldots$

Zum Beweis:

1 $f : x \overset{bij.}{\longmapsto} f(x) = \frac{1}{x} \leadsto f : (0,1] \overset{bij.}{\longmapsto} [1,\infty) \leadsto |[0,1]| = |(0,1]| = |[1,\infty)|$

$|[0,1]| = |[1,\infty)| \wedge [0,1] \cup [1,\infty) = \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow |[0,1]| = |\mathbb{R}_0^+|$

$|\mathbb{R}_0^+| = |\mathbb{R}^-| \wedge \mathbb{R}_0^+ \cup \mathbb{R}^- = \mathbb{R} \Rightarrow |[0,1]| = |\mathbb{R}_0^+| = |\mathbb{R}|$

2 Sei $z_k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ (Ziffern)
$\leadsto$ binär: $z_k \hat{=} b_k \in \{0,1,10,11,100,101,110,111,1000,1001\}$.

Entsprechend im 11–er System:
$z_k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \hat{\subset} \{0_{(11)}, 1_{(11)}, 2_{(11)}, 3_{(11)}, 4_{(11)}, 5_{(11)}, 6_{(11)}, 7_{(11)}, 8_{(11)}, 9_{(11)}, A_{(11)}\}$

Sei $z = 0.z_1 z_2 z_3 z_4 \ldots \in [0,1) \leadsto \exists_{f\ inj.} : [0,1) \overset{inj.}{\longmapsto} \mathcal{P}(\mathbb{N})$:
$$z = 0.z_1 z_2 z_3 z_4 \ldots \overset{inj.}{\longmapsto} M = \{z_1, z_{2,3}, z_{4,5,6}, z_{7,8,9,10}, \ldots\},\quad M \in \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

Dabei ist:
$z_1 : \hat{=} A_{(11)} z_{(11);1} \in \mathbb{N},\ z_{2,3} : \hat{=} A_{(11)} z_{(11);2} z_{(11);3} \in \mathbb{N},\ z_{4,5,6} : \hat{=} A_{(11)} z_{(11);4} z_{(11);5} z_{(11);6} \in \mathbb{N} \ldots$
Wegen der Anzahl Ziffern gilt: $z_1 < z_{2,3} < z_{4,5,6} < \ldots$ Durch die vorgestellte $A_{(11)}$ wird erreicht, dass die jeweils entstehende Zahl $z_{\ldots}$ nicht mit 0 beginnen kann und so die Ordnung nicht mehr stimmt.
$$\Rightarrow |[0,1)| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$$

3 Sei $M \in \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ M = \{n_1, n_2, n_3, n_4, \ldots\} \in \mathbb{N}$ mit $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \ldots$.

$\leadsto \exists_{f_1\ inj.} : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \overset{inj.}{\longmapsto} [0,1),\ \mathcal{P}(\mathbb{N}) \ni M = \{n_1, n_2, n_3, n_4, \ldots\} \overset{inj.}{\longmapsto} z \in [0,1)$

Dabei ist:
$n_1 = b_1,\ n_2 = b_2,\ n_3 = b_3, \ldots, b_k =$ Binärdarstellung von n_k
und $z := 0.b_1 2 b_2 2 b_3 2 b_4 2 \ldots$
Durch die eingeschobene 2 wird jeweils die eindeutige Trennung der verwendeten Binärzahlen garantiert. Damit wird die Abbildung f_1 injektiv.

$$\Rightarrow\ |\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |[0,1)|$$

4
$$(|[0,1)| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|)\ \wedge\ (|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |[0,1)|)\ \Rightarrow\ |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |[0,1)| = |\mathbb{R}|$$

5 Sei $|\mathbb{N}| \leq |M|$

Vor.: $\exists_{f\ bij.} :\ M \overset{bij.}{\longmapsto} \mathcal{P}(M)$ $\quad \rightsquigarrow$ Frage: $|M| < |\mathcal{P}(M)|$?

Sei $T = \{m_j \mid m_j \notin f(m_j) \subset \mathcal{P}(M),\ j \in \{Ind.\}\}$,

$\{Ind.\} =$ Indexmenge

Es gilt: $T \neq \{\}$
Ansonst: $T = \{\} \rightsquigarrow\ \forall_{m_k} :\ \{m_k\} \in \mathcal{P}(M)\ \wedge\ f^{-1}(\{m_k\}) = m_k$
$\rightsquigarrow$ f nicht injektiv, alle Bilder haben Mächtigkeit 1.

$$\rightsquigarrow T \neq \{\}$$

$\rightsquigarrow\ \exists_{f\ bij.,\ x_0} :\ M \overset{inj.}{\longmapsto} \mathcal{P}(M)\ \wedge\ T = f(x_0) \in \mathcal{P}(M),\ x_0 = f^{-1}(T)$

Sei $x_0 \notin T = f(x_0)\ \Rightarrow\ x_0 \in T$ (nach Def. von T)
Sei $x_0 \in T = f(x_0)\ \Rightarrow\ x_0 \notin T$ (nach Def. von T)
$\Rightarrow\ (x_0 \in T\ \Leftrightarrow x_0 \notin T) \rightsquigarrow$ Widerspruch!

$\rightsquigarrow$ Voraussetzung falsch! $\rightsquigarrow\ \neg\exists_{f\ bij.} :\ M \overset{bij.}{\longmapsto} \mathcal{P}(M)$

Es gilt: $(|\mathbb{N}| \leq |M|\ \wedge\ M \subset \mathcal{P}(M))\ \Rightarrow\ |\mathbb{N}| \leq |M| < |\mathcal{P}(M)|$

Kapitel • Chapitre 5

Vektoren – Vecteurs

5.1 Koordinatenunabhängige Vektorrechnung – Calcul vectoriel sans système de coordonnés

5.1.1 Inhalt, Grundlagen – Contenu, fondements

Im Folgenden geht es um den Ausbau von Vektorgeometrie und Vektoralgebra. Grundlage ist dabei der Stoff, der für die Berufsmatur verlangt wird. Zur Vereinheitlichung von Notation und Begriffssprache müssen hier einige bekannte Dinge in Kürze nochmals dargestellt werden.

Hier nicht repetierte Grundlagen für die Theorie: Euklidsche Geometrie, Translationen, Pfeile, Äquivalenzklassen u.s.w. .

Definition des Vektors in der Vektorgeometrie: Vektor = Äquivalenzklasse gleichgerichteter gleichlanger Pfeile.

$\leadsto$ Ein Vektor definiert geometrisch eine **Translation** aller Punkte der Ebene, des Raumes, ...

Repräsentant eines Vektors: Um einen Vektor zu definieren, genügt es, einen einzigen Pfeil der Äquivalenzklasse anzugeben. Ein solcher heisst **Repräsentant** (der Klasse).

Skalar: Element eines Körpers (vorläufig geordnet), z.B. Zahl $\in \mathbb{R}$, Zahl $\in \mathbb{Q}$ u.s.w..

Unscharfe Schreibweise : $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.
(Exakter : $\vec{a} \hat{=} \overrightarrow{AB}$.)

Symbole : Pfeil : $\leadsto$ $\overrightarrow{AB}$.

Vektor: $\leadsto$
$$\vec{a} = \{\overrightarrow{PQ} \mid (|PQ| = |AB|) \wedge (\overrightarrow{PQ} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB})\}$$

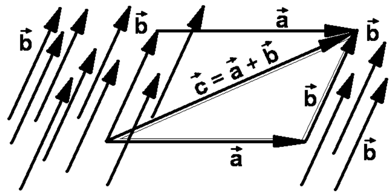
($\uparrow\uparrow$: Gleiche Richtung .)

Länge eines Vektors (Norm, Betrag) :
$$|\vec{a}| \; (= \|\vec{a}\|) := |\overrightarrow{AB}| = a \text{ (Skalar } \in \mathbb{R}_0^+).$$

5.1.2 Zur Addition – Quant à l'addition

$\leadsto$ **Addition :**

Geometrisch definierbar durch Parallelogrammaddition



Sei $\quad V := \{$Geom. Vekt. d. Ebene bzw. Raum $\}$.

Definition:

Summe
$\vec{c} := \vec{a} + \vec{b}$:= zusammengesetzte Translation
$\leadsto \quad \overrightarrow{AC} := \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$\leadsto$ Koordinatenunabhängig!

Satz: $\quad |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ (Dreiecksungleichung)

Speziell :

$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ für $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$
$|\vec{a} + \vec{b}| = ||\vec{a}| - |\vec{b}||$ für $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$

Regeln:

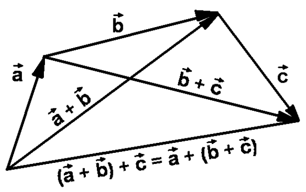
1 $(V, +)$ ist **abgeschlossen** .

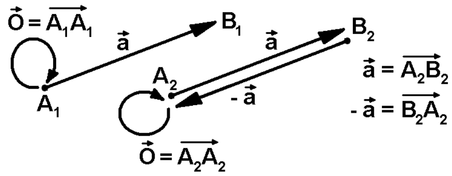
2 **Kommutativgesetz :** $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

3 **Assoziativgesetz** : $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

4 Def. **Nullvektor** : $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$
$\leadsto \quad |\vec{0}| = 0, \qquad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

5 **Inverser Vektor** :
Def. : $\vec{a} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow -\vec{a} := \overrightarrow{BA}$ $\qquad \leadsto \quad \forall_{\vec{a} \in V} : \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

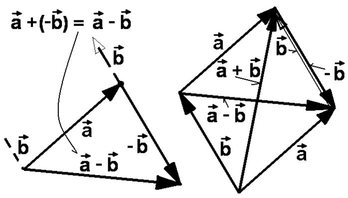


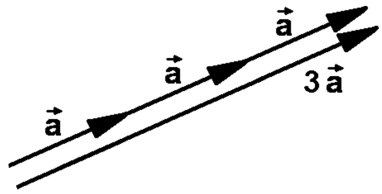


Satz: $\quad \leadsto \quad (V, +)$ ist abelsche Gruppe

Definition: : (Subtraktion)

$$\vec{a} - \vec{b} := \vec{a} + (-\vec{b})$$





5.1.3 Streckung von Vektoren – Allongement de vecteurs

Idee: Benütze geometrische Streckung eines Pfeils.

Bsp.: Für Pfeile:
Sei $\overrightarrow{AB}: \hat{=}\, \overrightarrow{BC}$ falls $(|\,\overrightarrow{AB}\,| = |\,\overrightarrow{BC}\,| \wedge \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC})$
$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}: \hat{=}\, 2 * \overrightarrow{AB}$, $(-\overrightarrow{AB}) + (-\overrightarrow{AB}) := (-2) * \overrightarrow{AB}$.

Allgemeiner: : Sei $\lambda > 0$:
$\lambda * \overrightarrow{AB} :=$ Geometrisch gestreckter Pfeil mit der λ–fachen Länge (gleicher Anfangspunkt, parallel). .

Sei $\lambda < 0: \ \lambda * \overrightarrow{AB} := |\lambda| * \overrightarrow{BA}$

Allgemeiner für Vektoren: :

Definition: : $\lambda * \vec{a} \,\hat{=}\, \lambda * \overrightarrow{AB} \leadsto$ Kurz
($\lambda * \vec{a}$, $\lambda\,\vec{a}$:)

$\leadsto$ Koordinatenunabhängig!

Aus elementargeometrischen Gründen gilt:

Konsequenz: $|\lambda * \overrightarrow{AB}\,| = |\lambda| \cdot |\,\overrightarrow{AB}\,|$ oder $|\lambda * \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

Folgende einfache Regeln und Gesetze sieht man geometrisch ein: :

Regeln:

1 $1 * \vec{a} = \vec{a}$

2 $\lambda * \vec{0} = \vec{0}$

3 $(-\lambda) * \vec{a} = -(\lambda * \vec{a}) = (\lambda) * (-\vec{a})$

4 Distr.1: $(\lambda + \mu) * \vec{a} = \lambda * \vec{a} + \mu * \vec{a}$

5 Distr.2: $\lambda * (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda * \vec{a} + \lambda * \vec{b}$

6 Ass.: $(\lambda \cdot \mu) * \vec{a} = \lambda * (\mu * \vec{a})$

5.1.4 Allgemeine Vektordefinition – Définition générale des vecteurs

Sei V = Menge mit $(V, +)$ = abelsche Gruppe.
Sei K = Menge mit $(K, +, \cdot)$ = Körper.

Definition: : (Vektorraum) $((V,+),\ (K,+,\cdot),\ *)\ :=\ (V^{(+)},K^{(+,\cdot)},*)$ heisst **Vektorraum**

$:\Leftrightarrow$ es gilt $\forall_{\vec{a},\vec{b}\in V,\ \ \lambda,\mu\in K}$

1 Distr.1: $(\lambda+\mu)*\vec{a}=\lambda*\vec{a}+\mu*\vec{a}$

2 Distr.2: $\lambda*(\vec{a}+\vec{b})=\lambda*\vec{a}+\lambda*\vec{b}$

3 Ass.: $(\lambda\cdot\mu)*\vec{a}=\lambda*(\mu*\vec{a})$

4 $1*\vec{a}=\vec{a}$

Bemerkung:

$1*\vec{a}=\vec{a}$ muss als Axiom vorausgesetzt werden, denn sonst könnte $\lambda*\vec{a}=\vec{0}$ für alle $\vec{a}\neq\vec{0}$ nicht ausgeschlossen werden. Hingegen lässt sich $1*\vec{a}=\vec{a}$ für geometrische Vektoren geometrisch herleiten.

Folgerungen:

1 $\lambda*\vec{0}=\lambda*(\vec{0}+\vec{0})=\lambda*\vec{0}+\lambda*\vec{0}\ |\quad +(-(\lambda*\vec{0}))$ $\Rightarrow$ **Regel:** $\vec{0}=\lambda*\vec{0}$

2 $0*\vec{a}=(0+0)*\vec{a}=0*\vec{a}+0*\vec{a}\ |\quad +(-(0*\vec{a}))$ $\Rightarrow$ **Regel:** $\vec{0}=0*\vec{a}$

3 $(\lambda*\vec{a})+((-\lambda)*\vec{a})=(\lambda+(-\lambda))*\vec{a}=0*\vec{a}=\vec{0}\ |$ $\Rightarrow$ **Regel:** $(-\lambda)*\vec{a}=-(\lambda*\vec{a})$

4 $\vec{0}=\lambda*\vec{0}=\lambda*(\vec{a}+(-\vec{a}))=\lambda*\vec{a}+\lambda*(-\vec{a})\ |\quad +(-(\lambda*\vec{a}))$
$\Rightarrow$ **Regel:** $-(\lambda*\vec{a})=\lambda*(-\vec{a})$

Bemerkung:

Ein Element $\in V$ heisst **Vektor**, ein Element $\in K$ heisst **Skalar**.

Beispiele:

- $\oslash$ $(V^{(+)},K^{(+,\cdot)},*)=(\mathbb{Q}^{(+)},\mathbb{Q}^{(+,\cdot)},*)$
- $\oslash$ $(\mathbb{R}^{(+)},\mathbb{R}^{(+,\cdot)},*)$
- $\oslash$ $(\mathbb{R}^{(+)},\mathbb{Q}^{(+,\cdot)},*)$
- $\oslash$ $(\mathbb{Z}_p^{(+)},\mathbb{Z}_p^{(+,\cdot)},*)$
- $\oslash$ u.s.w. .
- $\oslash$ $(\mathbb{Z}^{(+)},\mathbb{Q}^{(+,\cdot)},*)$ ☹
- $\oslash$ $(\mathbb{Q}^{(+)},\mathbb{R}^{(+,\cdot)},*)$ ☹
- $\oslash$ $V=\{\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\},\qquad \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\\vdots\\a_2+b_2\end{pmatrix},\qquad \lambda\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}\lambda a_1\\\lambda a_2\\\vdots\\\lambda a_n\end{pmatrix}$

- ⊘ Z.B. Vektoren mir zwei Komponenten $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Bekannt aus der Vektorgeometrie.
- ⊘ Polynome vom Grade n.
- ⊘ In einem Punkt absolut konvergente Potenzreihen.
- ⊘ U.s.w.

5.1.5 Unterraum, direkte Summe – Sous–espace vectoriel, somme directe

Sei $(V^{(+)}, K^{(+,\cdot)}, *) = VR$

Definition: : (Unterraum, Teilraum) $(U^{(+)}, K^{(+,\cdot)}, *)$ ist **Unterraum (Teilraum)** von $(V^{(+)}, K^{(+,\cdot)}, *)$

Bsp.:

$$V = \{\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\} \text{ mit } : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \text{ und } \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}.$$

$$U = \{\vec{a}\,' = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\} \text{ mit } : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\leadsto$ $\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ ist Unterraum von $\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$

$\leadsto$ Vektoren mir zwei Komponenten. $\leadsto$ $\vec{a}\,' \hat{=} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Geg.: $(W^{(+)}, K^{(+,\cdot)}, *) = VR$ mit : $(U^{(+)}, K^{(+,\cdot)}, *), (V^{(+)}, K^{(+,\cdot)}, *)$ Unterräume

Definition: : (Summe) $U + V := \{\vec{x} = \vec{u} + \vec{v} \mid \vec{u} \in U \ \wedge \ \vec{v} \in V\} \subseteq W$

Man siehr unmittelbar, dass das folgende Lemma gilt: On voit directement que le lemme suivant est valable:

Lemma:

Vor.:

U, V lineare Teilräume von W

Beh.:

$U + V$ linearer Teilräum von W

Definition: : (Direkte Summe) $U \oplus V = W \ \Leftrightarrow \forall_{\vec{x} \in W} \ \exists!_{\vec{u} \in U, \vec{v} \in V} \ : \ \vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$

Bemerkung: Direkte Summe bedeutet also, dass die Zerlegung $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ eindeutig ist.

Bsp.: $(\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

5.1.6 Lineare Abhängigkeit – Dépendance linéaire

Im Folgenden werden auch einige Begriffe aufgeführt, die von früheren Schulen her bekannt sein sollten.

Definition: : (Linearkombination) $\vec{v}$ Linearkombination von $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}$

$$:\Leftrightarrow \ \exists_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R} \text{ resp. } \in K, \ \ \lambda_k \neq 0} : \ \vec{v} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{v_k}$$

(Kurz : LK)

Statt von einer „Linearkombination“ von Vektoren kann man auch von einer „Vektorkette“ sprechen.

Geometrie:

Kollineare[19] **Vektoren** $(\vec{a} \overset{\text{col}}{\sim} \vec{b} \ \vee \ (\vec{a} \uparrow\uparrow \lambda \cdot \vec{b}) \ \vee \ (\vec{b} \uparrow\uparrow \lambda \cdot \vec{a}))$:

$$\vec{a} \overset{\text{col}}{\sim} \vec{b} \ :\Leftrightarrow \ \exists_{\lambda \in \mathbb{R}} : \ (\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}) \ \vee \ (\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a})$$

Satz:

<u>**Vor.:**</u>

$$\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$$

<u>**Beh.:**</u>

$$\vec{a} \overset{\text{col}}{\sim} \vec{b} \ \Leftrightarrow \ \exists_{\lambda_1, \lambda_2 \neq 0} : \ \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} = \vec{0}$$

(Kontraposition : $\neg(\vec{a} \overset{\text{col}}{\sim} \vec{b}) \ \Leftrightarrow \ (\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} = \vec{0} \ \Rightarrow \ \lambda_1 = \lambda_2 = 0)$)

<u>**Beweis:**</u> Geometrisch.

Komplanare Vektoren :

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \overset{\text{com}}{\sim} \Phi : \ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \ || \text{ Ebene } \ \Phi$$

Satz:

<u>**Vor.:**</u>

$$\vec{a} \not\parallel \vec{b}, \ \ \Phi = \Phi(O, \vec{a}, \vec{b}), \ \ \vec{c} \overset{\text{com}}{\sim} \Phi$$

<u>**Beh.:**</u>

$\vec{c}$ LK (von $\vec{a}, \vec{b}$).

D. h. : $\exists_{\lambda_1, \lambda_2} : \ \vec{c} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}$.

D.h. $\vec{c}$ eindeutig zerlegbar nach $\vec{a}, \vec{b}$

[19] Lat. con linea → col linea

Beweis:

Geometrisch: Wähle Repräsentanten $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ von O aus. $\leadsto$ $\lambda_1 \, \vec{a}, \; \lambda_2 \, \vec{b}, \; \lambda_i \neq 0$ spannen ein Parallelogramm auf. $\vec{c} = \lambda_1 \, \vec{a} + \lambda_2 \, \vec{b}$ repräsentiert die Diagonale...

(Kontraposition :

Satz: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nicht komplanar

$$:\Leftrightarrow \; (\lambda_1 \, \vec{a} + \lambda_2 \, \vec{b} + \lambda_3 \, \vec{c} = \vec{0} \; \Rightarrow \; \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0)$$

Satz: **Vor.:**

Gegeben :
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ (im Raum),

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nicht komplanar

Beh.:

$\exists_{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)} : \; \vec{d} = \lambda_1 \, \vec{a} + \lambda_2 \, \vec{b} + \lambda_3 \, \vec{c}$,
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ eindeut. .

D. h. :
$\vec{d}$ eindeutig zerlegbar nach $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Beweis:

Im Raum mit Parallelepiped oder Spat analog dem 2–dimensionalen Fall.

Begriffe (Vgl. letzter Satz):

Sei $\vec{d}$ *LK* von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. $\leadsto$

Definition:

- ▷ $\lambda_1\vec{a}, \lambda_2\vec{b}, \lambda_3\vec{c}$: **Vektorielle Komponenten** von $\vec{d}$.
- ▷ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$: **Skalare Komponenten** $\vec{d}$.
- ▷ $V = \{$Vektoren $\} \leadsto$ **linear unabhängig**
  $:\Leftrightarrow$ keiner ist *LK* der andern .

$\leadsto$ Analogie: Kollinear — komplanar — linear abhängig.

Symbol: *l.u.*

Andernfalls **linear abhängig**

Symbol: *l.a.*.

(Im Raum bedeutet *l.a.* auch komplanar, in der Ebene auch kollinear.)

Konsequenzen:

Vor.: Sei $V = \{\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n}\}$

1 **Beh.:**

$$V \;\; l.a. \Leftrightarrow \exists_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R} \text{ resp. } \in K,\;\; \lambda_k \neq 0} : \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, \vec{v_k} = \vec{0}$$

2 **Beh.:**

$$V \;\; l.u. \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, \vec{v_k} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \forall_{i=1}^{n} : \;\lambda_i = 0, \;\; \lambda_k \neq 0$$

(D.h.: keiner der Vektoren nach den andern in Komponenten zerlegbar .)

Wichtig:

Statt zu sagen „$\vec{v}$ ist von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots$ linear abhängig“ kann man auch sagen **die Vektoren** $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots$ **spannen den Vektor** $\vec{v}$ **auf**.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \, \vec{a} + \mu \, \vec{b} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \lambda, \mu = ?$$

$$\begin{array}{rcl} 3 & = & \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 4 \\ 2 & = & \lambda \cdot 3 + \mu \cdot 1 \end{array} \qquad \leadsto \; \lambda = \frac{1}{3}, \;\; \mu = \frac{2}{3}$$

Bemerkung: Dass eine Menge von Vektoren linear unabhängig ist, bedeutet auch, dass es eine für „nicht triviale Nullsumme“ $\sum \lambda_i \, \vec{v}_i$ gibt, d.h. $\exists \; \lambda_i \neq 0$.

5.1.7 Basen – Des bases

Geg.: $VR = (V^{(+)}, K^{(+,\cdot)}, *)$.

Definition: $M \subseteq V$ heisst **Erzeugendensystem** von V :⇔ $\forall_{\vec{v} \in V} : \; \vec{v}$ ist *LK* von Vektoren $\in M$.

M heisst **Basis** von *VR* :⇔ M ist *l.u.* Erzeugendensystem von *VR*.

Bsp.:

$V = \{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}, \;\; \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in V$ Erzeugendensystem:

$$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \} \leadsto \; \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Konsequenz: Eine Basis ist also ein minimales Erzeugendensystem.

Bsp.: $B = \{\lambda_i, x^2, \ldots, x^n \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\},\ \vec{v} = \lambda_0 + \lambda_1\, x + \lambda_2\, x^2 + \ldots + \lambda_n\, x^n$

Bemerkung:
Im späteren Gebrauch werden wir hier **nur Basen mit endlicher Mächtigkeit** betrachten. Bei Basen mit transfiniten oder unendlichen Mächtigkeiten wird die Situation etwas delikater.

Sei M Basis , $|M| = m,\ m \in \mathbb{N}. \rightsquigarrow$ Man findet sofort :

Satz: Alle Basen eines Vektorraums V haben dieselbe Mächtigkeit m. .

Beweis:

Idee: Austausch der Basisvektoren.

Definition: Dimension

Sei $m =$ Mächtigkeit der Basis (= |Basis|)

m heisst **Dimension** des VR: $m = Dim(VR)$

Bsp.:

- $\oslash$ $V = \{$Vektoren der Ebene $\}$:
  $\dim(V) = m = 2$
- $\oslash$ $V = \{$Vektoren des Raumes $\}$:
  $\dim(V) = m = 3$
- $\oslash$ $V = \{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}\}: \rightsquigarrow \quad \dim(V) = m = n$
- $\oslash$ $V = \{$Polynome $p(x),\ pgrad\,(p(x)) \leq n\}$:
  $\dim(V) = m = n + 1,$

  $pgrad =$ Polynomgrad

Für Basen gelten noch folgende Sätze :

Regeln:

- $\oslash$ Jedes Erzeugendensystem enthält auch eine Basis: Basis = minimales Erzeugendensystem.
- $\oslash$ Eine Basis ist eine maximale *l.u.* Menge von Vektoren.
- $\oslash$ Jeder Vektorraum hat mindestens eine Basis.
- $\oslash$ Sei
  $B = \{\vec{a_i} \mid i \in \text{Indexmenge}\}$ (von V).
  $\leadsto$ Jeder Vektor $\vec{v} \in V$ lässt sich eindeutig als LK der Basis darstellen: :

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{\dots} \lambda_i \, \vec{a_i}$$

Bemerkung:

Die Dimension ist unabhängig von der Mächtigkeit. Während für die Mächtigkeit $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}^3| = \dots$ gilt, ist die Vektorraum–Dimension von $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ gleich 1, diejenige von $\mathbb{R}^2$ ist 2 u.s.w.. Im physikalischen Näherungs–Modell der euklidschen Geometrie (verstanden als „Gast der Wirklichkeit") lassen sich „Figuren" in $\mathbb{R}$ nach der Länge ordnen, solche in $\mathbb{R}^2$ hingegen nach Länge und Flächeninhalt. Länge und Flächeninhalt sind unabhängig voneinander (gleicher Umfang, verschiedene Formen und Flächeninhalte möglich). In $\mathbb{R}^3$ kommt noch der Volumeninhalt hinzu u.s.w.. Im geometrischen Raum $\mathbb{R}^3$ sind daher 3 verschiedene Ordnungsprinzipien möglich, von denen im gleichmächtigen $\mathbb{R}^1$ nur eines vorhanden ist. Dimension hat somit mit den Ordnungsmöglichkeiten einer Menge zu tun, die durch von der Mächtigkeit unabhängige Prinzipien gegeben sein müssen. Das kann z.B. geometrisch geschehen.

5.1.8 Spezielle Typen von Vektoren – Types de vecteurs spéciaux

Ortsvektoren in der Geometrie in einem Koordinatensystem mit dem Ursprung O :

Sei gegeben : Punkt $P \in$ (Raum).

Definition: **Ortsvektor** von P $:=$ $|OP|$

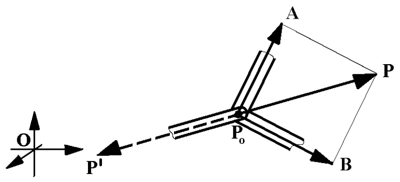
D. h. : $|OP|$ ist Repräsentant der Klasse .

Ist der Ortsvektor noch eine Funktion einer Variablen, so spricht man beim Graphen von einer **Ortskurve**.

Gebundene Vektoren in der Physik: Geometrische Vektoren im Raum mit auf einen isolierten „Unterraum" eingeschränkter Pfeilklasse. Z.B. an eine Gerade gebundene Vektoren $:= \{\text{Pfeile } \overrightarrow{OP} \mid P \in \text{Gerade durch } O\}$ $:= \{\text{flèches } \overrightarrow{OP} \mid P \in \text{droite qui passe par } O\}$

Bsp.: Z.B. in der Statik. Wirkung der Kraft nur auf der Wirkungslinie, Vektor an Wirkungslinie „gebunden"

Pfeilvektoren oder **punktgebundene Ortsvektoren** (Statik):



Die Pfeile $\overrightarrow{P_0P}, \overrightarrow{P_0A}, \overrightarrow{P_0B}, \overrightarrow{P_0P'}$ addieren sich als Repräsentanten von geometrischen Vektoren wie Vektoren. Daher bilden die an P_0 gebundenen Ortsvektoren oder Pfeile $\{\overrightarrow{P_0P_k}\}$ einen Vektorraum. $\overrightarrow{P_0P_0}$ bildet den Nullvektor. P_0 ist dabei für einen solchen Vektorraum fix gewählt.

Vektoren können also frei oder gebunden sein. Im zweiten Fall an Punkte, Geraden, Ebenen...

5.2 Koordinatenabhängige Vektorrechnung – Calcul vectoriel dans un système de coordonnés

5.2.1 Einführung, Grundlagen, Koordinatensysteme – Introduction, fondements, systèmes de coordonnés

Einige Begriffe :

Orientierte Gerade g **:**
Auf g ist eine positive Richtung festgelegt, z.B. durch einen zu g kollinearen Vektor $\vec{v}$. (2 Möglichkeiten.)

Orientierte Ebene Φ **:**
Auf Φ ist ein positiver Drehsinn festgelegt, z.B. durch eine Rechtsschraube (u.s.w.). (2 Mögl.)

Orientierter Raum V **:**
In V ist durch ein Tripel $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ eine Rechtsschraube festgelegt: Drehung $\vec{a} \to \vec{b} \;\Rightarrow\;$ Schraube Richtung $\vec{c}$ $\leadsto$ **Rechtssystem**. (Unendlich viele Möglichkeiten.)

Paralleles Koordinatensystem V **:**
Gegeben durch eine endliche Basis $B = \{\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n}\}$ eines ($\leadsto$endlichen) Vektorraumes und einen Ursprung, Punkt O (lat. „Origo“).

Damit sind orientierte Geraden (**Achsen**) und Ebenen (Grundebene, Hauptebenen etc.) und somit ein Koordinatengitter gegeben.

Achtung:
Wenn nicht anders erwähnt, betrachten wir im Folgenden nur Koordinatensysteme mit Äquidistanten Koordinatengitter.

Die Nützlichkeit von Koordinatensystemen beruht auf dem Lemma, dass ein Punkt durch einen Ortsvektor und dieser durch eine Summe von gestreckten Basisvektoren eindeutig festgelegt ist.
($\leadsto$ Rep.)

Lemma: $\vec{v} = \sum\limits_{i=1}^{\ldots} \lambda_i \, \vec{a_i}$: $\leadsto$ Zerlegung eindeutig

5.2.2 Normalsysteme – Systèmes normaux

Geometrisch kann man eine Längenmessung definieren, die sich auf eine einmal willkührlich festgelegte Einheitslänge bezieht. Im Folgenden nehmen wir immer an, diese Einheitslänge sei festgelegt worden,

was wir ja immer tun können.
Auf dieser Grundlage können wir definieren :

Definition: $\vec{e}$ **Einheitsvektor** $:\Leftrightarrow \ |\vec{e}| = 1$

Solche Einheitsvektoren kann man immer herstellen :

Regeln:

$\oslash \ |\vec{a}| = a \ \wedge \ \vec{a} \| \vec{e} \ \Rightarrow \ \vec{a} = \pm a \cdot \vec{e}$

$\oslash \ |\vec{a}| = a \neq 0 \ \Rightarrow \ \vec{e}_a := \dfrac{\vec{a}}{a}$ ist Einheitsvektor

Definition: **Normalbasis**

Sei $B = \{\vec{e}_i \, || \vec{e}_i| = 1 \ \wedge \ i \in \text{Indexmenge}\, \}$ von V.

Dann heisst die Basis B **Normalbasis** oder **Einheitsbasis**. $\leadsto$ Kurz : **NB**

Definition: **Orthonormalbasis**

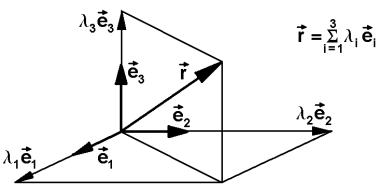
Sei B = Normalbasis von V.
Zudem gelte :
$\forall_{\vec{e}_i, \vec{e}_k \in B \times B} : \ i \neq k \ \Rightarrow \ \vec{e}_i \perp \vec{e}_k$ (senkrecht)

Dann heisst die Basis B **Orthonormalbasis**.
$\leadsto$ Kurz : **ONB**

Bemerkung: Durch eine *ONB* wird ein **kartesisches Koordinatensystem**[1] definiert.

Achtung:
Wenn nicht anders erwähnt, betrachten wir im Folgenden immer kartesische Koordinaten.

5.2.3 Koordinatenvektoren – Vecteurs de coordonnés



$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Schreibweise:

Ortsvektor von P im Raum :
$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3 := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$
(**Spaltenvektor** .)
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: Abkürzung für

[1] Lat. Kartesius: $\rightarrow$ Descartes

Begriffe:

$\lambda_1\,\vec{e}_1,\ \ \lambda_2\,\vec{e}_2,\ \ \lambda_3\,\vec{e}_3$ heissen **Komponenten**

$\lambda_1,\ \ \lambda_2,\ \ \lambda_3$ heissen **Koordinaten**

Schreibweise:

Allgemeiner sei : $\quad V = \mathbb{R}^n = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}$

$$\rightsquigarrow \text{Spaltenvektor : } \vec{r} = \lambda_1\,\vec{e}_1 + \lambda_2\,\vec{e}_2 + \ldots + \lambda_n\,\vec{e}_n := \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

Im Gegensatz zum Spaltenvektor $\vec{r}$ unterscheiden wir den **Zeilenvektor** $\vec{r}^{\,T}$ (**Transponierter Vektor**) :

$$\vec{r}^{\,T} := (\lambda_1,\ \ \lambda_2,\ \ \ldots,\ \ \lambda_n)$$

Achtung: Die Unterscheidung zwischen Zeilenvektor und Spaltenvektor ist dann in der Matrizenrechnung wesentlich.

Üblicherweise arbeiten wir in der Geometrie mit Koordinatensystemen, die nach der Rechtsschraubenregel orientiert sind.

Einige Herleitungen:

1 $\vec{e}_1 = 1\cdot\vec{e}_1 + 0\cdot\vec{e}_2\ldots + 0\cdot\vec{e}_n = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\quad \ldots,\quad \vec{e}_n = 0\cdot\vec{e}_1 + \ldots + 0\cdot\vec{e}_{n-1} + 1\cdot\vec{e}_n = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

2 $\vec{0} = 0\cdot\vec{e}_1 + 0\cdot\vec{e}_2\ldots + 0\cdot\vec{e}_n = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$

3 $\lambda\vec{a} = \lambda\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix} = \lambda(a_1\cdot\vec{e}_1 + a_2\cdot\vec{e}_2 + \ldots + a_n\cdot\vec{e}_n) = \lambda\cdot(a_1\cdot\vec{e}_1) + \lambda\cdot(a_2\cdot\vec{e}_2) + \ldots + \lambda\cdot(a_n\cdot\vec{e}_n) =$

$$= (\lambda\cdot a_1)\cdot\vec{e}_1 + (\lambda\cdot a_2)\cdot\vec{e}_2 + \ldots + (\lambda\cdot a_n)\cdot\vec{e}_n = \begin{pmatrix}\lambda\cdot a_1\\ \lambda\cdot a_2\\ \vdots\\ \lambda\cdot a_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda a_1\\ \lambda a_2\\ \vdots\\ \lambda a_n\end{pmatrix}$$

4 $\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix} \Rightarrow -\vec{a} = -\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix} = (-1)\cdot\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(-1)\cdot a_1\\ (-1)\cdot a_2\\ \vdots\\ (-1)\cdot a_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-a_1\\ -a_2\\ \vdots\\ -a_n\end{pmatrix}$

5 Die hier benutzte euklidsche Länge setzt eine Orthonormalbasis voraus! (Pythagoras muss gelten: Orthogonale Parallelkoordinaten, normierte Einheiten notwendig!)

$\mathbb{R}^2$: a_1 und a_2 bilden ein rechtwinkliges Dreieck:

$$|\vec{v}| = r_1 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2},$$

$\mathbb{R}^3$: r_1 und a_3 bilden ein rechtwinkliges Dreieck. (Betrachte den 2-dimensionalen Unterraum, in dem r_1 und a_3 liegen!)

$$|\vec{v}| = r_2 = \sqrt{r_1^2 + a_3^2} = \sqrt{(\sqrt{a_1^2 + a_2^2})^2 + a_3^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$\vdots$

$\mathbb{R}^n$: r_{n-1} und a_n bilden ein rechtwinkliges Dreieck. (Betrachte den 2-dimensionalen Unterraum, in dem r_{n-1} und a_n liegen!)

$$|\vec{v}| = r_n = \sqrt{r_{n-1}^2 + a_n^2} = \sqrt{(\sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2})^2 + a_n^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 + a_n^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$$

6 $\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \\ \vdots \\ y_n - x_n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \; |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$$

7 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + a_n \cdot \vec{e}_n) + (b_1 \cdot \vec{e}_1 + b_2 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + b_n \cdot \vec{e}_n) =$

$a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + a_n \cdot \vec{e}_n + b_1 \cdot \vec{e}_1 + b_2 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + b_n \cdot \vec{e}_n = a_1 \cdot \vec{e}_1 + b_1 \cdot \vec{e}_1 + \ldots + a_n \cdot \vec{e}_n + b_n \cdot \vec{e}_n =$

$(a_1+b_1) \cdot \vec{e}_1 + \ldots + (a_n+b_n) \cdot \vec{e}_n = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + (\pm 1) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\pm 1) \cdot b_1 \\ (\pm 1) \cdot b_2 \\ \vdots \\ (\pm 1) \cdot b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pm b_1 \\ \pm b_2 \\ \vdots \\ \pm b_n \end{pmatrix}$$

8 Basiswechsel: Vgl. unten.

Bsp.: $P_1 = P_1(2;3;1), \; P_2 = P_2(6;15;5), \; |\overrightarrow{OP_1} - \frac{1}{2} \overrightarrow{P_1P_2}| = \,?$

$$\overrightarrow{OP_1} - \frac{1}{2} \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} (\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \; |\overrightarrow{OP_1} - \frac{1}{2} \overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{0+9+1} = \sqrt{10}$$

Eigenschaften: (... von Spaltenvektoren)

1 $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

2 $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

3 $\lambda \vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$

4 $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ -\vec{a} = -\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix}$

5 $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2}$

$\leadsto$ Euklidsche Länge, „Pythagoras“ ausgedehnt in den n–dimensionalen euklidschen Raum

6 $\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \ |\ \overrightarrow{P_1P_2}\ | =$

$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$

$\leadsto$ Distanzberechnung

7 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ \vdots \\ a_n \pm b_n \end{pmatrix}$

8 **Basiswechsel** (Koordinatenwechsel, Koordinatentransformation) :

$\vec{v}$ gegeben in der Basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$.
Neue Basis : $\{\vec{a_1}, \vec{_2}, \ldots, \vec{a_n}\}$

$\leadsto$ $\vec{v} = \lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} + \ldots + \lambda_n \vec{a_n}$ ist ein Gleichungssystem für die Unbekannten $\{\lambda_k \mid k = 1, \ldots, n\}$. $\{\lambda_k \mid k = 1, \ldots, n\}$.
Dieses System kann aufgelöst werden.
$\leadsto$ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ berechnet
$\leadsto$ $\vec{v}$ in der neuen Basis $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}\}$ dargestellt.
$\leadsto$ Basiswechsel .

5.2.4 Basiswechsel nach dem Austauschverfahren – Changement de base d'après la méthode d'échange des vecteurs

5.2.5 Vektor in einer neuen Basis – Vecteur dans une nouvelle base

Bsp.:

Sei $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\},\ \ \vec{e}_1 = 1\,\vec{e}_1 + 0\,\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \ \vec{e}_2 = 0\,\vec{e}_1 + 1\,\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Sei $B' = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\},\ \ \vec{a}_1 = 1\,\vec{e}_1 + 0.5\,\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}1\\0.5\end{pmatrix},\ \ \vec{a}_2 = -0.5\,\vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}-0.5\\2\end{pmatrix}$

Sei $\vec{v} = 2\,\vec{e}_1 + (-1)\,\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

Problem: $\vec{v} = \lambda_1\,\vec{a}_1 + \lambda_2\,\vec{a}_2,\ \ \lambda_1, \lambda_2 = ?$

Es gilt: $\vec{v} = 2\,\vec{e}_1 + (-1)\,\vec{e}_2 = \lambda_1\,\vec{a}_1 + \lambda_2\,\vec{a}_2 = \lambda_1\,(1\,\vec{e}_1 + 0.5\,\vec{e}_2) + \lambda_2\,(-0.5\,\vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2)$
$= \lambda_1\,\vec{e}_1 + \lambda_1\,0.5\,\vec{e}_2 + \lambda_2\,(-0.5)\,\vec{e}_1 + \lambda_2\,2\,\vec{e}_2 = (\lambda_1 - 0.5\,\lambda_2)\,\vec{e}_1 + (0.5\,\lambda_1 + 2\,\lambda_2)\,\vec{e}_2$

$$\Rightarrow\ 2\,\vec{e}_1 + (-1)\,\vec{e}_2 = (\lambda_1 - 0.5\,\lambda_2)\,\vec{e}_1 + (0.5\,\lambda_1 + 2\,\lambda_2)\,\vec{e}_2\ \Rightarrow\ (\underbrace{\lambda_1 - 0.5\,\lambda_2 - 2}_{=0,\ \vec{e}_1 \not\parallel \vec{e}_2})\,\vec{e}_1 + (\underbrace{0.5\,\lambda_1 + 2\,\lambda_2 + 1}_{=0,\ \vec{e}_1 \not\parallel \vec{e}_2})\,\vec{e}_2 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow\ (\underbrace{\lambda_1 - 0.5\,\lambda_2 - 2}_{=0,\ \vec{e}_1 \not\parallel \vec{e}_2})\,\vec{e}_1 = (\underbrace{-0.5\,\lambda_1 - 2\,\lambda_2 - 1}_{=0,\ \vec{e}_1 \not\parallel \vec{e}_2})\,\vec{e}_2$$

$$\left|\begin{array}{lcl} \lambda_1 - 0.5\,\lambda_2 - 2 & = & 0 \\ -0.5\,\lambda_1 - 2\,\lambda_2 - 1 & = & 0 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{lcl} \lambda_1 - 0.5\,\lambda_2 & = & 2 \\ 0.5\,\lambda_1 + 2\,\lambda_2 & = & -1 \end{array}\right| \Rightarrow \lambda_1 = \frac{14}{9},\ \ \lambda_2 = -\frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow\ \vec{v} = \lambda_1\,\vec{a}_1 + \lambda_2\,\vec{a}_2 = \frac{14}{9}\,\vec{a}_1 - \frac{8}{9}\,\vec{a}_2$$

5.2.6 Nach dem Austauschverfahren – d'après la méthode d'échange des vecteurs

Hier handelt es sich um ein verallgemeinertes Einsetzungsverfahren.

Geg.:
Vektorraum VR mit den beiden Basen B_1 und B_2. Dabei sei B_2 ausgedrückt durch B_1 .

Sei $B_1 = \{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\},\ \ B_2 = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$:

$$\begin{array}{rccccccccccc}
 & \vec{b}_1 & = & \alpha_{1,1}\vec{a}_1 & + & \ldots & + & \alpha_{1,k}\vec{a}_k & + & \ldots & + & \alpha_{1,n}\vec{a}_n \\
 & \vdots & = & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
(\text{Zeile } i) \rightarrow & \vec{b}_i & = & \alpha_{i,1}\vec{a}_1 & + & \ldots & + & \alpha_{i,k}\vec{a}_k & + & \ldots & + & \alpha_{i,n}\vec{a}_n \\
 & \vdots & = & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & \vec{b}_n & = & \alpha_{n,1}\vec{a}_1 & + & \ldots & + & \alpha_{n,k}\vec{a}_k & + & \ldots & + & \alpha_{n,n}\vec{a}_n \\
 & & & & & & & () & & & & \\
 & & & & & & & (\text{Spalte } k\ \uparrow) & & & &
\end{array}$$

Sei $\vec{v} = \lambda_1\vec{a}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n$.
$\vec{v}$ ist in B_1 ausgedrückt und soll in B_2 ausgedrückt werden : $\vec{v} = \mu_1\vec{b}_1 + \ldots + \mu_n\vec{b}_n$.

D. h. : : Es gilt die μ_k zu berechnen .

Dazu muss man die Vektoren $\vec{b}_i$ von B_2 durch die Vektoren $\vec{a}_k$ von B_1 ausdrücken und in $\vec{v}$ einsetzen .

Durch Koeffizientenvergleich erhält man dann ein Gleichungssystem für die μ_i, das sich lösen lässt.

Man kann aber auch die $\vec{a}_k$ durch die $\vec{b}_i$ ausdrücken (Basiswechsel) und in $\vec{v} = \lambda_1\vec{a}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n$ einsetzen.

Das führt zu einer Darstellung $\vec{v} = \lambda_1\vec{a}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n$.

Zur Idee des Austauschverfahrens :

Sei z.B. $\alpha_{i,k} \neq 0$.
Dann kann $\vec{b}_i$ durch $\vec{a}_k$ wie folgt ausgetauscht werden: :

Berechne $\vec{a}_k$ aus Zeile Nr. i:

$$\vec{a}_k = (-\frac{\alpha_{i,1}}{\alpha_{i,k}})\vec{a}_1 + \ldots + (-\frac{\alpha_{i,k-1}}{\alpha_{i,k}})\vec{a}_{k-1} + \frac{1}{\alpha_{i,k}}\vec{b}_i + (-\frac{\alpha_{i,k+1}}{\alpha_{i,k}})\vec{a}_{k-1} + \ldots + (-\frac{\alpha_{i,n}}{\alpha_{i,k}})\vec{a}_n$$

Der Vektor $\vec{b}_i$ steht jetzt rechts in der Spalte Nr. k, der Vektor $\vec{a}_k$ jedoch links.

In dieser Form wird $\vec{a}_k$ jetzt in allen andern Zeilen eingesetzt und vektorweise sofort verrechnet. (Z.B. in der 1. Zeile ist $\vec{a}_k$ mit $\alpha_{1,k}$ zu multiplizieren und zu verrechnen)

Konsequenz:

$$\begin{array}{rcrcccrcccr}
\vec{b}_1 & = & (\alpha_{1,1} - \frac{\alpha_{i,1}}{\alpha_{i,k}}\alpha_{1,k})\vec{a}_1 & + & \ldots & + & (\alpha_{1,k-1} - \frac{\alpha_{i,k-1}}{\alpha_{i,k}}\alpha_{1,k})\vec{a}_{k-1} & + & \frac{\alpha_{1,k}}{\alpha_{i,k}}\vec{b}_i & + & (\alpha_{1,k+1} - \frac{\alpha_{i,k+1}}{\alpha_{i,k}}\alpha_{1,k})\vec{a}_{k+1} \\
 & & & & & & & + & \ldots & + & (\alpha_{1,n} - \frac{\alpha_{i,n}}{\alpha_{i,k}}\alpha_{1,k})\vec{a}_n \\
\vdots & & \vdots & & & & & & & & \vdots \\
\vec{a}_k & = & (-\frac{\alpha_{i,1}}{\alpha_{i,k}})\vec{a}_1 & + & \ldots & + & (-\frac{\alpha_{i,k-1}}{\alpha_{i,k}})\vec{a}_{k-1} & + & \frac{1}{\alpha_{i,k}}\vec{b}_i & + & (-\frac{\alpha_{i,k+1}}{\alpha_{i,k}})\vec{a}_{k+1} \\
 & & & & & & & + & \ldots & + & (-\frac{\alpha_{i,n}}{\alpha_{i,k}})\vec{a}_n \\
\vdots & & \vdots & & & & & & & & \vdots \\
\vec{b}_n & = & (\alpha_{n,1} - \frac{\alpha_{i,1}}{\alpha_{i,k}}\alpha_{n,k})\vec{a}_1 & + & \ldots & + & (\alpha_{n,k-1} - \frac{\alpha_{i,k-1}}{\alpha_{i,k}}\alpha_{n,k})\vec{a}_{k-1} & + & \frac{\alpha_{n,k}}{\alpha_{i,k}}\vec{b}_i & + & (\alpha_{n,n} - \frac{\alpha_{i,n}}{\alpha_{i,k}}\alpha_{n,k})\vec{a}_n \\
 & & & & & & & + & \ldots & + & (\alpha_{n,n} - \frac{\alpha_{i,n}}{\alpha_{i,k}}\alpha_{n,k})\vec{a}_n \\
\vdots & & \vdots & & & & & & & & \vdots
\end{array}$$

Damit ist erreicht, dass in der Zeile Nr. i statt $\vec{b}_i$ neu $\vec{a}_k$ steht, in der Spalte Nr. k dagegen $\vec{b}_i$ statt $\vec{a}_k$
D.h. $\vec{b}_i$ ist durch $\vec{a}_k$ ausgetauscht worden.

Wendet man dieses Verfahren n mal an, so gelingt es, alle $\vec{b}_i$ durch die $\vec{a}_k$ auszutauschen. .

Das führt zum System (*) :

$$\begin{array}{rcrcccr}
\vec{a}_1 & = & \beta_{1,1}\vec{b}_1 & + & \ldots & + & \beta_{1,n}\vec{b}_n \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
\vec{a}_n & = & \beta_{n,1}\vec{b}_1 & + & \ldots & + & \beta_{n,n}\vec{b}_n
\end{array}$$

Somit ist die Basis B_1 durch die Basis B_2 dargestellt.

Hinweis : Dieses Verfahren lässt sich auch zur Lösung von Gleichungssystemen verwenden.

Man setze in (*) statt $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ die Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$ und statt $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$ die Zahlen $\gamma_1, \ldots \gamma_n$.

$$\text{System}(*) \quad \begin{array}{ccccccc} \gamma_1 & = & x_{1,1}\gamma_1 & + & \ldots & + & \alpha_{1,n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ \gamma_n & = & \alpha_{n,1}x_1 & + & \ldots & + & \alpha_{n,n}x_n \end{array}$$

Dann führt das Austauschverfahren wie vorhin auf die Lösung:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & = & \beta_{1,1}\gamma_1 & + & \ldots & + & \beta_{1,n}\gamma_n \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ x_n & = & \beta_{n,1}\gamma_1 & + & \ldots & + & \beta_{n,n}\gamma_n \end{array}$$

Konsequenz: Um eine Basis auszutauschen genügt es somit, ein Gleichungssystem der Form (*) mit den Parametern γ_i und den Unbekannten x_k zu lösen und dann $\gamma_i \longmapsto \vec{b}_i$ und $x_k \longmapsto \vec{a}_k$ zu substituieren.

Bsp.:

Gleichungssystem:

$$\left|\begin{array}{ccc} b_1 & = & 2\,a_1 - 3\,a_2 + a_3 \\ b2 & = & a_1 + 3\,a_2 - a_3 \\ b_3 & = & -a_1 - a_2 + 2\,a_3 \end{array}\right|$$

1. Austausschritt:

$$\left|\begin{array}{ccc} a_1 & = & \dfrac{3\,a_2 - a_3 + b_1}{2} \\ b_2 & = & \dfrac{9\,a_2 - 3\,a_3 + b_1}{2} \\ b_3 & = & \dfrac{-5\,a_2 + 5\,a_3 - b_1}{2} \end{array}\right|$$

2. Austausschritt:

$$\left|\begin{array}{ccc} a_1 & = & \dfrac{b_1 + b_2}{3} \\ a_2 & = & \dfrac{3\,a_3 - b_1 + 2\,b_2}{9} \\ b_3 & = & \dfrac{15\,a_3 - 2\,b_1 - 5\,b_2}{9} \end{array}\right|$$

3. Austausschritt:

$$\left|\begin{array}{ccc} a_1 & = & \dfrac{b_1 + b_2}{3} \\ a_2 & = & \dfrac{-b_1 + 5\,b_2 + 3\,b_3}{15} \\ a_3 & = & \dfrac{2\,b_1 + 5\,b_2 + 9\,b_3}{15} \end{array}\right|$$

5.2.7 Anwendungen — Applications

Bsp.: Gegeben sei eine Kraft $\vec{F}$. Zerlege $\vec{F}$ in Komponenten in Richtung $\vec{b}_1,\ \vec{b}_2,\ \vec{b}_3$.

Sei $\vec{F} = \begin{pmatrix} 45 \\ 18 \\ 54 \end{pmatrix},\ \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Es gilt: $\vec{F} = \lambda\vec{b}_1 + \mu\vec{b}_2 + \nu\vec{b}_3 \;\Rightarrow\; \lambda = 7, \mu = 13, \nu = 23$

(Gleichungssystem lösen!)

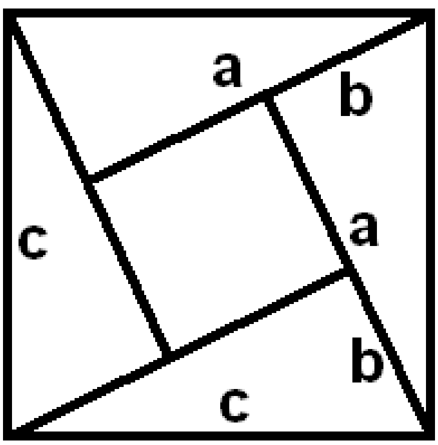
Bemerkung: Wären 4 (oder mehr) Richtungsvektoren $\vec{b}_k$ gegeben, so könnte man die 4. Komponente frei wählen (Vorspannung).

5.3 Ausblicke in die Geometrie – Quelques pas dans la géométrie

Vorausgesetzt werden Begriffe und Sätze über trigonometrische Funktionen und ihre Umkehrfunktionen, Secans, Cosecans, Periodizität, Monotoniebereiche, Quadrantenrelationen, Zusammenhänge im rechtwinkligen Dreieck, Drehgruppe, Winkel, Winkelmass, Translation, Polarkoordinaten, Pythagoras $(\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1)$ etc.

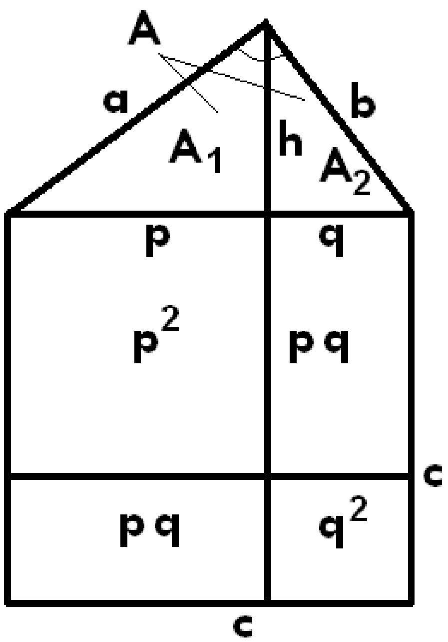
5.3.1 Elementare geometrische Sätze – Théorèmes géométriques élémentaires

Pythagoras, Euklid u.s.w. – Pythagore, Euclide etc.



$$c^2 = 4\,\frac{a\,b}{2} + (a-b)^2$$
$$= 2\,a\,b + a^2 - 2\,a\,b + b^2 = a^2 + b^2$$

$$\leadsto \quad a^2 + b^2 = c^2$$



1 $A = A_1 + A_2$

Ähnliche $\triangle$

$\leadsto \;\; \dfrac{A_1}{A} = (\dfrac{a}{c})^2, \;\; \dfrac{A_2}{A} = (\dfrac{b}{c})^2$

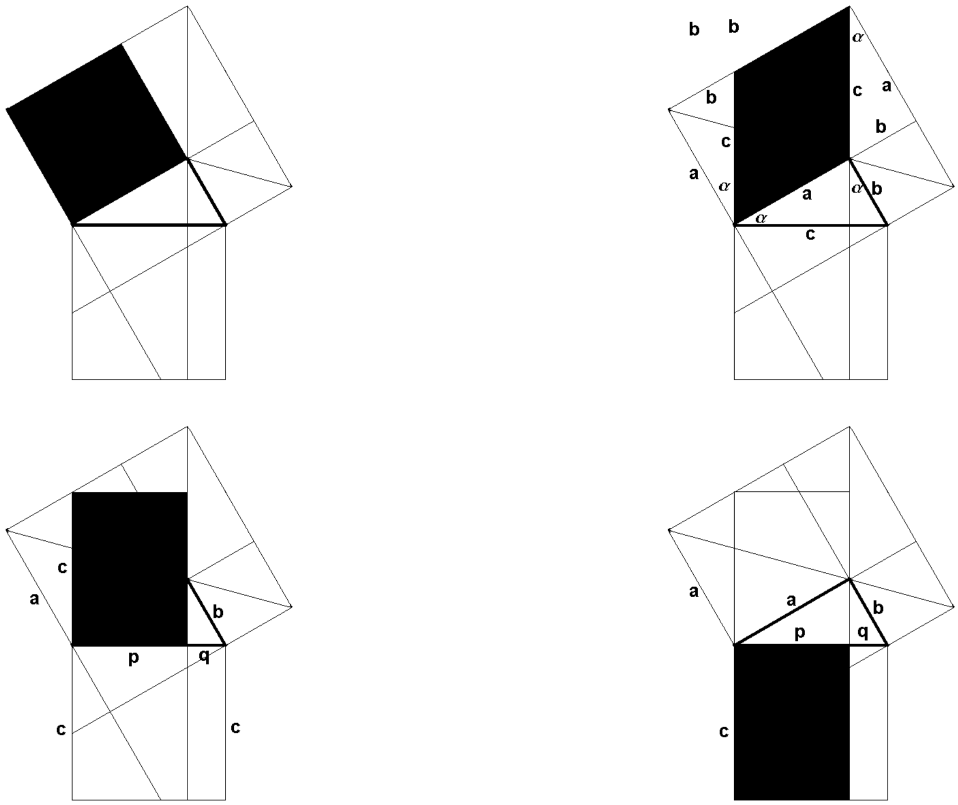
$\Rightarrow \;\; A = A_1 + A_2 = A\,(\dfrac{a}{c})^2 + A\,(\dfrac{b}{c})^2$

$\leadsto \;\; a^2 + b^2 = c^2$

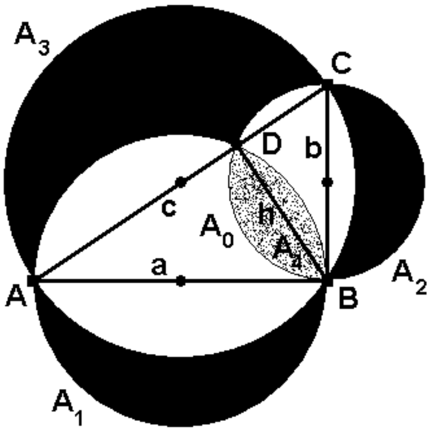
2 $a^2 + b^2 = (p^2 + h^2) + (q^2 + h^2) = c^2 = p^2 + q^2 + 2\,p\,q$

$\Rightarrow \;\; 2\,h^2 = 2\,p\,q$

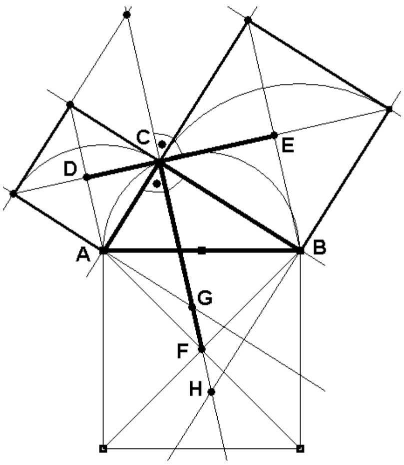
$\leadsto \;\; h^2 = p^2 + q^2$



$$a^2 = c \cdot p, \quad b^2 = c \cdot q, \quad a^2 + b^2 = c^2$$



Möndchen des Hippokrates (von Chios, um 440 v.Chr.):



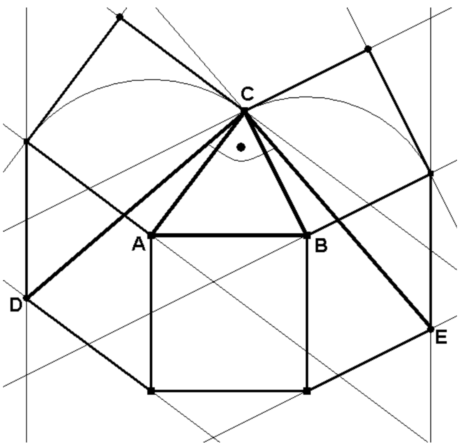
$A_{\triangle(A,B,C)}$ rechtwinklig

Satz:

$\overline{DE} \perp \overline{CF}$,

$|\overline{DE}| = |\overline{CF}|$,

$|\overline{FG}| = |\overline{FH}| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,(|\overline{BC}| - |\overline{AC}|)$

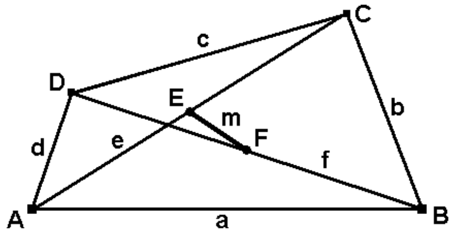


$A_{\triangle(A,B,C)}$ beliebig

Satz:

$\overline{CD} \perp \overline{CE}$,

$|\overline{CD}| = ||\overline{CE}$

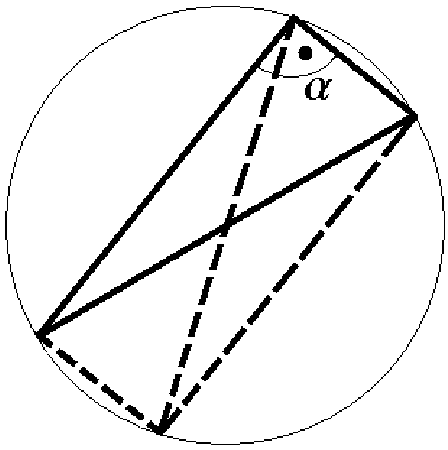


$E =$ Mitte von $\overline{AC}$, $F =$ Mitte von $\overline{BD}$

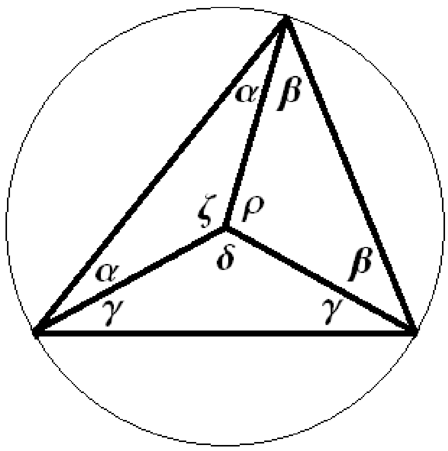
Satz:

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4\,m^2$

Thales, Peripherie– und Zentriwinkel – Thales, angle inscrit, angle au centre



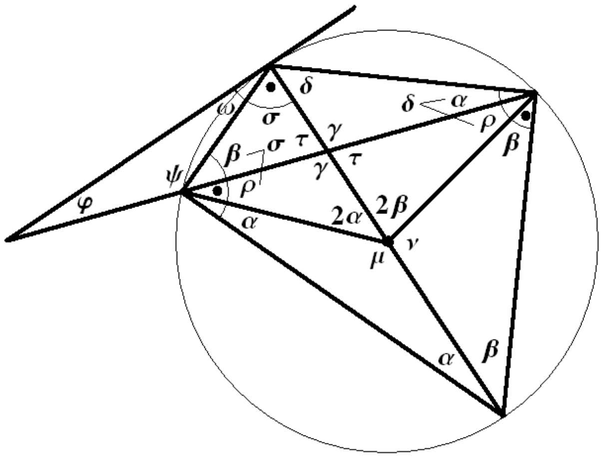
Rechteck $\rightsquigarrow$ $\alpha = 90^o$



Gleichschenklige △
$\rightsquigarrow$ $\delta = 360^o - \zeta - \rho$
$= 360^o - (180^o - 2\,\alpha) - (180^o - 2\,\beta)$
$= 2\,(\alpha + \beta)$

$\alpha + \beta = \dfrac{\delta}{2}$

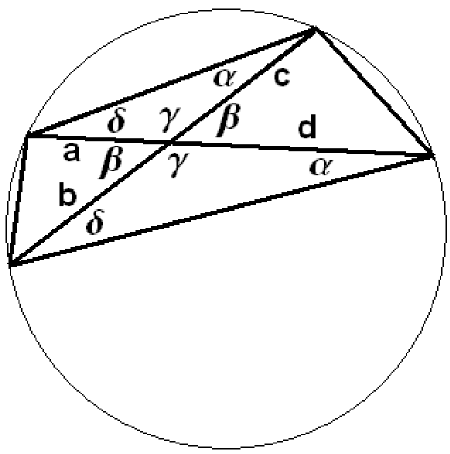
Sehnen–, Tangentenwinkel – Angle de la corde et de la tangente



$\alpha = 90^o - \rho - \beta,$
$\omega = 90^o - \sigma = 90^o - \rho - \beta$

$\rightsquigarrow\ \omega = \alpha$

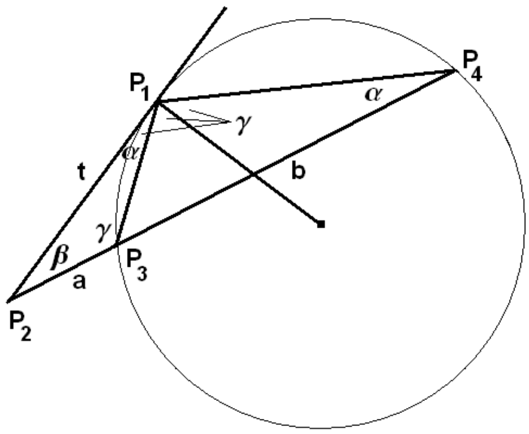
Sehnensatz, Tantentensatz — Théorème de la corde et de la tangente



Ähnliche △ (Peripherie– und Zentriwinkel)

$\rightsquigarrow\ \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}\ \Rightarrow\ a \cdot d = b \cdot c$

$\rightsquigarrow\ a \cdot d = b \cdot c$

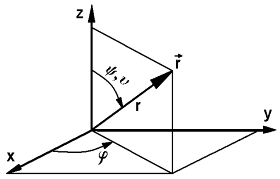


Ähnliche △

$|\overline{P_1P_2}| = t,\ |\overline{P_2P_3}| = a,\ |\overline{P_3P_4}| = b$
$\Rightarrow\ \dfrac{a}{t} = \dfrac{t}{a+b}\ \Rightarrow\ a \cdot (a+b) = t^2$

$\rightsquigarrow\ a \cdot (a+b) = t^2$

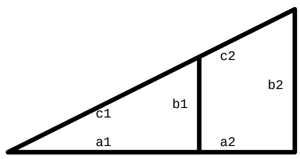
5.3.2 Weitere Begriffe und Folgerungen – D'autres notions et conséquences



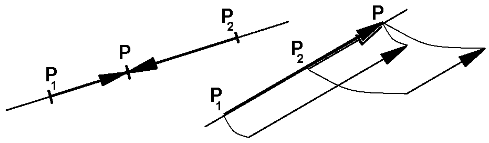
Räumliche Polarkoordinaten
:
Sei $\overrightarrow{OP} = \vec{r} = \vec{r}(x,y,z) = \vec{r}(r,\varphi,\vartheta),\ r = |\vec{r}|$
φ, ϑ Winkel .
Zusammenhänge:
($\leadsto$)

$x = r\cos(\varphi)\sin(\vartheta),\ \ y = r\sin(\varphi)\sin(\vartheta),\ \ z = r\cos(\vartheta)$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \ \varphi = \arctan(\frac{y}{x}),\ \ \vartheta = \arccos(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})$$



Bei ungerichteten Strecken sind Streckenverhältnisse z.B. in der Form $\frac{a_1}{b_1}$ möglich. Was aber, wenn a_1 und b_1 als Vektoren genommen und die Richtung berücksichtigt werden müsste? Abhilfe schafft hier das Teilverhältnis.



Teilverhältnis

$t = (P_1P_2P)$ von P bezüglich $\overline{P_1P_2}$:

$\overrightarrow{P_1P} = t\ \overrightarrow{P_2P} \qquad (\Rightarrow\ t = \pm\frac{|P_1P|}{|P_2P|})$

$\leadsto$ Implizite Definition!

Eigenschaften: **<u>Vor.:</u>**

Sei $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ \ \overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix},\ \ \overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$
Kartes. Koord'syst. (**KKS**)

$t = (P_1P_2P)$

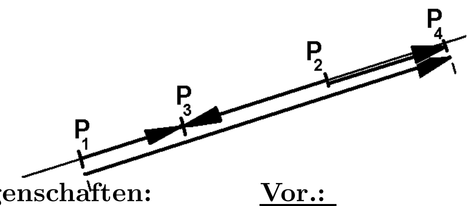
<u>Beh.:</u>

1 $x - x_1 = t\,(x - x_2),\ \ y - y_1 = t\,(y - y_2),\ \ z - z_1 = t\,(z - z_2)$

2 $\overrightarrow{OP} = \dfrac{\overrightarrow{OP_1} - t\cdot \overrightarrow{OP_2}}{1-t}$

3 $(P_2P_1P) = \dfrac{1}{t}$

4 $(P_1PP_2) = 1 - t$



Seien $P_1, P_2, P_3, P_4 \in g$,
$P_i \neq P_k \ (i \neq k)$

Doppelverhältnis (rapport anharmonique, birapport) von P_1, P_2, P_3, P_4:
$(P_1 P_2 P_3 P_4) := \dfrac{(P_1 P_2 P_3)}{(P_1 P_2 P_4)}$

Eigenschaften: **Vor.:**

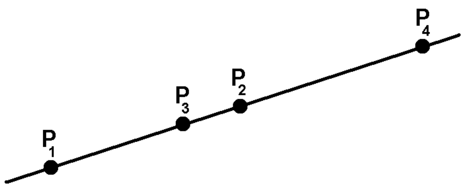
Wie beim Teilverhältnis

Beh.:

1 $(P_1 P_2 P_3 P_4) = \dfrac{(x_3 - x_1)(x_4 - x_2)}{(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)}, \quad x_3 \neq x_2, \quad x_4 \neq x_1$ etc. ...

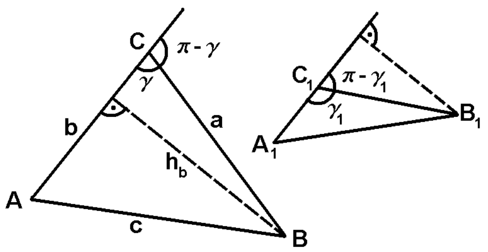
2 $(P_3 P_4 P_1 P_2) = (P_1 P_2 P_3 P_4)$

3 $(P_2 P_1 P_4 P_3) = (P_1 P_2 P_3 P_4)$



Harmonische Punktepaare $(P_1 P_2)$ **und** $(P_3 P_4)$
$(P_1 P_2 P_3 P_4) = -1$,
d. h. $\quad (P_1 P_2 P_3) = -(P_1 P_2 P_4)$

5.3.3 Einige interessante Sätze – Quelques théorémes intéressants

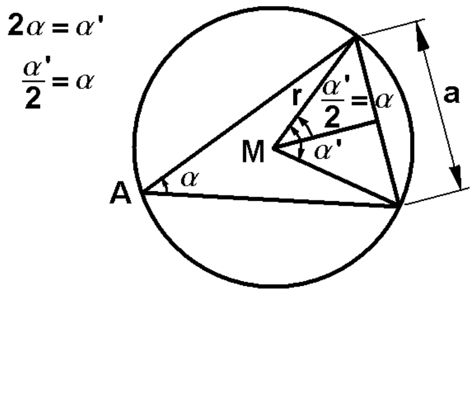


Sinussatz :

Vgl. Skizze :

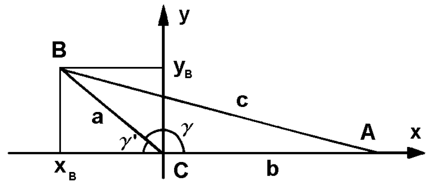
$A_\triangle = \dfrac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \dfrac{1}{2} \cdot b \cdot a \cdot \sin(\pi - \gamma) =$
$= \dfrac{1}{2} \cdot b \cdot a \cdot \sin(\gamma) = \ldots = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(\beta)$
$= \dfrac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha) \ \Rightarrow$
$b \cdot a \cdot \sin(\gamma) = a \cdot c \cdot \sin(\beta) = b \cdot c \cdot \sin(\alpha)$

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$



Bedeutung :

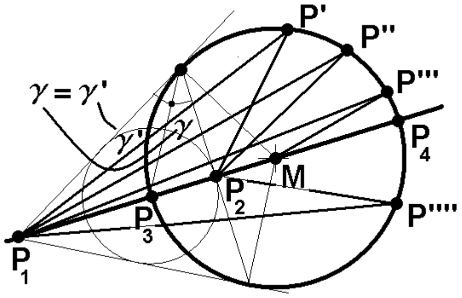
$\sin(\alpha) = \dfrac{a/2}{r} = \dfrac{a}{d}, \quad \alpha' = 2\,\alpha,$
$\sin(\alpha) = \sin(\dfrac{\alpha'}{2})$
$\Rightarrow \ d = 2\,r = \dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{b}{\sin(\beta)} = \dfrac{c}{\sin(\gamma)}$
$\rightsquigarrow$ Der Sinussatz liefert den Umkreisradius.



Cosinussatz :

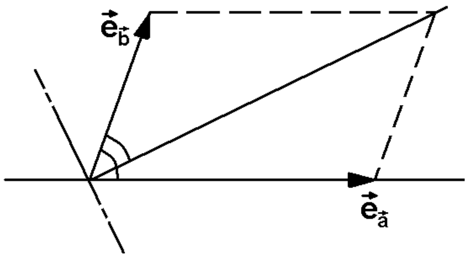
$y_b = a \cdot \sin(\gamma') = a \cdot \sin(\pi - \gamma) = a \cdot \sin(\gamma)$,
$x_b = -a \cdot \cos(\gamma') = -a \cdot \cos(\pi - \gamma) = a \cdot \cos(\gamma)$
$c^2 = |\ \overrightarrow{AB}\ |^2 = |\ \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\ |^2 =$
$|\binom{-b}{0} + \binom{a\cdot\cos(\gamma)}{\pm a\cdot\sin(\gamma)}|^2 = |\binom{-b+a\cdot\cos(\gamma)}{\pm a\cdot\sin(\gamma)}|^2 =$
$(a \cdot \cos(\gamma) - b)^2 + (\pm a \cdot \sin(\gamma))^2 =$
$a^2 \cos^2(\gamma) - 2\,a\,b\cos(\gamma) + b^2 + a^2\sin^2(\gamma) =$
$a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos(\gamma) = c^2$

$\Rightarrow\ c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos(\gamma)$ (etc.. zykl.)



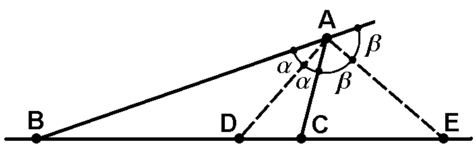
Apolloniuskreis (Kugel) :

$\{P \mid |P_1P| : |P_2P| = const.\}$ ist Kreis (Kugel)
Harmonische Punktepaare (P_1P_2) und (P_3P_4)



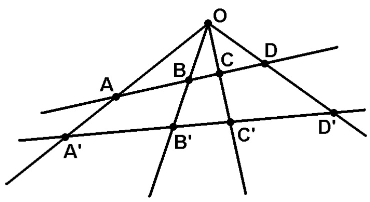
Winkelhalbierung bei Vektoren :

$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \pm \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ halbiert den Zwischenwinkel (Nebenwinkel) von $\vec{a}$ und $\vec{b}$



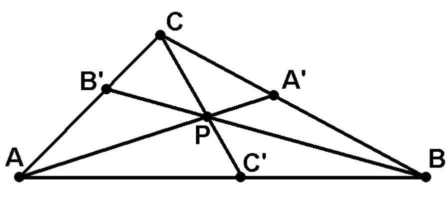
Satz über die Winkelhalbierende :

(BC) und (DE) sind harmonische Punktepaare (Apollonius!)



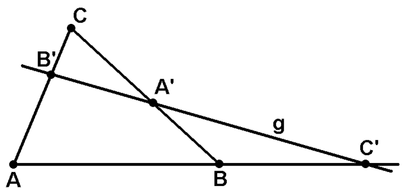
Pappos:

$(ABCD) = (A'B'C'D')$
(Doppelverhältnis invariant bei Projektion)



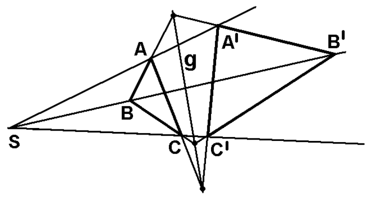
Ceva:

$P \in$ Inneres von $\triangle ABC$,
$\lambda = (ABC')$, $\mu = (BCA')$, $\nu = (CAB')$
$\Rightarrow\ \lambda \cdot \mu \cdot \nu = -1$



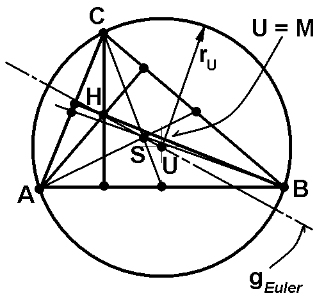
Menelaos:

Sei
$g \cap$ (*Ecken von* $\triangle ABC) = \{\}$,
$\lambda = (ABC')$, $\mu = (BCA')$, $\nu = (CAB')$
$\Rightarrow\ \lambda \cdot \mu \cdot \nu = +1$



Desargues:

Gehen die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken zweier Dreiecke durch einen Punkt (S), so liegen die Schnittpunkte entsprechender Seiten auf einer Geraden (g).



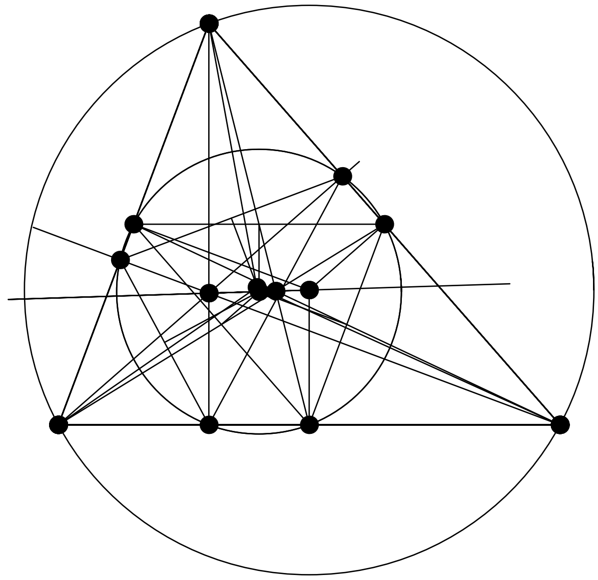
Euler:

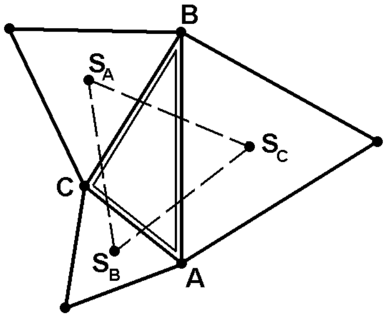
Sei
U = Umkreismittelpunkt

H = Höhenschnittpunkt
S = Schwerpunkt
(Schwerlinien teilen sich im Verh. 2 : 1
)
$\Rightarrow\ \overline{UHS}$ ist Gerade g
$\wedge\ (HUS) = -2$

Weiter liegen die Seitenhalbierenden– und die Höhenfusspunkte auf einem Kreis (**Feuerbachkreis**) mit Mittelpunkt $F \in g$ (Eulergerade). F ist das Zentrum der Strecke $\overline{HU}$.

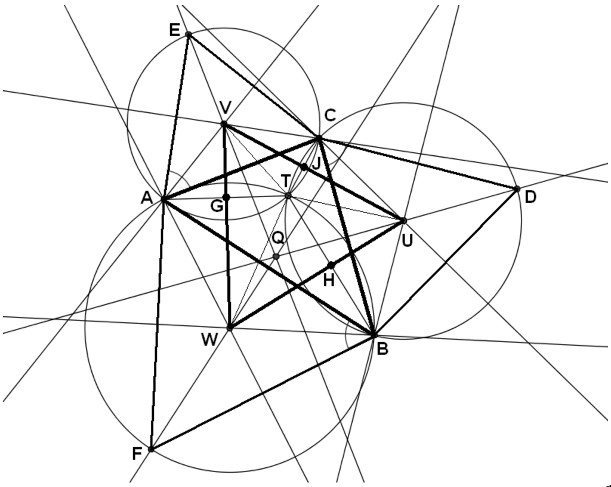
Bild: Der Feuerbachkreis mit Eulergerade und Umkreis.





Napoleon (!):

Geg.:
$\triangle ABC$ beliebig .
Über jeder Seite wird nach aussen ein gleichseitiges Dreieck mit den Schwerpunkten S_A, S_B, S_C errichtet.
$\Rightarrow$ $\triangle S_A S_B S_C$ ist auch gleichseitig



Satz von Napoleon (Elementarer Beweis) (Preuve élémentaire)

Geg.: : $\triangle ABC$
(Fall alle $\measuredangle \geq 90^o$)
$\triangle AFB, \triangle BDC, \triangle CEA \rightsquigarrow$ gleichseitig

Zeigen: Das Dreieck der Schwerpunkte $\triangle UVW$ ist auch gleichseitig.

Wir benützen den Satz von Peripheriewinlel α und Zentriwinkel β: $\rightsquigarrow$ $\beta = 2\,\alpha$

$\rightsquigarrow$ $\measuredangle AEC = 60^o \Rightarrow \measuredangle AVC = 120^o \Rightarrow \measuredangle ATC = \frac{1}{2}(360^o - 120^o) = 120^o \rightsquigarrow$ ebenso

$\measuredangle BTA = \measuredangle CTB = \measuredangle ATC = 120^o$

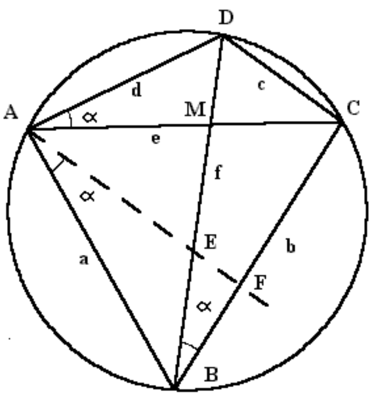
$\rightsquigarrow$ $T =$ Schnittpunkt der Kreise um U, V, W.
$\rightsquigarrow$ $\overline{VU} =$ Mittelsenkrechte auf $\overline{TC}$: $\overline{VU} \perp_m \overline{TC}$. Ebenso:

$\overline{UW} \perp_m \overline{TB}, \ \overline{WV} \perp_m \overline{TA}$

$\rightsquigarrow$ $\measuredangle TGV = \measuredangle TJU = \measuredangle THW = 90^o$
$\rightsquigarrow$ In Figur $VGTJ \Rightarrow \measuredangle GVJ = 360^o - \measuredangle TGV - \measuredangle JTG - \measuredangle VJT = 360^o - 90^o - 120^o - 90^o$

$\rightsquigarrow$ $\measuredangle GVJ = 60^o$. Ebenso: $\measuredangle HWG = \measuredangle JUH = 60^o$. $\rightsquigarrow$ ☺

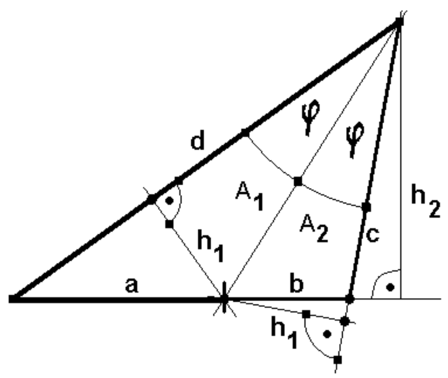
(Fall $\measuredangle > 90^o$ analog.)



Ptolemaios
(Alexandria, ca. 100-170 n.Chr.):

Geg.:
Sehnenviereck $ABCD$ beliebig.
$\Rightarrow$ $a\,c + b\,d = e\,f$

Beweis:
Mit Hilfe von Peripherie- und Zentriwinkel (z.B. $\measuredangle\alpha$ in der Skizze) sowie ähnlichen Dreiecken, z.B. $\triangle AMD \sim \triangle BMC$, $\triangle BCE \sim \triangle BDA$ u.s.w..

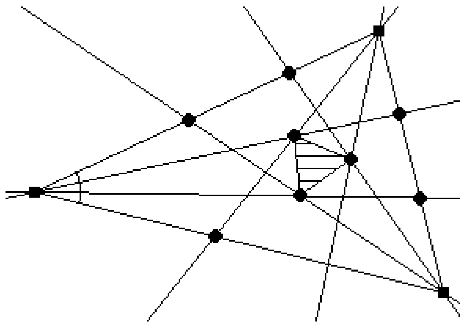


Winkelteilung im Dreieck :

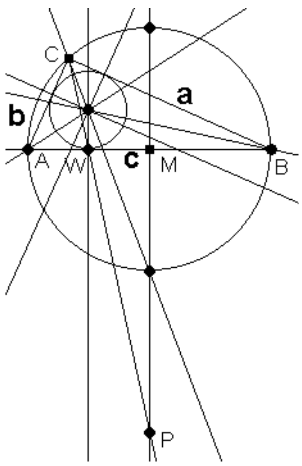
$2\,A_1 = d \cdot h_1 = a \cdot h_2,\;\; 2\,A_2 = c \cdot h_1 = b \cdot h_2$
$$\Rightarrow\; \frac{2\,A_1}{2\,A_2} = \frac{d \cdot h_1}{c \cdot h_1} = \frac{a \cdot h_2}{b \cdot h_2} \;\Rightarrow\; \frac{d}{c} = \frac{a}{b}$$

$$\leadsto\; \frac{d}{a} = \frac{c}{b}$$

☺



Morley: In einem Dreieck werden die Innenwinkel dreigeteilt. Das gezeigte entstehende Dreieck ist immer gleichseitig



Heydebrand:

$$|\overline{MP}| = \frac{a+b+c}{2} = s$$

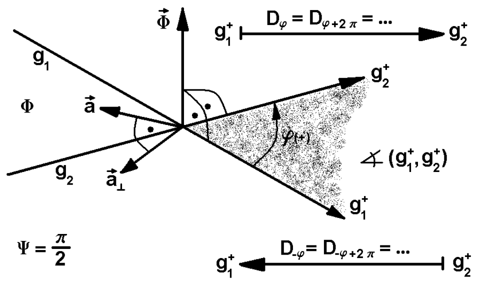
Heron:

$$A_\triangle = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

Weitere interessante Sätze rund um das Dreieck vgl. Literatur oder z.T. auch Skript „Architekturmaterial“ vom Autor. (Z.B. In- und Ankreis, 2. Euler-gerade, Problem von Fagnano, Fermat–Punkt, Satz von Eudoxos (siehe „Architekturmaterial, Thema Fünfeck“) u.s.w..)

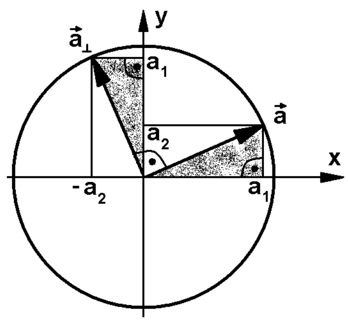
5.3.4 Drehungen – Rotations

Zur Drehung eines Vektors in der Ebene :

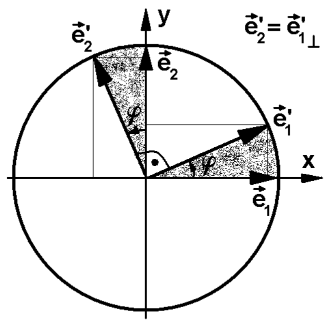


Schreibweise:
$\overrightarrow{a_\perp} :=$ Durch Rechtsdrehung entstandener Normalenvektor zu $\vec{a}$.

Zusammenhänge:
()
$\overrightarrow{O_\perp} = \vec{O}, \quad |\overrightarrow{a_\perp}| = |\vec{a}|$



Lemma:
$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{a_\perp} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$



Lemma:
Drehung von $\vec{e}_1, \vec{e}_2$

$\vec{e}_1 \overset{D_\varphi}{\longmapsto} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} = \vec{e}_1\,'$

$\vec{e}_2 \overset{D_\varphi}{\longmapsto} \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} = \vec{e}_2\,'$

Konsequenz:

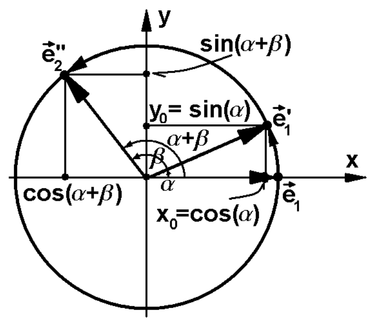
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2 \overset{D_\varphi}{\longmapsto} \vec{r}\,' = x\,\vec{e}_1\,' + y\,\vec{e}_2\,' = x \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(\varphi) - y\sin(\varphi) \\ x\sin(\varphi) + y\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Lemma: $$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{D_\varphi}{\longmapsto} \vec{r}\,' = \begin{pmatrix} x\cos(\varphi) - y\sin(\varphi) \\ x\sin(\varphi) + y\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Matrixschreibweise (siehe Seite175):

$$\vec{r}\,' = D_\varphi \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(\varphi) - y\sin(\varphi) \\ x\sin(\varphi) + y\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

5.3.5 Zusammengesetzte Drehungen, Additionstheoreme – Rotations composées, théorèmes d'addition



Einerseits :

$$\vec{e}_1 \overset{D_\alpha}{\longmapsto} \vec{e}_1\,' = \begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ \sin(\alpha)\end{pmatrix} \overset{D_\beta}{\longmapsto} \vec{e}_1\,'' = \begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta)\end{pmatrix}$$

mit $\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ \sin(\alpha)\end{pmatrix}$

Andererseits nach dem letzten Lemma :

$$\vec{e}_1 \overset{D_{\alpha+\beta}}{\longmapsto} \vec{e}_1\,'' = \begin{pmatrix}x_0\cos(\beta)-y_0\sin(\beta)\\ x_0\sin(\beta)+y_0\cos(\beta)\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ \vec{e}_1\,'' = \begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_0\cos(\beta)-y_0\sin(\beta)\\ x_0\sin(\beta)+y_0\cos(\beta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)\\ \cos(\alpha)\sin(\beta)+\sin(\alpha)\cos(\beta)\end{pmatrix}$$

Ersetze β durch $-\beta$: $\rightsquigarrow$ $\sin(-\beta) = -\sin(\beta),\quad \cos(-\beta) = \cos(\beta)$

Folgerung: **Additionstheoreme :**

$$\begin{aligned}\cos(\alpha\pm\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta)\mp\sin(\alpha)\sin(\beta)\\ \sin(\alpha\pm\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta)\pm\cos(\alpha)\sin(\beta)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ \tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos(\alpha\pm\beta)} = \frac{\tan(\alpha)\pm\tan(\beta)}{1\mp\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

Spezialfälle :

1 $\alpha = \beta$:

$$\begin{array}{rclclcl}\sin(2\alpha) &=& 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) &=& 2\sin(\alpha)(\pm\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}) && \\ \cos(2\alpha) &=& \cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha) &=& 2\cos^2(\alpha)-1 &=& 1-2\sin^2(\alpha)\\ \tan(2\alpha) &=& \dfrac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)} &&&&\end{array}$$

2 $2\alpha = \varphi,\ \alpha = \dfrac{\varphi}{2}$:

$$\begin{array}{rclclcl}\cos(\varphi) &=& 2\cos^2(\frac{\varphi}{2})-1 &=& 1-2\sin^2(\frac{\varphi}{2}) && \\ \sin(\frac{\varphi}{2}) &=& \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos(\varphi)}{2}} &\wedge& 2\cos(\frac{\varphi}{2}) &=& \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos(\varphi)}{2}}\\ \tan(\frac{\varphi}{2}) &=& \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos(\varphi)}{1+\cos(\varphi)}} &=& \pm\sqrt{\dfrac{(1-\cos(\varphi))^2}{\sin^2(\varphi)}} &=& \pm\dfrac{(1-\cos(\varphi))}{\sin(\varphi)}\end{array}$$

3 $u := \dfrac{\alpha+\beta}{2},\ v := \dfrac{\alpha-\beta}{2},\ \alpha = u+v,\ \beta = u-v$:

$$\begin{array}{rcccl}
\sin(\alpha) \pm \sin(\beta) & = & \sin(u+v) \pm \sin(u-v) & = & \sin(u)\cos(v) + \cos(u)\sin(v) \pm \sin(u)\cos(v) \pm \cos(u)\sin(v) \\
\rightsquigarrow \quad (+): & = & 2\sin(u)\cos(v) & = & 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}) \\
\rightsquigarrow \quad (-): & = & 2\cos(u)\sin(v) & = & 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\sin(\alpha) + \sin(\beta) & = & 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}) \\
\sin(\alpha) - \sin(\beta) & = & 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})
\end{array}$$

Interessante Zusammenhänge :

In einem Dreieck ist

1 $\tan(\alpha) + \tan(\beta) + \tan(\gamma) = \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta) \cdot \tan(\gamma)$

2 $\tan(3\alpha) = \dfrac{3\tan(\alpha) - \tan^3(\alpha)}{1 - 3\tan^2(\alpha)}$

3 $\dfrac{1+\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\alpha}{2})$

4 $\dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{\tan(\alpha)-\tan(\beta)} = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$

5 $|\sin(\alpha) + \cos(\alpha)| \leq \sqrt{2}$

6 $\sin^4(\alpha) + \cos^4(\alpha) \geq \frac{1}{2}$

7 $\forall_{x\in\mathbb{R}}: \ \sin(\cos(x)) < \cos(\sin(x))$

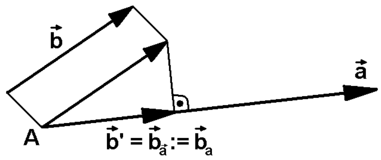
5.3.6 Leben wir in einem 4-dimensionalen Raum? – Est-ce que nous vivons dans un espace de dimension 4?

Um einen Punkt im Raum zu beschreiben, brauchen wir bekanntlich 3 Koordinaten. Der Raum der Ortsvektoren der Punkte im euklidschen Raum ist also 3–dimensional, den die Anzahl der zu den Koordinaten gehörigen Basisvektoren ist 3. Gilt das auch entsprechend für die Ebenen im Raum? — Diese Frage können wir auch mit „ja“ beantworten. Um diese einzusehen, stellen wir uns Kugeln vor mit dem Zentrum im Ursprung. Wenn nun eine beliebige Ebene gegeben ist, können wir uns dazu eine Kugel soweit wachsen lassen, bis sie die Ebene in einem einzigen Tangentialpunkt berührt. (Ausnahme: Ebenen durch den Ursprung. Der Ursprung ist aber nur ein einziger Punkt.) Ebene und Tangentialpunkt gehören also eindeutig zusammen. Zu jeder Ebene weg vom Ursprung gibt es einen eindeutigen Tangentialpunkt und umgekehrt. Es gibt daher so viele Ebenen weg vom Ursprung wie es Tangentialpunkte gibt, also wie es Punkte gibt $\neq$ Ursprung. Wir erkennen daher den „Raum der Ebenen“ als 3–dimensional. Wie aber ist es nun mit dem „Raum der Geraden“ (weg vom Ursprung)?
Um diese Frage zu beantworten hilft folgende Vorstellung: Ist eine beliebige Gerade weg vom Ursprung gegeben, so lassen wir dazu wieder eine Kugel wachsen, bis die Kugel die Gerade berührt. Der Berührungspunkt oder Tangentialpunkt ist eindeutig bestimmt. Zu diesem Punkt gibt es aber eine Tangentialebene an die Kugel, in der die Gerade liegt. In dieser Tangentialebene kann man nun die Gerade um den Tangentialpunkt drehen. Das gibt uns zur Dimension 3 der Ebenen (Tangentialebenen) eine 4. Dimension, die zum Drehwinkel gehört. Da jede Gerade genau einmal Tangente an eine solche Kugel ist, erkennen wir nun den „Raum der Geraden“ oder auch den „Raum der Strahlen“ (Halbgeraden mit $\pm$

gleicher Richtung) als 4-dimensional. Wir leben also in der 4-dimensionalen geometrischen Welt der Geraden! Wie eigenartig und ungewohnt diese Vorstellung doch ist! — Wieso? — Eben weil wir üblicherweise auf die Punkte fixiert sind — weil wir in Punkten und nicht in Geraden zu denken pflegen...

5.4 Zum Skalarprodukt – Quant au produit scalaire

5.4.1 Zur Definition – Quant à la définition



Sei $\vec{a} \neq \vec{0}$,

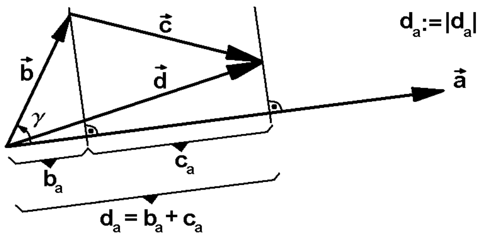
$\vec{b}_a$ = Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$

Definitionen: :
$\vec{b}_a$:= **vektorielle Komponente** von $\vec{b}$ in Richtung $\vec{a}$.
Weiter :

$$b_a = \begin{cases} |\vec{b}_a| & \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}_a \\ -|\vec{b}_a| & \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}_a \end{cases}$$

(**skalare Komponenten**)

Zusammenhänge:
()



(Skizze: $\rightsquigarrow$ $dim = 2$)

Seien $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$

1 $\vec{b}_a + \vec{c}_a = \vec{d}_a$

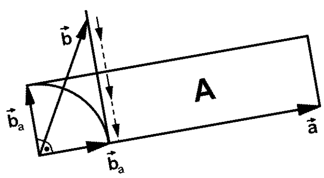
2 $b_a + c_a = d_a$

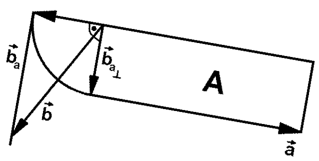
3 $b_a = b \cdot \cos(\gamma)$ $\rightsquigarrow$
(**Projektionssatz**)

Definitionen: :

Sei der Flächeninhalt des Parallelogramms:
$A = a \cdot b \cdot \cos(\gamma) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\gamma) = a \cdot b_a$
$:= \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ heisst **Skalarprodukt** von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.





A neg.!

Schreibweise: $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ (resp. $\langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle$) oder $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist also die um a gestreckte Komponente von $\vec{b}$ (in Richtung $\vec{b}$).

Achtung: $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \neq \vec{a}^{\,T} \cdot \vec{b}$; $(\vec{a}^{\,T} \cdot \vec{b})$ ist das Matrixpordukt .

Hinweis: $\cos(\gamma) < 0 \Rightarrow A < 0$

Eigenschaften:

1 **Kommutativität**
$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$
(wegen: $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\gamma)$)

2 **Distributivität**
$\langle \vec{a}, (\vec{b} + \vec{c}) \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$
(wegen Projektionssatz)

3 **Assoziativität :**
Für drei Vektoren sinnlos (Abgeschlossenheit, Produkt zweier Vektoren ist kein Vektor mehr)

4 Jedoch: **Assoziativität** mit Skalar (Fläche!):

$$\lambda \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \lambda \, \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \lambda \, \vec{b} \rangle$$

Folgerungen:

1 $\langle (\vec{a} + \vec{b}), (\vec{c} + \vec{d}) \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle$

2 $\langle \lambda \, \vec{a}, \mu \, \vec{b} \rangle = (\lambda \, \mu) \, \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

3 für $\vec{a}, \vec{b} \neq 0$: $sgn\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = sgn(\cos(\gamma)))$

4 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

5 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \pm |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$

6 Schwarz: $|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

5.4.2 Skalarprodukt in Komponenten – Le produit scalaire dans les composants

Es ist :

Erstens : $\langle \vec{e}_k, \vec{e}_k \rangle = |\vec{e}_k| \cdot |\vec{e}_k| \cdot \cos(\angle(\vec{e}_k, \vec{e}_k)) = 1 \cdot 1 \cdot \cos(0) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$
und $i \neq k \Rightarrow \langle \vec{e}_i, \vec{e}_k \rangle = |\vec{e}_i| \cdot |\vec{e}_k| \cdot \cos(\angle(\vec{e}_i, \vec{e}_k)) = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\frac{\pi}{2}) = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0.$
Also :

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_k \rangle := \delta_{i,k} = \begin{cases} 0 & \vec{e}_i \perp \vec{e}_k \\ 1 & \vec{e}_i \| \vec{e}_k \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ ($\delta_{i,k}$: **Kronecker-Symbol**)
Zweitens :

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \rangle = \langle (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3), (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3) \rangle$$

Multipliziert man hier distributiv aus und benützt man $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_k \rangle = \delta_{i,k}$, so fallen alle Produkte mit gemischten Gliedern weg. Es bleiben nur noch die $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_i \rangle = 1$.

Konsequenz: $\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum\limits_{k=1}^{3} a_i b_i$

$$\leadsto \; |\vec{a}| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$$

Verallgemeinerung für den $\mathbb{R}^n$

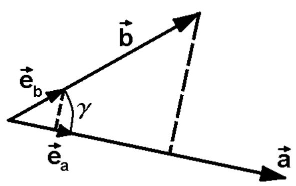
Sei : $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n$ *ONB* $\leadsto$ (Orthonormalbasis)

und $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \; \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$

Analog zum $\mathbb{R}^3$ gewinnt man:

$$\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = \sum_{k=1}^{n} a_i b_i$$

5.4.3 Anwendungen – Applications

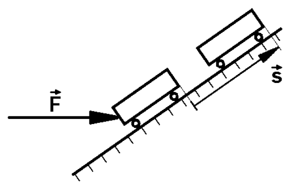


Bsp.:

(**Geometrie**)

Winkel zwischen zwei Vektoren :

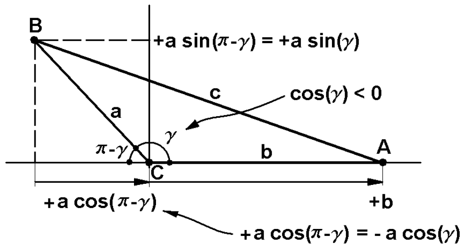
$$\cos(\gamma) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}, \;\; \gamma = \arccos(\frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|})$$



Bsp.:
Physik :

Arbeit :

$$W = F_s \cdot s = F \cdot s \cdot \cos(\gamma) = \langle \vec{F}, \vec{s} \rangle$$

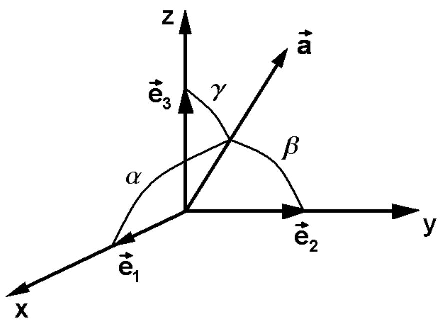


Bsp.:
Cosinussatz :

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a\,\cos(\gamma) \\ a\,\sin(\gamma) \end{pmatrix}, \;\; \vec{b} = \begin{pmatrix} -b \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}, \; c^2 = c \cdot c = |\vec{c}| \cdot |\vec{c}| = \langle \vec{c}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + 2 \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = a^2 + 2 \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + b^2 = a^2 - b^2 + 2\,a\,b\,\cos(\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})) = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos(\gamma)$

$\leadsto \;\; c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos(\gamma)$



Bsp.:

Richtungscosinus :

Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, z.B.

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{e}_1 \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{e}_1|} = \langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \cdot \frac{1}{a \cdot 1}$$
$$= \frac{a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0}{a} = \frac{a_1}{a}$$

$\Rightarrow \ \alpha = \arccos(\frac{a_1}{a}), \ \ \beta = \arccos(\frac{a_2}{a}), \ \ \gamma = \arccos(\frac{a_3}{a}).$

$\Rightarrow \ \cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = \frac{a_1^2}{a^2} + \frac{a_2^2}{a^2} + \frac{a_3^2}{a^2} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{a^2} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = 1$

$$\Rightarrow \ \cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$$

Bemerkung:

Eine entsprechende Formel findet man für den $\mathbb{R}^n$.

Problem: **(Katzenauge)**

Seien drei ebene Spiegel $E_1, \ E_2, \ E_3$ gegeben, die senkrecht aufeinander stehen. Von einem Punkt P aus wird ein Strahl in Richtung $\vec{v}$ ausgesendet, der an allen drei Spiegeln reflektiert wird. Man zeige, dass der an allen Spiegeln reflektierte Strahl die Richtung $-\vec{v}$ hat. (Normalenvektoren $\vec{n}_k \perp E_k, \ |\vec{n}_k| = 1$).

Lösung:

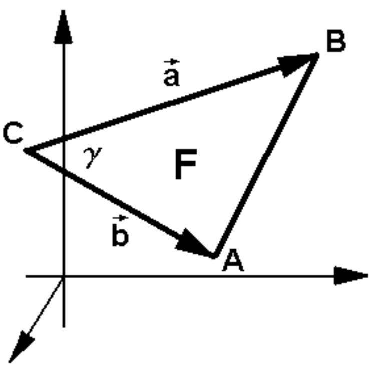
$\vec{n}_1 \leadsto \ \vec{n}_2 \leadsto \ \vec{n}_3 \leadsto \ \vec{n}_4, \qquad \vec{v}_{k+1} = \vec{v}_k - 2 \cdot \vec{n}_k \langle \vec{v}_k, \vec{n}_k \rangle \qquad$ Skizze! $\leadsto$

$$\begin{aligned}
\vec{v}_2 &= \vec{v}_1 - 2 \cdot \vec{n}_1 \langle \vec{v}_1, \vec{n}_1 \rangle, \\
\vec{v}_3 &= \vec{v}_2 - 2 \cdot \vec{n}_2 \langle \vec{v}_2, \vec{n}_2 \rangle = \vec{v}_1 - 2 \cdot \vec{n}_1 \langle \vec{v}_1, \vec{n}_1 \rangle - 2 \cdot \vec{n}_2 \langle (\vec{v}_1 - 2 \cdot \vec{n}_1 \langle \vec{v}_1, \vec{n}_1 \rangle), \vec{n}_2 \rangle \\
&= \vec{v}_1 - 2 \cdot \vec{n}_1 \langle \vec{v}_1, \vec{n}_1 \rangle - 2 \cdot \vec{n}_2 \langle \vec{v}_1, \vec{n}_2 \rangle + 4 \cdot \underbrace{\langle \vec{n}_1 \langle \vec{v}_1, \vec{n}_1 \rangle, \vec{n}_2 \rangle}_{=0, \ \ \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2} = \vec{v}_1 - 2 \cdot \vec{n}_1 \langle \vec{v}_1, \vec{n}_1 \rangle - 2 \cdot \vec{n}_2 \langle (\vec{v}_1, \vec{n}_2 \rangle \\
\vec{v}_4 &= \ldots = \vec{v}_1 - 2 \cdot \vec{n}_1 \langle \vec{v}_1, \vec{n}_1 \rangle - 2 \cdot \vec{n}_2 \langle \vec{v}_1, \vec{n}_2 \rangle - 2 \cdot \vec{n}_3 \langle \vec{v}_1, \vec{n}_3 \rangle
\end{aligned}$$

$\leadsto \ \vec{v}_1 + \vec{v}_4 = 2 \cdot (\vec{v}_1 - \vec{n}_1 \langle \vec{v}_1, \vec{n}_1 \rangle - \vec{n}_2 \langle \vec{v}_1, \vec{n}_2 \rangle - \vec{n}_3 \langle \vec{v}_1, \vec{n}_3 \rangle) = \vec{v}_1 - \underbrace{(\vec{v}_1)_{\vec{n}_1} + (\vec{v}_1)_{\vec{n}_2} + (\vec{v}_1)_{\vec{n}_3}}_{=\vec{v}_1, \ \ B = \{\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\}} = \vec{v}_1 - \vec{v}_1 = \vec{0}$

$\leadsto \ \vec{v}_4 = -\vec{v}_1$ ☺

Problem: **(Dreiecksflächeninhalt)**



$$
\begin{aligned}
2\,F &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\gamma) \\
\Rightarrow\ 4\,F^2 &= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \sin^2(\gamma) \\
&= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot (1-\cos^2(\gamma)) \\
&= (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|)^2 - (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\gamma))^2 \\
&= (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|)^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2
\end{aligned}
$$

Satz:

$$F = \frac{1}{2}\sqrt{(|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|)^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2}$$

Beispiele weiterer Anwendungen:

1 Normalenebene zu Vektor durch gegebenen Punkt.

2 Abstand Ebene–Ursprung oder Ebene–Ebene.

3 Orthogonalzerlegung eines Vektors.

5.4.4 Drehung eines Vektors — Déplacement angulaire d'un vecteur

Problem:

Gegeben sei $\vec{a}$. Drehe $\vec{a}$ um den Winkel φ um den Punkt O: $D_\varphi(\vec{a}) = \vec{b} \rightsquigarrow\ \vec{b} = ?$.

Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ \vec{a_\perp} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow\ \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \varphi,\ \measuredangle(\vec{b}, \vec{a_\perp}) = \frac{\pi}{2} - \varphi$

$\rightsquigarrow\ \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) = |\vec{a}|^2 \cdot \cos(\varphi) = (a_1^2 + a_2^2) \cdot \cos(\varphi) = a_1\,b_1 + a_2\,b_2,$
$\wedge\ \langle \vec{b}, \vec{a_\perp} \rangle = |\vec{b}| \cdot |\vec{a_\perp}| \cdot \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin(\varphi) = (a_1^2 + a_2^2) \cdot \sin(\varphi) = -a_2\,b_1 + a_1\,b_2$

Wir erhalten somit ein Gleichungssystem mit 2 Gleichungen für b_1 und b_2:

$$
\left| \begin{array}{lcl} a_1\,b_1 + a_2\,b_2 & = & (a_1^2 + a_2^2) \cdot \cos(\varphi) \\ -a_2\,b_1 + a_1\,b_2 & = & (a_1^2 + a_2^2) \cdot \sin(\varphi) \end{array} \right|
$$

$\rightsquigarrow$ Lösung:

Satz: <u>**Vor.:**</u>

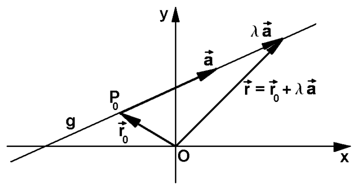
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \xmapsto{D_\varphi} \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

<u>**Beh.:**</u>

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1\,\cos\varphi - a_2\,\sin\varphi \\ a_1\,\sin\varphi + a_2\,\cos\varphi \end{pmatrix}$$

5.5 Geradengleichungen – Equations de droites

5.5.1 Parametergleichungen – Equations paramétriques



Sei $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$, $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$, $P \in g$ beliebig ,
$P_0 \in g$ fest ,
$\vec{a} = \overrightarrow{P_0P_1} \parallel g$ gegeben , $t := \lambda \in \mathbb{R}$ Parameter .

$\rightsquigarrow$ **Parametergleichung:** $(t := \lambda)$

$$\vec{r} = \vec{r}(\lambda) = \vec{r}_0 + \lambda \cdot \vec{a} = \overrightarrow{0P_0} + \lambda \cdot \overrightarrow{P_0P_1}$$

Im $\mathbb{R}^3$ hat man dann: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

5.5.2 Komponentengleichungen – Equations de composants

Schreibt man die Parametergleichung komponentenweise auf, so erhält man die Komponentengleichung:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda a_1 \\ y &= y_0 + \lambda a_2 \\ z &= z_0 + \lambda a_3 \end{aligned}$$

Bsp.:

$$g_1 : \ \vec{r}_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad g_2 : \ \vec{r}_2(\mu) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Problem:

Schnittpunkt? Parallel? Windschief?

$\rightsquigarrow$ Untersuche :

$$\vec{r}_1(\lambda) = \vec{r}_2(\mu) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ System :

$$\begin{aligned} 0 - 2\lambda - \mu &= 0 \\ 1 - \lambda - 2\mu &= 0 \\ 5 + 2\lambda + \mu &= 0 \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{L} = \{\}$: Windschief !

5.5.3 Spezialfall: Gerade in Grundebene – Cas spécial: Droite dans le plan de référence

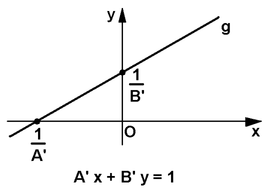
Sei $g \in G_1$ $\rightsquigarrow$ $z = 0$
G_1 Grundebene, 1. Hauptebene, xy–Ebene

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda a_1 \\ y &= y_0 + \lambda a_2 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

$\leadsto$ Gerade
$\Rightarrow \vec{a} \neq \vec{0}$, z.B. $a_1 \neq 0$
$\Rightarrow t = \dfrac{x - x_0}{a_1}, \ \ y = y_0 + \dfrac{x - x_0}{a_1} \cdot a_2$
$\Rightarrow y a_1 - y_0 a_1 - x a_2 + x_0 a_2 = 0$
$\Rightarrow a_2 x - a_1 y + (a_1 y_0 - a_2 x_0)$
$= Ax + By + C = 0$

Form $\ Ax + By + C = 0$: $\leadsto$ **Koordinatengleichung**

Z.B.
$C \neq 0 \ \Rightarrow \ 1 = -\dfrac{A}{C} \cdot x - \dfrac{B}{C} \cdot y = A'x + B'y$
$\leadsto \quad \dfrac{1}{A'}, \ \dfrac{1}{B'}$: Koordinaten



Eben haben wir benutzt: $\quad \lambda = \dfrac{x - x_0}{a_1}, \ \ a_1 \neq 1, \ \ y = y_0 + \dfrac{x - x_0}{a_1} \cdot a_2$
$\leadsto \quad y - y_0 = \Delta y = (x - x_0)\,\dfrac{a_2}{a_1} = \Delta x\,\dfrac{a_2}{a_1} \ \Rightarrow \ \dfrac{a_2}{a_1} = \tan(\varphi) = m \qquad$ (Steigung)
$\leadsto$ **Punkt–Richtungs–Form**

$$y - y_0 = \Delta y = m(x - x_0) = \tan(\varphi)(x - x_0) = \tan(\varphi)\Delta x$$

5.5.4 Andere Formen — D'autres formes

Weitere gängige Beziehungen betr. Geradengleichungen sind z.B.:

Achsenabschnittsform:

$$Ax + By + 1 = 0, \ \ a = -\frac{1}{A}, \ \ b = -\frac{1}{B} \ \ \Rightarrow \ \ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Normalform:

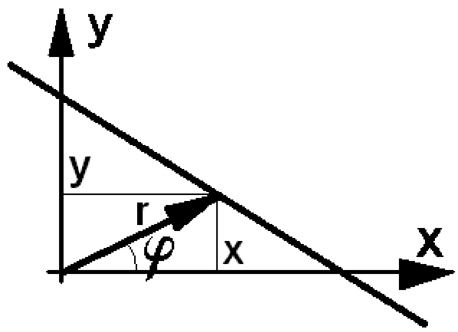
Sei $\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \ \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$

$$\vec{x} - \vec{a} \perp \vec{n} \ \Rightarrow \ \langle \vec{x} - \vec{a}, \vec{n} \rangle = 0 \ \Rightarrow \ \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{n} \rangle = \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \rangle - \langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \rangle = 0$$

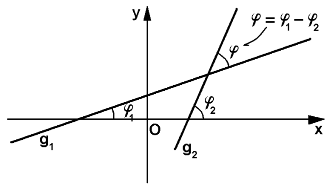
$$\Rightarrow \ x \underbrace{n_1}_{A} + y \underbrace{n_2}_{B} - \underbrace{a_1\,n_1 + a_2\,n_2}_{-C} = A\,x + B\,y + C = 0, \ \ \vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

Zur Polarform der Geraden:

$\langle \vec{r}, \vec{e}_\varphi \rangle = x\, \cos\varphi + y\, \sin\varphi = |\vec{r}|\,|\vec{e}_\varphi| \cdot \cos 0 =$
$= r = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \ \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + t\,a_1 \\ y_0 + t\,a_2 \end{pmatrix},$
$\varphi(t) = \arctan(\dfrac{y_0 + t\,a_2}{x_0 + t\,a_1}),$
$r(t) = \sqrt{(x_0 + t\,a_1)^2 + (y_0 + t\,a_2)^2}$



5.5.5 Winkel zwischen Geraden – Angle entre des droites



$$\begin{array}{rcl} g_1: \; y &=& m_1 x + q_1, \;\; m_1 = \tan(\varphi_1) \\ g_2: \; y &=& m_2 x + q_2, \;\; m_2 = \tan(\varphi_2) \end{array}$$

Benutze Additionstheoreme :

$$\tan(\varphi) = \tan(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\tan(\varphi_2) - \tan(\varphi_1)}{1 + \tan(\varphi_2)\cdot\tan(\varphi_1)} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1} \leadsto \quad \varphi = \arctan(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1})$$

Andererseits haben wir:

$$g_1: \;\; \vec{r}_1(\lambda) = \vec{a}_0 + \lambda\vec{a}, \;\; g_2: \;\; \vec{r}_2(\mu) = \vec{b}_0 + \mu\vec{b}, \;\; \varphi = \arccos(\frac{\langle\vec{a},\vec{b}\rangle}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|})$$

Damit kann man Probleme wie das folgende lösen

Geg.: $\quad g_1 = g_1(A,B) = \overline{AB}, \;\; A(-2/2), B(1/6), \;\; g_2 = g_2(C,\varphi), \;\; C = C(4,4),$
$\varphi = \frac{\pi}{6}$ (Steigungswinkel .) $\leadsto \quad D = g_1 \cap g_2 = ?$

Beachte:

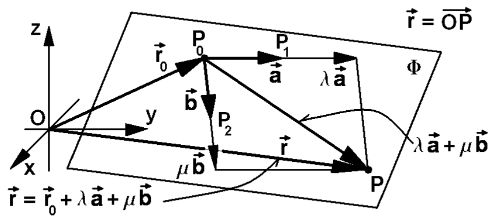
$$g_1: \; A_1\,x + B_1\,y = 0 \;\Rightarrow\; \langle\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\rangle = \langle\vec{n},\vec{r_1}\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n} = \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \perp \vec{r_1} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{g_1} \;\;\Rightarrow\; \vec{n} \perp g_1$$

$$g_2: \; A_1\,x + B_1\,y + C_2 = 0 \;\Rightarrow\; \langle\begin{pmatrix} A_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\rangle + C_2 = \langle\vec{n_2},\vec{r_2}\rangle + C_2 = 0, \;\; \vec{r_2} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{g_2}$$

$$C_2 \neq 0 \;\Rightarrow\; \mathbb{L}_{g_1} \cap \mathbb{L}_{g_2} = \{\;\} \;\Rightarrow\; g_1 \parallel g_2 \;\Rightarrow\; \vec{n} \perp g_2$$

5.6 Ebenengleichungen – Equations de plans

5.6.1 Parametergleichungen – Equations paramétriques



Sei $\Phi =$ Ebene ,

$P_0, P_1, P_2 \in \Phi$,
$\vec{a} = \overrightarrow{P_0P_1}$, $\vec{b} = \overrightarrow{P_0P_2}$, $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$,

$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda\, \overrightarrow{P_0P_1} + \mu\, \overrightarrow{P_0P_2}$
$= \vec{r}_0 + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$

$\leadsto$ **Parametergleichung:** $\vec{r} = \vec{r}(\lambda,\mu) = \vec{r}_0 + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$

5.6.2 Komponentengleichungen – Equations de composants

Schreibt man die Parametergleichung wieder komponentenweise auf, so erhält man die Komponentengleichung:

$$\begin{array}{rcl} x &=& x_0 + \lambda a_1 + \mu b_1 \\ y &=& y_0 + \lambda a_2 + \mu b_2 \\ z &=& z_0 + \lambda a_3 + \mu b_3 \end{array}$$

Bsp.: (Anwendung)

Sei $g: \ \vec{r}_1(t) = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{a}, \ \ \Phi: \ \vec{r}_2(\lambda,\mu) = \vec{r}_0 + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$

Problem: $g \cap \Phi = ? \rightsquigarrow$ System $\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(\lambda,\mu)$ lösen.

5.6.3 Koordinatengleichungen – Equations de coordonnés

Berechnet man in einer Komponentengleichung z.B. λ und setzt es in den andern beiden Gleichungen ein, so erhält man zwei Gleichungen in x, y, z, μ. Eliminiert man auf diese Weise auch noch μ, so bleibt noch eine Gleichung in x, y, z. Diese heisst **Koordinatengleichung** und ist von nachstehender Form. (Bei der Elimination von λ und μ benutzt man nur lineare Operationen. Daher ist die entstehende Gleichung linear.)

$$\rightsquigarrow \qquad Ax + By + Cz + D = 0$$

Problem:

Geg.: Koordinatengleichung der Ebene :

$$\Phi: \ Ax + By + Cz + D = \langle \vec{n}, \vec{r} \rangle + D = \langle \vec{a}_\perp, \vec{r} \rangle + D = 0$$

$\rightsquigarrow$ Gesucht: Parametergleichung :

$$\Phi: \ \vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \cdot \vec{a}$$

Idee:

Setze z.B. $x = \lambda, \ y = \mu.$
Berechne damit z.

$$\rightsquigarrow \quad z = z_0 + \lambda z_1 = \mu z_2 \ \Rightarrow \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung:

Es gilt: $D = 0 \ \Rightarrow \ \langle \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rangle = 0 \ \Rightarrow \ \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \perp \Phi$

$\Phi_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \ \ \Phi_2: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$

$D_1 \neq D_2 \ \Rightarrow \ \Phi_1 \neq \Phi_2 \ \wedge \ \Phi_1 \| \Phi_2$

Achsenabschnittsform der Ebene:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

5.6.4 Interpretation von Gleichungen – Interprétation d' équations

Allgemein stellt man fest:

- ⊘ Gleichung mit 2 Unbekannten: Gerade in der Ebene.
- ⊘ Gleichung mit 3 Unbekannten: Ebene im Raum.
- ⊘ System von 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten: Gemeinsame Lösung, Schnittmenge zweier Ebenen im Raum: Gerade (abgesehen von Sonderfällen).

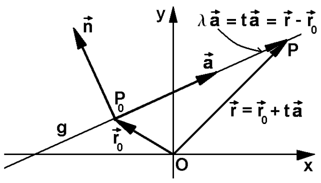
5.6.5 Spezielle Lage von Ebenen – Position spéciale de plans

Sei $\Phi: \; Ax + By + Cz + D = 0$.

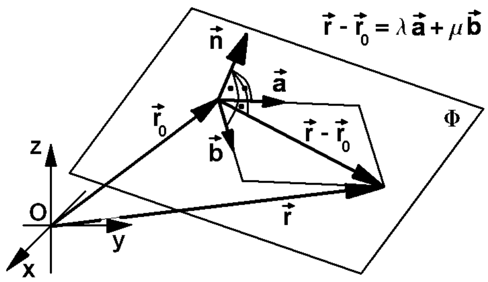
Bsp.:

- ⊘ $D = 0, \;\; Ax + By + Cz = 0 \;\Rightarrow\; O(0/0/0) \in \Phi$

- ⊘ Z.B. $C = 0$,
  z beliebig
  $Ax + By + D = 0 \;\Rightarrow\; \Phi \perp \; x\,y$–Ebene . $\leadsto$
  Φ erstprojizierend .
  (Entsprechend für die andern Ebenen.)



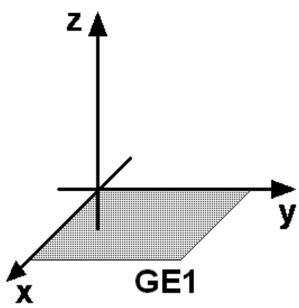
Gerade : $g: \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + t\,\vec{a}$,
$\vec{a}$ orientiert g , $\vec{n} \perp g$,
$(\vec{a}, \vec{n})$ '+'–Drehung .
$\vec{r} - \vec{r}_0 = \lambda\,\vec{a} \perp \vec{n}$
$\leadsto$ Distanz



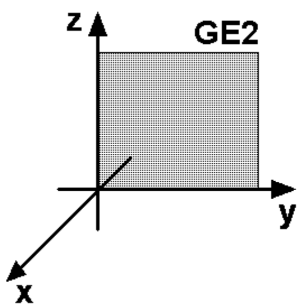
Ebene : $\Phi: \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b}$,
$\vec{a}$, $\vec{b}$ orientieren Φ ,
$\vec{n} \perp \Phi$,
$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{n})$ Rechtssystem
$\vec{r} - \vec{r}_0 = \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b} \perp \vec{n}$
$\leadsto$ Distanz

5.6.6 Übersicht – Vue générale

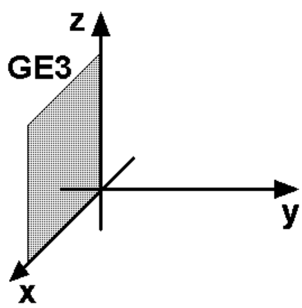
Grundebenen:



$0\,x + 0\,y + 1\,z = 0$

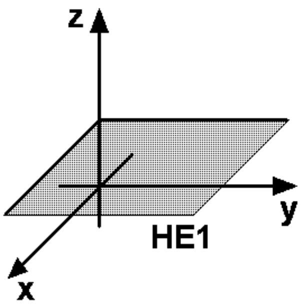


$1\,x + 0\,y + 0\,z = 0$

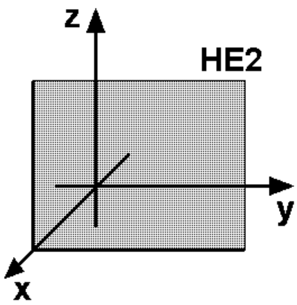


$0\,x + 1\,y + 0\,z = 0$

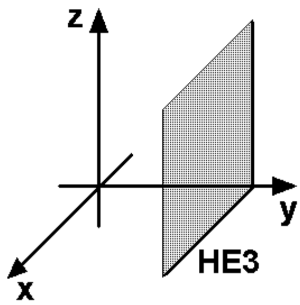
Hauptebenen:



$0\,x + 0\,y + 1\,z = D$

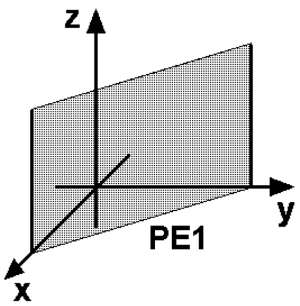


$1\,x + 0\,y + 0\,z = D$

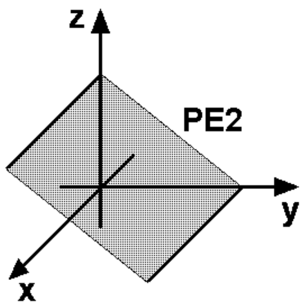


$0\,x + 1\,y + 0\,z = D$

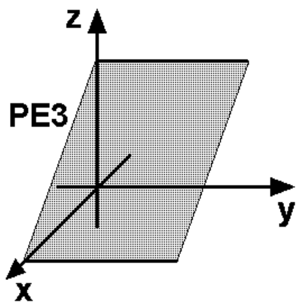
Projizierende Ebenen:



$A\,x + B\,y + 0\,z = D$



$0\,x + B\,y + C\,z = D$



$A\,x + 0\,y + C\,z = D$

5.6.7 Hess'sche Normalform – Forme normale de Hess

Es ist immer: $\vec{r} - \vec{r}_0 \perp \vec{n} \rightsquigarrow$

Satz: (Kriterium für $\vec{n}$):

$$\langle \vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n} \rangle = 0 \ \text{ resp. } \ \langle \vec{r}, \vec{n} \rangle = \langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \rangle = \langle \vec{r}_0, \vec{n} \rangle$$
$$= (r_0)_n \cdot n = (r)_n \cdot n = k = const$$

$\rightsquigarrow$ Für $|\vec{n}| = 1$ ist :
$(r_0)_n \cdot n = (r_0)_n \cdot 1 = (r_0)_n = k = \pm$Abstand *Origo*–Gerade/ Ebene

In einem *ONS* ist: :

$$\langle \vec{r}, \vec{n} \rangle = \langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \rangle = n_1 x + n_2 y + n_3 z = k \ \Rightarrow \ n_1 x + n_2 y + n_3 z + (-k) = 0$$

Diese Gleichung erkennen wir als Koordinatengleichung einer Ebene:

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z + (-k) = Ax + By + Cz + D = 0$$
$$\text{mit } \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \ \text{ und } \ -k = D$$

Wählt man $\quad |\vec{n}| = \left|\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}\right| = 1$, so wird

$-k = D = \pm$Abstand *Origo*–Ebene (Gerade: $C = 0$) .

Dabei ist $\quad |\vec{n}| = 1 \;\Rightarrow\; \vec{n} := \vec{e}_n \;\wedge\; \vec{e}_n = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \dfrac{1}{\left|\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}\right|} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$

Allgemein ist aber: : $\left|\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}\right| \neq 1.$

Die normierte Koordinatengleichung lautet daher:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,z + \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0$$

Somit ist: $\quad \dfrac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = -k =$

$\pm$Abstand *Origo*–Ebene (Gerade: $C = 0$)

Satz:

Vor.:

Ebene $\;A\,x + B\,y + C\,z + D = 0.$
(Gerade $\;C = 0$)

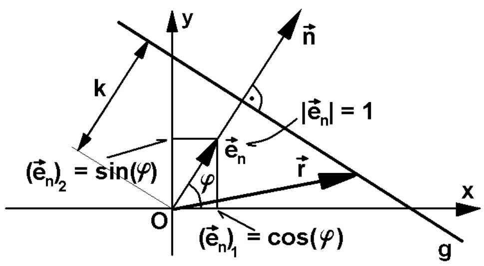
Beh.:

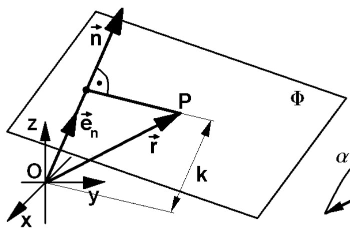
$\dfrac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = -k =$
$\pm$Abstand *Origo*–Ebene (Gerade: $C = 0$)

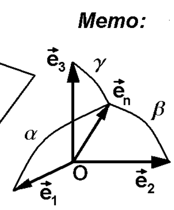
Definition: Die folgende normierte Koordinatengleichung heisst **Hess'sche Normalform (*HNF*)**

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,z + \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} =$$

$$(e_n)_1\,x + (e_n)_2\,y + (e_n)_3\,z + h = \langle \vec{e}_n, \vec{r}\rangle + (-k) = \langle \vec{e}_n, \vec{r}\rangle + h = 0$$







Man findet sofort:

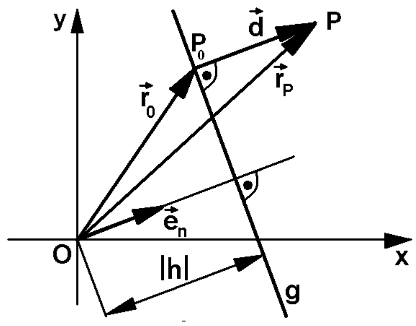
Gerade : $(e_n)_1 = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos(\varphi),\;\; (e_n)_2 = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \sin(\varphi).$

Ebene : $(e_n)_1 = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \cos(\alpha),\;\; (e_n)_2 = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \cos(\beta),$

$(e_n)_3 = \dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \cos(\gamma) \qquad (\rightsquigarrow$ Richtungscosinuse .)

5.7 Anwendungen – Applications

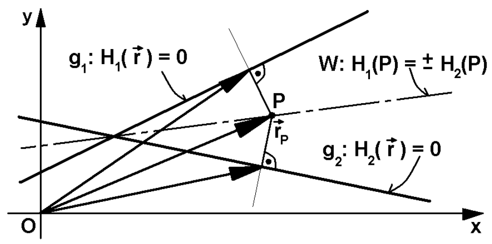
5.7.1 Abstand eines Punktes von einer Geraden resp. Ebene – Distance d'un point d'une droite resp. d'un plan



$\vec{r}_p = \vec{r}_0 + \vec{d},\ \ \vec{r}_0 = \vec{r}_p - \vec{d} = \overrightarrow{0P_0},$
$P_0 \in g$ resp. Φ.
$H(\vec{r}_0) = \langle \vec{e}_n, \vec{r}_0\rangle + h$
$= \langle \vec{e}_n, (\vec{r}_p - \vec{d})\rangle + h$
$= \langle \vec{e}_n, \vec{r}_p\rangle - \langle \vec{e}_n, \vec{d}\rangle + h$
$= \langle \vec{e}_n, \vec{r}_p\rangle + h - |\vec{e}_n| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos(n \cdot \pi)$
$= H(\vec{r}_p) \pm d = 0$
$\Rightarrow\ H(\vec{r}_p) = \pm d,$
$d =$ Abstand P zu g resp. Φ. .

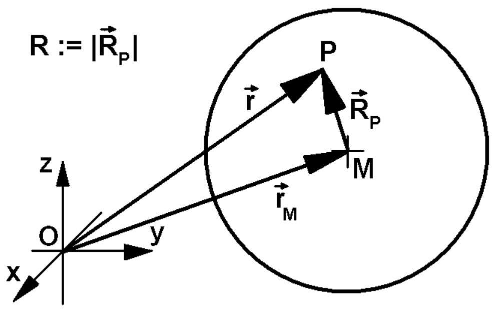
5.7.2 Winkelhalbierende – Bisectrice

Sei w (oder ϕ) Winkelhalbierende von $g_1,\ g_2$ ($\Phi_1,\ \Phi_2$), gegeben durch $H_1(\vec{r}) = H_2(\vec{r}) = 0$



$P \in w\ \ (P \in \Phi)\ \Rightarrow\ d_1 = d_2,$
$H_1(\vec{r}_p) = \pm H_2(\vec{r}_p)\ \rightsquigarrow$
Koordinatengleichung, zwei Lösungen ($\pm$)

5.7.3 Kreis, Kugel, Ellipse – Cercle, sphère, ellipse



Sei $M = M(u/v/w)$ Mittelpunkt
$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},\ \ \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$
Kreis (Kugel) :
$K = \{P \mid \overline{MP} = const. = R\}$
$\Rightarrow\ |\vec{r} - \vec{r}_M|^2 = R^2$
$\Rightarrow\ | \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} |^2 = R^2$
$K\ :\ \ (x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2 = R^2$
(quadratisch!)

Andererseits ist:

$$|\vec{r} - \vec{r}_M|^2 = \langle(\vec{r} - \vec{r}_M), (\vec{r} - \vec{r}_M)\rangle = \vec{r}^{\,2} - 2 \cdot \langle \vec{r}, \vec{r}_M\rangle + \vec{r}_M^{\ 2} = R^2$$

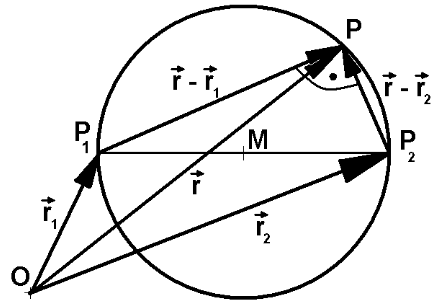
(Wir schreiben $\langle \vec{r}, \vec{r}\rangle = \vec{r}^{\,2}$.)

Sei $\quad -2\vec{r}_M = \vec{p},\ \vec{r}_M^{\,2} - R^2 = q \qquad$ (resp. $\frac{\vec{p}^{\,2}}{4} - R^2 = q$ oder $R^2 = \frac{\vec{p}^{\,2}}{4} - q$)

$\Rightarrow\ \vec r^{\,2} + \langle \vec p, \vec r\rangle + q = 0$ resp. $x^2 + y^2 + z^2 + p_1 x + p_2 y + p_3 z + q = 0$
mit $\quad R^2 = \frac{\vec p^{\,2}}{4} - q > 0$

Satz: $\{\vec r\}$ ist Kreis (Kugel)
$\Leftrightarrow \vec r^{\,2} + \langle \vec p, \vec r\rangle + q = 0 \ \wedge\ \vec r_M = -\frac{1}{2}\vec p \ \wedge\ R^2 = \frac{\vec p^{\,2}}{4} - q > 0$

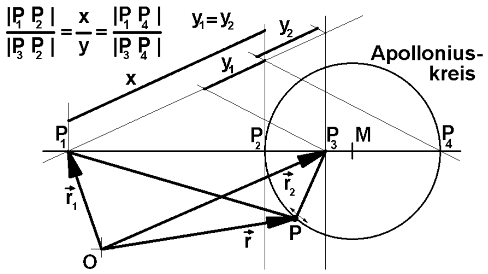
5.7.4 Spezielle Kreise, Kugeln – Cercles, sphères spéciales



Thaleskreis (–kugel):

$K = \{P\}$ Kreis (Kugel)
$\Leftrightarrow\ K = \{P \mid \overline{PP_1} \perp \overline{PP_2}\}$,

Beweis mit
$$\langle (\vec r - \vec r_1), (\vec r - \vec r_2)\rangle = 0$$
$\leadsto$ Thaleskreis (–kugel) .



Apolloniuskreis (–kugel):

Es ist:

$$\frac{\overline{P_1P_2}}{\overline{P_3P_2}} = \frac{x}{y_2} = \frac{x}{y_1} = \frac{\overline{P_1P_4}}{\overline{P_3P_4}} := \lambda \leadsto$$

Konstr. $P_3,\ P_4$ zu $P_1,\ P_2$.

$K = \{P \mid |\overline{P_1P}| : |\overline{P_2P}| = |\lambda|,\ \lambda\cdot \overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{P_2P}\ ,\ |\lambda| \neq 1\}$, ist Kreis (Kugel) .

Beweis mit $\qquad (\vec r - \vec r_1)^2 : (\vec r - \vec r_2)^2 = \lambda^2 \ \Rightarrow\ (\vec r - \vec r_1)^2 = (\vec r - \vec r_2)^2 \cdot \lambda^2$

$$\Rightarrow\ \vec r^{2} - 2\langle \vec r, \vec r_1\rangle + \vec r_1^{2} = \lambda^2 \cdot (\vec r^{2} - 2\langle \vec r, \vec r_2\rangle + \vec r_2^{2}) \ \Rightarrow\ (1-\lambda^2)\cdot \vec r^{2} - 2\langle \vec r, \vec r_1 - \lambda^2\cdot \vec r_2\rangle + \vec r_1^{2} - \lambda^2 \cdot \vec r_2^{2} = 0$$

$$\Rightarrow\ \vec r^{2} - 2\,\frac{\langle \vec r, \vec r_1 - \lambda^2 \cdot \vec r_2\rangle}{1-\lambda^2} + \frac{\vec r_1^{2} - \lambda^2\cdot \vec r_2^{2}}{1-\lambda^2} = \vec r^{2} - 2\langle \vec r, \frac{\vec r_1 - \lambda^2 \cdot \vec r_2}{1-\lambda^2}\rangle + \frac{\vec r_1^{2} - \lambda^2\cdot \vec r_2^{2}}{1-\lambda^2} = 0$$

$$\leadsto\quad \vec r_M = \frac{\vec r_1 - \lambda^2 \vec r_2}{1-\lambda^2},\ (\vec r - \vec r_M)^2 = \vec R^2,\ \vec r^{2} - 2\langle \vec r, \vec r_M\rangle + \vec r_M^{2} - \vec R^2 = 0$$

$$\leadsto\quad \vec r_M^{2} - \vec R^2 = \frac{\vec r_1^{2} - \lambda^2\cdot \vec r_2^{2}}{1-\lambda^2} \leadsto \quad \vec R^2 = \vec r_M^{2} - \frac{\vec r_1^{2} - \lambda^2\cdot \vec r_2^{2}}{1-\lambda^2} = (\frac{\vec r_1 - \lambda^2 \vec r_2}{1-\lambda^2})^2 - \frac{\vec r_1^{2} - \lambda^2\cdot \vec r_2^{2}}{1-\lambda^2} = \ldots$$

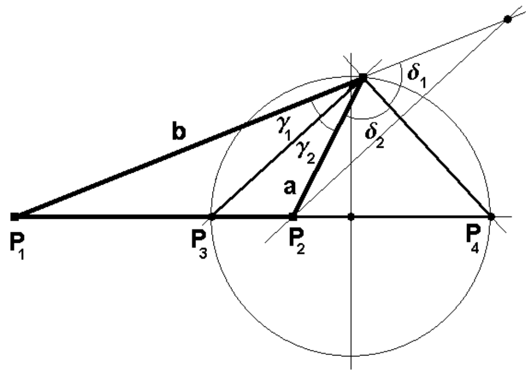
$$\leadsto\ \vec R^2 = \frac{\lambda^2\cdot \vec r_1^{2} - 2\,\lambda^2\langle \vec r_1, \vec r_2\rangle + \lambda^2 \cdot \vec r_2^{2}}{(1-\lambda^2)^2} = \frac{\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2}\cdot \langle \vec r_1, \vec r_2\rangle > 0 \leadsto ☺$$

$$\leadsto\quad \vec r_3 = \frac{\vec r_1 + \lambda^2 \vec r_2}{1+\lambda},\ \ \vec r_4 = \frac{\vec r_1 - \lambda^2 \vec r_3}{1-\lambda}.$$

Satz:
Weiter gilt für den Apolloniuskreis:

$$\gamma_1 = \gamma_2, \;\; \delta_1 = \delta_2$$

Beweis siehe Seite 310.

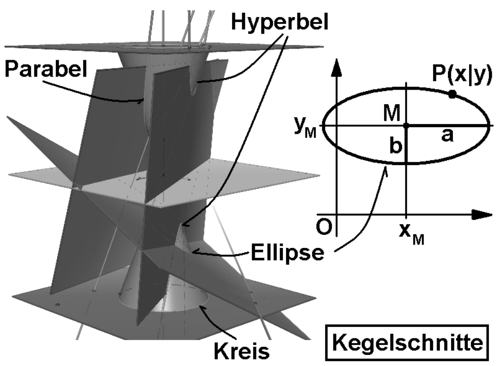


Übergang Kreise $\rightsquigarrow$ Ellipsen: Eine Achse des Kreises strecken. $\rightsquigarrow \;\; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

5.7.5 Kegelschnitte – Sections des cônes

Über Kegelschnitte ist in der Ingenieurmathematikliteratur viel Theorie vorhanden, die an dieser Stelle keinen Platz findet. (Vgl. dazu die Formelbücher.) Später werden wir bei Gelegenheit einige Dinge behandeln.
Zum Verständnis des Begriffs eine kurze Übersicht:
Kegel: Wir betrachten im Raum eine Gerade g, die eine andere Gerade a schneidet, welche wir **Achse** nennen. Lässt man g um a rotieren, so wird ein (unendlich grosses) Volumen ausgeschnitten, das wir **Kegel** nennen (auch Doppelkegel genannt). Die Rotationsfläche heisst **Kegelmantel**.

Wenn solche Kegel mit Ebenen geschnitten werden, entstehen auf dem Kegelmantel Schnittkurven. Solche Kurven kann man in drei (resp. vier) Gruppen einteilen:



- ⊘ Schnitt durch nur eine der Hälften des Doppelkegels: Ellipse.
  In Achsenparalleler Lage:

$$\frac{(x - x_M)^2}{a^2} + \frac{(y - y_M)^2}{b^2} = 1$$

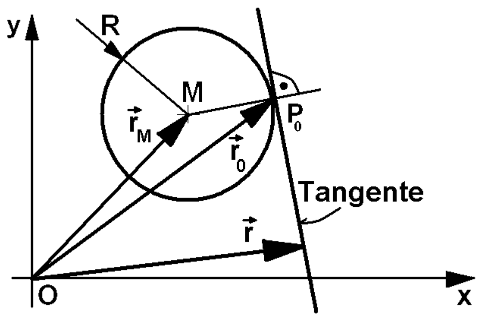
- ⊘ Spezialfall: Schnitt $\perp$ a: Kreis.
- ⊘ Schnitt durch beide Hälften des Doppelkegels: Hyperbel.
  ...

$$\frac{(x - x_M)^2}{a^2} - \frac{(y - y_M)^2}{b^2} = 1$$

- ⊘ Schnitt parallel Mantellinie: Parabel.
  ...

$$y = a(x - x_0)^2 + b$$

5.7.6 Tangente und Tangentialebene — Tangente et plan tangentiel



Sei $\quad t \perp \overline{P_0M}$
$\Rightarrow \; \langle(\vec{r}_0 - \vec{r}_M), (\vec{r} - \vec{r}_0)\rangle = 0$

Umformen: :
$0 = \langle(\vec{r}_0 - \vec{r}_M), (\vec{r} - \vec{r}_M + \vec{r}_M - \vec{r}_0)\rangle$
$= \langle(\vec{r}_0 - \vec{r}_M), (\vec{r} - \vec{r}_M\rangle - (\vec{r}_0 - \vec{r}_M)^2,$
$(\vec{r}_0 - \vec{r}_M)^2 = \vec{R}^2 = R^2$
(Direkt)
$R^2 = R \cdot \overline{MP}_R = \langle(\vec{r}_0 - \vec{r}_M), (\vec{r} - \vec{r}_M)\rangle)$

$\leadsto$ **Tangentengleichung:**

$$\langle(\vec{r}_0 - \vec{r}_M), (\vec{r} - \vec{r}_M)\rangle = R^2$$

Weitere Umformung: $\quad \langle\vec{r}_0, \vec{r}\rangle - \langle\vec{r}_M, (\vec{r} + \vec{r}_0)\rangle + \vec{r}_M{}^2 = R^2$

Sei $\quad -\vec{r}_M = \dfrac{\vec{p}}{2}, \;\; \vec{r}_M{}^2 - R^2 = q$

$$\Rightarrow \; \langle\vec{r}_0, \vec{r}\rangle + \frac{1}{2}\langle\vec{p}, (\vec{r} + \vec{r}_0)\rangle + q = 0$$

oder $\quad x\,x_0 + y\,y_0 + z\,z_0 + \frac{1}{2}p_1\,(x_0 + x) + \frac{1}{2}\,p_2\,(y_0 + y) + \frac{1}{2}\,p_3\,(z_0 + z) + q = 0$

5.7.7 Polare und Polarenebene — Polaire et plan polaire (et plan tangentiel)

Tangentengleichung (Tangentialebene): :

$$\langle(\vec{r}_0-\vec{r}_M), (\vec{r}-\vec{r}_M)\rangle = R^2 \;\Rightarrow\; \langle(\vec{r}_0-\vec{r}_M), \vec{r}\rangle - \langle(\vec{r}_0-\vec{r}_M), \vec{r}_M\rangle - R^2 = 0, \;\; \langle(\vec{r}_0-\vec{r}_M), \vec{r}\rangle = Ax+By+Cz,$$
$$\text{mit} \quad \langle(\vec{r}_0 - \vec{r}_M), \vec{r}_M\rangle - R^2 = const., \;\; \vec{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}\;, \;\; P_0 \in K$$

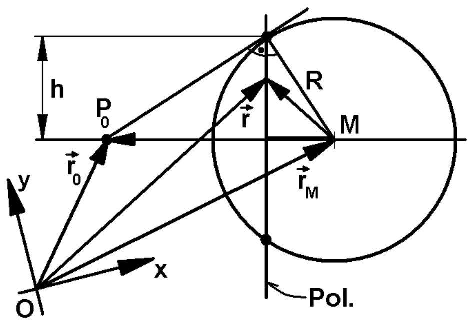
$\leadsto$ Geraden – resp. Ebenengleichung (Koordinatengleichung) .

Wählt man $P_0 \not\in \partial K$ (Rand), so ändert man nur die Koeffizienten in der Koordinatengleichung. Die Ebene ändert die Lage, bleibt aber eine Ebene.

Definition: Sei $\quad \Phi : \; \langle(\vec{r}_0 - r\vec{_M}), (\vec{r} - \vec{r}_M)\rangle - R^2 = 0.$

Für $P_0 \not\in \partial K$ heisst die Gerade (resp. Ebene) Φ **Polare** zum **Pol** P_0.

Polare und Pol bedingen sich also gegenseitig.



Betrachte:

$\langle(\vec{r}_0-\vec{r}_M),(\vec{r}-\vec{r}_M)\rangle = R^2.$
Setze zuerst $\vec{r}=\vec{r}_1$
und nachher $\vec{r}=\vec{r}_2$.
Subtrahiere die beiden so entstehenden Gleichungen: $\leadsto$: $\leadsto$
$\langle(\vec{r}_0-\vec{r}_M),(\vec{r}_1-\vec{r}_M)\rangle-\langle(\vec{r}_0-\vec{r}_M),(\vec{r}_2-\vec{r}_M)\rangle$
$= R^2-R^2=0$
$\Rightarrow\ \langle(\vec{r}_0-\vec{r}_M),(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\rangle=0$
d. h. $\quad (\vec{r}_0-\vec{r}_M)\perp(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$

$\leadsto$ Polare $\perp$ Zentrale.

Weiter: : $\langle(\vec{r}_0-\vec{r}_M),(\vec{r}-\vec{r}_M)\rangle-R^2=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{|\vec{r}_0-\vec{r}_M|}\cdot(\langle(\vec{r}_0-\vec{r}_M),(\vec{r}-\vec{r}_M)\rangle-R^2)=0.$

Benütze: $\quad \dfrac{\vec{r}_0-\vec{r}_M}{|\vec{r}_0-\vec{r}_M|}=\vec{e}_n$

$$\leadsto \langle\frac{\vec{r}_0-\vec{r}_M}{|\vec{r}_0-\vec{r}_M|},\vec{r}\rangle+\frac{1}{|\vec{r}_0-\vec{r}_M|}\cdot(\langle(\vec{r}_M-\vec{r}_0),\vec{r}_M\rangle-R^2)=\langle\vec{e}_n,(\vec{r}-\vec{r}_M)\rangle+\frac{R^2}{|\vec{r}_0-\vec{r}_M|}=0$$

Wegen $\vec{e}_n\perp p$ (Polare, $(\vec{r}_M-\vec{r}_0)$) und $|\vec{e}_n|=1$ haben wir nun eine *HNF*: $H(\vec{r}-\vec{r}_M)=0$

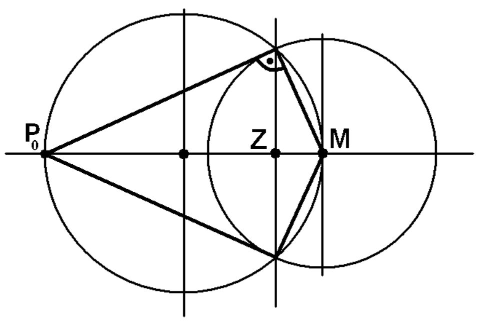
Sei P beliebig im Raum. $\leadsto$ $H(\vec{r}_P-\vec{r}_M)$ ist die Distanz des durch $\vec{r}_P-\vec{r}_M$ definierten Punktes P zur um $\vec{r}_M$ verschobenen Polaren, d.h. die Distanz von P zur Polaren.

Konsequenz: Für $P=M$ gilt:

$H(\vec{r}_M-\vec{r}_M)=\langle\vec{e}_n,\vec{0}\rangle+\frac{R^2}{|\vec{r}_0-\vec{r}_M|}=0-d=-d=$ Distanz von M zur Polaren.

$$\Rightarrow\ |\overline{ZM}|=d=\frac{R^2}{|\vec{r}_0-\vec{r}_M|}=\frac{R^2}{|\overline{P_0M}|}\ \Rightarrow\ |\overline{ZM}|\cdot|\overline{P_0M}|=R^2$$

$\leadsto$ Kathetensatz



$\leadsto$ Polarenkonstruktion: Mit Hilfe der Tangenten.

5.7.8 Anwendung: Methode zur Tangentenkonstruktion — Application: Méthode pour la construction de la tangente

Geg.:

Punkt $P=0=P_0(x_0/y_0)$, Kreis (Kugel).

1 Suche Polare p mit Hilfe von: $|\overline{MP_0}| \cdot |\overline{MP}| = R^2$
(Skizze vorhin $\leadsto$ p.)
$p \cap$ Kreis $= T_i$: $\leadsto$ Tangentialpunkte
$\Rightarrow$ Tangente berechenbar .

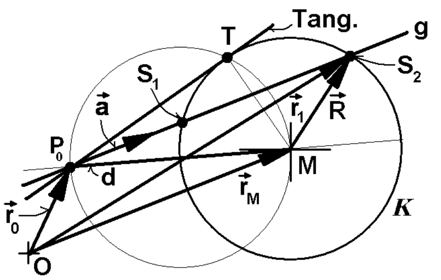
2 Mit Diskriminante :

Punkt $P_0(x_0/y_0) \leadsto$ Tangente $y - y_0 = m(x - x_0)$.
Tangentialpunkt $T_i(x_i/y_i)$
$\leadsto$ Tangente $y_i - y_0 = m(x_i - x_0)$.
x_i in Kreisgleichung einsetzen
$\leadsto$ Quadratische Gleichung für x_i und m.
Diskriminante $= 0$
$\leadsto$ Genau eine Lösung, genau ein Schnittpunkt Tangente $\cap$ Kreis

3 Mit Hess'scher Normalform:

Geg.: $P_0(x_0/y_0)$, $y - y_0 = m(x - x_0)$
M hat von der Tangente den Abstand R. .
$\leadsto$ $HNF(\vec{r}_M) = \pm R \leadsto$ m.

5.7.9 Potenz eines Punktes bezüglich eines Kreises oder einer Kugel — Puissance d'un point par rapport à un cercle ou une boule (shpère)



Gerade g durch P_0:

$$\vec{r}_g = \vec{r}_0 + \lambda\,\vec{a},\;\; \vec{r}_0 = \vec{r}_M$$

Kreis K: $(\vec{r}_K - \vec{r}_M)^2 = R^2$.

Problem: $g \cap K = ?$,

$\vec{r}_g = \vec{r}_K = \vec{r} \;\Rightarrow$
$R^2 = (\vec{r} - \vec{r}_M)^2 = (\vec{r}_0 + \lambda\,\vec{a} - \vec{r}_M)^2 \Rightarrow$
$(\vec{r}_0 - \vec{r}_M)^2 + 2\lambda\,\langle(\vec{r}_0 - \vec{r}_M), \vec{a}\rangle + \lambda^2\,\vec{a}^{\,2} = R^2$
$\Rightarrow \lambda^2 + \frac{2\,\lambda}{\vec{a}^{\,2}}\langle(\vec{r}_0 - \vec{r}_M), \vec{a}\rangle +$
$+\frac{1}{\vec{a}^{\,2}}((\vec{r}_0 - \vec{r}_M)^2 - R^2) = 0$

Dabei ist nach dem Hauptsatz der Algebra:

$$\frac{2}{\vec{a}^{\,2}}\langle(\vec{r}_0 - \vec{r}_M), \vec{a}\rangle = -(\lambda_1 + \lambda_2) \;\text{ und }\; \frac{1}{\vec{a}^2}((\vec{r}_0 - \vec{r}_M)^2 - R^2) = \frac{1}{\vec{a}^2} \cdot K(\vec{r}_0) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$$
mit $K(\vec{r}_0) = ((\vec{r}_0 - \vec{r}_M)^2 - R^2)$. $\leadsto$ *Vieta!*

$K(\vec{r}_0)$ entsteht aus der Kreisgleichung:

$$K(\vec{r}) = ((\vec{r} - \vec{r}_M)^2 - R^2) = 0$$

(ersetze einfach $\vec{r}$ durch $\vec{r}_0$, P_0 beliebig).

$K(\vec{r}_0)$ ist allerdings nicht mehr allgemein $= 0$.

Beachte jedoch:
$K(\vec{r}_0) = ((\vec{r}_0 - \vec{r}_M)^2 - R^2)$ ist unabhängig von $\vec{a}$
($\vec{a}$ ist Richtungsvektor einer Geraden durch P_0.)
$\leadsto$ $K(\vec{r}_0)$ ist konstant für jede Gerade durch P_0.

Definition: $K(\vec{r}_0) = ((\vec{r}_0 - \vec{r}_M)^2 - R^2)$ heisst **Potenz** von P_0 bezüglich K

Interpretation: $\triangle P_0TM$: $d^2 - R^2 = p^2$, d. h. :
$\leadsto$ $((\vec{r}_0 - \vec{r}_M)^2 - R^2) = const.$ Vieta: $\frac{1}{\vec{a}^{\,2}}((\vec{r}_0 - \vec{r}_M)^2 - R^2) = \frac{1}{\vec{a}^{\,2}} \cdot K(\vec{r}_0) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$.
Vgl. oben: λ_1, λ_2 waren Lösungen des Problems '$g \cap K = ?$'.

$\Rightarrow$ $\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \lambda_1 \vec{a} \ \wedge \ \vec{r}_2 = \vec{r}_0 + \lambda_2 \vec{a}$
$\Rightarrow$ $\overrightarrow{P_0S_1} = \lambda_1 \vec{a} \wedge \overrightarrow{P_0S_2} = \lambda_2 \vec{a} \ \Rightarrow \ \langle \overrightarrow{P_0S_1}, \overrightarrow{P_0S_2} \rangle = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \vec{a}^{\,2} = \frac{1}{\vec{a}^{\,2}} \cdot K(\vec{r}_0) \cdot \vec{a}^2 = K(\vec{r}_0)$

Ist P_0 innerhalb des Kreises, so sind $\overrightarrow{P_0S_1}$, $\overrightarrow{P_0S_2}$ entgegengesetzt gerichtet:

$$\langle \overrightarrow{P_0S_1}, \overrightarrow{P_0S_2} \rangle = K(\vec{r}_0) < 0$$

Wichtig:

P_0 ausserhalb $K \leadsto \langle \overrightarrow{P_0S_1}, \overrightarrow{P_0S_2} \rangle = K(\vec{r}_0) > 0$: **Sekanten**– und **Tangentensatz**.
P_0 innerhalb $K \leadsto \langle \overrightarrow{P_0S_1}, \overrightarrow{P_0S_2} \rangle = -|K(\vec{r}_0)| < 0$: **Sehnensatz**.

Potenzgerade, Potenzebene:
Gegeben Kreise (Kugeln) : $K_i(\vec{r}) = \vec{r}^{\,2} - 2\langle \vec{r}_{M_i}, \vec{r} \rangle - q_i = 0$.

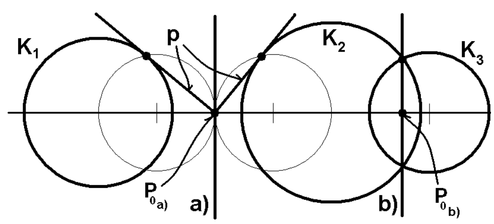
$\leadsto$ $\{P \mid P$ hat bezüglich K_1 und K_2 gleiche Potenz $\} = \ = \{P \mid K_1(\vec{r}) = K_2(\vec{r})\} \ \Rightarrow$

$$K_1(\vec{r}) - K_2(\vec{r}) = \vec{r}^{\,2} - 2\langle \vec{r}_{M_1}, \vec{r} \rangle - q_1 + \vec{r}^{\,2} - 2\langle \vec{r}_{M_2}, \vec{r} \rangle + q_2 = \langle (\vec{r}_{M_2} - \vec{r}_{M_1}), \vec{r} \rangle + (q_1 - q_2) = 0$$

$\leadsto$ Für $M_1 \neq M_2$ hat man hier eine lineare Gleichung für $\vec{r}$, also eine Gerade resp. Ebene.

Definition: Diese Gerade (Ebene) heisst **Potenzgerade (Potenzebene)**

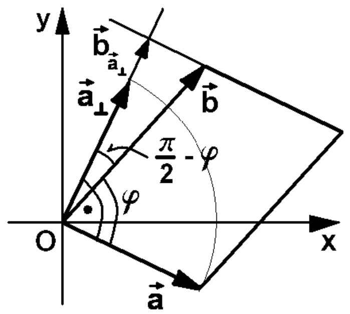
Bsp.:



5.8 Flächenprodukt, Vektorprodukt — 'Produit de surface', produit vectoriel

5.8.1 Flächenprodukt, Vektorprodukt — 'Produit de surface'

Wir betrachten Vektoren im $\mathbb{R}^2$.



Geg.: $\vec{a}, \vec{b}$, $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$
Problem: Eigenschaften des Inhalts des Parallelogramms $(\vec{a}, \vec{b})$?

Sei das KS so gewählt, dass $\vec{a}, \vec{b}$ Ortsvektoren sind (Ecke O).
Bekannt:
$b_{a_\perp} = |\vec{b}| \cdot \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$

Wir definieren das Flächenprodukt als $\pm$ Inhalt der Parallelogrammfläche:

Definition: **Flächenprodukt**

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{cases} \langle \overrightarrow{a_\perp}, \vec{b} \rangle = a \cdot b_{a_\perp} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi) & \vec{a} \neq \vec{0} \\ 0 & \vec{a} = \vec{0} \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Definition beweist man einfach die folgenden Gesetze:

Regeln:

1. Antikommutativgesetz: $[\vec{a},\vec{b}] = -[\vec{b},\vec{a}]$
   (wegen sin ...)

2. Distributivgesetz: $[\vec{a},\vec{b}+\vec{c}] = [\vec{a},\vec{b}] + [\vec{a},\vec{c}]$
   (wegen $(\vec{b}+\vec{c})_{a_\perp} = \vec{b}_{a_\perp} + \vec{c}_{a_\perp}$)

3. Parallelität: $[\vec{a},\vec{b}] = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{a}\,\|\,\vec{b}$
   (spez. für $\vec{a} = \vec{0}$; keine Fläche)

4. Assoziativgesetz sinnlos :
   $[\vec{a},\vec{b}]$ Skalar , $[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]$ nicht definiert

5. Assoziativgesetz mit Skalar :
   $[\lambda\cdot\vec{a},\vec{b}] = \lambda\cdot[\vec{a},\vec{b}]$ (Streckung)
   Konsequenz:

6. Distributivgesetz:
   $[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}+\vec{d}] = [\vec{a},\vec{c}] + [\vec{a},\vec{d}] + [\vec{b},\vec{c}] + [\vec{b},\vec{d}]$

7. Assoziativgesetz mit Skalar :
   $[\lambda\cdot\vec{a},\mu\cdot\vec{b}] = \lambda\cdot\mu\cdot[\vec{a},\vec{b}]$

8. Determinanteneigenschaft :
   $[\vec{a},\vec{b}] = [\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}] = a_1b_2 - a_2b_1$ (Mult. : $\times$)
   Denn:
   $[\vec{a},\vec{b}] = \langle \vec{a}_\perp, \vec{b}\rangle = [\begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}] = -a_2b_1 + a_1b_2 = a_1b_2 - a_2b_1$

Definition:

$$D := \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} := a_1b_2 - a_2b_1$$

D heisst **zweigliedrige Determinante**.

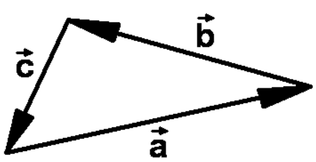
5.8.2 Anwendungen: Sinussatz, Cramer — Applications: Théorème du sinus, Cramer

Sinussatz — Théorème du sinus

Gegeben sei ein Dreieck: : $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ z.B. $[\vec{a}+\vec{b}+\vec{c},\vec{c}] = [\vec{a},\vec{c}] + [\vec{b},\vec{c}] + [\vec{c},\vec{c}],\;\; [\vec{c},\vec{c}] = 0$

$\Rightarrow$ $[\vec{a},\vec{c}] = -[\vec{b},\vec{c}] = [\vec{c},\vec{b}],\;\; a\cdot c\cdot\sin(\pi-\beta) = a\cdot c\cdot\sin(\beta) = c\cdot b\cdot\sin(\pi-\alpha) = c\cdot b\cdot\sin(\alpha) \rightsquigarrow$



$$a\cdot c\cdot\sin(\beta) = c\cdot b\cdot\sin(\alpha)$$

Cramersche Regeln für Gleichungssysteme — Règles de Cramer pour des systèmes d'équations

Betrachte: $\left|\begin{array}{rcl} a_1x + b_1y & = & c_1 \\ a_2x + b_2y & = & c_2 \end{array}\right| \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\cdot x + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\cdot y = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; x\cdot\vec{a} + y\cdot\vec{b} = \vec{c}$

$\leadsto$ Das Skalarprodukt führt zum Cosinussatz, das Flächenprodukt zum Sinussatz.

$\leadsto$ **Merke:** Ein lineares Gleichungssystem entspricht einer Vektorgleichung. $\leadsto$

Interpretation von $x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} = \vec{c}$: $\vec{c}$ soll linear zerlegt werden nach $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Diese Zerlegung ist eindeutig, falls $\vec{a}, \vec{b}$ *l.u.* $\vec{a}, \vec{b}$ *l.u.*,
d. h. $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$, d. h. $[\vec{a}, \vec{b}] \neq 0$

Trick: Berechne :

$$[\vec{c}, \vec{b}] = [x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b},\ \vec{b}] = x \cdot [\vec{a}, \vec{b}] + y \cdot [\vec{b}, \vec{b}] = x \cdot [\vec{a}, \vec{b}] + 0 = x \cdot [\vec{a}, \vec{b}] \qquad \text{und}$$
$$[\vec{a}, \vec{c}] = [\vec{a},\ x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}] = x \cdot [\vec{a}, \vec{a}] + y \cdot [\vec{a}, \vec{b}] = 0 + y \cdot [\vec{a}, \vec{b}] = y \cdot [\vec{a}, \vec{b}] \ \leadsto$$

Satz: **(Cramer)** $$x = \frac{[\vec{c}, \vec{b}]}{[\vec{a}, \vec{b}]},\ \ y = \frac{[\vec{a}, \vec{c}]}{[\vec{a}, \vec{b}]}$$

Andere Schreibweise:

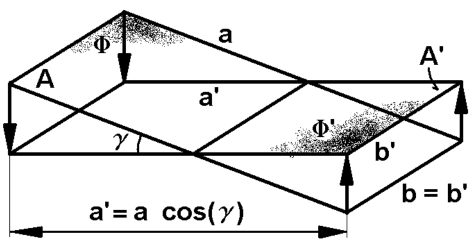
$$x = \frac{[\vec{c}, \vec{b}]}{[\vec{a}, \vec{b}]} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} := \frac{D_1}{D_0},\ \ y = \frac{[\vec{a}, \vec{c}]}{[\vec{a}, \vec{b}]} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} := \frac{D_2}{D_0}$$

$$x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} \overset{!}{\overbrace{\ -\ }} \vec{c} = \vec{0},\quad \text{Schema:}\quad \begin{array}{ccccccccc} \leftarrow & D_0 & \rightarrow & & | & \leftarrow & D_2 & \rightarrow \\ a_1 & & b_1 & & & -c_1 & & a_1 \\ a_2 & & b_2 & & & -c_2 & & a_2 \\ & & \leftarrow & D_1 & & \rightarrow & & \end{array}$$

5.8.3 Vektorprodukt — Produit vectoriel

Flächenprojektion — Projection d'une surface

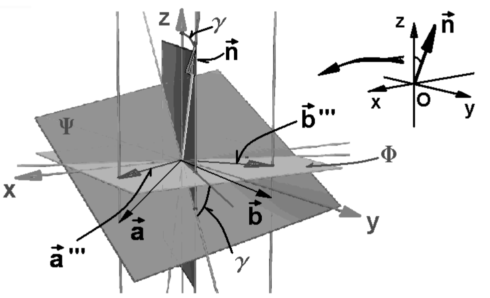
Werkzeug: Projiziere die ebene Fläche Φ auf die Ebene Φ'. Was passiert mit dem Inhalt A bei der Projektion? $(A \longmapsto A')$



Z.B.
$A = a \cdot b \longmapsto A' = a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$,
$A \longmapsto A' = A \cdot \cos(\gamma)$
Dieser Satz bleibt bei beliebigen Figuren gültig (Aufteilung in kleine Rechtecke, Grenzwert ...)

5.8.4 Definition Vektorprodukt — Définition produit vectoriel

Wir betrachten Vektoren im $\mathbb{R}^3$.



Geg.: $\vec{a}, \vec{b} \parallel \Psi$. Sei

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \overset{\text{Proj.(x/y)}}{\longmapsto} \vec{a}\,''' = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Ebenso für $\vec{b} \longmapsto \vec{b}\,'''$
Sei $\Phi = (x/y)$–(Ebene),
$\vec{n} \perp \Psi,\ \ \gamma = \sphericalangle(\Psi, \Phi) = \sphericalangle(\vec{n}, \vec{e}_z)$,
$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}) \leadsto$ Rechtssyst.

Sei $A =$ Inhalt von Parallelogramm $(\vec{a}, \vec{b})$
Sei $A''' = \pm$ Inhalt von Parallelogramm

Idee: Suche einen Vektor $\vec{n}$ wie folgt:

Wähle die Länge von $\vec{n}$ gleich der Zahl A. .

Dann gilt: $A''' = Volume(\vec{a}\,''', \vec{b}\,''') = A \cdot \cos(\gamma)$

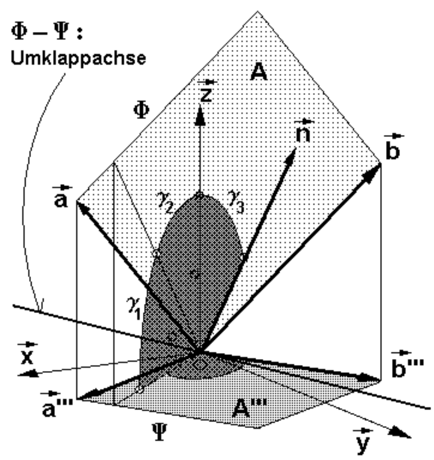
$[\vec{a}\,''', \vec{b}\,'''] = A''' = A \cdot \cos(\gamma)\ \wedge\ A = |\vec{n}|\ \wedge\ |\vec{n}| \cdot \cos(\gamma) = n_3 = \pm|\vec{n}_3|$

Folgerung: $|\vec{n}| = A\ \Leftrightarrow\ n_3 = [\vec{a}\,''', \vec{b}\,''']$

Entsprechendes folgert man für $(\vec{a}\,', \vec{b}\,')$ (Projektionen auf die (y/z)–Ebene) und für $(\vec{a}\,'', \vec{b}\,'')$ (Projektionen auf die (z/x)–Ebene). (Zyklische Vertauschung.)

Z.B. $\vec{a}\,' = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\ \vec{a}\,'' = \begin{pmatrix} a_3 \\ a_1 \end{pmatrix}\ \Rightarrow\ n_1 = [\vec{a}\,', \vec{b}\,'],\ n_2 = [\vec{a}\,'', \vec{b}\,'']$

Detailiertere Untersuchung:



Andere Ansicht

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \perp \Phi(\vec{a}, \vec{b}),\ \ \vec{e}_z = \vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \Psi(\vec{a}''', \vec{b}''')$$

$$\Rightarrow\ \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\pi}{2},\ \ \gamma_2 + \gamma_3 = \frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ \gamma_1 = \gamma_3$$

Sei $|\vec{n}| = A$

$$A''' = A \cdot \cos(\gamma_1) = A \cdot \cos(\gamma_3) = |\vec{n}| \cdot \cos(\gamma_3) = |\vec{n}| \cdot \underbrace{|\vec{e}_z|}_{=1} \cdot \cos(\gamma_3)$$

$$= \langle \vec{n}, \vec{e}_z \rangle = \langle \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = n_3\ \Rightarrow\ A''' = n_3$$

Analog:

$$\Rightarrow\ A' = n_1,\ \ A'' = n_2\ \Rightarrow\ \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' \\ A'' \\ A''' \end{pmatrix}$$

Zuordnungen: $A' \longleftrightarrow \alpha_3,\ \ A'' \longleftrightarrow \beta_3,\ \ A''' \longleftrightarrow \gamma_3$

$$\begin{aligned}\rightsquigarrow \quad |\vec{n}^2| = n_1^2+n_2^2+n_3^2 = A'^2+A''^2+A''''^2 &= A^2\cdot\cos^2(\alpha_3)+A^2\cdot\cos^2(\beta_3)+A^2\cdot\cos^2(\gamma_3)\\ &= A^2\cdot\underbrace{(\cos^2(\alpha_3)+\cos^2(\beta_3)+\cos^2(\gamma_3))}_{=1} = A^2 \;\Rightarrow\; A=|\vec{n}|\end{aligned}$$

Richtungscosinuse verwendet, siehe Seite 85.

Problem: $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a},\vec{b}$?

$$\begin{aligned}\langle\vec{a}\times\vec{b},\vec{a}\rangle = \langle\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\rangle &= \langle\begin{pmatrix}a_2\,b_3-a_3\,b_2\\a_3\,b_1-a_1\,b_3\\a_1\,b_2-a_2\,b_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\rangle\\ &= (a_2\,b_3\,a_1)-[a_3\,b_2\,a_1]+\{a_3\,b_1\,a_2\}-(a_1\,b_3\,a_2)+\{a_1\,b_2\,a_3\}-[a_2\,b_1\,a_3]=0\end{aligned}$$

Ebenso:

$$\begin{aligned}\langle\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\rangle = \langle\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\rangle &= \langle\begin{pmatrix}a_2\,b_3-a_3\,b_2\\a_3\,b_1-a_1\,b_3\\a_1\,b_2-a_2\,b_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\rangle\\ &= a_2\,b_3\,b_1-a_3\,b_2\,b_1+a_3\,b_1\,b_2-a_1\,b_3\,b_2+a_1\,b_2\,b_3-a_2\,b_1\,b_3=0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\; \vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a},\vec{b}$$

Konsequenz:

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}=n_1\vec{e}_1+n_2\vec{e}_2+n_3\vec{e}_3=[\vec{a}\,',\vec{b}\,']\,\vec{e}_1+[\vec{a}\,'',\vec{b}\,'']\,\vec{e}_2+[\vec{a}\,''',\vec{b}\,''']\,\vec{e}_3 \;\wedge\; |\vec{n}|=A$$

Definition:

$\vec{n}$ mit $|\vec{n}|=A$, $\vec{n}\perp\vec{a},\vec{b}$ ($\vec{a},\vec{b},\vec{n}$ Rechtssystem) heisst **Vektorprodukt** $\vec{n}:=\vec{a}\times\vec{b}$.

Es gilt also:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}[\vec{a}\,',\vec{b}\,']\\ [\vec{a}\,'',\vec{b}\,'']\\ [\vec{a}\,''',\vec{b}\,''']\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}a_2&b_2\\a_3&b_3\end{vmatrix}\vec{e}_1+\begin{vmatrix}a_3&b_3\\a_1&b_1\end{vmatrix}\vec{e}_2+\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}\vec{e}_3$$

Merkregel:

$$\vec{a}\times\vec{b}\rightsquigarrow\left|\begin{array}{ccccccccc}\vec{e}_1&&a_1&&b_1&&\vec{e}_1&&a_1\\ &\searrow&&\times&&\times&&\nearrow&\\ \vec{e}_2&&a_2&&b_2&&\vec{e}_2&&a_2\\ &\nearrow&&\times&&\times&&\searrow&\\ \vec{e}_3&&a_3&&b_3&&\vec{e}_3&&a_3\end{array}\right| \quad \text{mit } \overset{+}{\searrow},\ \overset{-}{\nearrow}$$

Andere Merkregel:

$$\left|\begin{array}{cccc}\vec{e}_1&\searrow&a_1&b_1\\ \vec{e}_2&\searrow&a_2&b_2\\ \vec{e}_3&\searrow&a_3&b_3\\ &&a_1&b_1\\ &&a_2&b_2\end{array}\right| \qquad \text{(Dreigliedrige Determinante)}$$

5.8.5 Regeln für das Vektorprodukt — Règles pour le produit vectoriel

1 Zusammenhang mit **Richtungscosinusen**:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = A^2\cos^2(\alpha) + A^2\cos^2(\beta) + A^2\cos^2(\gamma) = A^2(\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma)) = A^2$$

$\leadsto \quad \cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma)$: Richtungscosinuse

2 **Antikommutativgesetz:**

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) = -(-\vec{n})$$

Wegen Eigenschaft des Flächenproduktes

3 Das **Assoziativgesetz** gilt allgemein **nicht**:

Bsp.:
$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) \times \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \vec{0}$$
$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} = -\vec{e}_3 \neq \vec{0}$$

4 **Distributivgesetz:**

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$$

Denn das Gesetz gilt komponentenweise für die Flächenprodukte.

5 **Assoziativgesetz für Skalar:**

$$(\lambda\,\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

Denn das Gesetz gilt komponentenweise für die Flächenprodukte.
Konsequenz:

6 Distributivgesetz generell:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} + \vec{d}) = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{a} \times \vec{d}) + (\vec{b} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{d})$$

Denn das Gesetz gilt komponentenweise für die Flächenprodukte.

7 Assoziativgesetz für Skalar generell:

$$(\lambda\,\vec{a}) \times (\mu\,\vec{b}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

Mittels algebraische Rechnung kann man übrigens jetzt einfach verifizieren:

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \rangle = 0, \;\; \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \rangle = 0, \;\; |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$

Eine Herleitung der Berechnungsformel des Vektorprodukts mit Hilfe der Regeln ohne Geometrie:

Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3, \;\; \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1\,\vec{e}_1 + b_2\,\vec{e}_2 + b_3\,\vec{e}_3$

$\Rightarrow \;\; \vec{a} \times \vec{b} = (a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3) \times (b_1\,\vec{e}_1 + b_2\,\vec{e}_2 + b_3\,\vec{e}_3) = \sum\limits_{i,k=1}^{3} a_i\,b_k\,(\vec{e}_i \times \vec{e}_k)$

Regeln: $\vec{e}_i \times \vec{e}_i = \vec{0}, \;\; \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \;\; \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \;\; \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2, \;\; \vec{e}_i \times \vec{e}_k = -\vec{e}_k \times \vec{e}_i$

$$\Rightarrow \;\; \vec{a} \times \vec{b} = a_1\,b_2\,\vec{e}_3 + a_2\,b_3\,\vec{e}_1 + a_3\,b_1\,\vec{e}_2 - a_2\,b_1\,\vec{e}_3 - a_3\,b_2\,\vec{e}_1 - a_1\,b_3\,\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} a_2\,b_3 - a_3\,b_2 \\ a_3\,b_1 - a_1\,b_3 \\ a_1\,b_2 - a_2\,b_1 \end{pmatrix}$$

5.8.6 Anwendungen — Applications

Physik: Beispiel — Physique: Exemple

Das Drehmoment „Kraft mal Weg“ ist ein Vektor und hat eine Richtung:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Ebene Probleme — Problèmes dans le plan

In der Ebene kann man das Vektorprodukt ebenfalls verwenden, indem man die gegebenen Vektoren als dreidimensionale Vektoren mit der 3. Komponente 0 interpretiert.

Elegante Herleitung Koordinatengleichung — Gagner l'équation de coordonnés de façon élégante

Geg.: Ebene $\Phi: \; \vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$.
Für die Koordinatengleichung gilt:

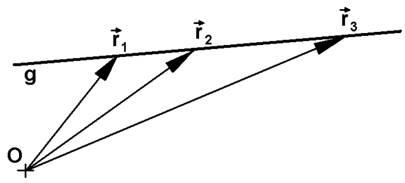
$$Ax + By + Cz + D = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \perp \Phi$$

Ebenso: $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp (\vec{a}, \vec{b}) \Rightarrow (\vec{a} \times \vec{b}) \perp \Phi \;\Rightarrow\; (\vec{a} \times \vec{b}) \parallel \vec{n}$.

Da die Länge von $\vec{n}$ noch wählbar ist, kann man wählen:
$\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \vec{a} \times \vec{b} \;\Rightarrow\; A, B, C$ berechnet.
Man berechnet dann D aus $Ax + By + Cz + D = 0 \;\; Ax + By + Cz + D = 0$
mit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{r}_0$

Einige Formeln — Quelques formules

1



$(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) + (\vec{r}_2 \times \vec{r}_3) + (\vec{r}_3 \times \vec{r}_1) = \vec{0}$

Wegen Richtung, Flächeninhalt.

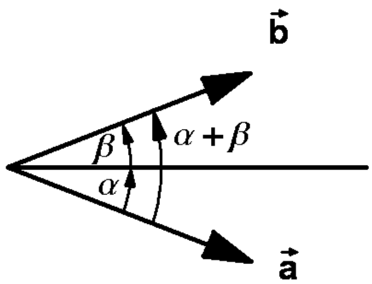
2 $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2} \cdot \vec{b}^{\,2} - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2$

Wegen $|(\vec{a} \times \vec{b})| = a \cdot b \sin(\varphi)$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a \cdot b \cos(\varphi)$

3 **Heron:** $s := \frac{1}{2}(a+b+c) \;\Rightarrow\; A_{\triangle}^2 = s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)$

(Kombiniere Skalarprodukt und Cosinussatz.)

Additionstheoreme — Théorèmes d'addition



Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$

1 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha+\beta) = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha+\beta)$
$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = \langle \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix} \rangle =$
$\cos(\alpha)\,\cos(\beta) - \sin(\alpha)\,\sin(\beta)$
$\Rightarrow\; \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\,\cos(\beta) - \sin(\alpha)\,\sin(\beta)$

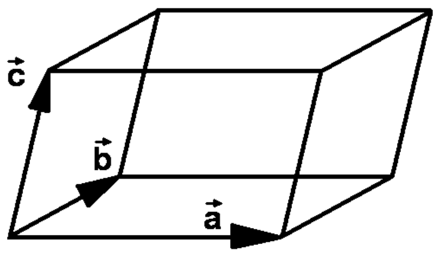
2 $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\alpha+\beta) = 1 \cdot 1 \cdot \sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha+\beta)$
$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \\ 0 \end{pmatrix}| =$
$|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(\alpha)\,\sin(\beta) - (-\sin(\alpha)\,\cos(\beta)) \end{pmatrix}|$
$\Rightarrow\; \sin(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\,\sin(\beta) + \sin(\alpha)\,\cos(\beta)$

5.9 Spatprodukt (gemischtes Produkt) und weitere Produkte — Produit triple (produit mixte) et autres produits

Begriffe:

Spatprodukt oder gemischtes Produkt.

5.9.1 Definition und Eigenschaften — Définition et qualités



Drei Vektoren
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \neq \vec{0}$ mit
$\vec{a} \nparallel \vec{a}, \vec{b} \nparallel \vec{c}, \vec{a} \nparallel \vec{c}$
bilden einen **Spat**, **Parallelflach** oder **Parallelepiped** (griech. Parallelepipedon, „dreidimensionales Parallelogramm“) .

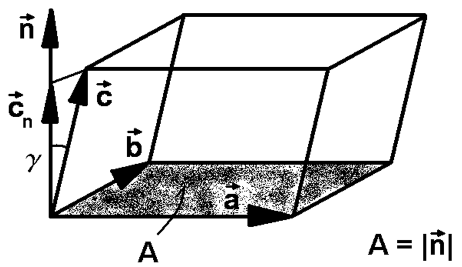
Wie beim Flächenprodukt definieren wir dafür ein „orientiertes, vorzeichenbehaftetes Volumenprodukt“:

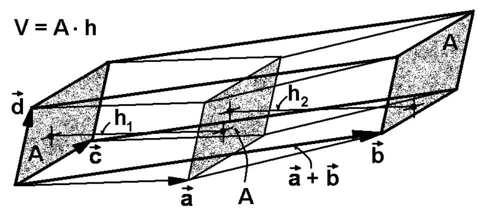
Definition: **Spatprodukt**

Fall $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *l.u.*:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] : \;=\; \begin{cases} +(\text{Spatvolumen }) & (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \text{ Rechtssystem} \\ -(\text{Spatvolumen }) & \text{sonst} \end{cases}$$

Fall $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *l.a.*: $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] := 0$





Einige Körperarten:

Tetraeder
Gerade Pyramide
Schiefe Pyramide
Zylinder
Rohr
Würfel
Quader
Prisma
Schiefes Prisma (Parallelepiped, Spat)
Kugel
Konus
...

Notizen:

$\rightsquigarrow$

Eigenschaften:

1 $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = [\vec{b},\vec{c},\vec{a}] = [\vec{c},\vec{a},\vec{b}] = -[\vec{c},\vec{b},\vec{a}] = -[\vec{b},\vec{a},\vec{c}] = -[\vec{a},\vec{c},\vec{b}]$

2 (Vgl. Abbildung.)

$$\pm V = A\cdot c_n = A\cdot c\cdot\cos(\gamma) = |\vec{n}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos(\gamma) = \langle\vec{n},\vec{c}\rangle = \langle(\vec{a}\times\vec{b}),\vec{c}\rangle$$

$$\Rightarrow\ [\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \langle(\vec{a}\times\vec{b}),\vec{c}\rangle$$

Damit lässt sich das Spatprodukt einfach berechnen:
Sei $\vec{a}\,' = \vec{a}_z,\ \ \vec{a}\,'' = \vec{a}_x,\ \ \vec{a}\,''' = \vec{a}_y$ (z.B.) $\vec{a}_z$:
Keine z–Koord..
$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = [\vec{b},\vec{c},\vec{a}] = \langle(\vec{b}\times\vec{c}),\vec{a}\rangle = \langle\vec{a},(\vec{b}\times\vec{c})\rangle$

$$= \langle\vec{a},\begin{pmatrix}[\vec{b}_x,\vec{c}_x]\\ [\vec{b}_y,\vec{c}_y]\\ [\vec{b}_z,\vec{c}_z]\end{pmatrix}\rangle = a_1\cdot\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\ b_3 & c_3\end{vmatrix} + a_2\cdot\begin{vmatrix}b_3 & c_3\\ b_1 & c_1\end{vmatrix} + a_3\cdot\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}$$

3 Rechenschema (**Regel von Sarrus**):

$$\left|\begin{array}{ccccccccc} a_1 & & b_1 & & c_1 & & a_1 & & b_1\\ & \searrow & & \searrow\!\!\!\!\!\nearrow & & \searrow\!\!\!\!\!\nearrow & & \nearrow & \\ a_2 & & b_2 & & c_2 & & a_2 & & b_2\\ & \nearrow & & \searrow\!\!\!\!\!\nearrow & & \searrow\!\!\!\!\!\nearrow & & \searrow & \\ a_3 & & b_3 & & c_3 & & a_3 & & b_3\end{array}\right| \quad \text{mit}\ \overset{+}{\searrow},\ \overset{-}{\nearrow}$$

Abgekürzt: Für die Berechnung des vorzeichenbehafteten Volumens genügt das folgende Schema:

$$\pm V = \begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix} := \det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$$

$\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ heisst auch (3×3)–**Determinante**

Achtung: Die Regel von Sarrus gilt später für höhere Determinanten nicht mehr!

4 $[\lambda\,\vec{a},\mu\,\vec{b},\nu\,\vec{c}] = \lambda\cdot\mu\cdot\nu\cdot[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ (Wegen Streckung der Seitenvektoren und des Spatvolumens.)

5 (Vgl. Abbildung.) $[\vec{a}+\vec{b},\vec{c},\vec{d}] = [\vec{a},\vec{c},\vec{d}] + [\vec{b},\vec{c},\vec{d}]$
(Wegen der Volumenberechnung nach „Grundflächeninhalt mal Höhe“.)

5.9.2 Cramer'sche Regeln für Gleichungssysteme mit 3 Unbekannten — Règles de Cramer pour des systèmes d'équations à 3 inconnues

Betrachte: :

$$\left|\begin{array}{rcl} a_1x+b_1y+c_1z & = & d_1\\ a_2x+b_2y+c_2z & = & d_2\\ a_3x+b_3y+c_3z & = & d_3\end{array}\right| \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\cdot x + \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\cdot y + \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\cdot z = \begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix} \Leftrightarrow x\cdot\vec{a}+y\cdot\vec{b}+z\cdot\vec{c}=\vec{d}$$

$\leadsto$ Interpretation von $x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c} = \vec{d}$:
$\vec{d}$ soll linear zerlegt werden nach $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.
Diese Zerlegung ist eindeutig, falls $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *l.u.*,
d. h. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ nicht komplanar ,
d. h. *l.u.*, d. h. $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \neq 0$.
In diesem Fall können wir wie beim Flächenprodukt einen Berechnungstrick anwenden: :

Trick: Z.B. rechne

$$[\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}] = [x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c}, \vec{b}, \vec{c}] = x \cdot [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + y \cdot \overbrace{[\vec{b}, \vec{b}, \vec{c}]}^{=0} + z \cdot \overbrace{[\vec{c}, \vec{b}, \vec{c}]}^{=0} \Rightarrow [\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}] = x \cdot [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}].$$

Entsprechend erhält man:

$$[\vec{a}, \vec{d}, \vec{c}] = y \cdot [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \ \wedge \ [\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}] = z \cdot [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \leadsto \quad x = \ldots, \ y = \ldots, \ z = \ldots$$

Regeln: $$x = \frac{[\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}]}{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]}, \ y = \frac{[\vec{a}, \vec{d}, \vec{c}]}{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]}, \ z = \frac{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}]}{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]}$$

Diese Regeln werden wir später mit Hilfe von Determinanten verallgemeinern.

Bsp.:

$$\begin{aligned} 3\,x + 4\,y + 5\,z &= 6 \\ 7\,x + \beta\,y + z &= 2 \\ x - 2\,y + 4\,z &= 8 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ x = \frac{-8\,(1 + 2\,\beta)}{-172 + 7\,\beta}, \ y = \frac{108}{-172 + 7\,\beta}, \ z = \frac{18\,(-16 + \beta)}{-172 + 7\,\beta}$$

$\leadsto$ Nenner 0, keine Lösung für $\beta = \dfrac{172}{7}$

5.9.3 Weitere Produkte — Autres produits

Definition: **Grassmannprodukt**

$$\vec{g} := \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

Bemerkung: Die **Vektorrechnung** wurde begründet von *Grassmann* (1809 – 1877) und *Hamilton* (1805 – 1865) $\leadsto$ Vektorbegriff. Die **Vektorgeometrie** stammt von *Bieberbach* (1885 – 1962) und andern, ist somit relativ neu!

Satz: $$\vec{g} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \cdot \vec{b} - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \cdot \vec{c}$$

(Koeffizientenweise nachrechnen (Computer!).)
Daraus ersieht man direkt:

Folgerung: Das Vektorprodukt ist **nicht assoziativ**!

Viererprodukte

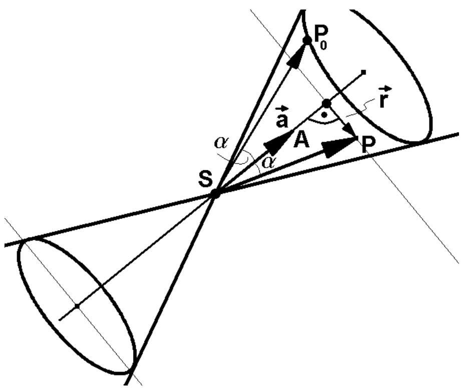
Satz:

1 $\langle(\vec{a}\times\vec{b}),(\vec{c}\times\vec{d})\rangle = \langle\vec{a},\vec{c}\rangle\cdot\langle\vec{b},\vec{d}\rangle - \langle\vec{a},\vec{d}\rangle\cdot\langle\vec{b},\vec{c}\rangle$

2 $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = [\vec{a},\vec{b},\vec{d}]\cdot\vec{c} - [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\cdot\vec{d}$

5.9.4 Kegel und Zylinder — Cône et cylindre

Kegel — Cône



Geg.:
Kegel $\mathcal{K}$ mit Achse a und Punkt P_0.

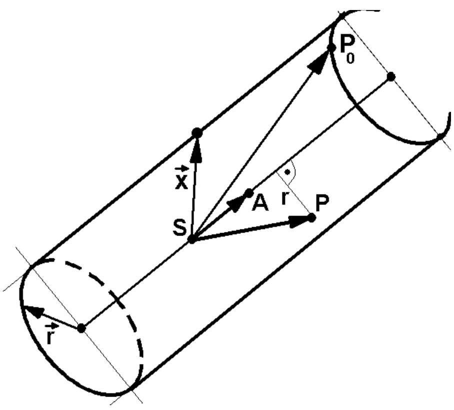
$\rightsquigarrow\ a : \vec{v}_a = \overrightarrow{OS} + \lambda\,\vec{a},\ \ P_0 \in \mathcal{K} : \overrightarrow{OP_0},$
$\overrightarrow{SA} = \vec{a},\ \ P \in \mathcal{K} : \overrightarrow{SP} = \vec{x}$

Es gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle\vec{a},\overrightarrow{SP_0}\rangle}{|\vec{a}|\cdot|\overrightarrow{SP_0}|} = \frac{\langle\vec{a},\overrightarrow{SP}\rangle}{|\vec{a}|\cdot|\overrightarrow{SP}|} = \frac{\langle\vec{a},\vec{x}\rangle}{|\vec{a}|\cdot|\vec{x}|}$$

Formel: $\rightsquigarrow\ (\langle\vec{a},\overrightarrow{SP_0}\rangle)^2\cdot|\vec{x}|^2 = (\langle\vec{a},\vec{x}\rangle)^2\cdot|\overrightarrow{SP_0}|^2$

Zylinder — Cylindre



Geg.:
Zylinder $\mathcal{R}$ mit Achse a und Punkt P_0.

$\rightsquigarrow\ a : \vec{v}_a = \overrightarrow{OS} + \lambda\,\vec{a},\ \ P_0 \in \mathcal{R} : \overrightarrow{OP_0}$
$\overrightarrow{SA} = \vec{a},\ \ P \in \mathcal{R} : \overrightarrow{SP} = \vec{x}$

Es gilt: Radius

$$r = \frac{|\overrightarrow{SP_0}\times\vec{a}|}{|\vec{a}|} = \frac{|\overrightarrow{SP}\times\vec{a}|}{|\vec{a}|} = \frac{|\vec{x}\times\vec{a}|}{|\vec{a}|}$$

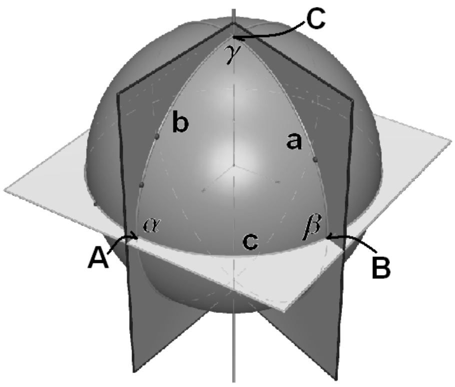
Formel: $\rightsquigarrow\ |\overrightarrow{SP_0}\times\vec{a}|^2 = |\vec{x}\times\vec{a}|^2$

5.9.5 Ausblick — Perspectives

Sphärische Geometrie — Géométrie sphérique

Eine Anwendung der Vektorgeometrie ist die **sphärische Geometrie**.

Bsp.:



Betrachte ein sphärisches Dreieck (Dreieck auf der Kugeloberfläche.)

Es gilt der **sphärische Cosinussatz**:

$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \sin(a) \cdot \sin(b) \cdot \cos(\alpha)$

Sphärische Sinussatz

$$\sin(b) \cdot \sin(\alpha) = \sin(a) \cdot \sin(\beta) \text{ etc.}$$

Determinanten — Déterminants

Wir kennen jetzt die 2×2 und die 3×3–Determinante als Inhalte von Flächen und Volumen.

Wir können dieses Schema vervollständigen:
$\mathbb{R}^1$: $\pm$ gerichtete Distanz $\rightsquigarrow$ $\pm$ Länge
$\mathbb{R}^2$: $\pm$ Flächeninhalt $\rightsquigarrow$ Flächenprodukt
$\mathbb{R}^3$: $\pm$ Volumeninhalt $\rightsquigarrow$ Spatprodukt
$\mathbb{R}^n$: $\pm$ n–dimensionaler Volumeninhalt $\rightsquigarrow$ $n \times n$–Determinante $\rightsquigarrow$ spezielle Theorie notwendig

Dazu ist der **Matrix–Begriff** notwendig.

Hinweis: Eine **Matrix** ist ein rechteckiges Zahlenschema.

Z.B. $M = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \alpha_{m,2} & \cdots & \alpha_{m,1n} \end{pmatrix} \rightsquigarrow m \times n$–**Matrix**. .

Eine $m \times n$–Matrix kann man sich entstanden denken aus n Spaltenvektoren oder aus m Zeilenvektoren.

Das Vektorprodukt im n–Dimensionalen — Le produit vectoriel dans la dimension n

Das Vektorprodukt lässt sich für den $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern (schiefes Produkt $\vec{a} \wedge \vec{b}$). Es ist für grössere n aber kein Vektor mehr.

5.10 Berechnungen — Calculs

5.10.1 Koord'gleichung einer Ebene — Equation de coord. d'un plan

Sei $\Phi: \; A\,x + B\,y + C\,z + D = 0, \;\; \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}, \;\; \frac{|D|}{|\vec{n}|} = |\overline{O\Phi}| = \,?$

$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}, \;\; |\vec{n}| = A, \;\; \vec{a} = \vec{p_3} - \vec{p_1}, \;\; \vec{b} = \vec{p_2} - \vec{p_1}$

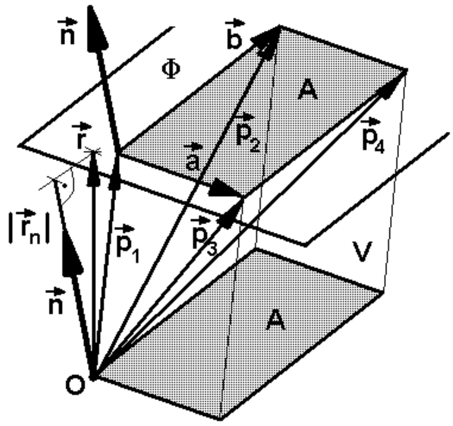
$M = (\vec{p_1}, \vec{a}, \vec{b})$

$$\begin{aligned} V = |\det(M)| &= |A| \cdot |\vec{r}_n| = |\vec{n}| \cdot |\vec{r}_n| = |\langle \vec{r}, \vec{n} \rangle| \\ &= |x\,A + y\,B + z\,C| \end{aligned}$$

$x\,A + y\,B + z\,C + D = 0$

$\Rightarrow \;\; x\,A + y\,B + z\,C = -D$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \;\; |D| = |x\,A + y\,B + z\,C| &= |\det(M)| \\ &= |\det((\vec{p_1}, \vec{p_2} - \vec{p_1}, \vec{p_3} - \vec{p_1}))| \end{aligned}$$



Formel: $\Phi: \; x\,A + y\,B + z\,C + D = 0 \;\Rightarrow$

1 $|D| = |\det((\vec{p_1}, \vec{p_2} - \vec{p_1}, \vec{p_3} - \vec{p_1}))|$

2 $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \vec{a} \times \vec{b}$

Entsprechend gilt für eine Gerade g:

$g: \;\; \vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{a}, \;\; A\,x + B\,y + C = 0, \;\; \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \;\; \vec{n} = \vec{a}_\perp = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow \;\; |C| = |A\,x + B\,y| = |\langle \vec{r}, \vec{n} \rangle| = |\langle \vec{r}, \vec{a}_\perp \rangle| = |\langle \vec{r}_n, \vec{a}_\perp \rangle| = |\vec{r}_n| \cdot |\vec{a}_\perp| = |d| \cdot |\vec{a}| = [\vec{r}_0, \vec{a}] \;\Rightarrow\; |C| = [\vec{r}_0, \vec{a}]$

$[\vec{r}_0, \vec{a}] \rightsquigarrow$ (Flächenprodukt)

Formel: $g: \;\; \vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{a}, \;\; A\,x + B\,y + C = 0 \;\Rightarrow$

1 $|C| = [\vec{r}_0, \vec{a}]$

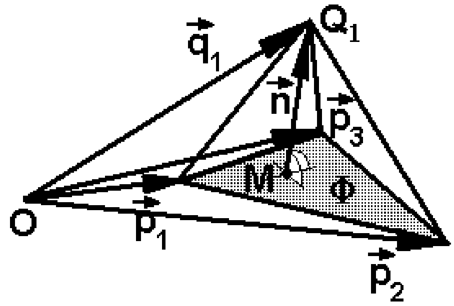
2 $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \vec{a}_\perp$

5.10.2 Spiegeln eines Punktes — Refléter un point

Nachdem ich selbst öfters in der Praxis mit Spiegelungsproblemen konfrontiert war, suchte ich nach einer geeigneten Darstellung einer geschlossenen Formel, die das Gewünschte leistet. Das nachstehend dargestellte Resultat ist eine Möglichkeit:

Ebenenspiegelung — Refléter un point à un plan

Der Punkt Q soll an der Ebene Φ gespiegelt werden. — Formel?



$g:\ \vec{r} = \vec{q}_1 + t\cdot\vec{n},\ \ \vec{n} = (\vec{p}_2-\vec{p}_1)\times(\vec{p}_3-\vec{p}_1)$

Sei $\ \vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

$$\begin{aligned}
&\det((\vec{p}_2-\vec{p}_1,\vec{p}_3-\vec{p}_1,\vec{q}_1-\vec{p}_1))\\
&=\det((\vec{p}_2-\vec{p}_1,\vec{p}_3-\vec{p}_1,\vec{r}-t\cdot\vec{n}-\vec{p}_1))\\
&=\underbrace{\det((\vec{p}_2-\vec{p}_1,\vec{p}_3-\vec{p}_1,\vec{r}-\vec{p}_1))}_{=0 \text{ (Ebene)}} - t\cdot\det((\vec{p}_2-\vec{p}_1,\vec{p}_3-\vec{p}_1,\vec{n}))\\
&\rightsquigarrow\ t = -\frac{\det((\vec{p}_2-\vec{p}_1,\vec{p}_3-\vec{p}_1,\vec{q}_1-\vec{p}_1))}{\det((\vec{p}_2-\vec{p}_1,\vec{p}_3-\vec{p}_1,\vec{n}))}
\end{aligned}$$

Sei Q_2 = gespiegelter Punkt von Q_1 an Φ.

$$\rightsquigarrow\quad \vec{q}_2 = \overrightarrow{OQ_2} = \vec{q}_1 - 2\,t\cdot\vec{n} = \vec{q}_1 - 2\,\frac{\det((\vec{p}_2-\vec{p}_1,\vec{p}_3-\vec{p}_1,\vec{q}_1)-\vec{p}_1)}{\det((\vec{p}_2-\vec{p}_1,\vec{p}_3-\vec{p}_1,(\vec{p}_2-\vec{p}_1)\times(\vec{p}_3-\vec{p}_1)))}\cdot(\vec{p}_2-\vec{p}_1)\times(\vec{p}_3-\vec{p}_1)$$

Formel: **Geg.:** $\{\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3\}\rightsquigarrow\ \Phi,\ \vec{q}_1\rightsquigarrow\ Q_1$

Ges.: Spielgelpunkt Q_2.

$$\overrightarrow{OQ_2} = \vec{q}_1 - 2\,\frac{\det((\vec{p}_2-\vec{p}_1,\vec{p}_3-\vec{p}_1,\vec{q}_1-\vec{p}_1))}{\det((\vec{p}_2-\vec{p}_1,\vec{p}_3-\vec{p}_1,(\vec{p}_2-\vec{p}_1)\times(\vec{p}_3-\vec{p}_1)))}\cdot(\vec{p}_2-\vec{p}_1)\times(\vec{p}_3-\vec{p}_1)$$

Bsp.: Mit *Mathematica*:

In:

```
p1 = {0,0,4}; p2={0,6,0}; p3={3,0,0}; q1={2,8,0};
q2 =
q1-2 Det[{p2-p1,p3-p1,q1-p1}]/Det[{p2-p1,p3-p1,Cross[p2-p1,p3-p1]}] Cross[p2-p1,p3-p1]
```

Out:

$\{-\frac{38}{29},\frac{184}{29},-\frac{72}{29}\}$

Andere Fassung:

Formel: **Geg.:** $\{\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3\}\rightsquigarrow\ \Phi,\ \vec{q}_1\rightsquigarrow\ Q_1$

$\vec{a} = \vec{p}_2,\vec{p}_1,\ \ \vec{b} = \vec{p}_3,\vec{p}_1,\ \ \vec{c} = \vec{q}_1-\vec{p}_1$

Ges.: Spielgelpunkt Q_2.

$$\overrightarrow{OQ_2} = \vec{q}_1 - 2\,\frac{\det((\vec{a},\vec{b},\vec{c}))}{\det((\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}))}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

Geradenspiegelung — Refléter un point à une droite

Sei $g:\ \vec{r}(t) = \vec{p}_1 + t\,\vec{a},\ \ M \in g,\ \ \overline{MQ}_1 \perp g,\ \ \vec{q}_1 = \overrightarrow{OQ_1} = \overrightarrow{OM} + t_0\,\vec{a}_\perp,$

$\leadsto\ [\vec{a},\vec{q}_1-\vec{p}_1] = [\vec{a}, t_0\,\vec{a}_\perp] = t_0\,|\vec{a}|^2 = t_0\,\langle\vec{a},\vec{a}\rangle\ \Rightarrow\ t_0 = \dfrac{[\vec{a},\vec{q}_1-\vec{p}_1]}{\langle\vec{a},\vec{a}\rangle} = \dfrac{[\vec{a},\vec{q}_1-\vec{p}_1]}{|\vec{a}|^2}$

$\leadsto\ \overline{OQ}_2 = \vec{q}_2 = \vec{q}_1 - 2\,\dfrac{[\vec{a},\vec{q}_1-\vec{p}_1]}{\langle\vec{a},\vec{a}\rangle}\cdot\vec{a}_\perp = \vec{q}_1 - 2\,\dfrac{[\vec{a},\vec{q}_1-\vec{p}_1]}{|\vec{a}|^2}\cdot\vec{a}_\perp$

($[\vec{a},\vec{q}_1-\vec{p}_1] \leadsto$ Flächenprodukt)

Formel:

Geg.: $g:\ \vec{r}(t) = \vec{p}_1 + t\,\vec{a},\ \ Q_1 \notin g$

Ges.:

Spielgelpunkt Q_2 von Q_1.

$\leadsto\ \overline{OQ}_2 = \vec{q}_1 - 2\,\dfrac{[\vec{a},\vec{q}_1-\vec{p}_1]}{\langle\vec{a},\vec{a}\rangle}\cdot\vec{a}_\perp = \vec{q}_1 - 2\,\dfrac{[\vec{a},\vec{q}_1-\vec{p}_1]}{|\vec{a}|^2}\cdot\vec{a}_\perp$

Kapitel • Chapitre 6

Komplexe Zahlen — Nombres complexes

6.1 Definition von C — Définition de C

6.1.1 Zahlenmenge — Ensemble de nombres

Problem: Sei $a \in \mathbb{R}^-$, $(a < 0)$
$\rightsquigarrow$ $x^2 = a = -|a|$ hat in $\mathbb{R}$ keine Lösung!

Um die Lösbarkeit trotzdem zu erzwingen, muss $\mathbb{R}$ erweitert werden. $\mathbb{R}$ ist aber lückenlos und dicht (vgl. z.B. Analysis). Wie also vorgehen?

Definiere dafür eine Äquivalenzrelation:

Definition: Seien $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}$.
$(a, b) \sim (c, d) :\Leftrightarrow a = c \wedge b = d.$

Folgerung:

1 $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow (a, b) = (c, d)$ $(\Rightarrow)$Äquivalenzrelation

2 Jede Äquivalenzklasse $[(a, b)]$ enthält nur ein Element (a, b).

Wir brauchen aber die Klassen $[(a, b)]$, denn diese werden wir als neue, komplexe Zahlen definieren. Ein Zahlenpaar (a, b) dagegen ist immer ein Paar von reellen Zahlen.

Symbol: $[(a, b)] := a + i\,b.$

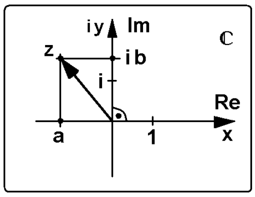
Hier sind $''+''$ und i vorläufig Symbole. i gibt an, dass b das 2. Element des geordneten Paares (a, b) ist und heisst **imaginäre Einheit**.

Idee: : $i = ''\sqrt{-1}''.$

Definition: $\{a + i\,b \mid a, b, \in \mathbb{R}\} := \mathbb{C}$ heisst **Menge der komplexen** (**Gauss'schen** Zahlen).

Geometrische Interpretation:

$z = a + i\,b \mathrel{\hat{=}} \vec{z} := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (*ONS*)



$z = a + i\,b \in \mathbb{C}$

$\vec{z} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

6.1.2 Operationen in C — Opérations dans C

Definition: **Addition in ℂ:**
$(a + i\,b) + (c + i\,d) := (a + c) + i\,(b + d)$

Bemerkung:

1 In der Definition erscheint $''+''$ in drei verschiedenen Bedeutungen: Symbol in komplexer Zahl, Addition in $\mathbb{R}$, Addition in $\mathbb{C}$.

2 Die Addition in $\mathbb{C}$ entspricht der Vektoraddition in $\mathbb{R}^2$. :
$z_0 = z_1 + z_2 \in \mathbb{C} \;\Rightarrow\; \vec{z}_0 = \vec{z}_1 + \vec{z}_2 \in \mathbb{R}^2,\;\; (z_i \hat{=} \vec{z}_i)$.

Folgerung: $(\mathbb{C}, +)$ ist additive Gruppe.

$0 + i\,0$ ist das **Nullelement** ,

$-(a + i\,b) := (-a) + i\,(-b)$ ist das **Inverse** zu $a + i\,b$.

Daher können wir die Subtraktion wie folgt definieren:

Definition: $(a + i\,b) - (c + i\,d) := (a + i\,b) + (-(c + i\,d))$

Folgerung: $(a + i\,b) - (c + i\,d) = (a - c) + i\,(b - d)$

Definition: **Multiplikation in ℂ:**

$(a + i\,b) \cdot (c + i\,d) := (a \cdot c - b \cdot d) + i\,(a \cdot d + b \cdot c)$

(Links: Multiplikation in $\mathbb{C}$, rechts: Multiplikation in $\mathbb{R}$)

Idee zu dieser Definition: Man will erreichen dass in $\mathbb{C}$ wie in $\mathbb{R}$ distributiv gerechnet werden kann. Man erreicht damit, dass i^2 die Bedeutung von $\sqrt{-1}$ bekommt.

Eigenschaften:

1 **Abgeschlossenheit :**
Wegen Definition.

2 **Kommutativgesetz :**
$(a+i\,b)\cdot(c+i\,d)=(c+i\,d)\cdot(a+i\,b)$
(wegen $a\cdot b=b\cdot a$ etc.)

3 **Assoziativgesetz :**
$(a+i\,b)\cdot((c+i\,d)\cdot(e+i\,f))=((a+i\,b)\cdot(c+i\,d))\cdot(e+i\,f)$
(Nachrechnen)

4 **Einselement** $(1+i\,0)$**:**
$(1+i\,0)\cdot(a+i\,b)=(a+i\,b)$
$((1+i\,0)\cdot(a+i\,b):=(1\cdot a-0\cdot b)+i\,(1\cdot b-0\cdot a)=a+i\,b$
Man kann zeigen, dass es nur ein Einselement gibt.)

5 **Inverses** $(a+i\,b)^{-1}$ **zu** $a+i\,b\neq 0+i\,0$**:**

$$(a+i\,b)^{-1}:=\frac{a}{a^2+b^2}-i\,\frac{b}{a^2+b^2}$$

Es gilt (Rechnung):
$(a+i\,b)\cdot(a+i\,b)^{-1}=1+i\,0$

Folgerung:

1 $(\mathbb{C},+)$ ist kommutative Gruppe.

2 $(\dot{\mathbb{C}},\cdot)$ ist kommutative Gruppe.

3 Es gilt das Distributivgesetz:

(Vgl. Rechnung.) $\rightsquigarrow$

Satz: $(\mathbb{C},+,\cdot)$ ist ein Körper.

(Analog zu $(\mathbb{R},+,\cdot)$ oder $(\mathbb{Q},+,\cdot)$.)

Konsequenz:
Wegen der Kommutativität darf man in $\mathbb{C}$ die **Bruchschreibweise** benützen:

$$z_1\cdot z_2^{-1}=z_2^{-1}\cdot z_1:=\frac{z_1}{z_2}$$

6.1.3 Einbettung von R in C — Plongement de R dans C

Sei $\quad M=\{(a+i\,0\mid a\in\mathbb{R})\subset\mathbb{C}\}$.

In M ist: $(a_1+i\,0)+(a_2+i\,0)=(a_1+a_2)+i\,0,\ \ (a_1+i\,0)\cdot(a_2+i\,0)=(a_1\cdot a_2)+i\,0.$

Wir betrachten daher:

$$f:\ \mathbb{C}\longmapsto\mathbb{R}\qquad\text{mit}\qquad f(a+i\,0)=a.$$

Diese Abbildung ist bijektiv zwischen M und $\mathbb{R}$. Daher finden wir:

$f^{-1}(a_1+a_2) = ((a_1+i\,0)+(a_2+i\,0)) = (a_1+i\,0)+(a_2+i\,0) = f^{-1}(a_1)+f^{-1}(a_2).$

Ebenso: $f^{-1}(a_1 \cdot a_2) = f^{-1}(a_1) \cdot f^{-1}(a_2)$

Daher ist es egal, ob man die Operationen $''+''$ und $''\cdot''$ in M oder in $\mathbb{R}$ ausführt.
(f ist **strukturerhaltend**. .)
Somit ist es unnötig, im Hinblick auf diese Operationen M und $\mathbb{R}$ zu unterscheiden, eine Identifikation $M := \mathbb{R}$ ist vertretbar.

$\leadsto$ **Identifikation:** $M := \mathbb{R},\ a := a + i\,0$
$\Rightarrow$ **Einbettung** $\mathbb{R} := M \subset \mathbb{C}$.

6.1.4 Imaginäre Zahlen — Nombres imaginaires

Definiere analog zu vorhin:

$$0 + i\,b := i\,b,\ \ \mathbb{I} := \{i\,b \mid b \in \mathbb{R}\}$$

Symbol: $i\,\mathbb{R} := \mathbb{I}$.

Nun drängt sich folgende Definition auf:

Definition: $i\,b := i \cdot b,\ \ i := i \cdot 1,\ \ b\,i := b \cdot i$

Folgerung:

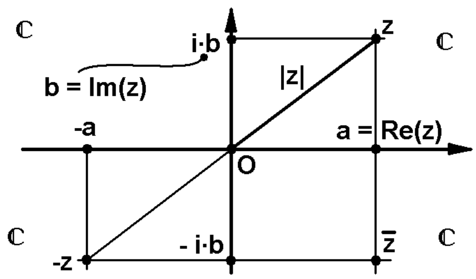
1 $a(i\,b) = i\,(a\,b)$
Denn: $a\,(i\,b) = (a+i\,0)(0+i\,b) = i\,(a\,b)$

2 $b\,i = i\,b$
Denn: $b\,i = b \cdot i = b(i \cdot 1) =$
$= (b+i\,0)\cdot(0+i\cdot 1) = 0 + i\,(b \cdot 1) = i\,(b \cdot 1) = i\,b$

3 $i^2 = -1,\ \ i = \pm\sqrt{-1}\,b$
Denn: $i^2 = i \cdot i = (0+i\,1)\cdot(0+i\,1) =$
$= (0 - 1 \cdot 1) + i\,(0+0) = -1$

6.1.5 Weitere Begriffe — D'autres notions

Sei $z = a + i\,b \in \mathbb{C},\ \ (a,b) \in \mathbb{R}^2$
(Vgl. geometrische Interpretation.)
$\mathbb{R}$ ist lückenlos und dicht. $\mathbb{C}$ lässt sich daher nicht auch noch auf die Zahlengerade „einpacken. Man muss in die Ebene ausweichen! $\leadsto$ **Gauss'sche, komplexe Zahlenebene**.



Definition:

$a := Re(z)$
heisst **Realanteil** von z

$b := Im(z)$
heisst **Imaginäranteil** von z

$\bar{z} := a - i\,b := a + i\,(-b)$
heisst **konjugiert komplexe** Zahl zu z.

$|z| = +\sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$
heisst **Betrag** von z.

Konsequenz: $|z| = |\bar{z}|,\ \ |z| = |\bar{\bar{z}}| \in \mathbb{R}_0^+$

6.2 Eigenschaften — Qualités

6.2.1 Ordnung — Ordre

Problem:

Lässt sich $\mathbb{C}$ so wie $\mathbb{R}$ ordnen?

Untersuchungen zeigen, dass man sehr einfach in $\mathbb{C}$ eine strenge Ordnungsrelation definieren kann. Jedoch ist bis jetzt keine totale Ordnung bekannt, die elementargeometrisch Sinn macht. Der Preis für die Erweiterung von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{C}$ ist also der Verzicht auf eine geometrisch sinnvolle Ordnung.

Bsp.:

(Definition einer Ordnungsrelation in $\mathbb{C}$:)

Sei

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} (\dfrac{1}{1-x}) - 1 & x \in [0,1) \\ -x+1 & x \in [1,\infty) \end{cases}$$

f bildet $\mathbb{R}_0^+$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ ab. $\leadsto$ $h = f^{-1}$ bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}_0^+$ ab.

$\leadsto$ Mit h können wir daher $\mathbb{C}$ auf die obere komplexe Halbebene ($Im(z) \geq 0$) abbilden.

$\leadsto$ Seien somit: $z_1 = a_1 + i\,b_1,\ \ z_2 = a_2 + i\,b_2,\ \ a_k \in \mathbb{R},\ \ b_k \in \mathbb{R}_0^+.$ $\leadsto$ $Im(z) \geq 0$

Z. B. sei:
$a_1 = v_r v_{r_1} \ldots v_3 v_2 v_1, n_1 n_2 n_3 n_4 \ldots$ mit $v_j, n_k \in \{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$ (Ziffern).
Entsprechend: $b_1 = w_s w_{s-1} \ldots w_3 w_2 w_1, m_1 m_2 m_3 m_4 \ldots$.

(Falls $r < s$ fügen wir bei a_1 vorne einfach Ziffern 0 an, bis $r = s$ erreicht ist.)

Mit z_1 lässt sich nun eine neue Zahl $z_1^* \in \mathbb{R}$ bilden mit der folgenden Ziffernfolge:

$$z_1^* = v_r w_r v_{r_1} w_{r_1} \ldots v_3 w_3 v_2 w_2 v_1 w_1, n_1 m_1 n_2 m_2 n_3 m_3 n_4 m_4 \ldots.$$

Nach Konstruktion haben wir eine **bijektive** Zuordnung $z_1 \longmapsto z_1^*$ $z_1 \longmapsto z_1^*$
— und auch $z_2 \longmapsto z_2^*,\ z_1^*,\ \ z_2^* \in \mathbb{R}$.

Wegen der Bijektivität der Zuordnungen kann man nun die Ordnung in $\mathbb{C}$ wie folgt definieren:

$$z_1, z_2 \in \mathbb{C}: \ z_1 < z_2 \ \Leftrightarrow \ z_1^* < z_2^*, \ \ z_1^*, z_2^* \in \mathbb{R}$$

Wegen der Bijektivität der Zuordnung können wir für die Mächtigkeit von $\mathbb{C}$ folgern:

Satz: $|\mathbb{C}| = |\mathbb{R}|$

6.2.2 Rechenregeln — Règles de calcul

Die folgenden Regeln in $(\mathbb{C}, +)$ kann man wegen der Identifikation $z \hat{=} \vec{z}$ meist einfach geometrisch einsehen. Diejenigen in $(\mathbb{C}, \cdot)$ findet man durch Rechnung mit den Koeffizienten.

Eigenschaften:

1 $\forall_{z\in\mathbb{C},\lambda\in\mathbb{R}}: \ \lambda\, z = (\lambda\, a) + i\,(\lambda\, b)$

2 $\forall_{z\in\mathbb{C}}: \ z + \bar{z} = 2\,Re(z)$

3 $\forall_{z\in\mathbb{C}}: \ z \cdot \bar{z} = |z|^2$

4 $\forall_{z\in\dot{\mathbb{C}}}: \ z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

5 $\forall_{z\in\,\mathbb{I},\ \ (z=i\,b)}: \ z^2 = (i\,b)^2 = -b^2 \in \mathbb{R}_0^-$ oder :

6 $\forall_{b\in\mathbb{R}^+}: i\,b$ ist Lösung der Gleichung $x^2 = -b^2$ $x^2 = -b^2$

7 **Konsequenz:** $b = 1 \rightsquigarrow$
$i^2 = -1 \ \Leftrightarrow \ \pm\sqrt{-1} = \pm i$ ist Lösung der Gleichung $x^2 = -1$

Achtung: Jetzt können wir Quadratwurzeln aus negativen reellen Zahlen ziehen. Das Problem beliebiger Wurzeln aus komplexen Zahlen ist damit aber noch nicht gelöst!

8 $\forall_{z_1,z_2\in\mathbb{C}}: \ \overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1 + z_2}$

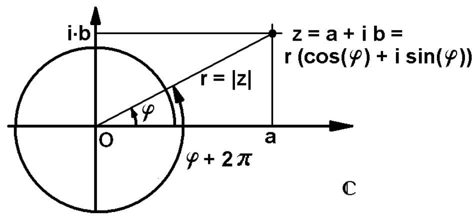
9 $\forall_{z_1,z_2\in\mathbb{C}}: \ \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 \cdot z_2}$

10 $\forall_{z_\in\mathbb{C}}: \ \overline{(\bar{z})} = z$

11 **Symbol:** $\rightsquigarrow$ Z.B.
$(a) + (i\,b)$ ('+' in $\mathbb{C}$) $= a + i \cdot b$ ('·' in $\mathbb{C}$) $= (a + i\,0) + (0 + i\,1) \cdot (b + i\,0)$ ('+' Symbol in $(a + i\,b) = (a + i\,0) + (0 + i\,b)$, Addition zweier Zahlen in $\mathbb{C}$) $= (a + i\,b)$ (Symbol für eine komplexe Zahl)
$\rightsquigarrow$ Anfängliches Symbol '+' und 'Addition +' in $\mathbb{C}$ nicht mehr unterscheidbar.

6.2.3 Geometrische Interpretation der Multiplikation — Interprétation géométrique de la multiplication

Begriffe:



$r := |z| \rightsquigarrow$
Betrag von z .

$\varphi := Arg(z) \rightsquigarrow$
Argument von z .

$\rightsquigarrow$ **Polarkoordinatendarstellung**
$z = r(\cos(\varphi) + i\ \sin(\varphi)) = r(\cos(\varphi + 2n\pi) + i\ \sin(\varphi + 2n\pi)),\ \ n \in \mathbb{Z}$
$\rightsquigarrow$ Darstellung nicht eindeutig!

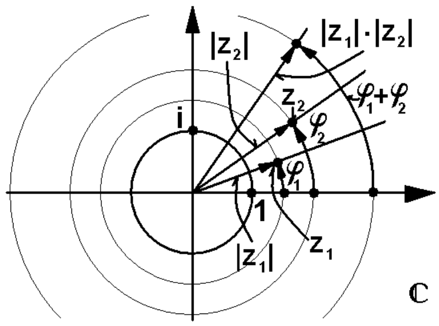
Problem: $z_1 + z_2 \hat{=} \vec{z}_1 + \vec{z}_2$
$\rightsquigarrow$ Die Addition lässt sich mit Hilfe der Parallelogrammaddition von Vektoren geometrisch deuten.
Was ist dagegen die geometrische Bedeutung der Multiplikation?

Sei $\quad z = z_1 \cdot z_2 \rightsquigarrow$

1 $|z|^2 = |z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 \cdot z_2) \cdot (\overline{z_1 \cdot z_2}) = (z_1 \cdot z_2) \cdot (\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}) = (z_1 \cdot z_2) \cdot \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
$= (z_1 \cdot \overline{z_1}) \cdot (z_2 \cdot \overline{z_2}) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \ \Rightarrow\ |z| = |z_1| \cdot |z_2|$

2 $z = z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos(\varphi_1) + i\ \sin(\varphi_1)) \cdot r_2(\cos(\varphi_2) + i\ \sin(\varphi_2)) =$
$r_1 \cdot r_2 \cdot ((\cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2)) + i\,((\cos(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2) + \sin(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2))))$
$= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\ \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \rightsquigarrow$

Satz:



Vor.: $z = z_1 \cdot z_2$

Beh.:

1 $|z| = |z_1| \cdot |z_2|$

2 $Arg(z) = Arg(z_1 \cdot z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2)$

Konsequenz: Bei der Multiplikation komplexer Zahlen werden die Beträge multipliziert und die Winkel addiert! Die Multiplikation führt also zu einer **Drehstreckung**!

6.2.4 Exponentialschreibweise — Notation exponentielle

Später wird sich im Zusammenhang mit Differentialgleichungen die folgende, vorläufig symbolische Schreibweise rechtfertigen lassen.
(Eine vorläufige Begründung kann man mit Hilfe Potenzreihe e^x finden, wenn man $x = i\varphi$ setzt und einfach einmal klassisch rechnet wie in $\mathbb{R}$.

Definition: $\qquad z = r(\cos(\varphi) + i\ \sin(\varphi)) := r \cdot e^{i\varphi}$

Dabei ist: $\varphi = Arg(z)$.

Wegen der Addition der Argumente (Winkel) bei der Multiplikation komplexer Zahlen findet man somit die Formeln:

Satz:

1 $z = re^{i\varphi} = re^{i(\varphi+2n\pi)}$

2 $z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot e^{i\varphi_1}) \cdot (r_2 \cdot e^{i\varphi_2}) = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

Folgerung:

1 Damit lässt sich das Assoziativgesetz der Multiplikation komplexer Zahlen einfach überprüfen:
$((r_1 \cdot e^{i\varphi_1}) \cdot (r_2 \cdot e^{i\varphi_2})) \cdot (r_3 \cdot e^{i\varphi_3})$
$= (r_1 \cdot r_2) \cdot r_3 \cdot e^{i((\varphi_1+\varphi_2)+\varphi_3)}$
$= r_1 \cdot (r_2 \cdot r_3) \cdot e^{i(\varphi_1+(\varphi_2+\varphi_3))}$
$= (r_1 \cdot e^{i\varphi_1}) \cdot ((r_2 \cdot e^{i\varphi_2}) \cdot (r_3 \cdot e^{i\varphi_3}))$

2 Die folgende Formel wird in der Elektrotechnik oft gebraucht:

$$|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

wegen $|z_1| = |\frac{z_2 \cdot z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = |z_2| \cdot |\frac{z_1}{z_2}|$

3 $Arg(\frac{z_1}{z_2}) = Arg(z_1) - Arg(z_2)$

4 $z^n = (r(\cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi)))^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\,\sin(n\varphi))$
$\Rightarrow\ (re^{i\varphi})^n = r^n \cdot e^{i(n\varphi)}$

Bemerkung:

$i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ l^5 = i,\ i^6 = -1,\ i^7 = -i,\ i^8 = 1,\ \ldots$

Benutze die Potenzreihenentwicklung (Analysis): $\leadsto$

$$\cos(\varphi) = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \frac{\varphi^8}{8!} - \frac{\varphi^{10}}{10!} + \ldots = 1 + \frac{(i\,\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\,\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\,\varphi)^6}{6!} + \frac{(i\,\varphi)^8}{8!} + \frac{(i\,\varphi)^{10}}{10!} + \ldots$$

$$i\,\sin(\varphi) = i\,\varphi - \frac{i\,\varphi^3}{3!} + \frac{i\,\varphi^5}{5!} - \frac{i\,\varphi^7}{7!} + \frac{i\,\varphi^9}{9!} - \ldots = i\,\varphi + \frac{(i\,\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\,\varphi)^5}{5!} + \frac{(i\,\varphi)^7}{7!} + \frac{(i\,\varphi)^9}{9!} + \ldots$$

$$\cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi) = 1 + i\,\varphi + \frac{(i\,\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\,\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\,\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\,\varphi)^5}{5!} + \frac{(i\,\varphi)^6}{6!} + \frac{(i\,\varphi)^7}{7!} + \frac{(i\,\varphi)^8}{8!} + \frac{(i\,\varphi)^9}{9!} + \ldots = e^{i\,\varphi}$$

$$\Rightarrow\ \cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi) = e^{i\,\varphi}$$

6.2.5 Wichtige Anwendung: Zeigerdiagramme — Application importante: Diagrammes de coordonnés

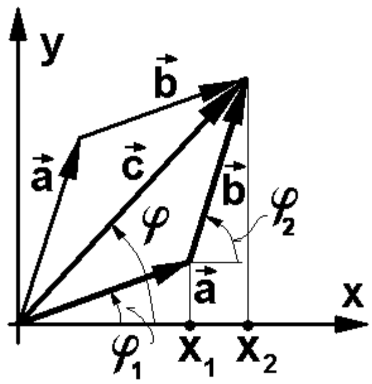
Zeigerdiagramme — Diagrammes de coordonnés

Bsp.: (Vgl. auch Seite 155)

Zwei Funktionen $a(t)$, $b(t)$ resp. eine Vektorfunktion $\binom{a(t)}{b(t)}$ kann man mit Hilfe der bijektiven Abbildung $\vec{z} \longmapsto z,\ \ , z \in \mathbb{C}$ statt in einem klassischen kartesischen Koordinatensystem ebenso gut in $\mathbb{C}$ darstellen. Z.B. statt $\{\binom{r\cos(\varphi+t)}{r\sin(\varphi+t)}\}$ erhält man dann den **'Zeiger'** $\{re^{i(\varphi+t)}\}$ (hier ein Kreis).

Addition von Schwingungen — Addition d'oscillations

Bsp.:



Sei
$\varphi_1 = \omega\, t + \alpha_1,$
$\varphi_2 = \omega\, t + \alpha_2,$
$\varphi = \ \omega\, t + \alpha,$
$x_1 = A\, \cos(\varphi_1),$
$x_2 = C\, \cos(\varphi),$
$x_1 - x_1 = B\, \cos(\varphi_2),$
$|\vec{a}| = A,$
$|\vec{b}| = B,$
$|\vec{c}| = C,$
$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$
$\Rightarrow\ x_1 + (x_2 - x_1) = x_2$
$\Rightarrow\ A\, \cos(\varphi_1) + B\, \cos(\varphi_2) = C\, \cos(\varphi)$

Ebenso: $\quad A\, \cos(\varphi_1) + B\, \cos(\varphi_2) = C\, \cos(\varphi)$

$$\rightsquigarrow\ \varphi = \arctan\Big(\frac{C\, \sin(\varphi)}{C\, \cos(\varphi)}\Big) = \arctan\Big(\frac{A\, \sin(\varphi_1) + B\, \sin(\varphi_2)}{A\, \cos(\varphi_1) + B\, \cos(\varphi_2)}\Big)$$

$$C = \sqrt{(A\, \cos(\varphi_1) + B\, \cos(\varphi_2))^2 + (A\, \sin(\varphi_1) + B\, \sin(\varphi_2))^2}$$

$$= \sqrt{A^2 + B^2 + 2\, A\, B\, (\cos(\varphi_1)\cdot\cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_1)\cdot\sin(\varphi_2))} = \sqrt{A^2 + B^2 + 2\, A\, B\, \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

Konsequenz:

$\varphi_1 = \omega\, t + \alpha_1,$
$\varphi_2 = \omega\, t + \alpha_2,$
$\varphi = \ \omega\, t + \alpha$

1 $\ C\, \cos(\varphi) = A\, \cos(\varphi_1) + B\, \cos(\varphi_2)$

2 $\ \varphi = \arctan\Big(\dfrac{A\, \sin(\varphi_1) + B\, \sin(\varphi_2)}{A\, \cos(\varphi_1) + B\, \cos(\varphi_2)}\Big)$

3 $\ C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2\, A\, B\, \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$

6.3 Wurzeln aus komplexen Zahlen, Einheitswurzeln — Racines de nombres complexes, racines d'unités

6.3.1 Das Problem mit Wurzeln — Le problème avec des racines

Sei $\ w \neq 0\ $ mit $\ w^k = z.\ $ Z.B. $\ (r\cdot e^{i\varphi})^k = r^k \cdot e^{i(k\varphi)}) := R\cdot e^{i\Phi}$

$\quad\Rightarrow\ r = r^n,\ \ \Phi = k\varphi\ \ $ oder $\ \ r = R^{\frac{1}{k}},\ \ \varphi = \dfrac{\Phi}{k}$

Andererseits gilt auch: $e^{i\Phi} = e^{i(\Phi+2n\pi)} \Rightarrow \varphi = \dfrac{\Phi + 2n\pi}{k}$.

k ist aber beliebig, d.h. $\varphi = \varphi(k)$ ist **nicht eindeutig**!

Satz:

Vor.:

$$w = z^k = (r \cdot e^{i(\Phi+2n\pi)})^k = |z|^k \cdot e^{i(k\varphi)} := |w| \cdot e^{i\Phi} = |w| \cdot e^{i\Phi+2n\pi}, \ n \in \mathbb{Z}$$

Beh.:

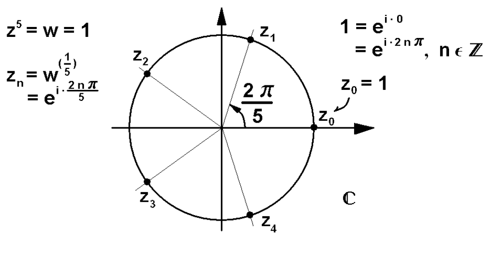
$$|z| = |w|^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{|w|} \ \wedge \ \varphi = \varphi_n = \frac{\Phi + 2n\pi}{k} \qquad \rightsquigarrow \ \ldots$$

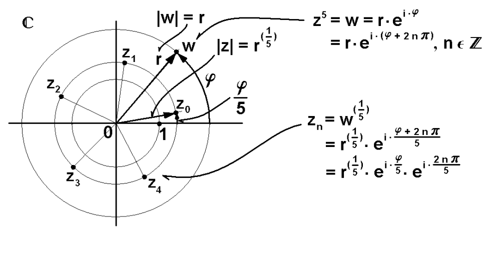
Bemerkung: Die Gleichung $z^k = w$ (k, w gegeben) hat verschiedene Lösungen $z_n = |z_n| \cdot e^{i(\varphi_n)}$. $|z_n|$ ist eindeutig ($= |w|^{\frac{1}{k}}$), $e^{i(\varphi_n)}$ jedoch nicht. z_n und z_{n+1} unterscheiden sich nur durch $\varphi_{n+1} - \varphi_n = \dfrac{\Phi + 2(n+1)\pi - (\Phi + 2n\pi)}{k} = \dfrac{2\pi}{k}$. Für $k \in \mathbb{N}$ liegt die Lösung z_n daher auf einem **regelmässigen konzentrischen** k**–Eck**!

Folgerung: Für $k \in \mathbb{N}$ hat die Gleichung $z^k = w$ genau k verschiedene Lösungen.

Definition: Im Falle $w = 1$ heissen die Lösungen z_n von $z^k = 1$ k**–te Einheitswurzeln.**

Die k–ten Einheitswurzeln bilden ein regelmässiges konzentrisches k–Eck mit einer Ecke bei $z = 1$ und den andern Ecken $e^{i\frac{2n\pi}{k}}$.





Interessant ist nun die Frage, aus welchen k–ten Einheitswurzeln sich durch Potenzieren alle andern k–ten Einheitswurzeln erzeugen lassen. (Z.B. mit $z_2 = e^{i\frac{22\pi}{4}}$ lassen sich nur die 4–ten Einheitswurzeln z_0 und z_2 erzeugen.)

Definition: $z_n = e^{i\frac{2n\pi}{k}}$ heisst k**–te primitive Einheitswurzel** $\Leftrightarrow \ z_n^m \neq 1$ für $m \in \mathbb{N}, \ 0 < m < k$.

Konsequenz:
Mit den primitiven Einheitswurzeln lässt sich durch potenzieren das ganze k–Eck erzeugen.

Folgerung: $e^{i\frac{2\pi}{k}}$ ist für $k \in \mathbb{N}$ immer k–te primitive Einheitswurzel .

Satz:

1 __Vor.:__ $ggT(k, j) = 1, \;\; k, j \in \mathbb{N}$

__Beh.:__ $e^{i\frac{2j\pi}{k}}$ ist k–te primitive Einheitswurzel

2 __Vor.:__ $ggT(k, m) = d, \;\; k, m, d \in \mathbb{N}, \;\; d > 1$

__Beh.:__ $e^{i\frac{2m\pi}{k}}$ ist $\frac{k}{d}$–te primitive Einheitswurzel

3 Die k–ten Einheitswurzeln bilden bezüglich der Multiplikation eine abelsche Gruppe .

6.3.2 Ausblicke — Perspectives

1 Sei $z \in \mathbb{C}, \;\; n, m \in \mathbb{Z}, \;\; m \neq 0. \qquad \leadsto \qquad z^n, z^{\frac{n}{m}} = u^q$ sind definiert.

$\leadsto$ Für $r \in \mathbb{R}$ könnte z^r wie folgt erklärt werden:

$$= \lim_{r_k \to r} z^{r_k}, \;\; r_k \in \mathbb{Q}$$

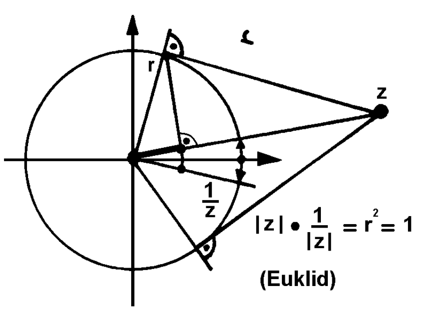
Problem: Mehrdeutigkeit der Wurzeln (z.B. n verschiedene n–te Einheitswurzeln)!
Bsp.: $\frac{m_k}{n_k} \to \pi, \;\; \frac{m_k}{n_k} \in \mathbb{Q} \;\Rightarrow\; z^{\frac{m_k}{n_k}} = (z^{m_k})^{(\frac{1}{n_k})} \to z^{\pi}, \;\; n_k \to \infty$
$\Rightarrow \; z^{\frac{m_k}{n_k}} = z^{\pi} = \sqrt[\infty]{z^{m_k}} \leadsto \quad n_k \to \infty \qquad \leadsto$ verschiedene Wurzeln!

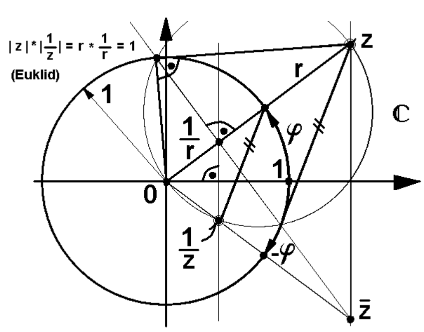
2 **Problem:** Was sind Potenzen mit komplexen Exponenten? Z.B. $z_1^{z_2}, \;\; z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
$\leadsto$ Definition im Zusammenhang mit komplexen Funktionen

3 Im Zusammenhang mit komplexen Funktionen kann auch das Problem der winkeltreuen (**konformen**) Abbildungen studiert werden.

4 Mit Hilfe der komplexen Funktionen gelingt es gewisse Integrale zu berechnen, die reell nicht berechet werden können.

5





Inversion am Einheitskreis:

Sei $\quad z = r \cdot r^{i\varphi} \leadsto \frac{1}{z} = \frac{1}{r} \cdot r^{-i\varphi} = \frac{1}{r} \cdot r^{i(-\varphi)}$.

Aus dem gezeichneten $\triangle$ liest man ab:

Damit ist die Position von $\frac{1}{z}$ konstruierbar.

6 **Geraden und Kreise bei der Inversion am Einheitskreis:**

$$z = r\, e^{i\,\varphi} \;\Rightarrow\; w = f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}\, e^{-i\,\varphi},\;\; \bar{z} = r\, e^{-i\,\varphi},\;\; f(\bar{z}) = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{r}\, e^{+i\,\varphi} = \bar{w}$$

Sei $M = \{\text{Kreise, Geraden}\} = \{\}$

Satz: $\leadsto\; M \longmapsto f(M) = M$

Beweis:

Sei $K \in M \;\Rightarrow\; K = \{(x,y) \mid A\,(x^2+y^2) + B\,x + C\,y + D = 0,\;\; A,B,C,D \in \mathbb{R}\}$

$A = 0 \leadsto$ Gerade!

Es gilt: $x^2 + y^2 = |z|^2 = z \cdot \bar{z},\;\; x = \dfrac{z+\bar{z}}{2},\;\; y = \dfrac{z-\bar{z}}{2\,i}$

$$\leadsto\; 0 = A\,(x^2+y^2) + B\,x + C\,y + D = A\,z\,\bar{z} + B\,\frac{z+\bar{z}}{2} + C\,\frac{z-\bar{z}}{2\,i} + D \qquad \Big| \cdot \frac{1}{z\,\bar{z}}$$
$$\Rightarrow\; 0 = A + B\,\frac{1}{2}(\frac{1}{\bar{z}} + \frac{1}{z}) + C\,\frac{1}{2\,i}(\frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{z}) + D\,\frac{1}{z}\,\frac{1}{\bar{z}} = A + B\,\frac{w+\bar{w}}{2} + C\,\frac{-w+\bar{w}}{2\,i} + D\,w\,\bar{w} \leadsto\; f(K) \in M.$$

A und D vertauschen die Rollen. Daher können aus Geraden Kreise entstehen und umgekehrt.

7 **Das Problem der Erweiterung von $\mathbb{C}$:**

$\mathbb{C}$ ist nicht die Endstation der Konstruktion sinnvoller Zahlen. Die nächste Erweiterung führt ins Vierdimensionale: Der Schiefkörper der **Hamiltonschen Quaternionen** (1843).

$z = x_1 + i\,x_2 + j\,x_3 + k\,x_4,\;\; x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ mit $i^2 := -1,\;\; j^2 := -1,$
$k^2 := -1,\;\; i \cdot j := k,\;\; j \cdot i := -k,\;\; j \cdot k := i,\;\; k \cdot j := -i,\;\; k \cdot i := j,\;\; i \cdot k := -j$

Preis für die Erweiterung: Kommutativgesetz der Multiplikation.

Bemerkung: Eine 3–dimensionale Erweiterung von $\mathbb{C}$ ist nicht möglich.
Sonst hätte man Zahlen der Form $z = \lambda + i\mu + j\nu$.

Bsp.: $z = \lambda + i\mu + j\nu = i \cdot j,\ \ \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R} \rightsquigarrow$ Wegen der für Zahlen zu fordernden Assoziativität, Distributivität und Kommutativität mit Skalaren müsste man rechnen können:

$\exists_{\lambda,\mu,\nu \in \mathbb{R}} : i \cdot j = \lambda + i\mu + j\nu,\ \ i \cdot (i \cdot j) = (i \cdot i) \cdot j = -j\ \wedge\ -j = (i \cdot i) \cdot j = i \cdot (i \cdot j) = i \cdot (\lambda + i\mu + j\nu)$
$= i\lambda - \mu + ij\nu = i\lambda - \mu + (\lambda + i\mu + j\nu)\nu = -\mu + \nu\lambda + i(\lambda + \nu\mu) + j\nu^2$
$\Rightarrow\ -\mu + \nu\lambda = 0,\ \ (\lambda + \nu\mu) = 0,\ \ \nu^2 = -1\ \wedge\ \nu \in \mathbb{R}\ \Rightarrow$ Widerspruch! ☹

$\rightsquigarrow$ Erweiterung so nicht möglich.

8 **Algebren :**

Definition: Ein Vektorraum über einem Körper K

$$((V, +),\ \ (K, +, \cdot),\ \ *) := \ (V^{(+)}, K^{(+,\cdot)}, *)$$

heisst **Algebra über** K

wenn in V neben $''+''$ noch eine zweite Verknüpfung $''*''$ definiert ist mit:

$''*'' :\ V \times V\ \longmapsto\ V,\ \ (\vec{a}, \vec{b})\ \longmapsto\ \vec{c} = \vec{a} * \vec{b}$ mit

(a) Distr. 1: $\vec{a} * (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} * \vec{b}) + (\vec{a} * \vec{c})$

(b) Distr. 2: $(\vec{a} + \vec{b}) * \vec{c} = (\vec{a} * \vec{c}) + (\vec{b} * \vec{c})$

(c) Ass.Sc $(\lambda\,\vec{a}) * (\mu\,\vec{b}) = \lambda\,\mu\,(\vec{a} * \vec{b})$

Beispiele:
$(\mathbb{C}^{(+)}, \mathbb{C}^{(+,\cdot)}, \cdot)$, $(\mathbb{R}^{(+)}, \mathbb{R}^{(+,\cdot)}, \cdot)$, $(\mathbb{Q}^{(+)}, \mathbb{Q}^{(+,\cdot)}, \cdot)$
$((\mathbb{R}^3)^{(+)}, \mathbb{R}^{(+,\cdot)}, \times)$ ($\times$: Vektorprodukt),
$((\mathbb{R}^4)^{(+)}, \mathbb{R}^{(+,\cdot)}, *)$ ($*$: Quaternionenmultiplikation).

6.4 Zum Hauptsatz der Algebra — Quant au théorème principal de l'algèbre

6.4.1 Der Satz — Le Théorème

Geg.: $P_n(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z^1 + a_0 z^0 = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$

$\rightsquigarrow$ Polynom vom Grade n , Koeffizienten $c_i \in \mathbb{C}$.

Sei $c \in \mathbb{C}$,
$Q_{n-1}(z) \rightsquigarrow$ Polynom vom Grade $n - 1$ mit:

$$\frac{P_n(z)}{z - c} = Q_{n-1}(z) + \frac{R}{z - c}$$

(Dividiere $\dfrac{P_n(z)}{z - c} \rightsquigarrow$ Rest $:= R$, $pgrad\,(R) < pgrad\,(z - c) = 1$)

Bsp.: $\dfrac{2\,z^4 - 19\,z^3 + 59\,z^2 - 54\,z - 16}{z-3} = 2\,z^3 - 13\,z^2 + 20\,z + 6 + \dfrac{2}{z-r}, \quad R = 2$

Sei c_1 = Nullstelle von $P_n(z)$ (Kurz: $c_1 = NS(P_n(z))$.)
Es ist:
$P_n(z) = (z - c_1)Q_{n-1}(z) + R,\ \ 0 = P_n(c_1) = (c_1 - c_1)Q_{n-1}(z) + R = 0 \cdot Q_{n-1}(z) + R = R$
$\Rightarrow\ R = 0\ \Rightarrow\ P_n(z) = (z - c_1)Q_{n-1}(z)$.

Lemma: <u>**Vor.:**</u> $c = NS(P_n(z))$, d. h. $P_n(c_1) = 0$

<u>**Beh.:**</u>
$(z - c_1)|P_n(z)$, d. h. $\exists_{Q_{n-1}(z)} : \dfrac{P_n(z)}{z - c_1} = Q_{n-1}(z)$
oder $P_n(z) = Q_{n-1}(z) \cdot (z - c_1)$

Das Lemma kann man natürlich jetzt auch auf $Q_{n-1}(z)$ anwenden.

$\rightsquigarrow$ Sei c_2 NS von $Q_{n-1}(z)$:
$Q_{n-1}(c_2) = 0\ \Rightarrow\ Q_{n-1}(z) = Q_{n-2}(z) \cdot (z - c_2),\ \ P_n(z) = Q_{n-2}(z) \cdot (z - c_1) \cdot (z - c_2)$ u.s.w. ,
$P_n(z) = Q_{n-k}(z) \cdot (z - c_1) \cdot (z - c_2) \cdot \ldots \cdot (z - c_k)$.
Dabei hat $Q_{n-k}(z)$ den Grad $n - k$.

Es gilt: $Q_{n-k}(z) = Q_0(z) = const.$
$\rightsquigarrow$ $P_n(z)$ kann in maximal n lineare Faktoren $(z - c_k)$ zerlegt werden.

$P_n(z)$ kann somit maximal n Nullstellen haben.

Lemma: <u>**Vor.:**</u> $pgrad\,(P_n(z)) = n$

<u>**Beh.:**</u>

$P_n(z)$ hat maximal n Nullstellen

Weniger einfach zu begründen ist das folgende Lemma (Gauss):

Lemma: <u>**Vor.:**</u> $pgrad\,(P_n(z)) = n$

<u>**Beh.:**</u> $P_n(z)$ hat **mindestens** n Nullstellen

Man müsste z.B. zeigen können, dass $P_n : \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$ surjektiv ist .

$$\Rightarrow\ \exists_{z_0} : P_n : z_0 \longmapsto 0 \ \text{ oder }\ P_n(z_0) = 0.$$

Sei $P_n(z) = z \cdot P_{n-1}(z) + a_0$.

Zeigen: ($P_{n-1}(z)$ surjektiv $\Rightarrow$ $P_{n-1}(z) \cdot z$ ist auch surjektiv.)

Es gilt: Mit $P_{n-1}(z) \cdot z$ ist auch $P_{n-1}(z) \cdot z + a_0$ surjektiv. .

Konsequenz:
Fundamentalsatz der Algebra: Jedes Polynom vom Grade n hat über $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen, die mehrfach sein können.

Satz:

Vor.:

$pgrad\,(P_n(z)) = n$

Beh.:

$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = Q_{n-1}(z) \cdot (z - c_1)$
$= Q_{n-2}(z) \cdot (z - c_1) \cdot (z - c_2) = \ldots = a_n (z - c_1) \cdot (z - c_2) \cdot \ldots \cdot (z - c_n)$

Konsequenz:
$P_n(z)$ ist also ein Produkt von Linearfaktoren der Form $(z - c_k)$, $c_k =$ *NS*.

Konsequenz:

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = \overbrace{a_n (z - c_1) \cdot (z - c_2) \cdot \ldots \cdot (z - c_n)}^{\text{(ausmultiplizieren)}} =$$
$$a_n [z^n - (z_1 + z_2 + \ldots + z_n) z^{n-1} + (z_1 z_2 + z_1 z_3 + \ldots + z_{n-1} z_n) z^{n-2} + \ldots + (-1)^n z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n]$$

$\leadsto$ **Verallgemeinerung von Vieta :**

$$-(z_1 + z_2 + \ldots + z_n) = \frac{a_{n-1}}{a_n},\ (z_1 z_2 + z_1 z_3 + \ldots + z_{n-1} z_n) = \frac{a_{n-2}}{a_n}, \ldots,\ (-1)^n z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = \frac{a_0}{a_n}$$

Problem: Der Hauptsatz der Algebra liefert kein Verfahren zur Berechnung der Nullstellen.

Ein Resultat aus dem 19. Jahrhundert: Auf der Basis der *Galois-Theorie* konnte gezeigt werden, dass es für $n > 4$ kein allgemeines endliches algebraisches Verfahren zur Berechnung der Nullstellen von Polynomen mit Hilfe von Radikalen (Wurzelausdrücken) geben kann.

6.4.2 Anwendungen — Applications

Reelle und konjugiert komplexe Koeffizienten — Coefficients réels et conjugués

Sei $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0,\ a_k \in \mathbb{R}\ (\forall_k)$

Verwende: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2},\ \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2},\ a_k = \overline{a_k}$ (in $\mathbb{R}$!)

Sei $P_n(c) = 0$

$\Rightarrow\ P_n(\bar{c}) = a_n (\bar{c})^n + a_{n-1} (\bar{c})^{n-1} + \ldots + a_1 (\bar{c}) + a_0$
$= (\overline{a_n})\,(\overline{c^n}) + (\overline{a_{n-1}})\,(\overline{c^{n-1}}) + \ldots + (\overline{a_1})\,(\overline{c}) + (\overline{a_0})$
$= \overline{(a_n)\,(c^n)} + \overline{(a_{n-1})\,(c^{n-1})} + \ldots + \overline{(a_1)\,(c)} + \overline{(a_0)} = \overline{(a_n (c^n) + a_{n-1} (c^{n-1}) + \ldots + a_1 c + a_0)}$
$= \overline{(P_n(c))} = \overline{(0)} = 0 \qquad \leadsto$

Satz: **Vor.:**

$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0, \;\; a_k \in \mathbb{R} \forall_k$
$P_n(c) = 0$

Beh.:

$$P_n(\bar{c}) = 0$$

Konsequenz:
Ein Polynom mit reellen Koeffizienten hat entweder reelle oder konjugiert komplexe Nullstellen!

Wir betrachten den Fall der konjugiert komplexen Nullstellen etwas genauer:

Sei $\;\; P_n(c) = 0, \;\; c \notin \mathbb{R} \;\Rightarrow\; P_n(\bar{c}) = 0$
$\Rightarrow \;\; (z-c)(z-\bar{c}) = z^2 - z(c+\bar{c}) + c \cdot \bar{c} = z^2 - 2\,z\,Re(c) + |c|^2 = z^2 + \beta\, z + \gamma,$
$2\,Re(c) = \beta, \;\; |c|^2 = \gamma \;\wedge\; (z^2 + \beta\, z + \gamma) \,|\, P_n(z) \leadsto$

Satz: **Vor.:**

$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0, \;\; a_k \in \mathbb{R} \forall_k$

Beh.:

$P_n(z)$ ist komplett faktorisierbar
▷ in den konstanten Faktor $\;a_n$,
▷ in lineare Faktoren $\;(z - c_k)$
▷ und quadratische Faktoren
$(z^2 + \beta_j z + \gamma_j)$ mit $\;c_k, \beta_j z, \gamma_j \in \mathbb{R}$

Merke: Ein reelles Polynom ist also sicher in quadratische Faktoren zerlegbar.

Partialbruchzerlegung — Décomposition d'une fraction rationnelle en fractions partielles

Bsp.:

Problem:

(1) Gleichnamig machen in $\mathbb{R}$:
$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6}{12} + \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{6+8+3}{12} = \frac{17}{12}$

$\leadsto$ **Problem:**

(2) Umkehrung der Problemstellung:

$\frac{17}{12}$ wieder in Teilbrüche $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4})$ zerlegen:

$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, Nenner: $\{2,\ 2 \cdot 2 = 4;\ 3;\ 2 \cdot 3 = 6\}$.

$$\leadsto \quad \frac{17}{12} = \frac{A}{2} + \frac{B}{3} + \frac{C}{4} + \frac{D}{6}, \ \ A, B, C, D = ?$$

$$\leadsto \quad \frac{17}{12} = \frac{A \cdot 6}{12} + \frac{B \cdot 4}{12} + \frac{C \cdot 3}{12} + \frac{D \cdot 2}{12} = \frac{A \cdot 6 + B \cdot 4 + C \cdot 3 + D \cdot 2}{12}$$

$\Rightarrow\ 17 = A \cdot 6 + B \cdot 4 + C \cdot 3 + D \cdot 2,\ \ A, B, C, D \in \mathbb{Z}$.

Setzt z.B.: Soit p.ex.: $D = 0, C = 1$

$$\Rightarrow\ 17 = A \cdot 6 + B \cdot 4 + 1 \cdot 3 + D \cdot 0,\ \ 14 - A \cdot 6 = B \cdot 4,\ \ B = \frac{7 - 3 \cdot A}{2}$$

$\leadsto$ Lösungen $B = \ldots, 11, 8, 5, 2, -1, -4, -7 \ldots$ u.s.w .
$\leadsto$ $\{A = 1,\ B = 2,\ C = 1\}$ ist eine mögliche Lösung .

Übertragung der Methode für Polynome:

Sei $\dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)} = S_{n-m}(z) + \dfrac{R_{m-1}(z)}{Q_m(z)}$, $pgrad\,(R_{m-1}) < pgrad\,(Q_m(z)) = m$
(ausdividieren).

$Q_m(z)$ habe z.B. die folgende Zerlegung:
$Q_m(z) = a_n \cdot (z - c_1) \cdot (z - c_2)^2 \cdot (z - c_3) \cdot \ldots \cdot (z - c_k) \cdot (z^2 + \beta_1 z + \gamma_1)^2 \cdot (z^2 + \beta_2 z + \gamma_2) \cdot \ldots$
$\leadsto$ Zerlegung:

$$\frac{R_{m-1}(z)}{Q_m(z)} = \frac{A_1}{z - c_1} + \underbrace{\frac{A_2}{z - c_1} + \frac{A_3}{(z - c_3)^2}}_{\frac{a_2 z + (-A_2 c_2 + A_3)}{(z - c_3)^2}} + \ldots + \underbrace{\frac{B_1 z + C_1}{z^2 + \beta_1 z + \gamma_1} + \frac{B_2 z + C_2}{(z^2 + \beta_1 z + \gamma_1)^2}}_{\frac{B_1 z^3 + (C_1 + \beta_1 B_1) z^2 + (\beta_1 C_1 + \gamma_1 B_1) z + (\gamma_1 C_1)}{(z^2 + \beta_1 z + \gamma_1)^2}} + \frac{B_3 z + C_3}{z^2 + \beta_2 z + \gamma_2} + \ldots$$

Die unbekannten Koeffizienten $A_1, \ldots, B_1, \ldots, C_1, \ldots$ kann man durch Koeffizientenvergleich finden oder mit der Methode des Einsetzens der Nullstellen nachdem man erst die Gleichung mit den entsprechenden Linearfaktoren multipliziert hat.

Bsp.: (**Koeffizientenvergleich**)

Rechts gleichnamig machen, links und rechts müssen dann die Zählerpolynome übereinstimmen, d.h. gleiche Koeffizienten aufweisen.

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{(z-1)\,(z+1)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-1} \ \Rightarrow\ \frac{1}{(z-1)\,(z+1)} = \frac{Az-A}{(z-1)\,(z+1)} + \frac{Bz+B}{(z-1)\,(z+1)} = \frac{(A+B)z+(-A+B)}{(z-1)\,(z+1)}$$
$$\Rightarrow\ A + B = 0\ \wedge\ -A + B = 1\ \Rightarrow\ B = \frac{1}{2},\ \ A = -\frac{1}{2},\ \ \frac{1}{z^2-1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{z+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{z-1}.$$

Bsp.: (**Nullstellen einsetzen :**)

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{(z-1)\,(z+1)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-1} \ |\cdot (z-1)$$
$$\Rightarrow\ \frac{(z-1)}{(z-1)\,(z+1)} = \frac{A(z-1)}{z+1} + \frac{B(z-1)}{z-1} \ |\ \lim_{z\to 1}\ \Rightarrow\ \frac{1}{(1+1)} = \frac{A(1-1)}{1+1} + \frac{B}{1} = B\ \Rightarrow\ B = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{(z-1)\,(z+1)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-1} \ |\cdot (z+1)$$

$$\Rightarrow \ \frac{(z+1)}{(z-1)\,(z+1)} = \frac{A(z+1)}{z+1} + \frac{B(z+1)}{z-1} \ | \ \lim_{z\to -1} \ \Rightarrow \ \frac{1}{(-1-1)} = \frac{A}{1} + \frac{B(-1+1)}{-1-1} = B \ \Rightarrow \ A = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

Diese Methode funktioniert nicht mehr, wenn eine Nennernullstelle mehrfach vorkommt.

6.4.3 Bemerkung zur kubischen Gleichung — Remarque concernant l'équation cubique

In der nachfolgenden Bestimmungsgleichung sollen die Nullstellen bestimmt werden:

$$\begin{array}{ll} & f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \ \ a \neq 0 \qquad | \cdot \frac{1}{a} \\ \leadsto & \frac{a}{a}x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 + rx^2 + sx + t = 0, \ \ r = \frac{b}{a}, s = \frac{c}{a}, t = \frac{d}{a} \end{array}$$

Definiere: $y = x + \frac{r}{3}, \ \ x = y - \frac{r}{3} \ \Rightarrow \ (y - \frac{r}{3})^3 + r(y - \frac{r}{3})^2 + s(y - \frac{r}{3}) + t = 0 \leadsto$

$$0 = y^3 - 3y^2(-\frac{r}{3}) + 3y\frac{r^2}{9} - \frac{r^3}{27} + ry^2 - 2\frac{r^2}{3}y + \frac{r^3}{9} + sy - \frac{rs}{3} + t = y^3 + y\frac{r^2}{3} - \frac{r^3}{27} - 2\frac{r^2}{3}y + \frac{r^3}{9} + sy - \frac{rs}{3} + t$$
$$= y^3 + \underbrace{(s - \frac{r^2}{3})}_{:=p}y + \underbrace{(2\frac{r^3}{27} - \frac{rs}{3} + t)}_{:=q} \ \Rightarrow \ \text{Reduziert: } y^3 + py + q = 0$$

Definiere: $y := u + v \leadsto \quad y^3 + py + q = (u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$
$\Rightarrow \ u^3 + 3u^2v + 3uv^3 + v^3 + pu + pv + q = u^3 + v^3 + q + (u+v)(3uv + p) = 0$

Z.B. : u beliebig wählen .

Wähle: $u = \frac{-p}{3v}, \ \ p \neq 0 \ \Rightarrow$
$u^3 + v^3 + q + (u+v)(3uv+p) = \frac{-p}{3v}^3 + v^3 + q + (\frac{-p}{3v} + v)(3\frac{-p}{3v}v + p) = \frac{-p}{3v}^3 + v^3 + q + (\frac{-p}{3v} + v)\cdot 0$
$= \frac{-p}{3v}^3 + v^3 + q = u^3 + v^3 + q = 0 \ \Rightarrow \ u^3 + v^3 = -q \ \Rightarrow \ (u^3+v^3)^2 = q^2 \ \text{ mit } \ u = \frac{-p}{3v}.$
$\Rightarrow \ u^6 + 2u^3v^3 + v^6 = u^6 + 2\frac{-p^3}{3^3v^3}v^3 + v^6 = u^6 + 2\frac{-p^3}{27} + v^6 = q^6, \ \ u^6 + v^6 = q^2 + \frac{p^3}{27}$

Andererseits ist: $u^3 + v^3 = -q \ \Rightarrow$
v^6 ersetzbar durch $v^6 = (v^3)^2 = (-q - u^3)^2 = (q + u^3)^2 = q^2 + 2qu^3 + u^6$
$\Rightarrow \ u^6 + u^6 + 2qu^3 + q^2 = q^2 + \frac{p^3}{27}$

$$\Rightarrow \ \cancel{2}((u^3)^2 + qu^3 - \frac{p^3}{27}) = 0 \ \Rightarrow \ u^3_{1,2} = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + 4\frac{p^3}{27}}}{2}$$

Konsequenz: $u^3_{(1,2),n} = \sqrt[3]{\frac{-q \pm \sqrt{q^2 + 4\frac{p^3}{27}}}{2}} \cdot e^{\frac{i\cdot 2n\pi}{3}}, \ \ n \in \mathbb{Z}$ und

$x^3_{(1,2),n} = y^3_{(1,2),n} - \frac{r}{3}, \ \ y^3_{(1,2),n} = u_{(1,2),n} + v_{(1,2),n}, \ \ v^3_{(1,2),n} = -\frac{p}{3u_{(1,2),n}}, \ \ q = \frac{2r^3}{27} - \frac{rs}{3} + t,$
$p = s - \frac{r}{3}, \ \ r = \frac{B}{A}, \ \ s = \frac{C}{A}, \ \ t = \frac{D}{A}$

Damit ist die Lösung der Gleichung 3–ten Grades beschrieben. Interessant ist dabei, dass im Falle $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ immer mindestens eine Lösung reell sein muss (Verlauf des Graphen von $f(x)$), die andern beiden jedoch komplex sein können.

Mit vergleichbaren Methoden kann man zur Lösung der Gleichung 4. Grades gelangen (Formeln von **Cardano**).

6.4.4 Bemerkung zu einem Beweis des Hauptsatzes der Algebra — Quant à une preuve du théorème principal de l'algèbre

Geg.: $P_n(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z^1 + a_0 z^0 = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ Polynom vom Grade n , Koeffizienten $c_i \in \mathbb{C}$.

Wie wir gesehen haben, ist folgender Sachverhalt (Lemma) einfach beweisbar:

Lemma: **Vor.:** $pgrad\,(P_n(z)) = n$

Beh.:

$P_n(z)$ hat maximal n Nullstellen

(Dieses Lemma ist eine Konsequenz eines andern Lemmas:

Lemma: **Vor.:** c Nullstelle von $P_n(z)$: $P_n(c) = 0$

Beh.: $(z - c) \mid P_n(z)$

Die Umkehrung jedoch, das „Lemma von Gauss", ist nicht trivial:

Lemma: **Vor.:** $pgrad\,(P_n(z)) = n$

Beh.:

$P_n(z)$ hat minimal n Nullstellen

(**Konsequenz: Fundamentalsatz der Algebra** :

Jedes Polynom vom Grade n hat über $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen, die mehrfach sein können.)

Zum Beweis des Gauss'schen Lemmas: :

Sei
$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = (\ldots \underbrace{(\ldots((a_n z + a_{n-1})z + a_{n-2})z + \ldots)}_{:=p_j(z)} \ldots)z + a_0$

(nach Horner), $p_j(z) = a_n z^{n-j} + a_{n-1} z^{n-1-j} + \ldots + a_{n-j+1} z + a_{n-j}$
$= (\ldots(\ldots((a_n z + a_{n-1})z + a_{n-2})z + \ldots)\ldots)z + a_{n-j}$

Es ist: $p_{j+1}(z) = p_j(z) \cdot z + a_{n-j-1}$.

Sei $p_1 = p_1(z) = a_n \cdot z + a_{n-1})$ (kurz)

$\leadsto$ Andererseits ist: p_1 ist surjektiv auf $\mathbb{C}$ $\mathbb{C}$.

Sei nun angenommen $p_j(z)$ auch surjektiv.
D. h. : $\forall_{z_0 \in \mathbb{C}} \exists_{c_0 \in \mathbb{C}} : p_j(c_0) = z_0$.

(Das bedeutet also, dass jedes z_0 bezüglich p_j ein Urbild c_0 hat.

Insbesondere hat demnach $z_0 = 0$ ein Urbild c_0: $p_j(c_0) = 0$, d. h. p_j hat eine Nullstelle c_0.)

Wenn es nun gelingt zu zeigen, dass dann auch $p_j(z) \cdot z$ surjektiv ist, so folgt, dass auch $p_{j+1}(z) = p_j(z) \cdot z + a_{n-(j+1)}$ surjektiv ist (denn das $a_{n-(j+1)}$ bewirkt nur eine Translation).

Wegen dem Aufbau von $P_n(z)$ nach dem Hornerschema ist dann auch $P_n(z)$ surjektif, d. h. 0 besitzt ein Urbild c_0, $P_n(z)$ hat eine Nullstelle c_0. Damit wäre das Aauss'sche Lemma gezeigt.
Man muss also zeigen können:

Vor.: $p_{j-1}(z)$ surjektiv

Beh.: $p_j(z) \cdot z$ surjektiv

Wie man das zeigen könnte, können wir hier nur auf dem Plausibilitätsniveau erklären:

Dazu betrachten wir: $p_j(z) = a_n z^{n-j} + a_{n-1} z^{n-1-j} + \ldots + a_{n-j} =$

$$= z^{n-j} a_n \underbrace{(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{z} + \frac{a_{n-2}}{a_n}\frac{1}{z^2} + \ldots + \frac{a_{n-2-j}}{a_n}\frac{1}{z^{n-j}})}_{:=1+Q(z)} = z^{n-j} a_n (1 + Q(z))$$

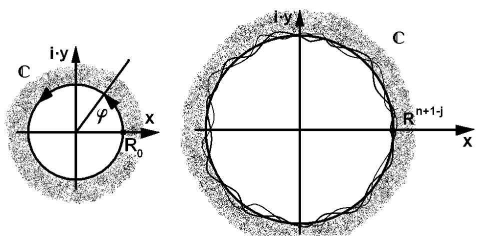
Sei nun R sehr gross und $|z| > R = R_0$:

$\leadsto \quad |Q(z)| \leq (|\frac{a_{n-1}}{a_n}||\frac{1}{z}| + |\frac{a_{n-2}}{a_n}||\frac{1}{z^2}| + \ldots + |\frac{a_{n-2-j}}{a_n}||\frac{1}{z^{n-j}}|) \leq$
$\leq \frac{1}{R_0}(|\frac{a_{n-1}}{a_n}| + |\frac{a_{n-2}}{a_n}|\frac{1}{R_0} + \ldots + |\frac{a_{n-2-j}}{a_n}|\frac{1}{R_0^{n-j-1}}) < \frac{1}{R_0} \cdot j \cdot (\max_{k\in\{1,2,\ldots,j\}} |\frac{a_{n-k}}{a_n}|) = \frac{1}{R_0} \cdots K_0, \;\; K_0 \in \mathbb{R}.$
D. h. : $R_0 \to \infty \;\Rightarrow\; |Q(z)| \to 0.$

Für grosse R_0 können wir also schreiben:
$Q(z) := \epsilon(z), \;\; p_j(z) = z^{n-j} a_n (1 + \epsilon(z)) \approx z^{n-j} a_n$

Wähle nun den Kreis $z(\varphi) = R_0 \cdot e^{i\varphi}, \;\; \varphi \in [0, 2\pi)$.

Sei R_0 gross $\leadsto$ $p_j(z)$ durchläuft die kreisartige Kurve $a_n \cdot R_0^{n-j} e^{i\varphi(n-j)} \cdot (1 - \epsilon(z)))$
(dabei ist $\epsilon(z) \approx 1$ die vorhin studierte kleine Störung.)



Wir nehmen an, dass $z(\varphi) = R_0 \cdot e^{i\varphi}$ den Kreis K_0 mit dem Radius R_0 einmal durchläuft.

Dann durchläuft $p_j(z) = z^{n-j} a_n (1 + \epsilon(z))$ den „Beinahe–Kreis“ mit dem Radius R_0^{n-j} $n - j$ mal (Kurve $C_{n-j}(R_0)$)
und $p_j(z) \cdot z = z^{n+1-j} a_n (1 + \epsilon(z))$ den „Beinahe–Kreis“ mit dem Radius R_0^{n+1-j} $n+1-j$ mal (Kurve $C_{n+1-j}(R_0)$).

Wenn wir R stetig wachsen lassen, ändert $C_{n-j}(R)$ die Grösse, jedoch kaum die Form ($\epsilon(z)$!). Da p_j surjektiv ist, wird das Äussere von $C_{n-j}(R_0)$ vollständig im Bildbereich liegen (d.h. überdeckt), wenn wir R stetig wachsen lassen. Es ist nun anschaulich klar, dass beim gleichen Wachstumsvorgang auch $C_{n+1-j}(R)$ das Äussere von $C_{n+1-j}(R_0)$ überdecken muss, $p_j(z) \cdot z$ also ausserhalb des Kreises mit dem Radius R_0 auch surjektiv sein muss. (Mit Hilfe der Theorie der konformem Abbildungen und Gitternetzen können wir dies später exakt einsehen.)

Mit dem Innern von K_0 verfahren wir gleich. Wenn R stetig gegen 0 geht, so schrumpft K_0 auf den Punkt 0 zusammen. (Später wird gezeigt, dass komplexe Polynome stetig sind.) Die Bildkurve $C_{n-j}(R_0)$ schrumpft dann stetig (lückenlos und dicht) auf $a_n - j$ zusammen ($z \to 0 \;\Rightarrow\; p_j(z) \to a_n - j$). Da p_j surjektiv ist, wird das Innere von $C_{n-j}(R_0)$ vollständig überdeckt. Es ist nun plausibel, dass auch bei $p_j(z) \cdot z$ die Bildkurve $C_{n+1-j}(R_0)$stetig mit $z \to 0$ auf $p_j(0) \cdot 0 = 0$ zusammenschrumpft (lückenlos und dicht), denn aus Stetigkeitsgründen bleibt die Kurve bei diesem Schrumpfungsprozess geschlossen und kann nicht springen. (Angenommen, es würde einmal doch eine punktuelle Lücke w_0 entstehen, so könnte man auf der entsprechenden Kurve eine Bilderfolge $p_j(z_k) \cdot z_k$ finden, die gegen w_0 konvergiert. Die zugehörige Urbildfolge z_k hätte dann einen Häufungspunkt z_0 dessen Bild aber dann w_0 sein müsste, was der Annahme widerspricht.) Ohne uns auf ein sauberes Deduktionsgerüst zu stützen, können wir damit die Gültigkeit der Behauptung „$p_j(z) \cdot z$ surjektiv“ etwa nachvollziehen.

Bemerkung:

Später wird bewiesen, dass Polynome stetige und differenzierbare Funktionen sind, welche Figuren konform abbilden bis auf die Punkte, wo die Ableitung 0 ist. Da wir wissen, dass das bei einem Polynom vom Grade n wegen dem Grad der Ableitung höchstens an $n-1$ Ausnahmestellen sein kann, haben wir die Möglichkeit, darauf mit Hilfe des oben beschriebenen Schrumpfungsprozesses und der Methode der vollständigen Induktion ein Argument aufzubauen, das die Existenz mindestens einer Nullstelle stützt. Damit wäre der Hauptsatz bewiesen.

6.5 Weitere Anwendungen — Autres applications

6.5.1 Summe der Einheitswurzeln — Somme des racines de l'unité

Sei $z_k = e^{i\cdot k \frac{2\pi}{n}} = e^{i\cdot k\varphi} := w^k,\;\; \varphi = \dfrac{2\pi}{n}, w = e^{i\frac{2\pi}{n}}$

($\leadsto$ $\quad n$–te Einheitswurzeln)

Problem:

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = e^0 + e^{i\varphi} + e^{2i\varphi} + \ldots + + e^{(n-1)i\varphi} = 1 + w + w^2 + w^3 + \ldots + w^{n-1}$$
$$= \frac{1-w^n}{1-w} = \frac{1-e^{ni\varphi}}{1-e^{i\varphi}} = \frac{1-e^{ni\frac{2\pi}{n}}}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}} = \frac{1-1}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}} = 0 \;\Rightarrow\; \forall_n : \sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0$$

Satz: Die Summe aller n–ten Einheitswurzeln ist also unabhängig von n immer 0.

6.5.2 Formeln von De Moivre — Formules de De Moivre

$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi),\;\; (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi} = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$
$\Rightarrow\;\; \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) = (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^n =$
$(\cos(\varphi))^n + \binom{n}{1} i\,(\cos(\varphi))^{n-1}\sin(\varphi) + \binom{n}{2} i^2\,(\cos(\varphi))^{n-2}(\sin(\varphi))^2 + \binom{n}{3} i^3\,(\cos(\varphi))^{n-3}(\sin(\varphi))^3 + \ldots$
$\ldots + i^n\,(\sin(\varphi))^n =$
$(\cos(\varphi))^n + \binom{n}{1} i\,(\cos(\varphi))^{n-1}\sin(\varphi) - \binom{n}{2}(\cos(\varphi))^{n-2}(\sin(\varphi))^2 - \binom{n}{3} i\,(\cos(\varphi))^{n-3}(\sin(\varphi))^3 + \ldots$
$\ldots + i^n\,(\sin(\varphi))^n$

Der Vergleich von Real– und Imaginäranteil liefert:

Konsequenz: (**Formeln von De Moivre**)

$Re \rightsquigarrow$ $\cos(n\varphi) = (\cos(\varphi))^n - \binom{n}{2}(\cos(\varphi))^{n-2}(\sin(\varphi))^2 + \binom{n}{4}(\cos(\varphi))^{n-4}(\sin(\varphi))^4 \pm \ldots$

$Im \rightsquigarrow$ $\sin(n\varphi) = \binom{n}{1}(\cos(\varphi))^{n-1}\sin(\varphi) - \binom{n}{3}(\cos(\varphi))^{n-3}(\sin(\varphi))^3 + \binom{n}{5}(\cos(\varphi))^{n-5}(\sin(\varphi))^5 \pm \ldots$

Z.B. $n = 2$: $\cos(2\varphi) = (\cos(\varphi))^2 - (\sin(\varphi))^2$, $\sin(2\varphi) = (2\cos(\varphi)) - (\sin(\varphi))$

6.5.3 Fourierentwicklung von Sinus– und Cosinuspotenzen — Séries de Fourier des puissances de sinus et cosinus

Formeln — Formules

Definition: Eine Reihe der nachfolgenden Form heisst **Fourierreihe**:

$$f(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)$$

Beispiele:

1 $\cos^2 t = (\dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2})^2 = \dfrac{1}{4}(e^{2it}+2+e^{-2it}) = \dfrac{1}{4}(\cos(2t)+i\sin(2t)+2+\cos(-2t)+i\sin(-2t))$
$= \dfrac{1}{4}(\cos(2t)+i\sin(2t)+2+\cos(2t)-i\sin(2t)) = \dfrac{1}{4}(2\cos(2t)+2) = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos(2t)$

2 $\cos^4 t = (\dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2})^4 = \dfrac{1}{16}(e^{4it}+4e^{2it}+6+4e^{-2it}+e^{-4it}) = \ldots = \dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{2}\cos(2t)+\dfrac{1}{8}\cos(4t)$

3 $\sin^2 t = (\dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i})^2 = -\dfrac{1}{4}(e^{2it}-2+e^{-2it}) = \ldots = +\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos(2t)$

4 $\sin^2 t + \sin t = (\dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i})^2 = -\dfrac{1}{4}(e^{2it}-2+e^{-2it}) = \ldots = +\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos(2t)+\sin(t)$

Interessante Anwendungen — Applications intéressantes

Bsp.: Sei $\varphi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Benütze:

$$\cos(n\varphi) = (\cos(\varphi))^n - \binom{n}{2}(\cos(\varphi))^{n-2}(\sin(\varphi))^2 + \binom{n}{4}(\cos(\varphi))^{n-4}(\sin(\varphi))^4 \pm \ldots$$

Sei $n = 8m$, $m \in \mathbb{N}$. $\rightsquigarrow$ $\cos(n\varphi) = \cos(8m\frac{\pi}{2}) = \cos(2m\pi) = 1 \rightsquigarrow$

$1 = (\frac{\sqrt{2}}{2})^{8m} - \binom{8m}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2})^{8m-2}(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \binom{8m}{4}(\frac{\sqrt{2}}{2})^{8m-4}(\frac{\sqrt{2}}{2})^4 - \ldots = (\frac{\sqrt{2}}{2})^{8m}\cdot(1-\binom{8m}{2}+\binom{8m}{4}-\binom{8m}{6}+\ldots)$
$= (\frac{\sqrt{1}}{2})^{4m}\cdot(1-\binom{8m}{2}+\binom{8m}{4}-\binom{8m}{6}+\ldots) \Rightarrow \forall_{m\in\mathbb{N}} : 2^{4m} = 16^m = 1-\binom{8m}{2}+\binom{8m}{4}-\binom{8m}{6}+\ldots$

Konsequenz: $\forall_{m\in\mathbb{N}}:\ 2^{4m} = 16^m = 1-\binom{8m}{2}+\binom{8m}{4}-\binom{8m}{6}+\binom{8m}{8}\pm\ldots$

Kapitel • Chapitre 7

Komplexe Funktionen, konforme Abbildungen — Fonctions complexes, applications conformes

7.1 Differenzierbarkeit, Wege — Dérivés, chemins

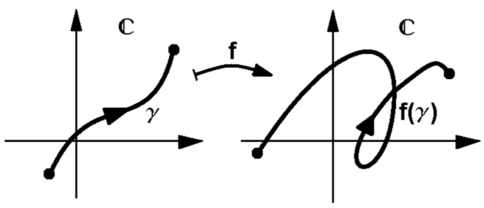
7.1.1 Grundlagen, Stetigkeit — Fondements, continuité

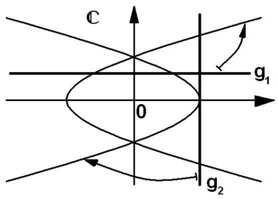
Wir verwenden einige Begriffe, die schon von früher bekannt sein sollten, also nicht mehr neu definiert werden müssen.

Kurven, Wege : Stetige Funktionen $\mathbb{R} \stackrel{f}{\longmapsto} \mathbb{C}$, z.B. $t \in \mathbb{R},\ f:\ t \longmapsto f(t) = \cos(t) + i\sin(t) \in \mathbb{C}$

Gebietsabbildungen : Funktionen $\mathbb{C} \stackrel{f}{\longmapsto} \mathbb{C}$, z.B. $z \in \mathbb{C},\ f:\ z \longmapsto f(t) = z^2 \in \mathbb{C}$

Allgemein: $f:\ G = D_f \longmapsto G^* = W_f,\ f:\ z \longmapsto f(z) = w$
oder $f:\ z = x + iy \longmapsto w = f(z) = u(z) + iv(z) = u(x+iy) + iv(x+iy)$
mit $u(z) + Re(f(z)),\ v(z) = Im(f(z))$





Wichtig: Stetige Funktionen.

Definition: f **stetig in** $z_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$
oder $\lim\limits_{z \to z_0} w = w_0$

„Epsilontisch“ : $\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{z\in U_\delta(z_0)}$:

$$w = f(z) \in U_\epsilon(f(z_0)) = U_\epsilon(w_0)$$

Anschaulich: Nahe z haben nahe $f(z) = w$ zur Folge.

Folgerung: f (stetig in) z_0 $\Leftrightarrow$ $u(z)$ (und) $v(z)$ (stetig in) z_0

Konsequenz:
$u(x + i\,y)$ (und) $v(x + i\,y)$ (stetig in) x (und) y (notwendig).

Folgende Aussagen beweist man wie in $\mathbb{R}$, indem man den Abstand in $\mathbb{R}$ durch den in $\mathbb{C}$ ersetzt:

Satz: **Vor.:**

$f_1(z)$, $f_2(z)$ (stetig in) z_0, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

Beh.:

1 $\lambda_1 f_1(z) + \lambda_2 f_2(z)$ (stetig in) z_0

2 $f_1(z) \cdot f_2(z)$ (stetig in) z_0

3 $f_2(z_0) \neq 0 \Rightarrow \dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$ (stetig in) z_0

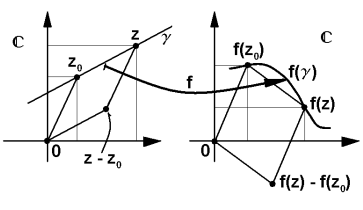
4 $f_1(z_0) = w_0$, $f_2(z)$ (stetig in) w_0 $\Leftrightarrow$ $f_2(f_1(z))$ (stetig in) z_0

Folgerung: Polynome : $p(z) = c_n z^n + \ldots + c_1 z + c_0$ (stetig in) $\mathbb{C}$ $(\forall z \in \mathbb{C})$

Stetigkeit in einem Gebiet:

Definition: f (stetig in) G $\Leftrightarrow$ f (stetig in) $\forall z \in G$

7.1.2 Differenzierbarkeit — Dérivabilité (différentiabilité)



Sei $\dot{U}_\delta(z_0) = \{z \mid 0 < |z - z_0| < \delta\}$
Betrachte

$$D(z) := \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{in} \quad \dot{U}_\delta(z_0)$$

($D(z)$: Differenzenquotient)

Definition:

1 f **komplex differenzierbar** (in z_0)
$\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} D(z)$ existiert .

2 f komplex differenzierbar mit der **Ableitung** a
$\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} D(z) = a := f'(z_0)$

3 f **holomorph**[2] (regulär analytisch) in G
$\Leftrightarrow f'(z)$ existiert $\forall_{z\in G}$

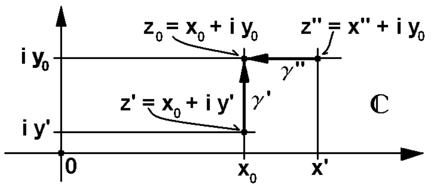
Bsp.:

1 $f(z) = a\cdot z + b,\ \ D(z) = \dfrac{az+b-(az_0+b)}{z-z_0} = \dfrac{a(z-z_0)}{z-z_0} = a \ \Rightarrow\ \lim\limits_{z\to z_0} D(z) = a$

2 $f(z) = z^2,\ \ D(z) = \dfrac{z^2-z_0^2}{z-z_0} = \dfrac{(z+z_0)(z-z_0)}{z-z_0} = (z+z_0) \ \Rightarrow\ \lim\limits_{z\to z_0} D(z) = 2z_0$

3 $f(z) = Re(z) + 2\,i\,Im(z) = x + 2\,i\,y,\ \ D_f = \mathbb{C},\ \ d(z) = \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \dfrac{(x-x_0)+2\,i(y-y_0)}{(x-x_0)+i(y-y_0)}$

Betrachte zwei verschiedene Wege:



Sei $z_0 = x_0 + i\,y_0$,
$z' = x_0 + i\,y',\ \ z'' = x'' + i\,y_0$

$\oslash\ z' \to z_0:\ \lim\limits_{z'\to z_0} D(z') = \lim\limits_{z'\to z_0} \dfrac{(x_0-x_0)+2\,i\,(y'-y_0)}{(x_0-x_0)+i\,(y'-y_0)} = \lim\limits_{z'\to z_0} \dfrac{2\,i\,(y'-y_0)}{i\,(y'-y_0)} = 2$

$\oslash\ z'' \to z_0:\ \lim\limits_{z''\to z_0} D(z'') = \lim\limits_{z''\to z_0} \dfrac{(x''-x_0)+2\,i\,(y_0-y_0)}{(x''-x_0)+i\,(y_0-y_0)} = \lim\limits_{z'\to z_0} \dfrac{(x''-x_0)}{(x''-x_0)} = 1 \neq 2$

$\Rightarrow\ \lim\limits_{z'\to z_0} D(z') \neq \lim\limits_{z''\to z_0} D(z''),\ \ \lim\limits_{z\to z_0} D(z)$ existiert nicht .

$\leadsto$ Schon die einfache Funktion $f(z) = Re(z) + 2\,i\,Im(z)$ ist nicht holomorph. Holomorph ist also etwas Spezielles.

7.1.3 Differenzierbarkeitsregeln — Règles pour dérivabilité

Wenn nichts bemerkt ist, gehen die Beweise wie im Reellen (indem man den Abstand in $\mathbb{R}$ durch den in $\mathbb{C}$ ersetzt).

[2]Griech. holo: ganz, völlig, unversehrt , morphe: Gestalt

Satz:

Vor.:

$f(z), g(z)$ (holomorph in) G, $\quad a, b \in \mathbb{C}$

Beh.:

1 f, g (stetig in) G

2 Linearität:
$F(z) = a \cdot f(z) + b \cdot g(z)$ holomorph in $G \wedge$
$F'(z) = a \cdot f'(z) + b \cdot g'(z)$

3 Produktenregel:
$F(z) = f(z) \cdot g(z)$ holomorph in $G \wedge$
$F'(z) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$

4 Quotientenregel:
Sei $F(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$, $g(z_0) \neq 0 \;\Rightarrow F(z)$ holomorph in $G \wedge F'(z) = \dfrac{f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)}{(g(z))^2}$

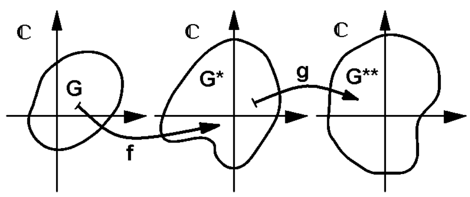
Satz:

Vor.:

$f(z)$ holomorph in G, $f:\ G \longmapsto f(G) \subseteq G^*$, $f:\ z \longmapsto f(z) = w$
g holomorph in G^*, $g:\ G^* \longmapsto g(G^*) = G^{**}$
$F = f \circ g,\ \ f(z) = f(g(z))$

Beh.:

Kettenregel:
$F(z)$ holomorph in $G \wedge$
$F'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z) = f'(w) \cdot g'(z) = \dfrac{df}{dw} \cdot \dfrac{dg}{dz}$
oder $F'(z) = \dfrac{d}{d\,z} f(z) \cdot \dfrac{d}{d\,z} g(z)$



Folgerung:

1 Polynomfunktionen sind holomorph in $\mathbb{C}$.

2 Rationale Funktionen sind holomorph in $\mathbb{C}$, wenn der Nenner $\neq 0$ ist.

Problem: Beim Differenzieren im Reellen hat die Ableitung die Bedeutung einer Tangentensteigung. Aus Dimensionsgründen lässt sich diese Bedeutung bei der komplexen Differenzierbarkeit nicht gebrauchen. Was ist dann der Sinn komplexer Ableitungen? Eine Interpretation werden wir später bei den **konformen Abbildungen** gewinnen können.

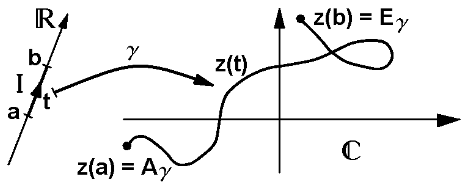
7.1.4 Wege in C — Chemins dans C

Betrachte $I = [a, b] = \{t \in \mathbb{R} \mid a \leq t \leq b\}$ sowie
$x(t), y(t)$ diff'bar in I.

Sei $z(t) = x(t) + iy(t),\ I \longmapsto \mathbb{C}$

Bsp.: $I = [0, 2\pi],\ z(t) = \sin(t) + i\cos(t)$ (Abbildung von I auf den Einheitskreis in $\mathbb{C}$.)

Definition: Eine stetige Abbildung
$\gamma:\ I \longmapsto \mathbb{C}$ mit $t \overset{\gamma}{\longmapsto} z(t)$
heisst **Weg in** $\mathbb{C}$,
$|\gamma| = \{z(t) \mid t \in I\}$ heisst **Spur** v. γ



$z(a) = A_\gamma :=$ **Anfangspunkt**
$z(b) = E_\gamma :=$ **Endpunkt**

Geschlossene Wege : $A_\gamma = E_\gamma$

Inverser Weg $(-\gamma)$ zu γ :
Sei $t = b + a - t',\ t' = b + a - t,\ -\gamma:\ t' \longmapsto w(t')\ (= z(t)),\ (t' \in [a, b] \Leftrightarrow t \in [a, b])$.
Läuft t von a nach b, so läuft t' von b nach a.

Definition: **Differenzierbarer** Weg :
$\gamma:\ t \longmapsto z(t) = x(t) + i\,y(t)$ differenzierbar
$\Leftrightarrow\ x(t), y(t)$ diff'bar .
$z'(t) = x(t) + i\,y(t) \rightsquigarrow$ Ableitung. .

Regeln:

1 $A_{-\gamma} = E_\gamma,\ A_\gamma = E_{-\gamma}$

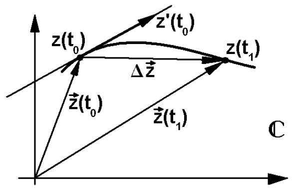
2 $|\gamma| = |-\gamma|$

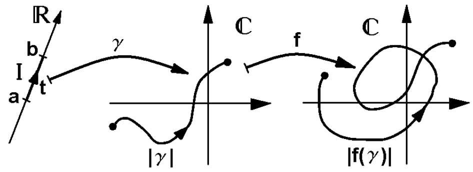
3 $-(-\gamma) = \gamma$

(Wie man sofort sieht. . .)

7.1.5 Differenzierbare Wege in C — Chemins dérivables dans C

Wir wissen: γ diff'bar $\Rightarrow$ Ableitung : $z'(t) = x(t) + i\,y(t)$
$\rightsquigarrow$ Tangentenvektor an den Weg $\gamma : \vec{z}\,'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$





Definition: **Bildweg** von γ :

$$f \circ \gamma := f(\gamma) : \; t \longmapsto w(t) = f(z(t)), \;\; t \in I$$

Eigenschaften:

1 $f(\gamma)$ ist wieder Weg

2 $|f(\gamma)| = f(|\gamma|)$

3 $A_{f(\gamma)} := A_{f(|\gamma|)} = f(A_\gamma)$

4 $E_{f(\gamma)} := E_{f(|\gamma|)} = f(E_\gamma)$

Weiter gilt die **Kettenregel** (Beweis analog im Reellen): :

Satz: <u>**Vor.:**</u>

f holomorph in G,
γ diff'barer Weg : $t \longmapsto z(t)$, $|\gamma| \subset G$, $t \in I$

<u>**Beh.:**</u>

Für den Bildweg gilt

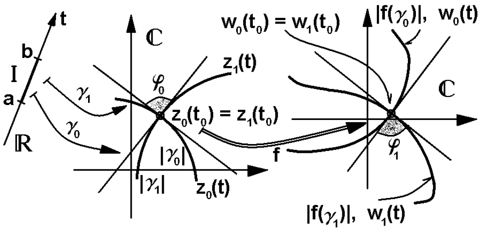
1 $w(t) = f(z(t))$ ist diff'bar in I I

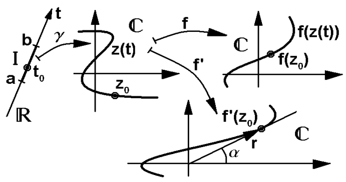
2 $\dfrac{d}{d\,z} w(t) = w'(t) = f'(z(t)) \cdot z'(t) = \dfrac{d}{d\,z} f(z) \cdot \dfrac{d}{d\,t} z(t)$
(Komplexe und reelle Ableitungen gemischt!)

Bsp.: $I = [0,1]$, $\gamma : \; t \longmapsto z(t) = t^2 + i(t+1)$, $f : \; z \longmapsto z^2$
$\leadsto$ $f(\gamma) : \; t \longmapsto (t^2 + i(t+1))^2 = w(t) \Rightarrow \; w'(t) = 2z \cdot z'(t) = 2(t^2 + i(t+1)) \cdot (2t + i)$

Bemerkung: $z'(t) = \dfrac{d}{d\,t} z(t) = \dfrac{d}{d\,t} x(t) + i \dfrac{d}{d\,t} y(t) = x'(t) + i\,y'(t)$
$\leadsto$ Integral :
$z(t) + C = \int z'(t)\,dt = \int x'(t)\,dt + i \int y'(t)\,dt = x(t) + i\,y(t) + C$

7.2 Konforme Abbildungen — Applications conformes





Sei $\quad f'(z_0) \neq 0,$
$f'(z_0) = |f'(z_0)| \cdot (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) =$
$= r \cdot e^{i\cdot\alpha}$
mit $|f'(z_0)| = r, \quad \alpha = Arg(f'(z_0))$

Betrachte: γ diff'bar in G, $I \ni t \overset{\gamma}{\longmapsto} z(t) \in \mathbb{C}$,

Speziell: $z(t_0) = z_0, \ z'(t_0) \neq 0$.

Nach Voraussetzung ist: $z'(t_0) \neq 0$
$\leadsto$ Tangentenvektor existiert, die Kurve (Weg) ist **glatt**.

Untersuchung von $f \circ \gamma := f(\gamma)$:

$$w(t) = f(z(t)) \ \Leftrightarrow \ w'(t) = f'(z(t)) \cdot z'(t), \ \ w'(t_0) = f'(z(t_0)) \cdot z'(t_0) = \underbrace{f'(z_0)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{z'(t_0)}_{\neq 0}.$$

Bei der Multiplikation in $\mathbb{C}$ addieren sich die Argumente:

$$Arg(w'(t_0)) = \underbrace{Arg(f'(z_0))}_{:=\alpha} + Arg(z'(t_0)), \qquad \text{speziell:}$$

$\leadsto$ Für $\gamma_0, \ f(\gamma_0)$: $Arg(w_0'(t_0)) = \alpha + Arg(z_0'(t_0))$.
$\leadsto$ Für $\gamma_1, \ f(\gamma_1)$: $Arg(w_1'(t_0)) = \alpha + Arg(z_1'(t_0))$.

$$\Rightarrow \varphi_1 = Arg(w_0'(t_0)) - Arg(w_1'(t_0)) = (\alpha + Arg(z_0'(t_0))) - (\alpha + Arg(z_1'(t_0)))$$
$$= (Arg(z_0'(t_0))) - (Arg(z_1'(t_0))) = \varphi_0 \ \Rightarrow \ \varphi_0 = \varphi_1$$

Definition: Eine Abbildung heisst **winkeltreu** oder **konform**, wenn sich der Schnittwinkel zweier differenzierbarer Wege ($\measuredangle$ zwischen Tangentenvektoren $\neq \vec{0}$) bei der Abbildung nicht ändert.

Satz:

Vor.:

f holomorph , $f'(z) \neq 0$ in G

Beh.:

f konform in G

7.3 Möbius–Transformationen — Transformations de Möbius

7.4 Definitionen — Définitions

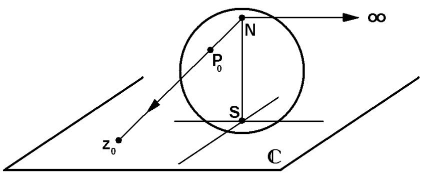
Definition: $f_M(z) := \dfrac{az+b}{cz+d},\ c \neq 0$ heisst Möbiustransformation.

Solche Abbildungen spielen in der technischen Praxis eine Rolle.

Klassisch gilt: $D_f = \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.
Um eine geschlossene Theorie zu erhalten, ist es aber hier notwendig, den Definitionsbereich für den Fall $-\frac{d}{c}$ auszudehnen:

Betrachtung: :

Sei $f_M(z) = u(z) + i\,v(z),\ z \to -\frac{d}{c} \ \Rightarrow\ r = |f_M(z)| = (u^2+v^2)^{\frac{1}{2}} \to \infty$.



$\mathbb{C}$ erweitern: $\bar{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$,
$\infty \mathrel{\hat{=}}$ Nordpol der Gauss'schen Zahlenkugel.

Definition: $f_M(-\frac{d}{c}) := \infty,\ f_M(\infty) := \frac{a}{c}$

$(z \to \infty \ \Rightarrow\ f_M(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{z+\frac{b}{z}}{z+\frac{d}{z}} \to \dfrac{a}{c})$. Man sieht unmittelbar:

Satz: $f_M :\ \bar{\mathbb{C}} \overset{bij.}{\longmapsto} \bar{\mathbb{C}}$
f_M konform für $c \cdot b \neq d \cdot a,\ z \neq \infty,\ z \neq -\frac{d}{c}$

(Kontrolle der Bijektivität: Algebraische Umformung. $f_M^{-1}(w) = z = -\dfrac{dw-b}{cw-a},\ f'(z) = \dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}$)

Korollar: f_M^{-1} ist auch Möbiustransformation, speziell:
$-\frac{d}{c} \overset{f}{\longmapsto} \infty, \qquad \infty \overset{f}{\longmapsto} \frac{a}{c},$
$+\frac{a}{c} \overset{f^{-1}}{\longmapsto} \infty, \qquad \infty \overset{f^{-1}}{\longmapsto} -\frac{d}{c}$

7.4.1 Eigenschaften — Qualités

Betrachte: $f :\ z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{a}{c} \cdot (1 + \dfrac{\frac{b}{a} - \frac{d}{c}}{z+\frac{d}{c}})$

Sei : <u>Trans.</u> :> (Verschiebung), <u>Inv.</u> :> (Kehrwert bilden), <u>Rot.</u> :> (Drehstreckung).

Dann kann man f wie folgt zusammensetzen:

$$z \overset{Trans.}{\longmapsto} w = z + \frac{d}{c} \overset{Inv.}{\longmapsto} \frac{1}{w} = \frac{1}{z+\frac{d}{c}} \overset{Rot.}{\longmapsto} \frac{a}{c}\cdot(\frac{b}{a}-\frac{d}{c})\cdot\frac{1}{z+\frac{d}{c}} \; (= (\frac{b}{c}-\frac{a\cdot d}{c^2})\cdot\frac{1}{z+\frac{d}{c}}) \overset{Trans.}{\longmapsto}$$
$$\overset{Trans.}{\longmapsto} \frac{a}{c} + \frac{a}{c}\cdot(\frac{b}{a}-\frac{d}{c})\cdot\frac{1}{z+\frac{d}{c}} = \frac{a}{c}(1+\frac{\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{z+\frac{d}{c}}) = \frac{az+b}{cz+d}$$

$\leadsto$ Eine Möbiustransformation lässt sich aus Drehstreckungen, Verschiebungen und einer Inversion $w \longmapsto \frac{1}{w}$ zusammensetzen.

Problem: Drehstreckungen und Verschiebungen sind Ähnlichkeitsabbildungen, führen also Geraden in Geraden und Kreise in Kreise über. Was aber macht die Inversion?

Durch $z(t)$ sei eine Gerade in $\mathbb{C}$ gegeben.

Es gilt: $z(t) = e^{i\varphi} z_0(t)$: $\leadsto$
Gerade durch Drehung entstanden aus $z_0(t)$ ($\{z_0(t)\}$ in spezieller Lage $\perp$ x–Achse.)

$$z(t) = e^{i\varphi} z_0(t) \longmapsto \frac{1}{z(t)} = e^{-i\varphi}\cdot\frac{1}{z_0(t)}, \quad z_0(t) = x_0 + i\,t = x_0\cdot(1+i\,\frac{t}{x_0}) = x_0\cdot(1+i\lambda)$$
($x_0 \neq 0$: Streckung).
($x_0 = 0 : z_0(t) = i\,t \rightarrow \frac{1}{x_0} = \frac{1}{i\,t} = -i\,\frac{1}{t}$, d.h. Gerade $\rightarrow$ Gerade .)

$\leadsto$ Reduziertes Problem: Gerade $1 + i\lambda \longmapsto \dfrac{1}{1+i\lambda} = ?$

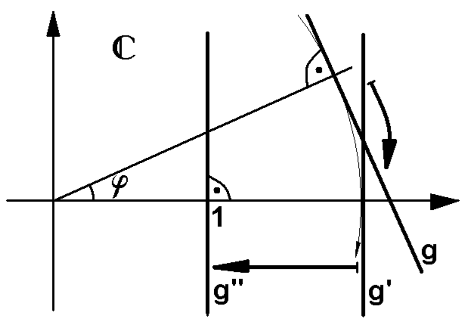
Es gilt: $1 \longmapsto 1$ und $\infty \longmapsto 0$. $\frac{1}{2}$ bildet die Mitte zwischen 0 und 1 .

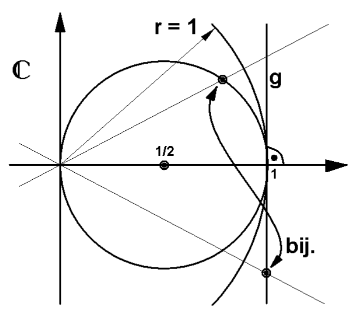
Daher betrachten wir das Bild in einem Koordinatensystem, dessen Ursprung in $(0, \frac{1}{2})$ verschoben ist. .

Somit müssen wir die folgende Abbildung studieren: $1 + i\lambda \longmapsto \dfrac{1}{1+i\lambda} - \dfrac{1}{2}$. Wir formen um:

$$|\frac{1}{1+i\lambda}-\frac{1}{2}| = |\frac{1-i\lambda}{1+\lambda^2}-\frac{1}{2}| = |\frac{1-i\lambda-\frac{1}{2}(1+\lambda^2)}{1+\lambda^2}| = |\frac{-i\lambda+\frac{1}{2}1-\frac{1}{2}\lambda^2}{1+\lambda^2}| = |\frac{1}{2}\cdot\frac{1-2i\lambda+-\lambda^2}{1+\lambda^2}| =$$
$$\frac{1}{2}\cdot|\frac{1-2i\lambda-\lambda^2}{1+\lambda^2}| = \frac{1}{2}\cdot|\frac{(1-i\lambda)^2}{1+\lambda^2}| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\lambda^2}{1+\lambda^2} = \frac{1}{2}$$
$$\leadsto \quad |\frac{1}{1+i\lambda}-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2} = const.$$

$\leadsto$ Das Bild der Gerade ist ein Kreis
Setzt man die Abbildungen wieder zusammen, so folgt, dass eine Gerade in jedem Fall entweder auf eine Gerade oder auf einen Kreis abgebildet wird.





Für die Umkehrabbildung h^{-1} von $h:\ z \longmapsto \frac{1}{z}$ gilt $h = h^{-1}$. Aus obiger Betrachtung folgt, dass unter h eine nicht zentrisch liegende Gerade in einen nicht zentrisch liegenden Kreis, umgekehrt also ein nicht zentrisch liegender Kreis in eine nicht zentrisch liegende Gerade abgebildet wird. Ein zentrisch liegender Kreis wird unter h bekanntlich auf einen ebensolchen Kreis abgebildet.
Konsequenz :

Satz:

Vor.:

$f =$ Möbiustransformation ,
$K = \{$ Kreise, Geraden, $\}$

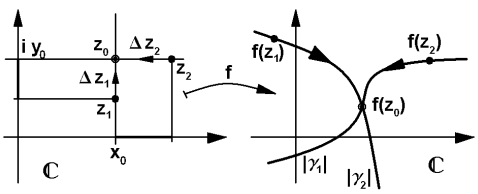
Beh.:

$f:\ K \longmapsto K$ bijektiv

7.5 Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen — Equations différentielles de Cauchy-Riemann

7.5.1 Herleitung — Déduction

Sei $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ holomorph ,
$Re(f(z)) = u(z) = u(x,y),\ \ Im(f(z)) = v(z) = v(x,y)$
$\Rightarrow\ f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} D(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$



Betrachte :
$z_0 = x_0 + i\,y_0$
$z_1 = z_0 + \Delta z_1 = x_0 + i\,(y_0 + \Delta y) = z_0 + i\,\Delta y$
$z_2 = z_0 + \Delta z_2 = (x_0 + \Delta x) + i\,y_0 = z_0 + \Delta x$

Auf γ_1:
$$D(z) = \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{u(z_0 + \Delta x) - u(z_0)}{\Delta x} + i\,\frac{v(z_0 + \Delta x) - v(z_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + i\,\frac{\Delta v}{\Delta x} \ \to\ \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Auf γ_2:
$$D(z) = \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{u(z_0 + i\,\Delta y) - u(z_0)}{i\,\Delta y} + i\,\frac{v(z_0 + i\,\Delta y) - v(z_0)}{i\,\Delta y} = \frac{\Delta u}{i\,\Delta y} + i\,\frac{\Delta v}{i\,\Delta y}$$
$$\to\ \frac{\partial u}{i\,\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

$\lim\limits_{z \to z_0} D(z) = f'(z_0)$ darf nicht vom Weg γ_k abhängen . Daher gilt: $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{i\,\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$
Diese Betrachtung lässt sich auch umkehren. $\leadsto$

Satz: **Cauchy–Riemann'sche Differentialgleichungen :**

f holomorph in G $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \wedge \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ in G

Mit diesen Differentialgleichungen lässt sich oft rasch entscheiden, ob eine gegebene Funktion holomorph ist.

7.5.2 Harmonische Funktionen — Fonctions harmoniques

Sei $\triangle := \dfrac{\partial^2}{\partial x} + \dfrac{\partial^2}{\partial y}$, (allgemeiner : $\triangle := \sum_{k=0}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_k}$)

Definition: f heisst harmonisch in G :
$\Leftrightarrow$ $\triangle f = 0$ in G

Aus der Analysis ist bekannt, dass für einigermassen „anständige“ Funktionen f gilt: $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2}{\partial y \partial x}$.
In der sogenannten „Funktionentheorie“ wird bewiesen, dass eine in einem Gebiet holomorphe Funktion immer in eine Potenzreihe entwickelt werden kann, also mindestens zweimal differenzierbar ist.
Wir definieren nun:

Definition: f **harmonisch** in G
$:\Leftrightarrow$ $\triangle f = 0$ in G

Daher sieht man durch einfache Rechnung mit Hilfe von Cauchy–Riemann:

Satz: **Vor.:**

f holomorph in G

Beh.:

f harmonisch in G

Konsequenz:
$f(z) = u(z) + i\,v(z)$ holomorph in G
$\Leftrightarrow$ $u(z), v(z)$ holomorph in G

Damit haben wir das Rüstzeug für die Diskussion wichtiger **transzendenter** komplexer Funktionen: Exponentialfunktion, Logarithmusfunktion, trigonometrische Funktionen, Arcusfunctionen u.s.w..

7.6 Komplexe Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion — Fonctions exponentielle et logarithme complexes

Im Reellen kann die Eulersche Exponentialfunktion durch folgende drei Eigenschaften definiert werden:

1 f diff'bar in $\mathbb{R}$

2 $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ f(x) = f'(x)$

3 $f(0) = 1$

In der Theorie der Differentialgleichungen wird gezeigt, dass eine Lösung f existiert und auch eindeutig bestimmt ist als Lösung des gegebenen Anfangswertproblems.

Diese Problemstellung lässt sich samt Lösungskonzept ins Komplexe übertragen. Dabei spielt Cauchy–Riemann eine wichtige Rolle. Vdist
Sei $z = x + i\,y$. Bekannt: : $e^x,\ e^{iy} := \cos(y) + i\sin(y)$.

Bemerkung:

$i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ l^5 = i,\ i^6 = -1,\ i^7 = -i,\ i^8 = 1,\ \ldots$

Benutze die Potenzreihenentwicklung $\rightsquigarrow$

$$\cos(\varphi) = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \frac{\varphi^8}{8!} - \frac{\varphi^{10}}{10!} + \ldots = 1 + \frac{(i\,\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\,\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\,\varphi)^6}{6!} + \frac{(i\,\varphi)^8}{8!} + \frac{(i\,\varphi)^{10}}{10!} + \ldots$$

$$i\ \sin(\varphi) = i\,\varphi - \frac{i\,\varphi^3}{3!} + \frac{i\,\varphi^5}{5!} - \frac{i\,\varphi^7}{7!} + \frac{i\,\varphi^9}{9!} - \ldots = i\,\varphi + \frac{(i\,\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\,\varphi)^5}{5!} + \frac{(i\,\varphi)^7}{7!} + \frac{(i\,\varphi)^9}{9!} + \ldots$$

$$\cos(\varphi)+i\ \sin(\varphi) = 1+i\,\varphi+\frac{(i\,\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\,\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\,\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\,\varphi)^5}{5!} + \frac{(i\,\varphi)^6}{6!} + \frac{(i\,\varphi)^7}{7!} + \frac{(i\,\varphi)^8}{8!} + \frac{(i\,\varphi)^9}{9!} + \ldots = e^{i\,\varphi}$$

$$\Rightarrow\ \cos(\varphi) + i\ \sin(\varphi) = e^{i\,\varphi}$$

Wir définieren damit:

Definition: $f(z) := e^z = e^{x+iy} := e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos(y) + i\sin(y))$
(**Exponentialfunktion**)

Die rechte Seite ist bekannt
$\rightsquigarrow$ $u(x,y) = e^x \cdot \cos(y),\ v(x,y) = e^x \cdot \sin(y)$.

Für u und v gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cdot \cos(y)\ \wedge\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cdot \cos(y).$$

Damit ist f holomorph.

Daher ist der Differentialquotient wegunabhängig.

Wir können daher rechnen:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(z_0+\Delta x)-f(z_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{z_0+\Delta x}-e^{z_0}}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0+\Delta x+iy_0}-e^{x_0+iy_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0+\Delta x}\cdot e^{iy_0}-e^{x_0}\cdot e^{iy_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0+\Delta x}-e^{x_0}}{\Delta x}\cdot e^{iy_0} =$$
$$= e^{x_0}\cdot e^{iy_0} = e^{x_0+iy_0} = e^{z_0}$$

$\leadsto \quad f(z)=e^z$ erfüllt die Differentialgleichung
$f(z)=f'(z)$ in $\mathbb{C}$.

Zudem gilt: $f(0)=e^{0+i0}=e^0=1$.

Weiter folgt aus der Theorie der Differentialgleichung die Eindeutigkeit der Lösung.

Satz: $f(z)=e^z$ ist die einzige Funktion, die folgende Bedingungen erfüllt

1 f diff'bar in $\mathbb{R}$

2 $\forall_{x\in\mathbb{R}}:\ f(x)=f'(x)$

3 $f(0)=1$

Die folgenden Reglen lassen sich einfach nachprüfen mit Hilfe von: $e^z=e^x\cdot(\cos(y)+i\sin(y))$.

Dabei benutzen wir folgende Bezeichnung:

$S_n := \{z = x+i(y+2n\pi) \mid y\in(-\pi,\pi]\}$ heisst **Periodenstreifen** , $\dot{\mathbb{C}} := \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Regeln:

1 $|e^z| = e^x = e^{Re(z)}$

2 $Arg(e^z) = y = Im(z)$

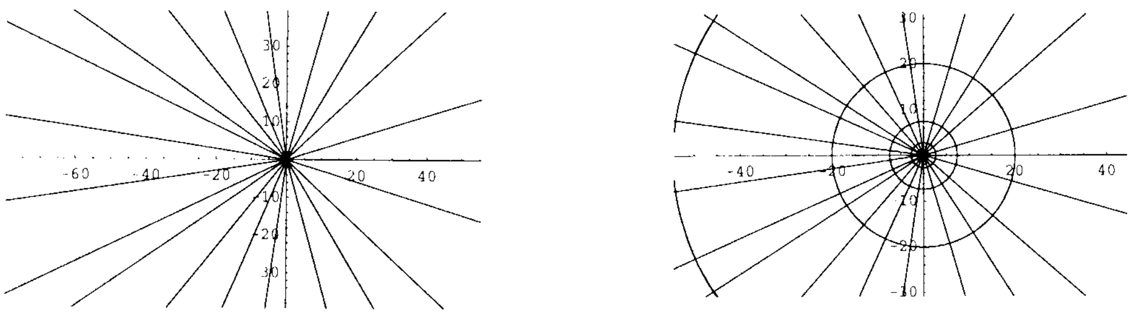
3 $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\cdot e^{z_2}$

4 $e^z = e^{z+i2n\pi} = e^z = e^z\cdot e^{i2n\pi}$

5 $S_n \overset{bji.}{\longmapsto} \dot{\mathbb{C}}$

$\{$Horizontale Geraden $\} \longmapsto \{$zentrische Strahlen $\}$

$\{$Vertikale Geraden $\} \longmapsto \{$zentrische Kreise $\}$



Wegen der Bijektivität von $f(z) = e^z = w$ auf $(S_n \times \dot{\mathbb{C}})$ existiert jeweils die Umkehrfunktion $f_n^{-1}(w) = z$, allerdings abhängig von n (Standard in der Literatur: $n = 0$).

Bemerkung:

Mit Hilfe des Begriffs der **Riemannschen Fläche** gelingt es, die Umkehrfunktion eindeutig zu machen. Dazu Unterscheiden wir verschiedene komplexe Bildebenen $\dot{\mathbb{C}}_n$ mit $f\,:\, S_n \longmapsto \dot{\mathbb{C}}_n$. Da der Rand der Streifen S_n auf $\mathbb{R}^{(-)}$ abgebildet wird, denkt man sich alle diese $\dot{\mathbb{C}}_n$ längs der negativen reellen Achse aufgeschnitten und dort mit den beiden Nachbarn $\dot{\mathbb{C}}_{n-1}$ und $\dot{\mathbb{C}}_{n+1}$ verklebt. Das entstehende Gebilde R (eine Riemannsche Fläche) gleicht dann einer Wendeltreppe (nahe beim Ursprung hinkt der Vergleich aber). Für $(\mathbb{C} \times R)$ ist dann f bijektiv.

Definition: Die eben besprochene Umkehrfunktion $f^{-1}\,:\,\dot{\mathbb{C}}_n \longmapsto S_n$ heisst **natürliche Logarithmusfunktion** $f^{-1}(w) = \ln(w) \longmapsto z$

Üblicherweise werden wir ln auf dem Standardstreifen S_0 betrachten.

Es ist: $f\,:\, z = x + i\,y \longmapsto f(z) = e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) = u(x,y) + i\,v(x,y) = w$, $r = |w| = e^x,\ \ Arg(w) = y$.
$\leadsto \quad f^{-1} : w = u + iv \longmapsto f^{-1}(w) = \ln(w) = z = x + i\,y$
mit $\ x = ln|w|,\ \ y = Arg(w) = \arctan(\frac{v}{u})$ $\quad\leadsto$

Satz:

Vor.:

$f(z) = e^z = w,\ \ z \in S_0$

Beh.:

$f_0^{-1}(w) = \ln(w) = \ln|w| + iArg(w) = \ln|e^z| + iArg(e^z) = z$

Bsp.: Sei $x \in \mathbb{R}^+$. $f_0^{-1}(-x) = \ln_0(-x) = \ln(x) + iArg(-x) = \ln(x) + i\pi$,
Speziell: $f_0^{-1}(-1) = \ln_0(-1) = \ln(1) + iArg(-1) = 0 + i\pi = i\pi$.

7.7 Trigonometrische Funktionen, Arkusfunktionen — Fonctions trigonométriques, fonctions circulaires inverses

Bekannt sind die Eulerschen Identitäten:

$$e^{\pm i\varphi} = \cos(\varphi) \pm i\sin(\varphi)$$

Damit lässt sich Sinus und Cosinus rein analytisch definieren, also losgelöst von Geometrie.

$$\leadsto \quad \sin(x) := \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2\,i},\ \ \cos(x) := \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},\ \ \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)},\ \ \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)},\ \ x \in \mathbb{R}$$

Diese Formeln lassen sich jetzt für komplexe z verallgemeinern. $\quad\leadsto\quad$ Sei $\ z \in \mathbb{C}$

Definition:
$$\sin(z) := \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2\,i},\quad \cos(z) := \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},$$
$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)},\quad \cot(z) = \frac{1}{\tan(z)},$$
$$\arcsin(w) = z \ \text{ für } \ w = \sin(z) \ \text{ u.s.w}$$

Bemerkung: Die im Reellen geltenden Regeln bleiben erhalten.

1 Differentiationsregeln
Z.B. $(\sin(z))'_z = \cos(z)$

2 Additionstheoreme

3 Regeln für Nullstellen

4 … u.s.w

Ein Beispiel :

Problem: Was ist das Bild des kartesischen Koordinatengitters unter der Cosinusfunktion?

$$\cos(z) = \cos(x+i\,y) = \frac{e^{i(x+iy)}+e^{-i(x+iy)}}{2} = \frac{e^{ix}\cdot e^{-y}+e^{-ix}\cdot e^{y}}{2}$$
$$= \frac{(\cos(x)+i\sin(x))\cdot e^{-y}+(\cos(-x)+i\sin(-x))\cdot e^{y}}{2}$$
$$= \frac{(\cos(x)+i\sin(x))\cdot e^{-y}+(\cos(x)-i\sin(x))\cdot e^{y}}{2} = \frac{\cos(x)\cdot(e^{y}+e^{-y})-i(\sin(x)\cdot(e^{y}-e^{-y}))}{2}$$
$$= \cos(x)\cdot\cosh(y)-i\sin(x)\sinh(y). \qquad \rightsquigarrow \qquad \cos(z) \widehat{=} \begin{pmatrix}\cos(x)\cdot\cosh(y)\\ \sin(x)\sinh(y)\end{pmatrix}$$

In der Regel sind somit die Bilder der horizontalen Geraden Ellipsen, die Bilder der vertikalen Geraden Hyperbeln.

7.8 Anwendungen — Applications

7.8.1 Idee — Idée

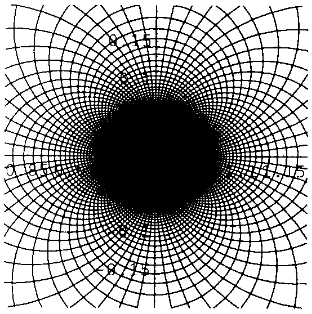
Oft gelingt es Probleme zu lösen, indem man die gegebene geometrisch komplizierte Situation konform in eine einfachere Situation abbildet. Wenn sich bei einer solchen bijektiven Abbildung die Problembedingungen einfach auf die neue Situation übertragen, kann man das Problem in der neuen Situation lösen und dann die Lösung zurückabbilden.

Z.B. soll der Potentialverlauf zwischen einem Fahrleitungsdraht und einer Brücke studiert werden. Nimmt man im Querschnitt die Brücke als Gerade und den Draht als Kreis an, so kann man eine konforme Abbildung konstruieren, die diese Situation auf zwei konzentrische Kreise abbildet. Dort ist der Potentialverlauf offensichtlich (Zentralfeld).

7.8.2 Smith–Diagramm — Diagramme de Smith

In der Elektrotechnik spielt die Möbiustransformation $\mathbb{C} \ni z \longmapsto w = f(z) = \dfrac{z-1}{z+1} \in \mathbb{C}$ eine wichtige Rolle. Das Bild des rechtwinkligen Koordinatennetzes der z–Ebene in der w Ebene heisst **Smith–Diagramm** (Smith-Chart).

f erzeugt vom rechtwinkligen Koordinatennetzes der z–Ebene in der w Ebene folgendes Bild (vgl. Fig.):



Das Bild der vertikalen Geraden der z–Ebene mit den Realanteilen $x = 0$ ist der Einheitskreis. Die Bilder aller andern Vertikalen sind Kreise, die im Einheitskreis drin liegen, diesen in $w = 1$ berühren und mit wachsendem $Re(z)$ kleiner werden. Die horizontalen Halbgeraden gehen in Kreislinien über, die die erwähnten Kreise senkrecht schneiden.

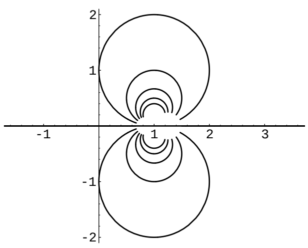
Es gilt: $$f(\frac{1}{z}) = \frac{\frac{1}{z} - 1}{\frac{1}{z} + 1} = \frac{1-z}{1+z} = -\frac{z-1}{1+z} = -f(z)$$

Konsequenz: Im Smidt–Diagramm kann man die Inversen einer komplexen Zahl z graphisch einfach durch Spiegelung an den Ursprung bestimmen. Es gilt: $f(\frac{1}{z}) = -f(z)$. $f(\frac{1}{z}) = -f(z)$.

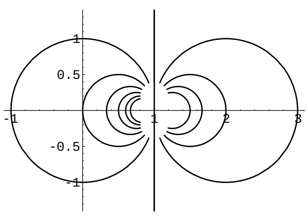
Konstruktion — Construction

Mit *Mathematica:*

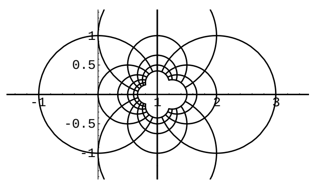
```
f[z_]:=(z-1)/(z+1);
z1[t_,a_]:= t + a I;
z2[t_,b_]:= b + t I;
u[z_]:={Re[f[z]],Im[f[z]]};

p1=ParametricPlot[Evaluate[Table[u[z1[t,a]],{a,-5,5}]],{t,-5,5}, AspectRatio->Automatic];
p2=ParametricPlot[Evaluate[Table[u[z2[t,a]],{a,-5,5}]],{t,-5,5}, AspectRatio->Automatic];
Show[p1,p2];
```



p1



p1



Show[p1,p2]

7.8.3 Joukowski–Profil — Profil de Joukowski

Wir studieren ein konkretes Beispiel: Nous étudions un exemple concret:

Gegeben sei in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ der Kreis: $t \longmapsto z(t) = \sqrt{0.97} \cdot e^{i \cdot t} + (-0.1 + 0.4\,i),\ t \in [0, 2\,\pi]$.

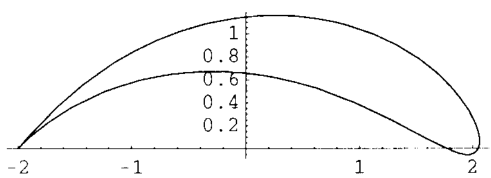
Betrachte dazu noch die komplexe Abbildung:

$$\varphi : z \longmapsto \varphi(z) = z + \frac{1}{z}.$$

Hiermit wird folgendes Bild der Kurve $z(t)$ definiert:

$$\varphi(z(t)) := w(t) = z(t) + \frac{1}{z(t)}$$

Die Kurve $w(t)$ in $\mathbb{C}$ zeigt ein stromlinienförmiges Profil.
Dieses Kurvenprofil spielt in der Aerodynamik (z.B. beim Tragflügel) oder bei Turbinenschaufeln eine Rolle. Es heisst *Joukowski–Profil.*



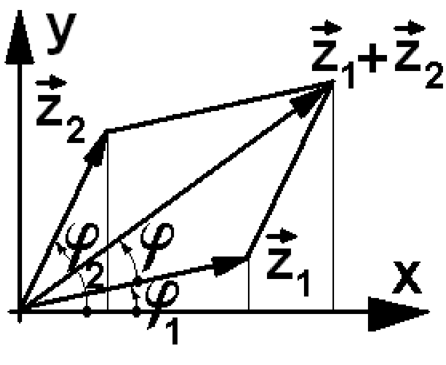
7.8.4 Zeigerdiagramme — diagrammes–vecteurs

In der Elektrotechnik ist es im Zusammenhang mit Wechselstrom üblich, den Strom I und die Spannung U mit Hilfe von **Zeigern** (Vektoren) in Form von komplexen Zahlen zu schreiben. Auf diese Weise lassen sich verschiedene Ströme uns Spannungen einfach addieren.

Bsp.: $I == I_0 \cos(\omega \cdot t + \varphi_I),\ \ U = U_0 \cos(\omega \cdot t + \varphi_U)$

$\leadsto$ Allgemein:

$$z_{Re} = z_0 \cos(\omega \cdot t + \varphi_0),\ \ z_{Im} = z_0 \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) \leadsto \ \vec{z} = \begin{pmatrix} z_0 \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) \\ z_0 \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) \end{pmatrix} \hat{=} z_0 \cdot e^{I\,\omega\, t + \varphi_0}$$



Zeiger / Vecteurs ou rayons

Sei

$\vec{z}_1 \hat{=} A_1 \cdot e^{I\,\omega\, t + \varphi_1}$
$\vec{z}_2 \hat{=} A_2 \cdot e^{I\,\omega\, t + \varphi_2}$
$\vec{z} \hat{=} A \cdot e^{I\,\omega\, t + \varphi}$

$\leadsto$ Es gilt:

$A = |\vec{z}_1 + \vec{z}_2|,$
$\varphi = \varphi_1 + \arccos(\dfrac{\langle \vec{z}_1, \vec{z}_1 + \vec{z}_2 \rangle}{|\vec{z}_1| \cdot |\vec{z}_1 + \vec{z}_2|})$

$\leadsto$ $A_1 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_1) + A_2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_2) =$

$$= |A_1 \begin{pmatrix} \cos(\omega \cdot t + \varphi_1) \\ \sin(\omega \cdot t + \varphi_1) \end{pmatrix} + A_2 \begin{pmatrix} \cos(\omega \cdot t + \varphi_2) \\ \sin(\omega \cdot t + \varphi_2) \end{pmatrix}| \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_1 + \arccos(\frac{\langle \vec{z}_1, \vec{z}_1 + \vec{z}_2 \rangle}{|\vec{z}_1| \cdot |\vec{z}_1 + \vec{z}_2|}))$$

7.9 Darstellung komplexer Funktionen — Représentation de fonctions complexes

7.9.1 Beispiel einer Kurve — Exemple d'une courbe

Geg.:

$$z(t) := \frac{1}{1 + i\,t},\;\; g(t) = 1 + i\,t,\;\; z(t) := \frac{1}{g(t)}$$

Code: *(Mathematica)*

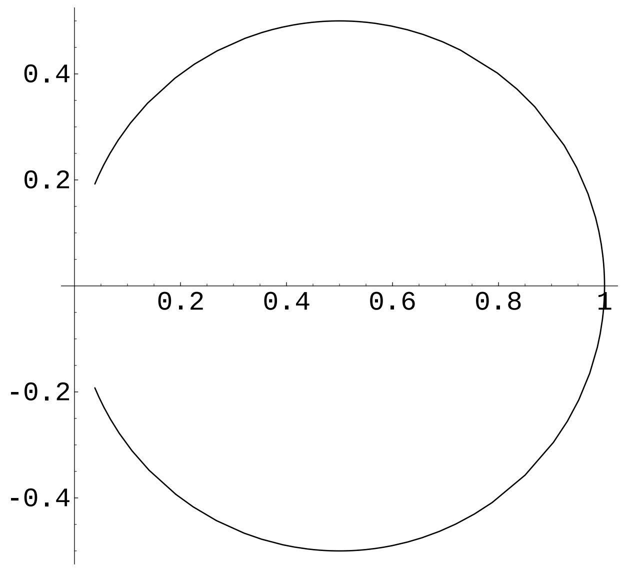
```
z[t_] := 1/(1 + I t);
ParametricPlot[{Re[z[t]], Im[z[t]]}, {t, -5, 5}, AspectRatio -> Automatic];
amplitude[t_] := Norm[z[t]];
Plot[amplitude[t], {t, -5, 5}];
Plot[Arg[z[t]], {t, -5, 5}];
```

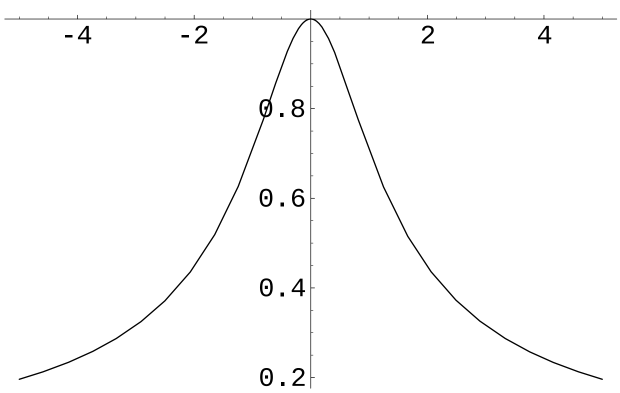
Output: *(Mathematica)*

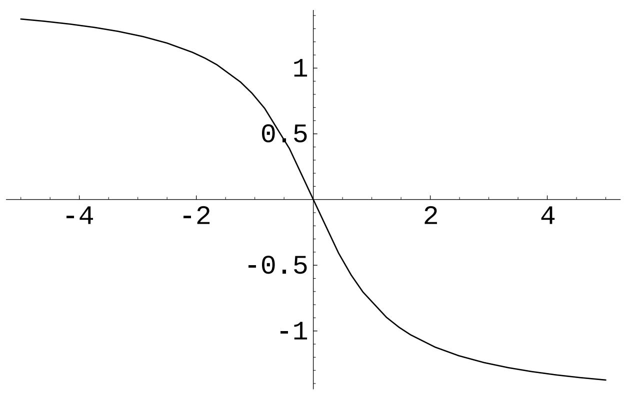
Rechts: Die Funktionskurve im Komplexen.

Unten links: Der Betrag des Funktionswerts.

Unten rechts: Das Argument des Funktionswerts.







7.9.2 Beispiel einer rationalen Funktion — Exemple: Fonction rationnelle

Geg.:

$$f(z) := \frac{2z^2 - z}{z^3 - z^2 + 1}$$

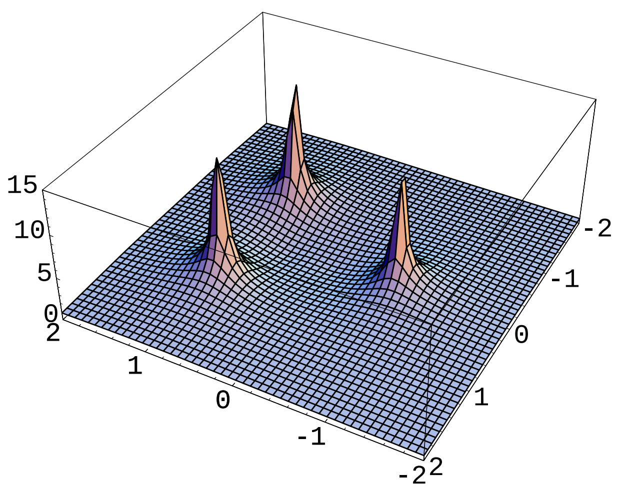
Code: *(Mathematica)*

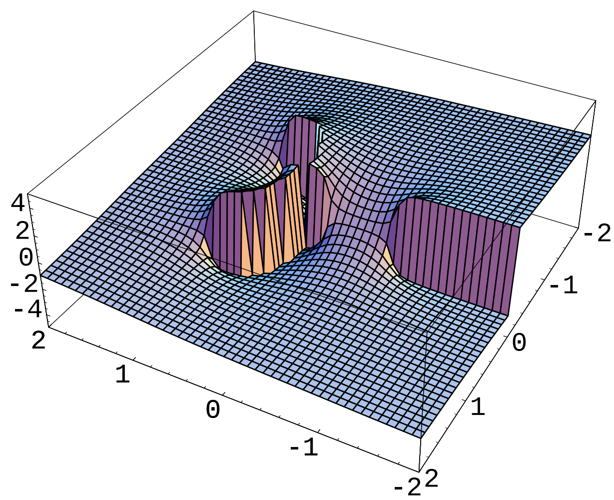
```
f[z_] := (2 z^2 - z)/(z^3 - z^2 + 1)
z[s_, t_] := s + I t;
u[s_, t_] := Norm[f[z[s, t]]];
w[s_, t_] := Arg[f[z[s, t]]];
Plot3D[u[s, t], {s, -2, 2}, {t, -2, 2},
    PlotPoints -> 50, PlotRange -> {0, 15}, ViewPoint -> {-1.3, +2.4, 2.}];
Plot3D[w[s, t], {s, -2, 2}, {t, -2, 2},
    PlotPoints -> 50, PlotRange -> {-5, 5}, ViewPoint -> {-1.3, +2.4, 2.}];
Plot3D[Re[f[z[s, t]]], {s, -2, 2}, {t, -2, 2},
     PlotPoints -> 50, PlotRange -> {-5, 5}, ViewPoint -> {-1.3, +2.4, 2.}];
Plot3D[Im[f[z[s, t]]], {s, -2, 2}, {t, -2, 2},
     PlotPoints -> 50, PlotRange -> {-5, 5}, ViewPoint -> {-1.3, +2.4, 2.}];
```

Output: *(Mathematica)*

Unten links: Der Betrag des Funktionswerts.

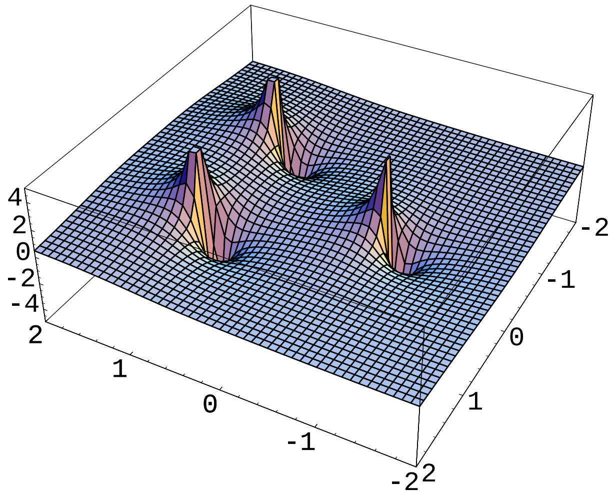
Unten rechts: Das Argument des Funktionswerts.

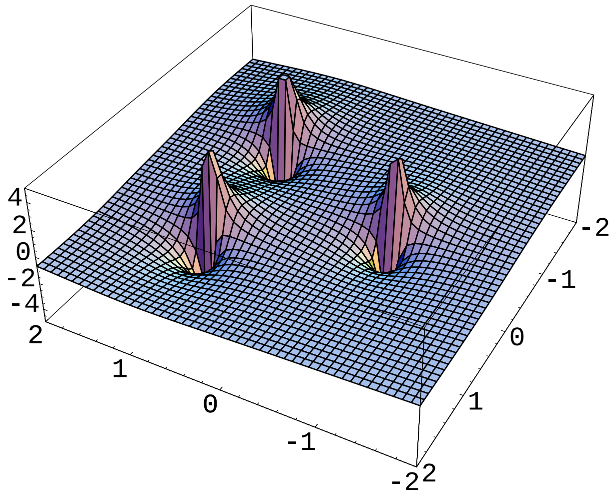




Unten links: Der Realanteil des Funktionswerts.

Unten rechts: Der Imaginäranteil des Funktionswerts.


4
2
0
-2
-4
2
1
0
-1
-2
2
1
0
-1
-2


4
2
0
-2
-4
2
1
0
-1
-2
2
1
0
-1
-2

Kapitel • Chapitre 8

Lineare Gleichungssysteme — Systèmes d'équations linéaires

8.1 Die Struktur des Lösungsraum — La structure de l'espace de solutions

8.1.1 Lineare Gleichung — Equation linéaire

Bekanntlich hat eine lineare Gleichung mit m Unbekannten die Form

$n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + \ldots + n_m \cdot x_m = k$ oder $n_0 \cdot 1 + n_1 \cdot x_1 + \ldots + n_m \cdot x_m = 0, \;\; k = -n_0$,
$m \in \mathbb{N}, \;\; \forall_i : \;\; n_i \neq 0$ (sonst käme x_i nicht vor .

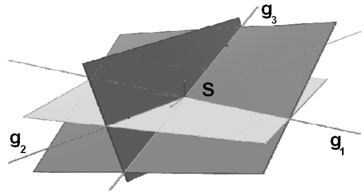
Mit Hilfe des Skalarproduktes kann man schreiben:

$$n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + \ldots + n_m \cdot x_m = \langle \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \rangle = \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = k, \;\; \vec{n} \text{ fix} .$$

Geometrische Bedeutung der Lösungsmenge $\{\vec{x}\} = \mathbb{L}$

Für $m = 2$ ist $\mathbb{L}$ geometrisch bekanntlich[3] eine Gerade, für $m = 3$ eine Ebene, für $m > 3$ nennen wir das Gebilde **Hyperebene**. $\rightsquigarrow$ **Definition!**

Mehrere Gleichungen bilden ein **System**.



$$\left| \begin{array}{rcl} \langle \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{x} \rangle & = & k_1 \\ & \vdots & \\ \langle \overrightarrow{n_j}, \overrightarrow{x} \rangle & = & k_j \end{array} \right|$$

$$|\vec{n}| = | \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_m \end{pmatrix} | = 1 \;\Rightarrow\; k = d. \qquad \text{Sei } \vec{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Einfluss von $\vec{n}$, k in einer Gleichung:

[3] Vgl. Hess'sche Normalform (*HNF*)

1 $\forall_{i\in\{1,\ldots,j\}}\ \vec{n}_i = \vec{0} \ \Rightarrow\ \vec{k} = \vec{0} \ \Rightarrow\ \mathbb{L} = \mathbb{R}^m$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\ \vec{k} \neq \vec{0} \ \Rightarrow\ \mathbb{L} = \{\}$

2 $\exists_{i\in\{1,\ldots,j\}}\ \vec{n}_i \neq \vec{0} \ \Rightarrow$ **Definitionen:**
$\vec{k} = \vec{0}$: **Homogene** Gleichung resp. **homogenes** System $\rightsquigarrow\ \vec{n}_i \perp \vec{x}$
$\vec{k} \neq \vec{0}$: **Inhomogene** Gleichung resp. **inhomogenes** System $\rightsquigarrow\ \vec{n}_i \not\perp \vec{x}$

8.1.2 Lineare Mannigfaltigkeit — Variété linéaire

Sei $\quad P_{inh} :\ \langle \vec{n}, \vec{x}\rangle = k,\ \ P_{hom} :\ \langle \vec{n}, \vec{x}\rangle = 0.\ \ (P \rightsquigarrow$ 'Problem')

⊘ Seien $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ beliebige Lösungen von P_{inh} :
$\langle \vec{n}, \vec{x}\rangle = k$. Subtrahiere die beiden Gleichungen
$\Rightarrow\ \vec{x}_0 := \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ Lösung von $P_{inh} :\ \langle \vec{n}, \vec{x}\rangle = 0$.
Wir sagen: Die Differenz zweier „**inhomogener** Lösungen" ist eine „**homogene** Lösung".

⊘ Seien $\vec{x}_1$ inhomogene Lösung ,
$\vec{x}_0$ homogene Lösung $\rightsquigarrow\ \ \langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{x_1}\rangle = k,\ \ \langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{x_0}\rangle = 0$
$\Rightarrow\ \langle \vec{n}, (\vec{x}_1 \pm \vec{x}_0)\rangle = k \rightsquigarrow\ \ \vec{x}_1 \pm \vec{x}_0$ inhomogene Lösung .

Konsequenz:

Seien $\quad \vec{x}_0 \in \mathbb{L}_{hom}$ beliebig ,
$\vec{x}_1 \in \mathbb{L}_{inh}$ fix $\ \rightsquigarrow\quad M = \{\vec{x}_2 = \vec{x}_1 + \vec{x}_0\} \subseteq \mathbb{L}_{inh}$.

Eine solche fix gewählte Lösung wie eben beschrieben nennen wir **partikuläre** Lösung der inhomogenen Gleichung.

⊘ **Problem:** Welche Beziehung gilt? — $\quad M \subset \mathbb{L}_{inh}$ oder $\ M = \mathbb{L}_{inh}$?

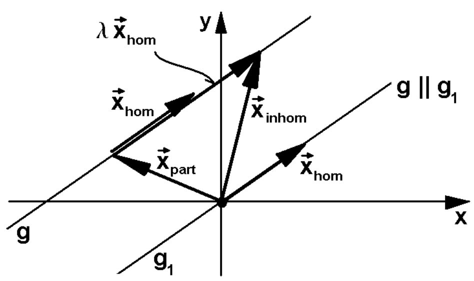
Sei $\quad \vec{x}_{part} = \vec{x}_1,\ \ \vec{x}_3 \in \mathbb{L}_{inh}\ \wedge\ \vec{x}_3 \notin M.\ \Rightarrow\ (\vec{x}_3 - \vec{x}_{part}) = \vec{x}_h \in \mathbb{L}_{hom}$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow\ \vec{x}_3 = (\vec{x}_{part} + \vec{x}_h) \in M \rightsquigarrow$ Widerspruch! .

Satz:

$$\mathbb{L}_{inh} = \{\vec{x} \mid \vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{x}_1,\ \ \vec{x}_0 \in \mathbb{L}_{hom}\ \wedge\ \vec{x}_1 = \vec{x}_{part} \in \mathbb{L}_{inh} \text{ fix } \}$$

Symbol: $\mathbb{L}_{inh} = \mathbb{L}_{hom}\ '{+}'\ \vec{x}_{part}$

Bsp.:



$\vec{x} = \lambda\vec{x}_0 + \vec{x}_1 = \lambda\vec{x}_0 + \vec{x}_{part}$
Z.B. Gleichung
$2x - 3y = -6,\ \ \mathbb{L} = ?$
$\rightsquigarrow$ Parametergleichung der Geraden

$\vec{x}_{part}$: $\quad$ Wähle
$x = 0\ \Rightarrow\ y = 2,\ \ \vec{x}_{part} = \binom{0}{2}$

$\vec{x}_{hom}$: $2x - 3y = 0$: $\quad$ Wähle
$x = 3\lambda\ \Rightarrow\ y = 2\lambda\ \Rightarrow\ \vec{x}_{hom} = \lambda\binom{3}{2}$

$\rightsquigarrow\quad \vec{x}_{inh} = \vec{x}_{part} + \vec{x}_{hom} = \binom{0}{2} + \lambda\binom{3}{2}$

Allgemeiner: $\underline{\vec{x}_{hom} \text{ berechnen:}}$

$n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + \ldots + n_m \cdot x_m = 0, \ \forall_i : \ n_i \neq 0$
$\leadsto$ Man kann $m-1$ der Unbekannten x_i frei wählen, die letzte dann eindeutig berechnen. .

$\triangleright$ Sei $x_1 = 1, \ x_2 = ?, \ x_3 = x_4 = \ldots = x_m = 0 \ \Rightarrow \ n_1 \cdot 1 + n_2 \cdot x_2 = 0, \ x_2 = -\frac{n_1}{n_2}$
$\leadsto \ \vec{x}_{1_{hom}} = (1, -\frac{n_1}{n_2}, 0, \ldots, 0)^T$
$\triangleright$ Sei $x_1 = 1, \ x_2 = 0, \ x_3 = ?, \ x_4 = \ldots = x_m = 0 \ \Rightarrow \ n_1 \cdot 1 + n_3 \cdot x_3 = 0, \ x_3 = -\frac{n_1}{n_3}$
$\leadsto \ \vec{x}_{2_{hom}} = (1, 0, -\frac{n_1}{n_3}, 0, \ldots, 0)^T$

$\vdots$

$\triangleright$ Sei $x_1 = 1, \ x_2 = x_3 = \ldots = x_{m-1} = 0, \ x_m = ? \ \Rightarrow \ n_1 \cdot 1 + n_m \cdot x_m = 0$
$\leadsto \ x_m = -\frac{n_1}{n_m}, \ \vec{x}_{m-1_{hom}} = (1, 0, \ldots, 0, -\frac{n_1}{n_{m-1}})^T$

$$\vec{x}_{hom} = \lambda_1 \vec{x}_{1_{hom}} + \lambda_2 \vec{x}_{2_{hom}} + \ldots + \lambda_{m-1} \vec{x}_{m-1_{hom}} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{n_1}{n_2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_{m-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{n_1}{n_m} \end{pmatrix} \leadsto$$

Resultat:

Satz:

Vor.:

$$\langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = \langle \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \end{pmatrix} \rangle = n_1 \cdot x_1 + \ldots + n_j \cdot x_j = 0, \ \forall_{i=1,\ldots,j} \, n_i \neq 0$$

Beh.:

$$\mathbb{L}_{hom} = \{\vec{x}_{hom}\} = \text{Vektorraum der Dimension } m-1, \ (\vec{n} \perp \vec{x}).$$

Zum Beweis: $(\mathbb{L}_{hom} = VR)$

1 $\vec{x}_{hom} \in \mathbb{L}_{hom} \ \Rightarrow \ \forall_i \, \lambda_i \, \langle \vec{n}_i, \vec{x}_{hom} \rangle = 0 \ \Rightarrow \ \forall_i \, \langle \vec{n}_i, \lambda_i \, \vec{x}_{hom} \rangle = 0 \quad \Rightarrow \ \lambda_i \, \vec{x}_{hom} \in \mathbb{L}_{hom}$

2 $\vec{x}_{hom,1}, \vec{x}_{hom,2} \in \mathbb{L}_{hom} \ \Rightarrow \ \forall_i \, \langle \vec{n}_i, \vec{x}_{hom,1} \rangle = 0 \ \wedge \ \langle \vec{n}_i, \vec{x}_{hom,2} \rangle = 0$
$\Rightarrow \ \forall_i \, \langle \vec{n}_i, \vec{x}_{hom,1} + \vec{x}_{hom,2} \rangle = 0 \ \Rightarrow \ \vec{x}_{hom,1} + \vec{x}_{hom,2} \in \mathbb{L}_{hom}$

3 $Dim(\mathbb{L}_{hom}) = n \ \Rightarrow \ \forall_{\vec{x}} : \ \vec{x} \in \mathbb{L} \ \leadsto$ Widerspruch!

$\vec{x}_{part}$ berechnen :

$n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + \ldots + n_m \cdot x_m = k.$ Z.B. wähle:

$$x_1 = \ldots = x_{m-1} = 0 \ \Rightarrow\ n_m \cdot x_m = k, \ \ldots,\ x_m = \frac{k}{n_m} \ \Rightarrow\ \vec{x}_{part} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{k}{n_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{n_0}{n_m} \end{pmatrix}$$

Konsequenz:
$\mathbb{L}_{inh} = \{\vec{x}_{part} + \vec{x}_{hom} \mid \vec{x}_{hom} \in VR,\ Dim(VR) = m-1,\ \vec{x}_{part} = \text{fix}\}$

$\leadsto$ = um $\vec{x}_{part}$ verschobene Hyperebene

$\leadsto$ "$\mathbb{L}_{inh} = \vec{x}_{part} + \mathbb{L}_{hom}$", $\mathbb{L}_{hom} = VR \leadsto$

Definition: $\mathbb{L}_{inh}$ heisst **lineare Mannigfaltigkeit** der Dimension $m-1$ oder „Lösungsraum“.

8.1.3 Exkurs: Büschel, Bündel — Traité supplémentaire: Faisceau, gerbe

Sei $\mathbb{L}_1 : \langle \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{x} \rangle = k_1,\ \mathbb{L}_\lambda : \langle \lambda\vec{n}_1, \vec{x}\rangle = \lambda k \ \Rightarrow\ \mathbb{L}_1 \subseteq \mathbb{L}_\lambda.$
($\mathbb{L}_1 \neq \mathbb{L}_\lambda$ für $\lambda = 0$)

Sei $\mathbb{L}_1 : \langle \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{x} \rangle = k_1,\ \mathbb{L}_2 : \langle \overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{x} \rangle = k_2 = k_2.$ Sei $\vec{x}_0 \in \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$
$\Rightarrow\ \vec{x}_0 \in \mathbb{L}_3,\ \mathbb{L}_3 :\ \lambda(\langle \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{x_0} \rangle - k_1) + \mu(\langle \overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{x_0} \rangle - k_2) = 0 \ \Rightarrow\ \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \subseteq \mathbb{L}_3$

Seien $\mathbb{L}_1,\ \mathbb{L}_2$ Geraden (a) resp. Ebenen (b)
$\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$ Punkt (a) resp. Gerade (b) $\leadsto$

Definition: { Geraden } durch $P = \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$ heisst **Geradenbüschel** .
{ Ebenen } durch $P = \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$ heisst **Ebenenbüschel** .

Parametergleichung des Büschels: :
Sei $\vec{x}_0 \in \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2.$ $\vec{x}_0$ erfüllt :

$$\mathbb{L}_{\lambda,\mu} :\ \lambda(\langle \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{x_0} \rangle - k_1) + \mu(\langle \overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{x_0} \rangle - k_2) = \langle \underbrace{\lambda\vec{n}_1 + \mu\vec{n}_2}_{\vec{n}}, \vec{x}_0\rangle - \underbrace{(\lambda k_1 + \mu k_2)}_{v} = 0,$$

$\vec{n}$ Normalenvektor , v: 'Verschiebung' .

Entsprechend seien:
$\mathbb{L}_1,\ \mathbb{L}_2,\ \mathbb{L}_3$ Ebenen mit $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \cap \mathbb{L}_3 = \{P\}$

$\Rightarrow\ \mathbb{L}_{\lambda,\mu,\nu} :\ \lambda(\langle \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{x_0} \rangle - k_1) + \mu(\langle \overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{x_0} \rangle - k_2) + \mu(\langle \overrightarrow{n_3}, \overrightarrow{x_0} \rangle - k_3) = 0$
$\leadsto$ Parametergleichung der Ebenen durch P.

Definition: $\mathbb{L}_{\lambda,\mu,\nu}$ heisst **Ebenenbündel** .
Entsprechend bei Geraden **Geradenbündel** .

8.1.4 Verwandlung in eine homogene Gleichung „höherer Ordnung“ — Transformation en équation homogène ”d’ordre supérieur”

Betrachte: $\langle \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \rangle = \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = k := -n_0$

$$\Leftrightarrow 0 = n_0 \cdot 1 + n_1 \cdot x_1 + \ldots + n_m \cdot x_m = \langle \begin{pmatrix} n_0 \\ n_1 \\ \vdots \\ n_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \rangle := \langle \overrightarrow{n^*}, \overrightarrow{x^*} \rangle$$

mit $\vec{n}^{\,*} := \begin{pmatrix} n_0 \\ n_1 \\ \vdots \\ n_m \end{pmatrix}, \vec{x}^{\,*} := \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ wird die Gleichung zu: $\langle \overrightarrow{n^*}, \overrightarrow{x^*} \rangle = 0, \ \vec{n}^{\,*}, \vec{x}^{\,*} \in \mathbb{R}^{m+1}, \ x_0 = 1$

Nun führen wir für unseren „Hausgebrauch“ die folgenden Sprechweisen ein:

Definition: Die Anzahl Unbekannter m in einer linearen Gleichung nennen wir **Ordnung** der Gleichung.

$\vec{n}^{\,*}, \vec{x}^{\,*}$ nennen wir **homogene Erweiterungen** von $\vec{n}, \vec{x}$ $(x_0 = 1)$

Dabei gilt:

$\langle \overrightarrow{n^*}, \overrightarrow{x^*} \rangle = 0 \overset{bji.}{\longmapsto} \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = k = -n_0.$ Jedoch: $\langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = k = -n_0 \overset{\neg bji.}{\longmapsto} \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = 0.$

8.1.5 Lineare Gleichungsysteme — Systèmes d’équations linéaires

Wir lenken unser Augenmerk auf die folgenden Eigenschaften von Gleichungen und Gleichungspaaren:

1) Sei $\lambda \neq 0$. $\langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = k \ \Leftrightarrow \langle \lambda \cdot \vec{n}, \vec{x} \rangle = \lambda \cdot k \ \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{\lambda n^*}, \overrightarrow{x^*} \rangle = 0 \leadsto$
   Eine lineare Gleichung kann man koeffizientenweise mit einer Zahl $\neq 0$ multiplizieren, ohne dass der Lösungsraum $\mathbb{L}$ ändert.

2) Sei $\mathbb{L}_1 : \langle \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{x} \rangle = k$ *resp.* $\langle \overrightarrow{n_1^*}, \overrightarrow{x^*} \rangle = 0 \ \wedge \ \mathbb{L}_2 : \langle \overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{x} \rangle = k_2$ *resp.* $\langle \overrightarrow{n_2^*}, \overrightarrow{x^*} \rangle = 0 \ \Rightarrow \ \mathbb{L}_3 : \langle \vec{n}_1 \pm \vec{n}_2, \vec{x} \rangle = k_1 \pm k_2$ *resp.* $\langle \vec{n}_1^* \pm \vec{n}_2^*, \vec{x}^{\,*} \rangle = \langle \vec{n}_3^*, \vec{x}^{\,*} \rangle = 0$

   $\leadsto \ \vec{x}_0 \in \mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \ \Rightarrow \ \vec{x}_0 \in \mathbb{L}_3 \ \Rightarrow \ \mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \subseteq \mathbb{L}_3$
   $\Rightarrow \ \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \subseteq \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_3$ *resp.* $\mathbb{L}_2 \cap \mathbb{L}_3$

   Problem: Z.B. :
   $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \overset{?}{=} \mathbb{L}_2 \cap \mathbb{L}_3$
   Sei $\vec{x}_0 \in \mathbb{L}_2 \cap \mathbb{L}_3 \ \Rightarrow \ \langle \overrightarrow{n_2^*}, \overrightarrow{x_0^*} \rangle = 0 \ \wedge \ \langle \overrightarrow{n_3^*}, \overrightarrow{x_0^*} \rangle = \langle \vec{n}_1^* - \vec{n}_2^*, \vec{x}_0^* \rangle = 0$
   Addition $\Rightarrow \ \langle \overrightarrow{n_1^*}, \overrightarrow{x_0^*} \rangle = 0 \ \Rightarrow \ \vec{x}_0 \in \mathbb{L}_1 \leadsto \quad \mathbb{L}_2 \cap \mathbb{L}_3 \subseteq \mathbb{L}_1$
   $\Rightarrow \ \mathbb{L}_2 \cap \mathbb{L}_3 \subseteq \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \ \Rightarrow \ \mathbb{L}_2 \cap \mathbb{L}_3 = \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2.$

   Ebenso findet man: $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_3 = \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$
   Resultat: Ersetzt man die eine von zwei Gleichungen durch die Summe oder die Differenz der beiden Gleichungen, so ändert sich die Lösungsmenge nicht.

Für die eben besprochenen Ersetzungen haben wir einen Namen:

Definition: Ersetzt man eine Gleichung durch ein Vielfaches oder eine von zwei Gleichungen durch die Summe oder Die Differenz der beiden, so nennen wir diese Ersetzungen **Elementarsubstitutionen**.

Satz: Wendet man auf ein Gleichungssystem Elementarsubstitutionen an, so ändert die Lösungsmenge nicht.

Unter „Lösungsmenge eines Systems" verstehen wir natürlich die Schnittmenge der Lösungsmengen der einzelnen Gleichungen (gemeinsame Lösungsmenge). $\leadsto$

$$\left|\begin{array}{rcl} \mathbb{L}_1 : \langle \overrightarrow{n_1^*}, \overrightarrow{x^*} \rangle & = & 0 \\ & \vdots & \\ \mathbb{L}_j : \langle \overrightarrow{n_j^*}, \overrightarrow{x^*} \rangle & = & 0 \end{array}\right| \quad \Rightarrow \mathbb{L}_{Syst} = \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \cap \ldots \cap \mathbb{L}_j$$

Für die weiteren Betrachtungen brauchen wir den Begriff der linearen Unabhängigkeit von Gleichungen:

Definition: Ein System von linearen Gleichungen heisst **linear unabhängig** (*l.u.*) $\Leftrightarrow$ die zugehörige Menge $\{\vec{n}_i^*\}$ ist linear unabhängig.
Andernfalls heisst das System linear **abhängig** (*l.a.*)

Konsequenz: Aus den bei den Vektorraumbasen erworbenen Kenntnissen können wir hier folgern, dass man in einem System linear abhängige Gleichungen reduzieren kann, bis nur noch linear unabhängige übrigbleiben, ohne den Lösungsraum zu verändern.
In diesem Zusammenhang definieren wir:

Definition: **Rang r** ($Rang(S)$) eines linearen Gleichungssystems
$S :=$ Anzahl linear unabhängiger Gleichungen des Systems
$= |\{\vec{n}_i^* \mid i = 1, \ldots, j\}|$

Dabei ist $r = Rang(S_{inh})$, $r_0 = Rang(S_{hom})$ der Rang des zugehörigen homogenen Systems S_{hom}.
Es gilt folgender Satz:

Satz:

1 $r \geq r_0$

2 S *l.u.* $\Rightarrow$ S^* *l.u.* $\quad (\{\vec{n}_i\}$ *l.u.* $\Rightarrow$ $\{\vec{n}_i^*\}$ *l.u.*$)$

3 $r > r_0 \Rightarrow \mathbb{L}_{inh} = \{\}$

Bemerkung zum Beweis:

Ad (2): $\vec{n}_i$ kann als Projektion von $\vec{n}_i^*$ ($Dim = m + 1$) in einen Unterraum mit $Dim = m$ aufgefasst werden. Wären die $\vec{n}_i^*$ *l.a.*, so würde das auch für die Projektionen $\vec{n}_i$ gelten (denn Linearkombinationen bleiben auch beim Projizieren Linearkombinationen).

Ad (1): Das ist eine Konsequenz von (2).

Ad (3): Später ist diese Behauptung direkt mit "Gauss–Jordan" nachvollziehbar.

Sei $r > r_0$, $\{\vec{n}_i\}$ *l.a.* und $\{\vec{n}_i^*\}$ *l.u.*
(ev. nach einer Reduktion.)
Forme $\vec{n}_i$ so lange um, bis $\vec{n}_1$ *l.a.* von $\vec{n}_2$ ist. $\leadsto$ $\vec{n}_1 = \lambda\vec{n}_2$.
Wegen $\{\vec{n}_i^*\}$ *l.u.* muss aber gelten: $\vec{n}_1^* \neq \lambda\vec{n}_2^*$.
Sei $\vec{x}_0 \in \mathbb{L}_S \neq \{\}$. $\leadsto$ $\langle\overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{x_0}\rangle = k_2 \,\wedge\, \langle\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{x_0}\rangle = k_1$
$\Rightarrow\ \langle\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{x_0}\rangle = \langle\overrightarrow{\lambda n_2}, \overrightarrow{x_0}\rangle = \lambda k_2 = k_1 \leadsto\ \langle\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{x_0}\rangle = k_1 = \lambda k_2 = \langle\overrightarrow{\lambda n_2}, \overrightarrow{x_0}\rangle$
$\Rightarrow\ \vec{n}_1^* = \lambda \cdot \vec{n}_2^* \ \Rightarrow\ \{\vec{n}_i^*\}$ *l.a.* $\leadsto$ Widerspruch!

Bsp.:

S: $1 \cdot x + 2 \cdot y - 2 \cdot 1 = 0,\ 0 \cdot x + 0 \cdot y - 2 \cdot 1 = 0 \leadsto$ $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ *l.a.*, $\vec{n}_1^*, \vec{n}_2^*$ *l.u.*, $\mathbb{L} = \{\}$.

8.2 Die Eliminationsmethode von Gauss–Jordan zur Lösung von Gleichungssystemen — La méthode d'élimination de Gauss–Jordan pour résoudre les systèmes d'équations

8.2.1 Illustration an einem Lehrbeispiel — Illustration par un exemple

Bisher erwähnte Lösungsmethoden für Gleichungssysteme: Cramer, Austauschverfahren, „probieren."

Neue Idee oder Strategie: Versuche das Gleichungssystem mit Hilfe von Elementarsubstitutionen und Umstellungen der Gleichungen solange umzuformen, bis die Lösung sichtbar wird. Ziel: „Dreiecksform" oder „Diagonalform".

Hilfsmittel sind die folgenden Sätze:

1 In einem Gleichungssystem darf man die Reihenfolge der Gleichungen (Zeilen) beliebig verändern, ohne dass sich $\mathbb{L}$ ändert.

2 In einem Gleichungssystem darf man die Reihenfolge der Variablenterme $a_k \cdot x_k$ (Spalten) beliebig verändern, ohne dass sich $\mathbb{L}$ ändert. (Man muss aber die Variablennamen eindeutig kennzeichnen.)

3 In einem Gleichungssystem darf man eine Gleichung durch ihr λ–faches ersetzen ($\lambda \neq 0$), ohne dass sich $\mathbb{L}$ ändert.
$\leadsto$ $\{\vec{n}_1^*, \vec{n}_2^*\}$ *l.u.* $\Rightarrow$ $\{\lambda\vec{n}_1^*, \vec{n}_2^*\}$ *l.u.*

4 In einem Gleichungssystem darf man eine Gleichung durch die Summe der Gleichung mit einer andern Gleichung des Systems ersetzen, ohne dass sich $\mathbb{L}$ ändert. $\leadsto$
$\{\vec{n}_1^*, \vec{n}_2^*\}$ *l.u.* $\Rightarrow$ $\{\vec{n}_1^*, \vec{n}_1^* + \vec{n}_2^*\}$ *l.u.*

5 Statt mit den Vektoren $\vec{n}_1^*$ kann man auch mit ihren transponierten $(\vec{n}_1^*)^T$ arbeiten.

Bsp.:
Zu lösen ist das nebenstehende Gleichungssystem. An Stelle des Systems arbeiten wir nur mit den Zeilenvektoren $(\vec{n}_1^*)^T$:

$$3x + y - z = 11 \quad (8.1)$$
$$x + 3y - z = 13 \quad (8.2)$$
$$x + y - 3z = 11 \quad (8.3)$$

Reduzierte Schreibweise: Übernehme nur die Koeffizienten (die bei diesem speziellen System besonders sind):

$$\begin{array}{rrrrl} 3 & 1 & -1 & 11 & I_1 \\ 1 & 3 & -1 & 13 & II_1 \\ 1 & 1 & -3 & 11 & III_1 \\ \hline \end{array}$$

$I_2 = III_1$
$II_2 = II_1 - III_1$
$III_2 = I_1 + (-3) \cdot III_1$
(Elementarsubst.)

$$\begin{array}{rrrrl} 1 & 1 & -3 & 11 & I_2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & II_2 \\ 0 & -2 & 8 & -22 & III_2 \\ \hline \end{array}$$

$I_3 = I_2$
$II_3 = (\frac{1}{2}) \cdot II_2$
$III_3 = (II_2 + III_2) \cdot \frac{1}{10}$
($\leadsto$ $\triangle$–Form)

$$\begin{array}{rrrrl} 1 & 1 & -3 & 11 & I_3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & II_3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & III_3 \\ \hline \end{array}$$

$I_4 = I_3 - II_3$
$II_4 = II_3$
$III_4 = III_3$

$$\begin{array}{rrrrl} 1 & 0 & -4 & 10 & I_4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & II_4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & III_4 \\ \hline \end{array}$$

$I_5 = I_4 + 4 \cdot III_4$
$II_5 = II_4 - III_4$
$III_5 = III_4$
($\leadsto$ Diagonalform)

$$\begin{array}{rrrrl} 1 & 0 & 0 & 2 & I_5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & II_5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & III_5 \\ \hline \end{array}$$

$\leadsto$ Resultat: $x = 2,\ y = 3,\ z = -2$

8.2.2 Allgemeine Lösung — Solution générale

Gelöst werden soll das folgende allgemeine Gleichungssystem durch Überführung in Diagonalform, wie eben gesehen. Wir setzen ein linear unabhängiges System voraus.

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \vdots \ldots + \ldots \vdots \ldots \vdots \ldots + \ldots \vdots & = & \vdots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jm}x_m & = & b_j \end{array}$$

Wieder schreiben wir nur die Koeffizienten, lassen alle unnötigen Zeichen weg. Zudem seien die Gleichungen immer in einer Reihenfolge, so dass die Diagonalelemente $\neq 0$ sind. Wegen der linearen Unabhängigkeit muss das möglich sein.
$\leadsto \quad a_{kk} \neq 0$

$$\begin{array}{llll|ll}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} & b_1 & I_1 \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} & b_2 & II_1 \\
\vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & K_1 \\
a_{j1} & a_{j2} & \ldots & a_{jm} & b_j & J_1
\end{array}$$

oder

$$\begin{array}{llll|ll}
a_{11_1} & a_{12_1} & \ldots & a_{1m_1} & b_{1_1} & I_1 \\
a_{21_1} & a_{22_1} & \ldots & a_{2m_1} & b_{2_1} & II_1 \\
\vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & K_1 \\
a_{j1_1} & a_{j2_1} & \ldots & a_{jm_1} & b_{j_1} & J_1
\end{array}$$

Ersetze nun I_1 durch $\frac{1}{a_{11}} \cdot I_1$ und allgemein K_1 durch $K_1 - \frac{a_{k1}}{a_{11}} \cdot I_1$ (wenige Elementarumformungen). Dadurch wird a_{11} zu 1 und a_{k1} zu 0. $\leadsto \quad I_2, \ \ldots, \ K_2, \ \ldots$.

$$\begin{array}{llll|ll}
1 & a_{12_2} & \ldots & a_{1m_2} & b_{1_2} & I_2 \\
0 & a_{22_2} & \ldots & a_{2m_2} & b_{2_2} & II_2 \\
\vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & K_2 \\
0 & a_{j2_2} & \ldots & a_{jm_2} & b_{j_2} & J_2
\end{array}$$

Im nächsten Schritt verfahren wir mit der zweiten Spalte genauso wie mit der ersten. a_{22_2} übernimmt jetzt die Rolle von a_{11} im ersten Schritt und soll in 1 übergeführt werden, a_{k2_2} dagegen in 0 für $k \neq 2$.

$$\begin{array}{lllll|ll}
1 & 0 & a_{13_3} & \ldots & a_{1m_3} & b_{1_3} & I_3 \\
0 & 1 & a_{23_3} & \ldots & a_{2m_3} & b_{2_3} & II_3 \\
0 & 0 & a_{33_3} & \ldots & a_{3m_3} & b_{3_3} & III_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & K_3 \\
0 & 0 & a_{j3_3} & \ldots & a_{jm_3} & b_{j_3} & J_3
\end{array}$$

Für die Fortsetzung gilt es jetzt drei Fälle zu unterscheiden:

Fälle: 1. $m = j$ 2. $m < j$ 3. $m > j$

Fall 1:

Führt man das bisher beschriebene Verfahren für alle Spalten durch, wobei immer a_{kk_k} die Rolle von a_{11_1} im ersten Schritt einnimmt, so gelangt man in $j = m$ Schritten zu nebenstehendem System. Damit hat man aber die Lösung, die hier eindeutig ist.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{1_{j+1}} & I_{j+1} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & b_{2_{j+1}} & II_{j+1} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & b_{3_{j+1}} & III_{j+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & K_{j+1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & b_{j_{j+1}} & J_{j+1} \end{array}$$

$$\leadsto \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1_{j+1}} \\ b_{2_{j+1}} \\ \vdots \\ b_{j_{j+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1_{m+1}} \\ b_{2_{m+1}} \\ \vdots \\ b_{m_{m+1}} \end{pmatrix}$$

Fall 2:

Wie im Falle 1. gelangt man hier ebenfalls in $j = m$ Schritten zu nebenstehendem System. Da aber $m < j$ ist, gibt es mehr Zeilen als Spalten. Von der Zeile $m + 1$ an ($m + 1 \leq j$) entsteht nach unserer Rechenvorschrift ausser in der letzten Spalte alles 0, da diese Elemente ja alle unterhalb den Diagonalelementen liegen. Die letzte Spalte enthält keine Koeffizienten von Variablen x_k. Sie wird nur mitgerechnet. Dort muss aber keine 0 oder 1 erzeugt werden.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{1_{j+1}} & I_{j+1} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & b_{2_{j+1}} & II_{j+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & K_{j+1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & b_{j_{j+1}} & J_{j+1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{j+1_{j+1}} & J + I_{j+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & K_{j+1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{m_{j+1}} & \cdots_{j+1} \end{array}$$

Da wir davon ausgegeangen sind, dass alle Gleichungen (Zeilen) linear unabhängig sind, kann nur eine Zeile der Form $0\ 0\ \ldots 0\ b_{j+k_{j+1}}$ ($b_{j+k_{j+1}} \neq 0$ wegen der lin. Unabh.) bestehen. Zwei solche Zeilen sind ja linear abhängig. Daher muss $j = m + 1$ sein. Wieder als Gleichung geschrieben, bedeutet das aber: $0 = b_{j+1_{j+1}} \neq 0$, also ein Widerspruch zur Annahme der Existenz der x_k beim Umformen des Systems. Auch sieht man den Widerspruch zu *Rang* $r = r_0$

Konsequenz: In diesem Fall gilt: $\mathbb{L} = \{\}$

Notizen:

$\leadsto$

Fall 3:

Wie im Falle 1. gelangt man auch hier ebenfalls in j Schritten zu nebenstehendem System. Da aber $m > j$ ist, gibt es mehr Spalten mit Elementen $a_{\dots}$ als Zeilen . Von der Spalte $j+1$ an $(j+1 \leq m)$ entsteht nach unserer Rechenvorschrift mit Ausnahme der linearen Unabhängigkeit keine vorhersehbare Situation, da diese Elemente ja alle rechts von den Diagonalelementen liegen. Die letzte Spalte enthält wiederum keine Koeffizienten von Variablen x_k. Sie wird nur mitgerechnet.

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & \dots & 0 & a_{1(j+1)_{j+1}} & \dots & a_{1m_{j+1}} & b_{1_{j+1}} & I_{j+1} \\
0 & \dots & 0 & a_{2(j+1)_{j+1}} & \dots & a_{2m_{j+1}} & b_{2_{j+1}} & II_{j+1} \\
\vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & K_{j+1} \\
0 & \dots & 1 & a_{j(j+1)_{j+1}} & \dots & a_{jm_{j+1}} & b_{j_{j+1}} & J_{j+1}
\end{array}$$

oder

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & \dots & 0 & \alpha_{1(j+1)} & \dots & \alpha_{1m} & \beta_1 & I_{j+1} \\
0 & \dots & 0 & \alpha_{2(j+1)} & \dots & \alpha_{2m} & \beta_2 & II_{j+1} \\
\vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & K_{j+1} \\
0 & \dots & 1 & \alpha_{j(j+1)} & \dots & \alpha_{jm} & \beta_j & J_{j+1}
\end{array}$$

oder

$$\begin{array}{rcl}
x_1 + 0 + \ldots + 0 + \alpha_{1(j+1)}x_{j+1} + \ldots + \alpha_{1m}x_m & = & \beta_1 \\
0 + x_2 + \ldots + 0 + \alpha_{2(j+1)}x_{j+1} + \ldots + \alpha_{2m}x_m & = & \beta_2 \\
\vdots \ldots + \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots + \ldots \vdots \ldots & = & \vdots \\
0 + \ldots + 0 + x_j + \alpha_{j(j+1)}x_{j+1} + \ldots + \alpha_{jm}x_m & = & \beta_j
\end{array}$$

Schreibt man das Gleichungssystem mit Hilfe von Vektoren, so erhält man:

$$x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + x_j \cdot \vec{e}_j + x_{j+1} \cdot \vec{\alpha}_{j+1} + \ldots + x_m \cdot \vec{\alpha}_m \quad = \quad \vec{\beta}$$

Da $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_j, \vec{\alpha}_{j+1}, \ldots, \vec{\alpha}_m, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^j$ ist und $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_j$ eine Basis bilden, sind $\vec{\alpha}_{j+1}, \ldots, \vec{\alpha}_m, \vec{\beta}$ linear abhängig von dieser Basis $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_j\}$. Für jede beliebige Wahl der $x_{j+1}, \ldots, x_m$ ist $\vec{\beta} - (x_{j+1}\vec{\alpha}_{j+1} + \ldots + x_m\vec{\alpha}_m)$ eindeutig als Linearkombination $x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_j\vec{e}_j$ der Vektoren $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_j$ darstellbar, d.h. zu jeder beliebigen Wahl der $x_{j+1}, \ldots x_m$ sind die $x_1, \ldots x_j$ eindeutig bestimmt.

Weil zu $x_{j+1}, \ldots, x_m$ eindeutig ein Vektor $\begin{pmatrix} x_{j+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m-j}$ existiert, bedeutet beliebige Wahl von $x_{j+1}, \ldots, x_m$ auch beliebige Wahl eines Vektors $\mathbb{R}^{m-j}$. $\{x_{j+1}, \ldots, x_m\}$ bildet daher einen Vektorraum der Dimension $m - j$.

Bekanntlich bildet $\mathbb{L}_{hom}$ einen Vektorraum VR.

Da mit der Basis $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{m-j}\}$ alle möglichen $\begin{pmatrix} x_{j+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ erzeugt werden können und zu jedem solchen Vektor eindeutig ein gesamter Lösungsvektor $\vec{v}$ mit $\vec{v}^T = (x_1, \ldots x_j, x_{j+1}, \ldots, x_m)^T$ gehört (die $x_1, \ldots x_j$ werden aus den $x_{j+1}, \ldots, x_m$ errechnet), findet man für VR sofort die folgende Basis für das homogene Problem:
$\{\vec{l}_1, \ldots, \vec{l}_{m-j}\}$, $\quad \vec{l}_1 = (-\alpha_{1(j+1)}, \ldots, \alpha_{j(j+1)}, 1, 0, \ldots, 0)^T$,
$\vec{l}_2 = (-\alpha_{1(j+2)}, \ldots, \alpha_{j(j+2)}, 0, 1, \ldots, 0)^T, \ldots, \vec{l}_{m-j} = (-\alpha_{1m}, \ldots, \alpha_{jm}, 0, 0, \ldots, 1)^T$.

Jede homogene Lösung hat daher in allen Fällen mit $m \geq j$ die folgende Form:

$$\vec{x}_{hom} = \sum_{k=1}^{m-j} \lambda \cdot \vec{l}_k$$

Im Folgenden sei: $Dim := Dim(\mathbb{L}) = Dim(\mathbb{L}_{hom})$.
Dazu definieren wir:

Definition: **Ordnung** eines Gleichungssystems $Ord(S) :=$ Anzahl Unbekannte.

Für $m \geq j$ haben wir gefunden: $Ord(S) = j$,
$Rang = m, Dim = m - j, \ \mathbb{L} \neq \{\} \ (\Rightarrow r = r_0)$.

Dagegen war für $m > j$: $\mathbb{L} = \{\}, \ r \neq r_0 \ (\Rightarrow r > r = 0)$.
Somit können wir den folgenden Satz notieren (**Rangsatz**):

Satz:

Vor.:

Gegeben sei ein Gleichungssystem S mit j Gleichungen und m Unbekannten.
Sei $\mathbb{L} \neq \{\}$

Beh.:

1 $Rang: \ r = r_0$

2 $Dim = Ord(S) - Rang(j) = m - j$

3 $m \geq j$

Vor.:

$m < j$

Beh.:

$\mathbb{L} = \{\}, \ r > r_0$

Bemerkung:

$\vec{x}_{inhom} = \vec{x}_{hom} + \vec{x}_{part} \ \Rightarrow \ Dim(\mathbb{L}_{inhom}) = Dim(\mathbb{L}_{hom})$,
$Ord = const. = Dim + r = Dim + r_0 \ \Rightarrow \ r = r_0 \ \leadsto \ (r \neq r_0 \ \Rightarrow \ \mathbb{L} = \{\})$

8.2.3 Eine Anwendung — Une application

Der Rangsatz lässt sich auch benutzen um zu untersuchen, ob eine Anzahl von Vektoren linear unabhängig ist. Beispiel: $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3, \vec{n}_4$ ist linear unabhängig, wenn für das folgende Gleichungssystem der Rangsatz gilt.
$\leadsto$ Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} \langle \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{x} \rangle \\ \langle \overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{x} \rangle \\ \langle \overrightarrow{n_3}, \overrightarrow{x} \rangle \\ \langle \overrightarrow{n_4}, \overrightarrow{x} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \text{mit} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix}$$

Bsp.: (Mit Zahlen)

$$\begin{array}{rcl} +1\,x_1 - 2\,x_2 + 3\,x_3 + 5\,x_4 - 4\,x_5 & = & +2 \\ +2\,x_1 - 4\,x_2 + 6\,x_3 + 5\,x_4 + 2\,x_5 & = & -6 \\ +2\,x_1 - 5\,x_2 + 7\,x_3 + 7\,x_4 + 3\,x_5 & = & -7 \\ -1\,x_1 + 1\,x_2 - 2\,x_3 - 3\,x_4 + 5\,x_5 & = & -3 \end{array} \quad \leadsto \quad \mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \}$$

$$\leadsto \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit der Existenz von λ, μ ist:

$$\mathit{Dim}(\mathbb{L}) = 2 = \mathit{Ord} - \mathit{Rang} = 5 - m \;\Rightarrow\; \mathit{Ord} = m = 5 - 2 = 3$$

$\leadsto$ Die Anzahl der linear unabhängigen Gleichungen ist 3, d.h. $\{\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3, \vec{n}_4\}$ enthält 3 linear unabhängige Vektoren.

Kapitel • Chapitre 9

Matrizen und Determinanten — Matrices et déterminants

9.1 Gleichungssysteme und Matrizen — Systèmes d'équations et matrices

9.1.1 Der Begriff Matrize – Notion matrice

Matrix — Matrice

Vorläufig verwenden wir den Begriff „Matrix“ in folgender Interpretationsweise:

Begriff: Sei : **Matrix** := rechteckiges Zahlengebilde

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jm} \end{pmatrix}$$

$a_{11} \in \mathbb{R}$ resp. $a_{11} \in \mathbb{C}$ u.s.w .

Definition: Die Elemente $a_{11}, \ , a_{22}, \ \ldots, \ a_{mm}$ resp. a_{jj} bilden die **Hauptdiagonale**

Bemerkung: Vektoren können wir als Spezialfälle von Matrizen mit nur einer Spalte auffassen, transponierte Vektoren als Matrizen mit nur einer Zeile.
Seien $\vec{a} \in \mathbb{R}^j, \ \vec{b} \in \mathbb{R}^m$

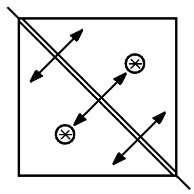
$$\leadsto \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{j1} \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ \vec{b}^{\,T} = (b_1, \ldots, b_m) := (b_{11}, \ldots, b_{1m})$$

Die Unterscheidung zwischen Vektoren und Matrizen ist für uns nur dann wesentlich, wenn wir Mathematik–Software einsetzen wie etwa *Mathematica*.

Transponierte Matrix — Matrice Transposée

Unter „transponieren“ wollen wir eine Spiegelung der Matrixelemente an der Hauptdiagonalen verstehen.



Definition: $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \ldots & a_{jm} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T := \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{j1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & \ldots & a_{jm} \end{pmatrix}$$

$\leadsto$ A^T heisst zu A transponierte Matrix.

Man sieht sofort:

Satz: $$A = (A^T)^T$$

Identifikationen von Matrizen — Identifications de matrices

Eine Matrix lässt sich verschiedentlich interpretieren:

1 Matrix = rechteckiges Zahlenschema

2 Matrix = Zeile von Spaltenvektoren

3 Matrix = Spalte von Zeilenvektoren

$$\leadsto \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \ldots & a_{jm} \end{pmatrix}, \; A = (\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{j1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{jm} \end{pmatrix}), \; A = \begin{pmatrix} (a_{11}, \ldots, a_{1m}) \\ \vdots \\ (a_{j1}, \ldots, a_{jm}) \end{pmatrix}$$

$$\leadsto \quad A = (\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_m}) = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \vdots \\ \alpha_j^T \end{pmatrix}$$

Dass wir hier diese drei Begriffsbildungen der Matrix nicht unterscheiden, führt zu einer bedeutungslosen Unschärfe, die uns, wie schon vorher bemerkt, nicht behindern wird.

Spezialfälle — Cas spéciaux

1 Matrix mit nur einer Spalte:
$$A = \vec{a} = (\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \end{pmatrix} = \vec{a}$$

2 Matrix mit nur einer Zeile:
$$B = (\vec{b}^{\,T}) = ((b_1, \ldots, b_m)) := (b_1, \ldots, b_m) = \vec{b}^{\,T}$$

3 Matrix = Spalte von Zeilenvektoren

Konsequenz: In diesem Rahmen sind Vektoren spezielle Matrizen.

9.1.2 Matrixprodukt — Produit matriciel

Matrixprodukt für Vektoren — Produit matriciel pour des vecteurs

Nun können wir das Matrixprodukt für Vektoren definieren, denn Vektoren sind spezielle Matrizen:

Definition: **Matrixprodukt:** $\vec{a}^{\,T} \cdot \vec{b} := \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

Konsequenz:

$$\vec{a}^{\,T} \cdot \vec{b} = (a_1, \ldots, a_m) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = a_1 b_1 + \ldots + a_m b_m = \langle \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \rangle \in \mathbb{R} \ \text{ resp. } \ \in \mathbb{C}$$

Ein Gewinn: Damit lassen sich Gleichungssysteme kürzer schreiben!

$$\text{I:} \left| \begin{array}{lcl} \langle \vec{a}_1, \vec{x} \rangle & = & k_1 \\ \langle \vec{a}_2, \vec{x} \rangle & = & k_2 \\ \vdots & = & \vdots \\ \langle \vec{a}_j, \vec{x} \rangle & = & k_j \end{array} \right| \Leftrightarrow \text{II:} \left| \begin{array}{lcl} \vec{a}_1^{\,T} \cdot \vec{x} & = & k_1 \\ \vec{a}_2^{\,T} \cdot \vec{x} & = & k_2 \\ \vdots & = & \vdots \\ \vec{a}_j^{\,T} \cdot \vec{x} & = & k_j \end{array} \right| \Leftrightarrow \text{III:} \begin{pmatrix} \vec{a}_1^{\,T} \\ \vec{a}_2^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{a}_j^{\,T} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_j \end{pmatrix} \Leftrightarrow \text{IV:} \ A \cdot \vec{x} = \vec{k}$$

Erklärung:

I: Mit Skalarprodukt
II: Mit Matrixprodukt
III: Abgekürzte Schreibweise
IV: Kolonne von Zeilenvektoren: Matrix A

$\leadsto$ Die linke Seite des Gleichungssystems schreiben wir also mit Hilfe des Matrixprodukts statt auf j Zeilen nur einmal abgekürzt in der Form $A \cdot \vec{x}$ mit $A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{a}_j^{\,T} \end{pmatrix}$. Das ergibt eine elegantere, kürzere Schreibweise für das Gleichungssystem.

Definition: Das **Matrixprodukt** $A \cdot \vec{x}$ ist eine Kurzschreibweise für j Matrixprodukte von Vektoren der Form $\vec{a}_1^{\,T}, \ldots, \vec{a}_j^{\,T}$.

$$\leadsto \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \vec{a}_1, \vec{x} \rangle \\ \vdots \\ \langle \vec{a}_j, \vec{x} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_j \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} (a_{11}, \ldots, a_{1m}) \\ \vdots \\ (a_{j1}, \ldots, a_{jm}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = A \cdot \vec{x} \leadsto \quad \vec{k} = A \cdot \vec{x}$$

Konsequenz:

1 Das Gleichungssystem $\left| \begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m & = & k_1 \\ \vdots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots & = & \vdots \\ a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jm}x_m & = & k_j \end{array} \right|$

wird zu $A \cdot \vec{x} = \vec{k}$.
Dabei ist A eine $j \times m$–Matrix, $\vec{x}$ ein Vektor $\in \mathbb{R}^m$, $\vec{k}$ ein Vektor $\in \mathbb{R}^j$.

2 Eine Matrix A stiftet eine Abbildung $\mathcal{A}$:

$$\mathbb{R}^m \stackrel{\mathcal{A}}{\longmapsto} \mathbb{R}^j, \qquad \vec{x} \stackrel{\mathcal{A}}{\longmapsto} A \cdot \vec{x} = \vec{k}$$

Definition: Eine solche Abbildung heisst **lineare Abbildung** (nur lineare Operationen „$+, \cdot$“ (Add., Mult. mit Koeff.)).

Problem Schreibweise — Problème façon d'écrire

Beim Matrixprodukt $\vec{a}^{\,T} \cdot \vec{b}$ werden Elemente einer Zeile mit Elementen einer Spalte multipliziert und addiert. Beim Skalarprodukt $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ hingegen multipliziert man Elemente einer Spalte mit Elementen einer Spalte.
Weil wir Matrixprodukt und Skalarprodukt in denselben Formeln verwenden, unterscheiden wir hier die beiden Produkte durch ihre Schreibweise, obwohl manchmal in spezialisierten Texten der Ingenieurmathematik auf eine solche Unterscheidung verzichtet wird.
In der Literatur findet man für das Skalarprodukt mehrere verschiedene Schreibweisen:

Bsp.: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ (Bachmann, Papula, ...), $\vec{a} \circ \vec{b}$ (Pfenninger, ...), $(\vec{a}, \vec{b})$ (Div. Schulbücher, z.B. Akad, ...), $(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (Mangold–Knopp, ...), $\beta(\vec{a}, \vec{b})$ (Kowalski, ...), $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ (Nef, ...), $\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle$ (Fick, ...), u.s.w

Einfaches Rechnen mit Matrizen — Calcul simple avec les matrices

Später werden wir einfache arithmetische Operationen mit Matrizen verwenden. Diese führen wir auf einfache arithmetische Operationen mit transponierten Vektoren zurück (oder auf des Rechnen mit Gleichungssystemen, wo man oft Matrizen verwendet):

Definition:

1 Vektoren:

Summe: $\vec{a}^{\,T} + \vec{b}^{\,T} := (\vec{a} + \vec{b})^{\,T}$

Produkt mit Skalar:

$\lambda \cdot \vec{a}^{\,T} := (\lambda \cdot \vec{a})^{\,T}$

2 Matrizen:

Summe:

$$A + B = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{a}_j^{\,T} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{b}_1^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{b}_j^{\,T} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \vec{a}_1^{\,T} + \vec{b}_1^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{a}_j^{\,T} + \vec{b}_j^{\,T} \end{pmatrix}$$

Produkt mit Skalar:

$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \vec{a}_1^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{a}_j^{\,T} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot \vec{a}_1^{\,T} \\ \vdots \\ \lambda \cdot \vec{a}_j^{\,T} \end{pmatrix}$$

Spezielle Matrizen — Matrices spéciales

Einige Matrizen haben spezielle Namen. Die folgenden davon werden wir ab und zu brauchen:

Definition:

Nullmatrix: $N = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ (Alle Elemente 0)

Diagonalmatrix: $D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_{jj} \end{pmatrix}$ $(d_{kk} \neq 0, \;\; m = j)$

Einheitsmatrix: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(d_{kk} = 1)$

Dreiecksmatrix (obere, untere):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{j1} & \dots & a_{j(j-1)} & a_{jj} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{(j-1)j} \\ 0 & \dots & 0 & a_{jj} \end{pmatrix}$$

Beispiele:

Obere Dreiecksmatrix: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$

Untere Dreiecksmatrix: $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Symmetrische Matrix: $A = A^T, \;\; (a_{ik}) = (a_{ki})$

Bemerkung: Es ist:
$E = (\vec{e}_1, \dots \vec{e}_j) \;\; j \times j$–Matrix .

9.2 Determinanten — Déterminants

9.2.1 Ausdehnung des Determinantenbegriffs für n grösser 3 — Extension de la notion de déterminant pour n plus grand 3

Begriffsbildung — Obtenir la notion

Problem:

Flächenprodukt $\leadsto$ ±Flächeninhalt des Parallelogramms ($Dim = 2$), 2–reihige Determinante

Spatprodukt $\leadsto$ ±Volumeninhalt des Spats ($Dim = 3$), 3–reihige Determinante

($Dim = 1 \leadsto$ ±Länge einer Strecke.)

Eigenschaften solcher „Inhaltsprodukte“

1 Vertauschung zweier benachbarter Vektoren $\leadsto$ Vorzeichenänderung.
Echangement de deux vecteurs proches $\leadsto$ Changement du signe.

Bsp.: $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}]$
Entsprechendes gilt für die Zeilen der Vektoren (Reihenfolge der Basisvektoren).

2 $[\lambda \cdot \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \lambda \cdot [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ (Streckung)

3 $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}] = [\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}] + [\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}]$ ($\leadsto$ Cavalieri)

4 $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + 0$ u.s.w.

5 Vektoren linear abhängig $\leadsto$ Determinante (Inhalt) $= 0$.

6 Berechnungsformeln (Determinanten von zugehörigen Matrizen)

7 Das Einheitsvolumen muss definiert sein: $[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3] = 1$

Idee der $n \times n$–Determinante:

Begreiffe eine $n \times n$–Matrize als n Spaltenvektoren, die einen „n–dimensionalen Spat“ aufspannen. (Sind die Vektoren linear unabhängig, so bilden sie auch eine Basis des $\mathbb{R}^n$.)

Der **vorzeichenbehaftete Volumeninhalt** eines solchen Gebildes lässt sich nun z.B. mit Hilfe obiger bekannter Eigenschaften für solche „Inhaltsprodukte“ auch für $n > 3$ definieren.

Definition: Der vorzeichenbehaftete Volumeninhalt eines n–dimensionalen Spats nennen wir **Determinante** der zugehörigen $n \times n$–Matrix.

Definierende Eigenschaften — Qualités définissantes

Geg.:

Sei $A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ eine $n \times n$–Matrix, die einen n–dimensionalen Spat definiert. Sei $\det A = [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n]$ der zugehörige „n–dimensionale, vorzeichenbehaftete Volumeninhalt“, der jetzt exakt definiert werden soll. Die Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ seien in der Basis $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ dargestellt:

Z.B. $\vec{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} = a_{1k}\vec{e}_1 + \ldots + a_{nk}\vec{e}_n$

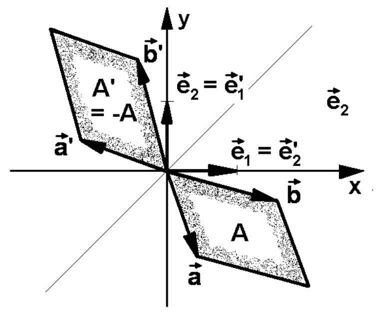
Definition: $\det A = [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n]$ definieren wir durch die folgenden Eigenschaften:

1 $[\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j, \vec{a}_{j+1}, \ldots, \vec{a}_n] = -[\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{j+1}, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n]$

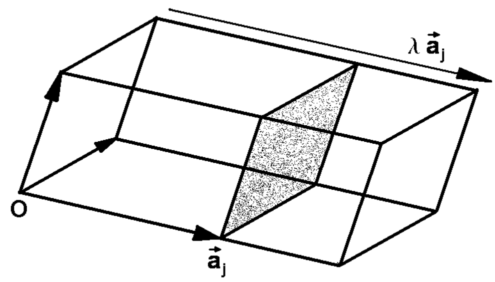
(Vertauschung zweier benachbarter Vektoren $\leadsto$ Vorzeichenwechsel.)

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & a_{1(j+1)} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & a_{n(j+1)} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1(j+1)} & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n(j+1)} & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Dasselbe gilt, wenn man statt zwei benachbarte Spalten zwei benachbarte Zeilen, d.h. Basisvektoren $\vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}$, vertauscht.



2 Streckt man einen „Seitenvektor" mit einem Faktor λ, so wird das ganze Volumen um λ gestreckt:



$[\vec{a}_1, \ldots, \lambda \cdot \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n] = \lambda \cdot [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n]$ oder

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & \lambda \cdot a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & \lambda \cdot a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Kurz: $$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & \lambda \cdot a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & \lambda \cdot a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3 Ist ein Seitenvektor Summe zweier Teilvektoren, so ist auch die Determinante (der gesamte Volumeninhalt) Summe der entsprechenden Teildeterminanten (Teilvolumeninhalte):

$[\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j + \vec{a}'_j, \ldots, \vec{a}_n] = [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n] + [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}'_j, \ldots, \vec{a}_n]$ oder

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} + a'_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} + a'_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a'_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a'_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

4 Eichung: Das Volumen des **Einheitsspats** ist 1:

$$\forall_{n \in \mathbb{N}}: \ \det E = \det(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) = [\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n] = \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} = 1$$

(Für eine *ONB* , $\vec{e}_i \perp \vec{e}_k, i \neq k$)

Aus 2 und 3 folgt, dass eine Determinante linear ist in allen Spaltenvektoren. Sie ist daher eine **Multilinearform**.

Folgerungen:

1 **Satz:** Ist ein Seitenvektor des Spats $\vec{0}$, so ist die Determinante (der Volumeninhalt) 0.

Denn es gilt:

$$[\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{j-1}, \vec{0}_{(j)}, \ldots, \vec{a}_n] = [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{j-1}, 0 \cdot \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n] = 0 \cdot [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{j-1}, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n]$$
$$= 0 \cdot const. = 0 \quad (\vec{a}_j \text{ beliebig })$$

2 **Satz:** Addiert man zu einer Spalte ein Vielfaches einer andern Spalte, so ändert die Determinante (der Volumeninhalt) nicht.

Hinweis: Studiere $[\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_k, \ldots, \vec{a}_n]$

$$[\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j + \lambda \cdot \vec{a}_k, \ldots, \vec{a}_k, \ldots, \vec{a}_n] = [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_k, \ldots, \vec{a}_n] +$$
$$+ [\vec{a}_1, \ldots, \lambda \cdot \vec{a}_k, \ldots, \vec{a}_k, \ldots, \vec{a}_n] = [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_k, \ldots, \vec{a}_n] + \lambda \cdot [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k, \ldots, \vec{a}_k, \ldots, \vec{a}_n],$$

$$[\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k, \ldots, \vec{a}_k, \ldots, \vec{a}_n] = \pm[\vec{a}_k, \vec{a}_k, \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n] := D$$
$$(k + j - 2 \text{ Vertauschungen })$$
$$\ldots = - \pm [\vec{a}_k, \vec{a}_k, \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n] := -D \ (\vec{a}_k, \vec{a}_k \text{ vertauscht })$$

$$\Rightarrow \ D = -D \ \Rightarrow \ D = 0 \leadsto \quad [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j + \lambda \cdot \vec{a}_k, \ldots, \vec{a}_k, \ldots, \vec{a}_n] = [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_k, \ldots, \vec{a}_n]$$

3 **Satz:** Bei einer $n \times n$–Matrix ist die Determinante genau dann 0, wenn ein Spaltenvektor linear abhängig von den andern ist.

(Folgerung aus obigen Sätzen.)

9.2.2 Entwicklungssatz — Théorème du développement

(Entwicklungssatz von Laplace)

Adjungierte — Adjointe

Erst eine Definition. Wir verwenden dazu die folgende Notation:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A_{ij} := \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & \cancel{a_{1j}} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \cancel{\vdots} & & \vdots \\ \cancel{a_{i1}} & \cancel{\ldots} & \cancel{a_{ij}} & \cancel{\ldots} & \cancel{a_{in}} \\ \vdots & & \cancel{\vdots} & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & \cancel{a_{nj}} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A_{ij} entsteht aus A durch Streichung der Zeile i und der Spalte k.

Definition: $\alpha_{ij} := (-1)^{(i+j)} \cdot \det(A_{ij})$
heisst das **algebraische Komplement** oder die **Adjunkte** zum Element a_{ij} der Matrix A .

$\tilde{A} := A_{adj} := \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ heisst die zu A **adjungierte Matrix** .

Diese Definition werden wir später bei Gelegenheit einsetzen.

Herleitung des Entwicklungssatzes — Déduction du théorème de Laplace

Wir betrachten:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}\vec{e}_1 + \ldots + a_{n1}\vec{e}_n = \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_{21} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{n1} \end{pmatrix} := \vec{a}_{11} + \vec{a}_{21} + \ldots + \vec{a}_{n1}$$

Ebenso : $\vec{a}_2 = \vec{a}_{12} + \vec{a}_{22} + \ldots + \vec{a}_{n2}, \quad \ldots, \quad \vec{a}_n = \vec{a}_{1n} + \vec{a}_{2n} + \ldots + \vec{a}_{nn}.$

Sei $\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Auf diese Determinante wenden wir obige Regeln (Definition) an.

Wir verwenden: $\vec{a}_1 = \vec{a}_{11} + \ldots + \vec{a}_{n1} \rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow \quad \det A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n] = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

Zeilenvertauschungen:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \\ 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{(n-1)2} & \ldots & a_{(n-1)n} \end{vmatrix}$$

Streckungen:

$$= (-1)^0 \cdot a_{11} \cdot \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^1 \cdot a_{21} \cdot \begin{vmatrix} 1 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots +$$

$$+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot a_{n1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \\ 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{(n-1)2} & \ldots & a_{(n-1)n} \end{vmatrix} =$$

$= (-1)^0\cdot a_{11}\cdot\det M_{11}+(-1)^1\cdot a_{21}\cdot\det M_{21}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot a_{n1}\cdot\det M_{n1}=\ldots$

Addiere in M_{j1} zur Spalte k die mit $(-a_{kj})$ multiplizierte erste Spalte von M_{j1}. Dadurch entsteht oben jeweils eine 0. $\rightsquigarrow$

$$(-1)^0\cdot a_{11}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^1\cdot a_{21}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots +$$

$$+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot a_{n1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{(n-1)2} & \ldots & a_{(n-1)n} \end{vmatrix} =$$

Kurz:

$$(-1)^0\cdot a_{11}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & \ldots & \\ \vdots & \vdots & A_{11} & \vdots \\ 0 & & \ldots & \end{vmatrix} + (-1)^1\cdot a_{21}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & \ldots & \\ \vdots & \vdots & A_{21} & \vdots \\ 0 & & \ldots & \end{vmatrix} + \ldots + (-1)^{n-1}\cdot a_{n1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & \ldots & \\ \vdots & \vdots & A_{n1} & \vdots \\ 0 & & \ldots & \end{vmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ **Untermatrizen** $(-1)^{j-1}\cdot A_{j1}=(-1)^{j+1}\cdot A_{j1}$

Man beachte, dass die so entstandenen Untermatrizen $(-1)^{j+1}\cdot A_{j1}$ bis auf das Vorzeichen gerade die algebraischen Komplemente sind.

Bis jetzt haben wir folgende Operationen ausgeführt: Summenzerlegung, Streckungen, Zeilenvertauschungen, Addition eines Vielfachen der ersten Spalte zu andern. Wenn wir solche entsprechenden Operationen auch auf die Untermatrizen A_{j1} anwenden, bleiben dabei die ersten Zeilen und Spalten der M_{j1} unangetastet. Jedoch die ersten Zeilen und Spalten der Untermatrizen nehmen dann dieselbe Form an wie diejenigen der M_{j1}

Beispiel:

$$(-1)^0\cdot a_{11}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^0\cdot a_{11}\cdot((-1)^0\cdot a_{22}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots +$$

$$+\ldots+(-1)^{n-2}\cdot a_{n2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ & 0 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{(n-1)3} & \ldots & a_{(n-1)n} \end{vmatrix}) =$$

$$(-1)^0\cdot a_{11}\cdot((-1)^0\cdot a_{22}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ & 0 & & \ldots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & A_{111} & \vdots \\ 0 & 0 & & \ldots & \end{vmatrix} + \ldots + (-1)^{n-2}\cdot a_{n2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ & 0 & & \ldots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & A_{11(n-1)} & \vdots \\ 0 & 0 & & \ldots & \end{vmatrix})$$

Dabei treten hier wieder neue, aber kleinere Untermatrizen auf. Z.B. zu A_{11} gehören die Untermatrizen $A_{11(k)}$.

Dieses Verfahren kann man solange iterieren, bis die verbleibenden Untermatrizen nur noch aus einem

Element bestehen. Andererseits entstehen bei jedem Iterationsschritt neue Summanden, und es werden jedes Mal neue Faktoren (Matrixelemente) a_{jk} vor die Determinante gezogen, noch multipliziert mit Faktoren der Form $(-1)^{xyz\cdots}$. Die verbleibenden Matrizen, zu denen die Determinante noch berechnet werden soll, haben alle die Form der Einheitsmatrix E.

Da man in jedem Iterationsschritt eine neue Spalte k behandelt und in der jeweiligen Untermatrix in jedem Summanden eine andere Zeile j nach oben schiebt um dann das erste Element a_{jk} vor die Determinante zu nehmen, stehen schliesslich in jedem Summanden vor der verbleibenden Determinante der Einheitsmatrix Faktoren der Form $(-1)^{xyz\cdots} \cdot a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n}$ mit lauter verschiedenen Indices in den a_{jk}. (Aus jeder Zeile j und Spalte k kommt jeweils ein Faktor a_{jk} vor.) Die Indexfolge $k_1, \ldots, k_n$ ist daher immer eine Permutation von $(1, 2, \ldots, n)$.

Alle Summanden haben daher die folgende Form:

$$(-1)^{xyz\cdots} \cdot a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n} \cdot \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{xyz\cdots} \cdot a_{1k_1} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n} \cdot 1, \quad \det E = 1$$

$$\leadsto \quad \det A = \sum_{\cdots}^{\cdots} (-1)^{\cdots} \cdot a_{1k_1} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n} \cdot 1 = \det A = \sum_{\cdots}^{\cdots} (-1)^{\cdots} \cdot a_{1k_1} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n}$$

Da man bei der Iteration sämtliche Kolonnen und Zeilen behandeln muss, läuft die Summation über alle $n!$ Permutationen $\sigma_p(1, \ldots, n) = (k_1, \ldots, k_n)$ der Zahlen $1, \ldots, n$. Man hat daher $n!$ Summanden!

Diejenigen Leser, die etwas mehr über Permutationen Bescheid wissen, sehen leicht, dass der Exponent $xyz\ldots$ von $(-1)^{xyz\cdots}$ gerade das „Vorzeichen“ $sgn(\sigma_p)$ der jeweiligen Permutation $\sigma_p(1, \ldots, n)$ ist. ($(-1)^{sgn(\sigma_p)} = 1$ für gerade Permutationen, $(-1)^{sgn(\sigma_p)} = -1$ für ungerade Permutationen. Gerade Permutation: Gerade Anzahl von Vertauschungen von Elementen.)

Satz: **Entwicklungssatz**

$$\det A = \sum_{\sigma_p,\ p=1}^{n!} (-1)^{sgn(\sigma_p)} \cdot a_{1k_1} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n}$$

Bemerkung:

1 Es wird schwierig sein, diesen Satz in dieser Form direkt zu verwenden, zumal die praktische Verwendung zur Determinantenberechnung bei grösseren n an der Anzahl Summanden $n!$ (!!!) scheitern wird.

2 Aus dem Entwicklungssatz folgt sofort die Ungültigkeit der Regel von Sarrus für $n \geq 4$. Denn rechnet man wie für $n = 3$ den „Diagonalen entlang“, so erhält man eine Summe von $2n$ Produkten. Nach dem Entwicklungssatz müssen es aber $n!$ Produkte sein. Für $n > 3$ ist aber $n! > 2n$.

3 Ist $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ eine Permutation von $(1, 2 \ldots, n)$, so ist auch $(1, 2 \ldots, n)$ eine Permutation von $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$.

Im Entwicklungssatz ist die Summe über Produkte $a_{1k_1} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n}$ gebildet, deren Faktoren nach dem ersten Index (dem Zeilenindex) geordnet sind. Niemand hindert einem daran, diese Produkte nach dem zweiten Index, dem Spaltenindex zu ordnen. Dann hat der Satz die nachstehende Form:

$$\det A = \sum_{\sigma_p,\ p=1}^{n!} (-1)^{sgn(\sigma_p)} \cdot a_{j_1 1} \cdot \ldots \cdot a_{j_n n}.$$

Es ist also egal, ob man die Determinante nach Zeilen oder nach Spalten entwickelt. Daraus folgt, dass die transponierte Matrix A^T dieselbe Determinante hat wie die Matrix A.

4 Bekannt: Bei einer $n \times n$–Matrix ist die Determinante genau dann 0, wenn ein Spaltenvektor linear abhängig von den andern ist.

Um zu testen, ob n Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig sind, genügt es demnach zu testen, ob $\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \neq 0$ ist.

5 Wir wissen:

$$\det A = (-1)^0 \cdot a_{11} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & a_{1n} \\ 0 & & \ldots & \\ \vdots & \vdots & A_{11} & \vdots \\ 0 & & \ldots & \end{vmatrix} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot a_{n1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & \ldots & \\ \vdots & \vdots & A_{n1} & \vdots \\ 0 & & \ldots & \end{vmatrix}$$

Die Summanden (Produkte $(-1)^{sgn(\sigma_p)} \cdot a_{1k_1} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n}$) im Entwicklungssatz erhalten wir hier aus den Summanden s_k folgender Form:

$$(-1)^j \cdot a_{j1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & \ldots & \\ \vdots & \vdots & A_{j1} & \vdots \\ 0 & & \ldots & \end{vmatrix}$$

Die Faktoren $(-1)^j \cdot a_{j1}$ sind hier bekannt. Die weiteren im Entwicklungssatz vorhandenen Faktoren $(-1)^{\cdots}$, a_{mk} müssen demnach aus der Behandlung der Untermatrizen A_{j1} stammen, die ja ihrerseits iterativ genauso wie $\det A$ entwickelt werden. Man berechnet demnach hier beim Entwickeln die Determinanten $\det A_{j1}$. Daher gilt:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & \ldots & \\ \vdots & \vdots & A_{j1} & \vdots \\ 0 & & \ldots & \end{vmatrix} = \det A_{j1}, \quad \det A = (-1)^0 \cdot a_{11} \cdot \det A_{11} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot a_{n1} \cdot \det A_{n1}$$

Statt nach Spalten kann man wegen $\det A = \det A^T$ auch nach Zeilen entwickeln.

Korollar:

1 Die Regel von Sarrus gilt für $n > 3$ nicht mehr.

2 $\det A = \det A^T$
$\leadsto$ Die transponierte Matrix hat dieselbe Determinante.

3 $\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = 0 \ \Leftrightarrow \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ *l.a.*

4 $\det A = (-1)^0 \cdot a_{11} \cdot \det A_{11} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot a_{n1} \cdot \det A_{n1}$

5 Für grosse n ist der Entwicklungssatz für praktische Rechnungen nicht verwendbar.

Problem: Gesucht ist eine Methode zur praktischen effizienten Berechnung von Determinanten für grosse n.

9.2.3 Praktische Berechnungsmethoden — Méthodes de calculer

Mit Dreiecksmatrix — Avec matrice triangulaire

Bisher bekannte Methoden:

1 $n = 2$: Flächenprodukt

2 $n = 3$: Spatprodukt, Sarrus

3 n nicht zu gross: Entwicklungssatz

4 n gross: ? n grand: ?

Idee für grosse n: Transformiere die Matrix A ohne die Determinante zu ändern solange ($\leadsto A^*$), bis die Berechnung nach dem Entwicklungssatz sehr einfach wird (viele Faktoren 0). Das gelingt durch addieren von Vielfachen von Spalten oder Zeilen zu andern Spalten oder Zeilen.

Konkret wünscht man sich als Ziel für die Matrix eine Dreiecksform (oder eine Diagonalform):

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \overset{\text{Transf.}}{\longmapsto} \quad \det A = \det A^* = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

Nach dem Entwicklungssatz gilt dann:

$$\det A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^0 \cdot \alpha_{11} \cdot \det A_{11} + (-1)^1 \cdot 0 \cdot \det A_{21} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot 0 \cdot \det A_{n1} =$$

$$= \alpha_{11} \cdot \det A_{11} = \alpha_{11} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} & \ldots & \alpha_{2n} \\ 0 & \alpha_{33} & \ldots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdot \det \tilde{A}_{11} = \ldots = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdot \ldots \cdot \alpha_{nn}$$

Konsequenz: det A lässt sich aus A^* wie folgt berechnen:

$$\det A = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdot \ldots \cdot \alpha_{nn} = \prod_{k=1}^{n} \alpha_{kk}$$

Beispiel — Exemple

Erlaubte Zeilenmanipulationen: Addition einer (u.U. vervielfachten) Zeile zu den andern:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \tfrac{1}{2} = 1$$

Bemerkung: Die verwendeten Umformungen, die auf die Dreiecksmatrix führen, sind Elementarsubstitutionen, die wir von der Methode von Gauss–Jordan her kennen.

9.2.4 Ausdehnung der Cramerschen Regeln für n grösser 3 — Extension des règles de Cramer pour n plus grand 3

Problem: Löse das $n \times n$–System:

$$\left| \begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \right| \quad \text{oder} \quad \vec{a}_1 x_1 + \ldots + \vec{a}_n x_n = \vec{b}$$

Sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nk} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = (\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_k \ldots \vec{a}_n),$$

$$A_{j,\vec{b}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = (\vec{a}_1 \ldots \vec{b} \ldots \vec{a}_n)$$

$A_{j,\vec{b}}$ entsteht aus A durch Ersetzung der k–ten Spalte durch $\vec{b}$.

$$\leadsto \quad \det A_{j,\vec{b}} = [\vec{a}_1 \ldots \vec{b} \ldots \vec{a}_n] = [\vec{a}_1 \ldots \underbrace{\vec{a}_1 x_1 + \ldots + \vec{a}_n x_n}_{=\vec{b}} \ldots \vec{a}_n] =$$

$$\underbrace{[\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_1 x_1 \ldots \vec{a}_n]}_{=0} + \underbrace{\ldots}_{=0} + \underbrace{[\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_k x_k \ldots \vec{a}_n]}_{\neq 0} + \underbrace{\ldots}_{=0} + \underbrace{[\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_n x_n \ldots \vec{a}_n]}_{=0}$$

$[\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_i \ldots \vec{a}_i x_i \ldots \vec{a}_n] = 0$ weil Spalte i l.a. von Spalte j (dort steht $\vec{a}_i x_i$) .

$$\leadsto \quad \det A_{j,\vec{b}} = [\vec{a}_1 \ldots \vec{b} \ldots \vec{a}_n] = [\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_k x_k \ldots \vec{a}_n] = x_k \cdot [\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_k \ldots \vec{a}_n] = x_k \cdot \det A$$

$\Rightarrow \; x_j = \dfrac{\det A_{j,\vec{b}}}{\det A} \; \leadsto$ Lösung eindeutig für $\det A \neq 0$.

Satz: **Vor.:**

$$\left| \begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \right|$$

Beh.:

$$\Rightarrow \; x_i = \frac{\det A_{j,\vec{b}}}{\det A}$$

Lösung eindeutig für $\det A \neq 0$.

9.3 Allgemeines Matrixprodukt — Produit matriciel général

9.3.1 Rechenregeln für das Produkt „Matrix mal Vektor" — Règles de calcul pour le produit "matrice fois vecteur"

Bekannt: $A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{a}_j^{\,T} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^{\,T} \cdot \vec{x} \\ \vdots \\ \vec{a}_j^{\,T} \cdot \vec{x} \end{pmatrix}$ mit

$\vec{a}_i^{\,T} \cdot \vec{x} = \langle \vec{a}_i, \vec{x} \rangle$ (Matrixprodukt und Skalarptodukt .)

Dadurch wird das Produkt $A \cdot \vec{x}$ auf Produkte der Form $\vec{a}_i^{\,T} \cdot \vec{x}$ reduziert. .

Eine Matrix können wir auffassen als Spalte von Zeilenvektoren — oder als Zeile von Spaltenvektoren. Folgende Definitionen erweisen sich daher als sinnvoll:

Definition:

1 $A + B := \begin{pmatrix} \vec{a}_1^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{a}_j^{\,T} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{b}_1^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{b}_j^{\,T} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \vec{a}_1^{\,T} + \vec{b}_1^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{a}_j^{\,T} + \vec{b}_1^{\,T} \end{pmatrix}$

resp. $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jk} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{j1} & \dots & b_{jk} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1k} + b_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} + b_{j1} & \dots & a_{jk} + b_{jk} \end{pmatrix}$

2 $\lambda \cdot A = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \vec{a}_1^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{a}_j^{\,T} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot \vec{a}_1^{\,T} \\ \vdots \\ \lambda \cdot \vec{a}_j^{\,T} \end{pmatrix}$

resp. $\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jk} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \dots & \lambda \cdot a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda \cdot a_{j1} & \dots & \lambda \cdot a_{jk} \end{pmatrix}$

Man addiert also Matrizen „zellenweise“. Entsprechend für die Multiplikation mit einem Skalar. Für die einzelnen Zellen gilt:

1 $\vec{a}_i^{\,T} \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \langle \vec{a}_i, (\vec{x} + \vec{y}) \rangle = \langle \vec{a}_i, \vec{x} \rangle + \langle \vec{a}_i, \vec{y} \rangle = \vec{a}_i^{\,T} \cdot \vec{x} + \vec{a}_i^{\,T} \cdot \vec{y}$

2 $\vec{a}_i^{\,T} \cdot (\lambda \cdot \vec{x}) = \langle \vec{a}_i, (\lambda \cdot \vec{x}) \rangle = \lambda \cdot \langle \vec{a}_i, \vec{x} \rangle = \lambda \cdot (\vec{a}_i^{\,T} \cdot \vec{x})$

3 $(\lambda \cdot \vec{a}_i^{\,T}) \cdot \vec{x} = \langle (\lambda \cdot \vec{a}_i), \vec{x} \rangle = \lambda \cdot \langle \vec{a}_i, \vec{x} \rangle = \lambda \cdot (\vec{a}_i^{\,T} \cdot \vec{x})$

4 $(\vec{a}_i^{\,T} + \vec{b}_i^{\,T}) \cdot \vec{x} = \langle (\vec{a}_i + \vec{b}_i), \vec{x} \rangle = \langle \vec{a}_i, \vec{x} \rangle + \langle \vec{b}_i, \vec{x} \rangle = \vec{a}_i^{\,T} \cdot \vec{x} + \vec{b}_i^{\,T} \cdot \vec{x}$

Wenden wir diese Eigenschaften auf alle Zeilen einer Matrix $A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{a}_j^{\,T} \end{pmatrix}$ an so ergibt sich:

Satz:

1 $A \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = A \cdot \vec{x} + A \cdot \vec{y}$

2 $A \cdot (\lambda \vec{x}) = \lambda (A \cdot \vec{x}) = (\lambda \cdot A) \cdot \vec{x}$

3 $(A + B) \cdot \vec{x} = A \cdot \vec{x} + B \cdot \vec{x}$

Für Matrizen gilt nach Definition:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \dots & \lambda \cdot a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda \cdot a_{j1} & \dots & \lambda \cdot a_{jk} \end{pmatrix}$$

Für Determinanten dagegen:

$$[\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{i-1}, \lambda \cdot \vec{a}_i, \vec{a}_{i+1}, \dots, \vec{a}_k] = \lambda \cdot [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{i-1}, \vec{a}_i, \vec{a}_{i+1}, \dots, \vec{a}_k]$$

$\leadsto$ **Konsequenz:**

Satz: $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^k \cdot \det A$

9.3.2 Matrixprodukt „Matrix mal Matrix“und lineare Abbildung — Produit matriciel ”matrice fois matirce” et application linéaire

Matrix und lineare Abbildung — Matrice et application linéaire

Sei $A\cdot\vec{u}=\vec{v},\ \ A=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{j1} & \ldots & a_{jm}\end{pmatrix}$ $j\times m$–Matrix $j\times m,\ \vec{u}\in\mathbb{R}^m,\ \ \vec{v}\in\mathbb{R}^j$

Durch A wird demnach dem Vektor $\vec{u}$ der Vektor $\vec{v}$ zugeordnet:
$\leadsto$ A stiftet eine Abbildung $\vec{u}\overset{\mathcal{A}}{\longmapsto}\vec{v}=A\cdot\vec{u}$.
oder $\mathcal{A}:\mathbb{R}^m\overset{\mathcal{A}}{\longmapsto}\mathbb{R}^j$.

Nochmals: $\mathcal{A}$ ist gegeben durch die Matrix A. Bei der Berechnung von $\vec{v}=A\cdot\vec{u}$ kommen nur lineare Operationen vor (Addition und Multiplikation). Daher nennen wir eine solche Abbildung **linear**.

Zusammensetzung linearer Abbildungen — Compositions d’applications linéaires

Sei $\mathcal{A}:\vec{u}\longmapsto\vec{v}=A\cdot\vec{u},\ \mathcal{B}:\vec{v}\longmapsto\vec{w}=B\cdot\vec{v}$
Dabei ist B eine $k\times j$–Matrix.
Kombiniert:

$$\begin{tikzcd} & \vec{v}=A\cdot\vec{u} \arrow[dr, mapsto, "\mathcal{B}"] & \\ \vec{u} \arrow[ur, mapsto, "\mathcal{A}"] \arrow[rr, mapsto, "\mathcal{B}\circ\mathcal{A}"'] & & \vec{w}=B\cdot\vec{v}=B\cdot(A\cdot\vec{u}) \end{tikzcd}$$

Für die zusammengesetzte Abbildung gilt demnach:

$$\mathcal{B}\circ\mathcal{A}:\vec{u}\longmapsto\vec{w}=B\cdot(A\cdot\vec{u})$$

Problem: Es stellt sich nun die naheliegende Frage, ob etwa die zusammengesetzte Abbildung $\mathcal{B}\circ\mathcal{A}$ wieder durch eine Matrix gegeben ist. — Und wen ja, durch welche Matrix?

Diese Frage wollen wir nun untersuchen.

Seien :

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{j1} & \ldots & a_{jm}\end{pmatrix}=(\begin{pmatrix} a_{11}\\ \vdots\\ a_{j1}\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix} a_{1m}\\ \vdots\\ a_{jm}\end{pmatrix})=(\vec{a_1},\ldots,\vec{a_m})=\begin{pmatrix}(a_{11},\ldots,a_{1m})\\ \vdots\\ (a_{j1},\ldots,a_{jm})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{\alpha_1}^{\,T}\\ \vdots\\ \vec{\alpha_j}^{\,T}\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1j}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{k1} & \ldots & b_{kj}\end{pmatrix}=(\begin{pmatrix} b_{11}\\ \vdots\\ b_{k1}\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix} b_{1j}\\ \vdots\\ b_{kj}\end{pmatrix})=(\vec{b_1},\ldots,\vec{b_j})=\begin{pmatrix}(b_{11},\ldots,b_{1j})\\ \vdots\\ (b_{k1},\ldots,b_{kj})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{\beta_1}^{\,T}\\ \vdots\\ \vec{\beta_k}^{\,T}\end{pmatrix}$$

$$\leadsto\quad \vec{w}=\mathcal{B}(\vec{v})=\mathcal{B}(A\cdot\vec{u})=B\cdot(A\cdot\vec{u})=B\cdot(\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{j1} & \ldots & a_{jm}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u_1\\ \vdots\\ u_m\end{pmatrix})=\ldots$$

$$=\begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1j}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{k1} & \ldots & b_{kj}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_{11}\cdot u_1+\ldots+a_{1m}\cdot u_m\\ \vdots\\ a_{j1}\cdot u_1+\ldots+a_{jm}\cdot u_m\end{pmatrix}=\ldots$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} \cdot (a_{11} \cdot u_1 + \ldots + a_{1m} \cdot u_m) + \ldots + b_{1j} \cdot (a_{j1} \cdot u_1 + \ldots + a_{jm} \cdot u_m) \\ \vdots \\ b_{k1} \cdot (a_{11} \cdot u_1 + \ldots + a_{1m} \cdot u_m) + \ldots + b_{kj} \cdot (a_{j1} \cdot u_1 + \ldots + a_{jm} \cdot u_m) \end{pmatrix} = \ldots$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} \cdot a_{11} \cdot u_1 + \ldots + b_{11} \cdot a_{1m} \cdot u_m + \ldots + b_{1j} \cdot a_{j1} \cdot u_1 + \ldots + b_{1j} \cdot a_{jm} \cdot u_m \\ \vdots \\ b_{k1} \cdot a_{11} \cdot u_1 + \ldots + b_{k1} \cdot a_{1m} \cdot u_m + \ldots + b_{kj} \cdot a_{j1} \cdot u_1 + \ldots + b_{kj} \cdot a_{jm} \cdot u_m \end{pmatrix} = \ldots$$

$$= \begin{pmatrix} u_1 \cdot (b_{11} \cdot a_{11} + \ldots + b_{1j} \cdot a_{j1}) + \ldots + u_m \cdot (b_{11} \cdot a_{1m} + \ldots + b_{1j} \cdot a_{jm}) \\ \vdots \\ u_1 \cdot (b_{k1} \cdot a_{11} + \ldots + b_{kj} \cdot a_{j1}) + \ldots + u_m \cdot (b_{k1} \cdot a_{1m} + \ldots + b_{kj} \cdot a_{jm}) \end{pmatrix} = \ldots$$

$$= \begin{pmatrix} (b_{11} \cdot a_{11} + \ldots + b_{1j} \cdot a_{j1}) & \ldots & (b_{11} \cdot a_{1m} + \ldots + b_{1j} \cdot a_{jm}) \\ \vdots & & \vdots \\ (b_{k1} \cdot a_{11} + \ldots + b_{kj} \cdot a_{j1}) & \ldots & (b_{k1} \cdot a_{1m} + \ldots + b_{kj} \cdot a_{jm}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = \ldots$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{\beta_1}^{\,T} \cdot \vec{a}_1 & \ldots & \vec{\beta_1}^{\,T} \cdot \vec{a}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \vec{\beta_k}^{\,T} \cdot \vec{a}_1 & \ldots & \vec{\beta_k}^{\,T} \cdot \vec{a}_m \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} \langle \vec{\beta}_1, \vec{a}_1 \rangle & \ldots & \langle \vec{\beta}_1, \vec{a}_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \vec{\beta}_k, \vec{a}_1 \rangle & \ldots & \langle \vec{\beta}_k, \vec{a}_m \rangle \end{pmatrix} \cdot \vec{u} := (B \circ A) \cdot \vec{u}$$

Definition:

$$(B \circ A) := \begin{pmatrix} \vec{\beta_1}^{\,T} \cdot \vec{a}_1 & \ldots & \vec{\beta_1}^{\,T} \cdot \vec{a}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \vec{\beta_k}^{\,T} \cdot \vec{a}_1 & \ldots & \vec{\beta_k}^{\,T} \cdot \vec{a}_m \end{pmatrix}$$

heisst **Produktmatrix** von A und B .

Satz:

1 Sei $\mathcal{B} \circ \mathcal{A} : \vec{u} \longmapsto \vec{w} = B \cdot (A \cdot \vec{u})$
Die zusammengesetzte Abbildung $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ ist wieder durch eine Matrix gegeben, die Produktmatrix $B \cdots A$.

2 Die Produktmatrix ist eine $k \times m$–Matrix, die wie folgt berechnet wird:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1j} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \ldots & b_{kj} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \ldots & a_{jm} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{\beta_1}^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{\beta_k}^{\,T} \end{pmatrix} \cdot (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m) = \begin{pmatrix} \vec{\beta_1}^{\,T} \cdot \vec{a}_1 & \ldots & \vec{\beta_1}^{\,T} \cdot \vec{a}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \vec{\beta_k}^{\,T} \cdot \vec{a}_1 & \ldots & \vec{\beta_k}^{\,T} \cdot \vec{a}_m \end{pmatrix}$$

Um in der Produktmatrix das Element in der Zeile j und der Spalte k, d.h. r_{jk} zu erhalten, multiplizert man also nach der Skalarproduktregel die Spalte j der ersten Matrix B mit der Zeile k der zweiten Matrix A.

Beispiele:

1 $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \; A \cdot B \neq B \cdot A$

2 $A \cdot E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = A$

3 $E \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = A$

4 $A \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N$

5 Allgemein:

$$A \cdot E = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = A$$

Ebenso: $E \cdot A = A$

$\leadsto$ Resultat:

Satz:

1 Allgemein ist für Matrizen:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Das Kommutativgesetz gilt nur in Spezialfällen.

2 Sei $N =$ Nullmatrix
$\leadsto \quad A \cdot N = N \cdot A = N$

3 Sei $E =$ Einheitsmatrix
$\leadsto \quad A \cdot E = E \cdot A = A$

9.3.3 Nochmals Matrixmultiplikation — Multiplication matricielle encore une fois

Exkurs: Herleitung der Matrixmultiplikation mit Hilfe von Gleichungssystemen:

Geg.: $B \cdot \vec{y} = \vec{x}, \ A \cdot \vec{x} = \vec{c} \ \Rightarrow \ A \cdot (B \cdot \vec{y}) = \vec{c} \overset{?}{=} (A \cdot B) \cdot \vec{y}, \ (A \cdot B) = \,?$

$\leadsto \ \vec{y} \overset{B}{\longmapsto} \vec{x} = B \cdot \vec{y} \overset{A}{\longmapsto} \vec{c} = A \cdot \vec{x} = A \cdot (B \cdot \vec{y}) \ = ?, \qquad \vec{y} \overset{B \circ A}{\longmapsto} \vec{c}, \qquad ''B \circ A'' \ = ?$

$$A \cdot \vec{x} = \vec{c} \leadsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot \vec{y} = \vec{x} \leadsto \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}\,y_1 + b_{12}\,y_2 \\ b_{21}\,y_1 + b_{22}\,y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\,(b_{11}\,y_1 + b_{12}\,y_2) + a_{12}\,(b_{21}\,y_1 + b_{22}\,y_2) \\ a_{21}\,(b_{11}\,y_1 + b_{12}\,y_2) + a_{22}\,(b_{21}\,y_1 + b_{22}\,y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}\,b_{11}\,y_1 + a_{11}\,b_{12}\,y_2 + a_{12}\,b_{21}\,y_1 + a_{12}\,b_{22}\,y_2 \\ a_{21}\,b_{11}\,y_1 + a_{21}\,b_{12}\,y_2 + a_{22}\,b_{21}\,y_1 + a_{22}\,b_{22}\,y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11}\,b_{11} + a_{12}\,b_{21})\,y_1 + (a_{11}\,b_{12} + a_{12}\,b_{22})\,y_2 \\ (a_{21}\,b_{11} + a_{22}\,b_{21})\,y_1 + (a_{21}\,b_{12} + a_{22}\,b_{22})\,y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}\,b_{11} + a_{12}\,b_{21} & a_{11}\,b_{12} + a_{12}\,b_{22} \\ a_{21}\,b_{11} + a_{22}\,b_{21} & a_{21}\,b_{12} + a_{22}\,b_{22} \end{pmatrix}}_{X} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \leadsto X := A \cdot B = \ ''B \circ A''$$

$$\leadsto\ A\cdot B := X = \begin{pmatrix} a_{11}\,b_{11}+a_{12}\,b_{21} & a_{11}\,b_{12}+a_{12}\,b_{22} \\ a_{21}\,b_{11}+a_{22}\,b_{21} & a_{21}\,b_{12}+a_{22}\,b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\leadsto\ A\cdot B := \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1^T \\ \vec{\alpha}_2^T \end{pmatrix}\cdot(\vec{b}_1,\vec{b}_2) = \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1^T\cdot\vec{b}_1 & \vec{\alpha}_1^T\cdot\vec{b}_2 \\ \vec{\alpha}_2^T\cdot\vec{b}_1 & \vec{\alpha}_2^T\cdot\vec{b}_2 \end{pmatrix}$$

Folgerung: $$(\vec{\alpha}_j^T)\cdot(\vec{b}_k) = (\vec{\alpha}_j^T\cdot\vec{b}_k)$$

$\leadsto$ Zeile j mal Spalte k = Zelle (j,k)

9.3.4 Untermatrizen — Des sous–matrices

Seien $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$

Dabei sind die A_{ik} und die B_{kj} Untermatrizen (Teilmatrizen) von zulässiger Grösse, so dass die nachfolgenden Operationen definiert sind.

Dann gilt:

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A_{11}\ A_{12})\cdot\begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix} & (A_{11}\ A_{12})\cdot\begin{pmatrix} B_{12} \\ B_{22} \end{pmatrix} \\ (A_{21}\ A_{22})\cdot\begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix} & (A_{21}\ A_{22})\cdot\begin{pmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ A\cdot B = \begin{pmatrix} A_{11}\cdot B_{11}+A_{12}\cdot B_{21} & A_{11}\cdot B_{12}+A_{12}\cdot B_{22} \\ A_{21}\cdot B_{11}+A_{22}\cdot B_{21} & A_{21}\cdot B_{12}+A_{22}\cdot B_{22} \end{pmatrix}$$

Konsequenz:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}\cdot B_{11}+A_{12}\cdot B_{21} & A_{11}\cdot B_{12}+A_{12}\cdot B_{22} \\ A_{21}\cdot B_{11}+A_{22}\cdot B_{21} & A_{21}\cdot B_{12}+A_{22}\cdot B_{22} \end{pmatrix}$$

Bsp.:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} B_{11} & X \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & Y \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}\ \Rightarrow\ A_{21}\cdot X + A_{22}\cdot B_{22} = C_{22},\ \ X,\ Y = ?$$

$$\Rightarrow\ X = A_{21}^{-1}\cdot(C_{22}-A_{22}\cdot B_{22})\ \Rightarrow\ Y = A_{11}\cdot X + A_{12}\cdot B_{22} = A_{11}\cdot A_{21}^{-1}\cdot(C_{22}-A_{22}\cdot B_{22}) + A_{12}\cdot B_{22}$$

9.4 Spezielle Matrizen, Inverse — Matrices spéciales, inverse

9.4.1 Spezielle geometrische Abbildungen — Applications géométriques spéciales

Streckungen — Allongements

1 Die **Nullmatrix** N bildet jeden Vektor $\vec{v}$ auf den Nullvektor $\vec{0}$ ab:

$$\forall_{\vec{v}} : N\cdot\vec{v} = \vec{0}\ \ (N\ j\times k\ \Rightarrow\ \vec{v}\in\mathbb{R}^k,\ \ \vec{0}\in\mathbb{R}^j)$$

2 Die **Einheitsmatrix** E bildet jeden Vektor $\vec{v}$ auf sich selbst ab:

$$\forall_{\vec{v}} : E\cdot\vec{v} = \vec{v}$$

3 $$S_\lambda := \lambda \cdot E = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

S_λ bewirkt eine zentrische Streckung :

$$\vec{v} \longmapsto S_\lambda \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$$

4 $$S_{i,\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (\lambda \text{ in Spalte } i\ .) \leadsto$$

$S_{i,\lambda}$ bewirkt eine Achsenstreckung (Achse i) .

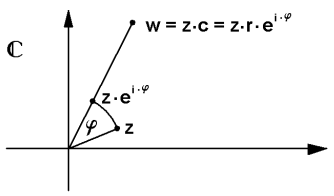
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{i-1} \\ \lambda \cdot v_i \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Es gilt: $S_{i,\lambda}^n = S_{i,\lambda^n}$

5 Ist $\lambda = -1$, so erhält man eine Spiegelung. .
$S_{i,-1} =$ Spiegelungsmatrix .

6 Drehmatrizen im $\mathbb{R}^2$: Vgl. nächster Abschnitt.

Drehungen — Rotations



Benutze die geometrischen Eigenschaften der komplexen Multiplikation. Eine Multiplikation von $z \in \mathbb{C}$ mit $c = |c| \cdot e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ bedeutet eine zentrische Streckung von z um $|c|$ und eine Drehung um $\varphi = Arg c$ um den Ursprung.

Wähle also $|c| = 1 \leadsto$ Drehung von $z = a + i\,b \hat{=} \binom{a}{b}$ um $\varphi = Arg(c)$.

$$\leadsto \quad z = a + i\,b \hat{=} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \vec{v} \overset{D_\varphi}{\longmapsto} \vec{v}\,' \hat{=} z' = a' + +i\,b' = z \cdot e^{i\varphi} \qquad \Rightarrow$$

$$\vec{v}\,' \hat{=} z' = a' + +i\,b' = (a + i\,b) \cdot (\cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi)) = (a\cos(\varphi) - b\sin(\varphi)) + i(a\sin(\varphi) + b\cos(\varphi))$$

$$\vec{v}\,' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a\cos(\varphi) - b\sin(\varphi)) \\ (a\sin(\varphi) + b\cos(\varphi)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = D_\varphi \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Satz:
$$D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$
bewirkt eine Drehung um den Winkel φ um den Ursprung O .

Begriff:
Die Matrix D_φ nennen wir **Drehmatrix**.

Achtung:

Bei Drehungen im $\mathbb{R}^3$ spielt die **Drehachse** eine wesentliche Rolle. Neben dem Winkel ist also die Achse anzugeben.

Drehungen im $\mathbb{R}^3$ lassen sich elementargeometrisch zusammensetzen aus Drehungen um zwei Koordinatenachsen. Solche Drehungen können mit Matrizen beschrieben werden, die aus Drehmatrizen im $\mathbb{R}^2$ gewonnen werden:

Z.B. $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} := D_{\varphi,3}$

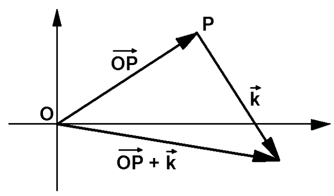
$\leadsto$ Drehung um die z–Achse .

Achtung: Allgemein ist:

$$D_{\alpha,i} \cdot D_{\beta,k} \neq D_{\beta,k} \cdot D_{\alpha,i} \ (i \neq k)$$

(Probiere: $i = 3,\ k = 1,\ \alpha = \beta = \pi$)

Verschiebungen — Translations



Problem:

Verschiebe einen Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ (Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$) mit Hilfe der Matrixmultiplikation.

$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \longmapsto A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av_1 + bv_2 \\ cv_1 + dv_2 \end{pmatrix} = \vec{v}\,' = \vec{v} + \vec{k} = \begin{pmatrix} v_1 + k_1 \\ v_2 + k_2 \end{pmatrix},$

$\vec{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{const.} \ \Rightarrow \ \forall_{v_1,v_2} : \ \begin{pmatrix} av_1 + bv_2 \\ cv_1 + dv_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + k_1 \\ v_2 + k_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \ b = 0 \ \wedge \ c = 0 \ \Rightarrow \ a = d = 1 \ \Rightarrow \ \vec{k} = \vec{const.}$ $\leadsto$ Widerspruch!

Folgerung: Eine Translation im $\mathbb{R}^2$ kann nicht durch eine Matrixmultiplikation in $\mathbb{R}^2$ ausgeführt werden.

Es gibt aber einen Ausweg mit Hilfe eines Tricks:

Trick: Gehe in den $\mathbb{R}^3$ in die Ebene Φ mit $z = 1$: $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \longmapsto \vec{v}^{\,*} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Benutze: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k_1 \\ 0 & 1 & k_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

$$\leadsto \quad \vec{v} \longmapsto A \cdot \vec{v}^{\,*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k_1 \\ 0 & 1 & k_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + k_1 \\ v_2 + k_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\leadsto$ Durch die Multiplikation von $\vec{v}^{\,*}$ mit A wird zu $\vec{v}^{\,*}$ der Translationsvektor $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ addiert.

$\leadsto$ **Konsequenz:** Der Trick besteht also darin, dass man statt in $\mathbb{R}^2$ die Operationen Streckung, Drehung, Translation in $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ ausführt. Dort kann man somit die Kongruenzabbildungen der ebenen Geometrie mit Hilfe einer einzigen Operationsart, den Matrixmultiplikationen, ausführen. Das ist nützlich in der Bildschirmgeometrie.

9.4.2 Reguläre Matrizen, Rang, Inverse — Matrices régulières, rang, inverses

Rang, Inverse — Rang, inverses

Wir repetieren Bekanntes:

1 Für ein Gleichungssystem $S: \ A \cdot \vec{x} = \vec{u}$ gilt:

2 $S: \ A \cdot \vec{x} = \vec{u} \ \Rightarrow \ \vec{x}_S = \vec{x}_{hom} + \vec{x}_{part}$

Lösung $\vec{x}$ eindeutig
$\Leftrightarrow \vec{x}_{hom} = \vec{0} \ \Leftrightarrow Dim(\mathbb{L}) = 0 \ \Leftrightarrow Ord(S) = Rang(S) \ \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

3 $\det(A) = \det(A^T)$

Somit gilt:

Satz: $S: \ A \cdot \vec{x} = \vec{u}$ eindeutig lösbar
$\Leftrightarrow A$ besitzt n linear unabhängige Zeilen und Spalten .

Denn nach Gauss–Jordan kann man A beim Lösen von $A \cdot \vec{x} = \vec{u}$ diagonalisieren. Dabei ändert der Rang nicht.

Sei also A eine $n \times n$–Matrix.

Zur Berechnung der Determinante ist es nützlich, die Matrix in eine Dreiecks– oder Diagonalmatrix umzuformen. Die verwendeten Umformungen sind Elementarsubstitutionen, die den Rang eines Geichungssystems nicht ändern. Wegen $\det(A) = \det(A^T)$ gilt daher: Anzahl linear unabhängige Zeilen von A = Anzahl linear unabhängige Spalten von A. (Sonst hätte man sofort für eine passende Untermatrix einen Widerspruch.)

Daher können wir jetzt definieren:

Definition: $Rang(A) :=$ Anzahl linear unabhängige Zeilen von A = Anzahl linear unabhängige Spalten von A

Singemäss sagt man: **Zeilenrang** = **Spaltenrang**.

Für die zu A gehörige Abbildung $\mathcal{A}$ können wir daher folgern:

$\forall_{\vec{u}}: \ A \cdot \vec{x} = \vec{u}$ eindeutig lösbar
$\Leftrightarrow \mathcal{A}: \ \vec{x} \longmapsto A \cdot \vec{x} = \vec{u}$ bijektiv

Konsequenz: Daher existiert zu $\mathcal{A}$ eine eindeutige, bijektive Umkehrabbildung $\mathcal{A}^{-1}$.

Problem: Es stellt sich die natürliche Frage, ob $\mathcal{A}^{-1}$ so wie $\mathcal{A}$ auch durch eine Matrix gegeben ist.

Zur Lösung des Problems verfolgen wir das folgende Konzept: Wir nehmen an, $\mathcal{A}^{-1}$ sei durch eine Matrix gegeben, die wir A^{-1} nennen. Falls es gelingt, A^{-1} zu berechnen, so ist mit dem Resultat der Berechnung die Existenz der Matrix A^{-1} bewiesen. Dass sich A^{-1} berechnen lässt, wollen wir nachstehend zeigen.

Definition: Im Falle der Existenz von $\mathcal{A}^{-1}$ heisst die zugehörige Matrix A^{-1} die **Inverse** (inverse Matrix) von A.

Rechnung : Sei $\mathcal{A}$ bijektiv $\Rightarrow$ $\mathcal{A}\circ\mathcal{A}^{-1} = Ident.$.

Wir nehmen an, dass die Matrix A^{-1} existiere.

Es gilt dann: $A\cdot A^{-1} = E \;\Rightarrow\; A\cdot X = E.$

Sei $X = (\vec{x}_1, \ldots \vec{x}_n) \;\Rightarrow\; A\cdot(\vec{x}_1, \ldots \vec{x}_n) = E = (\vec{e}_1, \ldots \vec{e}_n)$
Die Matrixmultiplikation folgt der Regel „Zeile mal Spalte“
Die Einschränkung auf Spalten ergibt daher Gleichungen der Form: $A\cdot\vec{x}_k = \vec{e}_k$.
Da nach Voraussetzung $\mathcal{A}$ bijektiv, also $A\cdot\vec{x} = \vec{u}$ eindeutig lösbar ist, ist auch $\forall_k : A\cdot\vec{x}_k = \vec{e}_k$ eindeutig lösbar, $\vec{x}_k$ ist eindeutig berechenbar.
$A^{-1} = X = (\vec{x}_1, \ldots \vec{x}_n)$ ist eindeutig berechenbar $\rightsquigarrow$

Satz:

<u>**Vor.:**</u>

$\mathcal{A}$ bijektiv

<u>**Beh.:**</u>

Zu $\mathcal{A}^{-1}$ existiert eindeutig eine Matrix $A^{-1} = X$.

$$\forall_{\vec{x}} : \quad \begin{pmatrix} \vec{x} = A^{-1}\cdot\vec{u} & \xrightarrow{\mathcal{A}} & A\cdot\vec{x} = \vec{u} \\ = A^{-1}\cdot(A\cdot\vec{x}) & \xleftarrow{\mathcal{A}^{-1}} & = A\cdot(A^{-1}\cdot\vec{u}) \\ = (A^{-1}\cdot A)\cdot\vec{x} & & = (A\cdot A^{-1})\cdot\vec{u} \end{pmatrix}$$

Hier ist die Assoziatiovität der Matrixmultiplikaiton verwendet worden. Diese gilt bekanntlich allgemein für Abbildungen. Denn wir wissen:

$\forall_{\vec{x}} : (\mathcal{A}\circ(\mathcal{B}\circ\mathcal{C}))(\vec{x}) = (A\cdot(B\cdot C))\cdot\vec{x}, \quad = (\mathcal{A}\circ(\mathcal{B}\circ\mathcal{C}))\cdot\vec{x} = ((\mathcal{A}\circ\mathcal{B})\circ\mathcal{C})(\vec{x}) = ((A\cdot B)\cdot C)\cdot\vec{x}$. Wähle $\vec{x} = \vec{e}_k,\;\; k = 1, 2, \ldots, n \;\Rightarrow\;$ spaltenweise überprüfbar: $A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$

Satz:

Vor.:

$((A \cdot B) \cdot C),\ (A \cdot (B \cdot C))$ seien definiert

Beh.:

$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

Verändere die Bezeichnungen: (Symb. $\hookrightarrow$)
$A \hookrightarrow A^{-1},\ B \hookrightarrow A,\ C \hookrightarrow \vec{x}$. ($\vec{x}$ als Matrix aufgefasst .)
$\rightsquigarrow \quad (A^{-1} \cdot A) \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot (A \cdot \vec{x})$.
Ebenso: $(A \cdot A^{-1}) \cdot \vec{u} = A \cdot (A^{-1} \cdot \vec{u})$.
$\rightsquigarrow \quad \forall_{\vec{x}} :\ \vec{x} = (\mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{A})(\vec{x}) = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}(\vec{x})) = (A^{-1} \cdot (A \cdot \vec{x})),\ \ \vec{x} = (\mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{A})(\vec{x}) = (A^{-1} \cdot A) \cdot \vec{x}$
$\Rightarrow\ \forall_{\vec{x}} :\ \vec{x} = (A^{-1} \cdot A) \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot (A \cdot \vec{x})\ \Rightarrow\ (A^{-1} \cdot A) = E,\ \ ((\mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{A}) = \mathit{Ident.} \,\hat{=} E)$
Ebenso: $(A \cdot A^{-1}) = E \rightsquigarrow$ **Konsequenz:**

Satz:

Vor.:

A sei $n \times n$– Matrix

Beh.:

1 $\mathit{Rang}(A) = \mathit{Ord}(S) = n \ \Leftrightarrow$ inverse Matrix A^{-1} existiert eindeutig

2 $\mathit{Rang}(A) = \mathit{Ord}(S) = n \ \Rightarrow \ A, A^{-1}$ stiften bijektive Abbildungen und
$(A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1}) = E$

Regularität — Réguliarité

Sei A $n \times n$–Matrix

Definition: $\mathit{Rang}(A) = n \ \Leftrightarrow A$
heisst **reguläre** Matrix

(Gegenteil: „Nicht regulär“. Die Erfahrung zeigt, das das sprachlogische deutsche Gegenteil „irregulär“ manchmal schon jemanden gestört hat.) $\rightsquigarrow$

Korollar: A regulär $\ \Leftrightarrow A$ besitzt Inverse

Im regulären Fall hat somit die Gleichung $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ nur die Nulllösung: $\mathbb{L} = \{\vec{0}\}$.

Falls im nicht–regulären Fall eine Lösung existiert, so existiert auch eine Lösung $\vec{x} \neq \vec{0}$ ($\mathit{Dim}(\mathbb{L}) > 0$).

Dann ist: : $A \cdot (\lambda \vec{x}) = \lambda (A \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}, \ \ \vec{x} \in \mathbb{L}$

Ebenso ist: $\vec{x_1}, \vec{x_2} \in \mathbb{L} \ \Rightarrow \ A \cdot (\vec{x_1} + \vec{x_2}) = \Rightarrow \ A \cdot \vec{x_1} + A \cdot \vec{x_2} = \vec{0} + \vec{0}.$

$\leadsto$ 1. $\vec{x} \in \mathbb{L} \ \Rightarrow \ \lambda \vec{x} \in \mathbb{L}$

2. $\vec{x_1}, \vec{x_2} \in \mathbb{L} \ \Rightarrow \ \vec{x_1} + \vec{x_2} \in \mathbb{L}$

Daraus ersieht man, dass $\mathbb{L} = \mathbb{L}_{hom}$ ein Vektorraum VR ist (von früher bekannt!).

Satz:

Vor.:

$A \cdot \vec{x} = \vec{0}$

Beh.:

$\mathbb{L} = \mathbb{L}_{hom}$ ist Vektorraum VR

In der Mathematik ist die folgende Definition gebräuchlich:

Definition: $\mathbb{L} = \mathbb{L}_{hom} = \{\vec{x} \mid A \cdot \vec{x} = \vec{0}\} = \{\vec{x} \mid \mathcal{A} : \ \vec{x} \longmapsto \vec{0}\}$
heisst **Kern** der Abbildung $\mathcal{A}$.

Weiter wissen wir, dass im Falle $Rang(A) = n$ alle Zeilen und Spalten von A linear unabhängig sind. Das bedeutet, dass die Spaltenvektoren von A einen n–dimensionalen Spat aufspannen mit dem Volumeninhalt $|\det(A)| \neq 0$ ($\neq 0$ wegen lin. unabh.). Gleiches gilt für die Inverse A^{-1}.

Satz:

Vor.:

A reguläre $n \times n$–Matrix

Beh.:

$\det(A) \neq 0, \ \ \det(A^{-1}) \neq 0$

Affinität — Affinité

Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \ \ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ zu Abblidung $\mathcal{A}$.

Es gilt: $\mathcal{A} : \ \vec{v} \longmapsto A \cdot \vec{v} = \vec{u}, \qquad \mathcal{A} : \ \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$

Definition: Falls A regulär ist, heisst $\mathcal{A}$ **affin**[4]

Satz: Eine affine Abbildung führt Geraden in Geraden über.

Zum Beweis:

[4] Lat. affinis: verwandt

$g: \ \vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 + ta_1 \\ r_2 + ta_2 \end{pmatrix} \longmapsto A \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} a \ b \\ c \ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 + ta_1 \\ r_2 + ta_2 \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} a\,r_1 + a\,t\,a_1 + b\,r_2 + b\,t\,a_2 \\ c\,r_1 + c\,t\,a_1 + d\,r_2 + d\,t\,a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,r_1 + b\,r_2 \\ c\,r_1 + d\,r_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a\,a_1 + b\,a_2 \\ c\,a_1 + d\,a_2 \end{pmatrix} = \vec{r}_0\,' + t \cdot \vec{a}\,'$
$\Rightarrow$ Gerade für $\vec{a}\,' \neq 0$.

9.4.3 Übersicht über die Gesetze der Matrizenrechnung — Vue d'ensemble des lois du calcul matriciel

Bekannt:

- $\oslash$ Berechnung der Summe zweier Matrizen $A + B$.
- $\oslash$ Berechnung des Produkts einer Matrix mit einem Skalar $\lambda \cdot A$.
- $\oslash$ Berechnung des Produkts zweier Matrizen $A \cdot B$.
- $\oslash$ Einheitsmatrix E, Nullmatrix N, Inverse A^{-1}. (Berechnung vgl. später.)

Seien

$$M_{j,k} := \{A \mid A \text{ ist } j \times k\text{–Matrix } \}$$

$$R_n := \{A \mid A \text{ regulär, } n \times n\text{–Matrix } \}$$

$$-A := (-1) \cdot A$$

Da die nachstehend erwähnten Operationen in den Matrizen zellenweise ausgeführt werden, können wir folgern:

Konsequenz:

- $\oslash$ $A, B \in M_{j,k} \ \Rightarrow \ A + B \in M_{j,k}$

  ($M_{j,k}$ **abgeschlossen** bezüglich $''+''$.)
- $\oslash$ $A + B = B + A$ (**Kommutativität**)
- $\oslash$ $(A + B) + C = A + (B + C)$ (**Assoziativität**)
- $\oslash$ $A + N = N + A = A$ (**Neutrales Element**)
- $\oslash$ $A + (-A) = N$ (**Inverses** $(-A)$ bezüglich $''+''$)

$\leadsto$ **Konsequenz:**

Satz: $(M_{j,k}\,, +)$ ist abelsche Gruppe

Für $A, B \in M_{j,k}\,,\ \ j \neq k$ ist $A \cdot B$ nicht definiert.
Daher ergibt $(M_{j,k}\,, \cdot)$ keine sinnvolle Struktur .

Hingegen ist $A \cdot B$ definiert für $A, B \in M_{n,n}$.
Seien also: $A, B \in M_{n,n}$.

Bekannt:

1 $A \cdot B \neq B \cdot A$ (ausser in Spezialfällen) .

$\leadsto$ **Nicht kommutativ**

Speziell: : $A^{-1} \cdot B \neq B \cdot A^{-1}$ (A^{-1} statt A)

Da somit die Reihenfolge der Faktoren wesentlich ist, macht die Schreibweise $\dfrac{B}{A}$ keinen Sinn. Denn bei dieser Schreibweise ist die Reihenfolge nicht definiert.

2 $M_{n,n}$ **abgeschlossen** bezüglich $''\cdot''$: :
$A, B \in M_{n,n} \Rightarrow A \cdot B \in M_{n,n}$

3 $\forall_{A,B,C}$: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$: **Assoziativität** :
(Oben gezeigt .)

4 $\forall_A$: $A \cdot E = E \cdot A = A$
$\Rightarrow$ $\exists$ neutrales Element (**Einselement**) .

5 Noch nicht gezeigt: Verbindung zwischen $''+''$ und $''\cdot''$ $\leadsto$ **Distributivgesetze**

$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C, \;\; (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

Zum Beweis: Verwende Assoziativität der Matrixmultiplikation sowie Distributivität des Produktes „Matrix mal Vektor".

$\forall_{\vec{x}}$: $(A \cdot (B + C)) \cdot \vec{x} = A \cdot ((B + C) \cdot \vec{x}) = A \cdot (B \cdot \vec{x} + C \cdot \vec{x}) = A \cdot (B \cdot \vec{x}) + A \cdot (C \cdot \vec{x})$
$= (A \cdot B) \cdot \vec{x} + (A \cdot C) \cdot \vec{x}$

Wähle nun: $\vec{x} = \vec{e}_k, \;\; k = 1, 2, \ldots, n$
$\Rightarrow$ $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ gilt spaltenweise .

Ebenso für

6 Reguläre Matrizen haben **Inverse**:

7 **Abgeschlossenheit:** $A, B \in R_n \Rightarrow A \cdot B \in R_n$

8 **Inverse des Produkts** $\leadsto$ Einzelne Faktoren vertauschen:
Seien $A, B \in R_n \Rightarrow A \cdot B, \;\; B \cdot A \in \mathbb{R}_n$

$$\begin{tikzcd} & \vec{v} = A \cdot \vec{u} \arrow[dr, mapsto, "\mathcal{B},\ bij."] & \\ \vec{u} \arrow[ur, mapsto, "\mathcal{A},\ bij."] \arrow[rr, mapsto, "\mathcal{B}\circ\mathcal{A},\ bij."'] & & \vec{w} = B \cdot \vec{v} = B \cdot (A \cdot \vec{u}) = (B \cdot A) \cdot \vec{u} \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ $(B \cdot A) \cdot (A^{-1} \cdot B^{-1}) = B \cdot (A \cdot A^{-1}) \cdot B^{-1} = B \cdot B^{-1} = E = (B \cdot A) \cdot (B \cdot A)^{-1}$
$\Rightarrow$ $(A^{-1} \cdot B^{-1}) = (B \cdot A)^{-1}$

Satz: $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

9 **Nicht–Abgeschlossenheit** von $(R_n\,,+)$:

Bsp.: $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\in R_n\,,\ (\det(A)=1),\ B=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}\in R_n\,,$
$(\det(B)=-1),\ A+B=\begin{pmatrix}2&2\\0&0\end{pmatrix}\not\in R_n\,,\ (\det(A+B)=0)$

10 $(M_{n,n}\,,\cdot)$ **nicht nullteilerfrei** :

$\leadsto\ \exists_{A,B}:\ A\neq N,\ B\neq N,\ A\cdot B=N$

Bsp.: $A\cdot B=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=N$

$\leadsto\ A\cdot B=N=A\cdot N\not\Rightarrow B=N$ Kürzen nicht erlaubt!

Folgerungen: (Zur algebraischen Struktur der Matrizen mit ihren Operationen .)

1 $(M_{n,n}\ ,+)$ ist eine abelsche Gruppe .

2 $(M_{n,n}\ ,+,\cdot)$ ist ein nicht–kommutativer, nicht nullteilerfreier Ring mit Einselement .

3 $(R_n\ ,\cdot)$ ist eine nicht–abelsche Gruppe .

4 $(R_n\ ,+)$ ist nicht abgeschlossen .

Anwendungen:
Z.B. beim **Lösen von Gleichungen**.

Eine Gruppe ist diejenige algebraische Struktur, in der algebraische Gleichungen lösbar sind, in denen die Unbekannten isoliert vorkommen, z.B. $a\circ x=b$ (Unbekannte nicht in Verknüpfung mit Unbekannten).

Bsp.: $(A,B,C,\ldots$ reguläre Matrizen, X unbekannt)

1 $A\cdot(X\cdot(C\cdot D))=D\ \Rightarrow\ A\cdot(X\cdot C)\cdot D\cdot D^{-1}=D\cdot D^{-1}=E\ \Rightarrow\ X=A^{-1}\cdot C^{-1}$

2 $A\cdot(X\cdot(C\cdot D))=C\cdot D\ \Rightarrow\ (A\cdot X)\cdot(C\cdot D)=C\cdot D\ \Rightarrow\ A\cdot X=E\ \Rightarrow\ X=A^{-1}$

3 $A\cdot X+2X=C-X\ \Rightarrow\ A\cdot X+3E\cdot X=C\ \Rightarrow\ (A+3E)\cdot X=C=X=(A+3E)^{-1}\cdot C$

4 $\begin{pmatrix}1&0&-1\\3&1&-3\\1&2&-2\end{pmatrix}\cdot(\begin{pmatrix}-4&2&-1\\-3&1&0\\-5&2&-1\end{pmatrix}\cdot X)+\begin{pmatrix}-2&1&0\\0&-3&4\\2&0&6\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Kurz: $A(B\cdot X)+C=3D\ \Rightarrow\ A(B\cdot X)=3D-C\ \Rightarrow\ X=B^{-1}\cdot A^{-1}\cdot(3D-C)$

$\leadsto$ **Problem:**

Berechung der Inversen $B^{-1}\cdot A^{-1}=(A\cdot B)^{-1}$!

Achtung: Bei der Berechnung von Matrixprodukten mit dem Rechner muss die Operationsreihenfolge genau beachtet werden. Das Matrixprodukt ist nicht kommutativ!

$$A \cdot B^{-1} \stackrel{?}{=} \frac{A}{B} \stackrel{?}{=} B^{-1} \cdot A \;\Rightarrow\; \frac{A}{B} \text{ sinnlos .}$$

Bemerkung:

Falls man das Problem der Berechnung der Inversen Matrix gemeistert hat, kann man damit auch **Gleichungssysteme einfacher lösen**:

$A \cdot \vec{x} = \vec{u} \;\Rightarrow\; \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{u}$ (falls A^{-1} existiert).

Das ist vor allem nützlich beim Rechnen mit Computern .

9.4.4 Berechnung der Inversen einer regulären Matrix — Calculer l'inverse d'une matrice régulière

Mit Hilfe von Gauss–Jordan — A l'aide de Gauss–Jordan

Sei $A \in R_n$ **Problem:** $A^{-1} = X = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) =?$

Bekannt: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = A \cdot X = E = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$
$\leadsto$ $A \cdot X = E$ oder $A \cdot (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$

Das Matrixprodukt wird nach der Vorschrift „Zeile r mal Spalte s (d.h. $\vec{x}_s$) gleich Element a_{rs}“ resp. „Matrix A mit Zeilen $r = 1, \ldots, n$ mal Spalte s gleich Elemente a_{rs}, $r = 1, \ldots, n$ gleich Vektor $\vec{e}_s$“gebildet.

Um $A^{-1} = X$ zu berechnen, müssen demnach n Gleichungen folgender Art gelöst werden:

$$A \cdot \vec{x}_s = \vec{e}_s$$

Idee: Wende den Algorithmus von Gauss–Jordan zur Lösung der Gleichungen an. Wende diesen Algorithmus simultan an auf alle n Gleichungssysteme. Dadurch wird der Aufwand nicht wesentlich grösser im Vergleich zu einem einzigen System.

Bsp.:

$$A \cdot A^{-1} = A \cdot (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\leadsto$ Im Schema nach Gauss–Jordan stehen jetzt auf der rechten Seite 3 Kolonnen statt wie bisher nur eine. Denn es sind simultan 3 Gleichungen zu lösen. Im Resultat stehen dann rechts wieder 3 Kolonnen, d.h. eine Matrix $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = X = A^{-1}$.

$\rightsquigarrow$

1	0	-1	1	0	0	
3	1	-3	0	1	0	$A \cdot X = E$
1	2	-2	0	0	1	
1	0	-1	1	0	0	
0	1	0	-3	1	0	
0	2	-1	-1	0	1	
1	0	-1	1	0	0	
0	1	0	-3	1	0	
0	0	-1	5	-2	1	
1	0	0	-4	2	-1	
0	1	0	-3	1	0	
0	0	-1	5	-2	1	
1	0	0	-4	2	-1	
0	1	0	-3	1	0	$E \cdot X = A^{-1}$
0	0	1	-5	2	-1	

$$\rightsquigarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe von Cramer — A l'aide de Cramer

Eine andere Methode ergibt sich mit Hilfe der **Cramerschen Regeln**

Betrachte dazu $\quad A \cdot (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = E \rightsquigarrow$

$$A \cdot \vec{x}_k = \vec{e}_k \quad \text{d. h.} \quad A \cdot \begin{pmatrix} x_{1k} \\ \vdots \\ x_{jk} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{pmatrix} = \vec{e}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ Zeile } \ k$$

Nach Cramer gilt für die Lösungen:

$$x_{jk} = \frac{\det(A_{j,\vec{e}_k})}{\det(A)}, \quad j = 1, \ldots, n$$

Dabei kann man $\det(A_{j,\vec{e}_k})$ wie folgt interpretieren:

$$\det(A_{j,\vec{e}_k}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{k,j-1} & 1 & a_{k,j+1} & \ldots & a_{kn} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$(-1)^{(k+j)-2} \det \begin{pmatrix} 1 & a_{k1} & \ldots & a_{kn} \\ 0 & a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{k1} & \ldots & a_{kn} \\ 0 & & \ldots & \\ \vdots & \vdots & A_{kj} & \vdots \\ 0 & & \ldots & \end{pmatrix} = (-1)^{(k+j)-2} \det A_{kj} = \alpha_{kj}$$

$\rightsquigarrow$ algebraisches Komplement von a_{kj} (Kofaktor) .

$$\Rightarrow \; x_{jk} = \frac{\alpha_{kj}}{\det(A)}$$

Wichtig:

Beachte die vertauschten Indices!

$$\leadsto \quad X = A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1n} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A}^T$$

$\tilde{A} = A_{adj}$: Adjunkte von A

Satz: <u>**Vor.:**</u> A regulär $\quad (\det(A) \neq 0)$

<u>**Beh.:**</u> $A^{-1} = \dfrac{\tilde{A}^T}{\det(A)}$

Anwendung: Berechnung der Inversen kleiner Matrizen — Application: Calculer l'inverse des matrices petites

Die Berechnung der Inversen mit Hilfe der Adjunkten eignet sich vor allem für kleine Matrizen.

Bsp.: 2×2– Matrix: :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\tilde{A}^T}{\det(A)} = \frac{1}{a\,d - b\,c} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\text{Z.B. } : \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 5 - 2 \cdot 3} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

9.4.5 Regeln für Transponierte und Produkt — Règles pour la transposé et le produit

Für die Inverse kennen wir den Vertauschungssatz: $\quad (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Interessanterweise gilt für die Transponierte eine entsprechende Regel:

$$\text{Benutze die Abkürzung: } C = \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1s} & \ldots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \ldots & c_{rs} & \ldots & c_{rn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \ldots & c_{ns} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix} := (c_{rs} \ldots)$$

$$\text{Sei} \quad (A \cdot B)^T = (\begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_n^{\,T} \end{pmatrix} \cdot (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n))^T \stackrel{Ab.}{=} ((\vec{\alpha}_r^{\,T} \ldots) \cdot (\vec{b}_s \ldots))^T = (((\vec{\alpha}_r^{\,T}) \cdot (\vec{b}_s)) \ldots)^T$$

$$= (\langle \vec{\alpha}_r, \vec{b}_s \rangle \ldots)^T = (\langle \vec{b}_s, \vec{\alpha}_r \rangle \ldots) = ((\vec{b}_s^{\,T} \cdot \vec{\alpha}_r) \ldots) = (\vec{b}_s^{\,T} \ldots) \cdot (\vec{\alpha}_r \ldots) = (\begin{pmatrix} \vec{b}_1^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{b}_n^{\,T} \end{pmatrix} \cdot (\vec{\alpha}_1, \ldots, \vec{\alpha}_n))^T =$$

$$= B^T \cdot A^T$$

Satz: $\quad (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Konsequenz:
$(M^T)^{-1} \cdot M^T = E = (M \cdot M^{-1}) = E^T = (M \cdot M^{-1})^T = (M^{-1})^T \cdot M^T \;\Rightarrow\; (M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$.

D.h. transponieren und invertieren sind vertauschbar.

Satz: $(M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$

Weiter gilt:

Satz: <u>**Vor.:**</u>

A beliebige Matrix

<u>**Beh.:**</u>

$A^T \cdot A$ symmetrisch

<u>**Beweis:**</u> Sei $A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \;\Rightarrow\; A^T = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^T \\ \ldots \\ \vec{a}_n^T \end{pmatrix}$

$\Rightarrow\; M = (m_{k,j}) = A^T \cdot A = (\vec{a}_k^T \cdot \vec{a}_j) = \langle \vec{a}_k, \vec{a}_j \rangle = \langle \vec{a}_j, \vec{a}_k \rangle = (\vec{a}_j^T \cdot \vec{a}_k) = (m_{j,k}) = M^T$ ☺

Bemerkung: Allgemein gilt aber $A^T \cdot A \neq A \cdot A^T$.

<u>**Beweis:**</u>

Sei $m \neq n,\; A:\; (m \times n) \;\Rightarrow\; A^T:\; (n \times m) \;\Rightarrow\; A^T \cdot A:\; (n \times n) \;\wedge\; A \cdot A^T:\; (m \times m)$
$\Rightarrow\; A^T \cdot A \neq A \cdot A^T$

9.4.6 Schwach besetzte Matrizen — Matrices aux éléments minuscules

Sei $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \in M_{n,n}$
Wir betrachten jetzt speziell solche Matrizen, die in der Hauptdiagonale viel grössere Elemente haben als neben der Hauptdiagonale. Speziell: Die Summe der absoluten Elemente einer Zeile ohne das Hauptdiagonalelement soll kleiner sein als das Hauptdiagonalelement. Wir definieren:

Definition: Für A gilt das **starke Zeilenkriterium**
$\Leftrightarrow \forall_i:\; |a_{ii}| > \sum\limits_{j=1, i\neq j} a_{ij}$

Nun gilt der Satz:

Satz:

Vor.:

Für $A \in M_{n,n}$ oder für A^T gilt das starke Zeilenkriterium.

Beh.:

$$A \in R_n \text{ (regulär)}$$

Beweis:

Indirekt $\rightsquigarrow$ Annahme: A singulär.
$\rightsquigarrow$ $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ hat eine Lösung $\vec{x} \neq \vec{0}$.

$$\text{Sei} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad |x_k| := \mathrm{Max}_{1\leq i\leq n}|x_i|, \qquad \vec{x} \neq \vec{0} \Rightarrow |x_k| \neq 0, \ \frac{|x_j|}{|x_k|} \leq 1$$

$$\rightsquigarrow A \cdot \vec{x} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1,j} \cdot x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{n,j} \cdot x_j \end{pmatrix} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} \cdot x_j = 0 \Rightarrow a_{k,k} \cdot x_k = -\sum_{j=1,\ j\neq k}^{n} a_{k,j} \cdot x_j$$

$$\Rightarrow |a_{k,k}| = |\sum_{j=1,\ j\neq k}^{n} a_{k,j} \cdot \frac{x_j}{x_k}| \leq \sum_{j=1,\ j\neq k}^{n} |a_{k,j}| \cdot \frac{|x_j|}{|x_k|} \leq \sum_{j=1,\ j\neq k}^{n} |a_{k,j}| \Rightarrow |a_{k,k}| \leq \sum_{j=1,\ j\neq k}^{n} |a_{k,j}| \rightsquigarrow$$

Widerspruch zu starkem Zeilenkriterium.

$\rightsquigarrow$ $A \in R_n \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow A^T \in R_n. \rightsquigarrow$ ☺

Bsp.: Sei $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A \in R_n$.

9.4.7 Rechenbeispiele — Exemples de calcul

Beispiele: Berechne X !

1 $3 \cdot X \cdot A^2 + A \cdot B = N \Rightarrow X \cdot (3A^2) = (-1) \cdot A \cdot B \Rightarrow X = (-\frac{1}{3}) \cdot A \cdot B \cdot (A^2)^{-1}$

2 $A \cdot B^2 \cdot X - 2A^T \cdot x = A^2 \cdot b^T \cdot C$
$\Rightarrow (A \cdot B^2 - 2A^T) \cdot X = A^2 \cdot B^T \cdot C \Rightarrow X = (A \cdot B^2 - 2A^T)^{-1} \cdot A^2 \cdot B^T \cdot C$

3 $A \cdot V^2 - 2A^T \cdot X = A^2 \cdot B^T \cdot C$
$\rightsquigarrow X = \dfrac{1}{2}(A^T)^{-1} \cdot (A \cdot V^2 - A^2 \cdot B^T \cdot C)$

4 $A \cdot \vec{x} + \lambda \cdot B \cdot \vec{x} = \vec{c} \Rightarrow (A + \lambda \cdot B) \cdot \vec{x} \Rightarrow \vec{x} = (A + \lambda \cdot B)^{-1} \cdot \vec{c}$,
falls $(A + \lambda \cdot B)^{-1}$ existiert .

5 $A^T \cdot X = B^T + A - A^T$
$\Rightarrow X = (A^T)^{-1} \cdot B^T + (A^T)^{-1} \cdot A - (A^T)^{-1} \cdot A^T = (A^{-1})^T \cdot B^T + (A^{-1})^T \cdot (A^T)^T - (A^{-1})^T \cdot A^T$
$= (B \cdot A^{-1})^T + (A^T \cdot A^{-1})^T - (A \cdot A^{-1})^T = (B \cdot A^{-1} + A^T \cdot A^{-1})^T - E$
$= ((B + A^T) \cdot A^{-1})^T - E = (A^{-1})^T \cdot (B^T + A) - E \ (= X)$

9.5 Nochmals geometrische Anwendungen — D'autres applications géométriques

9.5.1 Matrixkomposition — Composition de matrices

Geg.:

$\vec{v_1} \longmapsto M \cdot \vec{v_1} = \vec{w_1},\ \vec{v_2} \longmapsto M \cdot \vec{v_2} = \vec{w_2}, \ldots,\ \vec{v_n} \longmapsto M \cdot \vec{v_n} = \vec{w_n}, \qquad \vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}$ Basis B .

Rezept:

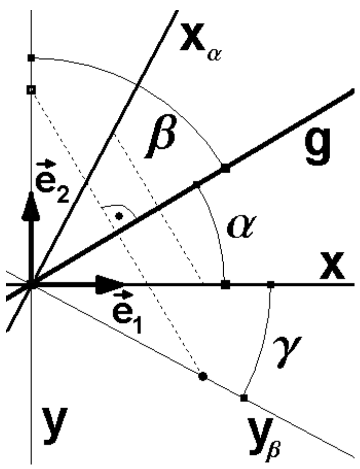
$$\leadsto\ M \cdot \underbrace{(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n})}_{B,\quad \det(B)\neq 0} = \underbrace{(\vec{w_1}, \vec{w_2}, \ldots, \vec{w_n})}_{W} \ \Rightarrow\ M \cdot B = W \ \Rightarrow\ M = W \cdot B^{-1}$$

Bsp.: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ w1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$

$$w_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ W = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ M = W \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

9.5.2 Matrix zur Geradenspiegelung — Matrice pour la réflexion à une droite

Spiegelung an einer Geraden g in einer Ebene:



$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - 2\,\beta = \frac{\pi}{2} - 2\,(\frac{\pi}{2} - \alpha) = -\frac{\pi}{2} + 2\,\alpha$$

$$S_g\ :\ \vec{e}_1, x \mapsto x_\alpha,\ \ S_g(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos(2\,\alpha) \\ \sin(2\,\alpha) \end{pmatrix}$$

$$S_g\ :\ \vec{e}_2, y \mapsto y_\beta,\ \ S_g(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{2} + 2\,\alpha) \\ \sin(-\frac{\pi}{2} + 2\,\alpha) \end{pmatrix}$$

$$S_g(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} \cos(2\,\alpha)\ \cos(-\frac{\pi}{2}) - \sin(2\,\alpha)\ \sin(-\frac{\pi}{2}) \\ \sin(-\frac{\pi}{2})\ \cos(2\,\alpha) + \cos(-\frac{\pi}{2})\ \sin(2\,\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ S_g(\vec{e}_2) = S_g(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} \cos(2\,\alpha) \cdot 0 - \sin(2\,\alpha) \cdot (-1) \\ (-1) \cdot \cos(2\,\alpha) + 0 \cdot \sin(2\,\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\sin(2\,\alpha) \\ -\cos(2\,\alpha) \end{pmatrix}$$

Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\,\vec{e}_1 + b\,\vec{e}_2$

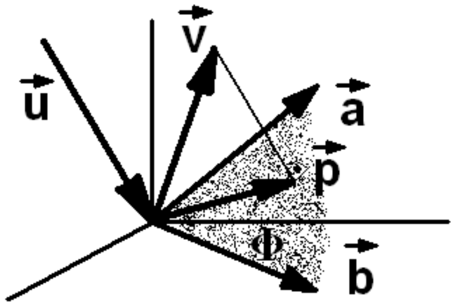
$$\leadsto\ S_g\ \vec{v} \mapsto S_g(\vec{v}) = a\,S_g(\vec{e}_1) + b\,S_g(\vec{e}_2) = a \begin{pmatrix} \cos(2\,\alpha) \\ \sin(2\,\alpha) \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} +\sin(2\,\alpha) \\ -\cos(2\,\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\ \cos(2\,\alpha) + b\ \sin(2\,\alpha) \\ a\ \sin(2\,\alpha) - b\ \cos(2\,\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\leadsto\ S_g(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a\ \cos(2\,\alpha) + b\ \sin(2\,\alpha) \\ a\ \sin(2\,\alpha) - b\ \cos(2\,\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\,\alpha) & \sin(2\,\alpha) \\ \sin(2\,\alpha) & -\cos(2\,\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Satz: Matrix zur Spiegelung an g:

$$S_{g,\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(2\,\alpha) & \sin(2\,\alpha) \\ \sin(2\,\alpha) & -\cos(2\,\alpha) \end{pmatrix}$$

9.5.3 Projektion auf Ebene, Matrix — Projection sur un plan, matrice



Geg.:
Projektionsrichtung $\vec{u}$, Ebene $\Phi(\vec{a},\vec{b})$

$\Phi = \{\vec{x} = \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

Projektion: $P_{\Phi,\vec{u}} \quad \rightsquigarrow$

$P_{\Phi,\vec{u}}(\vec{u}) = P_{\Phi,\vec{u}} \cdot \vec{u} = \vec{0} \qquad (*)$
$P_{\Phi,\vec{u}}(\vec{a}) = P_{\Phi,\vec{u}} \cdot \vec{a} = \vec{a} \qquad (*)$
$P_{\Phi,\vec{u}}(\vec{b}) = P_{\Phi,\vec{u}} \cdot \vec{b} = \vec{b} \qquad (*)$

$P_{\Phi,\vec{u}} =$ Projektionsmatrix $\quad \rightsquigarrow \; P_{\Phi,\vec{u}} \cdot (\vec{a},\vec{b},\vec{0}) = (\vec{a},\vec{b},\vec{0})$

$\rightsquigarrow \; Kern(P_{\Phi,\vec{u}}) = \{t\,\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\}, \qquad Image(P_{\Phi,\vec{u}}) = \Phi = \{\vec{x} = \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

(*) $\rightsquigarrow$ 9 Gleichungen mit 9 Unbekannten!

Anderer Weg:

Sei $\{\vec{a},\vec{b},\vec{u}\} =$ Basis , $\quad \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \;\Rightarrow\; \exists_{\lambda,\mu,\nu}: \; \vec{v} = \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b} + \nu\,\vec{u}$

$$\rightsquigarrow \; \vec{v} = \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b} + \nu\,\vec{u} = \underbrace{(\vec{a},\vec{b},\vec{u})}_{A} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} \longmapsto P_{\Phi,\vec{u}}(\vec{v}) = \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b} + \nu\,\vec{0} = \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b}$$

$$\vec{v} = A \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \vec{v} \qquad \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot (A^{-1} \cdot \vec{v})$$

$$P_{\Phi,\vec{u}}(\vec{v}) = \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b} + \nu\,\vec{0} = \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b} = A \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix} = A \cdot (\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot (A^{-1} \cdot \vec{v}))$$

Satz: Matrix zur Projektion $P_{\Phi,\vec{u}}$:

$\{\vec{a},\vec{b},\vec{u}\} =$ Basis $\qquad (\det A = \det(\vec{a},\vec{b},\vec{u}) \neq 0)$

$$\Rightarrow \; P_{\Phi,\vec{u}} = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot A^{-1}$$

Sei $\; A = (\vec{a},\vec{b},\vec{u}), \;\; A' = (\vec{a},\vec{b},\vec{0})$

$$\Rightarrow \; P_{\Phi,\vec{u}}: \; A = (\vec{a},\vec{b},\vec{u}) \longmapsto A' = (\vec{a},\vec{b},\vec{0}) = P_{\Phi,\vec{u}} \cdot (\vec{a},\vec{b},\vec{u}) = P_{\Phi,\vec{u}} \cdot A$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}$ *l.u.*$\leadsto$ $\det(A) \neq 0 \;\Rightarrow\; A^{-1}$ ex.

$$\leadsto\; A' = P_{\Phi,\vec{u}} = \cdot A \;\Rightarrow\; P_{\Phi,\vec{u}} = A' \cdot A^{-1} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{0}) \cdot (\vec{a}, \vec{b}, \vec{u})^{-1}$$

Satz: Matrix zur Projektion $P_{\Phi,\vec{u}}$:

$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}\}$ = Basis $\quad (\det A = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}) \neq 0)$

$$\Rightarrow\; P_{\Phi,\vec{u}} = A' \cdot A^{-1} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{0}) \cdot (\vec{a}, \vec{b}, \vec{u})^{-1}$$

Weiter gilt:

Satz: Matrix zur Normalproj. $P_{\Phi,\vec{u}}$:

$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}\}$ = Basis $\quad (\det A = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}) \neq 0,\; \vec{u} = \vec{a} \times \vec{b})$
Sei $B = (\vec{a}, \vec{b}),\; \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow\; P_{\Phi,\vec{u}} = B \cdot (B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T$$

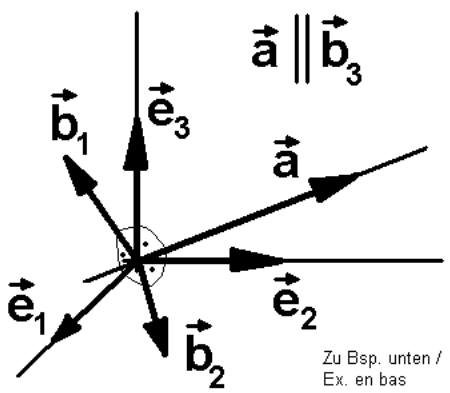
Beweis:

Z.B. automatisch: Verifiziere $B \cdot (B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T \equiv A' \cdot A^{-1}$ mit einem CAS, z.B mit *Mathematica*.

9.5.4 Drehung um Raumachse — Révolution autour d'une axe dans l'espace

Geg.: Achse a durch O, Achsenrichtung $\vec{a}$

Ges.: Drehe P $(\overrightarrow{OP})$ um a um α.



Wähle orthonormales Koordinatensystem $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ mit $\vec{b}_1 = \frac{1}{|\vec{a}|}\,\vec{a},\; \vec{b}_2 \perp \vec{b}_1$:
$\langle \vec{b}_1, \vec{b}_2 \rangle = 0,\; |\vec{b}_2| = 1.$

$\vec{b}_3 = \vec{b}_1 \times \vec{b}_2,\; \vec{b}_2 \neq 0,\; \vec{a} = \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}.$

Bsp.: $\vec{b}_2 \in V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} =$
$V = \{ \begin{pmatrix} -c \\ c \\ a-b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b-c \\ -a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ c-a \\ -b \end{pmatrix} \}$
$|\vec{v}_k| \to Max,\; k \to Max$

Andere Situation (siehe Bild oben):

Bsp.: Gegeben: Ebene Φ: $\Phi = \Phi(O, \vec{v}_1, \vec{v}_2),\; \vec{a} = \overrightarrow{OP_?} \perp \Phi.$

$\leadsto$ Wähle: $\vec{a} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2,\; \vec{b}_3 = \frac{1}{|\vec{a}|}\,\vec{a},\; \vec{b}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|}\,\vec{v}_1,\; \vec{b}_2 = \vec{b}_3 \times \vec{b}_1 \leadsto (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) = ONS$.

Suche Matrix M:

$$(M:\ \{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\}\longmapsto\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\})\ \Leftrightarrow (M^{-1}:\ \{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}\longmapsto\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\})$$

$\leadsto$ Es gilt: $\forall_k\ M^{-1}\cdot\vec{e}_k=\vec{b}_k\ \Rightarrow\ M^{-1}=(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)$

Lemma:

<u>**Vor.:**</u>

$$M^{-1}=(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)$$

<u>**Beh.:**</u>

$(M:\ \{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\}\longmapsto\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\})\ \Leftrightarrow (M^{-1}:\ \{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}\longmapsto\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\})$

Speziell: $M^{-1}\cdot\vec{e}_k=\vec{b}_k$

$\leadsto$ $M=(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)^{-1}:\ \vec{v}=\overrightarrow{OP}\longmapsto\vec{v}'=\overrightarrow{OP}'=M\cdot\overrightarrow{OP}=(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)^{-1}\cdot\overrightarrow{OP}$

P' kann man nun um α um die x–Achse ($\vec{e}_1$) drehen.

$$\leadsto\ \vec{v}''=\overrightarrow{OP}''=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{OP}'=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)^{-1}\cdot\overrightarrow{OP}$$

Jetzt kann man P'' mit Hilfe von M^{-1} wieder zurückabbilden und erhält so den gesuchten um a gedrehten Punkt P'''.

$$\leadsto\ \overrightarrow{OP}'''=(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)\cdot\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)^{-1}\cdot\overrightarrow{OP}\ ,\ \ \vec{v}'''=M^{-1}\cdot D_\alpha\cdot M\cdot\vec{v}$$

Satz:

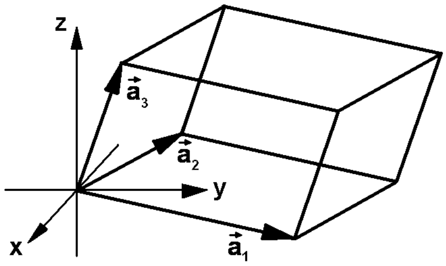
Drehmatrix $D_{\alpha,\vec{a}}$:

$(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)$ nach Konstriktion wie oben beschrieben

$$D_{\alpha,\vec{a}}=(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)\cdot\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)^{-1}=M^{-1}\cdot D_\alpha\cdot M$$

9.6 Matrixprodukt und Basiswechsel — Produit de matrices et changement de base

9.6.1 Determinantenmultiplikationssatz — Théorème de la multiplication des déterminants



Durch $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ ist ein n–dimensionaler Spat gegeben .
Bezüglich einer Orthonormalbasis ist das vorzeichenbehaftete Volumen dieses Spats gleich:
$[\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n] = \det A,\ A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$

Dabei ist:

$$\vec{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} = a_{1k}\vec{e}_1 + \ldots + a_{nk}\vec{e}_n$$

Problem: Was passiert mit diesem Volumen, wenn man von einer beliebigen gegebenen Basis $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ (hier $B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$) zu einer neuen Basis $B' = \{\vec{b}_1{}', \ldots, \vec{b}_n{}'\}$ übergeht?

Überlegung am Beispiel $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Neue Basis $B' = \{(\vec{e}_1)', (\vec{e}_2)', (\vec{e}_3)'\}$.

Sei $(\vec{e}_1)' = \frac{1}{2} \cdot \vec{e}_1,\ 2(\vec{e}_1)' = \vec{e}_1$

$$\leadsto \quad \vec{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ a_{3k} \end{pmatrix}_B = a_{1k} \cdot \vec{e}_1 + a_{2k} \cdot \vec{e}_2 + a_{3k} \cdot \vec{e}_3 = a_{1k} \cdot 2(\vec{e}_1)' + a_{2k} \cdot 2(\vec{e}_2)' + a_{3k} \cdot 2(\vec{e}_3)'$$

$$= a'_{1k} \cdot (\vec{e}_1)' + a'_{2k} \cdot (\vec{e}_2)' + a'_{3k} \cdot (\vec{e}_3)' = \begin{pmatrix} a'_{1k} \\ a'_{2k} \\ a'_{3k} \end{pmatrix}_{B'}$$

$$\text{mit} \quad a'_{ik} = 2a_{ik} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} a'_{1k} \\ a'_{2k} \\ a'_{3k} \end{pmatrix}_{B'} = 2 \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ a_{3k} \end{pmatrix}_B$$

Ein Basiswürfelinhalt $[(\vec{e}_1)', (\vec{e}_2)', (\vec{e}_3)']$ hat hier nur $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ des Volumeninhalts des ursprünglichen Basiswürfels ($[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]$), gemessen im ursprünglichen System B.

Hingegen wird die Masszahl des Inhalts des Spates $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}_B$ (bezüglich B) jetzt 8 mal so gross wie die Masszahl des Inhalts bezüglich B'. ($\{\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3\}_{B'}$.)

$$\leadsto \quad \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)_B = 8 \cdot \det(\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3)_{B'}, \quad \det(A)_B = 8 \cdot \det(A')_{B'}$$

Vergleich mit dem Entwicklungssatz:
$(m(\ldots) =$ Mass von $\ldots$, $\quad \ldots_B =$ bezüglich B)

$$\pm V_B = m(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n)_B = \det(A)_B = \sum_{\sigma_p,\ p=1}^{n!} (-1)^{sgn(\sigma_p)} \cdot a_{1k_1} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n} \cdot 1$$

$$= \sum_{\sigma_p,\ p=1}^{n!} (-1)^{sgn(\sigma_p)} \cdot a_{1k_1} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n} \cdot \det(E_B) = \sum_{\sigma_p,\ p=1}^{n!} (-1)^{sgn(\sigma_p)} \cdot a_{1k_1} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n} \cdot m(B_B) =$$

$$= \det(A_B)\cdot\det(B_B)$$

$$\pm V_{B'} = m(\vec{a}_1{}', \vec{a}_2{}', \ldots, \vec{a}_n{}')_{B'} = \det(A')_{B'} = \sum_{\sigma_p,\ p=1}^{n!} (-1)^{sgn(\sigma_p)}\cdot a'_{1k_1}\cdot\ldots\cdot a'_{nk_n}\cdot 1_{B'}$$
$$= \sum_{\sigma_p,\ p=1}^{n!} (-1)^{sgn(\sigma_p)}\cdot a'_{1k_1}\cdot\ldots\cdot a'_{nk_n}\cdot \det(E_{B'}) = \sum_{\sigma_p,\ p=1}^{n!} (-1)^{sgn(\sigma_p)}\cdot a'_{1k_1}\cdot\ldots\cdot a'_{nk_n}\cdot m(B'_{B'}) =$$
$$= \det(A'_{B'})\cdot\det(B'_{B'})$$

Dabei ist:
Volumeninhalt von B bezüglich B'
$= \det(B)_{B'} \rightsquigarrow$ $\qquad \det(A'_{B'}) = \pm V_{B'} = m(\vec{a}_1{}', \vec{a}_2{}', \vec{a}_3{}')_{B'} = \det(A_B)\cdot\det(B)_{B'}$

Im Beispiel oben:
$\det(A_{B'}) = \det(\vec{a}_1{}', \vec{a}_2{}', \vec{a}_3{}')_{B'} = [\vec{a}_1{}', \vec{a}_2{}', \vec{a}_3{}'] = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]\cdot 8,\ \ det((\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)_{\{(\vec{e}_1)', (\vec{e}_2)', (\vec{e}_3)'\}}) = 8$

Diese Problematik kennen wir längst z.B. beim Umrechnen physikalischer Masse. Etwa $18m^3 = 18\cdot 10^6 cm^3$. Hier findet ein Wechsel von der Einheitsbasis in m zur Einheitsbasis in cm statt.
Auf Grund dieser unmittelbaren Anschaulichkeit können wir folgenden Satz formulieren:

Satz:

Vor.:

$M' = A_{B'}$ definiere einen Spat S bezüglich der Basis B'
$M = A_B$ definiert S bezüglich B
$\det(B_{B'}) = \pm$ Volumeninhalt von B in der Basis B'

Beh.:

$\det(M') = \det(A_{B'}) = \det(A_B)\cdot\det(B_{B'}) = \det(M)\cdot\det(B_{B'})$
oder
$$\det(A_B) = \frac{\det(A_{B'})}{\det(B_{B'})}$$

Gewinn: Dieser Satz lässt sich auf die Determinante eines Matrixprodukts anwenden:

Für die nachfolgende Betrachtung nehmen wir an, dass für die Basen folgende Beziehungen gelten:
$$B' = \{\vec{b}_1{}', \ldots, \vec{b}_n{}'\} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\},\ \ B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$$

Der Spat S sei gegeben durch:

$A_B = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ resp. $A_{B'} = (\vec{a}'_1, \ldots, \vec{a}'_n)$
$\rightsquigarrow$ Beachte:

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{l} E\hat{=}\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\} = \\ B'\hat{=}\{\vec{b}_1{}', \ldots, \vec{b}_n{}'\} \end{array} \arrow[r, mapsto, "\mathcal{B}"] \arrow[rr, mapsto, bend left, "\mathcal{A}"] & B\hat{=}\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\} \arrow[r, mapsto, "\mathcal{C}=\mathcal{A}\circ\mathcal{B}^{-1}"] & A\hat{=}\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}
\end{tikzcd}$$

Dabei gehört zu $\mathcal{B}$ die Matrix $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ (Basis $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$). Entsprechend für $\mathcal{A}, \mathcal{C}$.

Für die Abbildung der Vektoren ergibt sich das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & \longmapsto & & \longmapsto\!\longmapsto & & \longmapsto\!\xrightarrow{\mathcal{A}} & & \longmapsto\!\longmapsto & \longmapsto \\
\nearrow & & & & & & & & \searrow \\
E & & & & B = B \cdot E & & & & \vec{a}_k = C \cdot \vec{b}_k = (A \cdot B^{-1}) \cdot \vec{b}_k \\
\vec{e}_k = B^{-1} \cdot \vec{b}_k = B^{-1} \cdot (B \cdot \vec{e}_k) & & \longmapsto\!\xrightarrow{\mathcal{B}} & & \vec{b}_k = B \cdot \vec{e}_k & & \longmapsto\!\xrightarrow{\mathcal{C}=\mathcal{A}\circ\mathcal{B}^{-1}} & & (A \cdot B^{-1}) \cdot (B \cdot \vec{e}_k) = A \cdot \vec{e}_k
\end{array}$$

Sei A eine reguläre Matrix, zu der die Determinante studiert werden soll. B stiftet eine Basisabbildung, d.h. muss ebenfalls regulär sein. (Somit existiert B^{-1}.) Wegen $C = A \cdot B^{-1}$ muss daher mit A auch C regulär sein. Ansonst sind A und B (und daher auch C) beliebig. $\leadsto$

$\pm$Volumeninhalt$(S)_{B' \hat{=} E} \;= \det(A) = \det(A_{B'})$
$\pm$Volumeninhalt$(S)_B \;= \det(C_B) = \det((A \cdot B^{-1})_B)$
$\pm$Volumeninhalt$(B)_{B'} \;= \det(B')$

Nach dem letzten Satz gilt:

$$\det(A_{B'}) = \det(C_B) \cdot \det(B_{B'}) \;\Rightarrow\; \det(A_{B'}) = \det((A \cdot B^{-1})_B) \cdot \det(B_{B'})$$

Kurz: $\quad \det(A) = \det(A \cdot B^{-1}) \cdot \det(B) = \det(C) \cdot \det(B)$,
Beachte: $\quad A_{B'},\; (A \cdot B^{-1})_B,\; B_{B'},\; C_B$ sind die gegebenen Matrizen $\quad (\leadsto\; A,\; A \cdot B^{-1},\; B,\; C)$.

Wir benützen $\quad A \cdot B^{-1} = C \;\Rightarrow\; A = C \cdot B \leadsto$
$\det(A) = \det(C \cdot B) = \det(A \cdot B^{-1}) \cdot \det(B) = \det(C) \cdot \det(B) \;\Rightarrow\; \det(C \cdot B) = \det(C) \cdot \det(B)$

Es gilt: $(C \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot C^{-1}$

Daraus ersehen wir, dass ein Produkt genau dann regulär ist, wenn die Faktoren regulär sind.
$\leadsto$ **Konsequenz:**

Satz: **Determinantenmultiplikationssatz**

Vor.:

$A_1, A_2 \in M_{n,n}$

Beh.:

$\det(A_1 \cdot A_2) = \det(A_1) \cdot \det(A_2)$

Wegen $\quad A \cdot A^{-1} = E \;$ und $\; 1 = \det(E) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$
folgt jetzt:

Korollar: **Vor.:** $A \in R_n$

Beh.: $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}$

Wir beachten: $\det(A^2) = \det(A) \cdot \det(A) = \det(A)^2$
und $\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1}, \lambda\vec{a}_k, \vec{a}_{k+1}, \ldots, \vec{a}_n) = \lambda \cdot \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1}, \vec{a}_k, \vec{a}_{k+1}, \ldots, \vec{a}_n)$

Dann folgt für $A \in M_{n,n}$

Korollar: $\det(A^k) = \det(A)^k$

Korollar: $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$

Korollar: $\det(\lambda \cdot E) = \det \begin{pmatrix} \lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^n \cdot \det(E) = \lambda^n$

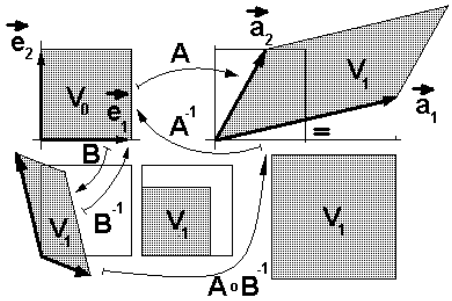
Beispiele:

1 $$\det(5 \cdot (\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{20})^{-1}) = 5^3 \cdot ((\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix})^{20})^{-1} = 125 \cdot ((1 \cdot 2 \cdot \tfrac{1}{2})^{20})^{-1} =$$
$$= 125 \cdot (1^{20})^{-1} = 125$$

2 $$\det(5 \cdot (\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{20})^{-1}) = 5^3 \cdot ((\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix})^{20})^{-1} = 125 \cdot ((1 \cdot 2 \cdot 1)^{20})^{-1} =$$
$$= 125 \cdot (2^{20})^{-1} = \frac{125}{2^{20}} = \frac{125}{1048576} = \frac{5^3}{2^{20}}$$

3 $$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120, \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{120},$$
$$(A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix})$$

9.6.2 Determinantenmult. vereinfacht — Multipl. des déterm. simplifiée



Sei $V_{-1} = 1\,old$

$V_0 = \det((\vec{e}_1, \vec{e}_2)) = 1\,original,$

$V_1 = \det((\vec{a}_1, \vec{a}_2)) \cdot 1\,original =$
$\det(A) \cdot 1\,original \;\hat{=}\; 1\,new$

$1\,original \;\hat{=}\; \det(A^{-1}) \cdot 1\,new$

$\Rightarrow\; 1\,original \;=\; \det(A^{-1}) \cdot \det(A) \cdot 1\,original$

Folgerung: $$1 = \det(A^{-1}) \cdot \det(A)$$

$$\Rightarrow\; \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

$V_{-1} = \det(B^{-1}) \cdot 1\,original \;\hat{=}\; 1\,old \;\Rightarrow\; 1\,original \;\hat{=}\; \det(B) \cdot 1\,old,$

$1\,new \;\hat{=}\; \det(A) \cdot 1\,original \;\Rightarrow\; 1\,new \;\hat{=}\; \det(A) \cdot \det(B) \cdot 1\,old$

$\det(A \circ B) \cdot 1\,old \;\hat{=}\; 1\,new \;\hat{=}\; \det(A) \cdot \det(B) \cdot 1\,old \;\Rightarrow\; \det(A \circ B) \cdot 1\,old = \det(A) \cdot \det(B) \cdot 1\,old$

$\Rightarrow\; \det(A \circ B) = \det(A) \cdot \det(B) = \det(B) \cdot \det(A) = \det(B \circ A)$

Folgerung: (1) $\det(A \circ B) = \det(A) \cdot \det(B)$

(1) $\det(A \circ B) = \det(B \circ A)$

9.6.3 Determinantenmult. u. Geometrie — Multipl. des déterm. et géom.

Geometrische Sätze — Théorèmes géométriques

Wir betrachten Matrixabbildungen:

$$\mathrm{M} : \vec{a} \longmapsto \vec{b} = M \cdot \vec{a} = \mathrm{M}(\vec{a})$$

$$\mathrm{M} : \vec{u} \longmapsto \vec{v} = M \cdot \vec{u} = \mathrm{M}(\vec{u})$$

$$\mathrm{A} : \vec{x} \longmapsto \vec{y} = A \cdot \vec{x} = \mathrm{A}(\vec{x})$$

$$A = (\vec{a}_1, \;\ldots,\; \vec{a}_n),\;\; \mathrm{A} : \vec{e}_k \longmapsto \vec{a}_k = A \cdot \vec{e}_k = \mathrm{A}(\vec{e}_k)$$

Es gilt: $(\vec{0} = M \cdot \vec{0} \;\wedge\; \vec{u} \neq \vec{0} \;\wedge\; \vec{v} = M \cdot \vec{u} = \vec{0}) \;\Leftrightarrow \det(A) = 0.$

$((\vec{0} \longmapsto \vec{0} = A \cdot \vec{0} = \mathrm{A}(\vec{0})) \;\wedge\; (\vec{0} \neq \vec{u} \longmapsto \vec{0} = A \cdot \vec{u} = \mathrm{A}(\vec{u})) \leadsto \quad \vec{0} \neq \vec{u}$ Urbilder zu $\vec{0}$.)

Sätze über Matrixabbildungen:

Sei $\det(A) \neq 0,\;\; \det(M) \neq 0,\;\; \ldots$

1 $g_1: \ \vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{a}, \ \ M \cdot \vec{r} = M \cdot (\vec{r}_0 + t \cdot \vec{a}) = M \cdot \vec{r}_0 + M \cdot (t \cdot \vec{a}) = \underbrace{M \cdot \vec{r}_0}_{\vec{s}_0} + t \cdot \underbrace{M \cdot \vec{a}}_{\vec{b} \neq \vec{0}} = \vec{s}_0 + t \cdot \vec{b}$

$\Rightarrow \ g_1: \ \vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{a} \longmapsto h_1: \ \vec{s} = \vec{s}_0 + t \cdot \vec{b}$

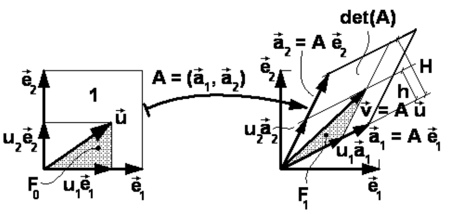
$\leadsto$ Das Bild einer Gerade ist eine Gerade.

2 $g_1 \| g_2, \ \ g_1: \ \vec{r} = \vec{r}_1 + t \cdot \vec{a} \longmapsto h_1: \ \vec{s} = \vec{s}_1 + t \cdot \vec{b}, \ \ g_2: \ \vec{r} = \vec{r}_2 + t \cdot \vec{a} \longmapsto h_2: \ \vec{s} = \vec{s}_2 + t \cdot \vec{b}$
$\Rightarrow \ h_1 \| h_2$.

$\leadsto$ Parallele Geraden werden in parallele Geraden abgebildet.

3 $\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + t_1 \cdot \vec{a} \longmapsto M \cdot \vec{r}_1 = \vec{s}_1 = \vec{s}_0 + t_1 \cdot \vec{b}$
$\vec{r}_2 = \vec{r}_0 + t_2 \cdot \vec{a} \longmapsto M \cdot \vec{r}_2 = \vec{s}_2 = \vec{s}_0 + t_2 \cdot \vec{b}$
$\leadsto \ (t_1 \cdot |\vec{a}|) : (t_2 \cdot |\vec{a}|) = \dfrac{t_1 \cdot |\vec{a}|}{t_2 \cdot |\vec{a}|} = \dfrac{t_1}{t_2} = \dfrac{t_1 \cdot |\vec{b}|}{t_2 \cdot |\vec{b}|} = (t_1 \cdot |\vec{b}|) : (t_2 \cdot |\vec{b}|)$.
$\leadsto$ Streckenverhältnisse an parallelen Strecken bleiben erhalten

4 **Abbildung von Flächen:** Polygonflächen lassen sich in achsenparallele Dreiecke zerlegen. Allgemeine Flächen lassen sich durch Polygonflächen approximieren. Somit gilt das Abbildungsverhalten bei achsenparallelen Dreiecken auch für allgemeine Flächen. Wir brauchen nur achsenparallele Dreiecke zu studieren.



$F(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \longmapsto F(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \det(A) = |\vec{a}_1| \cdot H.$

$\dfrac{h}{H} = \dfrac{u_2 \cdot |\vec{a}_2|}{|\vec{a}_2|} = u_2 \ \Rightarrow \ h = u_2 \cdot H$

$F_0 = \dfrac{u_1 \cdot u_2}{2} \longmapsto F_1 = \dfrac{u_1 \cdot |\vec{a}_1| \cdot h}{2} = \dfrac{u_1 \cdot |\vec{a}_1| \cdot u_2 \cdot H}{2} = \dfrac{u_1 \cdot u_2 \cdot |\vec{a}_1| \cdot H}{2}$

$$|\vec{a}_1| \cdot H = \det(A) \ \Rightarrow \ F_1 = \frac{u_1 \cdot u_2 \cdot \det(A)}{2} = F_0 \cdot \det(A)$$

$$\Rightarrow \ F_1 = \mathrm{A}(F_0) = F_0 \cdot \det(A)$$

$\leadsto$ Bei der Abbildung durch eine Matrix A wird ein Flächeninhalt mit $\det(A)$ multipliziert.

5 Sei $\ \vec{a} \not\parallel \vec{b}, \qquad (\vec{a}, \vec{b}) =$ Parallelogramm mit Inhalt $F_0 = \det(\vec{a}, \vec{b}) \ \ F_0 = \det(\vec{a}, \vec{b})$

Sei $\ \vec{a} \longmapsto \vec{c} = M \cdot \vec{a}, \ \ \vec{b} \longmapsto \vec{d} = M \cdot \vec{b}, \qquad F_0 = \det(\vec{a}, \vec{b}) \longmapsto F_1 = \det(\vec{c}, \vec{d}), \qquad F_0 \neq 0$

$\Rightarrow \ F_1 = \det(\vec{c}, \vec{d}) = \det(M) \cdot F_0 = \det(M) \cdot \det(\vec{a}, \vec{b}) \ \Rightarrow \ F_1 \neq 0$

Konsequenz: $\qquad \vec{a} \not\parallel \vec{b}, \ \ \vec{a} \longmapsto \vec{c} = M \cdot \vec{a}, \ \ \vec{b} \longmapsto \vec{d} = M \cdot \vec{b} \ \Rightarrow \ \vec{c} \not\parallel \vec{d}.$

$\leadsto$ d.h. nicht parallele Vektoren werden in nicht parallele Vektoren abgebildet.

6 $\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} \longmapsto M \cdot \vec{r} = M \cdot \vec{r}_0 + \lambda \cdot M \cdot \vec{a} + \mu \cdot M \cdot \vec{b} = \vec{s} = \vec{s}_0 + \lambda \cdot \vec{c} + \mu \cdot \vec{d}, \ \ \vec{a} \not\parallel \vec{b} \ \Rightarrow \ \vec{c} \not\parallel \vec{d}.$

$\leadsto$ d.h. eine Ebene wird in eine Ebene abgebildet.

7 $\vec a = \overrightarrow{OA} \longmapsto M\cdot\vec a = M\cdot\overrightarrow{OA} = \vec c = \overrightarrow{OC}$, $\quad \vec b = \overrightarrow{OB} \longmapsto M\cdot\vec b = M\cdot\overrightarrow{OB} = \vec c = \overrightarrow{OD}$, $\quad A \neq B$,
$\vec 0 = \overrightarrow{OO} \longmapsto M\cdot\vec 0 = M\cdot\overrightarrow{OO} = \vec 0$, $\quad \vec b - \vec a = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB} \neq \vec 0$

Sei $\;C = B \;\Rightarrow\; \vec 0 \neq \vec b - \vec a = \overrightarrow{AB} \longmapsto \vec d - \vec c = \overrightarrow{CD} = \vec 0$
$\Rightarrow\; ((\vec 0 \longmapsto \vec 0) \;\wedge\; (\vec 0 \neq \overrightarrow{AB} \longmapsto \vec 0)) \;\Rightarrow\; \det(M) = 0 \leadsto$ Widerspruch!

$\leadsto$ Punkte (Ortsvektoren) werden eineindeutig auf (Ortsvektoren) abgebildet. Verschiedene Punkte haben verschiedene Bilder.

8 $F_0 = \det((\vec e_1, \vec e_2)) = \det(E) = 1\cdot 1 = 1$

$F_1 = \det((\vec a_1, \vec a_2)) = \det(A)$

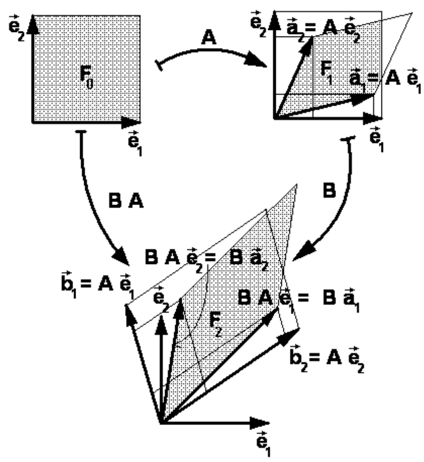
$F_2 = \det((\vec b_1, \vec b_2))\cdot\det(A) = \det(B)\cdot\det(A) \;\wedge$

$F_2 = \det(B\cdot A)$

Konsequenz:

Determinantenmultiplikationssatz

$$\det(B)\cdot\det(A) = \det(B\cdot A)$$

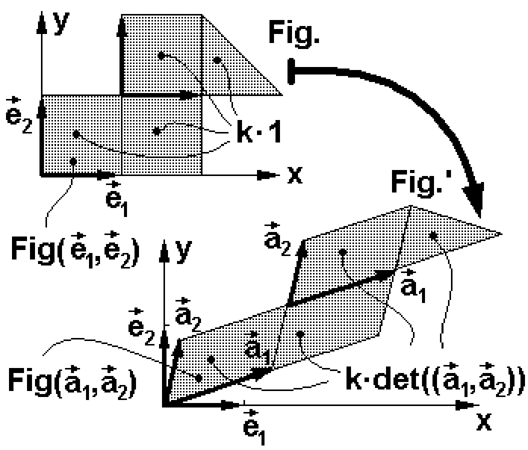


9 **Bemerkung:** Analoges kann man für die Dimension 3 herleiten und dann durch vollständige Induktion für die Dimension n.

10 **Konsequenz:** $\det(A)\cdot\det(A^{-1}) = \det(E) \;\Rightarrow\; \det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

u.s.w

Neuer Beweis Det'mult'satz — Nouvelle preuve théor. mult. d. déterm.



$$Fig(\vec e_1,\ldots,\vec e_n) \longmapsto Fig(\vec a_1,\ldots,\vec a_n)$$

$\leadsto\; \det((\vec e_1,\ldots,\vec e_n)) \longmapsto \det((\vec a_1,\ldots,\vec a_n)) \leadsto$

$k\cdot\det((\vec e_1,\ldots,\vec e_n)) \longmapsto k\cdot\det((\vec a_1,\ldots,\vec a_n))$,
$(k\in\mathbb{Q})$ oder $\;(k_n\in\mathbb{Q},\; k_n\to k\in\mathbb{R})$

Es gilt:
$k\cdot\det((\vec e_1,\ldots,\vec e_n)) = k\cdot\det(E) = k\cdot 1 = k$

Matrix: $\;A = ((\vec a_1,\ldots,\vec a_n)) \leadsto$

$V(Fig.) = k\cdot 1 \longmapsto V(Fig.') = k\cdot\det(A)$

Andererseits:

Sei $Fig. = B \rightsquigarrow$ B eine Matrix mit $\det(B) = k$

$\rightsquigarrow$ $B: \; E = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) \longmapsto B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n), \qquad \det(E) = 1 \longmapsto k = \det(B) = \det((\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n))$

$\rightsquigarrow$ $A: \; E = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) \longmapsto A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n), \qquad \det(E) = 1 \longmapsto \det(A) = \det((\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n))$

Zusammen „symbolisch" geschrieben:

$$E \overset{B}{\longmapsto} Fig. = B \cdot E = B \overset{A}{\longmapsto} Fig.' = A \cdot (B \cdot E) = A \cdot B$$
$$\Rightarrow V(Fig.') = \det(A \cdot B) = k \cdot \det(A) = \det(B) \cdot \det(A)$$

$$\rightsquigarrow \quad \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) \qquad \text{q.e.d., } ☺$$

9.6.4 Lineare Abbildung und Basisabbildung — Application linéaire et application de base

Sei $M \in R_n$ (regulär). Sei $\vec{v}_k$ Bild von $\vec{e}_k$: $\vec{e}_k \overset{\mathcal{M}}{\longmapsto} \vec{v}_k = M \cdot \vec{e}_k$

Detailierter:

$$M \cdot \vec{e}_k = (\vec{m}_1, \ldots, \vec{m}_n) \cdot \vec{e}_k = \begin{pmatrix} m_{11} & \ldots & m_{1k} & \ldots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \ldots & m_{nk} & \ldots & m_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{1k} \\ \vdots \\ m_{nk} \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \quad \vec{v}_k = M \cdot \vec{e}_k = \vec{m}_k \;\Rightarrow\; \vec{m}_k = \vec{v}_k \;\Rightarrow\; M = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$$

Studiere nun:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1\vec{e}_1 + \ldots + a_n\vec{e}_n \overset{M}{\longmapsto} M \cdot \vec{a} = M \cdot (a_1\vec{e}_1 + \ldots + a_n\vec{e}_n) = a_1 M\vec{e}_1 + \ldots + a_n M\vec{e}_n =$$
$$= a_1\vec{v}_1 + \ldots + a_n\vec{v}_n$$

Satz:

Vor.:

$M \in F_n, \;\; M \cdot \vec{e}_k = \vec{v}_k$

Beh.:

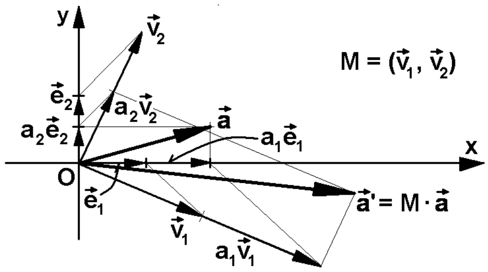
1 $\quad M = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$

2 $\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \longmapsto a_1\vec{v}_1 + \ldots + a_n\vec{v}_n$

Konsequenz: $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + \ldots + a_n\vec{e}_n \longmapsto M \cdot \vec{a} = a_1\vec{v}_1 + \ldots + a_n\vec{v}_n$

Um $\vec{a}$ abzubilden genügt es somit, die Basisvektoren $\vec{e}_k$ durch deren Bilder $\vec{v}_k$ zu ersetzen. Die Abbildung wird auf die Basis reduziert. Es lassen sich daher auf diese Weise sehr rasch serienweise Bildpunkte rechnen. (Computergraphik!)

Bsp.:



Sei umgekehrt z.B. gegeben: $(Dim = 2)$
$B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\},\ B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\},\ \vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_n\vec{e}_2 \longmapsto \vec{v} = M \cdot \vec{a} = a_1\,\vec{v}_1 + a_2\,\vec{v}_2 = (\vec{v})'$

M lässt sich dann sofort konstruieren:

$$\Rightarrow\ M = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$$

9.7 Gauss–Algorithmus mit Matrizen — Algorithme de Gauss avec des matrices

Wir wollen uns hier noch überlegen, wie man den Gauss–Algorithmus mit Hilfe der Matrizenrechnung auf einem Computer implementieren könnte. Dazu wollen wir zuerst nachweisen, dass der Gauss–Algorithmus äquivalent ist zur Faktorisierung $A = U \cdot L$. A ist die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems, L eine obere und U eine untere Dreiecksmatrix (LU–Zerlegung, Low, Up, manchmal auch LR–Zerlegung, Links, Rechts).

Gleichungssystem: $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit $A = U \cdot L$.

(L und U seien vorläufig gegeben.

Sei $L \cdot \vec{x} = \vec{y} \ \Rightarrow\ U \cdot \vec{y} = U \cdot (L \cdot \vec{x}) = (U \cdot L) \cdot \vec{x} = A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

Konzept:

Löse:

1 U wird schrittweise durch Modellierung der Elementarsubstitutionen konstruiert.

2 $L \cdot U = A \ \Rightarrow\ L = A \cdot U^{-1}$. U ist Dreiecksmatrix. Daher ist U^{-1} einfach berechenbar.

3 $U \cdot \vec{y} = \vec{b} \ \Rightarrow\ \vec{y} = \ldots$ (vorwärts einsetzen)

4 $L \cdot \vec{x} = \vec{y} \ \Rightarrow\ \vec{x} = \ldots$ (rückwärts einsetzen)

5 Exakte Ausführungen zum Thema siehe **Anhang** sowie .nb–Programm:

http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Zusatz/LU_Zerlegungen.pdf
http://rowicus.ch/Wir/MathematicaPackages/LU_Zerlegungen.nb

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

Konstruktion von L:

$$L_1 = E - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_1 = L_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -13 \end{pmatrix}$$

$$L_2 = E - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L = L_2 \cdot A_1 = L_2 \cdot L_1 \cdot A = (L_2 \cdot L_1) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$A = U \cdot L \;\Rightarrow\; U = A \cdot L^{-1} \leadsto$ Konstruktion von L^{-1}:

$$L^{-1} : \leadsto \quad L \cdot L^{-1} = E \leadsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\leadsto L^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{5}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$$\leadsto A = U \cdot L \Rightarrow U = A \cdot L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{5}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U^{-1} : \leadsto \quad U \cdot U^{-1} = E \leadsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\leadsto U^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Sei $A \cdot \vec{x} = (U \cdot L) \cdot \vec{x} = \vec{b}$, $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \vec{b} = L^{-1} \cdot (U^{-1} \cdot \vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{5}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{5}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{43}{7} \\ -\frac{47}{7} \\ \frac{24}{7} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = L^{-1} \cdot (U^{-1} \cdot \vec{b}) = \begin{pmatrix} \frac{43}{7} \\ -\frac{47}{7} \\ \frac{24}{7} \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Bei diesem Verfahren wurde nur die Matrixmultiplikation sowie lineare Gleichungen mit einer Unbekannten bei der Konstruktion der Matrizen.

9.8 Iterative Berechnung der Inversen — Calcul itératif de l'inverse

9.8.1 Methode — Méthode

Geg.: $A \cdot \vec{x} = \vec{b} \;\Rightarrow\; \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$

Ges.: $A^{-1} \approx ?\qquad E = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) = A \cdot A^{-1} = A \cdot (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) \;\Rightarrow\; A \cdot \vec{x}_k = \vec{e}_k$

Methode:

Wähle: $A = D - P,\;\; D = A + P,$

D leicht invertiertbar, z.B. Diagonalmatrix.

$$\leadsto\; A \cdot \vec{x} = \vec{b} = (D - P) \cdot \vec{x} = D \cdot \vec{x} - P \cdot \vec{x} \;\Rightarrow\; D \cdot \vec{x} = \vec{b} + P \cdot \vec{x} \;\Rightarrow\; \vec{x} = D^{-1} \cdot (\vec{b} + P \cdot \vec{x})$$

$\leadsto$ Iteration! $\qquad \vec{x}_{k+1} = D^{-1} \cdot (\vec{b} + P \cdot \vec{x}_k)$

Algorithmus:

1 Schätze den Startwert $\vec{x}_0$.

2 Iteration: $\quad \vec{x}_{k+1} = D^{-1} \cdot P \cdot \vec{x}_k + D^{-1} \cdot \vec{b},\;\; X_{k+1} = D^{-1} \cdot P \cdot X_k + D^{-1} \cdot E$

3 Analogie: $\quad y = a \cdot x + b \;\Rightarrow\; y_{k+1} = a \cdot x_k + b,\;\; x_{k+1} = y_{k+1},\;\; x_0 = c$

Bsp.: Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 1 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\; A^{-1} \approx \begin{pmatrix} 1.04356 & -0.217804 & 0.045454 & -0.00947 & 0.001893 \\ -0.217804 & 1.089015 & -0.227273 & 0.047348 & -0.00947 \\ 0.045454 & -0.227273 & 1.090909 & -0.227273 & 0.045454 \\ -0.00947 & 0.047348 & -0.227273 & 1.089015 & -0.217804 \\ 0.001893 & -0.00947 & 0.045454 & -0.217804 & 1.04356 \end{pmatrix} \text{(Progr.)}$$

Iteration, 20 Schritte:

$$X_{20} = \begin{pmatrix} 1.04356 & -0.217804 & 0.045454 & -0.00947 & 0.001893 \\ -0.217804 & 1.089015 & -0.227273 & 0.047348 & -0.00947 \\ 0.045454 & -0.227273 & 1.090909 & -0.227273 & 0.045454 \\ -0.00947 & 0.047348 & -0.227273 & 1.0890145 & -0.217804 \\ 0.001893 & -0.00947 & 0.045454 & -0.217804 & 1.04356 \end{pmatrix}$$

Die einzelnen Schritte können hier aus Platzgründen nicht wiedergegeben werden.

Bsp.: (Nur eine Spalte.)

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resultat (20 Schritte):

$$\begin{pmatrix}
(1.) & (1.) & (1.) & (1.) \\
(-0.142857) & (0.375) & (0.) & (1.) \\
(0.035714) & (-0.303571) & (0.069444) & (0.8) \\
(0.229592) & (-0.219246) & (0.189286) & (0.813889) \\
(0.205499) & (-0.116582) & (0.17683) & (0.837857) \\
(0.176166) & (-0.12873) & (0.160096) & (0.835366) \\
(0.179637) & (-0.143914) & (0.162) & (0.832019) \\
(0.183975) & (-0.142136) & (0.164431) & (0.8324) \\
(0.183467) & (-0.139902) & (0.164148) & (0.832886) \\
(0.182829) & (-0.140163) & (0.163792) & (0.83283) \\
(0.182904) & (-0.140491) & (0.163834) & (0.832758) \\
(0.182997) & (-0.140453) & (0.163886) & (0.832767) \\
(0.182986) & (-0.140404) & (0.16388) & (0.832777) \\
(0.182973) & (-0.14041) & (0.163872) & (0.832776) \\
(0.182974) & (-0.140417) & (0.163873) & (0.832774) \\
(0.182976) & (-0.140416) & (0.163874) & (0.832775) \\
(0.182976) & (-0.140415) & (0.163874) & (0.832775) \\
(0.182976) & (-0.140415) & (0.163874) & (0.832775) \\
(0.182976) & (-0.140416) & (0.163874) & (0.832775) \\
(0.182976) & (-0.140416) & (0.163874) & (0.832775) \\
(0.182976) & (-0.140416) & (0.163874) & (0.832775)
\end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_{16} = \begin{pmatrix} \frac{40361401822776048473}{220582915793352000000} \\ -\frac{34414687194719655413}{245092128659280000000} \\ \frac{46475783708727582 7409}{283606606020024000000 0} \\ \frac{72895200320870247737}{87532903092600000000} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.182976 \\ -0.140415 \\ 0.163874 \\ 0.832775 \end{pmatrix}$$

Exaktes Resultat:

$$\begin{pmatrix} \frac{273}{1492} \\ -\frac{419}{2984} \\ \frac{489}{2984} \\ \frac{2485}{2984} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.18297587131367293 \\ -0.14041554959785524 \\ 0.1638739946380697 \\ 0.832774798927614 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}_{14} = \begin{pmatrix} 0.182976 \\ -0.140415 \\ 0.163874 \\ 0.832775 \end{pmatrix}$$

9.8.2 Rahmen der Methode — Cadre de la méthode

Voraussetzungen, Matrixnorm — Conditions, norme d'une matrice

Geg.:

Sei $A \cdot \vec{x}_k = \vec{e}_k, \ \det(A) \neq 0$ (A regulär.) $\leadsto \exists_{A^{-1}} : \ \vec{x}_k = A^{-1} \cdot \vec{e}_k$
$\leadsto \vec{x}_k$ eindeutig , $\quad A^{-1} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$

Zudem sei $\det(D) \neq 0$ $\leadsto \exists_{D^{-1}}, \ (\forall_i \ d_{ii} \neq 0 \Leftrightarrow \det(D) \neq 0)$

Vorerst brauchen wir doch den Begriff der L^2–**Norm:**

Definition: $||A||_2 = ||(a_{i,k})||_2 = \sqrt{\sum\limits_{i,j} a_{i,k}^2}$
heisst L^2–**Norm** von A.

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \Rightarrow ||A||_2 = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2+i^2}$

Es gilt der Satz:

Satz: <u>**Vor.:**</u>

$||D^{-1} \cdot P||_2 < 1$

<u>**Beh.:**</u>

Die Iteration konvergiert.

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow D^{-1} \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{7} & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{9} & 0 & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow ||D^{-1} \cdot P||_2 \approx 0.38648604812295\ldots < 1$$

Brauchbarkeit — Utilité

Brauchbar ist das Verfahren für sehr grosse reguläre Matrizen mit Diagonalelementen $\neq 0$, welche schwach besetzt sind und die Hauptlast in der Diagonale aufweisen. Beispiel: Bandmatrizen (z.B. numerische Behandlung von Differentialgleichungen). Das Verfahren ist nicht sehr empfindlich gegenüber von Rundungen. Jedoch ist die Konvergenz oft langsam.

Der Aufwand hält sich bei diesem Verfahren in Grenzen: Pro Schlaufe max. $2\,n^2$ Multiplikationen.

9.8.3 Jacobi–Verfahren für Gleichungssysteme — Méthode de Jacobi pour des systèmes d'équations

Idee — Idée

$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \;\Rightarrow\; A \cdot \vec{x} + \vec{x} = \vec{b} + \vec{x} = \vec{b} + E \cdot \vec{x} \;\Rightarrow\; \vec{x} = \vec{b} + E \cdot \vec{x} - A \cdot \vec{x} = \vec{b} - (A - E) \cdot \vec{x}$

$$\Rightarrow\; \vec{x} = \vec{b} - (A - E) \cdot \vec{x}$$

Versuche damit eine Iteration:

$$\Rightarrow\; \vec{x}_{k+1} = \vec{b} - (A - E) \cdot \vec{x}_k$$

Start: $\vec{x}_0 = \vec{c}$

Durchführung — Exécution

Notwendig: **Normierung der Diagonalen**.

Bsp.:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{7} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{8} & 1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 1 & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Bsp.:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 1 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Resultat: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0.156015 \\ -0.026316 \\ 0.101504 \\ -0.240602 \\ 0.429574 \end{pmatrix}$

Iteration:

$$\begin{pmatrix}
0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\
1. & 0.142857 & -0.25 & 0. & -0.2 & 0.333333 \\
2. & 0.267857 & -0.107143 & 0.13 & -0.2 & 0.413333 \\
3. & 0.196429 & 0.104524 & 0.101429 & -0.252 & 0.413333 \\
4. & 0.090595 & 0.014048 & 0.079895 & -0.240571 & 0.434133 \\
5. & 0.135833 & -0.106141 & 0.093419 & -0.231958 & 0.429562 \\
6. & 0.195928 & -0.051887 & 0.114011 & -0.237368 & 0.426117 \\
7. & 0.168801 & 0.021935 & 0.105325 & -0.245605 & 0.42828 \\
8. & 0.131889 & -0.010983 & 0.093855 & -0.24213 & 0.431575 \\
9. & 0.148349 & -0.055541 & 0.099048 & -0.237542 & 0.430185 \\
10. & 0.170628 & -0.035619 & 0.106125 & -0.239619 & 0.42835 \\
11. & 0.160667 & -0.008623 & 0.102972 & -0.24245 & 0.429181 \\
12. & 0.147168 & -0.020686 & 0.098704 & -0.241189 & 0.430313 \\
13. & 0.1532 & -0.037029 & 0.100613 & -0.239482 & 0.429809 \\
14. & 0.161371 & -0.029725 & 0.103198 & -0.240245 & 0.429126 \\
15. & 0.15772 & -0.01983 & 0.102043 & -0.241279 & 0.429431 \\
16. & 0.152772 & -0.024252 & 0.100478 & -0.240817 & 0.429845 \\
17. & 0.154983 & -0.030243 & 0.101177 & -0.240191 & 0.42966 \\
18. & 0.157979 & -0.027566 & 0.102125 & -0.240471 & 0.42941 \\
19. & 0.15664 & -0.023938 & 0.101701 & -0.24085 & 0.429522 \\
20. & 0.154826 & -0.025559 & 0.101128 & -0.240681 & 0.429673
\end{pmatrix}$$

Hinreichende Bedingungen für die Konvergenz

Vor.:

Die Diagonale der Matrix ist normiert.

Beh.:

1 $\forall_i \sum_k |a_{i,k}| < 2$ resp. $\forall_k \sum_i |a_{i,k}| < 2$

2 $\forall\ (a_{i,i+1} \neq 0 \ \wedge \ a_{j+1,j} \neq 0):$
$(\forall_i \sum_k |a_{i,k}| \leq 2 \ \wedge \ \exists_i : \sum_k |a_{i,k}| < 2)$
$\vee \ (\forall_k \sum_i |a_{i,k}| \leq 2 \ \wedge \ \exists_k : \sum_i |a_{i,k}| < 2)$

9.8.4 Jacobi–Verfahren, inverse Matrix — Méthode de Jacobi, matrice inverse

Approximiere die Inverse der Bandmatrix A mit der Jacobi-Metode (Iteration). Statt ein einziges Gleichungssystem sind hier mehrere simultan zu behandeln.
Idee:

$$A^{-1} = E - (A - E) \cdot A^{-1} \ \Rightarrow \ A_{n+1}^{-1} \approx E - (A - E) \cdot A_n^{-1}$$

Sei

$$A = \begin{pmatrix}
1 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.2 & 1 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.2 & 1 & 0.1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.2 & 1 & 0.1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.2 & 1 & 0.1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 1
\end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix}
1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\
0.2 & 1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\
0.1 & 0.2 & 1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\
0.1 & 0.1 & 0.2 & 1 & 0.1 & 0.1 \\
0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 1 & 0.1 \\
0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 1
\end{pmatrix}$$

Man findet nach 6 Schritten:

$$A_7^{-1} \approx \begin{pmatrix} 1.02084 & -0.10419 & 0.01064 & -0.00107 & 0.00012 & -0.000001 \\ -0.20837 & 1.04212 & -0.10634 & 0.01087 & -0.00108 & 0.00013 \\ 0.04256 & -0.21267 & 1.04257 & -0.10636 & 0.01089 & -0.00104 \\ -0.00858 & 0.04344 & -0.21274 & 1.04258 & -0.10635 & 0.01067 \\ 0.00179 & -0.00873 & 0.04345 & -0.21266 & 1.04215 & -0.10415 \\ -0.00027 & 0.00178 & -0.00859 & 0.04256 & -0.20836 & 1.02087 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} \approx \begin{pmatrix} 1.02084 & -0.10421 & 0.01064 & -0.00109 & 0.00011 & -0.00001 \\ -0.20842 & 1.04212 & -0.10638 & 0.010860 & -0.00111 & 0.00011 \\ 0.04255 & -0.21277 & 1.04256 & -0.10643 & 0.01086 & -0.00109 \\ -0.00869 & 0.04344 & -0.21286 & 1.04256 & -0.10638 & 0.01064 \\ 0.00177 & -0.00887 & 0.04344 & -0.21277 & 1.04219 & -0.104212 \\ -0.00035 & 0.00177 & -0.00869 & 0.04255 & -0.20842 & 1.02084 \end{pmatrix}$$

9.9 D'Gl und Differenzenmethode — Equation différentielle et méthode d'équations aux différences

Bsp.:

Wir betrachten die folgende Differentialgleichung (Randwertproblem):

$$3\,y''(x) - 5\,y'(x) + y(x) + 2\,x = 0,\;\; a = 0,\;\; b = 10,\;\; y(a) = -2; y(b) = 5;$$

Nun diskretisieren wir das Problem indem wir das Intervall $I = [a, b]$ in n Teile gleicher Länge h teilen (Teilpunkte x_k).

$$\leadsto\;\; x_0 = a,\;\; x_n = b,\;\; h = \frac{b-a}{n},\;\; x_k = a = k \cdot h$$

Nun ersetzen wir die Differentialquotienten durch die Differenzenquotienten:

$$y'(x_k) \approx \frac{y(x_k) - y(x_{k-1})}{h},\;\; y''(x_k) \approx \frac{y'(x_{k+1}) - y'(x_k)}{h} = \frac{y_{k+1} - 2\,y_k + y_{k-1}}{h^2}$$

$$\frac{2\,x_k\,h^2 + (5\,h+3)\,y_{k-1} + \left(h^2 - 5\,h - 6\right)\,y_k + 3\,y_{k+1}}{h^2} = 0,$$

$$\Rightarrow\;\; \frac{(5\,h+3)\,y_{k-1} + \left(h^2 - 5\,h - 6\right)\,y_k + 3\,y_{k+1}}{h^2} = -2\,x_k$$

Wir studieren zuerst das Beispiel mit $n = 11$. $y_0 = y(x_0) = y(a)$ und $y_{11} = y(x_{11} = y(b))$ sind gegeben. Daher müssen noch $y_1, y_2, \ldots, y_{10}$ berechnet werden. Dazu verwenden wir obige Gleichungen. Diese ergeben ein System:

$$\begin{aligned} \frac{(5\,h+3)\,y_0 + \left(h^2 - 5\,h - 6\right)\,y_1 + 3\,y_2}{h^2} &= -2\,x_1 \\ &\vdots \\ \frac{(5\,h+3)\,y_{k-1} + \left(h^2 - 5\,h - 6\right)\,y_k + 3\,y_{k+1}}{h^2} &= -2\,x_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\vdots \\ \frac{(5\,h+3)\,y_9+\left(h^2-5\,h-6\right)\,y_{10}+3\,y_{11}}{h^2} &= -2\,x_{10} \end{aligned}$$

Wie man sieht, kommen in jeder Zeile immer nur drei der Unbekannten y_k vor. Daher ist die Koeffizientenmatrix eine Bandmatrix, die nur in drei Diagonalen, der Hauptdiagonale und den beiden Nebendiagonalen, besetzt ist. Gleichungssysteme mit solchen Matrixen sind einfach lösbar.

Bemerkung: Falls die D'Gl nicht linear ist, kann man die Matrizenmethode nicht ohne weiteres anwenden. Man muss sich dann überlegen, ob man die Gleichung eventuell z.B. mit Hilfe einer Potenzreihenentwicklung linearisieren könnte.

Resultat der Berechnung:

$$M\cdot\vec{y}=\vec{b}\;\Rightarrow\;M\cdot\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\\ y_5\\ y_6\\ y_7\\ y_8\\ y_9\\ y_{10}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18086\\ 4000\\ 6000\\ 8000\\ 10000\\ 12000\\ 14000\\ 16000\\ 18000\\ 39965\end{pmatrix},$$

$$M=\begin{pmatrix} 12936 & -3993 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 10043 & -12936 & 3993 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 10043 & -12936 & 3993 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 10043 & -12936 & 3993 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 10043 & -12936 & 3993 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10043 & -12936 & 3993 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10043 & -12936 & 3993 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10043 & -12936 & 3993 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10043 & -12936 & 3993\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10043 & -12936 \end{pmatrix}$$

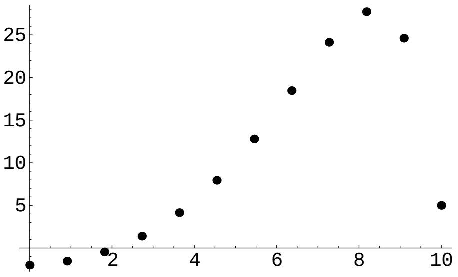
Exakte Lösung:

$y(x) =$

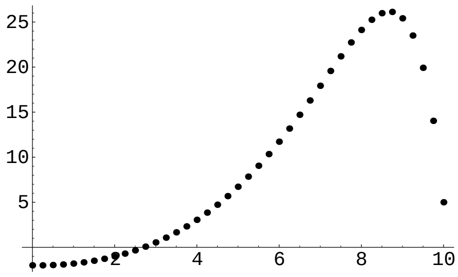
$$\frac{e^{-\frac{1}{6}(-5+\sqrt{13})x}\left(2e^{\frac{1}{6}((-5+\sqrt{13})x+50)}(x+5)-2e^{\frac{1}{6}((-5+\sqrt{13})x+20\sqrt{13}+50)}(x+5)+35e^{\frac{1}{3}\sqrt{13}(x+5)}-8e^{\frac{1}{3}(\sqrt{13}x+25)}+8e^{\frac{5}{3}(5+2\sqrt{13})}-35e^{\frac{5\sqrt{13}}{3}}\right)}{-e^{25/3}+e^{\frac{5}{3}(5+2\sqrt{13})}}$$

$$\approx -2\,x+8.00002759115\,e^{0.2324081207560\,x}-0.0000275911538341\,e^{1.43425854591\,x}-10$$

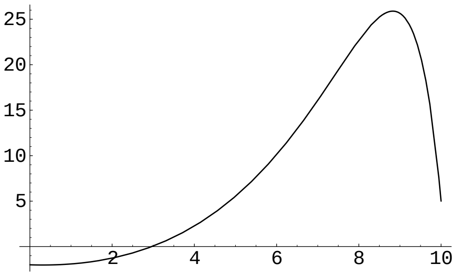
In den nachstehenden Diagrammen sind die Resultate der Berechnung für $n=11,\;\; n=40$ dem exakten Resultat gegenübergestellt:



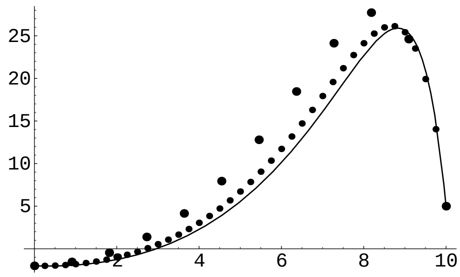
12 Punkte, $n = 11$



41 Punkte, $n = 40$



Exakte Lösung



Alles zusammen

Kapitel • Chapitre 10

Eigenwertprobleme — Problèmes des valeurs propres

10.1 Eigenwerte, Eigenvektoren — Valeurs propres, vecteurs propres

Formulierung des Eigenwertproblems (EWP) mit Matrizen:

Gegeben: Matrix A. Gesucht: Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}, \mathbb{C}; \ldots$ und Vektoren $\vec{x} \neq \vec{0}$, sodass gilt: $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$.

Definition: In $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$ heisst λ **Eigenwert** (EW) und $\vec{x} \neq \vec{0}$ **Eigenvektor** (EV).

Bemerkung:

1 $\vec{x} = \vec{0}$ ist immer Lösung von $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \leadsto$ $\vec{0}$ nicht als Lösung interessant .

2 Mit $\vec{x}$ ist auch $\lambda \cdot \vec{x}$ Eigenvektor.

3 $\vec{x} \xmapsto{\mathcal{A}} \lambda \cdot \vec{x} = A \cdot \vec{x}$ bedeutet, dass $\vec{x}$ durch $\mathcal{A}$ in $\lambda \cdot \vec{x}$ gestreckt wird . $\leadsto$ Invarianz der Richtung!

Verallgemeinerung des Eigenwertproblems:

Gegeben: Funktion oder Operator f. Gesucht: Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}, \mathbb{C}; \ldots$ und Vektoren oder Funktionen $\vec{x} \neq \vec{0}$, sodass gilt: $f(\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x}$.

Beispiele:

1 $A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leadsto$ $\begin{array}{rcll} x_1 + x_2 & = & \lambda \cdot x_1 & (I) \\ x_2 & = & \lambda \cdot x_2 & (II) \end{array}$

Sei $\lambda = 0 \;\Rightarrow\; (II):\; x_2 = 0 \;\Rightarrow\; (I):\; x_1 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{x} = \vec{0}$
$\leadsto$ Widerspruch!

Sei $\lambda \neq 1, \quad \Rightarrow \ (I): \ x_2 = (\lambda - 1) \cdot x_1$

Sei $\lambda \neq 1 \ \Rightarrow \ (II): \ x_2 = 0 \ \Rightarrow \ (I): \ x_1 = 0 \ \Rightarrow \ \vec{x} = \vec{0}$
$\leadsto$ Widerspruch!

$\leadsto \quad \lambda = 1 \ \Rightarrow \ (I): \ x_2 = 0 \ \Rightarrow \ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ k \neq 0$ beliebig .

2 $A \cdot \vec{x} = D_\varphi \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \vec{x}$
$\leadsto$ Dieses Problem (Drehung um φ) hat aus geometrischen Gründen für $\varphi \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$ keine Lösung $\vec{x} \neq \vec{0}$, denn es gilt dann $D_\varphi \cdot \vec{x} \not\parallel \vec{x}$.

10.2 Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren — Calcul de valeurs propres et vecteurs propres

10.2.1 Charakteristisches Polynom — Polynôme charactéristique

Problem:

Gesucht ist ein Algorithmus zur Bestimmung von λ und $\vec{x}$.

$A \cdot \vec{x} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$ ist ein nichtlineares Gleichungssystem mit $n+1$ Unbekannten $x_1, \ldots, x_n, \lambda$.

Studiere:

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \ \Leftrightarrow \underbrace{(A - \lambda E)}_{M_\lambda} \cdot \vec{x} = M_\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0}, \ \vec{x} \neq \vec{0} \leadsto \quad \vec{x} \xmapsto{M_\lambda} M_\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0} \leadsto \ \vec{x} \in Kern(M_\lambda)$$

$''Kern'' \leadsto$ **Kern :**

$Kern(\mathcal{M}) = \{\vec{x} \mid \mathcal{M}(\vec{x}) = \vec{0}\}$ (vgl. Regularität von Matrizen .)

Wenn λ bekannt ist, haben wir mit $M_\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0}$ ein homogenes lineares Gleichungssystem für $\vec{x}$ gegeben, das eine Lösung $\vec{x} \neq \vec{0}$ (Eigenvektor) haben soll.

$\leadsto \quad Dim(\mathbb{L}) > 0 \quad \Rightarrow \quad Rang(M_\lambda) < Ord(Syst) \quad \Rightarrow \quad M_\lambda \not\in R_n$: M_λ kann nicht régulär sein : $\det(M_\lambda) = \det(A - \lambda E) = 0$.

Konsequenz: Eine Lösung $\vec{x} \neq \vec{0}$ existiert somit genau dann, wenn gilt: $\det(M_\lambda) = 0$.

Daher definiert man:

Definition: $P_n(\lambda) := \det(M_\lambda) = \det(A - \lambda E)$
heisst **charakteristisches Polynom von** A

Nach dem Entwicklungssatz gilt:

Lemma: __Vor.:__ $A \in M_{n,n}$

__Beh.:__

$P_\lambda = \det(A - \lambda E)$ ist Polynom vom Grade n

$\leadsto$

Satz: Das *EWP* $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$ hat eine Lösung $\vec{x} \neq \vec{0}$
$\Leftrightarrow P_\lambda = \det(A - \lambda E) = 0$

Ein Polynom vom Grade n hat maximal n verschiedene Nullstellen. Daher gilt:

Korollar: __Vor.:__ $A \in M_{n,n}$

__Beh.:__

A besitzt maximal n Eigenwerte.

Es gilt: $\vec{x} = EV \;\Rightarrow\; t \cdot \vec{x} = EV\,,\;\; t \neq 0.$

$\leadsto$ Gerade $\{\vec{x} = t\vec{x}_0 \mid t \in \mathbb{R}\} = \{EV\}$ geht durch die Abbildung $\mathcal{A}$ in sich selbst über, dies jedoch allgemein nicht punktweise . $(\vec{x} \longmapsto A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \parallel \vec{x})$

$\leadsto$ Eine derartige Gerade durch den Ursprung, die bei der Abbildung $\mathcal{A}$ fix bleibt, nennen wir **Fixgerade**.

Bsp.:
(a) Eigenwerte :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.\; P(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 \cdot 1 = 0$$

$$\Rightarrow\; P(\lambda) = 12 - 7\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

$$\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 5,\;\; \lambda_2 = 2$$

(b) Eigenvektoren :

$\underline{\lambda_2 = 2:}$ $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\leadsto \quad \begin{array}{rcl} 4x_1 + x_2 &=& 2x_1 \\ 2x_1 + 3x_2 &=& 2x_2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 &=& 0 \\ 2x_1 + x_2 &=& 0 \end{array}$$

$\leadsto$ Dieses homogene Problem hat eine Lösung:

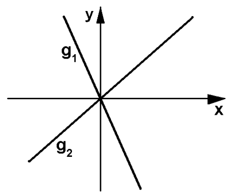
$\vec{x} \neq 0,\ Dim(\mathbb{L}) = 1 \leadsto$ Wähle als Parameter:
$t := x_1 \ \Rightarrow\ x_2 = -2t \ \Rightarrow\ \vec{x}(t) = \binom{t}{-2t} = t\binom{1}{-2} \leadsto$ Fixgerade .

$\underline{\lambda_1 = 5:}$ $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\leadsto \quad \begin{array}{rcl} 4x_1 + x_2 & = & 5x_1 \\ 2x_1 + 3x_2 & = & 5x_2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} -x_1 + x_2 & = & 0 \\ 2x_1 - 2x_2 & = & 0 \end{array}$$

$\leadsto$ Dieses homogene Problem hat eine Lösung:

$\vec{x} \neq 0,\ Dim(\mathbb{L}) = 1 \leadsto$ Wähle als Parameter:
$t := x_1 \ \Rightarrow\ x_2 = t \ \Rightarrow\ \vec{x}(t) = \binom{t}{t} = t\binom{1}{1} \leadsto$ Fixgerade .



Über den Winkel zwischen den Fixgeraden lässt sich hier keine allgemeine Aussage machen.

10.2.2 Eigenwerte und Eigenvektoren der Inversen Matrix — Valeurs propres et vecteurs propres de la matrice inverse

Sei $A \in R_n,\ A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$ (EWP) $\Leftrightarrow A^{-1} \cdot (A \cdot \vec{x}) = A^{-1} \cdot (\lambda \cdot \vec{x})$
$\Leftrightarrow E \cdot \vec{x} = \lambda \cdot (A^{-1} \cdot \vec{x}) \ \Leftrightarrow A^{-1} \cdot \vec{x} = \dfrac{1}{\lambda} \cdot \vec{x} = \lambda^{-1} \cdot \vec{x} \leadsto$

Satz: **Vor.:** $A \in R_n$

Beh.:

λ EW zu $A \ \Leftrightarrow \lambda^{-1}$ EW zu A^{-1}

$\vec{x}$ EV zu $\lambda \ \Leftrightarrow \vec{x}$ EV zu λ

Bsp.:

$\underline{EW:}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \Leftrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda_{1,2} = +1,$

$\det(A^{-1} - \mu E) = \begin{vmatrix} 1-\mu & -1 \\ 0 & 1-\mu \end{vmatrix} = (1-\mu)^2 = 0 \ \Rightarrow\ \mu_{1,2} = +1 = \dfrac{1}{\lambda}$

$\underline{EV:}$ $A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & x_1 \\ x_2 & = & x_2 \end{array}$

$\Rightarrow \ x_2 = 0, \ \ x_1 := t = \text{Parameter} \ . \leadsto \ EV: \ \vec{x}(t) = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ebenso für:

$A^{-1} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 & = & x_1 \\ x_2 & = & x_2 \end{array}$ $\Rightarrow x_2 = 0, \ \ x_1 := t$

10.2.3 Beispiele — Exemples

Auf Seite 207 haben wir die Projektionsmatrix kennengelernt. Diese Matrix hat aus geometrischen Gründen die Eigenwerte $\{1, 1, 0\}$ und die Eigenvektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{0}$.

Auf Seite 208 sind wir der Drehmatrix im Raum begegnet. Diese Matrix hat wiederum aus geometrischen Gründen den reellen Eigenwert 1 und dazu zwei konjugiert komplexe Eigenwerte, wie man sofort nachrechnet. Zum reellen Eigenwert 1 gehört als Eigenvektor der Achsenrichtungsvektor $\vec{a} = \vec{b}_1$. Die andern Eigenvektoren sind komplex, was nur geometrisch, aber nicht rechnerisch ein Problem ist.

Matrix: $D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Eigenwerte: $\{1, \cos(\alpha) - i \ \sin(\alpha), \cos(\alpha) + i \ \sin(\alpha)\}$

Eigenvektoren: $\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$

10.3 Eigenschaften von Eigenwerten und Eigenvektoren — Qualités de valeurs propres et vecteurs propres

10.3.1 Lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren — Indépendence linéaire de vecteurs propres

Indirekte Betrachtung:

Seien $i \neq j \ \Rightarrow \ \lambda_i \neq \lambda_j$
$\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$ EV zu EW $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$
mit $\vec{x}_1$ linear abhängig von $\{\vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k\}$
(angepasste Nummerierung).

Sei $\{\vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k\}$ linear unabhängig

$\leadsto \quad \vec{x}_1 = \sum_{i=2}^{k} \mu_i \vec{x}_i.\ A\vec{x}_1 = \lambda_1 \vec{x}_1 \ \Rightarrow \ A \sum_{i=2}^{k} \mu_i \vec{x}_i = \lambda_1 \sum_{i=2}^{k} \mu_i \vec{x}_i \ \Rightarrow \ \sum_{i=2}^{k} \mu_i A\vec{x}_i = \sum_{i=2}^{k} \mu_i \lambda_1 \vec{x}_i$

$\Rightarrow \ \sum_{i=2}^{k} \mu_i \lambda_i \vec{x}_i = \sum_{i=2}^{k} \mu_i \lambda_1 \vec{x}_i \ \Rightarrow \ \sum_{i=2}^{k} (\mu_i \lambda_i - \mu_i \lambda_1) \vec{x}_i = \sum_{i=2}^{k} \underbrace{\mu_i}_{\exists \mu_i \neq 0} \underbrace{(\lambda_i - \lambda_1)}_{\lambda_i \neq \lambda_1} \vec{x}_i = \vec{0}$

$\Rightarrow \ \{\vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k\}$ linear abhängig $\leadsto$ Widerspruch!

$\leadsto$ Annahme $\vec{x}_1$ linear abhängig von $\{\vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k\}$ falsch. .

Satz:

Vor.:

$\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$ $(k \leq n)$ verschiedene EV zu verschiedenen EW $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$

Beh.:

$\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$ linear unabhängig .
D.h. $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ spannen einen k–dimensionalen Vektorraum auf.

Definition:

Die Lösungsmenge $\{\vec{x}\}$ von $(A - \lambda_i E)\vec{x} = \vec{0}$ nennen wir den **Eigenraum** zu λ_i. Ensprechend den durch $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$ gegebenen Vektorraum (wie oben) den Eigenraum zu $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ resp. zur Matrix A.

(Es gilt: $\quad (A - \lambda_i E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \ \Leftrightarrow A \cdot \vec{x} = \lambda_i \vec{x})$

Korollar:

$k = Dim(Eigenraum(A)) = Dim(EspacePropre(A))$
$\Rightarrow \ k \leq n = Rang(A)$

Bsp.:

Sei $\vec{x_1}, \vec{x_2}$ *l.u.*, $\quad \vec{x_1}, \vec{x_2}$ *EV* zu λ $\qquad$ Sei $\vec{a} = \mu_1 \vec{x_1} + \mu_2 \vec{x_2} \ \Rightarrow$
$A \cdot \vec{a} = A \cdot (\mu_1 \vec{x_1} + \mu_2 \vec{x_2}) = \mu_1 \cdot A \cdot \vec{x_1} + \mu_2 \cdot A \cdot \vec{x_2} = \mu_1 \cdot \lambda \cdot \vec{x_1} + \mu_2 \cdot \lambda \cdot \vec{x_2} = \lambda \cdot (\mu_1 \cdot \vec{x_1} + \mu_2 \cdot \vec{x_2}) = \lambda \cdot \vec{a} \ \Rightarrow \ A \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a}$
$\leadsto$ $\vec{a}$ ist auch EV zu λ.

10.3.2 Zu den Eigenwerten nicht regulärer Matrizen — Quant aux valeurs propres de matrices non régulières

$A \in M_{n,n}, A \notin R_n \ \Rightarrow \ \det(A) = 0$

$\Rightarrow \ P_n(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \lambda^n + \lambda^{n-1} c_{n-1} + \ldots + \lambda c_1 + c_0 = \lambda^n + \lambda^{n-1} c_{n-1} + \ldots + \lambda c_1 = 0,$

denn $c_0 = P_n(0) = \det(A - 0E) = \det(A) = 0$

$\leadsto \ P_n(\lambda) = \lambda(\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} c_{n-1} + \ldots + c_1 = 0 \ \Rightarrow \ \lambda = 0 \in \mathbb{L} \ (P_n(\lambda) = 0) \leadsto \ \lambda = 0 \in \{EW\}$

Zum EV $\vec{x}_0$ zu $\lambda = 0$:
$\leadsto \quad \forall_{\vec{x}_0 \in Kern(\mathcal{A})} \ A \cdot \vec{x}_0 = \lambda \cdot \vec{x}_0 = 0 \cdot \vec{x}_0 = \vec{0} \ \Rightarrow \ Kern(\mathcal{A}) \subseteq$ Eigenraum

$\leadsto$ *Kern*$(\mathcal{A})$ = Eigenraum zu λ .

$\leadsto$ *Kern*$(\mathcal{A})$ = Eigenraum zu λ .

Satz:

<u>**Vor.:**</u>

Zur Abbildung $\mathcal{A}$ gehöre die Matrix A $\leadsto$ $A \in M_{n,n}, A \notin R_n$

<u>**Beh.:**</u>

$\lambda = 0$ ist Eigenwert
Kern$(\mathcal{A})$ = Eigenraum zu λ

10.3.3 Zu den Eigenwerten transponierter Matrizen — Quant aux valeurs propres de matrices transposées

Es gilt: $P_n(\lambda)_{A^T} = \det(A^T - \lambda E) = \det(A^T - \lambda E^T) = \det(A^T - (\lambda E)^T)$
$= \det(A - \lambda E)^T = \det(A - \lambda E) = P_n(\lambda)_A$

$\Rightarrow$ A und A^T haben dasselbe charakteristische Polynom und somit dieselben Eigenwerte .

Satz: A und A^T haben dasselbe charakteristische Polynom und somit dieselben Eigenwerte.

10.3.4 Matrixpotenzen — Puissances de matrices

Konsequenz:

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \;\Rightarrow\; A \cdot A \cdot \vec{x} = A^2 \cdot \vec{x} = A \cdot \lambda \cdot \vec{x} = \lambda \cdot A \cdot \vec{x} = \lambda^2 \cdot \vec{x} \;\Rightarrow\; \ldots A^n \cdot \vec{x} = \lambda^n \cdot \vec{x}$$

Formel: $A^n \cdot \vec{x} = \lambda^n \cdot \vec{x}$

10.3.5 Diagonalisierung regulärer Matrizen — Diagonalisation de matrices régulières

Seien $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ *EW* von $A \in R_n$ mit $\lambda_i \neq \lambda_k$ $(i \neq k)$. (Alle Eigenwerte seien somit verschieden.)

Schreibe die Menge der Gleichungen

$$A \cdot \vec{x}_1 = \lambda_1 \cdot \vec{x}_1,\;\; A \cdot \vec{x}_2 = \lambda_2 \cdot \vec{x}_2,\;\; \ldots, A \cdot \vec{x}_n = \lambda_n \cdot \vec{x}_n \qquad (\leadsto\; A \cdot (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \ldots)$$

als eine Matrixgleichung der Form:

$$A\underbrace{(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n)}_{X(Matr.)}=(\lambda_1\vec{x}_1,\ldots,\lambda_n\vec{x}_n)=$$

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 x_{11} & \ldots & \lambda_n x_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \lambda_1 x_{n1} & \ldots & \lambda_n x_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{11} & \ldots & x_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ x_{n1} & \ldots & x_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}=XD_{\lambda,n}\;\Rightarrow\;A\cdot X=X\cdot D_{\lambda,n}$$

Dabei ist also X die Matrix, in deren Spalten die Eigenvektoren stehen. Und $D_{\lambda,n}$ ist die Diagonalmatrix, deren Diagonalelemente die Eigenwerte sind in der zu den Eigenvektoren von X entsprechenden Reihenfolge.

$\leadsto \quad A\cdot X=X\cdot D_{\lambda,n}$ gibt die vollständige Lösung des Eigenwertproblems wieder. .

Da die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind, sind die Spalten von X linear unabhängig, d.h. $X\in R_n$, X^{-1} existiert. $\leadsto \quad A=X\cdot D_{\lambda,n}\cdot X^{-1}$

Satz:

Vor.:

$A\in R_n$, alle Eigenwerte verschieden.
$X=$ Matrix, deren Spalten die Eigenvektoren von A sind.
$D_{\lambda,n}=$ Diagonalmatrix mit den Eigenwerten als Diagonalelemente in der zu X entsprechenden Reihenfolge.

Beh.:

$A=X\cdot D_{\lambda,n}\cdot X^{-1},\;\; D_{\lambda,n}=X^{-1}\cdot A\cdot X$

Bemerkung: Die Darstellung von A in der Form $X\cdot D_{\lambda,n}\cdot X^{-1}$ nennen wir auch die **Diagonalisierung von** A.

Wir wollen etwas allgemeiner formulieren:

Definition: Falls es zu A eine Diagonalmatrix $D_{\lambda,n}$ sowie eine Matrix $X\in R_n$ gibt mit $A=X\cdot D_{\lambda,n}\cdot X^{-1}$, so nennen wir A **diagonalisierbar**.

Nach obigem Satz kann umgekehrt zu gewünschten verschiedenen *EW* und *EV* die Matrix A komponiert werden, die diese *EW* ud *EV* besitzt.

Bsp.:

Geg.: $\lambda_1=1,\;\lambda_2=2,\;\vec{x}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\;\vec{x}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\;X=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix},\;D_{\lambda,2}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix},\;X^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\;\Rightarrow\;A=X\cdot D_{\lambda,2}\cdot X^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$

10.3.6 Anwendung auf Matrixpotenzierung — Application pour des puissances de matrices

$A=X\cdot D\cdot X^{-1}$

$\Rightarrow\ A^2 = (X \cdot D \cdot X^{-1}) \cdot (X \cdot D \cdot X^{-1}) = X \cdot D \cdot (X^{-1}) \cdot X) \cdot D \cdot X^{-1} = X \cdot D \cdot D \cdot X^{-1} = X \cdot D^2 \cdot X^{-1}$

$\Rightarrow\ A^3 = (X \cdot D^2 \cdot X^{-1}) \cdot (X \cdot D \cdot X^{-1}) = X \cdot D^2 \cdot (X^{-1}) \cdot X) \cdot D \cdot X^{-1} = X \cdot D^2 \cdot D \cdot X^{-1} = X \cdot D^3 \cdot X^{-1}$

$\ldots\ \Rightarrow\ A^k = X \cdot D^k \cdot X^{-1}$

Korollar: <u>**Vor.:**</u>

$$A = X \cdot D \cdot X^{-1}$$

<u>**Beh.:**</u>

$$A^k = X \cdot D^k \cdot X^{-1},\ \ k \in \mathbb{N}$$

Bemerkung:

1 $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$

2 Für grosse k reduziert die Formel $A^k = X \cdot D^k \cdot X^{-1}$ die Operationsschritte wesentlich!

10.3.7 Eigenwerte der Diagonalmatrix — Valeurs propres de la matrice diagonale

Studiere: $D_{\lambda,n} \cdot \vec{x} = \lambda\, \vec{x}$

$\leadsto$ *EW* von $D_{\lambda,n}$:

$$P_n(\lambda) = \det(D_{\lambda,n} - \lambda E) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda_1 - \lambda) \cdot (\lambda_2 - \lambda) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - \lambda) = 0$$

$\Rightarrow\ EW : \lambda \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$

$$D_{\lambda,n} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\, x_1 \\ \vdots \\ \lambda_n\, x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_k\, x_1 \\ \vdots \\ \lambda_k\, x_n \end{pmatrix} = \lambda_k\, \vec{x}\ \Rightarrow\ \lambda_i\, x_i = \lambda_k\, x_i,\ \ i = 1, \ldots, n.$$

$\leadsto$ $x_i = 0,\ i \neq k,\ x_k$ frei . $\leadsto$ Setze $x_k = 1\ \Rightarrow\ EV\ \vec{x}_k = \vec{e}_k$.

Satz: <u>**Vor.:**</u>

$A \in R_n$, alle *EW* verschieden .
$D_{\lambda,n}$ zugehörige Diagonalmatrix .

<u>**Beh.:**</u>

$D_{\lambda,n}$ hat dieselben Eigenwerte wie A.
$\{\vec{e}_1, \ldots \vec{e}_n\}$ sind Eigenvektoren zu $D_{\lambda,n}$ $D_{\lambda,n}$

Korollar: A und $D_{\lambda,n}$ haben dasselbe charakteristische Polynom $P_n(\lambda)$

Kontrolle:

$P_n(\lambda)_A = \det(A-\lambda E) = \det(X\cdot D_{\lambda,n}\cdot X^{-1} - \lambda X\cdot X^{-1}) =$
$= \det(X\cdot(D_{\lambda,n}-\lambda E)\cdot X^{-1}) = \det(X)\det(D_{\lambda,n}-\lambda E)\det(X^{-1}) =$
$= \det(X)\det(D_{\lambda,n}-\lambda E)\det(X)^{-1} = \det(X)\det(X)^{-1}\det(D_{\lambda,n}-\lambda E) =$
$= \det(D_{\lambda,n}-\lambda E) = P_n(\lambda)_{D_{\lambda,n}}$

10.3.8 Zu Spur und Determinante — Quant à la trace et le déterminant

$$\text{Sei} : P_n(\lambda)_A = \det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n-1,n} & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\text{und} : P_n(\lambda)_D = \det(D-\lambda E) = \begin{vmatrix} d_{11}-\lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_{22}-\lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & d_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

Falls gilt: $\lambda_k = d_{kk}$,
so gilt (Hauptsatz der Algebra):

$$P_n(\lambda)_A = P_n(\lambda)_D$$

$\leadsto$ Rechnung: $P_n(\lambda)_A =$
$(-\lambda)^n + \alpha_{n-1}(-\lambda)^{n-1} + \ldots + \alpha_1(-\lambda)^1 + \alpha_0 = P_n(\lambda)_D = (-\lambda)^n + \delta_{n-1}(-\lambda)^{n-1} + \ldots + \delta_1(-\lambda)^1 + \delta_0$

Bedeutung der Koeffizienten:

Wähle: $\lambda = 0 \ \Rightarrow\ \alpha_0 = P_n(0)_A = \det(A-0E) = \det(A) = P_n(0)_D = \delta_0$
$= \det(D-0E) = \det(D) = \prod\limits_{k=1}^{n} d_{kk} = \prod\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \ \Rightarrow\ \det(A) = \det(D) = \prod\limits_{k=1}^{n} \lambda_k$

Studiere nun den 2. Term $\alpha_{n-1}(-\lambda)^{n-1}$ resp. $\delta_{n-1}(-\lambda)^{n-1}$.

Diese Terme in $P_n(\lambda)_A$ resp. $P_n(\lambda)_D$ werden nach dem Entwicklungssatz gebildet.

$$\text{Z.B.} \ P_n(\lambda)_A = \det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n-1,n} & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

$= \sum\limits_{\cdots}(-1)^{\cdots}\beta_{1k_1}\beta_{2k_2}\ldots\beta_{nk_n},\ \beta_{ik_i} \in \{a_{rs} \mid r \neq s\} \ \vee\ \beta_{ik_i} \in \{a_{jj} - \lambda_j\} \qquad \leadsto$

$\alpha_{n-1}(-\lambda)^{n-1}$ ist derjenige Anteil an der Summe in der Entwicklung von $\det(A-\lambda E)$, der entsteht, wenn im Produkt $\beta_{1k_1}\beta_{2k_2}\ldots\beta_{nk_n}$ $n-1$ mal der Anteil $(-\lambda)$ in einem Diagonalelement genommen wird und ein einziges Mal (man hat n Faktoren!) nicht das $(-\lambda)$.
Da alle Faktoren aus verschiedenen Zeilen und Spalten stammen müssen, kann auch dieser letzte Faktor nur aus einem Diagonalelement stammen und muss daher jeweils der Anteil a_{jj} sein.

$(-1)^{\cdots}$ wird in diesem Falle immer $= 1$, da es gleichviele Zeilen und Spaltenvertauschungen benötigt (also 2 mal eine Anzahl = gerade Zahl), um ein Diagonalelement an die erste Stelle in der Matrix zu verschieben.
Bei der Determinantenentwicklung werden alle Möglichkeiten von Anordnungen aufsummiert. Wegen $P_n(\lambda)_A = P_n(\lambda)_D$ ist daher:

$$\alpha_{n-1}(-\lambda)^{n-1} = \sum_{i=1}^{n}(-\lambda)^{n-1}a_{ii} = (-\lambda)^{n-1}\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \delta_{n-1}(-\lambda)^{n-1} = (-\lambda)^{n-1}\sum_{i=1}^{n} d_{ii} = (-\lambda)^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$$

Wir definieren jetzt:

Definition: Die Summe der Diagonalelemente $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ einer Matrix A heisst **Spur** der Matrix A.

Lemma: <u>**Vor.:**</u> $\det(A-\lambda E) = \det(B-\lambda E)$

<u>**Beh.:**</u>

1 $\det(A) = \det(B)$

2 $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$
resp. $Sp\,(A) = Sp\,(B)$

Satz: <u>**Vor.:**</u>

A diagonalisierbar $\quad (A = X \cdot D_{\lambda,n} \cdot X^{-1})$

<u>**Beh.:**</u>

1 $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} d_{ii} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

2 $Sp\,(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

Eine Anwendung:

Im nächsten Abschnitt werden wir Matrizen untersuchen, die gleiche Eigenwerte besitzen. Zwei Matrizen können somit nur dann diese Eigenschaft haben, wenn sie dieselbe Spur besitzen, was sehr rasch mit einer einfachen Addition der Diagonalelemente überprüfbar ist.

10.4 Ähnliche Matrizen — Matrices semblables

10.4.1 Grundlagen — Fondements

Definition — Définition

Definition: Zwei Matrizen A und B, die sich mit derselben Diagonalmatrix D diagonalisieren lassen, nennen wir **ähnlich**: $A \sim B$.

Für solche Matrizen gilt somit:

$$A = X_1 \cdot D_{\lambda,n} \cdot X_1^{-1}, \;\; B = X_2 \cdot D_{\lambda,n} \cdot X_2^{-1}$$

Konsequenz: Ähnliche Matrizen haben gleiche Eigenwerte, Determinanten und Spuren, jedoch wie wir sehen werden allgemein verschiedene Eigenvektoren.

Matrixprodukte — Produits de matrices

Wir führen jetzt eine etwas ausgedehnte Rechnung durch, die uns aber zu einem interessanten Resultat bringt.

Studiere: $A \cdot B - \lambda E = A \cdot B - \lambda E,\; A, B$ regulär .

$A \cdot B - \lambda E = (E - \lambda B^{-1}A^{-1}) \cdot A \cdot B = (E - \lambda B^{-1}A^{-1}) \cdot (\lambda E + A \cdot B - \lambda E)$
$\leadsto \quad (E - \lambda B^{-1}A^{-1}) \cdot (\lambda E + A \cdot B - \lambda E) = A \cdot B - \lambda E \qquad \Rightarrow$
$\lambda E(E - \lambda B^{-1}A^{-1}) = (A \cdot B\lambda E) - (E - \lambda B^{-1}A^{-1}) \cdot (A \cdot B - \lambda E) \mid \cdot (A \cdot B - \lambda E)^{-1}, \;\; \lambda \neq \lambda_i(AB)$
$\Rightarrow \; \lambda E(E - \lambda B^{-1}A^{-1})(A \cdot B\lambda E)^{-1} =$
$= (A \cdot B - \lambda E)(A \cdot B - \lambda E)^{-1} - (E - \lambda B^{-1}A^{-1})(A \cdot B - \lambda E)(A \cdot B - \lambda E)^{-1} \; |B\cdot$
$\Rightarrow \; \lambda(B - \lambda B \cdot B^{-1}A^{-1})(A \cdot B\lambda E)^{-1} = B \cdot E - (B - \lambda B \cdot B^{-1}A^{-1})E \;\Rightarrow$
$\lambda(B \cdot A - \lambda E)A^{-1}(A \cdot B\lambda E)^{-1} = B \cdot E - (B \cdot A - \lambda E) \cdot A^{-1} \mid \cdot (B \cdot A - \lambda E)^{-1}, \;\; \lambda \neq \lambda_i(BA)$
$\Rightarrow \; \lambda E A^{-1}(A \cdot B\lambda E)^{-1} = (B \cdot A - \lambda E)^{-1} \cdot B - (B \cdot A - \lambda E)^{-1} \cdot (B \cdot A - \lambda E) \cdot A^{-1} \; |A\cdot$
$\Rightarrow \; \lambda(A \cdot B\lambda E)^{-1} = A \cdot (B \cdot A - \lambda E)^{-1} \cdot B - E$ oder
I) $(A \cdot B\lambda E)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A \cdot (B \cdot A - \lambda E)^{-1} \cdot B - \frac{1}{\lambda}E$ oder
II) $(B \cdot A\lambda E)^{-1} = A^{-1}(\lambda(A \cdot B - \lambda E)^{-1} + E)B^{-1} = A^{-1}\lambda(A \cdot B - \lambda E)^{-1}B^{-1} + A^{-1}B^{-1}$

Aus I) und II) folgt:

$(A \cdot B\lambda E)^{-1}$ existiert $\Leftrightarrow (B \cdot A\lambda E)^{-1}$ existiert — oder
$(A \cdot B\lambda E)^{-1}\neg($ existiert $) \Leftrightarrow (B \cdot A\lambda E)^{-1}\neg($ existiert $)$ — oder
$\det(A \cdot B) = 0 \Leftrightarrow \det(B \cdot A) = 0$ — oder

λ *EW* von $A \cdot B \Leftrightarrow \lambda$ *EW* von $B \cdot A$

Konsequenz: $\{$ *EW* von $A \cdot B\} = \{$ *EW* von $B \cdot A\}$

Satz: $A \cdot B \sim B \cdot A$

Rep.: Matrixpotenzierung — Rep.: Puissances de matrices

Sei $A = X \cdot D_{\lambda,n} \cdot X^{-1} \leadsto A^2 = (X \cdot D_{\lambda,n} \cdot X^{-1}) \cdot (X \cdot D_{\lambda,n} \cdot X^{-1}) = X \cdot D_{\lambda,n}^2 \cdot X^{-1} \;\Rightarrow\; \ldots$
$\Rightarrow \; A^k = X \cdot D_{\lambda,n}^k \cdot X^{-1}$

Dabei gilt (Kontrolle!): $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$

Satz:

<u>Vor.:</u>

$$A = X \cdot D_{\lambda,n} \cdot X^{-1}, \;\; D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

<u>Beh.:</u>

1 $A^k = X \cdot D^k_{\lambda,n} \cdot X^{-1}, \;\; D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$

2 λ_j EW von $A \Rightarrow \lambda_j^k$ EW von A^k

Anwendung: Schnelle Potenzierung von Matrizen (höhere Potenzen) .

10.4.2 Abbildungen im Eigenraum — Applications dans l'espace propre

Sei $X = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n), \;\; \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$ = Menge der EV zu verschiedenen EW

$\rightsquigarrow \;\; \{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$ ist Basis .

Es gilt: $\mathcal{X} : \vec{e}_k \longmapsto X\vec{e}_k = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k, \ldots, \vec{x}_n) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{x}_k \rightsquigarrow \;\; X^{-1}\vec{x}_k = \vec{e}_k$

Sei $\vec{v} = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k \, \vec{x}_k \;\Rightarrow\; A \cdot \vec{v} = A \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k \, \vec{x}_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k A \cdot \vec{x}_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k \lambda_k \cdot \vec{x}_k.$

$\rightsquigarrow \;\; X^{-1} \cdot A \cdot \vec{v} = X^{-1} \cdot (X \cdot D \cdot X^{-1}) \cdot \vec{v} = D \cdot X^{-1} \cdot \vec{v} = D \cdot (X^{-1} \cdot \vec{v}) = D \cdot X^{-1} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k \vec{x}_k$

$$= D \cdot \sum_{k=1}^{n} \mu_k X^{-1} \cdot \vec{x}_k = D \cdot \sum_{k=1}^{n} \mu_k \vec{e}_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mu_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \mu_n \end{pmatrix}$$

Weiter gilt:

$$X^{-1} \cdot \vec{v} = X^{-1} \cdot \sum_{k=1}^{n} \mu_k \, \vec{x}_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \cdot X^{-1} \cdot \vec{x}_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \, \vec{e}_k = \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}_{\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}}$$

Konsequenz:

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \, \vec{x}_k \overset{\mathcal{A}}{\longmapsto} A\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \, \lambda_k \, \vec{x}_k \;\Leftrightarrow X^{-1} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \longmapsto D \cdot (X^{-1} \cdot \vec{v}) = X^{-1} \cdot A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mu_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \mu_n \end{pmatrix}$$

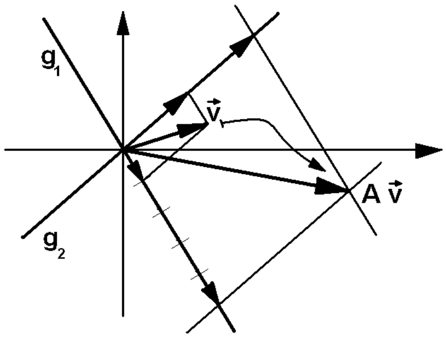
D.h. der Abbildung von $\vec{v}$ in der Basis $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$ duch die Matrix A entspricht die Abbildung von $X^{-1} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$ in der Orthonormalbasis $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ durch die Matrix D.

Zur Übersicht das Schema:

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \, \vec{x}_k = \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}_{\{\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n\}} \longmapsto A \cdot \vec{v} = \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} \lambda_1 \, \mu_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \, \mu_n \end{pmatrix}_{\{\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n\}} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, \mu_k \, \vec{x}_k$$

$\downarrow$ (Verpflanzung durch X^{-1}) $\downarrow$ $\qquad$ $\downarrow$ (Verpflanzung durch X^{-1}) $\downarrow$
$\downarrow$ (Transplantation par X^{-1}) $\downarrow$ $\qquad$ $\downarrow$ (Transplantation par X^{-1}) $\downarrow$

$$X^{-1} \, \vec{v} = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \, \vec{e}_k = \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}_{\{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n\}} \longmapsto X^{-1} \cdot A \cdot \vec{v} = \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} \lambda_1 \, \mu_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \, \mu_n \end{pmatrix}_{\{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n\}} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, \mu_k \, \vec{e}_k$$



Bsp.:

$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow EW : \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2,$

$EV : \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
(Rechnung!)

$\leadsto \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \end{pmatrix} =$
$= \mu_1 \vec{x}_1 + \mu_2 \vec{x}_2 \xrightarrow{\mathcal{A}} \mu_1 A \vec{x}_1 + \mu_2 A \vec{x}_2 =$
$= \mu_1 \lambda_1 \vec{x}_1 + \mu_2 \lambda_2 \vec{x}_2 = 5 \mu_1 \vec{x}_1 + 2 \mu_2 \vec{x}_2$
mit $\mathcal{A} : \vec{v} \longmapsto A\vec{v}$

10.5 Konstruktion einer Matrix — Construction d'une matrice

Problem:

Sei eine geometrische Abbildung folgender Art gegeben:

Geg.: $\vec{x_1}, \; \vec{x_2}, \; \lambda_1, \; \lambda_2$
$\vec{v} = \mu_1 \, \vec{x_1} + \mu_2 \, \vec{x_2} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}_{\{\vec{x_1}, \vec{x_2}\}} \longmapsto A \cdot \vec{v} = \lambda_1 \, \mu_1 \, \vec{x_1} + \lambda_2 \, \mu_2 \, \vec{x_2} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \, \mu_1 \\ \lambda_2 \, \mu_2 \end{pmatrix}_{\{\vec{x_1}, \vec{x_2}\}}$

Ges.: Matrix A?

Konstruktion: $X = (\vec{x_1}, \, \vec{x_2}), \; D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = X \cdot D \cdot X^{-1}$

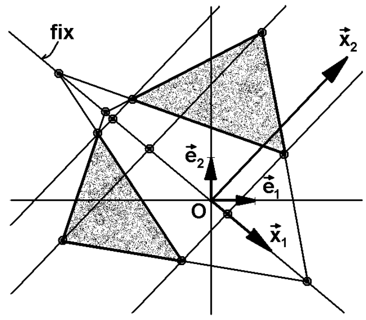
Bsp.:

$\overrightarrow{OP}\ ' = -2\ \overrightarrow{OP}$ in Richtung $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\overrightarrow{OQ}\ ' = \overrightarrow{OQ} \leadsto$ fix in Richtung $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$A = X \cdot D \cdot X^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{18}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$



Skizze nicht massstäblich!

10.6 Diagonalisierung spezieller Matrizen — Diagonalisation de matrices spéciales

10.6.1 Definitionen — Définitions

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ mit $a_{ik} \in \mathbb{C},\ \mathbb{R}$. Wir setzen:

Definition: $\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \dots & \bar{a}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{a}_{n1} & \dots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix}$ (Konj. komplex)

Allgemein nennen wir Matrizen mit reellen Koeffizienten **reelle Matrizen**, Matrizen mit komplexen Koeffizienten **komplexe Matrizen**.

Definition: Gegeben sei eine Matrix A.

Wir sagen:

A **hermitesch**[5]	$\Leftrightarrow$	A	$=$	$(\bar{A})^T$
A **symmetrisch**	$\Leftrightarrow$	A	$=$	A^T
A **unitär**	$\Leftrightarrow$	A^{-1}	$=$	$(\bar{A})^T$
A **orthogonal**	$\Leftrightarrow$	A^{-1}	$=$	A^T
A **schiefsymmetrisch**	$\Leftrightarrow$	A	$=$	$-A^T$

Bemerkung: Reelle hermitsche Matrizen sind symmetrisch, reelle unitäre Matrizen sind orthogonal.

Lemma: Es gilt: $(\bar{A})^T = \overline{(A^T)}$

Sei A reell und schiefsymmetrisch. $(\leadsto\ \forall_j\ a_{jj} = 0)$

$$\leadsto\quad a_{ik} = -a_{ki}, \leadsto\ A^2 = A \cdot A := \begin{pmatrix} \vec{a}_1^T \\ \vdots \\ \vec{a}_n^T \end{pmatrix} \cdot (-\vec{a}_1, \dots, -\vec{a}_n) = -(\langle \vec{a}_i, \vec{a}_k \rangle \dots) = -(\langle \vec{a}_k, \vec{a}_i \rangle \dots)$$

[5]Charles Hermite: 1822 – 1901

Satz: **Vor.:**

A reell, schiefsymmetrisch.

Beh.:

A^2 symmetrisch

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} -13 & -12 & 8 \\ -12 & -20 & -6 \\ 8 & -6 & -25 \end{pmatrix}$

10.6.2 Wichtige Eigenschaften — Qualités importantes

Orthogonale Matrix — Matrice orthogonale

Sei M beliebige orthogonale Matrix.
D. h. : $M^{-1} = M^T$ resp. $E = M \cdot M^T$

$\Rightarrow$ $\det(E) = 1 = \det(M \cdot M^T) = \det(M) \cdot \det(M^T) = \det(M) \cdot \det(M) = \det(M)^2$
$\leadsto$ $\det(M) = \pm 1, |\det(M)| = 1.$

Satz: **Vor.:**

M orthogonale Matrix

Beh.:

$\det(M) = \pm 1$

Symmetrische Matrix — Matrice symétrique

Sei A reguläre, symmetrische Matrix mit lauter verschiedenen Eigenwerten $\neq 0$.

$\leadsto$ $A = X \cdot D \cdot X^{-1}$ (D Diagonalmatrix mit EW in der Diagonalen, X entsprechende Matrix der Eigenvektoren) $\leadsto$

$\Leftrightarrow A \cdot X = X \cdot D \Leftrightarrow (A \cdot X)^T = (X \cdot D)^T \Rightarrow X^T \cdot A^T = D^T \cdot X^T$
$\Leftrightarrow X^T \cdot A = D \cdot X^T$ (Symmetrie!)

$\Leftrightarrow D \cdot X^T \cdot X = X^T \cdot A \cdot X = X^T \cdot X \cdot D$

Sei $X^T \cdot X := M$

Konsequenz: $A = X \cdot D \cdot X^{-1}$ ist äquivalent zu $D \cdot M = M \cdot D$ resp. $M = D \cdot M \cdot D^{-1}$, $M = X^T \cdot X$ (EV)

Wir studieren $M = D \cdot M \cdot D^{-1}$ elementweise.

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11}\lambda_1^{-1} & \dots & m_{1n}\lambda_n^{-1} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1}\lambda_1^{-1} & \dots & m_{nn}\lambda_n^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 m_{11}\lambda_1^{-1} & \dots & \lambda_1 m_{1n}\lambda_n^{-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_n m_{n1}\lambda_1^{-1} & \dots & \lambda_n m_{nn}\lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ M = X^T \cdot X = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\lambda_1^{-1}m_{11} & \dots & \lambda_1\lambda_n^{-1}m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_n\lambda_1^{-1}m_{n1} & \dots & \lambda_n\lambda_n^{-1}m_{nn} \end{pmatrix}$$

Hier sind alle EW λ_k verschieden (Vor.!), die EV sind also linear unabhängig und bilden eine Basis. Daher ist $\det(X) \neq 0$ und somit $\det(M) = \det(X)\det(X^T) = \det(X)^2 \neq 0$, d.h. M ist regulär. Nach Vor. ist ebenfalls A regulär. Somit gilt:

$$\lambda_i \cdot \lambda_k^{-1} \quad = \quad \begin{cases} \neq 0,\ 1 & i \neq k \\ = 1 & i = k\ (\lambda_i \neq 0) \end{cases}$$

Das oben gegebene Gleichungssystem $m_{ik} = \lambda_i\,\lambda_k^{-1} m_{ik}$ für die Koeffizienten m_{ik} kann nur bestehen, falls $m_{ik} = 0\ \vee\ \lambda_i\,\lambda_k^{-1} = 1$.

$\leadsto \quad m_{ik} = 0,\ \ i \neq k\ \Rightarrow\ M$ Diagonalmatrix .

Wegen $\det(M) \neq 0$ (M regulär) kann M keine 0 in der Diagonale haben.

$\leadsto \quad m_{ii} = \underbrace{\lambda_i\,\lambda_i^{-1}}_{=1} m_{ii} \neq 0\ \Rightarrow$ für $m_{ii} \in \dot{\mathbb{R}}, \dot{\mathbb{C}}$ keine Bedingung .

$\leadsto$ **Problem:** Wie $m_{ii} \in \dot{\mathbb{R}}, \dot{\mathbb{C}}$ wählen?

Studiere: $M = X^T \cdot X = \begin{pmatrix} \vec{x}_1{}^T \\ \vdots \\ \vec{x}_n{}^T \end{pmatrix} \cdot (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \begin{pmatrix} m_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_{nn} \end{pmatrix}$

$$\leadsto \quad \vec{x}_i{}^T \cdot \vec{x}_k = \langle \vec{x}_i, \vec{x}_k \rangle \quad = \quad \begin{cases} 0 & i \neq k \\ m_{ii} & i = k \end{cases}$$

$\leadsto$ Für die Eigenvektoren $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ von A gilt: $\quad \vec{x}_i \perp \vec{x}_k,\ \ i \neq k$ und $|\vec{x}_i|^2 = m_{ii}$.

Da die Länge der Eigenvektoren $\neq 0$ frei wählbar ist, dürfen wir sie normieren.

$\leadsto$ Wähle: $\vec{e}_{\vec{x}_k} := \vec{u}_k = \dfrac{\vec{x}_k}{|\vec{x}_k|}$. $\leadsto$ $X = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ wird zu
$U = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ mit $m_{ii} = |\vec{u}_i|^2 = \langle \vec{u}_i, \vec{u}_i \rangle = 1 \leadsto M = E$

Satz:

Vor.:

$A \in R_n, \;\; A = A^T, \;\; EW\, \lambda_i \neq \lambda_k, i \neq k$
$U = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) = U = (\frac{\vec{x}_1}{|\vec{x}_1|}, \ldots, \frac{\vec{x}_n}{|\vec{x}_n|})$ = Matrix der normierten Eigenvektoren

Beh.:

1 $\langle \vec{u}_i, \vec{u}_k \rangle = 0 \; (i \neq k)$ d. h. $\vec{u}_i \perp \vec{u}_k \; (i \neq k)$

2 $X^T \cdot X = M = D_X$ Diagonalmatrix

3 $U^T \cdot U = E$ resp. $\langle \vec{u}_i, \vec{u}_k \rangle = \delta_{ik}$

Folgerung: $U^T = U^{-1} \leadsto U$ ist orthogonal .

Hermitesche Matrix — Matrice hermitique

Sei $A \in \mathbb{R}$, $A =$ hermitesche Matrix , $\vec{x}\; EV$, $\lambda\; EW$:

$$A\,\vec{x} = \lambda\,\vec{x} \;\; (\leadsto \;\; \vec{x} \neq \vec{0}).$$

Definition: $\vec{x}^{\,*} = (\overline{\vec{x}})^T$ (konj, transp.)

$\leadsto \quad A^* = A$ (Hermitesche Matrix)

Man sieht sofort:

Lemma:

1 $(\vec{x}^{\,*})^* = \vec{x}$

2 $(A^*)^* = A$

3 $A^* \cdot B^* = (B \cdot A)^*$

Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \leadsto$ Matrixprod. $\vec{x}^{\,*} \cdot \vec{x} =$ Skalarprod.

$\leadsto \;\; \vec{x}^{\,*} \cdot \vec{x} = \langle \overline{\vec{x}}, \vec{x} \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} \bar{x}_i \cdot x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2 = |\vec{x}| \neq 0$ (da $\vec{x} \neq \vec{0}$)

Weiter ist:
$\lambda \cdot (\vec{x}^{\,*} \cdot \vec{x}) = \vec{x}^{\,*} \cdot (\lambda \cdot \vec{x}) = \vec{x}^{\,*} \cdot (A \cdot \vec{x}) = \vec{x}^{\,*} \cdot ((A \cdot \vec{x})^*)^* = \vec{x}^{\,*} \cdot (\vec{x}^{\,*} \cdot A^*)^* = ((\vec{x}^{\,*} \cdot A^*) \cdot \vec{x})^* =$
$(\vec{x}^{\,*} \cdot A^* \cdot \vec{x})^* = (\vec{x}^{\,*} \cdot \lambda \cdot \vec{x})^* = (\lambda \cdot \vec{x})^* \cdot (\vec{x}^{\,*})^* = (\vec{x}^{\,*} \cdot \lambda^*) \cdot (\vec{x}^{\,*})^* = (\vec{x}^{\,*} \cdot \overline{\lambda}) \cdot (\vec{x}^{\,*})^* = \overline{\lambda} \cdot (\vec{x}^{\,*} \cdot \vec{x}) \neq 0$
(wie vorgängig gezeigt .)

$\leadsto \quad \lambda \cdot (\vec{x}^{\,*} \cdot \vec{x}) = \overline{\lambda} \cdot (\vec{x}^{\,*} \cdot \vec{x}) \neq 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \overline{\lambda} \;\Rightarrow\; \lambda \in \dot{\mathbb{R}}$

Satz:

Vor.:

$A^* = A \in R_n$ (Hermitesche Matrix)

Beh.: $EW\ \lambda \in \dot{\mathbb{R}}$

Spezialfall:

Korollar:

Vor.:

$A^T = A$, Koeff. $A_{ik} \in \mathbb{R}$
(Reell symmetrische Matrix)

Beh.: $EW\ \lambda \in \dot{\mathbb{R}}$

Reell–symmetrische Matrizen können also keine nicht–reellen Eigenwerte haben!

Bemerkung: Bei einer symmetrischen Matrix müssen jedoch die Eigenwerte nicht unbedingt verschieden sein. Beispiel: E

Merke:

Folgerung: Sei $A \in R_n$ reelle symmetrische Matrix mit lauter verschiedenen Eigenwerten. Dann gilt:

1 $EW \in \dot{\mathbb{R}}$

2 EV sind orthogonal
EV normiert
$\leadsto\ A = U \cdot D \cdot U^T,\ U^{-1} = U^T$

Matrixkomposition mit EW — Composition de matrices avec VP

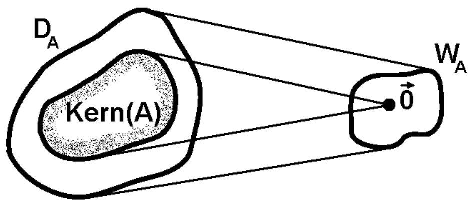
Problem: Gesucht ist eine geometrische Abbildung, die den Vektor $\vec{x}_1$ in $\lambda_1\,\vec{x}_1$ streckt, $\vec{x}_2$ in $\lambda_2\,\vec{x}_2$ und $\vec{x}_3$ in $\lambda_3\,\vec{x}_3$ (Vektoren *l.u.*). Die Abbildung soll zudem Geraden auf Geraden abbilden, also linear sein.

Lösung: Sei $X = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3),\ D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

Bekanntlich hat Matrix $A = X \cdot D \cdot X^{-1}$ die EW $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und die EV $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$, leistet also gerade $A \cdot \vec{x}_k = \lambda_k \cdot \vec{x}_1$.

10.7 Ausbau und Ergänzungen — Complètement des notions

10.7.1 Rang und Defekt einer linearen Abbildung— Rang et défaut d'une application linéaire



Sei $\mathcal{A}$ lineare Abbildung mit Matrix A.
$D_{\mathcal{A}}$ ist Vektorraum der Dimension n.
$Kern(\mathcal{A}) = \{\vec{x} \mid A\cdot\vec{x} = \vec{0} = \mathbb{L}_{hom}\}$
$\leadsto \quad D_{\mathcal{A}} \stackrel{\mathcal{A}}{\longmapsto} W_{\mathcal{A}} \subseteq V$,
(V = Wertevorrat)
$\leadsto \quad Kern(\mathcal{A}) \stackrel{\mathcal{A}}{\longmapsto} \vec{0}$

Wir definieren:

Definition: $Rang(\mathcal{A}) := Dim(W_{\mathcal{A}})$
$Defect(\mathcal{A}) := Dim(Kern_{\mathcal{A}})$: Defekt von $\mathcal{A}$

$\mathcal{A}$ ist durch eine Matrix gegeben. Somit ist $\forall_{\vec{v}\in W_{\mathcal{A}}}$ die Theorie der linearen Gleichungssysteme anwendbar, ausgedrückt durch $A\cdot\vec{x} = \vec{v}$. Daher erhalten wir mit dem Rangsatz:

Satz: **Vor.:** $Dim(D_{\mathcal{A}}) = n$

Beh.: $Rang(\mathcal{A}) + Defect(\mathcal{A}) = n$

10.7.2 Caley-Hamilton, Nilpotenz — Caley-Hamilton, nilpotence

Der Satz — Le théorème

Sei A Matrix mit $P_n(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \lambda c_1 + c_0$.

Es gilt: $\lambda_k\ EW \Rightarrow P_n(\lambda_k) = (-1)^n\lambda_k^n + c_{n-1}\lambda_k^{n-1} + \ldots + \lambda_k c_1 + c_0 = 0$

$\Rightarrow E\cdot P_n(\lambda_k) = (-1)^n\lambda_k^n E + c_{n-1}\lambda_k^{n-1}E + \ldots + \lambda_k c_1 E + c_0 E = 0\cdot E = N.$

Komponiere damit:

$$\begin{pmatrix} P_n(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_n(\lambda_n)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^n\lambda_1^n + c_{n-1}\lambda_1^{n-1} + \ldots + \lambda_1 c_1 + c_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (-1)^n\lambda_n^n + c_{n-1}\lambda_n^{n-1} + \ldots + \lambda_n c_1 + c_0\end{pmatrix} = N$$

$$\Rightarrow (-1)^n \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}^n + c_{n-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}^{n-1} + \ldots + \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix} c_1 + c_0 E =$$

$= (-1)^n D_\lambda^n + c_{n-1} D_\lambda^{n-1} + \ldots + D_\lambda c_1 + c_0 E = N$

Sei $\quad A = X \cdot D_\lambda \cdot X^{-1} \;\Rightarrow$

$A^k = (X \cdot D_\lambda \cdot X^{-1}) \cdot (X \cdot D_\lambda \cdot X^{-1}) \cdot \ldots \cdot (X \cdot D_\lambda \cdot X^{-1}) = X \cdot D_\lambda \cdot D_\lambda \cdot \ldots \cdot D_\lambda \cdot X^{-1} =$
$= X \cdot D_\lambda^k \cdot X^{-1} \;\Rightarrow\; A^k = X \cdot D_\lambda^k \cdot X^{-1} \leadsto$

$X \cdot \big((-1)^n D_\lambda^n + c_{n-1} D_\lambda^{n-1} + \ldots + D_\lambda c_1 + c_0 E = (-1)^n D_\lambda^n + c_{n-1} D_\lambda^{n-1} + \ldots + D_\lambda c_1 + c_0 E\big) \cdot X^{-1}$
$= X \cdot N \cdot X^{-1} = N$

$\Rightarrow\; (-1)^n X \cdot D_\lambda^n \cdot X^{-1} + c_{n-1} X \cdot D_\lambda^{n-1} \cdot X^{-1} + \ldots + X \cdot D_\lambda \cdot X^{-1} c_1 + c_0 X \cdot E \cdot X^{-1}$
$= (-1)^n A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \ldots + A c_1 + c_0 E = N$

Der Fall $A = X \cdot D_\lambda \cdot X^{-1}$ trifft sicher dann ein, wenn $A \in R_n$ und alle EW verschieden sind.

Es gilt aber noch allgemeiner der Satz:

Satz: **Caley–Hamilton**

Vor.:

λ EW von A

$\leadsto \quad P_n(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + \lambda c_1 + c_0 = 0$

Beh.:

$(-1)^n A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \ldots + A c_1 + E c_0 = N$

Kurz: $\quad P_n(A) = N$

Eine Anwendung — Une application

$(-1)^n A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \ldots + A\, c_1 + E\, c_0 = N$
$\Rightarrow\; (-1)^n A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \ldots + A\, c_1 = A \cdot ((-1)^n A^{n-1} + c_{n-1} A^{n-2} + \ldots + E\, c_1) = N - E\, c_0 = -E\, c_0$
oder $\; A \cdot \dfrac{1}{c_0} \cdot ((-1)^n A^{n-1} + c_{n-1} A^{n-2} + \ldots + E\, c_1) = E$
$\Rightarrow\; A^{-1} = \dfrac{1}{c_0} \cdot ((-1)^n A^{n-1} + c_{n-1} A^{n-2} + \ldots + E c_1)$ für $\; c_0 = \det(A) \neq 0, \;\; A \in R^n$

Korollar: **Vor.:** $\quad A \in R_n$

Beh.:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot ((-1)^n A^{n-1} + c_{n-1} A^{n-2} + \ldots + E\, c_1)$$

$\leadsto$ Liegen die Koeffizienten c_k von A aus $\mathbb{Z}$, so sind die Koeffizienten von A^{-1} rational.
Wichtig:

A^{-1} lässt sich also als Polynom in A schreiben!

Nilpotenz — Nilpotence

Definition: A heisst **nilpotent** :

$$\Leftrightarrow \exists_{n\in\mathbb{N}} : \; A^n = N$$

Dann gilt: $\det(A)^n = \det(A^n) = \det(N) = 0 \;\Rightarrow\; \det(A) = 0, \;\; A \notin R_n$

Zudem: $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \;\Rightarrow\; A \cdot A \cdot \vec{x} = A^2 \cdot \vec{x} = A \cdot \lambda \cdot \vec{x} = \lambda \cdot A \cdot \vec{x} = \lambda^2 \cdot \vec{x} \;\Rightarrow\; \ldots$
$\Rightarrow\; A^n \cdot \vec{x} = N \cdot \vec{x} = \vec{0} = \lambda^n \cdot \vec{x} \;\Rightarrow\; \lambda = 0$ für $\vec{x} \neq \vec{0}$ $\quad (\forall\lambda\; EW)$

Da alle EW somit 0 sind, gilt nach dem Hauptsatz der Algebra:

$$P_n(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \lambda c_1 + c_0 =$$
$$= (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\ldots(\lambda_n - \lambda) = (0 - \lambda)(0 - \lambda)\ldots(0 - \lambda) = (-\lambda)^n$$

Satz:

<u>**Vor.:**</u>

A nilpotent , $\lambda = EW$ von A

<u>**Beh.:**</u>

1. $A \notin R_n$
2. $\forall_{\lambda\; EW}\;\; \lambda = 0$
3. $P_n(\lambda) = (-\lambda)^n$

Folgerung: $P_n(A) = (-A)^n = N$ ist Spezialfall von Caley–Hamilton .

Bemerkung:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N$$

10.7.3 Hauptvektoren, Spektrum u.s.w. — Vecteurs principaux, spectre etc.

Seien A Matrix mit: $EW\; \lambda_i$, $EV\; \vec{x}_i$, $P_n(\lambda) = \det(A - \lambda E)$

Definition:

1 Ist λ_i k–fache NS von $P_n(\lambda)$, so heisst $o(\lambda_i) = k$ **algebraische Vielfachheit** von λ_i.

2 Wiederholung: Der Kern von $A - \lambda_i E$ ist der **Eigenraum** von A zu λ_i.
(Das ist die Menge der Vektoren, für die gilt: $A\vec{x} = \lambda_i \vec{x}$ oder $\vec{x} \longmapsto A\vec{x} - E\vec{x} = \vec{0}$.)

3 Die Dimension des Eigenraumes von A zu λ_i heisst **geometrische Vielfachheit** oder kurz Vielfachheit $\nu(\lambda_i)$ von λ_i.

Man kann zeigen, dass gilt:

Satz:

$$1 \leq \nu(\lambda_i) \leq o(\lambda_i) \leq n = grad(P_n(\lambda))$$

Beweis:

Sei $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \rightsquigarrow (A - \lambda E) \cdot \vec{x} = \vec{0},\ A - \lambda E := M(\lambda)$ ($n \times n$–Matrix)

Sei λ_1 Eigenwert mit $o(\lambda_1) = k_1$.
$\rightsquigarrow\ P_n(\lambda) = \det(M(\lambda)) = (\lambda - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_s)$

$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \Leftrightarrow M(\lambda) \cdot \vec{x} = \vec{0} \rightsquigarrow$ Es gilt: : $Rang(M(\lambda)) + Dim(\mathbb{L}) = n$
Dabei ist $\mathbb{L}$ der Kern von $M(\lambda)$ (Vektorraum!).

Bei der Lösung des Gleichungssystems nach Gauss–Jordan wird $M(\lambda)$ durch Elementartransformationen in eine Matrix der folgenden Form übergeführt:

$$M(\lambda) \longmapsto \tilde{A} := \begin{pmatrix} M_1 & N \\ N & M_2 \end{pmatrix},\ Dim(M_2) = Dim(\mathbb{L}),\ N = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},\ M_1 \in R_n,$$
$$Rang(M_1) = Rang(M(\lambda))$$

Für $\lambda = \lambda_1 = EW$ ist $M_2 = N$ und M_1 eine reguläre Diagonalmatrix.

Elementartransformationen an einer beliebigen Matrix A kann man bekanntlich durch Multiplikation mit reguläten Matrizen $B_{i,j,k}$ ausführen. So sieht man z.B., dass die unten angegebene Matrix $B_{1,3,k}$ bei einer Multiplikation von links her in der Matrix A zur 1. Zeile das k–fache der Zeile mit der Nummer 3 addiert.

Bsp.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix},\ B_{1,3,k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B_{2,3,k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots$$

$$\leadsto B_{1,3,k}\cdot A=\begin{pmatrix}1+9\,k & 2+10\,k & 3+11\,k & 4+12\,k\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ 9 & 10 & 11 & 12\\ 13 & 14 & 15 & 16\end{pmatrix}$$

$$B_{2,3,k}\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5+9\,k & 6+10\,k & 7+11\,k & 8+12\,k\\ 9 & 10 & 11 & 12\\ 13 & 14 & 15 & 16\end{pmatrix}$$

mit $\det(B_{i,j,k})=1$

Weiter braucht man noch Zeilenvertauschungen, die ebenfalls mit Matrizen $C_{i,j}$ ausführbar sind.

Bsp.: $C_{1,3}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\;C_{1,3}\cdot A=\begin{pmatrix}9&10&11&12\\5&6&7&8\\1&2&3&4\\13&14&15&16\end{pmatrix}$

Wie man sieht ist $\det(C_{i,j})\neq 0.$ $(\det(C_{1,3})=-1)$

Lemma:

Vor.:

Elementartransformationen
$M(\lambda)\longmapsto \tilde{M}(\lambda):=\begin{pmatrix}M_1 & N\\ N & M_2\end{pmatrix},\;\lambda=EW$

Beh.:

$$\exists_T\;:\;T\cdot M(\lambda)=\begin{pmatrix}M_1 & N\\ N & M_2\end{pmatrix},\;\;\det(T)\neq 0$$

T ist ein Produkt von Matrizen der Form $B_{i,j,k}$ und $C_{i,j}$. Nach dem Determinantenmultiplikationssatz ist daher $\det(T)\neq 0$.

Sei $\lambda=\lambda_1+\varepsilon,\;\varepsilon<<1\;\Rightarrow\;\lambda\neq EW$

$$\leadsto\;\det(M(\lambda))=(\lambda-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(\lambda-\lambda_1)\cdot(\lambda-\lambda_2)\cdot\ldots\cdot(\lambda-\lambda_s)=\varepsilon\cdot\ldots\cdot\varepsilon\cdot(\lambda_1+\varepsilon-\lambda_2)\cdot\ldots\cdot(\lambda_1+\varepsilon-\lambda_s)=$$
$$=\varepsilon^{k_1}\cdot(\lambda_1+\varepsilon-\lambda_2)\cdot\ldots\cdot(\lambda_1+\varepsilon-\lambda_s)\neq 0,\quad\Rightarrow\;\lim_{\varepsilon\to 0}\det(M(\lambda))=0$$

$\leadsto\;\det(M(\lambda))=\det(T)\cdot\det(\tilde{M}(\lambda)),\;\;\det(T)\neq 0\;\Rightarrow\;\det(\tilde{M}(\lambda))\approx\varepsilon^{k_1}\cdot k_2,\;\;k_2\neq 0,$
$\tilde{M}(\lambda)=$ Ergebnismatrix nach Gauss–Jordan.

Bei der Berechnung von $\det(\tilde{M}(\lambda_1))=\det(\begin{pmatrix}M_1 & N\\ N & M_2\end{pmatrix})$ nach dem Determinantenentwicklungssatz entstehen also dann k_1 Faktoren der Grösse ε und $n-k_1$ Faktoren q_i mit $|q_i|>>0$, die vielleicht ungefähr die Diagonalelemente von M_1 sein könnten.

$$\leadsto\;\det(M_2)\approx\varepsilon^{k_1}\cdot k_3,\;\;k_3\neq 0$$

Nun kann es möglich sein, dass die k_1 Faktoren ε schon in den Elementen von M_2 stecken. Ein Faktor der Grösse ε könnte aber auch durch die Summation entstehen, wenn etwa gleich grosse positive und negative Produkte addiert werden. Daher kann man statt der Gleichheit nur folgern: $n-Rang(M_1)\leq k_1$. Lässt man dann $\varepsilon\to 0$ gehen, so folgt:

Satz: **Vor.:**

$$\tilde{M}(\lambda_1) := \begin{pmatrix} M_1 & N \\ N & M_2 \end{pmatrix}$$

wie oben

Beh.:

$$M_2 = N, \;\; Rang(M_1) \geq n - k_1$$

Nun gilt:

$$n = Rang(M(\lambda_1)) + Dim(\mathbb{L}) = Rang(M_1) + Dim(\mathbb{L}) \\ \geq n - k_1 + Dim(\mathbb{L}) \;\Rightarrow\; k_1 = o(\lambda_1) \geq Dim(\mathbb{L}) = \nu(\lambda_1)$$

Konsequenz: $\nu(\lambda_1) \leq o(\lambda_1)$

1. Beispiel: Sei $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Die Rechnung zeigt:

$$\det(M) = 1, \;\; M \in R_n, \;\; \{EW\} = \{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1\} \;\Rightarrow\; o(\lambda_1) = 3, \;\; EV = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} \\ \Rightarrow\; \nu(\lambda_1) = Dim(\mathbb{L}) = 2 < o(\lambda_1) = 3$$

2. Beispiel: Sei $M = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Die Rechnung zeigt:

$$\det(M) = 1, \;\; M \in R_n, \;\; \{EW\} = \{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1\} \;\Rightarrow\; o(\lambda_1) = 3, \;\; EV = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \\ \Rightarrow\; \nu(\lambda_1) = Dim(\mathbb{L}) = 3 = o(\lambda_1)$$

☺

Im Falle von $\nu(\lambda_i) < o(\lambda_i)$ existieren zu λ_i sogenannte **Hauptvektoren** höherer Stufe.

Definition: $\vec{x}$ heisst **Hauptvektoren** q**–ter Stufe** zu λ_i, wenn gilt:

$$(A - \lambda_i E)^q \cdot \vec{x} = \vec{0}, \;\; (A - \lambda_i E)^{q-1} \cdot \vec{x} \neq \vec{0}$$

Wir zeigen, dass ein Hauptvektor $\vec{x}_i$ zu λ_i keine Komponenten in Richtung anderer Hauptvektoren $\vec{x}_k$ zu $\lambda_k \neq \lambda_i$ hat:

Wir nehmen das Gegenteil an: Sei $\vec{x}_i = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k \vec{x}_k$.

Es ist: $(A - \lambda_i\, E) \cdot \vec{x}_k = A\,\vec{x}_k - \lambda_i\, E\,\vec{x}_k = \lambda_k\,\vec{x}_k - \lambda_i\,\vec{x}_k = (\lambda_k - \lambda_i)\,\vec{x}_k$
$\Rightarrow\;(A - \lambda_i\, E)^q \cdot \vec{x}_k = (\lambda_k - \lambda_i)\,(A - \lambda_i\, E)^{q-1} \cdot \vec{x}_k = \ldots = (\lambda_k - \lambda_i)^q \cdot \vec{x}_k$

$$\leadsto \quad \vec{0} = (A - \lambda_i\, E)^q \cdot \vec{x}_i = (A - \lambda_i\, E)^q \sum_{k=1}^{n} \mu_k\,\vec{x}_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k\,(A - \lambda_i\, E)^q \cdot \vec{x}_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k\,(\lambda_k - \lambda_i)^q \cdot \vec{x}_k$$

mit $\{\vec{x}_k\}$ *l.u.* $\Rightarrow\ \mu_k\,(\lambda_k-\lambda_i)^q=0,\ \ \lambda_k\neq\lambda_i\ (k\neq i)\ \Rightarrow\ \forall_{k\neq i}\,\mu_k=0$

$\leadsto$ Widerspruch!

Konsequenz: Ein Hauptvektor $\vec{x}_i$ zu λ_i hat keine Komponenten in Richtung anderer Hauptvektoren $\vec{x}_k$ zu $\lambda_k\neq\lambda_i$.

Mit den Eigenvektoren und den Hauptvektoren höherer Stufe kann man also eine Basis des gesamten Vektorraums mit $Dim(VR)=Rang(A)$ komponieren.

Definition: Der **Hauptraum** zu λ_i ist der **Spann** (Menge der Linearkombinationen) aller Hauptvektoren zu λ_i.

Konsequenz: Die Dimension des Hauptraumes ist $o(\lambda_i)$. Hauptvektoren der Stufe 1 sind Eigenvektoren.

Bemerkung: Hat λ_i die algebraische Vielfachheit 1, so gibt es keine Hauptvektoren höherer Stufe.

Definition:

1 Das **Spektrum** von A ist die Menge der Eigenwerte von A:

2 Die **Resolventenmenge** von A ist: $\rho(A)=\mathbb{C}\setminus\sigma(A)$

Folgerung: Für $\lambda\in\rho(A)$ existiert daher $(A-\lambda E)^{-1}$.

Definition: $(A-\lambda E)^{-1}$ heisst **Resolvente** zu A. A.

10.7.4 Beispiele — Exemples

1. Beispiel: Drehung ,

<u>EW</u>: Sei $D_\varphi=\begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -\sin(\varphi)\\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\ P_\varphi(\lambda)=\det(D_\varphi-\lambda E)=\cos(\varphi)-\lambda-\sin(\varphi)\sin(\varphi)\cos(\varphi)-\lambda=$$
$$=\cos^2(\varphi)-2\lambda\cos(\varphi)+\lambda^2-(-\sin^2(\varphi))=\lambda^2-2\lambda\cos(\varphi)+1=0$$

$$\Rightarrow\ \lambda_{1,2}=\frac{2\cos(\varphi)\pm\sqrt{4\cos^2(\varphi)-4}}{2}=\cos(\varphi)\pm\sqrt{\cos^2(\varphi)-1}=\cos(\varphi)\pm i\cdot\sqrt{1-\cos^2(\varphi)}=$$
$$=\cos(\varphi)\pm i\cdot\sqrt{\sin^2(\varphi)}=\cos(\varphi)\pm i\cdot\sin(\varphi)\in\mathbb{R}\ \text{ für }\ \varphi=n\pi,\ \ n\in\mathbb{Z}.$$

<u>EV</u>:

$$\varphi=0\ \Rightarrow\ \lambda=1\ \Rightarrow\ D_\varphi=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E\ \Rightarrow\ \ EWP: E\cdot\vec{x}=\lambda\cdot\vec{x}\ \Rightarrow\ \forall_{\vec{x}}:\vec{x}\in\mathbb{L}$$

$\Rightarrow$ speziell: $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}\in\mathbb{L}$ (Basis).

2. Beispiel:

<u>EW</u>:

$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; P_k(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (1-\lambda)^2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = 1$

<u>EV</u>:

$E \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} x + k \cdot y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; x + k \cdot y = x$

$\triangleright\;$ $k = 0 \;\Rightarrow\; A = E \;\Rightarrow\; \forall_{\vec{x}} : \vec{x} \in \mathbb{L} \;\Rightarrow$ speziell: $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} \in \mathbb{L}$ (Basis).

$\triangleright\;$ $k \neq 0 \;\Rightarrow\; y = 0 \;\Rightarrow\; \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x\, \vec{e}_1,$ z.B. $\{\, EV\} = \{\vec{e}_1\}$.

$\rightsquigarrow\; \neq$ Basis!

$\rightsquigarrow$ Hauptvektoren: Noch ein Vektor notwendig!

$\rightsquigarrow\; (A - \lambda E) = (A - E) = \begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow\; ((A - \lambda E) \cdot (A - \lambda E)) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (A - \lambda E)^2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = N \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}\; \forall_{\vec{x}}$

$\Rightarrow\; \mathbb{L} = \{\vec{x} \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\wedge\; x, y \in \mathbb{R}\}$

Speziell: $\vec{e}_2 \in \mathbb{L} \;\Rightarrow\; \vec{e}_2 =$ Hauptvektor .

$\vec{e}_1 = EV \;\Rightarrow\; \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$: Basis mit Eigen- und Hauptvektor(en) .

10.7.5 Polynomnullstellen und EW — Zéros de pôlynomes et VP

Als Beispiel wählen wir Dimension = 5.

$$\text{Sei}\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix},\quad A_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 + \frac{1}{x} \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{x} \cdot E = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; A_x - \frac{1}{x} \cdot E := M_x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{x} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{x} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{x} & 1 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

Eine Rechnung zeigt: $x^4 \cdot \det(M_x) = a_4\, x^4 + a_3\, x^3 + a_2\, x^2 + a_1\, x^1 + a_0\, x^0 := p(x)$

$$\text{Sei}\quad x \neq 0,\; p(x) = 0,\; \vec{x} = \begin{pmatrix} x^4 \\ x^3 \\ x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\; A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^4 \\ x^3 \\ x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 \\ x^1 \\ 1 \\ p(x) = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 \\ x^1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ A_x\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\a_4&a_3&a_2&a_1&a_0+\frac{1}{x}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x^4\\x^3\\x^2\\x\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^3\\x^2\\x^1\\x^0=1\\\frac{1}{x}\end{pmatrix}=x^{-1}\cdot\begin{pmatrix}x^4\\x^3\\x^2\\x\\1\end{pmatrix}=x^{-1}\cdot\vec{x}$$

$\Rightarrow\ A_x\cdot\vec{x}=x^{-1}\cdot\vec{x}\leadsto\ x^{-1}$ ist EW von A_x zum EV $\vec{x}$.

Dazu ist: $\quad p(x)=x^4\cdot\det(M_x)$.

10.8 Geometrische Anwendungen — Applications géométriques

10.8.1 Begriffe: Morphismen — Notions: Morphismes

Sei $(A,\circ_1,\circ_2,\ldots,\circ_n)$ eine algebraische Struktur. .

($\leadsto$ A: Menge , $\circ_k$: Verknüpfung zwischen Elementen aus A .

D.h. $a_k,a_l\in A\ \Rightarrow\ ((a_k)\circ_i(a_l))\in A\ \ (\forall_{k,l,i})$.

Bsp.: $\circ_1=\ '+',\ \circ_2=\ '\cdot'$

Ebenso sei $(B,*_1,*_2,\ldots,*_n)$ eine algebraische Struktur mit den Verknüpfungen $*_1,*_2,\ldots,*_n$.

Definition: Eine Abbildung $\Phi: A\longmapsto B$ heisst **Homomorphismus**
$\Leftrightarrow\quad \forall_{i,k,l}:\quad \Phi((a_k)\circ_i(a_l))=(\Phi((a_k))*_i(\Phi(a_l)))$

$\Phi((a_k)\circ_i(a_l))\ \leadsto$ Bild der Verknüpfung $((a_k)\circ_i(a_l))$.

$\Phi((a_k)),\Phi((a_l))\leadsto$ Bilder der $(a_k),(a_l)$.

$(\Phi((a_k))*_i(\Phi(a_l)))\leadsto$ Verknüpfung der Bilder .

D.h. ein Homomorphismus ist strukturerhaltend: Es kommt auf dasselbe heraus, ob man die Verknüpfung zweier Elemente (in der Urbildmenge) abbildet — oder ob man die Bilder zweier Elemente (in der Bildmenge) verknüpft.

Bsp.: $A=\mathbb{R}_0^+,\ B=\mathbb{R},\ \Phi:\ Phi(x)=\ln(x),\ '\circ'='+',\ '*'='\cdot'$
$\Rightarrow\ \Phi(x_1\circ x_2)=\ln(x_1\cdot x_2)=\Phi(x_1)+\Phi(x_2)=\ln(x_1)+\ln(x_2)$

Definition: **Endomorphismus:** Homomorphismus von A auf sich selbst.
Isomorphismus Φ: Φ Homomorphismus und Φ bjiektiv.
Automorphismus: Isomorphismus von A auf sich selbst.

10.8.2 Lineare Abbbildung, Matrix und Basisabbildung — Application linéaire, matrice et application de base

Definition — Définition

Sei $V=\{\vec{x}_i\mid i\in M\},\ M=$ Indexmenge .
Ebenso für V'.

Wir definieren für V und V' unabhängig von der Darstellung der Vektoren $\vec{x}_i$ in einer Basis den Begriff „lineare Abbildung“ neu und allgemeiner:

Definition:

$$\Phi : \vec{x} \longmapsto \vec{x}\,'_{V'} = \Phi(\vec{x}) :$$

$\Phi : V \longmapsto V'$ heisst **linear**: :

$$\Leftrightarrow \forall_{\vec{x},\vec{y}\in V} \quad \Phi(\vec{x}+\vec{y}) = \Phi(\vec{x}) + \Phi(\vec{y})$$
$$\forall_{\vec{x}\in V,\lambda\in\mathbb{C}(\mathbb{R})} \quad \Phi(\lambda\,\vec{x}) = \lambda\,\Phi(\vec{x})$$

Konsequenz: $\forall_{\vec{x},\vec{y}\in V} : \Phi(\vec{x}+\vec{y}) = \Phi(\vec{x}) + \Phi(\vec{y})$ bedeutet, dass Φ ein Homomorphismus ist .

Wendet man dieses Gesetz auf Summen mit mehreren Summanden an, so folgt:

Satz: **Vor.:**

Φ linear

Beh.:

$$\Phi(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\,\vec{x}_i) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\,\Phi(\vec{x}_i)$$

Dabei ist: $m \leq Dim(VR)$ mit $VR = LK(\{\vec{x}_i\})$.

Speziell für $\lambda_i = x_i$ und $\vec{x}_i = \vec{e}_i$, d.h. für $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\,\vec{e}_i = \vec{x}_i$ folgt:

Korollar: **Vor.:**

Φ linear

Beh.:

$$\Phi(\vec{x}) = \Phi(\sum_{i=1}^{n} x_i\,\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \Phi(\vec{e}_i)$$

Konsequenz: Kennt man die Bilder $\Phi(\vec{e}_i)$ der Basisvektoren $\vec{e}_i$, so kennt man auch $\Phi(\vec{x})\ \forall_{\vec{x}}$.

Lineare Abbildung und Matrix — Application linéaire et matrice

Sei $\{\vec{e}_i \mid i = 1,\ldots,n\}$ eine Basis von V, $Dim(V) = n$.
Sei $\{(\vec{e}_i)\,' \mid i = 1,\ldots,n\}$ eine Basis von V', $Dim(V') = m$.
Dann ist (nach Definition der linearen Abbildung) $\Phi(\vec{e}_i)$ eine Linearkombination der $(\vec{e}_k)\,'$.

$$\leadsto \quad \exists_{\alpha_{ki}} : \Phi(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ki}(\vec{e}_k)\,' \in V'$$

Wir führen in Anlehnung an das Skalarprodukt die folgende Kurzschreibweise ein:

Schreibweise: $$\vec{x}_V = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_V \overbrace{:=}^{Def.} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{Matr.} \circ \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{pmatrix}_V$$

Für das Bild eines beliebigen Vektors $\vec{x} \in V$ folgt damit:

Sei $\Phi(\vec{e_i}) = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_{ki}(\vec{e}_k)\,'), \ \vec{e_i} = (\vec{e}_i)_V, \ \vec{e_k}\,' = (\vec{e}_k)_{V'}$

$$V' \ni \vec{x}\,' = \Phi(\vec{x}) = \Phi(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e_i}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \Phi(\vec{e_i}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (\sum_{k=1}^{m} \alpha_{ki}(\vec{e}_k)\,') =$$

$$= x_1 \cdot (\alpha_{11}(\vec{e}_1)\,' + \ldots + \alpha_{m1}(\vec{e}_m)\,') + \ldots + x_n \cdot (\alpha_{1n}(\vec{e}_1)\,' + \ldots + \alpha_{mn}(\vec{e}_m)\,') =$$
$$= (x_1\alpha_{11} + \ldots x_n\alpha_{1n})(\vec{e}_1)\,' + \ldots + (x_1\alpha_{m1} + \ldots x_n\alpha_{mn})(\vec{e}_m)\,' =$$

$$= \begin{pmatrix} (x_1\alpha_{11} + \ldots x_n\alpha_{1n}) \\ \vdots \\ (x_1\alpha_{m1} + \ldots x_n\alpha_{mn}) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} (\vec{e}_1)\,' \\ \vdots \\ (\vec{e}_m)\,' \end{pmatrix}_{V'} = (\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}) \circ \begin{pmatrix} (\vec{e}_1)\,' \\ \vdots \\ (\vec{e}_m)\,' \end{pmatrix}_{V'} =$$
$$= (M \cdot \vec{x}) \circ \begin{pmatrix} (\vec{e}_1)\,' \\ \vdots \\ (\vec{e}_m)\,' \end{pmatrix}_{V'} = \begin{pmatrix} (x_1)\,' \\ \vdots \\ (x_m)\,' \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} (\vec{e}_1)\,' \\ \vdots \\ (\vec{e}_m)\,' \end{pmatrix}_{V'} = (x_1)\,'(\vec{e}_1)\,' + \ldots + (x_m)\,'(\vec{e}_m)\,' = \vec{x}\,' \in V'$$

Dabei ist $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = M, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_V = \vec{x} \in V, \ \ \Phi(\vec{x}) = \vec{x}\,' \in V'$

Dass $\vec{x}_V = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_V$ die Darstellung von $\vec{x}$ in der betrachteten Basis in V und $\vec{x}_V\,' = \begin{pmatrix} (x_1)\,' \\ \vdots \\ (x_m)\,' \end{pmatrix}_{V'}$ die Darstellung von $\vec{x}\,'$ in der entsprechenden betrachteten Basis in V' ist, sieht man an den Indices n und m. $\leadsto$

Satz: Eine lineare Abbildung $\Phi: \ V \overset{in}{\longmapsto} V'$ (in V') ist wie folgt gegeben:

$$\Phi : \vec{x}_V = \vec{x} \circ \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \longmapsto (\vec{x})\,' = (\vec{x})\,' \circ \begin{pmatrix} (e_1)\,' \\ \vdots \\ (e_n)\,' \end{pmatrix}_{V'}$$
$$\text{mit} \quad (\vec{x})'_{V'} = (M \cdot \vec{x})_{V'}, \ \ M = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Konsequenz: Eine lineare Abbildung $\Phi: \ V \overset{in}{\longmapsto} V'$ ist durch eine Matrix M gegeben.

Lineare Abbildung und Basisabbildung — Application linéaire et application de la base

Wendet man Φ speziell auf die Basis an, so gilt:

$$\Phi(\vec{e_i}) = \Phi((\vec{e_i})_V) = \Phi(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_V) = 1 \cdot (\alpha_{1i}(\vec{e}_1)\,' + \ldots + \alpha_{mi}(\vec{e}_m)\,')) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ki}\,(\vec{e}_k)\,'$$

$\leadsto$ Für alle Vektoren zusammen:

$$\Phi : \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \Phi(\vec{e}_1) \\ \vdots \\ \Phi(\vec{e}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_{k1}(\vec{e}_k)' \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_{kn}(\vec{e}_k)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} (\vec{e}_1)' \\ \vdots \\ (\vec{e}_m)' \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{mn} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} (\vec{e}_1)' \\ \vdots \\ (\vec{e}_m)' \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{m1})^T * \begin{pmatrix} (\vec{e}_1)' \\ \vdots \\ (\vec{e}_m)' \end{pmatrix} \\ \vdots \\ (\alpha_{1n}, \ldots, \alpha_{mn})^T * \begin{pmatrix} (\vec{e}_1)' \\ \vdots \\ (\vec{e}_m)' \end{pmatrix} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} (\vec{e}_1)' \\ \vdots \\ (\vec{e}_m)' \end{pmatrix} = M^T * \begin{pmatrix} (\vec{e}_1)' \\ \vdots \\ (\vec{e}_m)' \end{pmatrix}$$

($\circ$: Formales Skalarprodukt
$*$: Formales Matrixprodukt)

Satz: Ist die Matrix M durch eine lineare Abbildung $V \overset{\Phi}{\longmapsto} V'$ gegeben, so wird durch M^T die Basis von V auf die Basis von V' abgebildet:

$$\vec{x}_V \overset{\Phi}{\longmapsto} \vec{x}\,'_{V'} = (M \cdot \vec{x})_{V'}$$

$$\Phi : \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \Phi(\vec{e}_1) \\ \vdots \\ \Phi(\vec{e}_n) \end{pmatrix} = M^T * \begin{pmatrix} (\vec{e}_1)' \\ \vdots \\ (\vec{e}_m)' \end{pmatrix}$$

Dabei berechnet sich $M^T * \begin{pmatrix} (\vec{e}_1)' \\ \vdots \\ (\vec{e}_m)' \end{pmatrix}$ nach den Regeln des Matrixprodukts.

Konsequenz: Wenn somit M^T durch die Basisabbildung bekannt ist, so kennt man auch die neuen Koordinaten $(M \cdot \vec{x})$ eines jeden Vektors $\vec{x}$.

Bsp.: $(\vec{e}_1)' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{e}_2)' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ V = V'$ (Spezialfall)

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \vec{e}_1\,' \\ \vec{e}_2\,' \end{pmatrix} = (M^T)^{-1} * \begin{pmatrix} (\vec{e}_1) \\ (\vec{e}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot \vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2 \\ 1 \cdot \vec{e}_1 + (-1)\,\vec{e}_2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \Phi : \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \Phi(\vec{e}_1) \\ \Phi(\vec{e}_2) \end{pmatrix} = M^T * \begin{pmatrix} (\vec{e}_1)' \\ (\vec{e}_2)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -(\frac{1}{3}) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} (\vec{e}_1)' \\ (\vec{e}_2)' \end{pmatrix},$$

$$M^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -(\frac{1}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \vec{v}_V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_V \longmapsto (\vec{v}\,')_{V'} = (M * \vec{v})_{V'} = (M * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix})_{V'} = \begin{pmatrix} 1\,x_1 + 2\,x_2 \\ 1\,x_1 - 1\,x_2 \end{pmatrix}_{V'}$$

Dimensionssatz — Théorème de la dimension

Wegen der Definition der Linearität gilt:

$$\Phi(\vec{x}_1), \Phi(\vec{x}_2) \in V' \ \Rightarrow \ \Phi(\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2) = \lambda_1 \Phi(\vec{x}_1) + \lambda_2 \Phi(\vec{x}_2) \in V'$$

Das bedeutet, dass die Menge der Bilder $\{\Phi(\vec{x})\} = \Phi(V)$ einen Vektorraum $\subseteq V'$ bilden, der in natürlicher Weise Unterraum von V' ist. $\leadsto$

Satz: **Vor.:**

Φ linear , $\Phi : V \longmapsto \Phi(V) \subseteq V'$

Beh.:

$\Phi(V)$ ist Unterraum von V' V'

Seien $\vec{x} \in V$, $(\vec{x})' \in V'$. Sei Φ gegeben durch die Matrix M.

Wegen $(\vec{x})' = M \cdot \vec{x}$ gilt:

Φ bijektiv $\Rightarrow$ M regulär $\Rightarrow$ $\Phi :\ 0 \overset{bij.}{\longmapsto} 0'$.

Daher gilt

Satz: **Vor.:**

Φ linear

Beh.:

Φ bijektiv $\Rightarrow$ $\Phi :\ 0 \overset{bij.}{\longmapsto} 0'$ $\Rightarrow$ Φ bildet *l.u.* Vektoren auf *l.u.* Vektoren ab. Φ applique des vecteurs *l.u.* sur des vecteurs *l.u.*.

Φ ist somit Isomorphismus .

Konsequenz: Φ Isomorphismus $\Rightarrow$ $Dim(V) = Dim(V')$

Von früher kennen wir die Definition:

Definition: $Kern(\Phi) := \{\vec{x} \in V \mid \vec{x} \longmapsto \Phi(\vec{x}) = 0' \in V'\}$

Es gilt der Satz:

Satz:

Vor.:

Φ linear , $\Phi: V \longmapsto \Phi(V) \subseteq V'$

Beh.:

$Kern(\Phi) =$ linearer Unterraum von V' .

Zum Beweis: $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in Kern(\Phi)$

$\Rightarrow \Phi(\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2) = \lambda_1\Phi(\vec{x}_1) + \lambda_2\Phi(\vec{x}_2) = \lambda_1 0' + \lambda_2 0' = 0' \Rightarrow \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 \in Kern(\Phi)$.

Daher folgt:

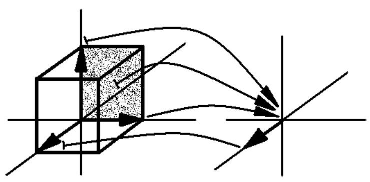
Korollar:

Vor.:

Φ linear , $\Phi: V \longmapsto \Phi(V)$

Beh.:

$Kern(\Phi) = \{0\} \Leftrightarrow Dim(V) = Dim(V')$



Da Φ durch eine Matrix M gegeben ist, folgt aus dem Rangsatz für Gleichungssysteme ($M \cdot \vec{x} = \vec{b}$) der **Dimensionssatz**:

Satz:

Vor.:

Φ linear , $\Phi: V \longmapsto \Phi(V) \subseteq V'$

Beh.:

$Dim(V) = Dim(Kern(\Phi)) + Dim(\Phi(V))$

10.8.3 Affinitäten — Affinités

Definition, Eigenschaften — Définition, qualités

Wir betrachten hier geometrische Abbildungen in der Ebene: $\Phi : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ $\Phi : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$

Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$. Wir definieren:

Definition: $\Phi : \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \Phi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a_1x + b_1y + c_1 \\ a_2x + b_2y + c_2 \end{pmatrix} = M \cdot \vec{x} + \vec{c}$
heisst **Affinität** .

Sei Φ Affinität .
Sei g Gerade, gegeben durch: $\vec{r} = \vec{u}t + \vec{v}$.

Dann gilt:
$\phi(\vec{r}) = M \cdot \vec{r} + \vec{c} = M(\vec{u}\,t + \vec{v}) + \vec{c} = (M\vec{u})\,t + M\vec{v} + \vec{c} := \vec{u}\,'\,t + \vec{v}\,' + \vec{c} = \vec{u}\,'\,t + +\vec{c}\,'$.

Falls gilt: $\vec{u}\,' = M\,\vec{u} \neq \vec{0}$, so ist durch $\phi(\vec{r})$ ebenfalls eine Gerade $\vec{u}\,'\,t + \vec{c}\,'$ gegeben.

Bei einer Geraden gilt immer: $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Falls M regulär ist, so folgt dann immer: $\vec{u}\,' = M\vec{u} \neq \vec{0}$.

Falls M nicht regulär ist, so könnte jedoch $\vec{u}\,' = \vec{0}$ werden. Das ist der Fall für $\vec{u} \in Kern(\Phi)$.

Konsequenz:
In jedem Fall gilt aber: $\Phi(\vec{r})$ ist geometrisch eine Gerade oder ein Punkt.

Daher definieren wir:

Definition:

1 Φ bijektiv resp. M regulär $\leadsto$ Φ heisst **Affinität** (gewöhnliche Affinität).

2 Φ nicht bijektiv resp. M nicht regulär $\leadsto$ Φ heisst **entartete** oder **singuläre Affinität**.

Für Affinitäten kann man durch Rechnung den folgenden Satz beweisen:

Notizen:

$\leadsto$

Satz:

1 Gewöhnliche Affinitäten bilden Geraden in Geraden ab.

2 Gewöhnliche Affinitäten sind parallelentreu.

3 Gewöhnliche Affinitäten lassen orientierte Streckenverhältnisse invariant.

4 Zu Dreiecken $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ existiert genau eine Affinität $\Phi : \triangle ABC \longmapsto \triangle A'B'C'$.

5 Sei Φ Affinität mit $\Phi(\vec{x}) = M \cdot \vec{x} + \vec{c}$, $Fig = Fig(P_1, \ldots, P_n)$ sei eine geradelinig begrenzte Figur, $m(Fig)$ sei deren Inhalt, $\Phi(Fig) = Fig' = Fig'(P_1', \ldots, P_n')$ sei die Bildfigur und $m(\Phi(Fig))$ sei deren Inhalt. Dann gilt: $\leadsto$ Beh.:

Beh.:

$$m(\Phi(Fig)) = m(Fig') = m(Fig) \cdot \det(M)$$

(Gilt auch bei entarteten Affinitäten.)

6 Sei $\forall_{\Phi_1,\Phi_2} \Phi_1(\vec{x}) = M_1 \cdot \vec{x} + \vec{c}_1$,
$\Phi_2(\vec{x}) = M_2 \cdot \vec{x} + \vec{c}_2$, $(\Phi_2 \circ \Phi_1)(\vec{x}) = M_2 \cdot (M_1 \cdot \vec{x} + \vec{c}_1) + \vec{c}_2$
$= (M_2 \cdot M_1) \cdot \vec{x} + M_2 \cdot \vec{c}_1 + \vec{c}_2$

Sei $M_\Phi = \{\Phi \mid \Phi \text{ Affinität } \}$

Beh.: $(M_\Phi, \circ)$ ist Gruppe

Spezielle Affinitäten — Affinités spéciales

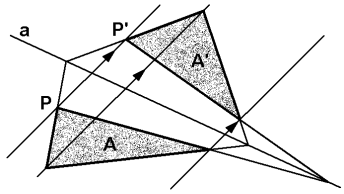
Hier eine Liste: $(\Phi(\vec{x}) = M \cdot \vec{x} + \vec{c})$

- ⊘ $M = E \leadsto$ Translation
- ⊘ $M = \lambda \cdot E$, $\vec{c} = \vec{0} \leadsto$ Streckung
- ⊘ Spiegelungen
- ⊘ Rotation
- ⊘ Kongruenzabbildung
- ⊘ Ähnlichkeitsabbildung
- ⊘ Perspektive Affinität (normale und schiefe Affinität oder Scherung)
- ⊘ Eulersche Affinität
- ⊘ ...

Ausser der perspektiven Affinität und der Eulerschen Affinität sind uns diese Abbildungen nicht unbekannt.

Perspektive Affinität — Affinité perspective

Hier existiert eine **Fixgerade** (Fixpunktgerade, sie besteht aus lauter Fixpunkten), die **Affinitätsachse**. Alle Verbindungsgeraden von Urbildpunkt zu Bildpunkt sind parallel zu einer Richtung, der **Affinitätsrichtung**.
Normale Affinität: Affinitätsachse $\perp$ Affinitätsrichtung.
Schiefe Affinität oder **Scherung:** Sonst.



Spezialfall:

$\vec{x}\,' = M \cdot \vec{x}, \ \ \vec{c} = \vec{0}, \ \ EW \ \ \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1.$

Speziell:
$\lambda_1 = 1 \ \Rightarrow \ EV \ \ \vec{x}_1$: Richtung der Fixpunktgerade .

$\leadsto$ **Schiefe Symmetrie .**

Eulersche Affinität — Affinité d'Euler

Die **Eulersche Affinität** Entsteht durch Zusammensetzung zweier normaler Affinitäten mit zueinander senkrechten Achsen.

Man findet:

<u>**Vor.:**</u> Seien $\Phi(\vec{x}) = M \cdot \vec{x} + \vec{c}, \ \ \vec{c} = \vec{0}, \ \ \vec{x}\,' = M \cdot \vec{x}, \ \ \det(M) \neq 0.$

Eigenschaften: Φ Eulersche Affinität
$\Leftrightarrow M$ symmetrisch .

Konsequenzen:
In diesem Fall hat M verschiedene Eigenwerte: $\lambda_1 \neq \lambda_2, \neq 0.$

Für die EV gilt: $\vec{x}_1 \perp \vec{x}_2$

Spezialfall:
$\vec{x}_1 = \vec{e}_1, \ \ \vec{x}_2 = \vec{e}_2 \ \Rightarrow \ \Phi(\vec{x}_1) = \Phi(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot x \\ \lambda_2 \cdot y \end{pmatrix} \leadsto$ Eulersche Affinität .

10.8.4 Isometrien — Isométries

Definition: $\Phi : \vec{x} \longmapsto \vec{x}\,' = M \cdot \vec{x}$ heisst **Isometrie**
$\Leftrightarrow \quad \forall_{\vec{x}_1, \vec{x}_2} : \ \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle = \langle M \cdot \vec{x}_1, M \cdot \vec{x}_2 \rangle$

Konsequenz: $|\vec{x}_1| = |M \cdot \vec{x}_1| \quad \leadsto$

Folgerung: Isometrien sind längentreu.

$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ stiftet eine Isometrie

$$\Leftrightarrow \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle = \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle = x^2 + y^2 = \langle M \cdot \vec{x}_1, M \cdot \vec{x}_2 \rangle = \langle \begin{pmatrix} a_1x + b_1y \\ a_2x + b_2y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1x + b_1y \\ a_2x + b_2y \end{pmatrix} \rangle =$$

$$(a_1x + b_1y)^2 + (a_2x + b_2y)^2 = (a_1^2 + a_2^2)x^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2)xy + (b_1^2 + b_2^2)y^2$$

$$\Rightarrow \ \forall_{x,y} : \ x^2 + y^2 = (a_1^2 + a_2^2)x^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2)xy + (b_1^2 + b_2^2)y^2$$

$$\Rightarrow \ (a_1^2 + a_2^2) = 1, \ (a_1b_1 + a_2b_2) = 0, \ (b_1^2 + b_2^2) = 1$$

Sei $\ a_1 := \cos(\varphi) \ \Rightarrow \ a_2 = \pm\sin(\varphi)$. Z.B. für $''+''$: $a_2 = \sin(\varphi)$

$\Rightarrow \ (a_1b_1 + a_2b_2) = \cos(\varphi)\, b_1 + \sin(\varphi)\, b_2 = 0$
$\Rightarrow \ $ Z.B. $\ b_1 = -\sin(\varphi), \ b_2 = \cos(\varphi), \ M = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} = D_\varphi.$
$\rightsquigarrow$ Drehung .

Berücksichtigt man die andern möglichen Vorzeichenverteilungen, so ergibt sich: $M = \pm D_{\pm\varphi}$
$M = \pm D_{\pm\varphi}$

Satz:

Vor.:

$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ Isometrie

Beh.:

$M = \pm D_{\pm\varphi}$
(Drehung und Punktspiegelung)

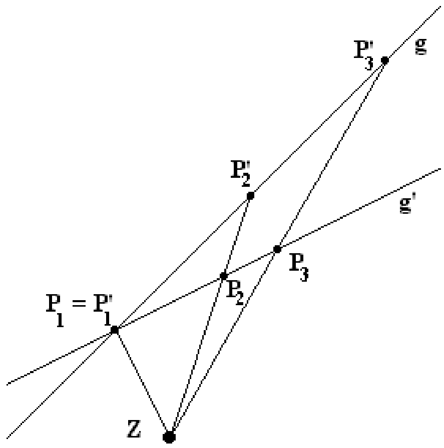
10.8.5 Kollineationen — Collinéations

Die Abbildung — L'application

(Im Folgenden handelt es sich um einen „Ausblick“.)

Kollineationen sind Abbildungen, die Geraden in Geraden oder Punkte überführen. Als Beispiel betrachten wir die **Zentralperspektive in der Ebene**.

Wie ein Blick in die Skizze sofort zeigt, bleiben bei der Abbildung $P \longmapsto P'$ die Streckenverhältnisse nicht invariant.



Konsequenz: Die Abbildung $P \longmapsto P'$ kann daher nicht durch eine Matrix gegeben werden.

Denn müsste sein: $\mathcal{M} : \vec{v} = \vec{a} + \lambda\,\vec{b} \longmapsto M \cdot \vec{v} = M \cdot \vec{a} + \lambda \cdot M \cdot \vec{b} = \vec{a}\,' + \lambda \cdot \vec{b}\,'$

$$\leadsto \; \overrightarrow{P_2P_1} = \vec{b} = \lambda \cdot \overrightarrow{P_3P_1} \longmapsto \overrightarrow{P_2\,'P_1\,'} = \vec{b}\,' = \lambda \cdot \overrightarrow{P_3\,'P_1\,'}$$

$$\text{d. h.} \qquad \frac{|\overrightarrow{P_3P_1}|}{|\overrightarrow{P_2P_1}|} = \frac{|\overrightarrow{P_3\,'P_1\,'}|}{|\overrightarrow{P_2\,'P_1\,'}|}$$

Das stimmt in der Skizze jedoch nicht.

Hingegen wissen wir schon, dass das Doppelverhältnis hier invariant bleiben muss.

Sei $\quad Z = Z(0;0), \;\; g: \; \vec{v} = \vec{a} + \lambda\,\vec{b}, \;\; g\,': \; \vec{v}\,' = \vec{a}\,' + \lambda\,\vec{b}\,', \;\; \vec{a}\,' = \vec{a}$

mit $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \; \vec{v}\,' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \; \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \; \vec{a}\,' = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix}, \; \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \; \vec{b}\,' = \begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \end{pmatrix}$

Um das Abbildungsgesetz algebraisch fassen zu können, wollen wir $P\,'(x\,', y\,')$ aus $P(x, y)$ berechnen.

Sei $\quad P(x, y) \longmapsto P\,'(x\,', y\,'), \quad \overrightarrow{ZP} \longmapsto \overrightarrow{ZP\,'} = k \cdot \overrightarrow{ZP}$

$$\leadsto \; \vec{v}\,' = k \cdot \vec{v} = k \cdot (\vec{a} + \lambda\,\vec{b}) = \vec{a} + \mu\,\vec{b}\,' = k \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot x \\ k \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\,' \\ y\,' \end{pmatrix}$$

Es gilt: $\quad \vec{v}\,' \| \vec{v} \;\Rightarrow\; \vec{v}\,' \perp \vec{v} \;\Rightarrow\; \langle \vec{v}_\perp, \vec{v}\,' \rangle = 0 \;\Rightarrow\; \langle \begin{pmatrix} -a_2 - \lambda\,b_2 \\ a_1 + \lambda\,b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 + \mu\,b_1\,' \\ a_2 + \mu\,b_2\,' \end{pmatrix} \rangle = 0$

$$\leadsto \; -a_1\,a_2 - \mu\,a_2\,b_1\,' - \lambda\,a_1\,b_2 - \lambda\,\mu\,b_2\,b_1\,' + a_1\,a_2 + \mu\,a_1\,b_2\,' + \lambda\,a_2\,b_1 - \lambda\,\mu\,b_1\,b_2\,' = 0$$

$$\leadsto \; \mu\,(a_1\,b_2\,' - a_2\,b_1\,' + \lambda\,b_1\,b_2\,' - \lambda\,b_2\,b_1\,') = \lambda\,(a_1\,b_2 - a_2\,b_1)$$

$$\Rightarrow \; \mu\,(\det \begin{vmatrix} a_1 & b_1\,' \\ a_2 & b_2\,' \end{vmatrix} + \lambda \det \begin{vmatrix} b_1 & b_1\,' \\ b_2 & b_2\,' \end{vmatrix}) = \lambda \det \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \;\Rightarrow\; \mu\,(\det(\vec{a}, \vec{b}\,') + \lambda \det(\vec{b}, \vec{b}\,')) = \lambda \det(\vec{a}, \vec{b})$$

Formel: $$\vec{v} = \vec{a} + \lambda\,\vec{b} \longmapsto \vec{v}\,' = \vec{a} + \frac{\lambda \det(\vec{a}, \vec{b})}{\det(\vec{a}, \vec{b}\,') + \lambda \det(\vec{b}, \vec{b}\,')}\,\vec{b}\,'$$

Das kann keine lineare Abbildung sein, denn λ kommt auch im Nenner vor!

Es gilt: $\quad x = a_1 + \lambda\, b_1,\;\; y = a_2 + \lambda\, b_2$

$\leadsto$ Ist z.B. $b_1 \neq 0$, so kann man statt λ auch x als Parameter einführen:

$$\lambda \frac{x - a_1}{b_1}$$

Allgemein hat daher hier die Abbildungsgleichung die folgende Form:

$$\vec{v} \longmapsto \vec{v}\,' = \vec{v}_0 + \vec{v}_1 \, \frac{x \cdot c_1}{x \cdot c_2 + c_3}\Big|_{b_1 \neq 0} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1 \, \frac{y \cdot c_4}{y \cdot c_5 + c_6}\Big|_{b_2 \neq 0}$$

Zentralprojektion einer Ebene im Raum — Projection centrale d'un plan dans l'espace

Wir betrachten eine Zentralprojektion $\mathcal{A}$ mit $Z = O$, $\;\mathcal{A}:$ Ebene $\Phi \longmapsto \Phi\,'$:

$$\Phi: \; \vec{v} = \vec{a} + \lambda\, \vec{b} + \mu\, \vec{c} \longmapsto \Phi\,': \; \vec{w} = \vec{a}\,' + \nu\, \vec{b}\,' + \xi\, \vec{c}\,', \;\; \vec{w} = \mathcal{A}(\vec{v}) = \kappa\, \vec{v}$$

$$\leadsto \quad \vec{w} = \vec{a}\,' + \nu\, \vec{b}\,' + \xi\, \vec{c}\,' = \kappa\, \vec{v} = \kappa\, (\vec{a} + \lambda\, \vec{b} + \mu\, \vec{c}) \;\Rightarrow\; \nu\, \vec{b}\,' + \xi\, \vec{c}\,' + \kappa\, (-\vec{a} - \lambda\, \vec{b} - \mu\, \vec{c}) = \vec{a}\,'$$

$$\leadsto \text{ Cramer: } \kappa = \frac{D_3}{D_0} = \frac{\det((\vec{b}\,', \vec{c}\,', \vec{a}\,'))}{\det((\vec{b}\,', \vec{c}\,', (-\vec{a} - \lambda\, \vec{b} - \mu\, \vec{c})))} \;\Rightarrow\; \vec{w} = \kappa\, \vec{v} = \frac{\det((\vec{b}\,', \vec{c}\,', \vec{a}\,'))}{\det((\vec{b}\,', \vec{c}\,', (-\vec{a} - \lambda\, \vec{b} - \mu\, \vec{c})))}\, \vec{v}$$

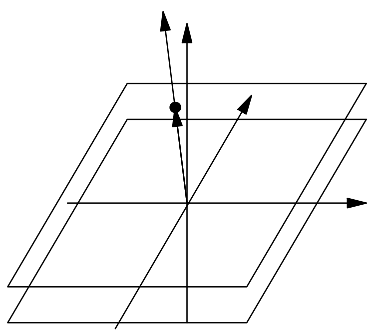
$$\Rightarrow\; \vec{w} = \frac{\det((\vec{b}\,', \vec{c}\,', \vec{a}\,'))}{\det((\vec{b}\,', \vec{c}\,', (-\vec{a} - \lambda\, \vec{b} - \mu\, \vec{c})))} \cdot (\vec{a} + \lambda\, \vec{b} + \mu\, \vec{c})$$

Formel:

$$\vec{w} = \mathcal{A}(\vec{v}) = \frac{-\det((\vec{b}\,', \vec{c}\,', \vec{a}\,'))}{\det((\vec{b}\,', \vec{c}\,', (\vec{a} + \lambda\, \vec{b} + \mu\, \vec{c})))} \cdot (\vec{a} + \lambda\, \vec{b} + \mu\, \vec{c})$$

Matrizen und Zentralprojektion — Matrices et projection centrale

Wie bei der Berechnung der Translation mit Hilfe von Matrizen wollen wir auch hier wieder eine **projektive Sichtweise** verwenden. Zu diesem Zwecke führen wir wieder eine dritte Koordinate ein, die wir vorerst $= 1$ setzen $\leadsto$ $\vec{a} \longmapsto \vec{a}_z$. Bei einer Matrixmultiplikation könnte aber einmal eine solche Koordinate $\neq 1$ werden. Daher gehen wir zu Äquivalenzklassen über, indem wir alle Vektoren $\neq \vec{0}_z$ zu einer Klasse zusammenfassen, die auseinander durch Streckung mit einem Faktor $\lambda \neq 0$ hervorgehen. Falls die 3. Koordinate $\neq 0$ ist, wählen wir daraus den Repräsentanten mit der 3. Koordinate = 1. D.h. wir arbeiten dann in einer Hauptebene parallel zur (x, y)–Ebene auf der Höhe $z = 1$. Man kann sich leicht vorstellen, dass Vektoren mit sehr grossen x– oder y–Koordinaten bei der Streckung mit dem Kehrwert einer solchen grossen Koordinate dann einen z–Wert aufweisen, der gegen 0 strebt. $z = 0$ bedeutet daher ein Ortsvektor zu einem „unendlich fernen Punkt".



$$[\vec{v}_z] = \{\vec{w}_z \mid \exists_\varrho \; \vec{w}_z = \varrho \cdot \vec{v}_z\}$$

Wie schon bei den Pfeilen und Vektoren setzen wir den Repräsentanten für die Klasse:

$$\vec{w}_z = \varrho \cdot \vec{v}_z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \vec{v}_z \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Addition definieren wir mit Hilfe von Translationsmatrizen (siehe Seite 193), das Streckungsprodukt mit λ durch eine Multiplikation mit M der Form:

$$M = (\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}), \ \ \lambda \cdot \vec{v}_z := M \cdot \vec{v}_z$$

Nun wollen wir zeigen, wie man mit Hilfe von hintereinander ausgeführten Matrixmultiplikationen von $\vec{v}_z(\lambda) = \vec{a}_z + \lambda \cdot \vec{b}_z,\ \ \vec{b}_z \neq \vec{0}_z$, zu $\vec{w}_z(t) = \vec{a}_z + \mu \cdot \vec{c}_z$ gelangen kann:

$$\vec{v}_z(\lambda) = \vec{a}_z + \lambda \cdot \vec{b}_z = \begin{pmatrix} a_1 + \lambda\, b_1 \\ a_2 + \lambda\, b_2 \\ 1 \end{pmatrix} \xmapsto{M_1} M_1 \cdot \begin{pmatrix} a_1 + \lambda\, b_1 \\ a_2 + \lambda\, b_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 + \lambda\, b_1 \\ a_2 + \lambda\, b_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\, b_1 \\ \lambda\, b_2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \lambda\, b_1 \\ \lambda\, b_2 \\ 1 \end{pmatrix} \xmapsto{M_2} M_2 \cdot \begin{pmatrix} \lambda\, b_1 \\ \lambda\, b_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda\, b_1 \\ \lambda\, b_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\, b_1^2 \\ \lambda\, b_2^2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \lambda\, b_1^2 \\ \lambda\, b_2^2 \\ 1 \end{pmatrix} \xmapsto{M_3} M_3 \cdot \begin{pmatrix} \lambda\, b_1^2 \\ \lambda\, b_2^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda\, b_1^2 \\ \lambda\, b_2^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\, (b_1^2 + b_2^2) \\ \lambda\, b_2^2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \lambda\, (b_1^2 + b_2^2) \\ \lambda\, b_2^2 \\ 1 \end{pmatrix} \xmapsto{M_4} M_4 \cdot \begin{pmatrix} \lambda\, (b_1^2 + b_2^2) \\ \lambda\, b_2^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b_1^2+b_2^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b_1^2+b_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda\, (b_1^2 + b_2^2) \\ \lambda\, b_2^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \xmapsto{M_5} M_5 \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & d_2 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ d_1 + \lambda \cdot d_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{d_1+\lambda\cdot d_2} \\ \frac{\lambda}{d_1+\lambda\cdot d_2} \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ d_1 + \lambda\, d_2 \end{pmatrix} \xmapsto{M_6} M_6 \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ d_1 + \lambda\, d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ d_1 + \lambda\, d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\, c_1 \\ \lambda\, c_2 \\ d_1 + \lambda\, d_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\lambda\cdot c_1}{d_1+\lambda\, d_2} \\ \frac{\lambda\, c_2}{d_1+\lambda\, d_2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \frac{\lambda\cdot c_1}{d_1+\lambda\, d_2} \\ \frac{\lambda\, c_2}{d_1+\lambda\, d_2} \\ 1 \end{pmatrix} \xmapsto{M_7} M_7 \cdot \begin{pmatrix} \frac{\lambda\cdot c_1}{d_1+\lambda\, d_2} \\ \frac{\lambda\, c_2}{d_1+\lambda\, d_2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\lambda\cdot c_1}{d_1+\lambda\, d_2} \\ \frac{\lambda\, c_2}{d_1+\lambda\, d_2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + \frac{\lambda\cdot c_1}{d_1+\lambda\, d_2} \\ a_2 + \frac{\lambda\, c_2}{d_1+\lambda\, d_2} \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{w}_z$$

Zusammen:

$$A = M_8 \cdot (M_7 \cdot (M_6 \cdot (M_5 \cdot (M_4 \cdot (M_3 \cdot (M_2 \cdot (M_1))))))) =$$
$$\begin{pmatrix} b_1 \left(\frac{c_1}{{b_1}^2+{b_2}^2} + \frac{a_1\, d_2}{{b_1}^2+2\, {b_2}^2} \right) & b_2 \left(\frac{c_1}{{b_1}^2+{b_2}^2} + \frac{2\, a_1\, d_2}{{b_1}^2+2\, {b_2}^2} \right) & -\left(\frac{(a_1\, b_1+a_2\, b_2)\, c_1}{{b_1}^2+{b_2}^2} \right) + a_1 \left(d_1 - \frac{(a_1\, b_1+2\, a_2\, b_2)\, d_2}{{b_1}^2+2\, {b_2}^2} \right) \\ \frac{b_1\, (c_2+a_2\, d_2)}{{b_1}^2+2\, {b_2}^2} & \frac{2\, b_2\, (c_2+a_2\, d_2)}{{b_1}^2+2\, {b_2}^2} & \frac{-(a_1\, b_1\, (c_2+a_2\, d_2))+a_2 \left({b_1}^2\, d_1+2\, {b_2}^2\, d_1-2\, b_2\, (c_2+a_2\, d_2) \right)}{{b_1}^2+2\, {b_2}^2} \\ \frac{b_1\, d_2}{{b_1}^2+2\, {b_2}^2} & \frac{2\, b_2\, d_2}{{b_1}^2+2\, {b_2}^2} & d_1 - \frac{(a_1\, b_1+2\, a_2\, b_2)\, d_2}{{b_1}^2+2\, {b_2}^2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ \vec{v}_z(\lambda) = \vec{a}_z + \lambda \cdot \vec{b}_z = \begin{pmatrix} a_1 + \lambda\, b_1 \\ a_2 + \lambda\, b_2 \\ 1 \end{pmatrix} \xmapsto{A} A \cdot (\vec{a}_z + \lambda \cdot \vec{b}_z) = \begin{pmatrix} c_1\, t + a_1\, (d_1 + d_2\, t) \\ c_2\, t + a_2\, (d_1 + d_2\, t) \\ d_1 + d_2\, t \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_1 + \frac{\lambda\cdot c_1}{d_1+\lambda\, d_2} \\ a_2 + \frac{\lambda\, c_2}{d_1+\lambda\, d_2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \ \vec{v}_z(\lambda) \xmapsto{A} \begin{pmatrix} a_1 + \frac{\lambda\cdot c_1}{d_1+\lambda\, d_2} \\ a_2 + \frac{\lambda\, c_2}{d_1+\lambda\, d_2} \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{w}_z = \vec{a}_z + (\frac{\lambda}{d_1 + \lambda\, d_2}) \cdot \vec{c}_z \qquad ☺$$

10.8.6 Kegelschnitte — Sections coniques

Normaltypen — Types normaux

Ellipse[6]

$x^2 + y^2 = \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$ $(x = \cos(\varphi),\ \ y = \sin(\varphi))$ stellt bekanntlich einen Kreis dar .

Durch Achsenstreckungen $x' = ax,\ \ y' = by$ erhalten wir die Ellipsengleichung in Normallage: Zentrum O, Kegelschnittachsen = Koordinatenachsen.

$$(\frac{x'}{a})^2 + (\frac{y'}{b})^2 = 1 \text{ (Halbachsen } \ a,\ b.)$$

Hyperbel[7]

Studiere: Hyperbel $f(x) = y = \dfrac{1}{x}$.

Drehe diese Kurve um $-\dfrac{\pi}{4} \mathrel{\hat{=}} -45^o$: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = D_{-\varphi}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = D_{\varphi}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix}$$

Es gilt:
$y = \dfrac{1}{x} \ \Rightarrow\ 1 = x \cdot y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x-y) \cdot (x+y) = \dfrac{1}{2} \cdot (x^2 - y^2) \ \Rightarrow\ 2 = x^2 - y^2$,

$$1 = (\frac{x}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{y}{\sqrt{2}})^2 \text{ (Halbachsen } \ \frac{1}{\sqrt{2}}.)$$

$\leadsto$ Hyperbelgleichung in Normallage: Zentrum O, Kegelschnittachsen = Koordinatenachsen.

Parabel[8]

Studiere:

Parabel $f(x) = y = x^2$ oder $x = y^2$.
Verschiebe die letzte Kurve in x–Richtung und strecke sie in y–Richtung:

$$\leadsto\ x' = a + (\frac{y'}{c})^2$$

Was die vielen Darstellungsmöglichkeiten von Kegelschnitt bei Verwendung spezieller interessanter Parameter für praktische Anwendungen betrifft, sei auf die Fachliteratur verwiesen.

[6] Ellipse: griech. Mangel
[7] Hyperbel: griech. Überfluss
[8] Parabel: griech. Gleichnis

Quadratische Form — Forme quadratique

Betrachte die algebraische Kurve:

$$P(x,y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \zeta = 0.$$

Setze $\alpha = a,\ \ \beta = 2b,\ \ \gamma = c,\ \ \delta = d,\ \ \varepsilon = e,\ \ \zeta = f$

$$\leadsto\ ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Das ist bekanntlich die Gleichung eines Kegelschnittes, falls die Lösungsmenge unendlich ist (Ellipse, Parabel, Hyperbel und entartete Fälle).
Wir definieren:

Definition: $ax^2 + 2bxy + cy^2$ heisst die zu $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ gehörige **quadratische Form**.

Ohne gemischtes Glied — Sans terme mixte

Sei $b = 0$ (kein gemischtes Glied — sans terme mixte). $\leadsto\ ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0$
Sei $a, c \neq 0$

Diese Gleichung kann man durch quadratische Ergänzung umformen.

$$\leadsto\ ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = a(x^2 + \frac{2dx}{2a}) + c(y^2 + \frac{2ey}{2c}) + f =$$
$$a(x^2 + \frac{2dx}{2a} + \frac{d^2}{4a^2}) + c(y^2 + \frac{2ey}{2c} + \frac{e^2}{4c^2}) + f - \frac{d^2}{4a} - \frac{e^2}{4c} = 0$$

(Ergänzung von: $a\frac{d^2}{4a^2} + c\frac{e^2}{4c^2} - \frac{d^2}{4a} - \frac{e^2}{4c}$). $\leadsto$

$$ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = a(x + \frac{d}{2a})^2 + c(y + \frac{e}{2c})^2 + f - \frac{d^2}{4a} - \frac{e^2}{4c} = a(x')^2 + c(y')^2 + k = 0$$

mit $x' = x + \frac{d}{2a},\ \ y' = y + \frac{e}{2c},\ \ k = f - \frac{d^2}{4a} - \frac{e^2}{4c}$

Konsequenz:
Setze: $|\frac{a}{-k}| := \frac{1}{\sqrt{a_1}},\ \ |\frac{c}{-k}| := \frac{1}{\sqrt{b_1}},\ \ k := f - \frac{d^2}{4a} - \frac{e^2}{4c}$

$\leadsto\quad ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0$ wird zu $\pm(\frac{x'}{a_1})^2 \pm (\frac{y'}{b_1})^2 = 1$

D.h. man hat einen Kegelschnitt in Normallage: Zentrum O, Kegelschnittachsen = Koordinatenachsen. (x', y') ist aus (x, y) durch eine Translation entstanden.

Die Fälle $a = 0,\ \ c = 0$ sind einfacher: Falls $a = 0$ ist, fällt die Verschiebung in x–Richtung weg. Analog für $c = 0$.

Mit gemischtem Glied — Avec terme mixte

Sei $b \neq 0$.

Idee: Versuche durch eine Transformation, d.h. durch einen Übergang zu einem neuen Koordinatensystem, die Situation $b = 0$ zu erreichen.

Schreibe dazu die quadratische Form mit Hilfe des Matrixproduktes:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = (ax + by, bx + cy) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{x}^{\,T} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{x}^{\,T} \cdot A \cdot \vec{x}$$

und $dx + ey = (d, e) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = K \cdot \vec{x}$.

$\rightsquigarrow$ A ist symmetrisch: $A = U \cdot D \cdot U^{-1} = U \cdot D \cdot U^T$.

Sei $U := P^T \rightsquigarrow A = P^T \cdot D \cdot P$.

U besteht aus den Eigenvektoren von A, die normiert gewählt werden können. $\rightsquigarrow$ U unitär

$\Rightarrow U^{-1} = U^T, \ E = U \cdot U^{-1} = U \cdot U^T = P^T \cdot P$

$\Rightarrow ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 = \vec{x}^{\,T} \cdot A \cdot \vec{x} + K \cdot \vec{x} + f = \vec{x}^{\,T} \cdot (P^T \cdot D \cdot P) \cdot \vec{x} + K \cdot E \cdot \vec{x} + f =$
$= (P \cdot \vec{x})^T \cdot D \cdot (P \cdot \vec{x}) + K \cdot (P^T \cdot P) \cdot \vec{x} + f = (P \cdot \vec{x})^T \cdot D \cdot (P \cdot \vec{x}) + (K \cdot P^T) \cdot (P \cdot \vec{x}) + f$

Sei $P \cdot \vec{x} = \vec{y}, \ (K \cdot P^T) = Q$

Konsequenz:
$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = \vec{y}^{\,T} \cdot D \cdot \vec{y} + Q \cdot \vec{y} + f = 0$
mit $\vec{y} = P \cdot \vec{x}, \ Q = (K \cdot P^T) = (m, n), \ K = (d, e), \ A = P^T \cdot D \cdot P = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \ P^T = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$$

Sei $\vec{y} = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{y}^{\,T} \cdot D \cdot \vec{y} + Q \cdot \vec{y} + f = P(z, w) = \lambda_1 z^2 + \lambda_2 w^2 + mz + nW + f = 0$

Damit ist der Fall mit gemischtem Glied zurückgeführt auf den Fall ohne gemischtes Glied.

Transformation im Detail — La transformation en détail

Wir studieren die Abbildung $\vec{y} = P \cdot \vec{x}$
oder $\vec{x} = P^{-1} \cdot \vec{y} = P^{-1} \cdot \vec{y} = U \cdot \vec{y} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \cdot \vec{y} \ (\vec{x}_k = EV_{\,A})$.

Wir benützen nun den unter 10.8.2 begründeten Satz, angepasst auf die Situation hier:

Ist die Matrix $U = P^T$ durch eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}^2$ gegeben, so wird durch $P = U^T$ die Basis zu $\vec{y}$ (oben neue Basis) von $\mathbb{R}^2$ auf die Basis zu $\vec{x}$ (oben alte Basis) von $\mathbb{R}^2$ abgebildet.

$$\rightsquigarrow \quad \Phi : \begin{pmatrix} (\vec{e}_1)' \\ (\vec{e}_2)' \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \Phi((\vec{e}_1)') \\ \Phi((\vec{e}_2)') \end{pmatrix} = U^T \circ \begin{pmatrix} (\vec{e}_1) \\ (\vec{e}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x}_1{}^T \\ \vec{x}_2{}^T \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} (\vec{e}_1) \\ (\vec{e}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} (\vec{e}_1) \\ (\vec{e}_2) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} x_1 \cdot \vec{e}_1 + y_1 \cdot \vec{e}_2 \\ x_2 \cdot \vec{e}_1 + y_2 \cdot \vec{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} EV_1 \\ EV_2 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow \quad (\vec{e}_k)'$ im neuen System ist im alten System $\vec{x}_k = EV_k$.

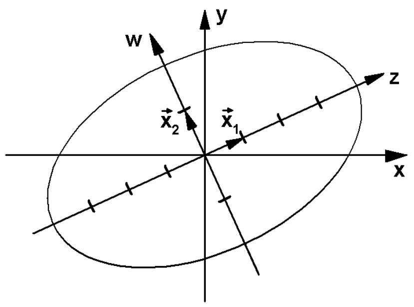
Konsequenz: : Bei obiger Transformation durch die Matrix P, mit der man das gemischte Glied der quadratischen Form zum Verschwinden bringen kann, werden die normierten Eigenvektoren von A (die Matrix der Quadratischen Form) gerade die Basisvektoren (Einheitsvektoren) des neuen Systems.

Beispiel — Exemple

Sei $\quad 5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0,\ d = e = 0 \ \Rightarrow\ A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix},\ \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 9$

$\Rightarrow\ D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ \vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow\ 5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 4z^2 + 9w^2 - 36 = 0$



$\rightsquigarrow$ Neue Gleichung (Ellipse):

$$(\frac{z}{3})^2 + (\frac{w}{2})^2 = 1$$

$\varphi = \frac{1}{2}$ (Skizze!)

10.9 Anwendungen bei Rekursionen — Applications aux récursions

Wir wollen hier beispielhaft eine Anwendung zum Thema „Folgen und Rekursionen“ studieren. Dazu betrachten wir die bekannte Fibonacci–Folge $[1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots]$. Diese Folge kann wie folgt rekursiv definiert werden:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

Die Berechnung dieser Folge kann man auch mit Hilfe einer Matrix ausführen:
Sei

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} := M \cdot \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ a_n + a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Für die EW und die EV von M finden wir:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda \cdot (1 - \lambda) - 1 \cdot 1 = -\lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$M \cdot \vec{x}_{1,2} = \lambda_{1,2} \cdot \vec{x}_{1,2} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,2} \\ y_{1,2} \end{pmatrix} = \lambda_{1,2} \cdot \begin{pmatrix} x_{1,2} \\ y_{1,2} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underline{\begin{vmatrix} y_{1,2} & = & \lambda_{1,2} \cdot x_{1,2} \\ x_{1,2} + y_{1,2} & = & \lambda_{1,2} \cdot y_{1,2} \end{vmatrix}}$$

Da die beiden letzten Gleichungen linear abhängig sein müssen, finden wir aus der ersten Gleichung für die Eigenvektoren:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}, \ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \ \text{mit} \ \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \ \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Dabei gilt: $\quad \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -1, \ \frac{1+\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{(\frac{1-\sqrt{5}}{2})}$

Die hier vorkommenden Ausdrücke kennen wir vom **goldenen Schnitt**:

Sei $\ c = a+b, \ c : b = (a+b) : b = b : a, \ b : a = \frac{b}{a} = x \ \Rightarrow \ \frac{a+b}{b} = 1 + \frac{a}{b} = \frac{b}{a} \ \Rightarrow \ x = 1 + \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \ x^2 - x - 1 = 0 \ \Rightarrow \ x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Für $n \to \infty$ finden wir formal:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_\infty \\ a_{\infty+1} \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} a_{\infty-1} \\ a_\infty \end{pmatrix} \leadsto \begin{pmatrix} a_\infty \\ a_\infty \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} a_\infty \\ a_\infty \end{pmatrix}$$

Da bei der Fibonacci–Folge gilt $a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \geq a_n + 1$, gilt für den Limes:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a_\infty = \infty$$

Daher macht die $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}$ für $n \to \infty$ keinen Sinn. Wenn wir aber links und rechts in der Gleichung die Vektoren mit a_n^{-1} strecken, so wird das anders, denn es gilt:

$$\forall_n : \ a_{n+1} \geq a_n \geq 1 \ \Rightarrow \ 0 < \frac{a_{n-1}}{a_n} \leq 1 \ \Rightarrow \ 1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \leq 1 + 1 = 2$$

Weiter gilt für $x := \frac{a_n}{a_{n-1}} > 1$:

Da die Folge $b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n} \in [1, 2]$ nicht zwingen streng monoton, aber wie bewiesen beschränkt ist, ist sie nicht zwingend konvergent. Hier kommen wir mit einer Kettenbruchentwicklung weiter:

$$b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{\frac{a_n}{a_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{a_{n-3}}{a_{n-2}}}} = \ldots$$

$$\ldots = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\ddots \frac{a_2}{a_1}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\ddots \frac{1}{1}}} \leadsto \ \text{Abbrechender Kettenbruch!}$$

Andererseits kennen wir die konvergente Kettenbruchentwicklung von $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$:

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ \Leftrightarrow (x > 0 \ \wedge \ x^2 - x - 1 = 0) \leadsto \ x^2 = x + 1 \mid \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \ x = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}}} = \ldots = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\ddots}}}} \leadsto \ b_n \to x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$\leadsto$ Konvergenz!

Andererseits können wir nun auch die folgende Gleichung studieren:

$$\begin{pmatrix} \frac{a_n}{a_n} \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} \frac{a_{n-1}}{a_n} \\ \frac{a_n}{a_n} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ b_n \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} (b_{n-1})^{-1} \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ b_\infty \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} (b_\infty)^{-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (b_\infty)^{-1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \left| \begin{array}{lcl} 1 & = & 1 \\ b_\infty & = & 1 + (b_\infty)^{-1} \end{array} \right| \rightsquigarrow b_\infty = 1 + (b_\infty)^{-1} \Rightarrow b_\infty^2 = b_\infty + 1 \Rightarrow \Rightarrow b_\infty^2 - b_\infty - 1 = 0$$

$$\text{Möglichkeiten:} \quad \Rightarrow b_\infty = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \approx \begin{cases} 1.61803 \\ -0.618034 \end{cases}$$

Wegen $b_n \in [1, 2]$ gilt: $\qquad b_\infty = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Konsequenz:

Interessant ist, dass zur Berechnung von b_∞ aus der letzten Gleichung die Startwerte $a_1 = a_2 = 1$ nicht gebraucht wurden. Das heisst vermutlich (wir müssten das noch beweisen!), man könnte also mit ganz anderen Werten starten und damit dasselbe b_∞ finden. Weiter ist es denkwürdig, dass b_∞ in den Eigenwerten und in den Eigenvektoren steckt. Das ist eine Entdeckung, die nach einer weiteren Untersuchung bei allgemeiner gestellten derartigen Problemen verlangt. Das würde jedoch den hier gestellten Rahmen sprengen.

10.10 Anwendungen der Matrizenrechnung — Applications du calcul matriciel

10.10.1 Ausgleichsrechnung — Calcul d´ajustement de données

Problem:

Geg.: $\{(x_i; y_i) \mid i \in \text{Indexmenge}\}$

$\rightsquigarrow$ Menge von Messpunkten.

Ges.: Ausgleichsgerade $y = f(x) = a\,x + b$

Wunsch: $(x_i; y_i) \approx (x_i; f(x_i) = a\,x_i + b) \rightsquigarrow |f(x_i) - y_i| = |a\,x_i + b - y_i| = r_i \to Min$

$a, b = ?$

Aus praktischen Gründen ersetzt man dieses Problem in der Theorie der kleinsten Quadrate durch die folgende Fragestellung (Vgl Skript Analysis oder Statistik):

$$\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (a\,x_i + b - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \to Min$$

Wir benützen nun die folgende Abkürzung:

Definition: $\qquad S(\vec{x}) := \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{1} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i$

Es gilt: $\sum_{i=1}^{n} r_i^2 = \langle \vec{r}, \vec{r} \rangle,\;\; \vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,x_1 + b - y_1 \\ \vdots \\ a\,x_n + b - y_n \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$\leadsto\;\; R_q(a,b) := \langle \vec{r}, \vec{r} \rangle := \vec{r}^2 = (a \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix})^2 = (a\,\vec{x} + b\,\vec{1} - \vec{y})^2$

$= a^2\,\vec{x}^2 + b^2\,\vec{1}^2 + \vec{y}^2 + 2(a\,b\,\langle \vec{x}, \vec{1} \rangle + a\,\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + b\,\langle \vec{1}, \vec{y} \rangle) = a^2\,\vec{x}^2 + b^2\,n + \vec{y}^2 + 2(a\,b\,S(\vec{x}) + a\,\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + b\,S(\vec{y}))$

$\leadsto\;\; R_q(a,b)$ ist eine quadratische Funktion von a, b.

$\leadsto\;\;$ Problem: $R_q(a,b) \to Min.$

Damit sind wir bei einem gewöhnlichen Extremalproblem angelangt, das man am besten mit Hilfe der Differentialrechnung oder einem Formelbuch löst. (Siehe Analysis–Skript.) Damit findet man die Ausgleichsgerade $f(x) = a\,x + b$.

10.10.2 Überbestimmte Gleichungssysteme — Systèmes d'équations surdéterminés

Das Problem — Le problème

In der Praxis kommt es manchmal vor, dass man einem überbestimmten Gleichungssystem begegnet. Man kennt z.B. den Zusammenhang zwischen x und y. Dieser sei im einfachsten Fall bei einer Messvorrichtung durch $f(x) = y = a\,x + b$ gegeben. Man misst nun z.B. bei einer Einstellung x erst den Wert y_1 und später bei derselben Einstellung x den Wert y_2. Das führt zum System $y_1 = a\,x + b,\;\; y_2 = a\,x + b$, welches für $x_1 \neq x_2$ nicht lösbar ist. (Offenbar hatte sich etwas in unkontrollierbarer Weise verändert.) Statt der exakten Lösung kann man nun aber eine **optimale Lösung** suchen, wobei noch zu definieren ist, was wir unter „optimal“ verstehen wollen. Z.B. können wir das Gleichungssystem durch $y_1 = a\,x + b + r_1,\;\; y_2 = a\,x + b + r_2$ ersetzen mit möglichst kleinen r_1 und r_2, so dass das System exakt lösbar wird. Hier könnte man daher versuchen, in Anlehnung an die Methode der kleinsten Quadrate $R_q(x) := r_1^2 + r_1^2 = (y_1 - a\,x - b)^2 + (y_2 - a\,x - b)^2$ als quadratische Funktion von x zu minimieren, d.h. mit Hilfe der Differentialrechnung das Minimum zu berechnen. Der so errechnete Wert x ist dann optimal. $R_q(x)$ ist dann minimal, jedoch nicht $= 0$.

Die mathematische Behandlung des linearen Problems — Le traitement mathématique du problème linéaire

Geg.: Unexaktes lineares Gleichungssystem

$$A \cdot \vec{x} \approx \vec{b},\;\; A \cdot \vec{x} \neq \vec{b} \;\Rightarrow\; A \cdot \vec{x} = \vec{b} + R(\vec{x}),\;\; R(\vec{x}) := A \cdot \vec{x} - \vec{b}$$

$A:\; (m \times n),\;\; \vec{b}:\; (m \times 1),\;\; \vec{x}:\; (m \times 1),\;\; \vec{R}:\; (m \times 1)$
$R \leadsto$ Residuen– oder Restmatrix, Fehlermatrix

Definition: Quadratsumme:

$$S(x) := R^T(x) \cdot R(x) = \sum_{i=1}^{m} r_i^2$$

Definition: $\vec{x}_0$ **optimale Lösung** von $A \cdot \vec{x} = \vec{b} \;\Leftrightarrow\; S(\vec{x}_0)$ minimal.

D.h.: $\forall_{\vec{x}\neq\vec{x}_0} S(\vec{x}_0) \leq S(\vec{x}), \ (\vec{x}, \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n)$

Problem: Gesucht ist jetzt eine Methode zur Auffindung von $\vec{x}_0$.

Bei den Regeln für die Matrixmultiplikation haben wir gezeigt, dass $A^T \cdot A$ immer symmetrisch ist, jedoch oft $A^T \cdot A \neq A \cdot A^T$ gilt.

Es gilt: $A \cdot \vec{x} = \vec{b} \ \Rightarrow \ A^T \cdot A \cdot \vec{x} = A^T \cdot \vec{b}$.

Definition: $A^T \cdot A \cdot \vec{x} = A^T \cdot \vec{b}$ nennen wir das zu $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ gehörige **Normalgleichungssystem**.

Satz: Das Normalgleichungssystem hat immer mindestens eine Lösung.

Zum Beweis:

A induziert eine Abbildung f: $\leadsto \ A \cdot \vec{x} := f(\vec{x})$

$\leadsto \ Kern(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot \vec{x} = \vec{0}\}, \ Im(A) = \{\vec{b} \in \mathbb{R}^n \mid \exists_{\vec{x}\in\mathbb{R}^n} : \ \vec{b} = A \cdot \vec{x}\}$

Es gilt:

$Kern(A)$ und $Im(A)$ sind bekanntlich Vektorräume.

Konsequenz:

$$\begin{aligned} \text{Sei} \quad \vec{b}_1, \vec{b}_1 \in Im(A) \ &\Rightarrow \ \exists_{\vec{x}_1,\vec{x}_2\in\mathbb{R}^n} : \ (A \cdot \vec{x}_1 = \vec{b}_1) \ \wedge \ (A \cdot \vec{x}_2 = \vec{b}_2) \\ &\Rightarrow \ \alpha_1 \, A \cdot \vec{x}_1 + \alpha_2 \, A \cdot \vec{x}_2 = \alpha_1 \, \vec{b}_1 + \alpha_2 \, \vec{b}_2 \in Im(A) \end{aligned}$$

Falls also $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ eine Lösung hat, so gilt $\vec{b} \in Im(A)$. Andernfalls ist $\vec{b} \notin Im(A)$.

$$\text{Sei} \quad A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \leadsto \ \{\lambda_1 \, \vec{a}_1 + \ldots + \lambda_n \, \vec{a}_n \mid \lambda_k \in \mathbb{R} \ \forall_k\} = \{A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}\} = Im(A)$$

$$\Rightarrow \ \forall_k : \ \vec{a}_k \in Im(A).$$

Sei $\ V_0 := Im(A), \ V_1 := Im(A)_\perp \leadsto \ V_0, V_1 \in \ VR$

Sei $\ \mathbb{R}^m =$ lineare Hülle von V_0, V_1

Sei $\ \vec{b} \in \mathbb{R}^m \ \Rightarrow \ \exists_{\vec{b}_0,\vec{b}_1} : \ \vec{b} = \vec{b}_0 + \vec{b}_1, \ \vec{b}_0 \in V_0 = Im(A), \ \vec{b}_1 \in V_1 = Im(A)_\perp$

$$\leadsto \ \exists_{\vec{x}_0} : \ \vec{b}_0 = A \cdot \vec{x}_0$$

$$\forall_k \ \vec{a}_k \in Im(A) \ \wedge \ \vec{b}_1 Im(A)_\perp \ \Rightarrow \ A^T \cdot \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^T \\ \vdots \\ \vec{a}_n^T \end{pmatrix} \cdot \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^T \cdot \vec{b}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_n^T \cdot \vec{b}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \vec{a}_1, \vec{b}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \vec{a}_n, \vec{b}_1 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ A^T \cdot \vec{b} = A^T \cdot (\alpha_0 \, \vec{b}_0 + \alpha_1 \, \vec{b}_1) = \alpha_0 \, A^T \cdot \vec{b}_0 + \alpha_1 \, A^T \cdot \vec{b}_1 = \alpha_0 \, A^T \cdot \vec{b}_0 + \vec{0} = \alpha_0 \, A^T \cdot \vec{b}_0$$

Es gilt: $\vec{b}_0 \in V_0 = Im(A)$

$$\Rightarrow \exists_{\vec{z}_0=\frac{1}{\alpha_0}\vec{x}_0} : \vec{b}_0 = A \cdot \vec{z}_0 = A \cdot \frac{1}{\alpha_0}\vec{x}_0 \Rightarrow A^T \cdot \vec{b} = \alpha_0 A^T \cdot \vec{b}_0 = \alpha_0 A^T \cdot A \cdot \frac{1}{\alpha_0}\vec{x}_0 = A^T \cdot A \cdot \vec{x}_0$$

$\leadsto$ $\vec{x}_0$ ist Lösung von $A^T \cdot \vec{b} = A^T \cdot A \cdot \vec{x}_0$.

$\leadsto$ Das Normalgleichungssystem hat immer mindestens eine Lösung. ☺

Jetzt wollen wir noch zeigen, dass eine exakte Lösung des Normalgleichungssystems immer eine optimale Lösung von $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ist.

Sei $\vec{r} := R(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} - \vec{b}$, $S(\vec{x}) := \langle \vec{r}, \vec{r} \rangle = \vec{r}^T \cdot \vec{r}$

$\leadsto$ S ist quadratisch in den Komponenten von $\vec{x}$ nach Konstruktion.

$\leadsto$ $S(\vec{x}) = (A \cdot \vec{x} - \vec{b})^T \cdot (A \cdot \vec{x} - \vec{b}) = (A \cdot \vec{x})^T \cdot (A \cdot \vec{x}) - 2\,(A \cdot \vec{x})^T \cdot \vec{b} + \vec{b}^T \cdot \vec{b}$

Verwende $A^T \cdot B = (\vec{a}_j^T) \cdot (\vec{b}_k) = \langle \vec{a}_j, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a}_j \rangle = (\vec{b}_j^T) \cdot (\vec{a}_k) = B^T \cdot A$

$\leadsto$ $S(\vec{x} + \vec{y}) = (A \cdot (\vec{x} + \vec{y}))^T \cdot (A \cdot (\vec{x} + \vec{y})) - 2\,(A \cdot (\vec{x} + \vec{y}))^T \cdot \vec{b} + \vec{b}^T \cdot \vec{b}$

$$= \underbrace{(A \cdot \vec{x})^T \cdot (A \cdot \vec{x})}_{S} - 2 \underbrace{(A \cdot \vec{x})^T \cdot (A \cdot \vec{y})}_{(A\cdot\vec{y})^T\cdot A\cdot\vec{x}=\vec{y}^T\cdot A^T\cdot A\cdot\vec{x}} + (A \cdot \vec{y})^T \cdot (A \cdot \vec{y}) - \underbrace{2\,(A \cdot \vec{x})^T \cdot \vec{b}}_{S} - 2 \underbrace{(A \cdot \vec{y})^T}_{\vec{y}^T\cdot A^T} \cdot \vec{b} + \underbrace{\vec{b}^T \cdot \vec{b}}_{S}$$

$= S(\vec{x}) + 2\,\vec{y}^T(A^T \cdot A \cdot \vec{x} - A^T \cdot \vec{b}) + (A \cdot \vec{y})^T \cdot (A \cdot \vec{y}) \leadsto$

Lemma: $S(\vec{x} + \vec{y}) = S(\vec{x}) + 2\,\vec{y}^T(A^T \cdot A \cdot \vec{x} - A^T \cdot \vec{b}) + (A \cdot \vec{y})^T \cdot (A \cdot \vec{y})$ ☺

Satz: $\vec{x}_0$ optimale Lösung von $A \cdot \vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x}_0$ exakte Lösung von $A^T \cdot A \cdot \vec{x} = A^T \cdot \vec{b}$

Beweis:

1 $\underline{\Longleftarrow}$ Sei $\vec{x}_0$ Lösung von $A^T \cdot A \cdot \vec{x} = A^T \cdot \vec{b}$
Nach dem vorhergehenden Satz existiert $\vec{x}_0$

$$\leadsto \vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{x}_1 \Rightarrow S(\vec{x}) = S(\vec{x}_0 + \vec{x}_1) = S(\vec{x}_0) + 2\,\vec{x}_1^T \underbrace{(A^T \cdot A \cdot \vec{x}_0 - A^T \cdot \vec{b})}_{A\cdot\vec{x}_0-\vec{b}=0} + \underbrace{(A \cdot \vec{x}_1)^T \cdot (A \cdot \vec{x}_1)}_{=|A\cdot\vec{x}_1|^2\geq 0}$$

$$\Rightarrow S(\vec{x}) = S(\vec{x}_0 + \vec{x}_1) \geq S(\vec{x}_0)$$

2 $\underline{\Longrightarrow}$ Sei $\vec{x}_0$ optimale Lösung von $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$, $\vec{x}_1$ Lösung von $A^T \cdot A \cdot \vec{x} = A^T \cdot \vec{b}$

$$S(\vec{x}_0) = S(\vec{x}_1 + (\vec{x}_0 - \vec{x}_1)) = S(\vec{x}_1) + 2\,(\vec{x}_0 - \vec{x}_1)^T \underbrace{(A^T \cdot A \cdot \vec{x}_1 - A^T \cdot \vec{b})}_{=0} + \underbrace{(A \cdot (\vec{x}_0 - \vec{x}_1))^T \cdot (A \cdot (\vec{x}_0 - \vec{x}_1))}_{=|A\cdot(\vec{x}_0-\vec{x}_1)|^2\geq 0}$$

$$\Rightarrow S(\vec{x}_0) \geq S(\vec{x}_1)$$

Es gilt aber:

$\vec{x}_0$ **optimale Lösung** von $A \cdot \vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow S(\vec{x}_0)$ minimal. $\quad \Rightarrow \; S(\vec{x}_0) \not> S(\vec{x}_1) \;\Rightarrow\; S(\vec{x}_0) = S(\vec{x}_1)$

$$\rightsquigarrow \; (A \cdot (\vec{x}_0 - \vec{x}_1))^T \cdot (A \cdot (\vec{x}_0 - \vec{x}_1)) = |A \cdot (\vec{x}_0 - \vec{x}_1)|^2 \not\geq 0 \;\Rightarrow\; \ldots = 0 \;\Rightarrow\; A \cdot (\vec{x}_0 - \vec{x}_1) = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \; A \cdot \vec{x}_0 = A \cdot \vec{x}_1 \;\Rightarrow\; A^T \cdot A \cdot \vec{x}_0 = A^T \cdot A \cdot \vec{x}_1 = A^T \cdot A \cdot \vec{b} \;\Rightarrow\; A^T \cdot A \cdot \vec{x}_0 = A^T \cdot A \cdot \vec{b} \qquad ☺$$

Lösungen in der Erfahrungspraxis — Solutions dans la pratique selon expérience

Fall $(A^T \cdot A)$ **regulär**: $\rightsquigarrow$ Lösung von $A^T \cdot A \cdot \vec{x} = A^T \cdot A \cdot \vec{b}$ eindeutig, $\vec{x} = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A \cdot \vec{b}$.

Fall $(A^T \cdot A)$ **singulär**: $\rightsquigarrow$ Lösung nicht eindeutig, es gibt unendlich viele Lösungen.

$\rightsquigarrow$ **Frage:** Welche Lösung soll man nehmen?

Um die Auswahl einzuschränken, ist es günstig, eine solche Lösung zu wählen, für die $\vec{x}_0$ minimal ist, d.h. $|\vec{x}| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} \to Min$ gilt.

$$\rightsquigarrow \; |\vec{x}_0| \leq |\vec{x}_0| \forall_{\vec{x} \in \mathbb{L}}$$

Sind $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ zwei verschiedene Lösungen, so bedeutet das: $\langle \vec{x}_1 - \vec{x}_2, \vec{x}_0 \rangle = 0$. Damit kann man $\vec{x}_0$ bestimmen.

Zur Auffindung der Lösung $\vec{x}_0$:

Wir wissen, dass $(A^T \cdot A)$ reell und symmetrisch ist. Die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von $(A^T \cdot A)$ sind daher reell und es gibt ein $j \in \mathbb{N}$, $j < n$ mit $\lambda_k = 0$ für $k > j$. Die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{b}_k$ sind orthogonal resp. im Falle der Wählbarkeit orthogonal wählbar. Sei f die durch $(A^T \cdot A)$ induzierte Abbildung, so ist $\vec{b}_k \in Kern(f)$ für $k > j$. Damit gilt: $Im(f) = \{\alpha_1 \vec{b}_1 + \ldots + \alpha_j \vec{b}_j \mid \alpha_k \in \mathbb{R}\}$. Wegen $f(\vec{b}_j) = \lambda_k \cdot \vec{b}_j$ gilt $f: \; Im(f) \xrightarrow{bij.} Im(f)$. Nun wissen wir, dass das Problem $A^T \cdot A \cdot \vec{x} = A^T \cdot A \cdot \vec{b}$ immer mindestens eine Lösung hat und dass somit in $\mathbb{L}$ mindestens ein absolutes Minimum $\vec{x}_0$ existiert.

Daher kann man $\vec{x}_0$ in folgender Form darstellen:

$$\vec{x}_0 = \sum_{k=1}^{j} \alpha_k \vec{b}_k + \sum_{k=j+11}^{n} \alpha_k \vec{b}_k$$
$$\Rightarrow \; (A^T \cdot A) \cdot \vec{x}_0 = \underbrace{(A^T \cdot A) \cdot \sum_{k=1}^{j} \alpha_k \vec{b}_k}_{\sum_{k=1}^{j} \lambda_k \alpha_k \vec{b}_k} + \underbrace{(A^T \cdot A) \cdot \sum_{k=j+11}^{n} \alpha_k \vec{b}_k}_{=0} = \sum_{k=1}^{j} \lambda_k \alpha_k \vec{b}_k = A^T \cdot \vec{b}$$

Seinen nun die Eigenvektoren $\vec{b}_k$ normiert. $\rightsquigarrow \; |\vec{b}_k| = 1$

$$\rightsquigarrow \; A^T \cdot A) \cdot \sum_{k=1}^{j} \alpha_k \vec{b}_k = A^T \cdot \vec{b} \;\Rightarrow\; \vec{x}_1 := \sum_{k=1}^{j} \alpha_k \vec{b}_k \in \mathbb{L}\,, \;\; |\vec{x}_1|^2 = \sum_{k=1}^{j} \alpha_k^2 \leq |\vec{x}_0|^2 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2, \;\; j < n$$

Da $\vec{x}_0$ aber minimal ist, muss nun gelten:

$$|\vec{x}_0|^2 = |\vec{x}_1|^2 \;\Rightarrow\; \sum_{k=j+11}^{n} \alpha_k^2 = 0, \;\; \alpha_k = 0 \forall_{k>j} \;\Rightarrow\; \vec{x}_0 \in Im(f)$$

Nun gilt wegen $f:\ Im(f) \overset{bij.}{\longmapsto} Im(f)$:

$$f(\vec{x}_0) = (A^T \cdot A) \cdot \vec{x}_0 = A^T \cdot \vec{b} = \vec{y}_0 \in Im,\ \ \vec{x}_0 = f^{-1}(\vec{y}_0) = f^{-1}(A^T \cdot \vec{b})$$

$\leadsto\ \ \vec{x}_0 = f^{-1}(A^T \cdot \vec{b})$ eindeutig.

Beispiele — Exempses

1. Beispiel:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b},\ \ A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 21 & 28 \\ 28 & 45 \end{pmatrix},\ \ \det A^T \cdot A = 161 \neq 0,\ \ \vec{x} = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{65}{161} \\ \frac{16}{23} \end{pmatrix},$$

$$R = A \cdot \vec{x} - \vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{27}{161} \\ \frac{108}{161} \\ -\frac{324}{161} \end{pmatrix},\ \ S = R^T(x) \cdot R(x) = (\frac{729}{161}) \neq (0)$$

$\vec{x}$ ist daher optimale Lösung, aber nicht exakte Lösung von $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.

2. Beispiel:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b},\ \ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},\ \ \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 44 & 22 \\ 22 & 11 \end{pmatrix},\ \ \det A^T \cdot A = 0,\ \ \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{35}{22} - \frac{y}{2} \\ y \end{pmatrix},\ \ y \in \mathbb{R},$$

$$R = A \cdot \vec{x} - \vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{90}{11} \\ -\frac{60}{11} \\ -\frac{90}{11} \end{pmatrix},\ \ S = R^T(x) \cdot R(x) = (\frac{1800}{11}) \neq (0)$$

$\vec{x}$ ist daher optimale Lösung, aber nicht exakte Lösung von $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.

Kapitel • Chapitre 11

Ausblick — Perspective

11.1 Quaternionen, Raumdrehungen — Quaterniones, révolutions dans l'espace

Quaternionen: Hamilton 1843.

Seien $\alpha \in \mathbb{R}, \ \vec{v} \in \mathbb{R}^3, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

Symbol: $\alpha \uplus \vec{v} := (\alpha, \vec{v}) :\hat{=} \begin{pmatrix} \alpha \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \ \mathbb{H}_{\mathbb{Q}} = \{(\alpha, \vec{v}) \mid \alpha \in \mathbb{R}, \ \vec{v} \in \mathbb{R}^3\}$

Definition: (Addition)

$$(\alpha, \vec{v}) + (\beta, \vec{w}) := (\alpha + \beta, \vec{v} + \vec{w})$$

$\leadsto$ $(\mathbb{H}_{\mathbb{Q}}, +)$ ist abelsche Gruppe (Vektoraddition).

Definition: (Multiplikation)

$$(\alpha, \vec{v}) \diamond (\beta, \vec{w}) := (\alpha \cdot \beta - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle, \alpha \cdot \vec{w} + \beta \cdot \vec{v} + (\vec{v} \times \vec{w}))$$

$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$: Skalarprodukt
$(\vec{v} \times \vec{w})$: Vektorprodukt

Schreibweise: $(\alpha, \vec{0}) := \alpha, \ (0, \vec{v}) := \vec{v} \leadsto$ Problemlos

Bemerkung: Die Multiplikation ist nicht kommutativ!

Definition: (Konjugation)

$$\overline{(\alpha, \vec{v})} := (\alpha, -\vec{v})$$

Konsequenz: $(\alpha, \vec{v}) \diamond \overline{(\alpha, \vec{v})} = (\alpha^2 + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle, \vec{0}) = \alpha^2 + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$

Definition: (Betrag, Länge)

$$|(\alpha, \vec{v})| := \sqrt{\alpha^2 + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = \sqrt{\alpha^2 + \vec{v}^2}$$

Definition: (Inverses)

$$(\alpha, \vec{v})^{-1} := \frac{\overline{(\alpha, \vec{v})}}{|(\alpha, \vec{v})|^2}$$

Eigenschaften: $((\alpha, \vec{v}), \diamond)$ abgeschlossen, assoziativ, $1 =$ neutrales Element, Inverses existiert ($\rightsquigarrow$ Gruppe), $((\alpha, \vec{v}), +, \diamond)$ distributiv $\rightsquigarrow$ Schiefkörper.

Symbol: $\alpha \uplus \vec{v} := (\alpha, \vec{v}) :\hat{=} \begin{pmatrix} \alpha \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} := \alpha\, \vec{e_1} + v_1\, \vec{e_2} + v_2\, \vec{e_3} + v_3\, \vec{e_4} := \alpha + v_1\, i + v_2\, j + v_3\, k$

Eigenschaften: $i \diamond j = k = -j \diamond i, \;\; i \diamond i = -1, \;\; \ldots$

$\rightsquigarrow$ Formel von Hamilton für die Raumdrehung um den Winkel φ um die Achse $\overrightarrow{OP} = \vec{v}$:

Satz: <u>**Vor.:**</u>

$$Q := (\cos(\frac{\varphi}{2}), \sin(\frac{\varphi}{2})\, \vec{e}_v), \;\; \vec{e}_v^{\,2} = 1$$

<u>**Beh.:**</u>

$$\vec{x} \overset{D_{\varphi, \vec{e}_v}}{- - - \longrightarrow} \vec{y} = Q \diamond \vec{x} \diamond \bar{Q}$$

Bemerkung: $\overrightarrow{OP_1} = \vec{x} := (0, \vec{x})$
Korkenzieherregel!

<u>**Beweis:**</u>

Komponentenweise nachrechnen. Formel von Hamilton: Vergleich mit dem Resultat, das die klassische Matrizenrechnung ergibt.

11.2 Algebraische Kurven — Courbes algébriques

11.2.1 Algebraische Kurven in der Ebene — Courbes algébriques dans le plan

Sei $p(x)$ ein Polynom: $p(x) = y = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$

Graphisch ist die Kurve auffassbar als Punktmenge, beschrieben durch Ortsvektoren:

$$\begin{pmatrix} x \\ y = p(x) \end{pmatrix}.$$

Eine andere Darstellung ist:

$P(x, y) = p(x) - y = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 - y = 0$

Das ist ein Spezialfall folgender Gleichung:

$$\begin{array}{rcccccccccc} P(x,y) & = & \alpha_{n,0}\, y^n\, x^0 & + & \alpha_{n-1,1}\, y^{n-1}\, x^1 & + & \ldots & + & \alpha_{1,n-1}\, y^1\, x^{n-1} & + & \alpha_{0,n}\, y^0\, x^n \\ & & & + & \alpha_{n-1,0}\, y^{n-1}\, x^0 & + & \ldots & + & \alpha_{1,n-2}\, y^1\, x^{n-2} & + & \alpha_{0,n-1}\, y^0\, x^{n-1} \\ & & & & & & \ddots & \vdots & & \vdots & \\ & & & & & & & + & \alpha_{1,0}\, y^1\, x^0 & + & \alpha_{0,1}\, y^0\, x^1 \\ & & & & & & & & & + & \alpha_{0,0}\, y^0\, x^0 \end{array}$$

$P(x, y)$ ist ein **Polynom** in x und y von **Grade** n.
Kurz: $P(x, y) = \sum\limits_{r,s=0,\ \ r+s\leq n}^{n} \alpha_{r,s}\, y^r\, x^s$: Polynom in 2 Variablen .

Wir definieren:

Definition: Die Lösungsmenge von $P(x, y) \equiv 0$ in der Ebene ($\mathbb{R}^2$) heisst **algebraische Kurve**.

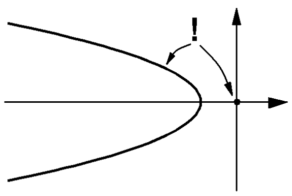
(Schreibe kurz: $P(x, y) = 0$)

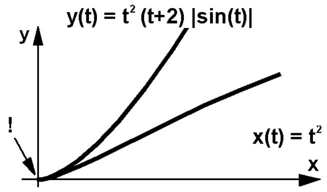
Die Kurve heisst „algebraisch“, weil die Gleichung $P(x, y) = 0$ eine algebraische Gleichung (Polynomgleichung) ist.

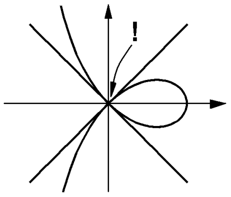
11.2.2 Diskussion solcher Kurven — Discussion de telles courbes

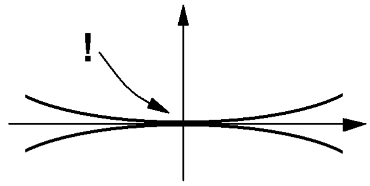
Bei speziell einfachen Kurven kann man vorgehen wie bei Funktionen mit einer Variablen: Es interessieren Symmetrie, Achsenschnittpunkte, Ausdehnung (Definitionsbereiche, Wertebereiche), Extrema (Minima, Maxima), Wendepunkte, Konvexität, Asymptoten u.s.w..

Bei andern solchen Kurven trifft man auch auf interessante Neuheiten. Z.B. spezielle Punkte wie: **Singuläre Punkte: Isolierte Punkte, Spitzen** oder **Doppelpunkte: Knoten, Berührungsknoten**, **Zweige**, vgl. Skizzen.









11.2.3 Beispiele — Exemples

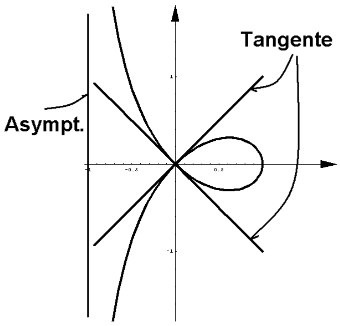
Bsp.: (1)

$P(x, y) = x^2(x^2-1)-y^2(y^2-1) = 0 \;\Rightarrow\; \pm x\sqrt{x^2-1} = \pm y\sqrt{y^2-1} \;\Rightarrow\;$ Lösung nur für $x^2 \geq 1,\; y^2 \geq 1.$

Zudem existieren aber auch isolierte Lösungen:

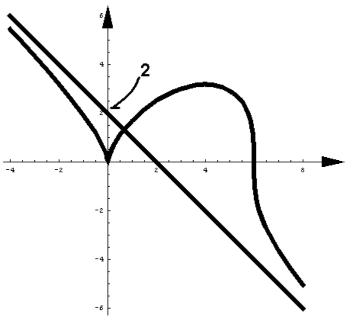
$$x = y = 0,\;\; x = 0 \;\wedge\; y = \pm 1,\;\; y = 0 \;\wedge\; x = \pm 1$$

Bsp.: **(2)**



$$P(x,y) = y^2(1+x) - x^2(1-x) = 0$$

Bsp.: **(3)**



$$P(x,y) = y^3 - x^2(6-x) = 0$$

Zur Gewinnung des Graphs in diesen Beispielen: Löse die Gleichung nach y auf und bearbeite die entstehenden Zweige (Teilfunktionen).

11.2.4 Algebraische Kurven im Raum — Courbes algébriques dans l'espace

Verallgemeinerung, Polynom in j Variablen:

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_l) = \sum_{r,s,\ldots,l=0,\;\; r+s+\ldots+l\leq n}^{n} \alpha_{r,s,\ldots,l} \cdot x_1^r \cdot x_2^s \cdot \ldots \cdot x_j^l.$$

Z.B. 3 Variablen: $P(x,y,z) = 0$,

Bsp.: $x+y+z=0$ oder $z = -x-y$.

Damit ist aber eine **Ebene im Raum** definiert und nicht eine Kurve. Eine Kurve ergibt sich erst, wenn man zwei solche Ebenen schneidet.

Allgemeiner:

$$\begin{aligned} P(x,y,z)_1 &= 0 \\ P(x,y,z)_2 &= 0 \end{aligned}$$

ergibt eine algebraische Kurve im Raum

Daraus ersieht man:

Konsequenz:
Die Schnittmenge von $n-1$ Hyperebenen $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ im $\mathbb{R}^n$ ergibt eine algebraische Kurve im $\mathbb{R}^n$.

11.3 Polyedersatz — Théorème des polyèdres

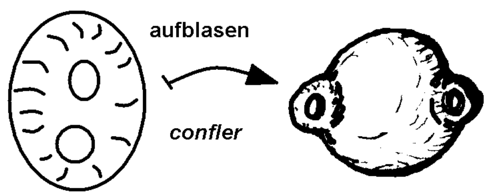
11.3.1 Begriffe — Notions

Definition: Ein **Polyeder**[9] ist ein durch endlich viele ebenen Flächen begrenzter endlicher Körper.

Einteilung: Konvexe, nicht konvexe, solche ohne Löcher, solche mit n Löchern, ...

Zur Klassifizierung verwenden wir die „Gummigeometrie":

Wir denken uns den Körper aus Gummi gebaut, sodass er aufblasbar ist. Hat der Körper kein Loch, so entsteht beim Aufblasen ein **kugelartiges Gebilde**. Hat er ein Loch, so kann er auf diese Weise zu einem **Torus** oder Reifen (Pneu) aufgeblasen werden und dann weiter zu einem kugelartigen Gebilde mit irgendwo aussen einem Henkel (wie bei einer Tasse). Hat der Körper zwei Löcher, so ist er entsprechend deformierbar in einen Doppeltorus und dann in ein kugelartiges Gebilde mit zwei Henkeln u.s.w..



Allgemein: Hat der Körper n Löcher, so lässt er sich in ein kugelartiges Gebilde mit n Henkeln deformieren. Jedes Polyeder ist so deformierbar.

Sei p die Anzahl der so entstehenden Henkel.

Definition: p heisst **Geschlecht** des Polyeders.

Körper, die gleiches Geschlecht haben, heissen **topologisch äquivalent**.
Les corps qui ont le même genre, s'appellent **topologiquement équivalents**.

11.3.2 Der Satz — Le théorème

Im Folgenden betrachten wir ein Polyeder mit e **Ecken**, k **Kanten** und f **Flächen**.

Satz: (**Polyedersatz**[10])

Vor.:

Gegeben sei ein Polyeder vom Geschlecht p.

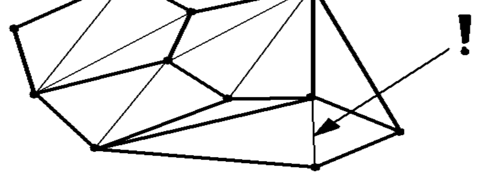
Beh.:

$e - k + f = 2 - 2p$

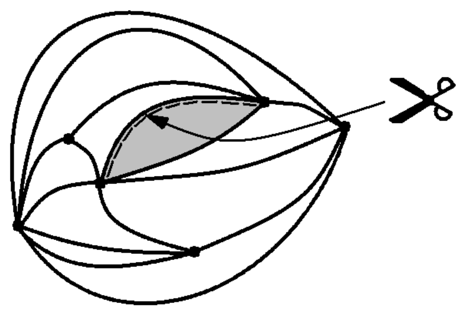
Definition: $2 - 2p$ heisst **Eulersche Charakteristik** .

Wir untersuchen die Sache hier im Falle $p = 0$.

Falls das Polyeder Flächen besitzt, die keine Dreiecke sind, zerlegen wir diese Fächen in Dreiecke mit den bestehenden Eckpunkten. Dabei zerschneidet eine neue Kante eine bestehende Fläche in zwei neue Flächen. Die Kantenzahl k und die Flächenzahl f erhöhen sich um eins, e bleibt gleich. Somit ändert $z_0 = e - k + f$ nicht. Wir haben damit künstlich erreicht, dass alle Seitenflächen Dreiecke sind bei gleichem z_0.

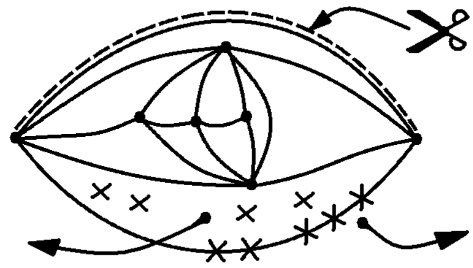


Nun wenden wir auf den Körper die Gummigeometrie an: Wir schneiden den Körper jetzt längs einer Kante zwischen zwei benachbarten Ecken auf und deformieren dann die Oberfläche derart, dass sie auf der Ebene liegt. Die aufgeschnittene Kante erscheint dabei jetzt doppelt, darf daher nur einmal gezählt werden. ($z_0 \longmapsto z_1 = z_0 + 1$.)

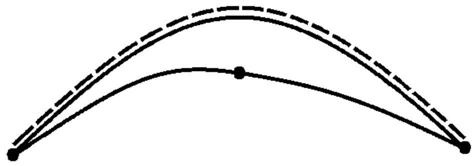


[10] Ein allgemeiner Beweis stammt z.B. von Cauchy.

Entfernen wir nun in der Ebene von aussen her eine Kante und auch die damit eingeschlossene Dreiecksfläche, so bleibt z_0 wieder gleich. Bei dieser Operation können aber „freie Ecken" entstehen: Eine übriggebliebene Ecke am Ende einer Kante (ihre „freie Kante"), die keine Fläche mehr umschliesst. Entfernt man aber diese freie Ecke auch mit ihrer freien Kante, so ändert z_0 nicht.



Auf diese Weise kann man die in die Ebene ausgebreitete Oberfläche des Polyeders durch Entfernung von Kanten, Flächen und Ecken solange abbauen bis nur noch eine Dreiecksfläche übrigbleibt, deren eine Kante die beim Aufschneiden entstanden ist, also doppelt vorhanden war und daher nicht gezählt werden darf.



Am Schlusse bleibt dann noch:

$f = 1,\ \ e = 3,\ \ k = 2$ (nur 2 zählen, eine doppelt)
$\leadsto \quad z_0 = e - k + f = 3 - 2 + 1 = 2 = 2 - 2p,\ \ p = 0 \leadsto \quad e - k + f = 2 - 2p$ mit $p = 0$.

11.3.3 Platonische Körper — Corps platoniques

Definition: Ein Polyeder heisst **regulär**, wenn alle Seitenflächen kongruente regelmässige n–Ecke sind.

Die regulären Polyeder nennt man auch **platonische Körper**[11]

(Alle Kanten gleich lang, alle Winkel gleich gross.)

Euklid hat es unternommen, mit den damaligen Mitteln und Begriffen die Geometrie weitgehend axiomatisch exakt aufzubauen (die „Elemente", dreizehn Bücher), um dann im 13. Buch zu beweisen, dass es nur 5 platonische Körper gibt.

Der Beweis des Satzes von Euklid gelingt leicht auf Grund des Polyedersatzes. Man kann dabei die Tatsache benützen, dass in einem regelmässigen Körper in einer Ecke minimal $m = 3$ Flächen und maximal $m = 5$ regelmässige Flächen zusammenstossen können.

Schuld daran sind die Grössen der Innenwinkel der Flächen. Beim gleichseitigen Dreieck beträgt die Grösse eines Innenwinkels an einer Ecke $\alpha(3) = 60^o$, beim Quadrat $\alpha(4) = 90^o$, beim regelmässigen Fünfeck $\alpha(5) = 108^o$, beim regelmässigen Sechseck $\alpha(6) = 120^o$ und beim regelmässigen Siebeneck gerundet $\alpha(7) = 128.5^o$. Sechs regelmässige Flächen können daher höchstens nur in der Ebene zusammenstossen: Sechs regelmässige Dreiecke. Für einen endlichen Körper im Raum sind es somit höchstens fünf.

[11] Nach Platon, griech Philosoph

Stossen an einem Punkt n regelmässige Flächen mit dem Innenwinkel $\alpha(n)$ zusammen, so kann die Summe der Grössen der zusammenstossenden Winkel den vollen Winkel nicht übersteigen. Man hat daher im Raum die Bedingung $n \cdot \alpha(n) < 360^o$

Daher bleiben nur noch folgende fünf Möglichkeiten an einer Ecke eines regelmässigen Polyeders:

1	3 Dreieck	$\leadsto\ 3\alpha(3) = 180^o < 360^o$
	4 Dreiecke	$\leadsto\ 4\alpha(3) = 240^o < 360^o$
	5 Dreiecke	$\leadsto\ 5\alpha(3) = 320^o < 360^o$
	(6 Dreiecke	$\leadsto\ 6\alpha(3) = 360^o \not< 360^o$)
2	3 Quadrate	$\leadsto\ 3\alpha(4) = 270^o < 360^o$
	(4 Quadrate	$\leadsto\ 4\alpha(4) = 360^o \not< 360^o$)
3	3 Fünfecke	$\leadsto\ 3\alpha(5) = 324^o < 360^o$
	(4 Fünfecke	$\leadsto\ 4\alpha(5) = 432^o \not< 360^o$)
	(3 Secksecke	$\leadsto\ 3\alpha(6) = 360^o \not< 360^o$)

Somit gilt das Lemma:

Lemma: Es gibt maximal 5 regelmässige Polyeder.

Jetzt muss man noch zeigen, dass auch minimal 5 solche existieren, indem man ihre Konstruktion angibt. Für das Tetraeder, das Hexaeder und das Oktaeder gewinnt man problemlos die Einsicht der Existenz aus der Anschauung, was einem die Konstruktion möglich macht. Schwieriger ist es für die restlichen zwei Fälle. Hier hilft der Polyedersatz weiter. Z.B. bei 3 regelmässigen Fünfecken gilt: $k = 5 \cdot f \cdot \frac{1}{2}$ (Jede Fläche besitzt 5 Kanten und jede Kante wird bei zwei aneinanderstossenden Flächen gezählt, also doppelt.) Weiter sieht man auf analoge Weise: $e = 5 \cdot f \cdot \frac{1}{3}$.

$\Rightarrow\ 2 = e - k + f = 5 \cdot f \cdot \frac{1}{3} - 5 \cdot f \cdot \frac{1}{2} + f\ \Rightarrow\ 2 \cdot 6 = 10f - 15f + 6f\ \Rightarrow\ f = 12$
$\leadsto$ Dodekaeder ... Die weiteren Ausführungen seien dem Leser überlassen.

Hinweis:
Seitenflächen regelmässige n–Ecke $\leadsto$

$$\begin{array}{lll} k = \dfrac{m \cdot e}{2} & \text{oder} & e = \dfrac{2 \cdot k}{m} \\ e = \dfrac{n \cdot f}{m} & \text{oder} & f = \dfrac{m \cdot e}{n} \\ k = \dfrac{n \cdot f}{2} & \text{oder} & f = \dfrac{2 \cdot k}{n} \end{array}$$
$$3 - k + f = 2\ \Rightarrow\ 2 \cdot n \cdot (e - 2) = m \cdot e \cdot (n - 2),\ \ m = 3, 4, 5,\ \ n \geq 3$$

Satz: **Euklid**

Es gibt exakt 5 regelmässige Körper (platonische Körper): Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder.

(Tetraeder $\leadsto$ 4 Flächen, Tetra $\leadsto$ 4, Hexa $\leadsto$ 6, Okto $\leadsto$ 8, Dodeka $\leadsto$ 12, Ikosa $\leadsto$ 20)

Eigenschaften:

Man stellt fest, dass immer zwei Polyeder dual sind. Dies in dem Sinne, dass der eine Körper in den andern einschreibbar ist, sodass Die Ecken des innern Körpers auf den Flächenmittelpunkten des äusseren Körpers liegen.

Über platonische Körper existiert eine ausgedehnte Literatur, auf die hier nicht eingegangen werden kann. Hier sollen die folgenden Ausführungen zur Bedeutung genügen:

Die Literatur lehrt, dass schon Pythagoras[12] einige dieser Körper gekannt haben muss. Platos Freund Theätet[13] lehrte darüber. Plato[14] hat das Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder und Ikosaeder in seinem Dialog <Timaios> den Elementen Feuer, Erde, Luft und Wasser zugeordnet. Das Dodekaeder jedoch der Himmelmaterie. (Später sprach man auch von 'quinta Essenzia — die Quintessenz'.) Weiter haben sich auch u.a. Leonardo da Vinci[15], Albrecht Dürrer[16], Johannes Kepler[17] und Leonard Euler[18] mit der Sache beschäftigt. Wegen ihrer idealen Gestalt haben platonischen Körper vor allem in den bildenden Künsten Spuren hinterlassen. Sie hatten ihre Wirkung dort , wo die Raumgestaltung, die Meditation, die Idee, die Theorie, die Schönheit im Zentrum steht, die staunen lässt, also im Reich der Gefühle. Abgesehen von der Kristallographie, der Chemie (Gitterstrukturen) sowie bei Verpackungsproblemen, haben sie in praktischer Naturwissenschaft und Technik bis heute keinen beherrschenden Einfluss gehabt — was nicht ausschliesst, dass das in Zukunft noch ändern kann.

[12] Pyhtagoras 580–500 v.Chr.
[13] Theätet †369 v.Chr.
[14] Plato 427–374 v.Chr.
[15] Leonardo da Vinci 1452–1519
[16] Albrecht Dürrer 1471–1528
[17] Johannes Kepler 1571–1630
[18] Leonard Euler 1707–1783

Kapitel • Chapitre 12

Anhang 1: Ellipsen, Kegelschnitte — Annexe 1: Ellipses, sections coniques

Bemerkung:

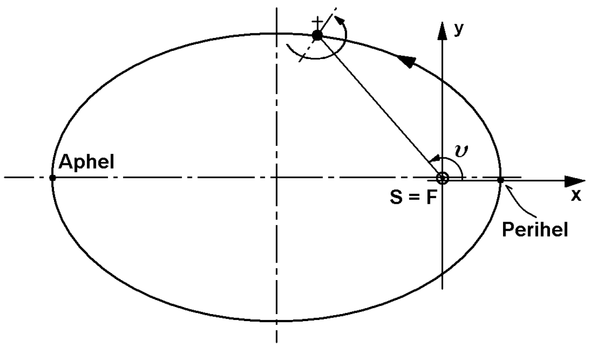
Dieser Teil ist dem Sonnenuhren-Skript des Autors entnommen, das bisher nur in deutscher Sprache erschienen ist.

12.1 Ellipsenbeziehungen und Flächensatz

12.1.1 Die Erde im Ekliptikalsystem

Die Erde bewegt sich bekanntlich nach dem **ersten keplerschen Gesetz** auf einer elliptischen Bahn um die Sonne, die in einem der Brennpunkte steht. Den Winkel von der Sonne aus gesehen zwischen der Perihel–Richtung und der Richtung zur Erde nennt man $\vartheta =$ **wahre Anomalie**. Dieser Winkel ist für Beobachtungen wichtig. Die folgende Skizze zeigt die Situation stark verzeichnet von einem Betrachter aus gesehen, der im Nordpol der Ekliptikebene steht.

Abbildung 12.1: Die Erde um die Sonne vom Ekliptik–Nordpol aus gesehen

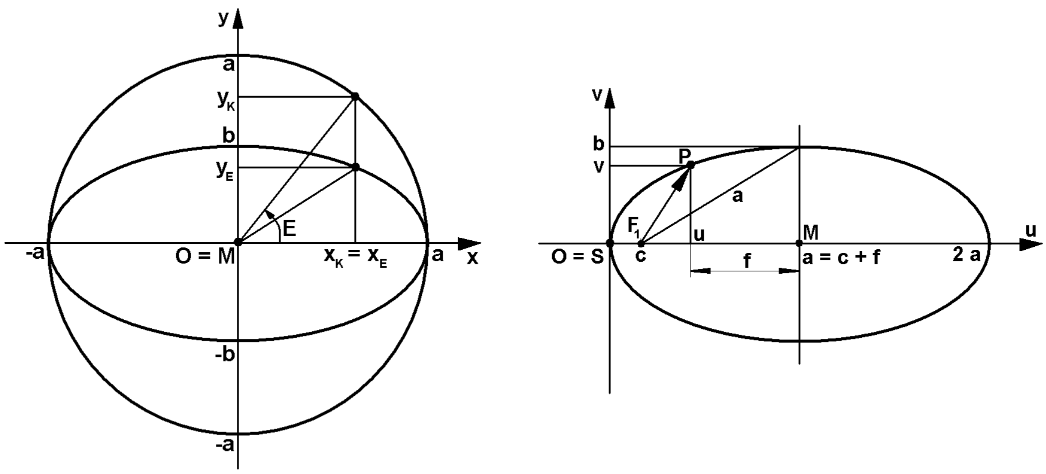


12.1.2 Beziehungen an der Ellipse

Im Folgenden stellen wir einige Tatsachen zusammen, die die Ellipse betreffen. Einige Beziehungen sind nicht trivial und können nicht in wenigen Zeilen hergeleitet werden. Obwohl heutzutage ausgedehnte Behandlungen

der Kegelschnitte (Ellipse) in einem Ingenieurstudium nicht mehr grosse Priorität geniessen, gehört der Stoff zur analytischen Geometrie des klassischen Gymnasiums. Daher sei für weitere einschlägige Behandlungen auf die Schulbuchliteratur verwiesen.
Eine Tatsache ist schon Kindern bekannt, die noch keine Geometrie kennen: Eine Ellipse zeichnet man, indem man in ein Brett zwei Nägel einschlägt, daran dann eine Schnur befestigt, sie mit einem Bleistift spannt und damit dann auf der Unterlage die Kurve aufzeichnet, die die gespannte Schnur ermöglicht. Es ist bekanntlich eine Ellipse. Der Beweis, dass diese Kurve exakt eine Ellipse ist, ist allerdings nicht so tri-vial wie das Zeichnen. Man kann also sagen: Die Menge der Punkte, deren Abstandsumme zu zwei festen Punkten (**Brennpunkte**) F_1 und F_2 konstant ist, bildet eine **Ellipse**: $|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = const. = 2\,a$. Wie kann man das einsehen?
Wir definieren die **Ellipse** als die Figur, die man durch Achsenstreckung aus dem zentrischen Kreis mit dem Radius a erhält.
Der Streckungsfaktor sei $\frac{b}{a}$. a ist die **grosse Halbachse** der Ellipse und b die **kleine Halbachse**. Als Koordinatensystem verwenden wir hier ein **Ellipsenmittelpunkt–zentriertes Ekliptikalsystem** (Zentrum im Ellipsenmittelpunkt, Koordinatenachsen auf den Halbachsen).

Abbildung 12.2: Ellipse, Mittelpunkts– und Scheitelpunktskoordinatensysteme



Wir lesen ab (vgl. Skizze 12.2):

$$x_K = x_E = a\,\cos(E),\;\; y_K = a\,\sin(E),\;\; y_E = \frac{b}{a}\cdot a\,\sin(E) = b\,\sin(E) = \frac{b}{a}\cdot y_K$$

Definition: E heisst **exzentrische Anomalie**.

Im Kreis gilt: $x_K^2 + y_K^2 = a^2 \;\Rightarrow\; \frac{x_K^2}{a^2} + \frac{y_K^2}{a^2} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{x_E^2}{a^2} + \frac{y_E^2}{b^2} = 1$

Formel: **Mittelpunktsgleichung:**

$$\frac{x_E^2}{a^2} + \frac{y_E^2}{b^2} = 1 \text{ oder } y_E^2 = b^2 - (\frac{b}{a})^2\,x_E^2$$

Im **Koordinatensystem des Scheitelpunktes** habe ein Ellipsenpunkt die Koordinaten u und v: $P = P(u, v)$. Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein: $f = \sqrt{a^2 - b^2}$. c sei vorerst beliebig. (Später werden wir c gleich $a - f$ setzen, vorläufig aber noch nicht.) F sei der Punkt der x resp. jetzt der u–Achse mit der Koordinate c. Dann gilt: $|\,\overrightarrow{FP}\,|^2 = r^2 = (u-c)^2 + v^2$.

Weiter verwenden wir die Symbole: $p := \frac{b^2}{a}$ und $\varepsilon := \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}},\ a\,\varepsilon = \sqrt{a^2-b^2} = f \ \Rightarrow\ \varepsilon = \frac{f}{a}$.
Weiter gilt: $\varepsilon^2 = 1-\frac{b^2}{a^2} \ \Rightarrow\ \frac{b^2}{a^2} = 1-\varepsilon^2$

Definition: ε heisst **numerische Exzentrizität**.

Es gilt: $\varepsilon \in [0,1]$.

Für das Folgende ist es notwendig, die Mittelpunktsgleichung für das Scheitelpunktskoordinatensystem umzurechnen und neu zu interpretieren. Zwischen den beiden Koordinatensystemen bestehen die Beziehungen $a+x_E = u$ und $y_E = v$

$$\frac{x_E^2}{a^2}+\frac{y_E^2}{b^2} = 1 \ \Rightarrow\ a^2\,y_E^2+b^2\,x_E^2 = a^2\,b^2 \ \Rightarrow\ a^2\,v^2+b^2\,(u-a)^2 = a^2\,b^2$$
$$\Rightarrow\ a^2\,v^2+b^2\,u^2-2\,b^2\,u\,a+b^2\,a^2 = a^2\,b^2 \ \Rightarrow\ a^2\,v^2+b^2\,u^2 = 2\,b^2\,u\,a \ \Rightarrow\ v^2 = -\frac{b^2}{a^2}\,u^2+2\,\frac{b^2}{a}\,u$$

$\Rightarrow\ v^2 = 2\,p\,u-(1-\varepsilon^2)\,u^2$. Diese Gleichung nennen wir Scheitelpunktsgleichung.

Formel: **Scheitelpunktsgleichung:**

$$v^2 = 2\,p\,u-(1-\varepsilon^2)\,u^2$$

Mit dieser Gleichung erhalten wir jetzt für ein beliebiges c mit dem Koordinatenpunkt F (vgl. oben): $|\,\overrightarrow{FP}\,|^2 = r^2 = (u-c)^2+v^2 = (u-c)^2+2\,p\,u-(1-\varepsilon^2)\,u^2 = u^2-2\,u\,c+c^2+2\,p\,u-(1-\varepsilon^2)\,u^2 = c^2+2\,u\,p-2\,u\,c+u^2-u^2+\varepsilon^2\,u^2 = c^2+2\,u\,(p-c)+\varepsilon^2\,u^2 \overset{*}{=} (c\pm\varepsilon\,u)^2+2\,u\,(p-c-(\pm\varepsilon\,c))$ $(*)$

Jetzt *wählen* wir c *speziell* so, dass gilt: $p-c-(\pm\varepsilon\,c) = p-c\,(1\pm\varepsilon) = 0$.
Diese Gleichung hat wegen '$\pm$' zwei Lösungen: $c_1 = \frac{p}{1+\varepsilon}$ und $c_2 = \frac{p}{1-\varepsilon}$

Definition: Die Punkte $F_1 = F_1(c_1,0)$ und $F_2 = F_2(c_2,0)$, die diesen beiden . Lösungen entsprechen, nennen wir **Brennpunkte**

Wegen der Lage der Ellipse ist $b\le a \ \Rightarrow\ 0\le\frac{b^2}{a^2}\le 1 \ \Rightarrow\ 0\le 1-\frac{b^2}{a^2}\le 1 \ \Rightarrow\ 0\le\varepsilon = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\le 1$.
Wegen $p = \frac{b^2}{a} > 0$ ist daher $c_1 > 0$ und $c_2 > 0$. Da a als Streckenlänge sowieso positiv ist, gilt nun:

$$c_1+c_2 = \frac{p}{1+\varepsilon}+\frac{p}{1-\varepsilon} = p\cdot\frac{1-\varepsilon+1+\varepsilon}{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)} = p\cdot\frac{2}{1-\varepsilon^2} = \frac{b^2}{a}\cdot\frac{2}{1-(1-\frac{b^2}{a^2})} = \frac{2\,b^2}{a\cdot\frac{b^2}{a^2}} = 2\,a$$

$$\Rightarrow\ c_1+c_2 = 2\,a,\ \ c_1-a = a-c_2,\ \ |a-c_1| = |a-c_2|$$

Daraus folgt, dass F_1 und F_2 symmetrisch zum Ellipsenmittelpunkt M liegen, denn $c_{1,2}$ wird vom Scheitelpunkt S aus gemessen und a ist die grosse Halbachse, liefert also die erste Koordinate von M.

Es gilt weiter: $e := \frac{1}{2}\,|c_1-c_2| = \frac{1}{2}\,|\frac{p}{1+\varepsilon}-\frac{p}{1-\varepsilon}| = \frac{1}{2}\,|\frac{p-p\,\varepsilon-p-p\,\varepsilon}{1-\varepsilon^2}| = |\frac{p\,\varepsilon}{1-\varepsilon^2}| = p\cdot\frac{1}{1-\varepsilon^2} =$

$$= \varepsilon\,\frac{b^2}{a}\cdot\frac{1}{1-(1-\frac{b^2}{a^2})} = \varepsilon\,\frac{b^2}{a}\cdot\frac{a^2}{b^2} = \varepsilon\,a$$

Definition: $e = \varepsilon\, a$ heisst **lineare Exzentrizität**.

Es gilt: $e^2 = \varepsilon^2\, a^2 = (1 - \frac{b^2}{a^2}) \cdot a^2 = a^2 - b^2$

Formel: $\varepsilon^2\, a^2 = e^2 = a^2 - b^2$

Nun setzen wir $c_{1,2} = \frac{p}{1 \pm \varepsilon}$ in $(*)$: $r^2 = c^2 + 2\,u\,(p - c) + \varepsilon^2\, u^2$ ein:

$$\Rightarrow\; r^2 = (\frac{p}{1 \pm \varepsilon})^2 + 2\,u\,(p - \frac{p}{1 \pm \varepsilon}) + \varepsilon^2\, u^2 = (\frac{p}{1 \pm \varepsilon})^2 + 2\,u\,p\,(1 - \frac{1}{1 \pm \varepsilon}) + \varepsilon^2\, u^2 =$$
$$= \frac{p^2}{(1 \pm \varepsilon)^2} + 2\,u\,p\,\frac{\pm\varepsilon}{1 \pm \varepsilon} + \varepsilon^2\, u^2 = (\frac{p}{1 \pm \varepsilon} \pm \varepsilon\, u)^2.$$

Diese Gleichung hat zwei Lösungen: $r_1 = \frac{p}{1 + \varepsilon} + \varepsilon\, u$ und $r_2 = \frac{p}{1 - \varepsilon} - \varepsilon\, u$

$$\Rightarrow\; r_1 + r_2 = \frac{p}{1 + \varepsilon} + \varepsilon\, u + \frac{p}{1 - \varepsilon} - \varepsilon\, u = \frac{p}{1 + \varepsilon} + \frac{p}{1 - \varepsilon} = const. \qquad \text{(Unabhängig von u!)}$$

$$\Rightarrow\; r_1 + r_2 = p \cdot (\frac{1}{1 + \varepsilon} + \frac{1}{1 - \varepsilon}) = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1 + \varepsilon + 1 - \varepsilon}{1 - \varepsilon^2} = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{2}{1 - (1 - \frac{b^2}{a^2})} = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{2\,a^2}{b^2} = 2\; a$$

Formel: $r_1 + r_2 = 2\,a = const.$

Das Kind, das wie oben beschrieben mit zwei Nägeln und einer Schnur eine Kurve zeichnet, bekommt also tatsächlich eine Ellipse.

Für die spezielle Wahl $P = H$ $(r_1 = r_2)$ finden wir daher wegen $|a - c_1| = |a - c_2|$:

$r_1 + r_2 = \sqrt{(a - c_1)^2 + b^2} + \sqrt{(c_2 - a)^2 + b^2} = 2\,\sqrt{(a - c_1)^2 + b^2} = 2\,a$
$\Rightarrow\; (a - c_1)^2 + b^2 = a^2 \;\Rightarrow\; f^2 = a^2 - b^2 = (a - c_1)^2 \;\Rightarrow\; |a - c_2| = a - c_1 = f,\;\; (a > c_1.)$

Formel: Für den Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkt gilt:

$$|a - c_2| = a - c_1 = \sqrt{a^2 - b^2} = f = e = \varepsilon\, a$$

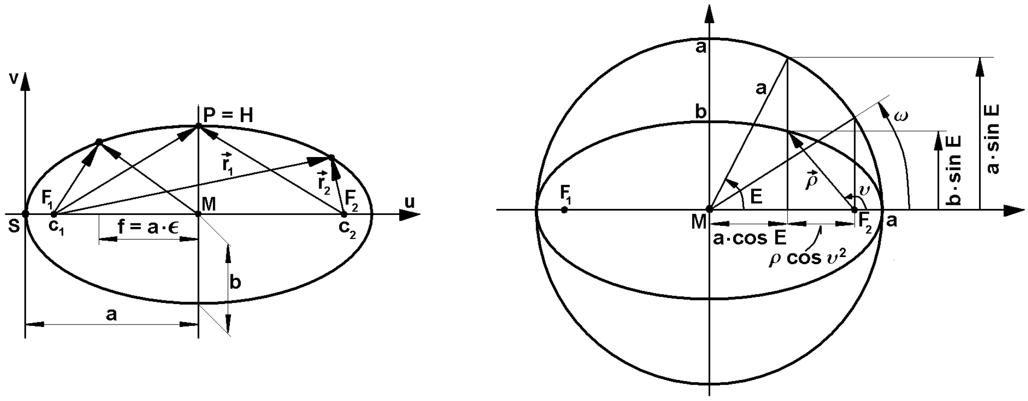
Konsequenz: Lineare Exzentrizität und Brennpunktsabstand sind bei der Ellipse identisch.
Es gilt weiter: $b = \sqrt{a^2 - f^2} = \sqrt{a^2 - a^2\,\varepsilon^2} = a\,\sqrt{1 - \varepsilon^2}$
$\Rightarrow\; \varrho^2 = (f - a\,\cos(E))^2 + (b\,\sin(E))^2 = (a\,\varepsilon - a\,\cos(E))^2 + (a\,\sqrt{1 - \varepsilon^2}\,\sin(E))^2 =$
$= a^2\,(\varepsilon - \cos(E))^2 + (\sqrt{1 - \varepsilon^2}\,\sin(E))^2 = a^2\,(\varepsilon^2 - 2\,\varepsilon\,\cos(E) + \cos^2(E) + \sin^2(E) - \varepsilon^2\,\sin^2(E)) =$
$= a^2\,(\varepsilon^2 - 2\,\varepsilon\,\cos(E) + 1 - \varepsilon^2\,(1 - \cos^2(E))) = a^2\,(1 - 2\,\varepsilon\,\cos(E) + \varepsilon^2\,\cos^2(E)) = a^2\,(1 - \varepsilon\,\cos(E))^2$

Formel: $\varrho = a\,(1 - \varepsilon\,\cos(E))$

In der letzten Skizze lesen wir ab:

$f = a \cdot \varepsilon = a\,\cos(E) - (+\varrho\,\cos(\vartheta)) \;\Rightarrow\; \varrho\,\cos(\vartheta) = a\,\cos(E) - a\,\varepsilon = a\,(\cos(E) - \varepsilon)$ ($\leadsto$ negativ für $\vartheta > 90^o$!)

Abbildung 12.3: Beziehungen an der Ellipse



Formel: $\varrho\,\cos(\vartheta) = a\,(\varepsilon - \cos(E))$

Definition: ϑ heisst **wahre Anomalie**.

Die wahre Anomalie ist bekanntlich für die Beobachtung wichtig.

Wenn wir jetzt die letzten beiden Formeln einerseits addieren und andererseits subtrahieren, bekommen wir zwei Ausdrücken, in deren Quotient sich das ϱ herauskürzt:

$$\varrho\,(1-\cos(\vartheta)) = a\,(1-\varepsilon\,\cos(E)) - a\,(\cos(E)-\varepsilon) = a\,(1+\varepsilon-\cos(E)-\varepsilon\,\cos(E)) = a\,(1+\varepsilon)\,(1-\cos(E))$$

$$\varrho\,(1+\cos(\vartheta)) = a\,(1-\varepsilon\,\cos(E)) + a\,(\cos(E)-\varepsilon) = a\,(1-\varepsilon+\cos(E)-\varepsilon\,\cos(E)) = a\,(1-\varepsilon)\,(1+\cos(E))$$

$$\leadsto\ \frac{\varrho\,(1-\cos(\vartheta))}{\varrho\,(1+\cos(\vartheta))} = \frac{a\,(1+\varepsilon)\,(1-\cos(E))}{a\,(1-\varepsilon)\,(1+\cos(E))}\ \Rightarrow\ \sqrt{\frac{1-\cos(\vartheta)}{1+\cos(\vartheta)}} = \sqrt{\frac{(1+\varepsilon)\,(1-\cos(E))}{(1-\varepsilon)\,(1+\cos(E))}}$$

Aus der Trigonometrie kennen wir die Formel: $\tan(\frac{\alpha}{2}) = \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}}$

$$\leadsto\ \tan(\frac{\vartheta}{2}) = \sqrt{\frac{1-\cos(\vartheta)}{1+\cos(\vartheta)}} = \sqrt{\frac{(1+\varepsilon)\,(1-\cos(E))}{(1-\varepsilon)\,(1+\cos(E))}} = \sqrt{\frac{(1+\varepsilon)}{(1-\varepsilon)}}\cdot\sqrt{\frac{(1-\cos(E))}{(1+\cos(E))}} = \sqrt{\frac{(1+\varepsilon)}{(1-\varepsilon)}}\cdot\tan(\frac{E}{2})$$

Aus der letzten Skizze ersehen wir: $f = a\cdot\varepsilon = a\,\cos\omega\ \Rightarrow\ \varepsilon = \cos\omega$

Formel: $\varepsilon = \cos\omega$

$$\leadsto\ \tan(\frac{\vartheta}{2}) = \sqrt{\frac{(1+\varepsilon)}{(1-\varepsilon)}}\cdot\tan(\frac{E}{2}) = \sqrt{\frac{(1+\cos(\omega))}{(1-\cos(\omega))}}\cdot\tan(\frac{E}{2}) = \frac{1}{\sqrt{\frac{(1-\cos(\omega))}{(1+\cos(\omega))}}}\cdot\tan(\frac{E}{2}) = \frac{1}{\tan(\frac{\omega}{2})}\cdot\tan(\frac{E}{2})$$

$$\leadsto\ \tan(\frac{\vartheta}{2}) = \cot(\frac{\omega}{2})\cdot\tan(\frac{E}{2})\ \Rightarrow\ \tan(\frac{E}{2}) = \tan(\frac{\vartheta}{2})\cdot\tan(\frac{\omega}{2})$$

Formel:
$$\tan(\frac{E}{2}) = \tan(\frac{\vartheta}{2}) \cdot \tan(\frac{\omega}{2})$$

Dies ist eine wichtige Formel, die in der Praxis der Sonnenuhrberechnung eine Rolle spielen wird. Da im System Sonne–Erde die Ellipsenform weitgehend konstant ist, ω also nicht stark ändert, haben wir hier einen direkten Zusammenhang zwischen der wahren Anomalie ϑ, die für die wahre Erdposition massgebend ist, und der exzentrischen Anomalie E, die für die **mittlere Zeit** massgebend ist.

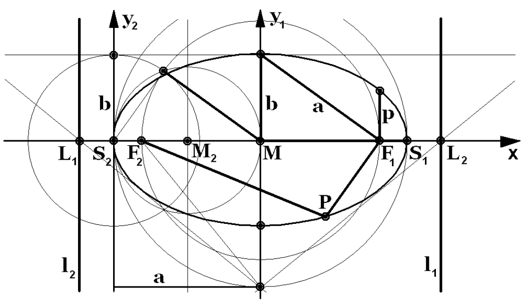
12.2 Zusammenfassung: Eigenschaften von Kegelschnitten

12.2.1 Allgemeine Bemerkung

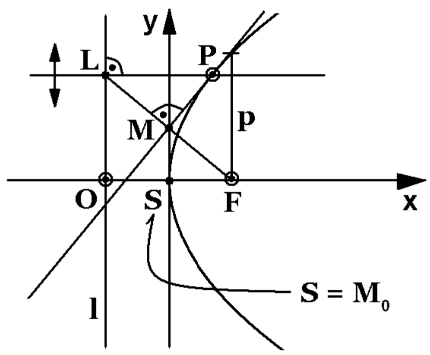
Die Kegelschnitte nicht degenerierter Art sind bekanntlich die Ellipse, die Parabel und die Hyperbel. In der Ebene werden solche Kurven durch quadratische Gleichungen beschrieben. Weiter gibt es die degenerie-rten Schnittgebilde Gerade und Punkt (Schnitte durch die Kegelspitze G). Andererseits beschreiben quadratische Gleichungen mit zwei Variablen immer Kegelschnitte, falls damit überhaupt Kurven in der reellen Ebene beschrieben werden. Dass das nicht immer so sein muss, zeigt die Gleichung $x^2 + y^2 = -1$, die keine reelle Lösung hat.
Für die Ellipse haben wir eine Serie von Gleichungen und Eigenschaften hergeleitet. Für die Parabel und die Hyperbel kann man das in analoger Weise tun. Aus Gründen des Umfangs wollen wir hier die Herleitungen in die Übungen eingliedern und dem Leser selbst überlassen. Nachfolgend begnügen wir uns daher mit einer Übersicht.

12.2.2 Übersicht

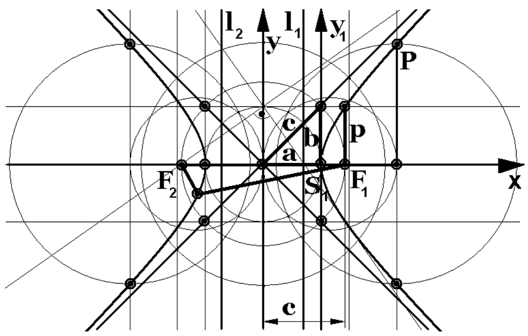
Diagramme



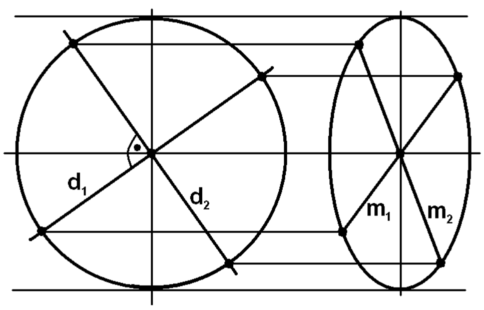
Ellipse



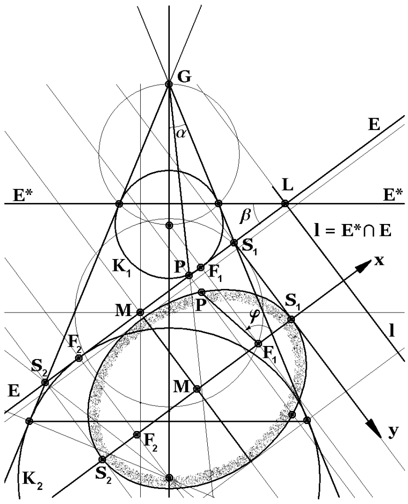
Parabel



Hyperbel



Konjugierte Durchmesser



Kegel, Schnitt, Dandelinkugel

E	$\rightsquigarrow$	Schnittebene
E^*	$\rightsquigarrow$	Berührungskreis einer Dandelinkugel
K	$\rightsquigarrow$	Dandelinkugel
l	$\rightsquigarrow$	Leitlinie, $l = E \cap E^*$
F	$\rightsquigarrow$	Brennpunkt
S	$\rightsquigarrow$	Scheitelpunkt
p	$\rightsquigarrow$	Quermass
m_j	$\rightsquigarrow$	Konjugierte Durchmesser
ε	$\rightsquigarrow$	Numerische Exzentrizität
c	$\rightsquigarrow$	Lineare Exzentrizität
$a,\ b$	$\rightsquigarrow$	Halbachsen
A	$\rightsquigarrow$	Inhalt

Numerische Exzentrizität

$$\varepsilon := \frac{|\overline{PF}|}{|\overline{PL}|} = \frac{\sin(\beta)}{\cos(\alpha)}$$

Kreis	$\beta = 0$	$\varepsilon = 0$
Ellipse	$\alpha < \frac{\pi}{2} - \beta$	$\varepsilon < 1$
Parabel	$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$	$\varepsilon = 1$
Hyperbel	$\alpha > \frac{\pi}{2} - \beta$	$\varepsilon > 1$

Koordinatensystemunabhängige Situation

	Ellipse	Parabel	Hyperbel
Abstandsbeziehung	$\lvert\overline{PF_1}\rvert + \lvert\overline{PF_2}\rvert = 2\,a$	$\lvert\overline{PF}\rvert = \lvert\overline{PL}\rvert$	$\lvert\lvert\overline{PF_1}\rvert - \lvert\overline{PF_2}\rvert\rvert = 2\,a$
Lineare Exzentrizität	$c^2 = a^2 - b^2$	—	$c^2 = a^2 + b^2$
Numerische Exzentrizität	$\varepsilon = \frac{a}{c} < 1$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = \frac{a}{c} > 1$
Quermass	$p = \frac{b^2}{a}$	p	$p = \frac{b^2}{a}$
Flächeninhalt	$A = a\,b\,\pi$	—	—

Koordinatensystem im Mittelpunkt

	Ellipse	Parabel	Hyperbel
Mittelpunktsgleichung	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$y^2 = 2\,p\,x$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Parametergleichung	$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,\cos(t) \\ b\,\sin(t) \end{pmatrix}$	—	$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm a\,\cosh(t) \\ b\,\sinh(t) \end{pmatrix}$
Brennpunkte	$F_1 = (c, 0), \;\; F_2 = (-c, 0)$	$F = (\frac{p}{2}, 0)$	$F_1 = (c, 0), \;\; F_2 = (-c, 0)$
Leitlinien	$x = \pm\frac{a^2}{c}$	$x = -\frac{p}{2}$	$x = \pm\frac{a^2}{c}$
Tangente/ Polare in P	$\frac{x_P \cdot x}{a^2} + \frac{y_P \cdot y}{b^2} = 1$	$y_P \cdot y = p\,(x + x_P)$	$\frac{x_P \cdot x}{a^2} - \frac{y_P \cdot y}{b^2} = 1$
Axymptoten	—	—	$y = \pm\frac{b}{a}\,x$
Steig. konj. Durchm.	$\tan(\gamma_{m_1}) \cdot \tan(\gamma_{m_2}) = -\frac{b^2}{a^2}$	—	$\tan(\gamma_{m_1}) \cdot \tan(\gamma_{m_2}) = \frac{b^2}{a^2}$

Koordinatensystem im Scheitelpunkt

	Ellipse	Parabel	Hyperbel
Scheitelpunktsgleichung	$y^2 = 2\,p\,x - \frac{p}{a}\,x^2$	$y^2 = 2\,p\,x$	$y^2 = 2\,p\,x + \frac{p}{a}\,x^2$
Mit numerischer Exzentrizität	$y^2 = 2\,p\,x - (1 - \varepsilon^2)\,x^2$	$y^2 = 2\,p\,x - (1 - \varepsilon^2)\,x^2$	$y^2 = 2\,p\,x - (1 - \varepsilon^2)\,x^2$

Koordinatensystem im Brennpunkt

Gleichung in Polarkoordinaten, Pol in einem Brennpunkt, Achse durch Scheitel:

	Ellipse	Parabel	Hyperbel
Polarkoordinatengleichung	$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos(\varphi)}$	$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos(\varphi)}$	$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot \cos(\varphi)}$

Parallelfläche

Die Schnittkurve des Kegelmantels mit einer Ebene E ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, wenn es eine Parallelebene E' zu E durch die Kegelspitze G gibt, die mit dem Kegelmantel folgende Schnittmenge gemeinsam hat:

	Ellipse	Parabel	Hyperbel
Schnittmenge	1 Punkt (G)	1 Gerade (durch G)	2 Geraden (durch G)

Kapitel • Chapitre 13

Anhang 2: Gleichungstypen – Annexe 2: Types d'équations

13.1 Typen von Gleichheitszeichen und Gleichungen

Gleichheitszeichen finden wir in folgenden Bedeutungstypen:

1 Bijektion, z.B. $360^o \hat{=} 2\,\pi$

2 Aussagen, z.B. $x = x$, $5 = 4$ oder $5 = 6$

3 Funktionsgleichung, z.B. $f(x) = \sin(x)$

4 Wertzuweisung in einem Computerprogramm, z.B. $\ldots; c = 3; \ldots$

5 Bestimmungsgleichungen, z.B. $5\,x + 4 = 7 \leadsto \;x = ?$

6 ...

13.2 Arten von Bestimmungsgleichungen

Bei Bestimmungsgleichungen geht es darum, den Wert einer Unbekannten in der Gleichung zu berechnen oder zu bestimmen.

13.2.1 Gleichungen mit einer oder mehreren Unbekannten

Bei Gleichungen mit einer Unbekannten z.B. in $\mathbb{R}$ suchen wir oft eine Lösungsmenge, die wir als Teilmenge von $\mathbb{R}$ beschreiben wollen, geometrisch also als Teilmenge der Punkte einer Geraden (Zahlengeraden). Bei zwei Unbekannten stossen wir analog auf eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, die sich geometrisch als Teilmenge der Punktmenge einer Ebene befreifen lässt. Entsprechend führen Gleichungen mit 3 Unbekannten geometrisch auf räumliche Gebilde u.s.w..

13.2.2 Gleichungen und Systeme von Gleichungen

Nach der Anzahl Gleichungen unterscheiden wir zwischen Einzelgleichungen und Systemen von mehreren Gleichungen. Bei Systemen mit mehreren Gleichungen sind die gemenisamen Lösungen gesucht. Das bedeutet, dass man die Schnittmenge der Lösungsmengen der einzelnen Teilgleichugnen sucht.

13.2.3 Gleichungen mit Standardfunktionen von einer Unbekannten

Um zu einer Übersicht zu gelangen, unterscheiden wir je nach Form der in der Gleichung vorkommende Funktionen:

1 Lineare Gleichung. Lösungsstrategie: Arithmetische Umformungen, bis die Unbekannte isoliert ist.

2 Quadratische Gleichung. Lösungsstrategie: Lösungsformeln (quadratische Ergänzung, Vieta).

3 Polynome vom Grad 3 oder 4. Lösungsstrategie: Formeln von Cardano oder Approximation.

4 Polynome vom Grad grösser 4. Keine allgemeine exakte Lösungsmethode. Ausweg: Numerisch, graphisch. . .

5 Wurzelgleichungen. Lösungsstrategie: Wurzeln durch potenzieren eliminieren.

6 Betragsgleichungen. Lösungsstrategien:

   (a) Betrag durch potenzieren eliminieren.
   (b) Fallunterscheidungen.
   (c) Graphische Lösung.

7 Exponentialgleichungen. Lösungsstrategie: Basen gleich machen, wegen der Monotonie einer Exponentialfunktion sind dann auch die Exponenten gleich.

8 Logarithmengleichungen. Lösungsstrategie: Basen gleich machen, jeweils alles unter den Logarithmus bringen $\leadsto$ Numeri vergleichen.

9 Trigonometrische Gleichungen. Lösungsstrategien: Diverse Methoden. Goniometrische Formeln verwenden. Z.B. Pythagoras für Sinus und Cosinus. . .

Generell kann man sich bei einer Unbekannten immer auch eine graphische Lösung überlegen. Dabei fasst man die linke Seite sowie die rechte Seite je als eine Funktion der Unbekannten auf und sucht die Stellen, wo sich die beiden Funktionskurven schneiden.

13.2.4 Lineare Gleichungssysteme

1 Wir unterscheiden homogene und inhomogene Systeme.

2 Homogenes System: Hat immer mindestens die Nulllösung.

3 Die Lösungsmenge ist geometrisch interpretierbar. Gemeinsame Lösungen von Gleichungen $\leadsto$ Schnittmenge.

4 Anzahl Lösungen, Möglichkeiten:

   (a) Widerspruch (keine Lösung)
   (b) Exakt eine Lösung
   (c) Unendlich viele Lösungen (geometrisches Gebilde, lineare Mannigfaltigkeiten).

5 Lösungsmethoden:

   (a) Matrixmethode
   (b) Additionsmethode (Elementarsubstitututionen, systematisch: Gauss-Jordan-Verfahren, Dreiecksform, Diagonalform)
   (c) Gleichsetzungsmethode
   (d) Einsetzungsmethode (Austauschverfahren)

Kapitel • Chapitre 14

Anhang 3: Kryptologie – Annexe 3: Cryptologie

14.1 Public key, RSA-Verfahren

Das hier besprochene **RSA-Verfahren** ist ein „public key –Chiffrierverfahren“, das durch seine relative Einfachheit besticht. Man benennt es nach den Erfindern Ronald L. **R**ivest, Adi **S**hamir und Leonard **A**dleman.

Zuerst wollen wir den Begriff **„public key –Chiffrierverfahren“** verstehen lernen. Generell hat man beim Chiffrieren die Absicht, eine unterwegs geheim zu haltende Nachricht von einer Stelle oder Person A an eine Stelle oder zu einer Person B zu übermitteln, ohne dass die Nachricht unterwegs von einer dritten Stelle oder Person verstanden werden kann. Ein ursprünglicher Klartext wird dazu chiffriert oder verschlüsselt, dann übermittelt, dann wieder dechiffriert oder entschlüsselt. Danach muss der ursprüngliche Klartext wieder in seiner alten Form vorhanden sein.

Im hier besprochenen Falle dient zur Verschlüsselung und Entschlüsselung ein **kryptologischer Algorithmus**, welcher durch eine offen bekannte mathematische Funktion gegeben ist. Um die Geheimhaltung des chiffrierten Textes „einigermassen sicher“ zu machen, benützt man **Schlüssel**, hier in Form von Zahlenwerten, welche beim Chiffrieren und Dechiffrieren entscheident sind. Alleine den Sendern und Empfängern muss der Schlüssel bekannt sein. Man kann es auch so einrichten, dass es einen **Chiffrierschlüssel** gibt und einen andern, aus dem Chiffrierschlüssel berechenbaren **Dechiffrierschlüssel**. In dieser Situation ist es sogar möglich, den Chiffrierschlüssel **öffentlich** zu machen, wenn die Zeit zur Berechnung des Dechiffrierschlüssels aus dem Chiffrierschlüssel auch mit dem schnellsten Computer alle realen Möglichkeiten übersteigt. Die Idee dazu stammt aus den Jahrn um 1970 (Ellis, Cocks und Williamson) und später 1977 (Diffie-Hellman). Beim RSA–Verfahren benützt man an dieser Stelle die Tatsache, dass allgemein der Rechenaufwand zur exakten Faktorisierung sehr grosser Zahlen extrem gross ist.

14.2 Durchführung des RSA–Verfahrens — Exécution de la méthode RSA

`(Vgl. auch: http://de.wikipedia.org/wiki/RSA-Kryptosystem )`

14.2.1 Wahl der Primzahlen — Choisir les nombres premiers

Das RSA–Verfahren basiert auf zwei vorerst gewählten grossen Primzahlen p und q, $p \neq q$ mit einer sehr grossen Anzahl von Dezimalziffern. p und q sollten stochastisch unabhängig sein. (Momentan wird je eine Anzahl von über 150 Ziffern empfohlen.) Diese beiden Primzahlen müssen strikte geheim gehalten werden. Mühelos können wir mit Hilfe eines Computers (z.B. mit *Mathematica*) das Produkt $N = p \cdot q$ berechnen. Die Faktorisierung dieses Produktes mit über 300 Ziffern ist ohne Vorwissen mit unrealistisch grossem Aufwand verbunden.

Bsp.: $1111\ldots111 * 222222\ldots222$ (je 160 Ziffern) ergibt die Ziffern:
246913580246913580246913580246913580246913580246913580246913580246913580246913
580246913580246913580246913580246913580246913580246913580246913580246913580246
913530864197530864197530864197530864197530864197530864197530864197530864197530
864197530864197530864197530864197530864197530864197530864197530864197530864197
5308642 mit einer Rechenzeit $t < 0.000001$ Sekunden.

Praktisch kann man diese Primzahlen p und q durch Raten einer Zahl und danach Anwenden eines Primzahltests bestimmen.

14.2.2 Bestimmung der beiden Schlüssel — Callculer des deux clefs

1 Wir berechnen jetzt $\varphi(N) = \varphi(p \cdot q) = (p-1)(q-1)$, wobei φ die Eulersche φ–Funktion bedeutet.

2 Wir wählen dann eine Zahl e (e gross) mit $1 < e < \varphi(N)$, $e \not| \varphi(N)$.

3 Dann berechnen wir mit Hilfe des euklidschen Algorithmus (ev. erweiterteter Algorithmus) eine Zahl d so, dass das Produkt $d \cdot e$ kongruent 1 modulo $\varphi(N)$ ist: $d \cdot e \equiv 1 \ (\varphi(N))$. ($d$ ist damit ein „Inverses“ zu e.)
Vgl. dazu auch: $http://de.wikipedia.org/wiki/Erweiterter\_euklidischer\_Algorithmus$.
Natürlich kann man auch d wählen und damit e wie oben berechnen.

4 Der **öffentliche Schlüssel** *(public key)* besteht jetzt aus dem Primzahlprodukt N sowie dem **öffentlichen Exponenten** e.

5 Der **private Schlüssel** *(private key)* besteht aus dem **privaten Exponenten** d. Dieser darf nur dem Anwender bekannt sein.

6 Eine Firma kann nun so für einen gegebenen Kunden zu einem gewählten Paar p und q schliesslich N sowie d und e bestimmen. N und e können ungesichert aufbewahrt werden. e hingegen muss dem Kunden überlassen werden.

Ein oft gezeigtes Beispiel:

Seien $p = 11$ und $q = 13$ die beiden Primzahlen. (Diese sind aus Gründen der praktischen Nachvollziehbarkeit hier klein statt gross gewählt.) Das Produkt wird damit $N = p\,q = 143$. Damit wird $\varphi(N) = (p-1)(q-1) = 10 \cdot 12 = 120$. Nun muss gelten: $ggT(e, 120) = 1$. Sei nun z.B. $e = 23$ gewählt. $\leadsto$ Öffentlicher Schlüssel $(N, e) = (120, 23)$. Nun müssen wir d berechnen: $d \cdot e \equiv 1 \ (\varphi(N)) \ \Rightarrow \ \exists_k \ d \cdot e + k \cdot \varphi(N) = 1, \ d = \dfrac{1 - k \cdot \varphi(N)}{e} = \dfrac{1 - k \cdot 120}{23}$. Mit $k = -9$ finden wir $d = 47 \in \mathbb{N}$. Bei grossen Zahlen N und e bringt die Ratemethode hier nicht unbedingt Erfolg. Der erweiterte euklidsche Algorithmus führt dann weiter.

Bemerkenswert ist, dass für das weitere Prozedere die beiden Primzahlen p und q nicht mehr gebraucht werden, also vergessen werden können. Sie müssen jedoch auch weiterhin geheim bleiben.

14.2.3 Verschlüsselung (Codierung) — Chiffrement (codage)

Wir gehen hier als Beispiel davon aus, dass es sich bei einer angenommenen geheim zu übermittelnden Nachrichtum um einen Text mit Buchstagen und Zahlen handelt und dass wir jedes verwendete Zeichen im ASCII-Code darstellen können. In diesem Code sind 33 nicht–druckbare sowie die 95 druckbaren Zeichen definiert, beginnend mit dem Leerzeichen, total also 128 Zeichen. Damit genügt für jedes Zeichen eine natürliche Dezimalzahl mit maximal drei Stellen. Sei K ein solches Zeichen einer Nachricht und C seine Verschlüsselung. Um ein Zeichen K zu verschlüsseln, ist jetzt hier die Bedingung $K < 143$ erfüllt. Die Zahl $K = 7$ verschlüsseln wir daher wie folgt:
$N = 143,\;\; e = 23,\;\; C = K^e\;(mod\, N) = 7^{23}\;(mod\, 143) \equiv (((7^2)^2)^2)^2 {*} (7^2)^2 {*} 7^2 {*} 7\;(mod\, 143) \equiv 2\;(mod\, 143)$ (Sukzessive Berechnung der Restklassen). Schneller ist man mit dem *Mathematica*–Befehl $Mod[7^{23}, 143]$. Somit ist $C = 2$ zu übermittlen.
Will man hier eine Nachricht in Form einer ASCII–Sequenz übermitteln, die durch eine natüliche Zahl ≥ 143 darstellt werden kann, so kann man die Sequenz in gleichlange Blöcke aufteilen, welche jeder für sich eine Zahl < 143 darstellt. Dann wird eben eine Folge von Teilnachrichten K_i (Teilklartexten) verschlüsselt. Damit erhält man dann eine Folge von chiffrierten Blöcken C_i, welche zu übermitteln sind.

14.2.4 Entschlüsselung (Decodierung) — Décodage (déchiffrement)

Die Decodierung auf der andern Seite funktioniert nach der Formel $K \equiv C^d\;(mod\; N)$. Das ist hier der zentrale theoretische Punkt und daher überprüfungsbedürfdig.

Beweis:

Statt $u \equiv v\; mod\; N$ schreiben wir einfacher und kürzer mit Hilfe der Restklassenschreibweise

$$[u]_N = [v]_N,\;\; \text{kurz } [u] = [v].$$

Sei vorerst $[C^d]_N = [K']_N. \;\Rightarrow\; [K']_N = [C^d]_N = [(K^e)^d]_N = [K^{e\cdot d}]_N = [K]_N^{e\cdot d}$.

Es gilt: $N = p \cdot q \;\wedge\; \varphi(N) = \varphi(p \cdot q) = (p-1)(q-1) \;\wedge\; d \cdot e = 1 + m \cdot \varphi(N)$
$$\Rightarrow\;\; [d \cdot e]_{(p-1)(q-1)} = [1]_{(p-1)(q-1)} \;\Rightarrow\; \exists_{u\in\mathbb{Z}} :\;\; d \cdot e = 1 + u\,(p-1)(q-1)$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1 $p|\, K$

$\rightsquigarrow\;\; [K]_p = [0]_p \;\Rightarrow\; [K']_p = [K^{e\cdot d}]_p = [0]_p \;\Rightarrow\; [K]_p = [K']_p$

2 $q|\, K$

$\rightsquigarrow$ Herleitung wie eben gehabt: $\ldots \;\Rightarrow\; [K]_q = [K']_q$

3 $p \not|\, K,\;\; q \not|\, K$

Hier gilt nach dem kleinen Fermatschen Satz: $[K^{p-1}]_p = [1]_p \;\wedge\; [K^{q-1}]_q = [1]_q$

$\rightsquigarrow\;\; [K^{e\cdot d}]_p = [K^{1+u\,(p-1)(q-1)}]_p = [K \cdot K^{u\,(p-1)(q-1)}]_p = [K]_p \cdot [(K^{u\,(q-1)})^{(p-1)}]_p = [K]_p \cdot [1]_p = [K]_p$

$\rightsquigarrow\;\; [K']_p = [K^{e\cdot d}]_p = [K]_p$

4 Ebenso mit q statt mit p: $[K']_q = [K^{e\cdot d}]_q = [K]_q$

5 $\rightsquigarrow$ $[K^{e\cdot d} - K]_p = [0]_p \ \wedge\ [K^{e\cdot d} - K]_q = [0]_q \ \Rightarrow\ [K^{e\cdot d} - K]_{p\cdot q} = [K^{e\cdot d}]_{p\cdot q} - [K]_{p\cdot q} = [0]_{p\cdot q}$

$$\rightsquigarrow\ K^{e\cdot d} \equiv K\ (mod\ (p\cdot q = N))$$

14.2.5 Das Sicherheitsproblem — Le problème de la sécurité

N ist bei diesem Verfahren bekannt, jedoch p und q nicht. Daher lautet die Frage, was wohl die Chance ist, die beiden Faktoren p und q von N zu finden. Damit könnte man dann via $\varphi(N)$ und dem öffentlichen Schlüssel (N, e) den geheimen Schlüssel d berechnen und damit eine Botschaft dechiffrieren, falls dafür der Geheimtext gegeben ist.

Bekannt ist (Jahr 2006), dass die wachsende Rechenleistung moderner Computer nur eine kurzfristige Sicherheit bedingt. Mit dem schnellen Algorithmus des **quadratischen Siebs** sind bereits Zahlen mit über 100 Stellen faktorisiert worden. Eine weitere Methode der Faktorisierung benutzt **elliptische Kurven**, ist aber für Zahlen mit über ca. 50 Stellen untauglich. Mit der **Methode des Zahlkörpersiebs** ist im Jahre 2005 von Wissenschaftlern der Universität Bonn eine im Rahmen der „RSA Factorization Challenge“ von RSA Laboratories vorgegebene 200-stellige Dezimalzahl in ihre zwei (großen) Primfaktoren zerlegt worden — mit einer Rechenzeit von ca. eineinhalb Jahren. Erreichbar scheint heute die Faktorisierung einer Zahl mit 640 Bits (bzw. 193 Dezimalstellen). Heute üblicher RSA-Schlüssel benutzen dagegen mindestens 300 Dezimalstellen für N.

Vgl. auch *http://de.wikipedia.org/wiki/Elliptische_Kurve* ,
http://de.wikipedia.org/wiki/Quadratisches_Sieb ,
http://de.wikipedia.org/wiki/Zahlkörpersieb .

14.2.6 Hinweise — Indications

1 Allgemeine Hinweise: Vgl. z.B. *http://de.wikipedia.org/wiki/RSA − Kryptosystem* .

2 Hinweise zur aktuellen Situation sind auch auf dem Internet zu finden, z.B. auf der Home-page von RSA-Laboratories: http://www.rsasecurity.com/

3 Bisher oft empfohlene Sicherheitsparameter waren:
Allgemein: Zahlen N mit $3\cdot 256 = 768$ Bits ($\approx 1.5525\cdot 10^{231}$)
Firmen: Zahlen N mit $4\cdot 256 = 1024$ Bits ($\approx 1.79769\cdot 10^{308}$)
Hochsicherheit: Zahlen N mit $8\cdot 256 = 2048$ Bits ($\approx 3.2317\cdot 10^{616}$).

4 Für das Problem der Angriffe gegen das RSA–Verfahren vgl. die Spezialliteratur.

5 Ein weiteres Problem: Die Erzeugung von Primzahlen. Z.B. stellt sich die Frage: Wieviele Primzahlen mit 308 Dezimalstellen mag es geben: $A(308)$? Zur Abschätzug benutzen wir die Formel der asymptotische Dichte der Primzahlen: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\pi(x)}{(\frac{x}{ln(x)})} = 1 \ \Rightarrow\ \pi(x) \approx \dfrac{x}{ln(x)}$
$\Rightarrow\ A(308) \approx \pi(10^{309}) - \pi(10^{309}) \approx \dfrac{10^{309}}{ln(10^{309})} - \dfrac{10^{308}}{ln(10^{308})} \approx 1.264479\cdot 10^{306}$. Vorratsprobleme wird es damit also kaum geben. Zur praktischen Erzeugung von Primzahlen konsultiere man die Spezialliteratur.

6 Das heute sehr aktuelle Problem der digitalen Unterschrift kann hier nur am Rande gestreift werden. Es geht in dieser Sache nicht bloss um die Übermittlung eines geheimen Textes, sondern um die Identifizierung des andern, d.h. um die Verifizierung der Identität. Auch hier konsultiere man die Spezialliteratur.
Vgl z.B. *http://de.wikipedia.org/wiki/Digitale_Unterschrift* .

Kapitel • Chapitre 15

Anhang 4: Verschiedenes – Annexe 4: Diverses choses

15.1 Häufig verwendete Abkürzungen – Abréviations fréquemment utilisées

Vor.	Voraussetzung
Beh.	Behauptung
Bew.	Beweis

Seiten:

15.2 Mathematica–Programme – Prog. pour Mathematica

`http://www.hta-bi.bfh.ch/~wir/MathemDF/Mathem.html#Pack`

$\leadsto$ Geometrische Berechnungen: Source-File
$\leadsto$ Geometrische Berechnungen: Work-File
$\leadsto$ Polyeder-Geometrie: Source-File
$\leadsto$ Polyeder-Geometrie: Work-File
$\leadsto$ Geometrie mit Zirkel und Lineal

Kapitel • Chapitre 16

Anhang „Bemerkungen“ — Annexe

16.1 Bemerkung zu Drehung und Gegendrehung

Gegeben sei ein beliebiges, aber fixes Koordinatensystem KS_{fix} im Raum und dazu geometrische Objekte im Raum, z.B. ein Würfel als einfaches Objekt. Weiter sei ein zweites, bewegliches Koordinatensystem im Raum gegeben mit andern gegebenen Objekten, die in diesem beweglichen Koordinatensystem fix befestigt sind, z.B. ein Tetraeder. Wir wollen uns das Tetraeder ganz nahe beim Würfel denken. Die Ursprünge der verwendeten KS seine jedoch von den Objekten weit entfernt. Drehen oder bewegen wir das bewegliche Koordinatensystem KS_{lose}, so ändern sich in diesem die Koordinaten der im Raum fixen Objekte, z.B. des Würfels. Die KS_{lose}–Koordinaten der mit dem KS_{los} fix verbundenen Objekte, z.B. des Tetraeders, ändern sich nicht. Das Tetraeder bewegt sich mit dem KS_{lose} vom Würfel weg. Die Vektoren des Tetraeders verhalten sich daher **kovariant** mit dem Koordinatensystem KS_{lose}, ihre Koordinaten sind in KS_{lose} **invariant**. Man kann die Sache auch umkehren: Wenn sich die Koordinaten von Objekten in einem KS beim Bewegen dieses KS nicht ändern, so verhalten sich diese Objekte **kovariant** mit diesem KS. Die Koordinaten des Tetraeders ändern sich also im fix gegebenen KS_{fix} **kovariant** mit dem KS_{lose}, da das Tetraeder sich im Raum — und damit im KS_{fix} — bewegt. Um die alte Position mit den alten Koordinaten im KS_{fix} wieder herzustellen, muss das Tetraeder zurück in die Nähe des Würfels bewegt werden, die Position resp. die Koordinaten ändern sich dann **kontravariant**, wenn wir diesmal das KS_{lose} nicht mit zurückbewegen. Wenn sich das KS_{lose} somit bewegt hat und der im Raum fixe Würfel seine Position beibehält, so ändern sich seine Koordinaten **kontravariant**. Der Würfel ist ja an derjenigen Position geblieben, an die das Tetraeder schliesslich wieder zurückbewegt worden ist.

16.2 Winkelhalbierende im Dreieck — Bissectrice d. le triangle

Bemerkung: Ohne Übersetzung.

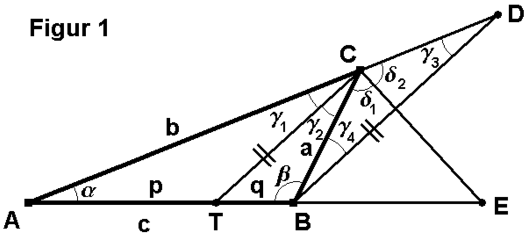
Satz über die Winkelhalbierenden im Dreieck I:

__Vor.:__

Sei $\gamma_1 = \gamma_2$ und danach $\overline{BD} \parallel \overline{CT}$

$\Rightarrow\ \gamma_1 = \gamma_3$ und $\gamma_2 = \gamma_4$
$\Rightarrow\ \gamma_3 = \gamma_4\ \Rightarrow\ \triangle BDC$ ist gleichschenklig
$\Rightarrow\ a = |\overline{BC}| = |\overline{CD}|\ \Rightarrow\ \dfrac{b}{a} = \dfrac{|\overline{AC}|}{|\overline{CD}|} = \dfrac{p}{q}$

Figur 1



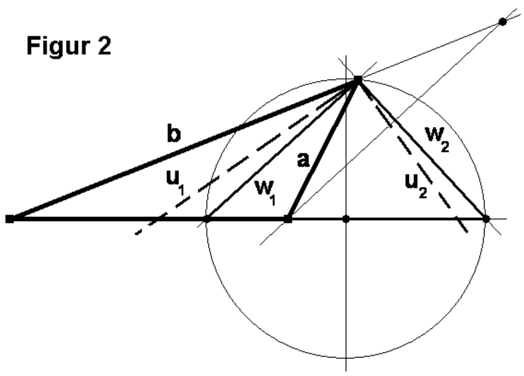
Satz: Die Winkelhalbierende $\overline{CT}$ schneidet c im Verhältnis der restlichen Seiten:

$$\frac{b}{a} = \frac{p}{q}$$

Weiter sei $\overline{CE}$ die Winkelhalbierende von $\angle BCD$ in der letzten Figur, d.h. $\delta_1 = \delta_2$.

Es gilt:
$\gamma_2 + \delta_1 = \gamma_3 + \delta_1 = \dfrac{1}{2}\,(\gamma_3 + \gamma_4 + \delta_1 + \delta_2)$
$= \dfrac{1}{2}\,180^o = 90^o\ \Rightarrow\ \angle TCE = \perp$

Figur 2



Lemma: C liegt auf dem Thaleskreis über $\overline{TE}$

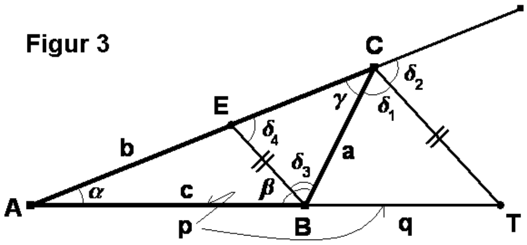
Satz über die Winkelhalbierenden im Dreieck II:

__Vor.:__

Sei $\delta_1 = \delta_2$ und danach $\overline{EB} \parallel \overline{CT}$

$\Rightarrow\ \delta_1 = \delta_3$ und $\delta_2 = \delta_4$
$\Rightarrow\ \delta_3 = \delta_4\ \Rightarrow\ \triangle BCE$ ist gleichschenklig
$\Rightarrow\ a = |\overline{BC}| = |\overline{CE}|\ \Rightarrow\ \dfrac{b}{a} = \dfrac{|\overline{AC}|}{|\overline{EC}|} = \dfrac{p}{q}$

Figur 3



Satz: Die Winkelhalbierende $\overline{CT}$ schneidet c im äusseren Teilpunkt T im Verhältnis der restlichen Seiten:

$$\frac{b}{a} = \frac{p}{q}$$

Wir betrachten nun die Figur 2.
Wird hier umgekehrt die Strecke $\overline{AB}$ durch den inneren Teilpunkt T (Figur 1) im Verhältnis $a : b$ geteilt und man hätte eine Gerade $\overline{CT_1}$ resp. u_1 mit $\gamma_1 \neq \gamma_2$, so könnte man daneben eine Gerade $\overline{CT_2}$ resp. w_1 mit $\gamma_1{}' = \gamma_2{}'$ konstruieren, und es würde aus dem Satz über die Winkelhalbierenden im Dreieck I folgn, dass $T_1 = T_2$ sein müsste.
Analog schliesst man für den in Figur 3 gezeigten Fall mit dem äusseren Teilpunkt. $\leadsto$ Folgerung

Satz:

1 Die Forderung $\gamma_1 = \gamma_2$ in Figur 1 ist äquivalent zur Forderung „Die Winkelhalbierende $\overline{CT}$ schneidet c im Verhältnis der restlichen Seiten:“
$$\frac{b}{a} = \frac{p}{q}$$

2 Die Forderung $\delta_1 = \delta_2$ in Figur 3 ist äquivalent zur Forderung „Die Winkelhalbierende $\overline{CT}$ schneidet c im Verhältnis der restlichen Seiten:“
$$\frac{b}{a} = \frac{p}{q}$$

Ende • Fin