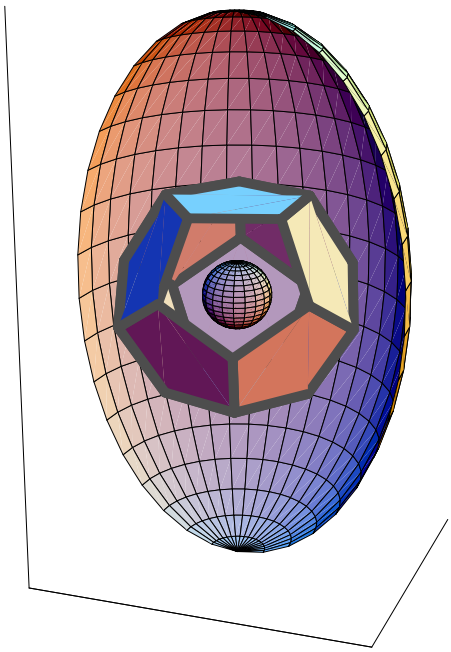
Script ◇ Math ◇ Ing
◇ Algebra ◇ Algèbre ◇
kurz & bündig ◇ concis



Scripta bilingua

von • *de*

Rolf Wirz

Berner Fachhochschule BFH ◇ TI und • *et* AHB

V.2.26.12a d/f / 24. Mai 2012

©1998 . . . 2003/04/05/06/07/08/09/10/11/2012

Produziert mit LaTeX/PCTEX auf NeXT/ WIN98/ XP. • *Produit avec LaTeX/PCTEX sur NeXT/ WIN98/ XP.*
Einige Graphiken sind auch mit *Mathematica* entstanden. • *Quelques représentations ont été produites avec Mathematica.*

Je mathematischer und wirkungsvoller eine Theorie ist, desto unanschaulicher ist sie. Die moderne Wissenschaft erkauft sich ihre Möglichkeit die Welt zu verändern — oft durch Verzicht auf die Anschaulichkeit der Beschreibung. . . .
• *Plus une théorie est mathématique et efficace, moins elle est claire. Les sciences modernes acquièrent la possibilité de changer le monde — au prix de la clarté de la description. . . .*

Fleckenstein

Aktuelle Adresse des Autors (2007):

Rolf W. Wirz-Depierre
Prof. für Math.
Berner Fachhochschule (BFH), Dep. AHB und TI
Pestalozzistrasse 20
Büro B112 CH–3400 Burgdorf/BE
Tel. ++41 (0)34 426 42 30 / intern 230
Mail: Siehe http://rowicus.ch/Wir/indexTotalF.html unter „Koordinaten von R.W.“
Alt: Ingenieurschule Biel (HTL), Ing'schule des Kt. Bern, Fachhochschule ab 1997) // BFH HTA Biel // BFH TI //

©1998 . . . 2003/04/05/06/07/08/09/10/11/2012

Information erscheint nur in der deutschen Ausgabe.

• *Information seulement pour l'édition allemande.*

Inhaltsverzeichnis • Table des matières

1 Organisatorisches – Quant à l'organisation **1**

2 Aussagenlogik – Log.d. prop. **3**
2.1 Elementare Logik – Logique élém. 3
2.2 Wichtig – Important 3
2.3 Bsp. f. Wahrheitstab. – Ex. p. tab. d. vér. 4
2.4 Aussageformen – Formes propos. 4
2.5 Spez. Aussageformen – Formes propos. spéc. 5
2.6 Korr. log. Schluss – Concl. log. corr. 6
2.7 Polnische Notation – Notation polonaise 6
2.8 Quantoren – Quantificateurs 7
2.9 Normalformen – Formes normales 7
2.10 Resultate – Résultats 8
2.11 Literatur – Littérature 9

3 Mengen Rel., Abb. – Ensembles, rel., appl. **11**
3.1 Mengen – Ensembles 11
3.1.1 Definitionen – Définitions 11
3.1.2 Neue Mengen – Nouveaux ensembles 11
3.1.3 Mengenverknüpfungen – Compositions 12
3.2 Relationen – Relations 13
3.2.1 Definitionen – Définitions 13
3.2.2 Spezielle Relationen – Relations spéciales 14
3.2.3 Partitionen – Partitions 16
3.3 Abb. u. Funktionen – Applications et fonc. 17
3.3.1 Definitionen – Définitions 17
3.3.2 Verketten von Funktionen – Composition de fonctions 18
3.4 Lösungsmengen — Ensembles de solution 20

4 Zahlen, Indukt., Rekurs. – Nombres, ind. récurs. **23**
4.1 Nat. Zahlen **N** – Nombres nat. **N** 23
4.1.1 Axiomatische Einführung – construction axiomatique 23
4.1.2 Operationen auf **N** – Opérations sur **N** 24
4.1.3 Vollständige Induktion – Induction complète 25
4.1.4 Rekursion – Récursion 27
4.1.5 Ordnungsrelation – Relation d'ordre 28
4.1.6 Potenzen in **N** – Puissances dans **N** 29
4.1.7 Teiler, Vielfache – Diviseurs, multiples 29
4.2 Ganze Zahlen **Z** – Nombres entiers **Z** 29

4.2.1 Konstruktion von **Z** – construction de **Z** . . . 29
4.2.2 Operationen auf **Z** – Opérations sur **Z** . . . 30
4.2.3 Interpretation **Z** – Interprétation **Z** . . . 30
4.2.4 0 und negegative **Z** – 0 et **Z**négatifs . . . 31
4.2.5 Struktur – Structure . . . 31
4.2.6 Ordnungsrelation – Relation d'ordre sur **Z** . . . 32
4.2.7 Weitere Ausdehnungen – Autres extensions . . . 32
4.2.8 Teiler – Diviseurs . . . 33
4.2.9 Kongruenzen – Congruences . . . 35
4.2.10 Restklassenrechnen – Calcul avec classes de restes . . . 35
4.2.11 Polynomringe – Anneaux de polynômes . . . 37
4.2.12 Positionssysteme – Des systèmes de position . . . 38
4.3 Ergänzungen – Annexe . . . 38
4.3.1 Ausblick – Autres faits divers . . . 41
4.4 Rat. Zahlen **Q** – Nombres rationnels **Q** . . . 42
4.4.1 Definition – Définition . . . 42
4.4.2 Operationen – Opérations . . . 43
4.4.3 Einbettung – Plongement . . . 43
4.4.4 Ordnungsrelation – Relation d'ordre . . . 44
4.4.5 Eigenschaften – Qualités . . . 44
4.5 Die Wurzel — La racine . . . 45
4.5.1 Die Quadratwurzel — La racine quarrée . . . 45
4.5.2 Die n–te Wurzel — La n–ème racine . . . 46
4.6 Reelle Zahlen und Folgen — Nombres réels et suites . . . 47
4.6.1 Darstellungsarten — Façons de représentation . . . 47
4.6.2 Zahlenerweiterung — Elargir les ensembles de nombres . . . 49
4.6.3 Das Problem der Mächtigkeiten — Le problème de la puissance . . . 50
4.6.4 Weitere Resultate — D'autres résultats . . . 54

5 Vektoren – Vecteurs **57**
5.1 Koordinatenunabhängig – Sans système de coordonnés . . . 57
5.1.1 Inhalt – Contenu . . . 57
5.1.2 Addition – Addition . . . 58
5.1.3 Streckung – Allongement . . . 59
5.1.4 Allgemeine Definition – Définition générale . . . 60
5.1.5 Unterraum, direkte Summe – Sous–espace vectoriel, somme directe . . . 61
5.1.6 Lineare Abhängigkeit – Dépendance linéaire . . . 62
5.1.7 Basen – Des bases . . . 65
5.1.8 Spezielle Vektoren – Des vecteurs spéciaux . . . 68
5.2 Koordinatenabhängig – Dans un système de coordonnés . . . 69
5.2.1 Grundlagen – Fondements . . . 69
5.2.2 Normalsysteme – Systèmes normaux . . . 70
5.2.3 Koordinatenvektoren – Vecteurs aux coordonnés . . . 71
5.2.4 Basiswechsel – Changement de base . . . 75
5.2.5 Vektor in einer neuen Basis – Vecteur dans une nouvelle base . . . 75
5.2.6 Nach dem Austauschverfahren – d'après la méthode d'échange des vecteurs . . . 75
5.2.7 Anwendungen — Applications . . . 78
5.3 Geometrie – Géométrie . . . 78
5.3.1 Elementare geometrische Sätze – Théorèmes géométriques élémentaires . . . 79
5.3.2 Weitere Begriffe und Folgerungen – D'autres notions et conséquences . . . 84
5.3.3 Sätze – Théorèmes . . . 86
5.3.4 Drehungen – Rotations . . . 90
5.3.5 Additionstheoreme – Théorèmes d'addition . . . 92

5.3.6 Leben wir in einem 4-dim. Raum? – Vivons–nous dans un espace de dim. 4? 93
5.4 Skalarprodukt – Produit scalaire 94
5.4.1 Zur Definition – Quant à la définition 94
5.4.2 In Komponenten – Dans les composants 96
5.4.3 Anwendungen – Applications 97
5.4.4 Drehung eines Vektors — Déplacement angulaire d'un vecteur 98
5.5 Geradengleichungen – Equations de droites 99
5.5.1 Parametergleichungen – Equations paramétriques 99
5.5.2 Komponentengleichungen – Equations de composants 99
5.5.3 Gerade in Grundebene – Droite dans le plan fondamental 100
5.5.4 Andere Formen — D'autres formes 101
5.5.5 Winkel zwischen Geraden – Angle entre différentes droites 101
5.6 Ebenengleichungen – Equations de plans 102
5.6.1 Parametergleichungen – Equations paramétrique 102
5.6.2 Komponentengleichungen – Equations de composants 102
5.6.3 Koordinatengleichungen – Equations de coordonnés 102
5.6.4 Interpretation von Gleichungen – Interprétation d' équations 103
5.6.5 Spezielle Lage – Position spéciale 103
5.6.6 Übersicht – Vue générale 104
5.6.7 Hess'sche Normalform – Forme normale de Hess 105
5.7 Anwendungen – Applications 107
5.7.1 Abstand eines Punktes – Distance d'un point 107
5.7.2 Winkelhalbierende – Bissectrice 107
5.7.3 Kreis, Kugel, Ellipse – Cercle, sphère, ellipse 107
5.7.4 Spezielle Kreise, Kugeln – Cercles, sphères spéciales 108
5.7.5 Kegelschnitte – Sections des cônes 109
5.7.6 Tangente – Tangente 110
5.7.7 Polare — Polaire 111
5.7.8 Anwendung — Application 112
5.7.9 Potenz — Puissance 113
5.8 Vektorprodukt — Produit vectoriel 114
5.8.1 Flächenprodukt — 'Produit de surface' 114
5.8.2 Anwendungen — Applications 116
5.8.3 Vektorprodukt — Produit vectoriel 117
5.8.4 Definition Vektorprodukt — Définition produit vectoriel 117
5.8.5 Regeln — Règles 119
5.8.6 Anwendungen — Applications 121
5.9 Spatprodukt — Produit triple 122
5.9.1 Definition — Définition 122
5.9.2 Cramer — Cramer 125
5.9.3 Weitere Produkte — Autres produits 125
5.9.4 Kegel und Zylinder — Cône et cylindre 126
5.9.5 Ausblick — Perspectives 127
5.10 Berechnungen — Calculs 129
5.10.1 Koord'gleichung einer Ebene — Equation de coord. d'un plan 129
5.10.2 Spiegeln eines Punktes — Refléter un point 130

6 Komplexe Zahlen — Nombres complexes **133**
6.1 Definition — Définition 133
6.1.1 Zahlenmenge — Ensemble de nombres 133
6.1.2 Operationen — Opérations 134
6.1.3 Einbettung — Plongement 136
6.1.4 Imaginäre Zahlen — Nombres imaginaires 136

6.1.5 Weitere Begriffe — D'autres notions . . . 137
6.2 Eigenschaften — Qualités . . . 137
6.2.1 Ordnung — Ordre . . . 137
6.2.2 Rechenreglen — Règles de calcul . . . 139
6.2.3 Multiplikation geometrisch — Multiplication géométriquement . . . 140
6.2.4 Exponentialschreibweise — Notation exponentielle . . . 140
6.2.5 Anwendung (Zeigerdiagramme) — Application (Diag. d. coord.) . . . 142
6.3 Wurzeln in **C** — Racines dans **C** . . . 143
6.3.1 Das Problem — Le problème . . . 143
6.3.2 Ausblicke — Perspectives . . . 145
6.4 Hauptsatz der Algebra — Théorème principal de l'algèbre . . . 148
6.4.1 Der Satz — Le Théorème . . . 148
6.4.2 Anwendungen — Applications . . . 150
6.4.3 Kubische Gleichung — Equation cubique . . . 152
6.4.4 Herleitung des Hauptsatzes — Déduction du théorème principal . . . 153
6.5 Weitere Anwendungen — Autres applications . . . 157
6.5.1 Summe der Einheitswurzeln — Somme des racines de l'unité . . . 157
6.5.2 Formeln von De Moivre — Formules de De Moivre . . . 157
6.5.3 Fourierentwicklung — Séries de Fourier . . . 158

7 Komplexe Funktionen — Fonctions complexes 159
7.1 Differenzierbarkeit, Wege — Dérivés, chemins . . . 159
7.1.1 Grundlagen — Fondements . . . 159
7.1.2 Differenzierbarkeit — Dérivabilité . . . 161
7.1.3 Differenzierbarkeitsregeln — Règles pour dérivabilité . . . 162
7.1.4 Wege in **C** — Chemins dans **C** . . . 163
7.1.5 Differenzierbare Wege — Chemins dérivables . . . 164
7.2 Konforme Abbildungen — Applications conformes . . . 165
7.3 Möbius–Transformationen — Transformations de Möbius . . . 166
7.4 Definitionen — Définitions . . . 166
7.4.1 Eigenschaften — Qualités . . . 167
7.5 Cauchy-Riemann — Cauchy-Riemann . . . 169
7.5.1 Herleitung — Déduction . . . 169
7.5.2 Harmonische Funktionen — Fonctions harmoniques . . . 169
7.6 Exp–, Log'funktion — Fonct. exp., log. . . . 170
7.7 Trig. Funkt. — Fonct. trig. . . . 173
7.8 Anwendungen — Applications . . . 174
7.8.1 Idee — Idée . . . 174
7.8.2 Smith–Diagramm — Diagramme de Smith . . . 175
7.8.3 Joukowski–Profil — Profil de Joukowski . . . 176
7.8.4 Zeigerdiagramme — diagrammes–vecteurs . . . 177
7.9 Darstellung komplexer Funktionen — Représentation de fonct. compl. . . . 177
7.9.1 Beispiel einer Kurve — Exemple d'une courbe . . . 177
7.9.2 Beispiel einer rationalen Funktion — Exemple: Fonction rationnelle . . . 178

8 Gleichungssysteme — Systèmes d'équations 181
8.1 Lösungsraum — Espace de solutions . . . 181
8.1.1 Lineare Gleichung — Equation linéaire . . . 181
8.1.2 Lineare Mannigfaltigkeit — Variété linéaire . . . 182
8.1.3 Büschel, Bündel — Faisceau, gerbe . . . 184
8.1.4 „Homogenisierung“ — "Homogéniser" . . . 185
8.1.5 Gleichungsysteme — Systèmes d'équations . . . 185
8.2 Gauss–Jordan — Gauss–Jordan . . . 188

8.2.1 Beispiel — Exemple . . . 188
8.2.2 Allgemeine Lösung — Solution générale . . . 190
8.2.3 Anwendung — Application . . . 195

9 Matrizen, Determinanten — Matrices, déterminants 197
9.1 Gleich'syst., Matrizen — Syst.d'équ., matr. . . . 197
9.1.1 Begriff — Notion . . . 197
9.1.2 Matrixprodukt — Produit matriciel . . . 199
9.2 Determinanten — Déterminants . . . 202
9.2.1 Determinanten für n grösser 3 — Déterminants pour n plus grand 3 . . . 202
9.2.2 Entwicklungssatz — Théorème du développement . . . 205
9.2.3 Berechnungsmethoden — Méthodes de calculer . . . 211
9.2.4 Cramer für n grösser 3 — Cramer pour n plus grand 3 . . . 212
9.3 Allg. Matrixprodukt — Prod. matriciel général . . . 213
9.3.1 Rechenregeln — Règles de calcul . . . 213
9.3.2 Matrixprodukt, lineare Abbildung — Produit matriciel, application linéaire . . . 214
9.3.3 Nochmals Matrixmultiplikation — Multiplication matricielle encore une fois . . . 217
9.3.4 Untermatrizen — Des sous–matrices . . . 218
9.4 Spez. Matrizen, Inverse — Matrices spéciales, inverse . . . 218
9.4.1 Spezielle geometrische Abbildungen — Applications géométriques spéciales . . . 218
9.4.2 Reguläre Matrizen — Matrices régulières . . . 221
9.4.3 Übersicht — Vue d'ensemble . . . 226
9.4.4 Berechnung der Inversen — Calculer l'inverse . . . 229
9.4.5 Transponierte und Produkt — Transposé et produit . . . 232
9.4.6 Schwach besetzte Matrizen — Matrices aux éléments minuscules . . . 233
9.4.7 Rechenbeispiele — Exemples de calcul . . . 234
9.5 Nochmals geometrische Anwendungen — D'autres applications géométriques . . . 234
9.5.1 Matrixkomposition — Composition de matrices . . . 234
9.5.2 Matrix zur Geradenspiegelung — Matrice pour la réflexion à une droite . . . 235
9.5.3 Projektion auf Ebene, Matrix — Projection sur un plan, matrice . . . 236
9.5.4 Drehung um Raumachse — Révolution autour d'une axe dans l'espace . . . 237
9.6 Matrixprod., Basiswechsel — Prod. d. matr., changement de base . . . 239
9.6.1 Determinantenmultiplikationssatz — Multiplication des déterminants . . . 239
9.6.2 Determinantenmult. vereinfacht — Multipl. des déterm. simplifiée . . . 243
9.6.3 Determinantenmult. u. Geometrie — Multipl. des déterm. et géom. . . . 243
9.6.4 Lineare Abbildung, Basisabbildung — Application linéaire, application de base . . . 246
9.7 Gauss–Algorithmus mit Matrizen — Algorithme de Gauss avec des matrices . . . 248
9.8 Iterative Berechnung der Inversen — Calcul itératif de l'inverse . . . 249
9.8.1 Methode — Méthode . . . 249
9.8.2 Rahmen der Methode — Cadre de la méthode . . . 251
9.8.3 Jacobi–Verfahren f. Gleich'syst. — Méth. de Jacobi p. d. syst. d'éq. . . . 252
9.8.4 Jacobi–Verfahren, inverse Matrix — Méth. de Jacobi, matrice inverse . . . 254
9.9 D'Gl und Differenzenmethode — Eq. diff. et méthode d'éq. aux différences . . . 255

10 Eigenwertprobleme — Problèmes des valeurs propres 259
10.1 Eigenwerte, Eigenvektoren — Valeurs propres, vecteurs propres . . . 259
10.2 Berechn. Eigenw., Eigenvekt. — Calcul d. val. prop., vect. prop. . . . 260
10.2.1 Charakteristisches Polynom — Polynôme charactéristique . . . 260
10.2.2 EW und EV der Inversen — EW et EV de l'inverse . . . 262
10.2.3 Beispiele — Exemples . . . 263
10.3 Eigensch. EW, EV — Qualités val. prop., vect. prop. . . . 264
10.3.1 Lineare Unabhängigkeit — Indépendence linéaire . . . 264
10.3.2 Nicht reguläre Matrizen — Matrices non régulières . . . 265

10.3.3 Transponierte Matrizen — Matrices transposées . . . 266
10.3.4 Matrixpotenzen — Puissances de matrices . . . 266
10.3.5 Diagonalisierung regulärer Matrizen — Diagonalisation de matrices régulières . . . 266
10.3.6 Anwend. auf Matrixpotenz. — Applic. p.d. puissances de matr. . . . 267
10.3.7 EW der Diagonalmatrix — EW de la matrice diagonale . . . 268
10.3.8 Spur und Determinante — Trace et déterminant . . . 269
10.4 Ähnliche Matrizen — Matrices semblables . . . 271
10.4.1 Grundlagen — Fondements . . . 271
10.4.2 Abbildungen im Eigenraum — Applications dans l'espace propre . . . 273
10.5 Konstruktion einer Matrix — Construction d'une matrice . . . 274
10.6 Diag. spez. Matrizen — Diag. de matr. spéc. . . . 275
10.6.1 Definitionen — Définitions . . . 275
10.6.2 Wichtige Eigenschaften — Qualités importantes . . . 276
10.7 Ausbau und Ergänzungen — Complètement des notions . . . 280
10.7.1 Rang und Defekt — Rang et défaut . . . 280
10.7.2 Caley-Hamilton, Nilpotenz — Caley-Hamilton, nilpotence . . . 280
10.7.3 Hauptvektoren, Spektrum — Vecteurs principaux, spectre . . . 283
10.7.4 Beispiele — Exemples . . . 287
10.7.5 Polynomnullstellen und EW — Zéros de pôlynomes et VP . . . 288
10.8 Geometrische Anwendungen — Applications géométriques . . . 289
10.8.1 Morphismen — Morphismes . . . 289
10.8.2 Lineare Abbbildung, Basisabbildung — Application linéaire, application de base . 289
10.8.3 Affinitäten — Affinités . . . 295
10.8.4 Isometrien — Isométries . . . 299
10.8.5 Kollineationen — Collinéations . . . 300
10.8.6 Kegelschnitte — Sections coniques . . . 303
10.9 Anwendungen bei Rekursionen — Applications aux récursions . . . 307
10.10 Anwendungen der Matrizenrechnung — Applications du calcul matriciel . . . 309
10.10.1 Ausgleichsrechnung — Calcul d´ajustement de données . . . 309
10.10.2 Überbestimmte Gleichungssysteme — Systèmes d'équations surdéterminés . . . 310

11 Ausblick — Perspective 317
11.1 Quaternionen, Raumdrehungen — Quaterniones, révolutions dans l'espace . . . 317
11.2 Algebraische Kurven — Courbes algébriques . . . 319
11.2.1 In der Ebene — Dans le plan . . . 319
11.2.2 Diskussion — Discussion . . . 319
11.2.3 Beispiele — Exemples . . . 320
11.2.4 Im Raum — Dans l'espace . . . 321
11.3 Polyedersatz — Théorème des polyèdres . . . 322
11.3.1 Begriffe — Notions . . . 322
11.3.2 Der Satz — Le théorème . . . 323
11.3.3 Platonische Körper — Corps platoniques . . . 325

12 Anhang 1: Ellipsen, Kegelschnitte — Ellipses, sections coniques 329
12.1 Ellipsenbeziehungen und Flächensatz . . . 329
12.1.1 Die Erde im Ekliptikalsystem . . . 329
12.1.2 Beziehungen an der Ellipse . . . 330
12.2 Zusammenfassung: Eigenschaften von Kegelschnitten . . . 335
12.2.1 Allgemeine Bemerkung . . . 335
12.2.2 Übersicht . . . 335

13 Anhang 2: Gleichungstypen – Annexe 2: Types d'équations **339**
13.1 Typen von Gleichheitszeichen und Gleichungen . . . 339
13.2 Arten von Bestimmungsgleichungen . . . 339
13.2.1 Gleichungen mit einer oder mehreren Unbekannten . . . 339
13.2.2 Gleichungen und Systeme von Gleichungen . . . 339
13.2.3 Gleichungen mit Standardfunktionen von einer Unbekannten . . . 340
13.2.4 Lineare Gleichungssysteme . . . 340

14 Anhang 3: Kryptologie – Annexe 3: Cryptologie **341**
14.1 Public key, RSA-Verfahren . . . 341
14.2 Durchführung des RSA–Verfahrens — Exécution de la méthode RSA . . . 341
14.2.1 Wahl der Primzahlen — Choisir les nombres premiers . . . 342
14.2.2 Bestimmung der beiden Schlüssel — Callculer des deux clefs . . . 342
14.2.3 Verschlüsselung (Codierung) — Chiffrement (codage) . . . 343
14.2.4 Entschlüsselung (Decodierung) — Décodage (déchiffrement) . . . 343
14.2.5 Das Sicherheitsproblem — Le problème de la sécurité . . . 344
14.2.6 Hinweise — Indications . . . 344

15 Anhang 4: Verschiedenes – Annexe 4: Diverses choses **345**
15.1 Abkürzungen – Abréviations . . . 345
15.2 Mathematica–Programme – Prog. pour Mathematica . . . 346

16 Anhang „Bemerkungen“ — Annexe **347**
16.1 Bemerkung zu Drehung und Gegendrehung . . . 347
16.2 Winkelhalbierende im Dreieck — Bissectrice d. le triangle . . . 348

Kapitel • Chapitre 1

Organisatorisches – Quant à l'organisation

Kurze Übersicht • *Vue générale*

1. Organisation, Rahmen
   • *Organisation, cadre*

2. Stoff
   • *Matière*

3. Ziel, Weg, Methoden, Feedback, Team
   • *But, chemin, méthodes, feedback, groupe*

4. Übungen, Selbststudium
   • *Exercices, études personnelles*

5. Lerntechnik, Arbeitstechnik, Selfmanagement
   • *Technique de travail et d'apprendre, selfmanagement*

6. Rechte und Pflichten des Studenten und der Schule
   • *Droits et devoirs de l'étudiant et de l'école*

7. Prinzipien, Grundsätze
   • *Principes et positions*

8. Rechner, Computer, Mathematiksoftware
   • *Calculatrices de poche, ordinateurs, software en mathes*

9. Semesterorganisation Mathematik (Anzahl Noten, Prüfungsreglement, Prüfungsplan, Prüfungsrahmen, erlaubte Unterlagen, formale Anforderungen, Benotungskriterien, Benotung der Übungen und Projekte, Arbeitsnachweismappe, Klassensprecher, Klassenbetreuer, Kopierchef, Sprechstunden)
   • *Organisation du semestre en mathématiques (nombre de notes, réglement des examens, Plan des examens, conditions concernant les examens, exigences formelles, conditions formelles, philosophie des notes, évaluation des exercices et des projets, porte–feuille, chef de classe, professeur chargé de la classe, chef chargé des copies, heures de consultation)*

10. Hilfsmittel (Bibliothek, Taschenrechner, Mathematiksoftware, Literatur)
    • *Aides (bibliothèque, calculatrice de poche, software en mathématiques, littérature)*

11. Zeitplanung
    • *Plan du temps à disposition*

12. Einführung: Über das Wesen der Mathematik
    • *Introduction: L'essence (caractère) des mathématiques*

    (a) Beispielhafte Beweise
        • *Des preuves exemplaires*

    (b) Wieso beweisen?
        • *Pourquoi prouver?*

    (c) Modell und Wirklichkeit
        • *Modèles et réalité*

    (d) Geschichtlicher Rahmen und Auftrag
        • *Cadre de l'histoire et but*

Kapitel • Chapitre 2

Aussagenlogik – Logique des propositions

2.1 Elementare Logik, Studium – Logique élémentaire, études

$\longrightarrow$ Grundlage und Sprache der Mathematik, Denkschule. (Repetition!)

• $\longrightarrow$ *Fondements et langue des mathématiques, apprendre à penser. (Répétition!)*

Lit. fürs Selbststudium: Vgl. spezielle Literaturliste • *Litt. pour les études pers.*: Voir liste de littérature spéciale.

`http://www.hta-bi.bfh.ch/~wir/Scripts/Teil2logikd.pdf`
`http://www.hta-bi.bfh.ch/~wir/Scripts/Teil2logikf.pdf`

2.2 Wichtig – Important

1. **Aussage:** (In Math..) Sprachliches Gebilde, das Wahrheit oder Unwahrheit ausdrückt.
   • **Proposition:** *Construction verbale qui exprime une vérité ou bien non–vérité.* $(2 = 2,\ \ 5 \in \mathbb{N})$

2. **Aussagenvariable:** Platzhalter für Aussage.
   • **Variable propositionnelle:** *Représentant pour une variable propositionnelle.*

3. **Wahrheitswerte:** • **Valeurs logiques:** $\{f, w\}$, $\{f, t\}$, $\{0, 1\}$.

4. **Belegung:** Einer Menge von Aussagenvariablen zugeordneter Satz von Wahrheitswerten.
   $\longrightarrow$ Aussage. (Statt der Aussage wird direkt der Variablen der Wahrheitswert zugeordnet.)
   • **Poids:** *Ensemble de valeurs logiques adjoint à un ensemble de variables propositionnelles.*
   $\longrightarrow$ *Proposition. (On adjoint les valeurs logiques directement aux variables sans mentionner les propositions.)*

5. **Zusammensetzung, Manipulation von Aussagen:** Durch Junktoren
   • **Composer et manipuler des propositions:** *A l'aide de symboles logiques.*

2.3 Beispiele für Wahrheitstabellen – Exemples pour des tableaux de vérité

	A	$\neg A$
Nicht	0	1
• *Non*	1	0
Negation		
• *Négation*		

Var	A	B	$A \wedge B$
$t(Var)$	0	0	0
Und • *Et*	0	1	0
Konjunktion	1	0	0
• *Conjonction*	1	1	1

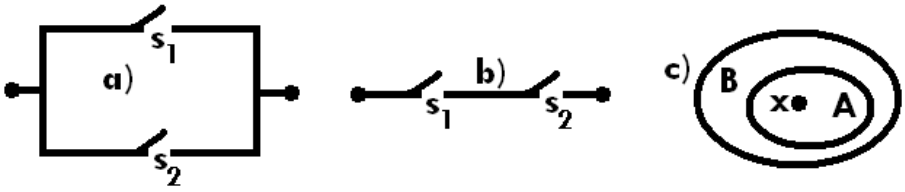
Var	A	B	$A \vee B$
$t(Var)$	0	0	0
Oder • *Ou*	0	1	1
Adjunktion	1	0	1
• *Adjonction*	1	1	1

Var	A	B	$A \dot{\vee} B$
$t(Var)$	0	0	0
exor	0	1	1
Exklusion	1	0	1
• *Exclusion*	1	1	0

Var	A	B	$A \Rightarrow B$
$t(Var)$	0	0	1
	0	1	1
Subjunktion	1	0	0
• *Subjonction*	1	1	1

Var	A	B	$A \Leftrightarrow B$
$t(Var)$	0	0	1
	0	1	0
Bijunktion	1	0	0
• *Bijonction*	1	1	1

Bsp.: • **Exemple:**



Parallelschaltung: Beispiel für $\vee$. Der Strom fliesst, wenn der Schalter s_1 oder s_2 geschlossen ist.
• *Circuit montage en parallèle: L'exemple pour* $\vee$ *. Le courant circule si l'interrupteur* s_1 *ou* s_2 *est fermé.*

Serieschaltung: Beispiel für $\wedge$. Der Strom fliesst, wenn die Schalter s_1 und s_2 geschlossen sind.
• *Circuit montage en série: L'exemple pour* $\wedge$ *. Le courant circule si l'interrupteur* s_1 *et* s_2 *sont fermés.*

Teilmengenbeziehung: Beispiel für $\Rightarrow$. Für $x \in A$ muss auch $x \in B$ wahr sein.
• *Sous–ensemble: L'exemple pour* $\Rightarrow$ *. Si* $x \in A$ *est satisfait, aussi* $x \in B$ *doit être satisfait.*

2.4 Aussageformen, Klammerungen – Formes propositionnelles, parenthèses

Bsp.: • **Exemple:** $(A \wedge B) \vee C \not\equiv A \wedge (B \vee C)$

⊘ **Wichtig:** • **Important:** Bei Klammerungen gilt die Prioritätenregelung
• *Quant aux parenthèses on a réglé la priorité comme il suit:*
$\neg$ vor • *devant* $\wedge \ldots \vee \ldots \Rightarrow \ldots \Leftrightarrow \ldots \rightsquigarrow$ Linksassoziativität • *Associativité de gauche* ...

⊘ **Aussageform:** Aussagevariablen oder Verknüpfung von solchen durch endlich viele Junktoren.
• **Forme propositionnelle:** *Variables propositionnelles ou bien adjonction desquelles avec un nombre fini de symboles logiques.*

Probleme • **Problèmes:**

⊘ Herstellung der Wahrheitstabelle von Aussageformen.
• *Elaboration des tableaux de vérité des formes propositionnelles.*

⊘ Übersicht über alle 16 möglichen Verknüpfungen mit nur 2 Aussagevariablen. (Wahrheitsfunktionen mit 2 Variablen.)
• *Vue générale de toutes les 16 adjonctions avec seulement 2 variables propositionnelles. (fonction de vérité avec 2 variables).*

⟶ **Bsp.:** • **Exemple:**

Var	A	B	$A \textcircled{f} B$
$t(Var)$	0	0	0
Identisch	0	1	0
falsch	1	0	0
• *Faux id.*	1	1	0

Var	A	B	$A \downarrow B$
$t(Var)$	0	0	1
	0	1	0
Nicod	1	0	0
NOR	1	1	0

Var	A	B	$A \textcircled{w} B$
$t(Var)$	0	0	1
Identisch	0	1	1
wahr	1	0	1
• *Vrai id.*	1	1	1

Var	A	B	$A \uparrow B$
$t(Var)$	0	0	1
Scheffer–	0	1	1
strich	1	0	1
NAND	1	1	0

Reduktionssatz: Jede Wahrheitsfunktion $(X_1 \dots X_n) \longmapsto f((X_1 \dots X_n))$ lässt sich durch eine Aussageform darstellen, die nur die Verknüpfungen $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ enthält.

Théorème de réduction: • *Chaque fonction de vérité* $(X_1 \dots X_n) \longmapsto f((X_1 \dots X_n))$ *se laisse représenter par une forme propositionnelle qui contient seulement les symboles logiques* $\neg$, $\wedge$ *et* $\vee$.

Illustration • *Illustration*:

	X_1	X_2	$f(X_1, X_2)$
1.	0	0	1
2.	0	1	1
3.	1	0	1
4.	1	1	0

$f(X_1, X_2)$ wahr in den Fällen 1, 2, 3.
• $f(X_1, X_2)$ *vrai dans les cas 1, 2, 3.*
Fall 1 wahr, wenn $\neg X_1$ wahr und $\neg X_2$ wahr.
• *Cas 2 vrai, quand* $\neg X_1$ *vrai et* $\neg X_2$ *vrai.* ...

$\Rightarrow$ f wahr, wenn $(\neg X_1 \wedge \neg X_2) \vee (\neg X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge \neg X_2)$ wahr. Sonst falsch.
• f *vrai, si* $(\neg X_1 \wedge \neg X_2) \vee (\neg X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge \neg X_2)$ *vrai. Faux dans les autres cas.*

2.5 Spezielle Aussageformen – Des formes propositionnelles spéciales

Begriffe • *Notions*:

1. **Tautologie:** Identisch wahre Aussage.
   • **Tautologie:** *Proposition identiquement vraie, généralement valable.*

   Beispiele: • **Exemples:**

1.1	$A \Rightarrow A$	1.2	$A \Rightarrow \neg\neg A$
2.1	$A \vee \neg A$	2.2	$\neg(A \wedge \neg A)$
3.1	$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$	3.2	$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
4.1	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg B \wedge \neg A$	4.2	$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg B \vee \neg A$
5.1	$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	5.2	$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
6.1	$A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$	6.2	$A \Leftrightarrow \neg(\neg A)$

   Man beachte: Kommutativgesetz, Assoziativgesetz, Regeln von De Morgan, Distributivgesetz. Sind $P(X_1, \ldots, X_n)$ Tautologie und $P_j(X_1, \ldots, X_k)$ $j = 1, \ldots, k$ beliebige Aussageformen, so ist $(P_1(X_1, \ldots, X_k), \ldots, P_1(X_1, \ldots, X_k))$ wieder Tautologie.
   • *Considérer: Lois commutative, associative, règles de De Morgan, lois distributive. Si $P(X_1, \ldots, X_n)$ est tautologie et $P_j(X_1, \ldots, X_k)$ $j = 1, \ldots, k$ sont des formes propositionnelles quelconques, alors $(P_1(X_1, \ldots, X_k), \ldots, P_1(X_1, \ldots, X_k))$ est de nouveau tautologie.*

2. $P(X_1, \ldots, X_n) \Leftrightarrow P(X_1, \ldots, X_n)$ Tautologie bedeutet • *tautologie sigifie*
   $P(X_1, \ldots, X_n) \equiv P(X_1, \ldots, X_n)$ (äquivalent • *équivalent*).

3. **Kontradiktion** (Widerspruch): Aussageform, die bei jeder Belegung falsch ist.
   • **Kontradiction***: Forme propositionnelle qui est fausse pour tous les poids.*

4. P impliziert Q: $P \Rightarrow Q$ ist Tautologie (immer wahre Implikation)
   • *P implique Q: $P \Rightarrow Q$ est tautologie (implication toujours vraie).*

5. $Q \Rightarrow P$ Konversion von $P \Rightarrow Q$. • *$Q \Rightarrow P$ conversion de $P \Rightarrow Q$.*

6. $\neg P \Rightarrow \neg Q$ Inversion von $P \Rightarrow Q$. • *$\neg P \Rightarrow \neg Q$ inversion de $P \Rightarrow Q$.*

7. $\neg Q \Rightarrow \neg P$ Kontraposition von $P \Rightarrow Q$. • *$\neg Q \Rightarrow \neg P$ contraposition de $P \Rightarrow Q$.*

$$(\neg Q \Rightarrow \neg P \equiv P \Rightarrow Q.)$$

2.6 Korrekter logischer Schluss – Conclusion logique correcte

$P_1, \ldots, P_n \vdash Q$ falls gilt $(P_1 \wedge \ldots \wedge P_n) \Rightarrow Q$ ist Tautologie
• *$P_1, \ldots, P_n \vdash Q$ quand $(P_1 \wedge \ldots \wedge P_n) \Rightarrow Q$ est tautologie.*

Beispiele: • **Exemples:** $A, B \vdash ((A \wedge A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$, $(A \Rightarrow B \wedge A \Rightarrow C) \vdash (A \Rightarrow C)$.

2.7 Polnische Notation – Notation polonaise

$\longrightarrow$ **Klammerlose Schreibweise** von Lukasiewics
• *Façon d'écrire* **sans parenthèses** *de Lukasiewics.*

$\wedge AB$ statt • *au lieu de* $A \wedge B$, $\vee AB$ statt • *au lieu de* $A \vee B$,
$\Rightarrow AB$ statt • *au lieu de* $A \Rightarrow B$, $\Leftrightarrow AB$ statt • *au lieu de* $A \Leftrightarrow B$, ...

Beispiele: • **Exemples:** $\Rightarrow A \Leftrightarrow \neg B \vee AC$ statt • *au lieu de* $A \Rightarrow ((\neg B) \Leftrightarrow (A \vee C))$.

2.8 Quantoren – Des quantificateurs

Aussagenlogik • **Logique propositionnelle:**
Aristotelische Aussagen der Form Subjekt, Prädikat, Objekt.
• *Propositions d'après Aristote de forme sujet, verbe, objet.*

Prädikatenlogik • **Logique prédicative:**
Innere Struktur der Aussagen massgebend
• *La structure interne des propositions est essentielle.*

$\longrightarrow$ Subjektvariablen, Prädikatenvariablen. . . . , Quantifizierungen.
• *Sujets, verbes variables, . . . , quantifications.*

Allquantor • **Quantificateur universel**: $\forall$ oder • *ou* $\bigwedge$ (für alle . . . • *Pour tout les . . .*)
Existenzquantor • **Quantificateur d'existence**: $\exists$ oder • *ou* $\bigvee$ (es gibt . . . • *il existe . . .*)

Bsp.: • **Exemple:** Sei • *Soit* $M = \{x \in \mathbb{N} | x < 20\}$. $\exists_{x \in M} : \; x = 4$.

Durch „$\exists$" wird die Aussage quantifiziert. x ist gebundene Subjektvariable.
• *Par '$\exists$' la proposition est quantifiée. x est une variable de sujet liée au quantificateur.*

2.9 Aussagenlogische Normalformen – Des formes normales de la logique propositionnelle

Seien • *Soient* : $H_j, j = 1, \ldots, n+m \rightsquigarrow$ Aussagevariablen • *des variables propositionnelles.*

Konjunktionsterm • **Terme de conjonction:** $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg H_{n+1} \wedge \ldots \wedge \neg H_{n+m}$

Adjunktionsterm • **Terme d'adjonction**: $H_1 \vee H_2 \vee \ldots \vee H_n \vee \neg H_{n+1} \vee \ldots \vee \neg H_{n+m}$

Enthaltensein von Termen: Term Teil eines andern.
• **Terme contenu dans un autre:** *Terme qui est partie d'un autre.*

Konjunktive Normalform (kNF) • **Forme normale conjonctive:**
$K = A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k = \bigwedge_{j=1}^{k} A_j$
(A_j: Alternativterme, keiner im andern enthalten)
• *(A_j: Termes d'adjonction, aucun n'est contenu dans un autre.)*

Adjunktive Normalform (aNF) • **Forme normale adjonctive:** $A = K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_k = \bigvee_{j=1}^{k} K_j$
(K_j: Konjunktionsterme, keiner im andern enthalten)
• *(K_j: Termes de conjonction, aucun n'est contenu dans un autre.)*

Entartete Fälle • **Des cas de dégénérence:** $K \equiv T$, $K \equiv F$, $A \equiv T$, $A \equiv F$
($T \equiv W$: Immer wahre Aussage; F: Immer falsche Aussage)
• *($T \equiv W$: Proposition toujours vraie; F: Proposition toujours fausse.*

Einfacher Term: Aussage oder Aussagenvariable.
• **Terme simple:** *Proposition ou variable propositionnelle.*

Negationsterm: $\neg$ einfacher Term $\rightsquigarrow$ Sonst Affirmationsterm.
• **Terme de négation:** $\neg$ *terme simple.* $\rightsquigarrow$ *Si non: Terme affirmatif.*

Bsp.: • **Exemple:** $(A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge C) \rightsquigarrow$ aNF

Existenzsatz: Zu jeder Aussageform existiert eine äquivalente aNF und kNf.
• **Théorème d'existence:** • *Pour chaque forme propositionnelle, il existe une aNF et une kNF équivalente.*

Vollständige Normalform: In jedem Term kommt jede Variable genau einmal vor.
• **Forme normale complète:** *Dans chaque terme, chaque variable apparaît exactement une fois.*

Erzeugung der Vollständigkeit: Fehlende Variablen ergänzen.
• **Compléter und forme:** *Ajouter les variables qui manquent.*

Bsp.: • **Exemple:** X_k fehlt in • *manque dans* A_i

$\rightsquigarrow$ $A_i \equiv A_i \vee F \equiv A_i \vee (X_k \wedge \neg X_k) \equiv (A_i \vee X_k) \wedge (A_i \vee \neg X_k)$.
$\rightsquigarrow$ A_i vorhanden • A_i *ne manque plus.*

Geordnete vollständige Normalform • Forme normale complète ordonnée:
Ordne die Variablen nach den Nummern der Indices, stelle Negationsterme nach den Affirmationstermen.
• *Ranger les variables d'après l'index. Mettre les termes de négation à la fin.*

Eindeutigkeitssatz: • **Théorème d'univocité:** Zu jeder Aussageform existiert *genau* eine äquivalente geordnete vollständige aNF und kNf.
• *Pour chaque forme propositionnelle, il existe exactement une aNF et une kNF équivalente complète et ordonnée.*

2.10 Einige Resultate – Quelques résultats

1. Die Aussagenlogik ist **vollständig**. D.h. alle ihre wahren Sätze sind in endlichen Beweisketten darin herleitbar.
   • *La logique propositionnelle est* **complète**. *Ça veut dire que tous ses théorèmes y sont déduisibles par des suites de preuves finies.*

2. Die höhere Prädikatenlogik ist **nicht mehr** vollständig.
   • *La logique prédicative supérieure* **n'est plus** *complète.*

3. Die Aussagenlogik ist **widerspruchsfrei**.
   • *La logique propositionnelle est* **libre de contradictions**.

4. Die Aussagenlogik genügt für die Maschinenverarbeitung.
   • *La logique propositionnelle satisfait les exigences de la transformation industrielle.*

5. In der Prädikatenlogik gibt es wahre Sätze, die nicht durch Maschinenverarbeitung bewiesen werden können.
   • *Dans la logique prédicative il existent des théorèmes vrais qu'on ne peut pas prouver à l'aide de machines.*

2.11 Literatur – Littérature

http://www.hta-bi.bfh.ch/~wir/Scripts/Teil4Bool.pdf

http://www.hta-bi.bfh.ch/~wir/Scripts/Scripts.html .....
http://www.hta-bi.bfh.ch/~wir/Scripts/Teil2logikd.pdf
http://www.hta-bi.bfh.ch/~wir/Scripts/Teil2logikf.pdf

Kapitel • Chapitre 3

Mengen, Relationen, Abbildungen – Ensembles, relations et applications

http://www.hta-bi.bfh.ch/~wir/Scripts/Teil4Bool.pdf

3.1 Mengen – Ensembles

3.1.1 Definitionen – Des définitions

Menge nach Cantor: Wohldefinierte Ansammlung oder Auflistung von Objekten des Denkens (Elemente). $\rightsquigarrow$ „Naive Definition".
• **Ensemble** *d'après Cantor: Collection ou liste de choses – ou bien d'objets du monde des pensées (éléments).* $\rightsquigarrow$ " Définition naïve".

Wie kann eine **Menge angegeben** werden? Durch Aufzählung der Elemente oder durch Angabe einer charakteristischen Eigenschaft (bei unendlichen Mengen!).
• *Comment est-ce qu'on peut* **donner des ensembles***? Par énumération des éléments ou bien en donnant une qualité caractéristique (ensembles infinis!).*

3.1.2 Bildung neuer Mengen – Constructions d'ensembles nouveaux

Begriffe – Notions

- ⊘ **Grundmenge**
  • **Ensemble de base ou bien fondamental**

- ⊘ **Leere Menge** • **Ensemble vide:** $\{\ \}$, $\emptyset$

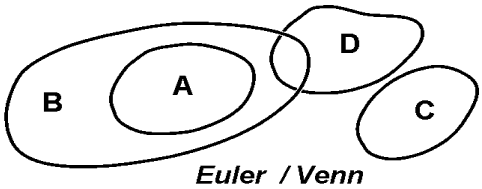
- ⊘ **Antinomien:** (Widersprüchliche Mengenbildung)
  • **Antinomies:** *(Constructions contradictoires d'ensembles)*

  Z.B. sei M Menge • *P. ex. soit M ensemble,* $R = \{M | M \in R \Leftrightarrow M \notin M\}$.
  Dabei gilt • *On sait qu'on a:* $M \notin M$,
  Denn M ist Menge, also nicht Element. • *Car M est ensemble et non élément.*
  (R: Russels Menge.) • *(R: Ensemble de Russel.)*

$\rightsquigarrow$ Bsp.: In einem Dorf ist ein Barbier, der genau alle diejenigen rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Rasiert er sich selbst?
• $\rightsquigarrow$ *Ex.: Dans un village, il y a un barbier qui rase exactement tous ceux qui ne se rasent pas eux–même. Est-ce qu'il se rase soi–même?*

⊘ **Mächtigkeit** einer Menge $|M|$: Anzahl Elemente, falls M endlich viele Elemente hat, $M = \infty$ falls M überendlich viele Elemente hat. Man unterscheidet dann verschiedene Stufen oder Typen von unendlich. Z.B. gilt: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^2| = \ldots$, vgl. Analysis–Script, Sektion „Reelle Zahlen und Folgen".
• **Puissance** *d'un ensemble $|M|$: Nombre d'éléments quand le nombre d'éléments est fini. $M = \infty$ quand le nombre d'éléments est plus grand que fini. Alors on distingue différents types ou niveaux d'infini. P.ex. il vaut: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^2| = \ldots$, voir script d'analyse, section "Nombres réels et suites".*

⊘ **Euler– (Venn–) Diagramme**
• **Diagrammes de Euler (Venn)**

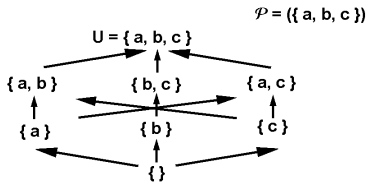


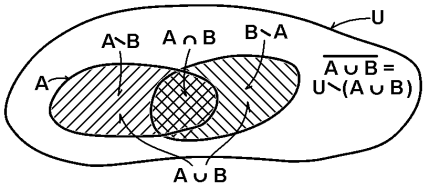
⊘ **Teilmengen, Obermengen** • **Sous–ensembles, sur–ensembles:** *(ensemble supérieur)*
$A \subseteq B$ ('=' zugelassen) • *('=' permis)* $\rightsquigarrow$ $A \subseteq B \iff \forall_{x \in A} : x \in B$
$A \subset B$ (echte Teilmenge) • *(sous–ensemble propre)* $\rightsquigarrow$ $A \subset B \iff A \subseteq B \;\wedge\; \exists_{x \in A} : x \notin B$

Gesetze • **Des lois:** $A \subseteq A$
$(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow (A \subseteq C)$
$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

⊘ **Potenzmenge** • **Ensemble de parties:**
$\mathcal{P}(M)$ = Menge aller Teilmengen von M • *Ensemble de tout les sous–ensembles de M.*

$\rightsquigarrow$ Darstellbar durch **Hasse–Diagramme** • *Représentable par les* **diagrammes de Hasse**.





3.1.3 Mengenverknüpfungen – Opérations de composition

Definitionen – Définitions

(Auf Aussagenlogik abgestützt • *Basées sur la logique propositionnelle.*)

⊘ **Vereinigungen von Mengen** • **Réunion d'ensembles:**
$A \cup B = \{x \in G \mid x \in A \vee x \in B\}$, G Grundmenge • *G ensemble de base*

⊘ **Schnitt von Mengen** • **Intersection d'ensembles:**
$A \cap B = \{x \in G \mid x \in A \wedge x \in B\}$

⊘ A, B **disjunkt** • **disjoint:** $\Leftrightarrow A \cap B = \{\ \}$

- ⊘ **Relatives Komplement, Differenz** • **complément relatif, différence:** $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$
- ⊘ **Absolutes Komplement** • **complément absolu:** $\bar{A} = \{x \in G \mid x \notin A\}$
- ⊘ **Symmetrische Differenz** • **Différence symétrique:** $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Einige Gesetze • **Quelques lois:** ($\rightsquigarrow$ Skizze machen! • *Faire une esquisse!*)

- ⊘ **Idempotenz** • **Idempotence:** $A \cup A = A, \;\; A \cap A = A$
- ⊘ **Assoziativität** • **Associativité:** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \;\; (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- ⊘ **Kommutativität** • **Commutativité:** $A \cup B = B \cup A, \;\; A \cap B = B \cap A$
- ⊘ **Distributivität** • **Distributivité:** $A \cup (B \cap C) = ((A \cup B) \cap (A \cup C)),$
  $A \cap (B \cup C) = ((A \cap B) \cup (A \cap C))$
- ⊘ **Identität** • **Identité:** $A \cup \{\} = A, \;\; A \cap \{\} = \{\}, \;\; A \cup G = G, \;\; A \cap G = A$
- ⊘ **Komplement** • **Complément:** $\bar{A} \cup A = G, \;\; A \cap \bar{A} = \{\}, \;\; \overline{\{\}} = G, \;\; \bar{G} = \{\}$
- ⊘ **De Morgan:** $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \;\; \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
- ⊘ **Mächtigkeit** • **Puissance:** $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$
  $|A \cup B| = |A| + |B|$, falls A, B disjunkt • *si A, B disjoint.*
- ⊘ $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|} \rightsquigarrow$ Vgl. Kombinatorik. • *Voir analyse combinatoire.*

Problem: • **Problème:**
Wo gibt es mehr Punkte: Auf einer Geraden oder in einem Kreis? Was bleibt noch von der reellen Zahlengerade, wenn man die natürlichen Zahlen wegnimmt? ... Theorie der transfiniten Kartinalzahlen oder Mächtgkeiten!
• *Où est–ce qu'il y a plus de points: Sur une droite ou dans un cercle? Qu'est-ce qui reste encore de la droite des nombres réelles, si on enlève les nombres naturels? ... Théorie des nombres cardinaux transfinis resp. des puissances*

3.2 Relationen – Relations

3.2.1 Definitionen – Définitions

Geordnete Paare Reihenfolge wesentlich. • **Paires ordonnées** *L'ordre est essentiel.*:

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Konsequenz: • **Conséquence:** $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow (a = c \wedge b = d)$

Produktemenge von A, B • **L'ensemble produit de** A, B**:**
$A \times B = \{$geordnete Paare • *paires ordonnées*$\} = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$

Es gilt: • *Il vaut:* $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
$\rightsquigarrow$ $A \times A = A^2, \;\; |A \times B| = |A| \cdot |B|,$ allgemein • *généralement* $A \times B \neq B \times A$

Verallgemeinerung • **généralisation** $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n := (A_1 \times \ldots \times A_{n-1}) \times A_n)$

Bsp.: • **Exemple:** $n = 3$: $A \times B \times C = (A \times B) \times C) = \{\{a, b\}\{\{a, b\}, c\}\}$
(1. Element $\{a, b\}$ schon Paar. • *1er élément* $\{a, b\}$ *déjà une paire.*

Wahrheitsmengen • Des ensembles de vérité:

Sei $P = P(X_1, \ldots, X_n)$ Aussageform • *Soit* $P = P(X_1, \ldots, X_n)$ *forme propositionnelle,*

$$U = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\}$$

$(0,\ 1 \rightsquigarrow$ Wahrheitswerte, n Faktoren) • *(*$0,\ 1 \rightsquigarrow$ *valeurs de vérité, n facteurs),*

$$\tau(P) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in U | P \text{ wahr für die Belegung } \bullet \textit{ vrai pour les poids } (x_1, \ldots, x_n)\}$$

$$\rightsquigarrow \qquad \tau(P_1 \wedge P_2) = \tau(P_1) \cap \tau(P_2), \quad \tau(P_1 \vee P_2) = \tau(P_1) \cup \tau(P_2), \quad \tau(\neg P) = \overline{\tau(P)} \text{ etc..}$$

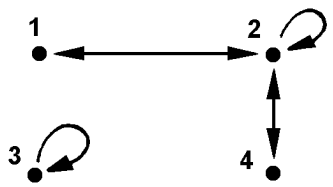
Zweistellige Relation $\mathcal{R}$ • Relation à deux places $\mathcal{R}$:

Teilmenge • *Sous–ensemble* $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ (Paarmenge) • *(ensemble de paires)*

Symbol: • **Symbole:** $a \smile b \Leftrightarrow (a,b) \in \mathcal{R} \subseteq A \times B, \qquad a \not\smile b \Leftrightarrow (a,b) \notin \mathcal{R},\ (a,b) \in A\bar{\mathcal{R}}$

Bsp.: • **Exemple:** $\mathcal{R} = \{(1,2),(2,2),(2,4),(2,1),(3,3),(4,2)\} \in \{1,2,3,4\}^2.$

$\rightsquigarrow$ Darstellung durch **Pfeildiagramme**
• *Représenter par des diagrammes aux* **flèches**



Achtung • Attention:

$(3,3)$ ist isoliert • $(3,3)$ *est isolé*

Bemerkung: • **Remarque:** Zur Bildung einer Teilmenge muss natürlich das Bildungsgesetz bekannt sein.
• *Pour pouvoir former un sous–ensemble, il faut connaître la loi nécessaire.*

3.2.2 Spezielle Relationen – Relations spéciales

Die nachfolgenden Relationen sind durch die angegebenen logischen Aussagen definiert, die als wahr angenommen werden:
• *Les relations suivantes sont définies par les propositions logiques données qui sont considérées comme propositions vraies:*

- ⊘ **Identitäts– oder Diagonalrelation:** • **Relation diagonale:** $\mathcal{R} = \triangle_A = \{(a,a) \mid a \in A\}$
- ⊘ **Inverse Relation:** • **Relation inverse:** $\mathcal{R}^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in \mathcal{R}\} \rightsquigarrow \quad |\mathcal{R}^{-1}| = |\mathcal{R}|$
- ⊘ **Involution:** • **Involution:** $f = f^{-1},\ f \neq \triangle$.
- ⊘ **Reflexive Relation:** • **Relation réflexive:**
  $\triangle_A \subseteq \mathcal{R}, \qquad \mathcal{R}$ reflexiv • *réflexive* $\Leftrightarrow \forall_{a \in A} : (a,a) \in \mathcal{R} \subseteq A^2$
- ⊘ **Antireflexive Relation:** • **Relation antiréflexive:** $\forall_{a \in A} : (a,a) \notin \mathcal{R}$
- ⊘ **Symmetrische Relation:** • **Relation symétrique:** $\forall_{(a,b) \in \mathcal{R}} : (a,b) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b,a) \in \mathcal{R}$

⊘ **Streng antisymmetrische Relation:** • **Relation antisymétrique stricte:**
$\forall_{(a,b)\in\mathcal{R}} : (a,b) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b,a) \notin \mathcal{R}$

⊘ **Milde antisymmetrische Relation:** • **Relation antisymétrique non stricte:**
$\forall_{(a,b)\in\mathcal{R}} : (a,b) \in \mathcal{R} \ \wedge \ (b,a) \in \mathcal{R} \Rightarrow a = b$

⊘ **Asymmetrische Relation:** • **Relation asymétrique:** $\forall_{(a,b)\in\mathcal{R}} : (a,b) \in \mathcal{R} \ \dot{\vee} \ (b,a) \in \mathcal{R}$

⊘ **Transitive Relation:** • **Relation transitive:** $\forall_{(a,b)\in\mathcal{R}} : ((a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,c) \in \mathcal{R}) \Rightarrow (a,c) \in \mathcal{R}$

⊘ **Äquivalenzrelation:** • **Relation d'équivalence:**
Reflexiv, symmetrisch und transitiv. • *Réflexive, symétrique et transitive.*

$\rightsquigarrow$ Führt zu Klasseneinteilung: **Äquivalenzklassen**
• *Mène à un classement, une classification:* **classes d' équivalence**.

⊘ **Totale Relation:** • **Relation totale:** $\forall_{(a,b)\in\mathcal{R}} : ((a,b) \in \mathcal{R} \ \vee \ (b,a) \in \mathcal{R})$

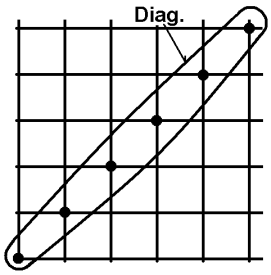
⊘ **Teilordnungsrelation:** • **Relation d'ordre partielle:**
Reflexiv, antisymmetrisch und transitiv. • *Réflexive, antisymétrique et transitive.*

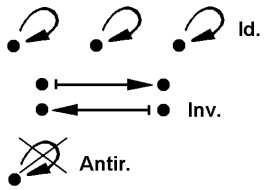
⊘ **Ordnungsrelation (mild):** • **Relation d'ordre (non stricte):**
Reflexiv, antisymmetrisch, transitiv und total. • *Réflexive, antisymétrique, transitive et totale.*

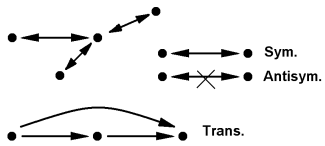
⊘ **Strikte Halbordnung:** • **Relation d'ordre partielle de façon stricte:**
Asymmetrisch und transitiv. • *Asymétrique et transitive.*

⊘ **Strenge Ordnungsrelation:** • **Relation d'ordre stricte:**
Antireflexiv, streng antisymmetrisch und transitiv. • *Antiréflexive, strictement antisymétrique et transitive.*

⊘ **Lexikographische Ordnung:** • **Relation d'ordre lexicographique:**
Nach dem Ordnungsprinzip des Alphabeths. • *D'après le principe de l'alphabet.*







Man sieht sofort: • *On voit tout de suite:*

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$\mathcal{R}$ streng antisymmetrisch und total
• $\mathcal{R}$ *strictement antisymétrique et totale*

Beh.: • **Thè.:**

$\mathcal{R}$ asymmetrisch • $\mathcal{R}$ *asymétrique*

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$\mathcal{R}$ Teilordnung auf M
• $\mathcal{R}$ *relation d'ordre partielle sur* M
$SR = \{(x,y) \in M \times M \mid ((x,y) \in \mathcal{R}) \ \wedge \ (x \neq y)\}$

Beh.: • **Thè.:**

SR ist strikte Teilordnung (Halbordnung)
• SR *est relation d'ordre partielle de façon stricte*

Beweis: • **Preuve:**

$\mathcal{R}$ Teilordnung • $\mathcal{R}$ *ordre partiel* $\rightsquigarrow$ SR antisymmetrisch • SR *antisymétrique*

Problem: SR strikt? D.h. SR asymmetrisch, transitiv? • *Problème:* SR *stricte? Ç.v.d.* SR *asymétrique, transitive?*

Nach Definition von SR: • *D'après la définition de* SR*:*

$SR = \{(x,y) \in M \times M \mid ((x,y) \in \mathcal{R}) \wedge (x \neq y)\} \rightsquigarrow ((x,y) \in SR \wedge (y,z) \in SR) \Rightarrow ((x \neq y) \wedge (y \neq z))$

$\rightsquigarrow$ Problem: • *Problème:* $(x \neq z)$? ($\rightsquigarrow$ $(x,z) \in SR$?)

Sei • *Soit* $x = z \rightsquigarrow (SR \ni (x,y) = (z,y)) \ \wedge \ (SR \ni (y,z) = (y,x))$
$\Rightarrow ((x,y) \in SR \subseteq \mathcal{R}^2 \ \wedge \ (y,x) \in SR \subseteq \mathcal{R}^2) \Rightarrow x = y \Rightarrow y = x = z \Rightarrow ((x,y) \notin SR \ \wedge \ (y,z) \notin SR)$
$\rightsquigarrow$ Widerspruch! • *Contradiction!* ☺

3.2.3 Partitionen – Partitions

Partition P_M einer Menge M: $\rightsquigarrow$ Menge, Aufteilung von M in paarweise disjunkte Teilmengen:

• **Partition P_M d'un ensemble M** $\rightsquigarrow$ *Ensemble, partage, subdivision de* M *en sous-ensembles disjoints*:

$$P_M = \{A_1, \ldots, A_n\}, \quad A_i \cup A_j = \{\} \ (i \neq j), \quad A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = M.$$

Durch eine Partition wird eine Menge vollständig in disjunkte Teilmengen oder **Klassen von äquivalenten Elementen** unterteilt: **Die Äquivalenzklassen**.
• *Une partition partage un ensemble complètement en sous–ensembles disjoints respectivement en classes d'éléments équivalentes.* **Les classes d'équivalence**.

Definition: • **Définition:** x **äquivalent** • **équivalent** a_i:
$x \sim a_i :\Leftrightarrow \{x \in A_i \wedge a_i \in A_i\}$

Andererseits ist durch eine Partition immer eine Äquivalenzrelation gegeben.
• *D'autre part par une partition on a toujours une relation d'équivalence*:

$$A_i = \{x \in M | x \sim a_i \wedge a_i \in M fix\}$$

Achtung: Partition nicht verwechseln mit Potenzmenge
• **Attention:** *Ne pas confondre la partition avec l'ensemble de parties.*
Es gilt • *On trouve*: $|P_M| \leq |M|$.

Sei P_M die zur Äquivalenzrelation $\mathcal{R}$ ($\mathcal{R} \subseteq M^2$) gehörige Partition.
• *Soit P_M la partition qui correspond à la relation d'équivalenc $\mathcal{R}$ ($\subseteq M^2$).*

P_M heisst dann auch **Quotientenmenge** von M nach $\mathcal{R}$: $P_M := {}^{M}/_{R}$
• *On appelle P_M aussi* **ensemble quotient** *de M d'après $\mathcal{R}$: $P_M := {}^{M}/_{R}$.*

3.3 Abbildungen und Funktionen – Applications et fonctions

3.3.1 Definitionen – Définitions

Linkstotale Relation • **Relation totale à gauche:**

$\mathcal{R} \subseteq D \times M$ **linkstotal:** • **totale à gauche***:* $\Leftrightarrow$ $\forall_{a \in D} \exists_{b \in M} : (a, b) \in \mathcal{R} := A$

$\mathcal{R} = A$ heisst dann **Abbildung**, a heisst **Urbild**, b heisst **Bild**.
• $\mathcal{R} = A$ *s'appelle* **application***, a s'appelle* **départ** *(original), b s'appelle* **arrivé** *(but).*

D ist der **Definitionsbereich (Urbildbereich)** • *D est la* **domaine de définition**,
M ist der **Wertevorrat** • *M est la* **réserve de valeurs**,

$W = \{b \in M | \exists_{a \in D} : (a, b) \in A\} \rightsquigarrow$ **Wertebereich (Bildbereich)** • **domaine de valeurs**,

Symbol: • **Symbole:** $a \mapsto b$ für • *pour* $(a, b) \in A$.

Umkehrabbildung • **Application inverse:** $A^{-1} = \{(b, a) | (a, b) \in A\}$

Funktion • **Fonction:** Rechtseindeutige Abbildung • *application univoque à droite.*

(D. h. • *ç. v. d.*: $(a, b_1) \in A \wedge (a, b_2) \in A \Rightarrow b_1 = b_2$).

Ein Urbild hat also immer nur ein einziges Bild, niemals zwei verschiedene Bilder.
• *Un élément du domaine de définition n' a jamais plus qu'une image, jamais deux images.*

Symbol: • **Symbole:**
Sei die Abbildung $A = F$ Funktion • *L'application $A = F$ soit fonction.*
$\rightsquigarrow$ Für $(x, y \in F = A$ schreiben wir: • *pour $(x, y \in F = A$ on écrit:*

$$f : x \mapsto y = f(x) \text{ oder } \bullet \textit{ ou bien } a \xmapsto{f} b = f(a).$$

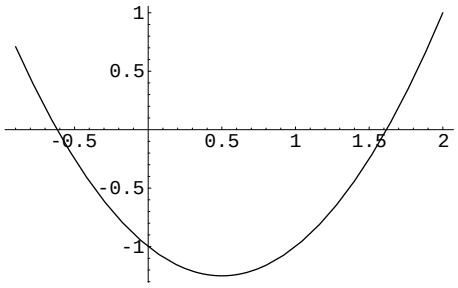
(f nennen wir kurz 'Funktion' • *f s'appelle brièvement 'fonction'.*)

Achtung F ist Relationsmenge. F^{-1} muss nicht wieder Funktion sein.
• **Attention:** *F est relation, ç. v. d. ensemble. F^{-1} n'est pas forcément fonction.*

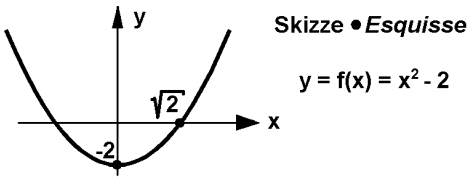
Seien • *Soient* $D_f \subseteq \mathbb{R}, M \subseteq \mathbb{R}$ (resp. • *resp.* $W_f \subseteq \mathbb{R}$),
Sei f Funktion oder Funktionsvorschrift
• *Soit f fonction ou prescription de trouver les images.*
$\rightsquigarrow$ $\{(x,y)|x \in D_f, y = f(x) \in W_f\}$ darstellbar in einem passenden Koordinatensystem
• $\{(x,y)|x \in D_f, y = f(x) \in W_f\}$ *représentable dans un système de coordonnés convenable.*

Bsp.: • **Exemple:**

$f : x \longmapsto y = f(x) = x^2 - x - 1,$
$D_f = \mathbb{R},\ W_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1.25\}$



Die Menge der so gegebenen "geometrischen„ Punkte in einer solchen Darstellung nennen wir den **Graphen**.
• *Nous appellons l'ensemble de points (vu de façon "géométriques") dans une telle représentation le* **graphe**.



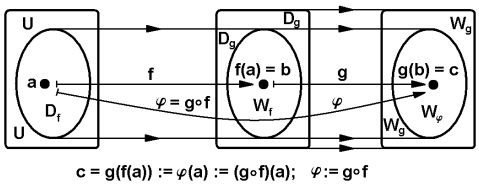
x	....	-3	-2	-1	0	-1	2	3	....
y = f(x)	....	7	2	-1	-2	-1	2	7	....

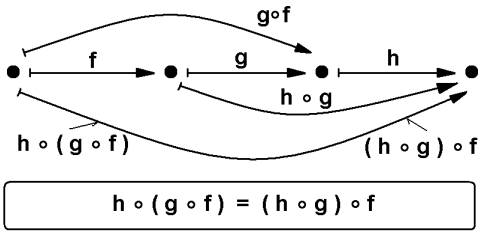
Graphen skizziert man schnell mit Hilfe von **Wertetabellen** • *On se fait vite une esquisse d'un graphe à l'aide d'un* **tableau de valeurs** ....

3.3.2 Verketten, hintereinanderschalten von Funktionen – Composition de fonctions (produit de relation)

Verketten, Bijektion – Composition, bijection

Betrachte • *Considérer*:





B ist das Bild der Restriktion von g auf W_f. • *B est l'image de la restriction de g sur W_f.*

$$g(b) = c = g(f(a))$$

$\rightsquigarrow$ Neue Funktion φ definierbar • *On peut définir une nouvelle fonction Fi*:

$\varphi(a) := c = g(f(a))$ **(Verkettung)** • **(Composition)**, $\varphi(a) := (g \circ f)(a)$.

$\rightsquigarrow$ Name der Fkt. • *Nom de la fct.:* $(g \circ f)$

Hinweis: Wir verwenden hier die „Nach–Links–Schreibweise“ $(g \circ f)(a)$ analog zu $g(f(a))$. Dagegen ist in der Literatur auch die „Nach–Rechts–Schreibweise“ $(f \circ g)(a) = g(f(a))$ in Gebrauch, die sich an die oft von links nach rechts gezeichneten Pfeile in Diagrammen anlehnt. Es spielt keine Rolle, welche Schriebweise man wählt. Man darf die beiden Varianten nur nicht mischen.
• **Indication:** *Ici nous utilisons la façon d'écrire "de droite à gauche"* $(g \circ f)(a)$ *par rapport à* $g(f(a))$. *Par contre dans la literature on utilise aussi la façon d'écrire "de gauche à droite"* $(f \circ g)(a) = g(f(a))$ *inspirée par les flèches dans les graphiques qui sont souvent dessinées de gauche à droite. Il ne joue pas de rôle quelle façon d'écrire on choisit. Seulement il faut jamais mélanger les deux variantes.*

Es ist • *On a:*
$w = h(z), \;\; z = g(y), \;\; y = f(z)$
$w = h(z) = h(g(y)) = h(g(f(x))) = (h(g \circ f)(x)) = (h \circ g)(f(x))$.
Daraus folgt die **Assoziativität von Abbildungen** • *On en déduit* **l'associativité** *d'applications.*

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

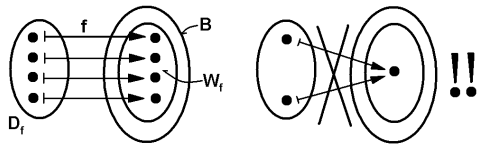
$W_f \subseteq D_g, \;\; W_g \subseteq D_h$

Beh.: • **Thè.:**

$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

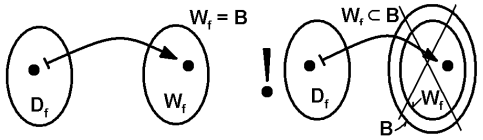
Definitionen: • **Définitions:**

⊘ f **injektiv** • f **injective**:
$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$



⊘ f **surjektiv auf** M • f **surjective sur** M:

$f(D_f) = W_f = M$



Wichtig: • **Important:**
Surjektiv braucht man für die Definition der Umkehrabbildung f^{-1} auf M! • *On utilise surjectif pour définir l'application inverse* f^{-1} *sur* M*!*

⊘ f **bijektiv** • f **bijective** : f injektiv und surjektiv (ein–eindeutig)
• *injective et surjective (bi–univoque).*

Wichtig: • **Important:** $\Rightarrow$ Bijektiv garantiert, dass f^{-1} wieder Funktion ist. • *Bijectif fait que* f^{-1} *est de nouveau une fonction.*

Bemerkung: • **Remarque:**

Injektiv auf W_f bedeutet bijektiv. • *Injectif sur* W_f *signifie bijectif.*

Eigenschaften • **Qualités**

1. $f^{-1} \circ f \equiv \triangle_{D_f}$, $f \circ^{-1} \equiv \triangle_{W_f}$
   (Identitäts– oder $\triangle$–Relation.)
   • *(Relation d'identité ou rel. $\triangle$).*
2. $\triangle_{W_f} \circ f \equiv f \equiv f \circ \triangle_{D_f}$
3. $(f^{-1})^{-1} \equiv f$
4. f, g bij. $\Rightarrow \triangle_{W_f} \circ g \equiv g \equiv g \circ \triangle_{D_f}$
5. Allgemein ist • *Généralement on trouve*: $f \circ g \not\equiv g \circ f$
   Es gibt Ausnahmen! • *Il y a des exceptions* !
6. $f : A \longmapsto B \wedge f : A \longmapsto B \wedge g \circ f \equiv \triangle_A \wedge f \circ g \equiv \triangle_B$
   $\Rightarrow f$, f^{-1} existieren • *existent*, $f^{-1} \equiv g$, $g^{-1} \equiv f$

Gleichmächtige Mengen – Ensembles de même puissance

Jetzt können wir neu genauer definieren: • *Maintenant, nous pouvons définir plus précisément:*

Definition: • **Définition:**

$$|A| = |B| \;\Leftrightarrow \exists_{(f\ bij.)} : \; A \overset{f}{\longmapsto} B$$

$$|A| < |B| \;\Leftrightarrow \exists_{(f\ surj.) \wedge (f\ \neg bij.)} : \; A \overset{f}{\longmapsto} B$$

Konsequenz: • **Conséquence:**

$|A| = |B| \;\Rightarrow\; \exists_{Relation\ R} : \; R = \{(a,b) \mid (a \in A) \;\wedge\; (b \in B)\} \subseteq A \times B$ mit • *avec*
$(\forall_{a \in A}\ \exists^{!}_{b \in B} : \; (a,b) \in R) \;\wedge\; (\forall_{b \in B}\ \exists^{!}_{a \in A} : \; (a,b) \in R)$

($\exists^{!} \equiv$ „Es gibt genau ein Element ...“) • *($\exists^{!} \equiv$ "Il existe exactement un élément ...")*

Bemerkung: • **Remarque:**

Bei dieser Definition wird $\mathbb{N}$ nicht benutzt. Die Zahlen $\in \mathbb{N}$ können aber jetzt, gestützt auf diese Definition, umgekehrt als Mächtigkeiten (Kardinalzahlen) von endlichen Mengen gewonnen werden. Ebenso werden mit dieser Definition unendlichen Mengen vergleichbar.
• *À cette définition, nous n'utilisons pas $\mathbb{N}$. D'autre part, les nombres $\in \mathbb{N}$ peuvent être définis comme puissances d'ensembles finis (nombres cardinaux) à l'aide de cette définition. Également, nous pouvons comparer des ensembles infinies, basé sur cette définition.*

3.4 Lösungsmengen — Ensembles de solution

Sei $\mathbb{L}$ = Menge der Lösungen einer Gleichung oder eines Gleichungssystems S: ($\mathbb{L}$ = **Lösungsmenge, Erfüllbarkeitsmenge**, G = **Grundmenge** oder **Definitionsmenge**). Dann sagen wir:
• *Soit $\mathbb{L}$ = ensemble de solution resp. des solutions d'une équation resp. d'un système d'équations S: ($\mathbb{L}$ =* **ensemble de solution**, *G =* **ensemble de base** *ou de* **définition**). *Alors nous disons:*

Begriffe: • **Notions:**

1. $\mathbb{L} \neq \{\} \rightsquigarrow$ S heisst **erfüllbar**. • *S s'appelle* **réalisable**.
2. $\mathbb{L} = \{\} \rightsquigarrow$ S heisst **nicht erfüllbar**. • *S s'appelle* **non réalisable**.

3. $\mathbb{L} = G \rightsquigarrow S$ heisst **allgemeingültig**. • S *s'appelle* **universel**.
4. $\mathbb{L}(S) =$ Erfüllbarkeitsmenge von S. • $\mathbb{L}(S) =$ *ensemble de solution de* S.
5. $G(S) =$ Grundmenge für S. • $G(S) =$ *ensemble universel de* S.
6. $(S_1 \Leftrightarrow S_2) :\Leftrightarrow [G(S_1) = G(S_2) \wedge \mathbb{L}(S_1) = \mathbb{L}(S_2)]$

Regeln: • **Règles:**

1. $\mathbb{L}(S_1 \wedge S_2) = \mathbb{L}(S_1) \cap \mathbb{L}(S_2)$
2. $\mathbb{L}(S_1 \vee S_2) = \mathbb{L}(S_1) \cup \mathbb{L}(S_2)$
3. $\mathbb{L}(\neg S) = G \setminus \mathbb{L}(S)$

Kapitel • Chapitre 4

Zahlen, Induktion, Rekursion – Nombres, induction, récursion

($\mathbb{N}$, Induktion, Rekursion Zahlenaufbau, alg. Strukturen)
• *($\mathbb{N}$, induction, récursion, construction de nombres, structures algébriques)*

4.1 Natürliche Zahlen N – Nombres naturels N

4.1.1 Axiomatische Einführung – construction axiomatique

Bemerkung: Die natürlichen Zahlen kann man als Kardinalzahlen oder Mächtigkeiten endlicher Mengen gewinnen. Eine natürliche Zahl wäre dann als eine Äquivalenzklasse gleichmächtiger Mengen zu definieren. Ein Modell davon kann man durch das Axiomensystem von Peano gewinnen. In unserem Rahmen ist es sinnvoller, sich diesem Modell direkt zuzuwenden.
• **Remarque:** *On peut gagner les nombres naturels comme nombres cardinaux ou puissances d'ensembles finis. Un nombre naturel serait donc définie comme une classe d'équivalence dd'ensembles de même puissance. Quant à cela, on peut arriver à un modèle par le système des axiomes de Peano. Dans notre cadre, il est plus raisonnable de s'occupper directement de ce modèle.*

Bsp.: • **Exemple:** ($\mathbb{N}$ als Kartinalzahlen gewinnen) • *(Gagner $\mathbb{N}$ comme nombres cardinaux)*
$\rightsquigarrow$ $|\{\}| := 0,\ |\{0\}| := 1,\ |\{0,1\}| := 2,\ |\{0,1,2\}| := 3,\ \ldots \rightsquigarrow\ 0 \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,\ldots\},\ \mathbb{N} = \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}$

$\rightsquigarrow$ $1 = |\{0\}| = |\{a\}| = |\{b\}| = |\{c\}| = |\{\bullet\}| = |\{\dagger\}| = |\{\ddagger\}| = |\{\amalg\}| = |\{X\}| = |\{\clubsuit\}| = |\{\spadesuit\}| = \ldots\ldots$
Wir wollen hier aber anders vorgehen: • *Ici, nous allons procéder differemment:*

$\mathbb{N}$ aus wenigen klaren Grundregeln ableiten $\rightsquigarrow$ $\mathbb{N}$ widerspruchsfrei? Zahlen 'sicher'?
• *Déduire $\mathbb{N}$ d'un petit ensemble de règles fondamentales et claires* $\rightsquigarrow$ *$\mathbb{N}$ libre de contradictions? Sûreté?*

Bekannt sind **Axiomensysteme** von Peano, Schmidt ... • *On connaît des* **systèmes d'axiomes** *de Peano, Schmidt, ...* Wir verwenden **Peano** • *Nous utilisons* **Peano**:

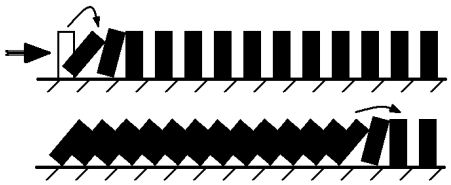
P I. $\mathbb{N}$ enthält mindestens „ein" Element • $\mathbb{N}$ *contient au moins "un" élément*: $\exists_{El.1} : 1 \in \mathbb{N} \rightsquigarrow \mathbb{N} \notin \{\}$

P II. Jedes Element n hat einen Nachfolger n^* • *Chaque élément n a un successeur n^**:
($\forall_{n\in\mathbb{N}} \exists_{n^*\in\mathbb{N}}$: $n \longmapsto n^*$ eindeutig • *univoque*) $\rightsquigarrow$ Nicht • *Ne pas* $\nearrow\!\!\!\!\searrow$

P III. Kein Nachfolger ist 1 • *Aucun successeur n'est* 1: $\forall_{n\in\mathbb{N}} : n^* \neq 1$

P IV. Verschiedene Elemente haben verschiedene Nachfolger • *Des éléments différents ont des successeurs différents*: $\forall_{n,m\in\mathbb{N}} : n^* = m^* \Rightarrow n = m$ $\rightsquigarrow$ Nicht • *Ne pas* $\searrow\nearrow$

P V. **Induktionsaxiom • Axiome d'induction**
(Sei • *Soit* ($\rightsquigarrow$ $\exists$) $K \subseteq \mathbb{N}$: $1 \in K \wedge (k \in K \Rightarrow k^* \in K)) \Rightarrow K = \mathbb{N}$



Darauf baut das Prinzip der vollständigen Induktion
• *La–dessus est basé le principe de l'induction complète.*

4.1.2 Operationen auf N – Opérations sur N

Operationen auf $\mathbb{N}$ müssen erst definiert werden, • *D'abord on doit définir les opérations sur* $\mathbb{N}$. $(+, \cdot, \ldots)$

Definition: • Définition: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ resp. • *resp.* $(n, m) \longmapsto k := n + m$
$\rightsquigarrow$ $''+''$ mit • *avec*

1 $\forall_{n\in\mathbb{N}} : n + 1 := n^*$

2 $\forall_{n,m\in\mathbb{N}} : n + m^* := (n + m)^*$

Damit ist die Nachfolge geregelt.
• *Ainsi on a réglé la succession.*

$\rightsquigarrow$ **Schreibweisen • Façons d' écrire:**

$$1^* := 2, 2^* := 3, 3^* := 4, \ldots$$

Regeln: • Règles:

⊘ Abgeschlossenheit von $''+''$ • *Fermé par rapport à* $''+''$:
$\forall_{n,m\in\mathbb{N}} : n + m \in \mathbb{N}$

⊘ Kommutativität • *Commutativité*:
$\forall_{n,m\in\mathbb{N}} : n + m = m + n$
$\rightsquigarrow$ $(n, m) \longmapsto (n + m)$ nicht injektiv • *non injectif*

⊘ Assoziativität • *Associativité*:
$\forall_{n,m,k\in\mathbb{N}} : (n + m) + k = n + (m + k)$

⊘ Integrität (Kürzungsregel) • *Règle de simplification*:
$\forall_{n,m\in\mathbb{N}} : n + k = m + k \Rightarrow n = m$

Konsequenz: • Conséquence:
$(\mathbb{N}, +)$ ist kommutative Halbgruppe (abgeschlossen und assoziativ)
• *est demi–groupe commutatif (fermé et associatif)*

Definition: • Définition: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ resp. • *resp.* $(n, m) \longmapsto k := n \cdot m$ mit • *avec*
$\rightsquigarrow$ $''\cdot''$

1 $\forall_{n\in\mathbb{N}} : 1 \cdot n := n$

2 $\forall_{n,m\in\mathbb{N}} : n \cdot m^* := (n \cdot m) + n$

Damit ist wieder die Nachfolge geregelt.
• *Ainsi on à réglé de nouveau la succession.*

Regeln: • **Règles:**

⊘ Abgeschlossenheit von $''\cdot''$ • *Fermé par rapport à* $''\cdot''$:
$\forall_{n,m\in\mathbb{N}} : n \cdot m \in \mathbb{N}$

⊘ Kommutativität • *Commutativité*: $\forall_{n,m\in\mathbb{N}} : n \cdot m = m \cdot n$
$\rightsquigarrow$ $(n, m) \longmapsto (n \cdot m)$ nicht injektiv • *non injectif*

⊘ Assoziativität • *Associativité*: $\forall_{n,m,k\in\mathbb{N}} : (n \cdot m) \cdot k = n \cdot (m \cdot k)$

⊘ Integrität (Kürzungsregel) • *Règle de simplification*:
$\forall_{n,m\in\mathbb{N}} : n \cdot k = m \cdot k \Rightarrow n = m$

$\rightsquigarrow$ $(\mathbb{N}, +)$ ist kommutative Halbgruppe (abgeschl. und assoziativ).
• *$(\mathbb{N}, +)$ est demi–groupe commutatif (fermé et associatif).*

Verbindung zwischen Addition und Multiplikation:
• Rapport (liaison) entre addition et multiplication:

⊘ Distributivgesetz • *Loi distributive*: $\forall_{n,m,k\in\mathbb{N}} : n \cdot (m + k) = n \cdot m + n \cdot k$

Bemerkung: • **Remarque:**

⊘ $''+''$, $''\cdot'' : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ linkstotal und rechtseindeutig
• *total à gauche et univoque à droite*
$\rightsquigarrow$ Funktion • *Fonction*!

⊘ $(\mathbb{N}, \cdot)$ ist kommutative Halbgruppe mit 1–Element
• *$(\mathbb{N}, \cdot)$ est demi–groupe commutatif avec élément unité* 1.

4.1.3 Vollständige Induktion – Induction complète

Das Prinzip – Le principe

Wichtig: • **Important:**

⊘ Abgrenzung vom **Induktionsprinzip in den Naturwissenschaften** als „empirisches Schlussprinzip “: Schluss vom Besonderen, der einzelnen Messung zum allgemeinen Gesetz. Nach Descartes vernünftiges Prinzip, legitimiert durch die Erfahrung. Man soll immer die einfachste Interpretation (d.h. das einfachste Modell) zum Gesetz erheben, solange nicht genauere Messungen ein komplizierteres Gesetz verlangen.
• *Remarquer la différence par rapport au* **principe de l'induction dans les sciences naturelles** *comme principe de conclusion d'expérience. D'après Descartes un principe raisonnable, légalisé par l'expérience. Il faut toujours ériger en loi générale l'interprétation la plus simple, aussi longtemps que des résultats plus exacts ne demandent pas une loi plus compliquée.*

⊘ Vollständige Induktion in der Mathematik dagegen ist Deduktion (vom Allgemeinen zum Besonderen), gestützt auf das Induktionsaxiom von Peano.
• *Par contre l'induction complète en mathématiques est une déduction, fondée sur l'axiome d'induction de Peano. (Du général au particulier.)*

⊘ **Bsp.:** • **Exemp.:** Sein $A(m)$ eine Aussage in Funktion von $m \in \mathbb{N}$.
• *Soit $A(m)$ une proposition en fonction de $m \in \mathbb{N}$.*

Zu zeigen • *A montrer*:
$A(m)$ wahr • *vrai* $\forall_{m\in\mathbb{N}} : (|\mathbb{N}| = \infty)$!

$\boxed{(1)}$ Zeige • *Montrer* (**Verankerung**) • *Montrer (***'ancrer'***):*
$A(1)$ wahr resp. $A(k)$ wahr für ein erstes $k \in \mathbb{N}$
• $A(1)$ *vrai resp.* $A(k)$ *vrai pour un premier* $k \in \mathbb{N}$.

$\boxed{(2)}$ (**Vererbung, Induktionsschritt, Induktionsschluss**
• **'Conclusion de l'induction'**):
Sei • *Soit* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$ beliebig • *quelconque.*
Zeige : $A(n)$ wahr • *Montrer:* $A(n)$ *vrai*
(Induktionsvoraussetzung • *Hypothèse de l'induction*)
$\Rightarrow$ $A(n+1) = A(n*)$ wahr • *vrai*
(Induktionsbehauptung • *Thèse de l'induction*)
($\rightsquigarrow$ Wahrer logischer Schluss, Tautologie • *Conclusion logique vraie, tautologie.*

$\boxed{(3)}$ Nach dem Induktionsaxiom ist dann
• *D'après l'axiome de l'induction il est*:
$$\{m \in \mathbb{N}, m \geq k \mid A(m)\text{wahr} \bullet \textit{vrai}\} = \mathbb{N}$$
$\rightsquigarrow$ $\forall_{m\in\mathbb{N}, m\geq k}$: $A(m)$ wahr • $A(m)$ *vrai.*

Beispiel (Paradigma) zum Prinzip der vollständigen Induktion – Exemple pour le principe de l'induction complète

Beh.: • Thè.:
$$\forall_{m\in\mathbb{N}} : \sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

Verankerung • Ancrer: $m = 1$ $\sum_{k=1}^{m} k^2 = 1^2 = 1 \stackrel{?}{=} \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$ $\surd$

Vererbung • Conclusion de l'induction:

Induktionsvoraussetzung • Hypothèse de l'induction:

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
(wahr für $m = n$ • *vraie pour* $n = m$)

Induktionsbehauptung • Thèse de l'induction:
$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$
(wahr für $m = n+1$ • *vraie pour* $n = m$)
Beweis: • Preuve:
$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = (\sum_{k=1}^{n} k^2) + (n+1)^2$
$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} =$
$\frac{(n+1)\,(n(2n+1)+6(n+1))}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ $\surd$

Beispiele zu möglichen Trugschlüssen – Exemples concernant des conclusions fausses

Unter einer Induktion (Physik) versteht man den allgemein Übergang von einer speziellen zu einer allgemeinen Aussage. Das kann in der Mathematik zu einer wahren oder auch zu einer falschen Aussage führen. (Vollständige Induktion ist dagegen eine Deduktion nach dem Induktionsaxiom von Peano.)
• *Par une induction (physique), on comprend généralement le processus de passer d'une proposition spéciale à une proposition générale. Dans les mathématiques, ça peut mener à une proposition vraie ou bien aussi à une proposition fausse. (Par contre, l'induction complète est und déduction d'après le principe de l'axiome de l'induction de Peano.)*

Beispiele: • Exemples:

1 Gewöhnliche Induktion: • *Induction simple:*
$(5|200) \wedge$ (200 endet mit 0 • 200 *finit par* 0) $\Rightarrow$ ($\forall_{n\in\mathbb{N}}$: (n endet mit 0 • n *finit par* 0) $\Rightarrow$ $(5|n)$)
$\rightsquigarrow$ **wahre Aussage • proposition vraie**

2 Gewöhnliche Induktion: • *Induction simple:*
$(5|200) \wedge$ (200 3-stellig • 200 *a* 3 *places*) $\Rightarrow$ ($\forall_{n\in\mathbb{N}}$: (n 3-stellig • n *a* 3 *places*) $\Rightarrow$ $(5|n)$)
$\rightsquigarrow$ **falsche Aussage • proposition fausse**

3 Euler hatte gefunden, dass $\forall_{n\leq 39}\,(n^2+n+41) \in \mathbb{P}$ gilt. Gilt das auch $\forall_{n\in\mathbb{N}}$?
• *Euler a trouvé que* $\forall_{n\leq 39}\,(n^2+n+41) \in \mathbb{P}$ *est vrai. Est–ce que c'est aussi vrai* $\forall_{n\in\mathbb{N}}$*?*

4 Fermat hatte vermutet, dass gilt: • *Fermat supposait qu'il vaut:* $\forall_{n\in\mathbb{N}} : f(n)_= 2^{(2^n)}+1 \in \mathbb{P}$.
Denn es gilt: • *Car il vaut:* $f(0)=3,\ f(1)=5,\ f(2)=17,\ f(3)=257,\ f(4)=65'537 \in \mathbb{P}$
Jedoch gilt: • *Par contre il vaut:* $f(5)=4'294'967'297 = 641\cdot 6700417 \notin \mathbb{P}$

5 Früher hatte man vermutet, dass das Polynom x^n-1 immer nur Faktoren hat mit Koeffizienten ± 1. Etwa um die Mitte des 20. Jahrhunderts hat jedoch der Russe Ivanow gefunden, dass $x^{105}-1$ einen Faktor mit Koeffizienten -2 hat:
• *Jadis on avait supposé que le polynôme* x^n-1 *a toujours que des facteurs avec les coefficients* ± 1. *Au temps du milieu du 20-ième siècle le Russe Ivanow cependant a trouvé que* $x^{105}-1$ *a un facteur avec ses coefficients* -2*:*

$$(-1+x)\left(1+x+x^2\right)\left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)\left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6\right)\cdot$$
$$\cdot\left(1-x+x^3-x^4+x^5-x^7+x^8\right)\left(1-x+x^3-x^4+x^6-x^8+x^9-x^{11}+x^{12}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(1-x+x^5-x^6+x^7-x^8+x^{10}-x^{11}+x^{12}-x^{13}+x^{14}-x^{16}+x^{17}-x^{18}+x^{19}-x^{23}+x^{24}\right)\cdot$$
$$\cdot(1+x+x^2-x^5-x^6-2\,x^7-x^8-x^9+x^{12}+x^{13}+x^{14}+x^{15}+x^{16}+x^{17}-x^{20}$$
$$-x^{22}-x^{24}-x^{26}-x^{28}+x^{31}+x^{32}+x^{33}+x^{34}+x^{35}+x^{36}-x^{39}-x^{40}-2\,x^{41}-x^{42}-x^{43}+x^{46}+x^{47}+x^{48})$$

6 Vermutung: • *Supposition:* $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{(2n+1)^2}{8}$
Man kann zeigen, dass die Behauptung zwar vererbbar ist, jedoch nirgends verankerbar. • *On peut démontrer qu'on peut tirer la conclusions de* n *à* $n+1$. *Mais on ne trouve nulle part un nombre* n *pour lequel on peut "ancrer", ç.v.d. où on peut prouver la formule pour cette* n *spéciale.*

4.1.4 Zur Rekursion – Quant à la récursion

Problem: • Problème: In der Informatikliteratur findet man die Begriffe „Induktion“ und „Rekursion“ nicht immer im mathematischen Sinne sauber getrennt. „Induktion“ meint „im Sinne der vollständigen Induktion“ wie definiert. „Rekursion“ erläutern wir an einem Beispiel.
• *Dans la littérature sur l'informatique on ne fait pas toujours bien la différence entre les notions "induction" et "récursion". Nous venons de définir "induction" "au sens de l'induction complète" . Dans l'exemple suivant nous expliquons la notion "récursion":*

In einem Programm ist die **Fibonacci-Folge** definiert worden • *Dans un programme on a défini la* **suite de Fibonacci**: $a_1 := 1,\ a_2 := 1,\ a_n := a_{n-1} + a_{n-2},\ n \geq 3$.

Mit der Maschine soll a_5 gerechnet werden. Die Maschine rechnet:
• *Calculer à la machine a_5. La machine calcule comme il suit:*

(1.) Absteigen • *Descendre*: $a_5 = a_4 + a_3$, $a_4 =?$, $a_4 = a_3 + a_2$, $a_3 =?$, $a_3 = a_2 + a_1$, $a_2 =?$, $a_2 = 1$, $a_1 =?$, $a_1 = 1$
(Unfertige Prozesse immer Abspeichern • *(Mémoriser toujours les processus non terminés.)*

(2.) Aufsteigen: Unfertige Prozesse jetzt ausführen • *Monter: Executer les processus commencés*: $a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$, $a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$, $a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$

Die Rekursion ist im Unterschied zur Induktion ein endlicher Prozess mit Abstieg und Aufstieg. In der rekursiven Definition einer Folge benützt man das vom Beweis mit vollständiger Induktion her bekannte Schema (Verankerung, Vererbung).
• *A la différence de l'induction, la récursion est un processus fini avec descente et montée. Dans la définition récursive on utilise le schéma connu l'induction complète ('ancrer', 'hériter').*

4.1.5 Ordnungsrelation auf N – Relation d'ordre sur N

Sei • *Soit* $n < m :\Leftrightarrow \exists_{k \in Nin} :\ n + k = m$.

Durch • *Par* $\mathcal{R} = \{(n, m) | n < m\} \subseteq \mathbb{N}^2$ ist eine **strenge Ordnungsrelation** definiert
• *Par* $\mathcal{R} = \{(n, m) | n < m\} \subseteq \mathbb{N}^2$ *on a défini une* **relation d'ordre stricte**.

Regeln: • **Règles:**

$$1\ \forall_{n,m \in \mathbb{N}} : (n = m)\ \dot{\vee}\ ((n < m)\ \dot{\vee}\ (n > m))$$

$$2\ \forall_{n,m,k \in \mathbb{N}} : (n < m) \quad \Rightarrow \quad (n + k < m + k)$$

Dagegen definiert man die **gewöhnliche Ordnungsrelation**
• *Par contre on définit la relation d'ordre non–stricte*: $n \leq m : (n < m) \dot{\vee} n = m))$.

Entsprechend • *Correspondant*: $n \geq m$

Sei • *Soit* $A \subseteq \mathbb{N}$.
$a \in \mathbb{N}$ heisst **kleinstes Element** von A: • $a \in \mathbb{N}$ *s'appelle* **l'élément le plus petit** *de A :*

$$\Leftrightarrow \forall_{n \in \mathbb{N}} : a \leq n.$$

Entsprechend „grösstes Element“ • *En correspondance "l'élément le plus grand"* .

Wichtig: • **Important:**
$A \subseteq \mathbb{N},\ A \neq \{\ \} \Rightarrow$ A besitzt ein kleinstes Element • *A possède un élément le plus petit.*

Eine Menge mit der Eigenschaft, dass jede nichtleere Teilmenge ein kleinstes Element besitzt, heisst **wohlgeordnet**.
• *Un ensemble avec la qualité que chaque sous–ensemble non vide possède un élément le plus petit s'appelle* **ensemble bien ordonné**.

4.1.6 Beispiel der Induktion: Potenzen in N – Exemple pour l'induction: Puissances dans N

Definiere induktiv • **Définition** *inductive*:

$$n^1 := n, \;\; n^2 := n \cdot n, \;\; n^{k+1} := n^k \cdot n$$

Regeln: • **Règles:**

$$\oslash \; \forall_{n,r,s} : \; n^r \cdot n^s = n^{r+s}$$

$$\oslash \; \forall_{n,r,s} : \; (n^r)^s = n^{r \cdot s}$$

$$\oslash \; \forall_{n,m,r} : \; (n \cdot m)^r = n^r \cdot m^r$$

Beweis mit vollständiger Induktion • *Prouver à l'aide de l'induction complète.*

4.1.7 Teiler und Vielfache in N – Diviseurs et multiples dans N

Definition: • **Définition:** $m \in \mathbb{N}$ Teiler (Faktor) von $n \in \mathbb{N}$: • $m \in \mathbb{N}$ *diviseur de* $n \in \mathbb{N}$*:*

$$\Leftrightarrow \; \exists_{k \in \mathbb{N}} : n = k \cdot m$$

$\rightsquigarrow$ **Symbol:** • **Symbole:** $m|n$

Grösster gemeinsamer Teiler • **Plus grand diviseur commun**

$$\rightsquigarrow \quad ggT\text{'}pgdc := \mathrm{g} : \qquad \forall_{d \in \mathbb{N},\; d|a \,\wedge\, d|b} : d|g$$

Kleinstes gemeinsames Vielfaches • **Plus petit multiple commun**

$$\rightsquigarrow \quad kgV\text{'}ppmc := \mathrm{k} : \qquad \forall_{m \in \mathbb{N},\; a|m \,\wedge\, b|m} : k|m$$

Regeln: • **Règles:**

$$\oslash \; m|n_1 \wedge m \; n_2 \;\Rightarrow m|(n_1 + n_2) \wedge m^2|(n_1 \cdot n_2)$$

$$\oslash \; ggT\text{'}pgdc(n_1, n_2) \cdot kgV\text{'}ppmc(n_1, n_2) = n_1 \cdot n_2$$

4.2 Ganze Zahlen Z – Nombres entiers Z

4.2.1 Konstruktion von Z – Construction de Z

Die ganzen Zahlen muss man jetzt nicht mehr axiomatisch einführen wie $\mathbb{N}$. Man kann sie mit Hilfe von Definitionen auf $\mathbb{N}$ aufbauen.
• *On n'a plus besoin d'introduire* $\mathbb{Z}$ *de manière axiomatique comme* $\mathbb{N}$*. On peut les construire à l'aide de définitions en les posant sur* $\mathbb{N}$.

Problem: • **Problème:** Gleichungen wie $10 + x = 5$ haben in $\mathbb{N}$ keine Lösung. Um die Lösbarkeit zu ermöglichen, muss man $\mathbb{N}$ erweitern, d.h. $\mathbb{Z}$ konstruieren.
• *Des équations comme* $10 + x = 5$ *n'ont pas de solution dans* $\mathbb{N}$*. Pour arriver quand-même à une*

solution on doit élargir $\mathbb{N}$*, ç. v. d. construire* $\mathbb{Z}$*.*

Seien • *Soient* $m, s, k \in \mathbb{N}$ beliebig • *quelconques.*

Idee: In $m + x = s$ gehört x zum geordneten Paar (s, m): $x \hat{=} (s, m)$ (Zuordnung).
• **Idée:** *Dans* $m + x = s$ x *correspond à la paire ordonnée* (s, m)*:* $x \hat{=} (s, m)$ *(application.)*

Forderung zur Konstruktion von $\mathbb{Z}$: • *Exiger quant à la construction de* $\mathbb{Z}$:

$$\forall_{m,s,k\in\mathbb{N}} : n + x = m + k + x = t = s + k = , \;\; x \hat{=} (s + k, m + k) = (t, n)$$

$\rightsquigarrow$ Die Relation gegeben durch $(s, m) \sim (t, n) \;\; :\Leftrightarrow m + t = m + s + k = s + n = s + m + k$ ist Äquivalenzrelation
• *La relation donnée par* $(s, m) \sim (t, n) \;\; :\Leftrightarrow m + t = m + s + k = s + n = s + m + k$ *est relation d'équivalence.*

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zerfällt somit in Äquivalenzklassen • *est divisé en classes d'équivalence*:

$$[(s, m)] \;=\; \{(s, m)|(t, n) \sim (s, m)\}.$$

$[(s, m)] := (s - m) := x$ ist somit die Menge der formalen Lösungen des obigen Problems
• $[(s, m)] := (s - m) := x$ *est alors l'ensemble des solutions du problème qu'on vient d'étudier.*

Definition: • **Définition:** $\mathbb{Z} := \{(s - m)|s, m \in \mathbb{N}\}$

4.2.2 Definition von Operationen auf Z – Définition d'opérations sur Z

Addition • **Addition** $''+''$ **:** $x_1 + x_2 = (s - m) + (t - n) := ((s + t) - (m + n))$

Multiplikation • **Multiplication** $''\cdot''$**:**

$x_1 \cdot x_2 = (s - m) \cdot (t - n) := ((m \cdot n + s \cdot t) - (m \cdot t + s \cdot n))$
Gesetze für • **Des lois pour** $''+''$**,** $''\cdot''$**:**

Abgeschlossenheit, Kommutativität, Assoziativität, Distributivität,
neutrales Element $(2 - 1) = (3 - 2) = (4 - 3) \ldots$ für $''\cdot''$
• *Opérations fermées, commutativité, associativité, distributivité,*
élément neutre $(2 - 1) = (3 - 2) = (4 - 3) \ldots$ *pour* $''\cdot''$

4.2.3 Interpretation der Def. von Z – Interprétation de la définition de Z

Einbettung von $\mathbb{N}$ **in** $\mathbb{Z}$ • **Insertion de** $\mathbb{N}$ **dans** $\mathbb{Z}$**:**

Seien • *Soient* : m^- = Vorgänger von m • m^- = *prédécesseur de* m,
m^* = Nachfolger von m • m^* = *successeur de* m.
Sei • *Soit* $m + x = s, \; s > m$ z.B. • *p. ex.* $s = m + k = m^- + 1 + k = m^- + k^*$
$\rightsquigarrow$ $m^- + 1 + x = s = m^- + k^*, \; 1 + x = k^*, \; x = (k^* - 1) := k \rightsquigarrow$
Eindeutige Identifikation von x und k möglich • *Indentification univoque possible entre* x *et* k.

$\rightsquigarrow$ Für $s > m$ kann man definieren **(Einbettung)** • *Pour* $s > m$ *on peut définir* **(insertion)**:

$$x = (k^* - 1) := k \in \mathbb{N}, \;\; \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}, \;\; \mathbb{N} = \mathbb{Z}^+.$$

Man findet damit, dass $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ isomorph (bijektiv und operationstreu) zu $(\mathbb{Z}^+, +, \cdot)$ ist.
• *Avec cela, on trouve que* $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ *est isomorphe à* $(\mathbb{Z}^+, +, \cdot)$ *(bijectif et conservant les opérations)*:

$(\mathbb{N}, +, \cdot) \cong (\mathbb{Z}^+, +, \cdot)$ (Operationen führen beidseitig zu entsprechenden Resultaten
• *Les opérations mènent des deux côtés aux mêmes résultats.*

4.2.4 Definition von 0 und Z $^-$ – Définition de 0 et de Z $^-$

Definition: • **Définition:** $0 := (1-1) \rightsquigarrow \quad \forall_{r\in\mathbb{N}} : 0 = (r-r)$
(von • **de** '0')

Eigenschaften:
• **Qualités:**

$''+''$ $\forall_{r\in\mathbb{Z}} z + 0 = z$ (neutrales Element • *élément neutre*)

$''\cdot''$ $\forall_{r\in\mathbb{Z}} z \cdot 0 = 0$ (Nullelement • *élément zéro*)

Wir definieren weiter • *Nous définissons en outre*:

$$\mathbb{Z}^- := \{x = (s-m) \,|\, (m-s) \in \mathbb{Z}^+ \, (m > s)\}, \;\; \mathbb{Z}_0^+ := \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$$

Definition: • **Définition: (Inverse** • **L'inverse)** Sei • *Soit* $k = (s-m) \in \mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}, \;\; (-k) := (m-k) \in \mathbb{Z}^-$.

Additives Inverses • **Inverse par rapport à l'addition**:

$$k = (s-m) \in \mathbb{Z} = \mathbb{N} \;\Rightarrow\; (-k) := (m-k) \in \mathbb{Z}.$$

Eigenschaften:
• **Qualités:**

$k \in \mathbb{Z}^+ \Leftrightarrow (-k) \in \mathbb{Z}^-$,

$k + (-k) = 0$,

$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^-$

4.2.5 Zur Struktur – Quant à la structure

Struktur von $(\mathbb{Z}, +)$ • **Structure de** $(\mathbb{Z}, +)$:
Kommutative (abelsche) Gruppe, d.h. Operation abgeschlossen, assoziativ, $\exists$ neutrales Element (die 0), $\forall_{z\in\mathbb{Z}}$ $\exists$ Inverses $(-z)$: $z + (-z) = 0$, Kommutativgesetz gilt.
• *Groupe commutatif (de Abel), ç. v. d. opération fermée, associative,* $\exists$ *élément neutre (le* 0*),* $\forall_{z\in\mathbb{Z}}$ $\exists$ *l'inverse* $(-z)$: $z + (-z) = 0$*, loi commutative.*

Wichtig: • **Important:**
Eine Gruppe ist eine Struktur, in der bezüglich der gegebenen Operation **Gleichungen lösbar** sind.
• *Un groupe est une structure, dans laquelle on peut* **résoudre les équations** *par rapport à l'opération donnée.*

Struktur von $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ • **Structure de** $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$**: Integritätsbereich** (kommutativer, nullteilerfreier Ring mit 1–Element) • **domaine d'intégrité***(anneau commutatif sans diviseur de zéro, avec élément unité).*

Nullteilerfreiheit hat zur Folge, dass man in Gleichungen Faktoren kürzen darf ($n \cdot a = m \cdot a \Rightarrow n = m$ für $a \neq 0$). Z. B. bei der Matrixmultiplikation ist das nicht mehr der Fall.
• *Manque de diviseurs de zéro a comme conséquence qu'on peut tracer des facteurs communs dans une équation ($n \cdot a = m \cdot a \Rightarrow n = m$ für $a \neq 0$). P. ex. cela n'est plus le cas pour la multiplication des matrices.*

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ **Ring** • **anneau**: $(\mathbb{Z}, +)$ kommutative Gruppe • *groupe commutatif*,
$(\mathbb{Z}, \cdot)$ Halbgruppe
• *demi–groupe*, Distributivgesetz • *loi distributive*

4.2.6 Ausdehnung der Ordnungsrelation auf Z – Extension de la relation d'ordre sur Z

Definition: • **Définition:** $a = (s - m),\ \ b = (t - n).\ \ a < b :\Leftrightarrow (n + s = m + t)$
(in $\mathbb{N}$ • *dans* $\mathbb{N}$)

Regeln: • **Règles:**

1 $\forall_{a,b \in \mathbb{Z}}$: $a < b \ \dot{\vee}\ a = b \ \dot{\vee}\ a > b$

2 $\forall_{a,b,c \in \mathbb{Z}}$: $a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a = b$

3 $\forall_{a,b,c \in \mathbb{Z},\ c>0}$: $a \cdot c < b \cdot c \Rightarrow a < b$

4 $\forall_{a,b,c \in \mathbb{Z},\ c \leq 0}$: $a \cdot c = b \cdot c \Leftrightarrow a = b$

5 $\forall_{a,b,c \in \mathbb{Z},\ c<0}$: $a \cdot c < b \cdot c \Rightarrow a > b$

6 $\forall_{a,b \in \mathbb{Z}}$: $a \cdot c = 0 \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0)$

7 $\forall_{a \in \mathbb{Z}}$: $(a < 1 \wedge a \leq 0) \Rightarrow (a < 0)$

4.2.7 Weitere Ausdehnungen – D'autres extensions

Definition: • **Définition:** $\forall_{a,b \in \mathbb{Z}}$: $a - b := a + (-b)$
(Subtrakt. • **Soustract.)**

Definition: • **Définition:** (Siehe Analysiskurs • *Voir cours d'analyse*):
(Absolutbetrag • **Valeur absolue)**

$$|z| = z \cdot sgn(z)$$

Wichtig: • **Important:** $|a + b| \leq |a| + |b|$ „Dreiecksungleichung" . Regeln siehe Analysiskurs
• $|a + b| \leq |a| + |b|$ *"Inégalité du triangle". Règles voir cours d'analyse*

Weitere Regeln • **D'autres règles:**

1 $z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0$

2 $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$

3 $a\,(b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

4 $a < b \Leftrightarrow (a - b) < 0$

5 $a \cdot b = 1 \Leftrightarrow (a = b = 1 \;\dot{\vee}\; a = b = -1)$ ☺

Bemerkung: • **Remarque:** Sei • *Soit* $a\mathbb{Z} = \{a \cdot z \mid z \in \mathbb{Z}\}$
$\Rightarrow a\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ für • *pour* $a \in \mathbb{Z}$.
$\rightsquigarrow$ $(a\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist auch Integritätsbereich
• $(a\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *est aussi domaine d'intégrité.*

4.2.8 Teiler in Z – Diviseurs dans Z

Definition: • **Définition:**
(Teiler in • **Diviseur d.** $\mathbb{Z}$**)**

Seien • *Soient* $a, t \in \mathbb{Z}, a \neq 0$.
$t|a \;:\Leftrightarrow\; \exists_{b \in \mathbb{Z}} : \; a = t \cdot b$. a Vielfaches von t. • *Multiple de* t.
t Teiler, Faktor • t *diviseur, facteur.*

Trivialteiler zu a : • *Diviseurs simples, triviaux de* a *:* $\pm 1, \pm a$.

Primzahlen • **Nombres premiers:** Haben nur Trivialteiler • *N'ont que des diviseurs triviaux.*

$$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$$

Primteiler • *Diviseurs primaires*: $p|a, \;\; p \in \mathbb{P}$

Satz: • **Théorème:** $\forall_{t,a,b,x,y \in \mathbb{Z}} : \; t|a \wedge t|b \Rightarrow t|(x \cdot a + y \cdot b)$

Satz: • **Théorème:** $|\mathbb{P}| = |\mathbb{N}|$.
(Es gibt unendlich viele Primzahlen.)
• *(Il y a infiniment de nombres premiers.)*

$\mathbb{P}$ berechnen: Mit dem „Sieb des Eratosthenes“ .
• **Calculer $\mathbb{P}$:** *Avec le "crible d'Eratosthène".*

Für *ggT* (*ggT'pgdc*) und *kgV* (*kgV'ppmc*) gilt:
• *Pour le pgdc (ggT'pgdc) et le ppmc (kgV'ppmc) on trouve:*

$$ggT'pgdc(p_1, p_2) = 1, \;\; kgV'ppmc(p_1, p_2) = p_1 \cdot p_2.$$

$ggT'pgdc(a, b) = 1$ heisst : a, b relativ prim • $ggT'pgdc(a, b) = 1$ *signifie :* a, b *premier entre eux.*

Berechnung des *ggT'pgdc*: **Euklidscher Algorithmus**.
• *Calculer le ggT'pgdc:* **Algorithme d'Euklide**.

Beispiel für den Euklidschen Algorithmus. • **Exemple** *pour l'algorithme d'Euklide:*

Problem: • **Problème:** Berechne • *Calculer* $ggT'pgdc(758, 242)$:

$758 = 242 \cdot 3 + 32,\ \ t|758 \wedge t|242 \Rightarrow t|32,\ \ 242 = 32 \cdot 7 + 18,\ \ t|242 \wedge t|32 \Rightarrow t|18,\ \ 32 = 18 \cdot 1 + 14,\ \ t|32 \wedge t|18$
$\Rightarrow t|14,\ \ 18 = 14 \cdot 1 + 4,\ \ t|18 \wedge t|14 \Rightarrow t|4,\ \ 14 = 4 \cdot 3 + 2,\ \ t|14 \wedge t|4 \Rightarrow t|2,\ \ 4 = 2 \cdot 2 + 0$
$\rightsquigarrow \quad t|2,\ \ 4 = 4 \cdot 2 \Rightarrow t|4 \Rightarrow t|14 \Rightarrow t|18 \Rightarrow t|32 \Rightarrow t|242 \Rightarrow t|758, \quad \Rightarrow t = 2$ ☺

Sei • *Soit* $\dot{\mathbb{Z}} := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Folgerung: • **Conclusion:** $\forall_{a,b \in \dot{\mathbb{Z}}} : \exists_{m,n \in \mathbb{Z}} : ggT'pgdc(a, b) = a \cdot m + b \cdot n$

Speziell • *Spécialement*:
$\exists_{m,n \in \mathbb{Z}} : 1 = a \cdot m + b \cdot n \Leftrightarrow ggT'pgdc(a, b) = 1$

Eigenschaften:
• Qualités:

1 $ggT'pgdc(a, s) = ggT'pgdc(b, s) = 1 \ \Rightarrow\ ggT'pgdc(a \cdot b) = 1$

2 $p \in \mathbb{P} \wedge p|a \cdot b \ \Rightarrow\ p|a \vee p|b$

3 Die Primfaktorenzerlegung von $a \in \mathbb{N}$ ist eindeutig bis auf die Reihenfolge: • *La décomposition en facteurs primaires de* $a \in \mathbb{N}$ *est univoque si l'on ignore l'ordre:*

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} = \prod_{i=0}^{k} p_i^{\alpha_i}$$

Definition: • **Définition:** **Hauptideal** • **Idéal principal**:

$n \cdot \mathbb{Z} \ := (n) \ := \ \{n \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{N} fix\}$

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

Sei • *Soit* $K \neq \{\}$, $K \subset \mathbb{Z}$, $(K, +, \cdot)$ abgeschlossen • $(K, +, \cdot)$ *fermé* .

Beh.: • **Thè.:**

K ist Hauptideal: • *est idéal principal:* $\exists_{n \in \mathbb{Z} resp. \mathbb{N}} : \ K = n \cdot \mathbb{Z}$

Definition: • **Définition:** **(Linearkombination** • **Combinaison linéaire)**

Seien • *Soient* :
$a_1, \ldots, a_n \in M$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ beliebig • *quelconques.*
$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = \sum_{i=1}^{n}$ heisst **Linearkombination** der a_i über K
• *. . . s'appelle* **combinaison linéaire** *des* a_i *par rapport à* K.

Damit definieren wir: • *Nous définissons aussi:* **Definition:** • **Définition:**

Sei • *Soit* $M = \{a_i \in \mathbb{Z} | i = 1, \ldots, n\}$ und • *et* $K = \mathbb{Z}$, $(\lambda_i \in \mathbb{Z})$
$\bar{M} :=$ { Linearkomb. v. M über $\mathbb{Z}$ • *Comb. linéaires de* M *sur* $\mathbb{Z}$}
:= **Lineare Hülle** von M • **Fermeture linéaire** *de* M.

Satz: • **Théorème:** $\bar{M}$ ist Hauptideal. • $\bar{M}$ *est idéal principal.*

$$\exists_{m \in \mathbb{Z}} : \ \bar{M} = m \cdot \mathbb{Z}$$

4.2.9 Über Kongruenzen – Sur les congruences

Wir definieren „a kongruent b *modulo* m“
• *Nous allons définir "a est congruent à b modulo m"* . Sei • *Soit* $m \in \dot{\mathbb{Z}}$:

Definition: • **Définition:** a kongruent b *modulo* m • a *congruent à* b *modulo* m:

$$a \equiv b \ mod \ m \ :\Leftrightarrow \ m|(a-b)$$

Man findet • *On trouve*: $(a-b) \equiv 0 \ mod \ m \ \Leftrightarrow \ a \equiv b \ mod \ m.$

Die verwendeten Zahlen seinen aus $\mathbb{Z}$ • *Les nombres utilisés soient des nombres de* $\mathbb{Z}$:

Regeln: • **Règles:**

1 $a \equiv b \ mod \ m \ \Leftrightarrow \ a + m \cdot t \equiv b \ mod \ m$
$\Leftrightarrow a + t \equiv b + t \ mod \ m \ \ (\Rightarrow \ a \cdot t \equiv b \cdot t \ mod \ m)$

2 $a \equiv b \ mod \ m \wedge c \equiv d \ mod \ m$
$\Rightarrow \ (a \pm c \equiv b \pm d \ mod \ m) \wedge (a \cdot c \equiv b \cdot d \ mod \ m)$

3 $a \equiv b \ mod \ m \ \wedge \ ggT'pgdc(c, m) = t$
$\Rightarrow \ ((a \cdot c \equiv b \cdot d \ mod \ m) \ \Leftrightarrow \ a \equiv b \ mod \ k, \ m = k \cdot t)$

4 $mod \ m$ stiftet auf $\mathbb{Z}$ eine Äquivalenzrelation
• *génère sur* $\mathbb{Z}$ *une relation d' équivalence*

$\rightsquigarrow$ Äquivalenzklassen: **Restklassen modulo m**
• *Classes d'équivalence:* **Classes de restes modulo m**.

Quotientenmenge • *Ensemble des quotients*:
$\mathbb{Z}_m := (\mathbb{Z}/_{\ mod \ m}) = \{[0]_m, [1]_m, \ldots, [m-1]_m\}$

4.2.10 Rechnen mit Restklassen, Strukturen – Calculer avec des classes de restes, structures

Definition: • **Définition:** $''+''$ $[a]_m + [b]_m := [a+b]_m$

Definition: • **Définition:** $''.''$ $[a]_m \cdot [b]_m := [a \cdot b]_m$

Bsp.: • **Exemple:**

$\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$: Additions– und Multiplikationstabellen • *Tableaux d'addition et de multiplication.*

$''+''$	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[1]	[2]
[1]	[1]	[2]	[0]
[2]	[2]	[0]	[1]

$''\cdot''$	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]
[2]	[0]	[2]	[1]

$''+''$	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]
[1]	[1]	[2]	[3]	[0]
[2]	[2]	[3]	[0]	[1]
[3]	[3]	[0]	[1]	[2]

$''\cdot''$	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]
[2]	[0]	[2]	[0]	[2]
[2]	[0]	[3]	[2]	[1]

Wichtig: • Important:
Man beachte, dass hier *mod* 4 die Multiplikation nicht nullteilerfrei ist.
• *On constate qu'ici mod* 4 *la multiplication n'est pas libre de diviseurs de zéro*:
$\rightsquigarrow$ $[2]_4 \cdot [2]_4 = [0]_4$. $[2]_4$ hat kein Inverses • *n'a pas d'inverse.*
$\rightsquigarrow$ $[2]_4 \cdot [x]_4 = [1]_4$ hat keine Lösung • *n'a pas de solution.*

Ein anderes Beispiel modulo 6: • Un autre exemple modulo 6:

$[3]_6 \cdot [2]_6 = [3]_6 \cdot [4]_6 = [0]_6 \not\Rightarrow [2]_6 = [4]_6$
$\rightsquigarrow$ Es ist nicht erlaubt zu kürzen! • *Il n'est pas permis de simplifier.*
$\rightsquigarrow$ $[3]_6$, $[2]_6$, $[4]_6$ sind Teiler von • *sont des diviseurs de* $[0]_6$.

Wichtige Strukturen • Des structures importantes

Halbgruppe • Demi–groupe $(M, \circ)$
(M = Menge • M = *ensemble*, $\circ$ = Operation auf M): • *($\circ$ = opération sur M):*
$\rightsquigarrow$ $'\circ'$ abgeschlossen, assoziativ • $'\circ'$ = *opération fermée, associative.*

Gruppe • Groupe $(M, \circ)$:
$\rightsquigarrow$ $\circ$ abgeschlossen, assoziativ, es gibt ein neutrales Element m_0, $\forall_{m \in M}$ $\exists$ ein Inverses (m^{-1})
• $\circ$ *opération fermée, associative* $\exists$ *élément neutre* m_0, $\forall_{m \in M}$ $\exists$ *un élément inverse* (m^{-1}) .

Wichtig: • Important:
Die Gruppe ist diejenige Struktur, in der Gleichungen lösbar sind.
• *Le groupe est la structure, dans laquelle on peut résoudre des équations.*

Abelsche oder kommutative Gruppe • Groupe commutatif, dit d'Abel $(M, \circ)$:
$(M, \circ)$ Gruppe, Operation kommutativ • $(M, \circ)$ *groupe, opération commutative*

Körper • Corps $(M, \circ, *)$ ($\circ, *$ Operationen auf M) • *($(M, \circ, *)$opérations sur M):*
$(M, \circ)$ abelsche Gruppe • $(M, \circ)$ *groupe commutatif*,
$M \setminus \{m_0\}, *$ ebenfalls abelsche Gruppe • $M \setminus \{m_0\}, *$ *aussi groupe commutatif*,
Distributivgesetz für $\circ, *$. • *Loi distributive pour* $\circ, *$.

Ring • Anneau $(M, \circ, *)$:
$(M, \circ)$ abelsche Gruppe • $(M, \circ)$ *groupe commutatif*,
$M \setminus \{m_0\}, *$ nur Halbgruppe • $M \setminus \{m_0\}, *$ *seulement demi–groupe*,
Distributivgesetz für $\circ, *$. • *Loi distributive pour* $\circ, *$.

Kommutativer Ring • **Anneau commutatif** $(M, \circ, *)$:
$(M, \circ, *)$ Ring, $*$ kommutativ. • $(M, \circ, *)$ *anneau,* $*$ *commutatif.*

Integritätsbereich • **Domaine d'intégrité** $(M, \circ, *)$:
Nullteilerfreier kommutativer Ring. • *Anneau commutatif sans diviseurs de zéro.*

Satz: • **Théorème:**

Vor.: • **Hyp.:**

Sei • *Soit* $m \in \mathbb{N}$

Beh.: • **Thè.:**

⊘ $(\mathbb{Z}_m, +)$ ist abelsche Gruppe (**Restklassengruppe**)
• $(\mathbb{Z}_m, +)$ *est groupe commutatif (***Groupe de classes des restes***)*

⊘ $(\mathbb{Z}_m, \cdot)$ ist kommutative Halbguppe mit 1–Element
• $(\mathbb{Z}_m, \cdot)$ *est demi–groupe commutatif avec élément unité*

⊘ $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ Integritätsbereich mit 1–Element
• $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ *est domaine d'intégrité avec élément unité*

Vor.: • **Hyp.:**

Sei • *Soit* $m \in \mathbb{P}$

⊘ $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ ist Körper (**Restklasskörper**)
• $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ *est corps (***corps de classes des restes***)*

Bemerkung: • **Remarque:**

Geg.: • **Donné:** $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$.

Sei • *Soit* $[a]_m \cdot [x]_m = [b]_m$, $ggT'pgdc(a, m) := d$.
Dann kann man zeigen • *Alors on peut démontrer*:

⊘ $d|b$ $\Rightarrow$ die Gleichung hat d inkongruente Lösungen
• $d|b$ $\Rightarrow$ *l'équation a d solutions non congruentes.*

⊘ $d \not| b$ $\Rightarrow$ die Gleichung hat keine Lösungen
• $d \not| b$ $\Rightarrow$ *l'équation n'a pas de solutions.*

4.2.11 Polynomringe – Anneaux de polynômes

Ein Beispiel von wichtigen Ringen sind die **Polynomringe**
• *Un exemple pour des anneaux importants sont les* **anneaux de polynômes**:

Polynom • **Polynôme:**
Endliche Summe von Produkten von Variablenpotenzen und Koeffizienten (Exponenten $\in \mathbb{N}$)
• *Somme finie de produits de puissances de variables avec des coefficients (exposants*$\in \mathbb{N}$*).*

$\rightsquigarrow$ (Berechenbar auch nach dem **Hornerschema**.)
• *(Façon de calculer: D'après le* **schéma de Horner***.)*

Polynome über $\mathbb{Z}$: Koeffizienten $\in \mathbb{Z}$. • **Polynômes sur $\mathbb{Z}$:** *Coefficients* $\in \mathbb{Z}$.

Sei • *Soit* $P = \{$ Polynome über $\mathbb{Z}$ • *Polynômes sur* $\mathbb{Z}$ $\}$.

Satz: • **Théorème:** $(P, +, \cdot)$ ist Integritätsbereich mit 1–Element.
• $(P, +, \cdot)$ *est domaine d'intégrité avec élément unité.*

Speziell: • **Spécialement:** $(P, +, \cdot)$ nullteilerfrei • $(P, +, \cdot)$ *libre de diviseurs de zéro.*

D. h. • *Ç. v. d.:* $p_1(x) \cdot p_2 x \equiv 0 \ \wedge \ p_1(x) \not\equiv 0 \ \Rightarrow \ p_2(x) \equiv 0.$

4.2.12 Positionssysteme zur Zahlendartstellung – Des systèmes de position pour la représentation des nombres

Sei • *Soit* $a \in \mathbb{Z}, \ b \in \mathbb{N}$. a lässt sich wie folgt schreiben: • *a peut être écrit de la façon suivante*:

$$a = r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + \ldots + r_0 b^0 = \sum_{i=1}^{n} r_i b^i, \ \ b^0 = 1, \ \ |r_i| < b,$$
$$r_i \geq 0 \ \text{ für } \bullet \ \textit{pour } a > 0, \ \ r_i < 0 \ \text{ für } \bullet \ \textit{pour } a < 0$$

Bsp.: • **Exemple:**
Dualsystem (Binärsystem), Oktalsystem, Dezimalsystem, Hexagesimal– oder Hexadezimalsystem.
• *Système de numération binaire, octal, décimal, hexadécimal.*

Probleme: • **Problèmes:**
Arithmetik in solchen Systemen, Verwandlung einer gegebenen Darstellung einer Zahl in eine Darstellung in einem anderen System.
• *Arithmétique dans ces systèmes, transformation d'un nombre donné par une représentation dans un autre système.*

$\rightsquigarrow$ Grundlage für Codierung (Bitmaschinen). • *Base de codage (mach. qui travaillent avec des bits).*

Speziell: • **Spécialement:** $b = 2, \ b = 8, \ b = 16.$

4.3 Ergänzungen zu N und Z – Annexe pour N et Z

Lemma: • **Lemme:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$p \in \mathbb{P}, \ k \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$
$\binom{p}{k}$ Binomialkoeff. • *coefficient binomial*

Beh.: • **Thè.:** $p \mid \binom{p}{k}$

Beweis: • **Preuve:**
$0 < k < p \in \mathbb{P} \ \Rightarrow \ \binom{p}{k} = \dfrac{p!}{k! \cdot (p-k)!} = p \cdot r \ \Rightarrow \ ggT'pgdc(p, r) = 1 \ \Rightarrow \ r \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ p \mid \binom{p}{k}$

Satz: • **Théorème:** $p \in \mathbb{P}, \ a, b \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ (a+b)^p \equiv a^p + b^p \ mod \ p$

Beweis: • Preuve:

$$(a+b)^p = a^p + \binom{p}{1} a^{p-1}\, b + \ldots + \binom{p}{p-1} a\, b^{p-1} + b^0 \equiv a^p + b^p \ mod\ (p) \quad \text{(Lemma)}$$

Kleiner Fermatscher Satz: • "Petit" théorème de Fermat:

Satz: • Théorème: $p \in \mathbb{P},\ a \in \mathbb{N},\ p \not| a \ \Rightarrow\ a^p \equiv a \ mod\ p \ \rightsquigarrow\ a^{p-1} \equiv 1 \ mod\ p$

Beweis: • Preuve:

$$a^p = (\underbrace{1+1+\ldots+1}_{=a})^p \overset{\text{Lemma}}{\equiv} \underbrace{1^p + 1^p + \ldots + 1^p}_{=1+1+\ldots+1=a} = a \ mod\ (p) \ \Rightarrow\ a^{p-1} \equiv 1 \ mod\ (p)$$

Allgemeiner für Kongruenzen *mod m* • *Plus généralement pour des congruences mod m*:

Definition der Eulerschen Funktion $\varphi(n)$, $n \in \mathbb{N}$
• Définition de la fonction de Euler $\varphi(n)$, $n \in \mathbb{N}$:

$\varphi(n)$:= Anzahl zu n relativ prime Reste modulo n (zwischen 1 und $n-1$).
• $\varphi(n)$:= *Nombre de restes modulo n qui sont primes à n (entre 1 et $n-1$).* $\rightsquigarrow$

Satz: • Théorème:

1 $p \in \mathbb{P} \ \Rightarrow\ \varphi(p) = p-1$

2 $n, k \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ n = \sum_{k|n} \varphi(k)$

3 $ggT'pgdc(m,n) = 1 \ \Rightarrow\ \varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$

4 $\varphi(n) = n \cdot \prod_{p|n} (1 - \frac{1}{p})$

Beweis: • Preuve:

1 Nach Definition von φ. • *Selon la définition de φ.*

2 **Symbol: • Symbole:** Sei $\# =$ Anzahl ... • *Soit $\#$ = nombre de ...*

Sei • *Soit* $i \,|\, n \ \Rightarrow\ z(k,i) := \frac{k \cdot n}{i} \in \mathbb{N}$
Betrachte zu $i \in \mathbb{N}$ alle Zahlen folgender Art:
• *Considérer par rapport à $i \in \mathbb{N}$ tous les nombres du genre:* $z(k,i) = \frac{k \cdot n}{i},\ k \leq i$
Sei • *Soit* $ggT'pgdc(k,i) = 1 \ \Rightarrow\ \#(z(k,i)) = \#(\frac{k \cdot n}{i}) = \varphi(i)$
$\rightsquigarrow\ \frac{k \cdot n}{i} = \frac{k' \cdot n}{j} \ \Rightarrow\ k \cdot j = k' \cdot i,\ ggT'pgdc(k,i) = 1$
$\rightsquigarrow$ k ist bestimmt durch genau einen Teiler i. • *k est déterminé par exactement un diviseur i.*
$\rightsquigarrow$ Die Zahlen $\{1, 2, \ldots, n\}$ zerfallen daher in durch die Teiler i bestimmte disjunkte Klassen C_i, welche die Zahlen k enthalten. • *Les nombres $\{1, 2, \ldots, n\}$ sont donc répartis en des classes disjointes C_i qui sont déterminées par les diviseurs i et qui contiennent les nombres k.*
Andererseits: • *D'autre part:*

Sei • *Soit* $m \leq n$, $ggT'pgdc(m,n) = \frac{n}{i} \Rightarrow m = k \cdot ggT'pgdc(m,n) \leq i \cdot ggT'pgdc(m,n) = n$
$\Rightarrow m \in \{k \mid k \leq i \wedge ggT'pgdc(i,k) = 1\}$
$\rightsquigarrow$ m ist eindeutig bestimmt durch i, $m \in C_i$.
• *m est déterminé par i de façon univoque, $m \in C_i$.*
$\rightsquigarrow$ Wenn m die Zahlen $\{1, 2, \ldots, n\}$ durchläuft, werden daher auch alle zugehörigen Zahlen k durchlaufen. Die gesamte Anzahl n ist aber die Summe der φi über alle i.
• *Si m atteind tout les valeurs de $\{1, 2, \ldots, n\}$, au même temps aussi tous les nombres correspondants k sont dénombres. Mais le nombre total n est la somme des φi pour tous les i.*

3 Beweis mit vollständiger Induktion über die Zahl $m \cdot n$. Vgl. Lit.. • *Preuve à l'aide de l'induction complète par le nombre $m \cdot n$. voir lit..*

4 $n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n} \Rightarrow \varphi(n) = \varphi(p_1^{k_1}) \cdot \ldots \cdot \varphi(p_n^{k_n})$
$\varphi(p_j^{k_j}) := \varphi(p^k) = |\{1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, 2\,p-1, 2\,p+1, \ldots, p^k - 1\}|$
$= |\{1, 2, \ldots, p^k - 1\} \setminus (\{p, 2\,p, \ldots, p \cdot p, \ldots (p-1) \cdot p^{k-1}\} \setminus \{p^k\})|$
$= |\{1, 2, \ldots, p^k - 1\}| - |\{p, 2\,p, \ldots, p \cdot p, \ldots p \cdot p^{k-1}\}| + |\{p^k\}$
$= (p^k - 1) - k^{k-1} + 1) = k^{k-1} \cdot (p-1) = p^k \cdot (1 - \frac{1}{p})$

Satz: • **Théorème:** **(Euler)**
$a, m \in \mathbb{N} \wedge ggT'pgdc(a, m = 1) \Rightarrow a^{\varphi(m)} \equiv 1 \; mod \; m$

<u>Beweis:</u> • **<u>Preuve:</u>** Vgl. Lit.. • *Voir lit..*

Definition: • **Définition:** **Ordnung** von a *mod* m: • **Ordre** *de a mod m:*

$Ord(a) \; mod \; m$:= kleinstes $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n \equiv 1 \; mod \; m$
• $Ord(a) \; mod \; m$:= *le plus petit $n \in \mathbb{N}$ avec $a^n \equiv 1 \; mod \; m$*

Der chinesische Restsatz • **Le théorème sur les restes (chinois):**

Satz: • **Théorème:** **<u>Vor.:</u>** • **<u>Hyp.:</u>**

Seien • *Soient* $m_j \in \mathbb{N}$
$m_1, \ldots, m_r$ relativ prim • *$m_1, \ldots, m_r$ primes entre eux,*
$m = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_r$,
$a_1, a_2, \ldots, a_r$ beliebig • *$a_1, a_2, \ldots, a_r$ quelconques.*

<u>Beh.:</u> • **<u>Thè.:</u>**

Die Lösung des Systems
$x \equiv a_j \; mod \; m_j$, $j = 1, 2, \ldots, r$ mit
$x \in [0, m)$ ist eindeutig.

• *La solution du système*
$x \equiv a_j \; mod \; m_j$, $j = 1, 2, \ldots, r$ *avec*
$x \in [0, m)$ *est univoque.*

<u>Beweis:</u> • **<u>Preuve:</u>** Vgl. Lit.. • *Voir lit..*

4.3.1 Ausblick – Autres faits divers

Primzerlegung – Décomposition en nombres premiers

Die Primzerlegung einer natürlichen Zahl $n < 1$ ist eindeutig.
(Beweis indirekt.)
• *La décomposition d'un nombre naturel en nombres premiers $n < 1$ est univoque.*
(Preuve de façon indirecte.)

Primzahldichte – Densité des nombres premiers

Asymptotische Verteilung: • *Distribution asymptotique:*
Sei $\pi(x) = (\text{Anzahl Primzahlen} \leq x) = \#(p \in \mathbb{P}),\ \ p \leq x.$
• *Soit $\pi(x) = (\text{nombre de nombres permiers} \leq x) = \#(p \in \mathbb{P}),\ \ p \leq x. \rightsquigarrow$*

Satz: • **Théorème:** $$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{(\frac{x}{ln(x)})} = 1 \qquad \text{(Gauss, Hadamard, de la Vallée–Poissin)}$$

Stärkere Form: • *Forme plus élaborée:*

Sei • *Soit* $$Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{ln(t)} \qquad \Rightarrow\ \pi(x) = Li(x) + 0(x\, e^{-C\sqrt{ln(x)}})$$

$O \rightsquigarrow$ Landau-Symbol, vgl Analys • *Symbole de Landau, voir cours d'analyse*

Eulersche Anzahlfunktion – Fonction de nombres d'Euler

Die in der Algebra wichtige Eulersche φ–Funktion wird vorerst hiier wie folgt definiert:
• *On définit ici d'abord la fonction φ de Euler, qui est importante en angèbre, comme il suit:*

Definition: • **Définition:** $$a|_!\, n :\Leftrightarrow (\exists_{b\in\mathbb{N},\ \ 1<b\leq n}\ n = a \cdot b)$$

Definition: • **Définition:** Sei • *Soit* $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi(n) = \#(a \in \mathbb{N}),\ \ 1 \leq a \leq n,\ \ a \not|_!\, n$$

$\rightsquigarrow$ $\varphi(n) =$ Anzahl der zu n relativ primen Divisionsreste bei der Division durch n (modulo n)
• $\varphi(n) =$*nombre de restes modulo n qui sont primes à n*

Bsp.: • **Exemple:**

$$1 \not|_!\, 2 \ \Rightarrow\ \varphi(2) = 1, \qquad (1 \not|_!\, 3)\ \wedge\ (2 \not|_!\, 3)\ \Rightarrow\ \varphi(3) = 2$$
$$(1 \not|_!\, 4)\ \wedge\ (3 \not|_!\, 4)\ \Rightarrow\ \varphi(4) = 2, \qquad (1 \not|_!\, 5)\ \wedge\ (2 \not|_!\, 5)\ \wedge\ (3 \not|_!\, 5)\ \wedge\ (4 \not|_!\, 5)\ \Rightarrow\ \varphi(5) = 4, \ldots,$$
$$(2|\, 16)\ \wedge\ (4|\, 16)\ \wedge\ (8|\, 16)\ \Rightarrow\ \varphi(16) = 15 - 3 = 12, \ldots$$

Elementar kann man beweisen: • *On pout prouver de façon élémentaire:*

Satz: • **Théorème:** $$p, q \in \mathbb{P}\ \Rightarrow\ \varphi(p) = p - 1,\ \ \varphi(p\,q) = (p-1)(q-1)$$

Kryptologie – Cryptologie

RSA-Verfahren: Siehe Anhang. • *Méthode RSA: Voir annexe.*

4.4 Rationale Zahlen Q – Nombres rationnels Q

4.4.1 Definition – Définition

Problem: • **Problème:** Z. B • *P. ex.:* $7 \cdot x = 8$
$\rightsquigarrow$ in $\mathbb{Z}$ nicht lösbar • *n'a pas de solution dans* $\mathbb{Z}$

Allgemeiner • *Généralement*:
Sei • *Soit* $m \cdot x = s$ in $\mathbb{Z}$ nicht lösbar • *n'a pas de solution dans* $\mathbb{Z}$.

Beseitigung des Mangels: $\mathbb{Z}$ erweitern!! • **Eliminer ce défaut:** *élargir* $\mathbb{Z}$*!!*

Konstruktion • *Construction*: Sei • *Soit* $n, m \in \dot{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $t, s \in \mathbb{Z}$, $m \cdot t = s \cdot n$

$\rightsquigarrow$ Definiere eine Relation in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ • *Définir une relation dans* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:
$(s, m) \sim (t, n) \quad :\Leftrightarrow \quad m \cdot t = s \cdot n$
$\rightsquigarrow$ Klassen • *Classes* $\quad [(s, m)] = [(t, n)]$

Definition: • **Définition:** $\mathbb{Q}$

$$\frac{s}{m} := (s, m) \rightsquigarrow \text{ Bruch • } \textit{fraction}$$

$$[\frac{s}{m}] := [(s, m)] \text{ rationale Zahl • } \textit{nombre rationnel.}\ \mathbb{Q} = \{[\frac{s}{m}]\}.$$

Sei • *Soit* $t = x$, $n = 1 \rightsquigarrow \quad m \cdot x = s \cdot 1 = s$, $(t, m, s \in \mathbb{Z})$.
Setze • *Définir*: $x := [\frac{x}{1}] = [(x, 1)] = [(s, m)] := \frac{s}{m}$.
($\frac{s}{m}$ ist ein **Repräsentant** oder Stellvertreter der Klasse $[\frac{s}{m}] = [(s, m)]$. Durch ihn ist die Klasse eindeutig festgelegt.
• $\frac{s}{m}$ *est un* **représentant** *de la classe* $[\frac{s}{m}] = [(s, m)]$. *Ainsi la classe est définie de façon univoque.*)

$\rightsquigarrow$ Die Lösung der Gleichung • *La solution de l'équation* $m \cdot x = s$ ist • *est* $\frac{s}{m} \in \mathbb{Q}$.

Damit ist: • *Donc on a:* $\quad t \in \mathbb{Z} \Rightarrow t \in \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \rightsquigarrow$ Einbettung. • *Plongement.*

Wir stellen fest • *On constate*:

$\forall_{m,s,n,t,k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0}: \ m \cdot t = s \cdot n \ \Leftrightarrow \ (m \cdot k) \cdot t = (s \cdot k) \cdot n$, also • *donc*
$\Leftrightarrow \ m_1 \cdot t = s_1 \cdot n$ für • *pour* $m = m_1 \cdot ggT'pgdc(m, s)$, $s = s_1 \cdot ggT'pgdc(m, s)$.
Sei • *Soit* $\quad m > 0$.
k sei so gewählt, dass $m < 0$ gilt • *Soit* k *choisi de façon que* $m < 0$.

$\rightsquigarrow \quad \frac{s}{m} = \frac{s_1}{m_1} \in \mathbb{Q}$: **Gekürzte Bruchdarstellung**,eindeutig!
• $\frac{s}{m} = \frac{s_1}{m_1} \in \mathbb{Q}$*: Représentation comme* **fraction** *simplifiée ou* **réduite**, *univoque!*

Wichtig: • **Important:**

Rationale Zahlen • *Nombres rationnels*: $\mathbb{Q} = \{\frac{s}{m} \mid \frac{s}{m} := [(s,m)]\ s \in \mathbb{Z},\ \ m \in \dot{\mathbb{Z}}\}$

4.4.2 Operationen in Q – Opérations dans Q

Definition: • **Définition:**
"+" , "·"

$$1\ \frac{s}{m} + \frac{t}{n} := \frac{s \cdot n + t \cdot m}{m \cdot n}$$

$$2\ \frac{s}{m} \cdot \frac{t}{n} := \frac{s \cdot t}{m \cdot n}$$

Damit ergibt sich die Struktur $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$. • *Avec celà on a la structure* $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.
Man kann nun zeigen, dass in $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ die Rechenregeln von $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ gültig bleiben.
• *Maintenant on peut prouver que dans* $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ *les règles de calcul de* $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *restent valables.*
(Integritätsbereich mit 1–Element • *Domaine d'intégrité avec élément unité.*)

Speziell ist • *Spécialement on a*:
Nullelement (neutrales Element) der Addition $(\frac{0}{1})$ • *Elément neutre de l'addition*: $(\frac{0}{1})$,
Einselement (neutrales Element) der Multiplikation $(\frac{1}{1})$. • *Elément neutre de la multiplication*: $(\frac{1}{1})$.
Zusätzlich gelten aber **weitere Regeln**: • *En plus on a des* **règles auxiliaires***:*

Neuheit in $\mathbb{Q}$ • **Nouveauté dans** $\mathbb{Q}$: $\forall_{q \in \dot{\mathbb{Q}}} \exists_{Invers.q^{-1}} :\ q \cdot q^{-1} = (\frac{1}{1})$, kurz • *bref*: $\frac{1}{1}$.

Satz: • **Théorème:**

Vor.: • **Hyp.:**

$$q = \frac{s}{m} \in \dot{\mathbb{Q}},\ \ \dot{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$$

Beh.: • **Thè.:**

$$1\ q^{-1} = \frac{m}{s}$$

2 $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist Körper
• $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ *est un corps*

$\rightsquigarrow$ $(\mathbb{Q}, +)$, $(\dot{\mathbb{Q}}, \cdot)$ abelsche Gruppen • $(\mathbb{Q}, +)$, $(\dot{\mathbb{Q}}, \cdot)$ *groupes commutatifs.*
Es gilt das Distributivgesetz:
• *On trouve la loi distributive:*

Sinnvolle Schreibweise
• **Façon d'écrire simple:**

$$\frac{m}{s} \cdot \frac{t}{n} := \frac{(\frac{m}{s})}{(\frac{t}{n})} \qquad (\rightsquigarrow \quad = \frac{s}{m} \cdot \frac{n}{t})$$

4.4.3 Zur Einbettung von Z in Q – Plongement de Z dans Q

In $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist • *Dans* $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ *on trouve*: $\frac{s}{1} + \frac{t}{1} = \frac{s+t}{1},\ \ \frac{s}{1} \cdot \frac{t}{1} = \frac{s \cdot t}{1}$

(Den Zahlen $s, t \in \mathbb{Z}$ entsprechen die Zahlen $\frac{s}{1}, \frac{t}{1} \in \mathbb{Q}$ etc. .
• *Les nombres* $s, t \in \mathbb{Z}$ *correspondent aux nombres* $\frac{s}{1}, \frac{t}{1} \in \mathbb{Q}$ *etc..*)

Es spielt offensichtlich keine Rolle, ob man die Operationen $+, \cdot$ in $\mathbb{Z}$ oder in $\mathbb{Q}$ ausführt.
• *Comme on voit il ne joue aucun rôle si l'on exécute les opérations* $+, \cdot$ *dans* $\mathbb{Z}$ *ou bien dans* $\mathbb{Q}$.

Genauer • *Plus exactement*:
Sei • *Soit* $\varphi : \mathbb{Z} \longmapsto \mathbb{Q}$ mit • *avec* $\varphi(s) = \frac{s}{1}$. $\rightsquigarrow$ Dann ist • *Alors on a*:

$$Fi(s+t) = \varphi(s) + \varphi(t), \;\; \varphi(s \cdot t) = \varphi(s) \cdot \varphi(t)$$

$\rightsquigarrow$ φ ist also structurerhaltend • φ *conserve alors la structure.*
(φ ist „vertauschbar" mit $+, \cdot$. • *peut être "échangé avec"* $+, \cdot$.

Eine Abbildung mit solchen Eigenschaften heisst **Homomorphismus**
• *Une application avec de telles qualités s'appelle* **homomorphisme**.)

$\rightsquigarrow$ Identifikation (**Einbettung**) möglich. • *Identification (***plongement***) possible.*

$$\mathbb{Q} \ni \frac{s}{1} :=: s \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}, \;\; s^{-1} := (\frac{s}{1})^{-1} = \frac{1}{s}$$

4.4.4 Ausdehnung der Ordnungsrelation – Etendre la relation d'ordre

Sei • *Soit* $q, r \in \mathbb{Q}$, $s, m \in \mathbb{Z}$.

Wir definieren • *Nous définissons*: $q = \frac{s}{m} > 0 \;\Leftrightarrow\; s \cdot m > 0$.

Entsprechend für $'<'$. • *Correspondant pour* $'<'$.

Weiter • *En outre*: $q > r \;\Leftrightarrow (q - r) > 0$.

Entsprechend für $'<'$. • *Correspondant pour* $'<'$.

Regeln: • **Règles:** (für • *pour* '<')

- $\oslash$ $'>'$ resp $'<'$ ist Ordnungsrelation. • $'>'$ *resp* $'<'$ *relation d'ordre.*
- $\oslash$ $\forall_{q,r \in \mathbb{Q}} : \; r > q \;\dot\vee\; r = q \;\dot\vee\; r < q$
- $\oslash$ $\forall_{q,r \in \mathbb{Q}^+} : \; q + r > 0 \;\wedge\; q \cdot r > 0$
- $\oslash$ $\forall_{q \in \mathbb{Q}^+, \;\; r \in \mathbb{Q}^-} : \; q \cdot r < 0$
- $\oslash$ $\forall_{q,r \in \mathbb{Q}} : \; q \cdot r > 0 \;\wedge\; q > r \;\Rightarrow\; \frac{1}{r} > \frac{1}{q}$

4.4.5 Eigenschaften von Q – Qualités de Q

Eigenschaft der Dichtheit: $\mathbb{Q}$ ist **dicht**. • **Qualité de la densité***:* $\mathbb{Q}$ *est* **dense**.

Das bedeutet • *Ça signifie*: $\forall_{q,r \in \mathbb{Q}, \;\; q<r} \exists_{x \in \mathbb{Q}} : \; r < x < q$.

Archimedische Eigenschaft • **Qualité d'Archimède**: $\forall_{q,r \in \mathbb{Q}^+} \exists_{n \in \mathbb{N}} : \; n \cdot r > q$.

p–adische Entwicklung • développement p–adique

(Spezialfall: Dezimalbruchentwicklung.) • *(Cas spécial: Développement en fraction décimale.)*

$\forall_{q\in\mathbb{Q},\ n\in\mathbb{N}}$: q lässt sich nach $\mathbb{N}$ eindeutig in einen periodischen Bruch (ev. abbrechenden) p-adischen Bruch entwickeln • $\forall_{q\in\mathbb{Q},\ n\in\mathbb{N}}$*: on peut développer q dans une fraction p-adique périodique (ou limitée) p-adique et univoque.*

Umgekehrt stellt jeder solcher Bruch eine rationale Zahl dar. • *Par contre chaque fraction comme ça représente un nombre rationnel.*

4.5 Die Wurzel — La racine

Da die Wurzeln in den Mittelstufenschulen normalerweise ausführlich behandelt werden, sind hier nur Definitionen und Regeln wiedergegeben. Der Leser ist gebeten, die einfachen Beweise als Übung selber herzuleiten.
• *Comme dans écoles du premier cycle les racines sont normalement traitées de façon assez détaillée, on mentionne seulement les définitions et les règles importantes. Comme exercice, le lecteur devrait déduire soi–même les preuves simples pour ces règles.*

Auf die Natur der Wurzeln wollen wir dann später eingehen. Auf Seite 47 ff werden wir zeigen, dass die Wurzeln aus rationalen Zahlen in den häufigsten Fällen nicht mehr zu $\mathbb{Q}$, dafür aber zu $\mathbb{R}$ gehören.
• *Nous allons traiter la question de la nature des racines plus tard. A la page 47 ff, nous démontrerons que fréquement, les racines des nombres rationnels ne font plus part de $\mathbb{Q}$. A la place d'éléments de $\mathbb{Q}$ on trouve des éléments de $\mathbb{R}$.*

4.5.1 Die Quadratwurzel — La racine quarrée

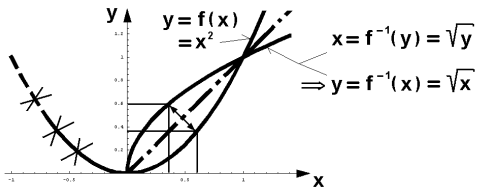
Sei • *Soit* $f(x) = y =:= x^2 = ,\ x \in \mathbb{R}_0^+\ \ (x \geq 0)$

Definition: • Définition: $f^{-1}(y) := \sqrt{y} = +\sqrt{y}$ ist die Umkehrfunktion von f auf $\mathbb{R}_0^+$
• $f^{-1}(y) := \sqrt{y} = +\sqrt{y}$ *est la fonction inverse de f sur* $\mathbb{R}_0^+$

Skizze: • Esquisse:

$$\begin{array}{ccc} x & \overset{f}{\longmapsto} & y = x^2 \\ x = \sqrt{y} & \underset{f^{-1}}{\longleftarrow} & y \end{array}$$

$$\rightsquigarrow\ f^{-1}(y) = x := +\sqrt{y}$$



Regeln: • Règles:

1 $x \in \mathbb{R}_0^+ \ \Rightarrow\ (x^2 = a\ \Leftrightarrow x = \sqrt{a} = +\sqrt{a})$

2 $+\sqrt{a} \geq 0$

3 $+\sqrt{a} \in \mathbb{R}\ \Rightarrow\ a = x^2 \in \mathbb{R}_0^+$

4 $a \in \mathbb{R}_0^+\ \Rightarrow\ +\sqrt{a^2} = a$

5 $|a| = +\sqrt{a^2}$ (auch Definition) • *(aussi une définition)*

6 $a, b \in \mathbb{R}_0^+ \;\Rightarrow\; \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

7 $a \in \mathbb{R}_0^+, b \in \mathbb{R}^+ \;\Rightarrow\; \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

4.5.2 Die n–te Wurzel — La n–ème racine

1 Sei • *Soit* $n = 2\,m,\;\; m \in \mathbb{N},\;\; f(x) = y := x^n = ,\;\; x \in \mathbb{R}_0^+\;\; (x \geq 0)$ oder • *ou*

2 Sei • *Soit* $n = 2\,m + 1,\;\; m \in \mathbb{N},\;\; f(x) = y := x^n = ,\;\; x \in \mathbb{R}$

Definition: • **Définition:** $f^{-1}(y) := \sqrt{y} = \sqrt[n]{y}$ ist die Umkehrfunktion von f auf W_f
• $f^{-1}(y) := \sqrt{y} = \sqrt[n]{y}$ *est la fonction inverse de* f *sur* W_f

Definition: • **Définition:** $a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}$

Konsequenz: • **Conséquence:**

1 Sei • *Soit* $a \in \mathbb{R}_0^+\;\; (a \geq 0) \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ definiert. • *défini.*

2 Sei • *Soit* $a \in \mathbb{R}^-\;\; (a < 0),\;\; n = 2\,m + 1,\;\; m \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ definiert. • *défini.*

Regeln: • **Règles:**

1 $\sqrt[n]{0} = 0^{\frac{1}{n}} = 0$ — Siehe Analysis. • *Voir analyse.*

2 $\sqrt[n]{1} = 1^{\frac{1}{n}} = 1$

3 $a \geq 0 \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \geq 0$

4 $a < 0,\;\; n = 2\,m + 1,\;\; m \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = -\sqrt[n]{|a|} = -|a|^{\frac{1}{n}}$

5 $(a \geq 0) \;\Rightarrow\; \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$

6 $(a \geq 0) \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{a^n} = (a^n)^{\frac{1}{n}} = a = (\sqrt[n]{a})^n = (a^{\frac{1}{n}})^n$

7 $a, b \in \mathbb{R}_0^+ \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b},\;\; a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}}$

8 $a \in \mathbb{R}_0^+, b \in \mathbb{R}^+ \;\Rightarrow\; \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}},\;\; \dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}}$

Definition: • **Définition:** $a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a},\;\; m \in \mathbb{N}_0 \rightsquigarrow\;\; a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m}$

$$a \neq 0 \rightsquigarrow\;\; a^{-\frac{1}{n}} = a^{\frac{-1}{n}} := \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}$$

Bemerkung: • **Remarque:** Für Wurzeln resp. Potenzen mit gebrochenen Exponenten gelten entsprechend die üblichen Rechenregeln wie für Poteznen mit ganzzahligen Exponenten (wie in $\mathbb{Q}$). • *Pour les racines resp. pour les puissances à des exposants qui sont des fractions, on a correspondamment les mêmes règles que pour les puissances à des nombres entiers comme exposants (comme dans* $\mathbb{Q}$*).*

Regeln: • **Règles:**

1 $a^{-\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^{-m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}$

2 $q := \frac{m}{n} \Rightarrow a^q \cdot b^q = (a \cdot b)^q$

3 $q := \frac{m}{n} \Rightarrow a^{q_1} \cdot a^{q_2} = a^{q_1+q_2}$

4 $q := \frac{m}{n} \Rightarrow (a^{q_1})^{q_2} = a^{q_1 \cdot q_2}$

5 u.s.w • *etc.*

4.6 Reelle Zahlen und Folgen — Nombres réels et suites

4.6.1 Darstellungsarten — Façons de représentation

Dezimalbrüche — Fractions décimales

In 3.3.1 auf Seite 17 haben wir die reellen Zahlen bereits getroffen. Sie bilden unsere wichtigste Grundmenge für Definitions– und Wertebereiche. • *Nous venons d'étudier les nombres réels dans 3.3.1 à la page 17. Pour nous ils sont l'emsemble fondamental le plus important pour les domaines de définition et de valeurs.*

Von früher wissen wir, dass die reellen Zahlen diejenigen Zahlen sind, die als **Dezimalbrüche** darstellbar oder vorstellbar sind. Z.B. π oder e (**Eulersche Zahl**): • *Naus avons déjà appris que les nombres réels sont ceux qu'on peut imaginer ou représenter comme* **fractions décimales**. *P.ex.* π *ou* e *(***nombre d'Euler***):*

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781 64\ldots$$

π ist nicht periodisch! Ebenso: • π *n'est pas périodique. La même chose vaut pour:*

$$e = 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995957496696762772407 7\ldots$$

Weiter sind bekanntlich die rationalen Zahlen genau diejenigen Zahlen, die sich auch als **periodische Dezimalbrüche** schreiben lassen und umgekehrt. Die Periode kann dabei auch 0 sein. Z.B.: • *En plus les nombres rationnels sont exactement ceux qu'on peut écrire comme fractions décimales périodiques (et inversément). La période peut être aussi* 0. *P.ex.:*

$$\frac{1}{4} = 0.25 = 0.250000000\ldots \quad \text{oder} \quad \bullet \quad ou \quad \frac{1}{7} = 0.142857142857142857\ldots$$

$\frac{a}{b} \rightsquigarrow$ Periodenlänge $< b$ (Wiederholung der Ziffern bei der Division, Vorrat beschränkt!).
• $\frac{a}{b} \rightsquigarrow$ *longueur de la période* $< b$ *(répétition des chiffres à la division, la réserve est limitée!).*

Oder: • *Ou:*
$x = 0.333\ldots \Rightarrow 10x = 3.333\ldots \Rightarrow 10x - x = 9x = 3.333\ldots - 0.333\ldots = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$
$\Rightarrow 3x = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1 = 3 \cdot 0.333\ldots = 0.999\ldots \Rightarrow 1 \stackrel{?}{=} 0.999\ldots$?

Stimmt das: $1 = 0.999\ldots$? — Das bedarf einer Erklärung. Wir müssen über die reellen Zahlen mehr in Erfahrung bringen! • *Est-ce juste:* $1 = 0.999\ldots$ *? — Il faut expliquer cela. Nous devons apprendre plus sur les nombres réels!*

Wir merken uns: • *Retenons:*

Wichtig: • **Important:**
$x \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; x$ darstellbar als unendlicher Dezimalbruch • *x peut être écrit comme fraction décimale infinie.*
$x \in \mathbb{Q} \;\Leftrightarrow\; x$ darstellbar als unendlicher periodischer Dezimalbruch • *x peut être écrit comme fraction décimale périodique infinie.*

Bemerkung: • **Remarque:** Statt Dezimalbrüche (im Dezimalsystem, Basis 10) kann man auch p–**adische Brüche** (Basis p) mit beliebigem $p \in \mathbb{N},\ \ p > 1$ verwenden. • *Au lieu d'utiliser des fractions décimales (système décimal, base* 10*) on peut aussi utiliser des* **factions** p–**adiques** *avec un* $p \in \mathbb{N},\ \ p > 1$ *quelconque.*

Kettenbrüche — Fractions continues

Beispiel eines **Kettenbruchs**: • *Exemple d'une* **fraction continue**

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}} := 1 + \frac{1\rfloor}{\lceil 1} + \frac{1\rfloor}{\lceil 1} + \frac{1\rfloor}{\lceil 1} + \frac{1\rfloor}{\lceil 1} + \cdots \left(= \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}\right)$$

$\rightsquigarrow$ Es gilt • *Il vaut*: $x = 1 + \dfrac{1}{x} \;\Rightarrow\; x^2 - x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
Da sicher gilt $x \geq 0$, kommt nur die Lösung $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ in Frage. • *Comme il est certain que $x \geq 0$, la solution $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est la seule qui compte.*

Oder: • *Ou:*

$$x = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \ldots}}}} = 1 + \frac{\frac{1}{4}\rfloor}{\lceil 1} + \frac{\frac{1}{4}\rfloor}{\lceil 1} + \frac{\frac{1}{4}\rfloor}{\lceil 1} + \frac{\frac{1}{4}\rfloor}{\lceil 1} + \cdots \;\Rightarrow\; x = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$$

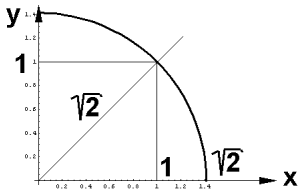
Interessanterweise gilt hier z.B.: • *Il est intéressant qu'il vaut ici p.ex.:*

Lemma: • **Lemme:** $\sqrt{2}, \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$

Indirekter Beweis für $\sqrt{2}$: • *Preuve indirecte pour $\sqrt{2}$:*
Annahme: • *Supposons que:* $\sqrt{2} \in \mathbb{Q},\ \sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ gekürzter Bruch • *fraction réduite,* $p, q \in \mathbb{N}$

(teilerfremd • *sans diviseur commun*). $\Rightarrow$ $2 = \dfrac{p^2}{q^2}$ $\Rightarrow$ $2q^2 = p^2$ $\Rightarrow$ p gerade • *pair* $\Rightarrow$ $p = 2k,\ k \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $2q^2 = 4k^2$ $\Rightarrow$ $q^2 = 2k^2$ $\Rightarrow$ q gerade • *pair* $\Rightarrow$ p, q haben den gemeinsamen Teiler 2 • *ont le diviseur commun* 2 (ggT'$pgdc(p,q) > 1$) $\Rightarrow$ Widerspruch! • *Contradiction!* $\rightsquigarrow$ Annahme $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ falsch. • *Supposition* $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ *fausse.*

Bemerkenswert ist, dass sich einerseits $\sqrt{2}$ resp. $\sqrt{5}$ sofort als geometrische Strecke bestimmen lässt (Pythagoras: $1^2 + 1^2 = \sqrt{2}^2 = 2$), dass $\sqrt{2}$ resp. $\sqrt{5}$ einfache Kettenbruchentwicklungen haben, dass sie jedoch wegen $\sqrt{2}, \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ keine periodische Dezimalbruchentwicklungen haben.



• *Il est bien remarquable que d'une part on peut donner* $\sqrt{2}$ *resp.* $\sqrt{5}$ *tout de suite comme segment géométrique (Pythagore:* $1^2 + 1^2 = \sqrt{2}^2 = 2$*), que* $\sqrt{2}$ *resp.* $\sqrt{5}$ *ont des développements simples en fractions continues, mais qu'ils n'ont pas de développements en fractions décimales périodiques parce qu'il vaut* $\sqrt{2}, \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

Folgende Zahleneinteilung ist geläufig: • *De coutume on partage les nombres comme il suit:*

$\mathbb{Z} \nearrow \mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \searrow \mathbb{Z}_0^-$

$\mathbb{Q}$ ..... $\nearrow$ gebrochen rat. • *rat. fract.*

$\mathbb{R} \nearrow \mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \searrow$ irrat.Z. • *nomb.irrat.*

$\nearrow$ algebraisch irrational • *irrationnel algébriquement*

$\searrow$ transzendent,z.B. π • *transcendant, p.ex.* π

Irrationale Zahlen als nichtperiodische Dezimalbrüche lassen sich sofort aufschreiben, z.B.:
• *On peut tout de suite noter des nombres irrationnels comme fractions décimales non–périodiques, p.ex.:*

$$x = 0.101101110111101111101111111011\ldots$$

Eine Möglichkeit, die reellen Zahlen mit Hilfe exakter mathematischer Grundlagen zu gewinnen, sind auch die **Dedekindschen Schnitte** (vgl. Lit.). • *Une possibilité de construire les nombres réels de façon exacte sont les coupures de Dedekind.*

4.6.2 Zahlenerweiterung — Elargir les ensembles de nombres

Bekanntlich muss man die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ einführen, weil in den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ Gleichungen wie $2 + x = 1$ nicht lösbar sind. $\mathbb{Q}$ führt man ein, weil in $\mathbb{Z}$ Gleichungen wie $2 \cdot x = 1$ nicht lösbar sind. Und die irrationalen Zahlen muss man einführen, weil in $\mathbb{Q}$ Gleichungen wie $x^2 = 2$ nicht lösbar sind. Die letzte Gleichung nennt man **algebraisch**, weil sie mit den Mitteln der Arithmetik formulierbar ist. So gelangt man zu reellen Zahlen. Dabei begegnet man aber sofort zwei neuen Problemen: Einmal hat eine Gleichung wie $x^2 = -1$ in $\mathbb{R}$ keine Lösung. Man kann die Lösbarkeit solcher Gleichungen wieder erzwingen, indem man $\mathbb{R}$ zu den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ erweitert. Andererseits lässt sich z.B. die Zahl π nicht durch einen endlichen arithmetischen Ausdruck beschreiben, ist also nicht algebraisch. (Der Beweis dieser Tatsache ist recht kompliziert und daher momentan hier nicht möglich). Es zeigt sich jedoch, dass man Zahlen wie π oder e (Eulersche Zahl) durch „Grenzprozesse“ gewinnen kann. Z.B. wenn man die Folge $\langle a_n \rangle = \langle (1 + \frac{1}{n})^n \rangle$ studiert, so beobachtet man, dass sich a_n immer mehr e nähert (gegen e **konvergiert**), beliebig genau, wenn man n genügend gross wählt.
• *Comme on sait il faut introduire les nombres* $\mathbb{Z}$ *parce que dans* $\mathbb{N}$ *des équations comme* $2 + x = 1$

ne sont bas résolubles. On introduit $\mathbb{Q}$ parce que dans $\mathbb{Z}$ des équations comme $2 \cdot x = 1$ ne sont bas résolubles. Et on introduit les nombres irrationnels parce qu'on ne peut pas résoudre en $\mathbb{Q}$ les équations du type $x^2 = 2$. La dernière équation s'appelle **algébrique**, *parce qu'on peut l'écrire avec les moyens de l'algèbre. Ainsi on arrive aux nombres réels. Mais là on observe deux problèmes nouveaux: D'une part une équation comme $x^2 = -1$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$. Mais en élargissant $\mathbb{R}$ aux nombres complexes $\mathbb{C}$ on peut obtenir une solution de force. D'autre part des nombres comme π ne se laissent pas décrire par une expression algébrique finie, ils ne sont donc pas algébriques. (La preuve de ce fait est bien compliquée. C'est pourquoi il n'est pas possible de la donner ici.) Mais on trouve qu'on peut décrire des nombres comme π ou bien e (nombre d'Euler) par des "processus à la limite. P. ex. si l'on étudie la suite $\langle a_n \rangle = \langle (1 + \frac{1}{n})^n \rangle$, on observe que a_n s'approche de plus en plus à e (***converge** vers e), aussi exactment qu'on veut, il faut seulement choisir n assez grand.*

Wie wir später beim Studium der Folgen sehen werden, hat $\mathbb{R}$ Eigenschaften, die in $\mathbb{Q}$ nicht vorhanden sind. Zwar ist $\mathbb{Q}$ **dicht** (d.h. zwischen zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Q}$ gibt es immer eine dritte, z.B. $c = \frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$, $a < c < b$). $\mathbb{Q}$ hat aber **Lücken**, z.B. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ oder $\pi \notin \mathbb{Q}$. $\mathbb{R}$ hingegen ist nicht nur dicht, sondern auch **lückenlos**. Zwischen die reellen Zahlen kann man nichts Vernünftiges, nicht Reelles, von reellen Zahlen durch endliche Differenzen Verschiedenes mehr einpacken. Später zeigen wir:
• *Nous allons voir, en étudiant les suites, que $\mathbb{R}$ a des qualités qui manquent dans $\mathbb{Q}$. Il vaut bien que $\mathbb{Q}$ est* **dense** *(ç.v.d. entre deux nombres $a, b \in \mathbb{Q}$ il existe toujours un troisième nombre, p.ex. $c = \frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$, $a < c < b$). Mais $\mathbb{Q}$ a des* **lacunes**, *p.ex. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ou $\pi \notin \mathbb{Q}$. Par contre $\mathbb{R}$ est dense et aussi* **sans lacunes**. *Entre deux nombres réels on ne peut plus placer de nombre non réel qui soit différent des nombres réels par une différence finie. Plus tard nous démontrerons:*

Satz: • **Théorème:**

1 Jede monotone und beschränkte Folge konvergiert in $\overline{\mathbb{R}}$:
$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ist „**abgeschlossen**". • *Chaque suite monotone et bornée est convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ est "***fermé***".*

2 Jede nichtleere Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$, die eine **untere Schranke** hat (Zahl s unterhalb allen Elementen von M), hat auch eine maximale untere Schranke. • *Chaque sous–ensemble $M \subseteq \mathbb{R}$ qui possède une* **borne inférieure** *(nombre s en dessous de tous les éléments de M), possède aussi une borne inférieure maximale.*

(Die Konvergenz wird später besprochen. Danach gilt z.B.:
• *On va traiter la convergence plus tard. Selon ce qui suit il vaut p.ex.:*
$x = 0.9\bar{9}\ldots \Rightarrow 10\,x = 9.9\bar{9}\ldots \Rightarrow 9\,x = 9 \Rightarrow x = 1$
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{0 + 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + \ldots + 10^{-n}}_{=0.999\ldots9} = 1$ d. h. • *ç. v. d.* $1 - 0.\underbrace{999\ldots9}_{n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$)

Konsequenz: • **Conséquence:**
Reelle Zahlen sind daher Klassen von Dezimalbrüchen mit gleichem Grenzwert.
• *Les nombres reelles sont donc des classes de fractions décimales au même valeur limite.*

4.6.3 Das Problem der Mächtigkeiten unendlicher Mengen — Le problème de la puissance des ensembles infinis

Zwei endliche Mengen nennen wir bekanntlich **gleichmächtig**, wenn sie die gleiche Anzahl Elemente haben — oder, was dasselbe bedeutet, wenn sich die Elemente gleich durchnummerieren oder bijektiv aufeinander abbilden lassen. Wie ist das nun entsprechend bei sogenannten „unendlichen Mengen" wie $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$? Ersichtlicherweise hat es in $\mathbb{Q}$ oder in $\mathbb{R}$ Zahlen, die in $\mathbb{N}$ fehlen: Es hat also in $\mathbb{N}$ weniger Zahlen als etwa in $\mathbb{R}$. Es gilt ja $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Andererseits hat es in $\mathbb{N}$ und in $\mathbb{R}$ unendlich viele Elemente. Ist daher etwa „weniger unendlich" wie in $\mathbb{N}$ das Gleiche wie „mehr unendlich" wie in $\mathbb{R}$ — oder ist es

anders? Man merkt schon: Unendlich ist noch kein scharf gefasster Begriff. Er bedarf einer Untersuchung oder Präzisierung. Den Anstoss zu solchen Untersuchungen hat Kummer[1] gegeben mit seiner Mengenlehre oder „Theorie der transfiniten Kardinalzahlen“ (d.h. überendliche Mächtigkeiten). • *Comme nous savons de l'algèbre, nous appelons deux ensembles finis* **d'égale puissance**, *s'ils ont le même nombre d'éléments — ou, ce qui est la même chose, si l'on peut numéroter les éléments par paires, ou bien si l'on peut les appliquer de façon bijective. Comment est–ce que c'est maintenant quant aux ensembles dits infinis tel que* $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ *ou* $\mathbb{R}$*? On voit que dans* $\mathbb{Q}$ *ou dans* $\mathbb{R}$ *on a des nombres qui manquent dans* $\mathbb{N}$*: Il y a donc moins de nombres dans* $\mathbb{N}$ *que dans* $\mathbb{R}$*. Il vaut:* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$*. D'autre part dans* $\mathbb{N}$ *et dans* $\mathbb{R}$ *il y a un nombre infini d'éléments. Est–ce que "moins infini comme dans* $\mathbb{N}$*" est donc la même chose que "plus infini comme dans* $\mathbb{R}$*" — ou bien est–ce différent? On aperçoit: "Infini" n'est pas une notion claire et nette. Il faut l'étudier et préciser. Kummer*[1] *a donné l'impact initial pour ces études par sa théorie des ensembles ou la "théorie des nombres cardinaux transfinis" (ç.v.d. les puissances transfinies).*

Um die Mächtigkeit zweier unendlicher Mengen vergleichen zu können, definieren wir: • *Pour pouvoir comparer les puissances de deux ensembles infinies, nous définissons:*

Definition: • **Définition:** M gleichmächtig wie N • *M a la même puissance que N*

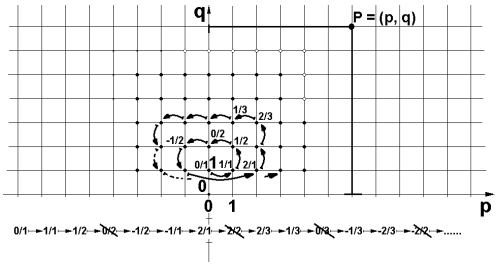
$$(|M| = |N|) \ : \ \Leftrightarrow \exists_{Bijection\ f} : M \overset{f\ bji.}{\longmapsto} N$$

Falls alle f höchstens injektiv, nie aber surjektiv sind: • *Si tous les f sont au maximum injectifs mais jamais surjectifs:*

$$|M| < |N|$$

Wir wollen nun zeigen: • *Nous voulons démontrer:* $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$. ($\Rightarrow$ $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$.)
Das gelingt, wenn wir jeder rationalen Zahl $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ eine Nummer (oder ein Index) $n \in \mathbb{N}$ zuordnen können. Dann haben wir $\mathbb{Q}$ abgezählt oder bijektiv auf $\mathbb{N}$ abgebildet.
• *Cela va réussir si nous arrivons à adjoindre à chaque nombre rationnel* $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ *un nombre (index)* $n \in \mathbb{N}$*. Alors nous avons compté les nombres de* $\mathbb{Q}$ *ou bien appliqué* $\mathbb{Q}$ *sur* $\mathbb{N}$ *de façon bijective.*

Trage dazu die Zahlen $\frac{p}{q}$ in ein Koordinatensystem ein. $\frac{p}{q}$ ist eindeutig einem Punkt $P_{p,q} = (p, q)$ zugeordnet. Diese Punkte lassen sich wie folgt abzählen: Gehe die Punkte vom Ursprung aus einer Spirale folgend im Gegenurzeigersinn durch, einer nach dem andern, und verteile jedem Punkt eine Nummer, falls er eine Zahl darstellt, die noch nicht vorgekommen ist. Auf diese Weise erhält jede rationale Zahl eine Nummer. $\mathbb{Q}$ ist daher so abgezählt.



• *Inscris les nombres* $\frac{p}{q}$ *dans un système de coordonnées.* $\frac{p}{q}$ *est appliqué à un point* $P_{p,q} = (p, q)$ *de façon bi–univoque. Ces points se laissent compter comme il suit: Suivez les points à partir de l'origine et en parcourant une spirale dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Passe par les points l'un après l'autre et donne à chacun un numéro s'il représente un nombre qu'on n'a pas déjà eu. De cette manière tous les nombres rationnels obtiennent un numéro: On a compté* $\mathbb{Q}$*.*

Lemma: • **Lemme:** $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$

$\rightsquigarrow$ **Problem:** • **Problème:** Wie verhält es sich mit $|\mathbb{Q}|$ und $|\mathbb{R}|$?
• *Quelle est la situation quant à* $|\mathbb{Q}|$ *et* $|\mathbb{R}|$*?*

[1] Kummer: 1810-1893

Wir wollen zeigen: $|\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$ indem wir wesentlich mehr zeigen: • *Nous voulons démontrer:* $|\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$ *en démontrant essenciellement plus:*

Lemma: • **Lemme:** $|\mathbb{Q}| < |[0,1]|$

$[0,1] \subset \mathbb{R}$ ist die Menge Zahlen, deren Dezimalbrüche, die mit '0.' beginnen. ($1 = 1.00\bar{0}\ldots = 0.99\bar{9}\ldots$)
• $[0,1] \subset \mathbb{R}$ *est l'ensemble des nombres, dont la fraction décimale commence par '0.'.* *(*$1 = 1.00\bar{0}\ldots = 0.99\bar{9}\ldots$*)*
Wir führen die Begründung indirekt: Wir nehmen an, es gelte $|\mathbb{Q}| = [0,1]$. D.h. die Zahlen im Intervall $[0,1]$ lassen sich vollständig durchnummerieren: • *Nous fondons cette thèse de façon indirecte: Supposons que soit* $|\mathbb{Q}| = [0,1]$. *ç.v.d. on peut numéroter de façon complète les nombres dans l'intervalle* $[0,1]$..
Z.B. • *P.ex.* :

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.z_{11}z_{12}z_{13}z_{14}\ldots \\ x_2 &= 0.z_{21}z_{22}z_{23}z_{24}\ldots \\ x_3 &= 0.z_{31}z_{32}z_{33}z_{34}\ldots \\ x_4 &= 0.z_{41}z_{42}z_{43}z_{44}\ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Es gilt demnach: • *Il vaut donc:*
$\{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\} = \{x_1 \mid i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q}$

mit • *avec* $z_{ij} \in Z = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ (Ziffern • *chiffres*)

Nun kann man aber sofort eine Zahl $x = r \in [0,1]$ konstruieren, die nicht in der Liste resp. Aufzählung vorkommt: • *On peut maintenant tout de suite contruire un nombre z qui manque dans la liste resp. dans l'énumération:*
Sei • *Soit* $r = 0.z_1z_2z_3z_4\ldots,\ z_i \in Z = \{0,\ldots,9\}$. Wähle für diese Konstruktion: • *Choisis pour cette construction:* $z_1 \neq z_{11},\ z_2 \neq z_{22},\ z_3 \neq z_{33}\ldots,\ z_i \neq z_{ii},$. (Wegen $z_i \neq z_{ii}$ stehen für z_i jeweils 9 Ziffern zur Auswahl! • *A cause de* $z_i \neq z_{ii}$ *on a pour chaque* z_i 9 *chiffres à disposition.*)
$\Rightarrow\ r \neq x_1$ (da • *car* $z_1 \neq z_{11}$), $r \neq x_2,\ r \neq x_3 \ldots r \neq x_i \ldots\ \Rightarrow\ r$ fehlt in der Liste, die Nummerierung ist nicht vollständig. • *r manque dans la liste, l'énumération n'est pas complète.*

$\rightsquigarrow$ **Problem:** • **Problème:**

Lässt sich $\mathbb{C}$ so wie $\mathbb{R}$ ordnen? • *Est-ce qu'on peut arranger* $\mathbb{C}$ *tel que* $\mathbb{R}$*?*

Untersuchungen zeigen, dass man sehr einfach in $\mathbb{C}$ eine strenge Ordnungsrelation definieren kann. Jedoch ist bis jetzt keine totale Ordnung bekannt, die elementargeometrisch Sinn macht. Der Preis für die Erweiterung von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{C}$ ist also der Verzicht auf eine geometrisch sinnvolle Ordnung.
• *Si l'on traite ce problème, on voit tout de suite qu'il est possible de définir dans* $\mathbb{C}$ *une relation d'ordre stricte. Mais jusqu'à maintenant on ne connaît pas de telle relation d'ordre totale qui donne un sens géométrique élémentaire. Alors le prix de l'élargissement de* $\mathbb{R}$ *à* $\mathbb{C}$ *est le renoncement à une relation d'ordre raisonnable.*

Bsp.: • **Exemple:**

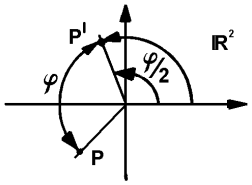
(Definition einer Ordnungsrelation in $\mathbb{C}$: • *Définition d'une relation d'ordre dans* $\mathbb{C}$*:*)

Wir werden dabei zeigen: • *Nous allons démontrons en outre :*

Lemma: • **Lemme:** $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^2| = |\mathbb{C}|$

(In der Algebra wird gezeigt, dass man die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ als Punkte einer Ebene auffassen kann. • *Dans l'algèbre on démontre qu'on peut comprendre les nombres complexes* $\mathbb{C}$ *comme points d'un plan.*)

Seien • *Soient* $(x, y) \in \mathbb{R}^2_{y+} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+_0$ $(y \geq 0)$.
$\mathbb{R}^2 \overset{bij.}{\longmapsto} M_2$ mit • *avec* $\varphi \overset{bij.}{\longmapsto} \frac{\varphi}{2}$,
$\mathbb{R}^2 \overset{bij.}{\longmapsto} M_4$ mit • *avec* $\varphi \overset{bij.}{\longmapsto} \frac{\varphi}{4}$,
$\mathbb{R}^2 \overset{bij.}{\longmapsto} M_{3/4}$ mit • *avec* $\varphi \overset{bij.}{\longmapsto} \frac{3\,\varphi}{4}$



$\Rightarrow |M_4| = |M_2| = |M_{3/4}| = |\mathbb{R}^2|$ (*Bij.*) $\wedge$ $M_4 \subset M_2 \subset \mathbb{R}^2_{y+} \subset M_{3/4} \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow |\mathbb{R}^2_{y+}| = |\mathbb{R}^2|$
Trotz der Anschaulichkeit obiger Abbildung haben wir noch keine Bijektivität. Das kann man aber wie folgt erreichen:
• *L'application qu'on vient de traiter donne une idée, mais elle ne donne pas la bijectivité. Mais on peut l'avoir comme il suit:*

Sei • *Soit*

$$f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{1-x}) - 1 & x \in [0, 1) \\ -x + 1 & x \in [1, \infty) \end{cases}$$

f bildet $\mathbb{R}^+_0$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ ab. $\rightsquigarrow$ $h = f^{-1}$ bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}^+_0$ ab.
• *f applique $\mathbb{R}^+_0$ sur $\mathbb{R}$ de façon bijective.* $\rightsquigarrow$ *$h = f^{-1}$ applique $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^+_0$ de façon bijective.*

$\rightsquigarrow$ Mit h können wir daher $\mathbb{C}$ auf die obere komplexe Halbebene ($Im(z) \geq 0$) abbilden. • *A l'aide de h nous pouvons donc appliquer $\mathbb{C}$ sur le demi–plan complexe en haut (($Im(z) \geq 0$))*

$\rightsquigarrow$ Seien somit: • *Soient donc:* $z_1 = a_1 + i\,b_1$, $z_2 = a_2 + i\,b_2$, $a_k \in \mathbb{R}$, $b_k \in \mathbb{R}^+_0$. $\rightsquigarrow$ $Im(z) \geq 0$

$\rightsquigarrow$ $x = v_j\, v_{j-1} \ldots v_2\, v_1.x_1\, x_2\, x_3 \ldots$, $y = w_k\, w_{k-1} \ldots w_2\, w_1.y_1\, y_2\, y_3 \ldots$, $v_i, x_i, w_i.y_i \in Z = \{0, \ldots, 9\}$
Betrachte den Fall $j \geq k$. Fülle nun y vorne bis zur j–ten Stelle mit 0 auf. • *Complète maintenant y de devant avec des 0 jusqu'à la place j.*
$\rightsquigarrow$ $y = 0_j\, 0_{j-1} \ldots 0_{k+1}\, w_k\, w_{k-1} \ldots w_2\, w_1.y_1\, y_2\, y_3 \ldots := w_j\, w_{j-1} \ldots w_{k+1}\, w_k\, w_{k-1} \ldots w_2\, w_1.y_1\, y_2\, y_3 \ldots$

Für die Abbildung $(x, y) \in \mathbb{R}^2_{y \geq 0} \longmapsto z \in \mathbb{R}$ „mischen“ wir die Dezimalbrüche wie folgt: • *Pour l'application $(x, y) \in \mathbb{R}^2_{y \geq 0} \longmapsto z \in \mathbb{R}$ nous "mélangeons" les fractions décimales comme il suit:*

$$(x, y) := (x/y) = (v_j\, v_{j-1} \ldots v_2\, v_1.x_1\, x_2\, x_3 \ldots / \; w_j\, w_{j-1} \ldots w_2\, w_1.y_1\, y_2\, y_3 \ldots) \longmapsto z = \\ = v_j\, w_j\, v_{j-1}\, w_{j-1} \ldots v_2\, w_2\, v_1\, w_1.x_1\, y_1\, x_2\, y_2\, x_3\, y_3 \ldots$$

mit $sgn(z) := sgn(x)$
(Für $j \leq k$ argumentiert man ebenso.) • *(Pour $j \leq k$ on prend les mêmes arguments.)*

Ersichtlicherweise ist diese Abbildung „beinahe“ bijektiv, denn die „Entmischung“ bei der Rückabbildung geht stellenweise eindeutig und ist somit problemlos möglich. • *On voit bien que cette application est "presque" bijective, car la réconstruction des nombres x et y va par places de façon univoque et ne pose*

donc pas de problème.
Es besteht noch das Problem, dass einige reelle Zahlen nicht eindeutig darstellbar sind. • *Il y a encore le problème que quelques nombres réels ne sont pas clairement représentables.*

Bsp.: • **Exemple:** $1.000\bar{0}\ldots = 0.999\bar{9}\ldots$

Das Problem besteht aber nur für abzählbar viele periodische Dezimalbrüche, d.h. für rationale Zahlen, für die gilt: • *Mais problème existe seulement pour certains fractions décimales périodiques qui sont dénombrables, c.-à.-d. pour les nombres rationnels. Pour ceux–là il vaut:*

$$|\mathbb{Q}| \;<\; |\mathbb{R}|, \;\; |\mathbb{Q}| + |\mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$$

$$\rightsquigarrow \quad \exists_f \; \mathbb{R} \overset{f\ bji.}{\longmapsto} \mathbb{R}^2 \qquad \ddot{\smile}$$

Als erste Konsequenz haben wir nun: • *On a donc comme première conséquence:*

Satz: • **Théorème:** $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^2| = |\mathbb{C}|$

Konsequenz: • **Conséquence:** Es gibt somit verschiedene Typen von „unendlich“: Z.B. ∞ vom Typ $|\mathbb{N}|$ ($\rightsquigarrow \infty_{\mathbb{N}}$) oder ∞ vom Typ $|\mathbb{R}|$ ($\rightsquigarrow \infty_{\mathbb{R}}$) • *Il existe donc différents "types d'infini": P.ex. ∞ du type $|\mathbb{N}|$ ($\rightsquigarrow \infty_{\mathbb{N}}$) ou ∞ du type $|\mathbb{R}|$ ($\rightsquigarrow \infty_{\mathbb{R}}$).*

Wir werden weiter unten sehen, dass für immer grösser werdende n (n geht „gegen unendlich“) die Folgenglieder $a_n = \frac{1}{n}$ von $\langle a_n \rangle$ immer näher zu 0 rücken, was uns dann später zu Feststellungen wie „$\frac{1}{0^+} = \infty$“ führt. Daraus sieht man, dass zu verschiedenen Typen von ∞ auch verschiedene Typen von 0 gehören müssen, eine Entdeckung, die sich in der „Non–Standard–Analysis“ ausbeuten lässt. Elemente aus diesem Bereich werden uns für die Anschaulichkeit und das Verständnis im Folgenden eine grosse Hilfe sein.
• *Nous allons voir plus tard que pour des n qui s'agrandissent, (n va "vers infini") les termes de la suite $a_n = \frac{1}{n}$ de $\langle a_n \rangle$ s'approchent de plus en plus à 0. Plus tard ça nous permet de constater "$\frac{1}{0^+} = \infty$". On voit donc que pour des types différents d'infini ∞ il faut donc aussi des types différents de 0. C'est une découverte dont on peut profiter dans l'analyse "Non–Standard". Des éléments de ce domaine nous seront une grande aide pour la compréhension et la clarté des situations en ce qui suit.*

Konsequenz: • **Conséquence:** Dimension $\neq$ Mächtigkeit • *Dimension $\neq$ puissance*

4.6.4 Weitere Resultate — D'autres résultats

Siehe Seite 51: • *Voir page 51:*

$$((\frac{p}{q} \hat{=} P_{p,q} = (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}) \;\wedge\; (|\mathbb{Z} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|)) \;\Rightarrow\; \mathbb{Q} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$$
$$\rightsquigarrow \;\; (|A_1| = |A_2| = |\mathbb{N}| \;\Rightarrow\; |A_1 \times A_2| = |\mathbb{N}|$$
$$\rightsquigarrow \;\; (|A_1| = \ldots = |A_k| = |\mathbb{N}|) \;\Rightarrow\; |A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k| = |\mathbb{N}|$$

Satz: • **Théorème:** $(|A_1| = \ldots = |A_k| = |\mathbb{N}|) \;\Rightarrow\; |A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k| = |\mathbb{N}|$

Analog sieht man (vgl. Seite 54): • *Analogiquement nous constatons (voir page 54):*

Satz: • **Théorème:** $(|A_1| = \ldots = |A_k| = |\mathbb{R}|) \;\Rightarrow\; |A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k| = |\mathbb{R}|$

Weiter gilt: • *En outre on peut déduire:*

Satz: • **Théorème:** $|A| < |\mathbb{N}| \;\Rightarrow\; |A| \in \mathbb{N}_0$

Zum Beweis: Sonst Widerspruch zum zornschen Lemma (Lit.).
• *Si non: Cotradiction au lemme de Kuratowski–Zorn (lit.).*

Satz: • **Théorème:** $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |[0,1]| = |\mathbb{R}| < |\mathcal{P}(\mathbb{R})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))| < \ldots$

Zum Beweis: • **Quant à la preuve:**

1 $f : x \overset{bij.}{\longmapsto} f(x) = \dfrac{1}{x} \rightsquigarrow\; f : (0,1] \overset{bij.}{\longmapsto} [1,\infty) \rightsquigarrow\; |[0,1]| = |(0,1]| = |[1,\infty)|$

$|[0,1]| = |[1,\infty)| \;\wedge\; [0,1] \cup [1,\infty) = \mathbb{R}_0^+ \;\Rightarrow\; |[0,1]| = |\mathbb{R}_0^+|$

$|\mathbb{R}_0^+| = |\mathbb{R}^-| \;\wedge\; \mathbb{R}_0^+ \cup \mathbb{R}^- = \mathbb{R} \;\Rightarrow\; |[0,1]| = |\mathbb{R}_0^+| = |\mathbb{R}|$

2 Sei • *Soit* $z_k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ (Ziffern) • *(chiffres)*
$\rightsquigarrow$ binär: • *binaire:* $z_k \hat{=} b_k \in \{0,1,10,11,100,101,110,111,1000,1001\}$.

Entsprechend im 11–er System: • *Correspondant dans le système avec la base* 11*:*
$z_k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \hat{\subset} \{0_{(11)}, 1_{(11)}, 2_{(11)}, 3_{(11)}, 4_{(11)}, 5_{(11)}, 6_{(11)}, 7_{(11)}, 8_{(11)}, 9_{(11)}, A_{(11)}\}$

Sei • *Soit* $z = 0.z_1z_2z_3z_4\ldots \in [0,1) \rightsquigarrow\; \exists_{f\ inj.} :\; [0,1) \overset{inj.}{\longmapsto} \mathcal{P}(\mathbb{N}) :$
$z = 0.z_1z_2z_3z_4\ldots \overset{inj.}{\longmapsto} M = \{z_1, z_{2,3}, z_{4,5,6}, z_{7,8,9,10,}\ldots\},\;\; M \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Dabei ist: • *On y utilise:*
$z_1 : \hat{=} A_{(11)} z_{(11);1} \in \mathbb{N},\;\; z_{2,3} : \hat{=} A_{(11)} z_{(11);2} z_{(11);3} \in \mathbb{N},\;\; z_{4,5,6} : \hat{=} A_{(11)} z_{(11);4} z_{(11);5} z_{(11);6} \in \mathbb{N}\ldots$
Wegen der Anzahl Ziffern gilt: • *A cause du nombre des chiffres il vaut:* $z_1 < z_{2,3} < z_{4,5,6} < \ldots$
Durch die vorgestellte $A_{(11)}$ wird erreicht, dass die jeweils entstehende Zahl $z_{\ldots}$ nicht mit 0 beginnen kann und so die Ordnung nicht mehr stimmt. • *Par* $A_{(11)}$ *placé devant on garantit que le nombre obtenu ne peut pas commencer avec un* 0 *ce qui dérangerait l'ordre des monbres.*

$$\Rightarrow\; |[0,1)| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$$

3 Sei • *Soit* $M \in \mathcal{P}(\mathbb{N}),\;\; M = \{n_1, n_2, n_3, n_4, \ldots\} \in \mathbb{N}$ mit • *avec* $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \ldots$.

$\rightsquigarrow\; \exists_{f_1\ inj.} :\; \mathcal{P}(\mathbb{N}) \overset{inj.}{\longmapsto} [0,1),\;\; \mathcal{P}(\mathbb{N}) \ni M = \{n_1, n_2, n_3, n_4, \ldots\} \overset{inj.}{\longmapsto} z \in [0,1)$

Dabei ist: • *On y utilise:*
$n_1 = b_1,\;\; n_2 = b_2,\;\; n_3 = b_3, \ldots, b_k =$ Binärdarstellung von n_k • $b_k =$ *représentation binaire de* n_k
und • *et* $z := 0.b_1 2 b_2 2 b_3 2 b_4 2 \ldots$

Durch die eingeschobene 2 wird jeweils die eindeutige Trennung der verwendeten Binärzahlen garantiert. Damit wird die Abbildung f_1 injektiv. • *Par le* 2 *inséreé on garantit la distinction univoque des nombres binaires utilisés. Ceci rend l'application* f_1 *injektive.*

$$\Rightarrow \ |\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |[0,1)|$$

4

$$(|[0,1)| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|) \ \wedge \ (|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |[0,1)|) \ \Rightarrow \ |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |[0,1)| = |\mathbb{R}|$$

5 Sei • *Soit* $|\mathbb{N}| \leq |M|$

Vor.: • *Hyp.:* $\exists_{f \ bij.} : \ M \overset{bij.}{\longmapsto} \mathcal{P}(M)$ $\quad\rightsquigarrow$ Frage: • *Question:* $|M| < |\mathcal{P}(M)|$?

Sei • *Soit* $T = \{m_j \mid m_j \notin f(m_j) \subset \mathcal{P}(M), \ j \in \{Ind.\}\}$,
$\{Ind.\}$ = Indexmenge • *Ensemble des indices*

Es gilt: • *Il vaut:* $T \neq \{\}$
Ansonst: • *Si non:* $T = \{\} \rightsquigarrow \ \forall_{m_k} : \ \{m_k\} \in \mathcal{P}(M) \ \wedge \ f^{-1}(\{m_k\}) = m_k$
$\rightsquigarrow$ f nicht injektiv, alle Bilder haben Mächtigkeit 1. • f *non injective, tous les images ont la puissance* 1.

$$\rightsquigarrow T \neq \{\}$$

$\rightsquigarrow \ \exists_{f \ bij., \ x_0} : \ M \overset{inj.}{\longmapsto} \mathcal{P}(M) \ \wedge \ T = f(x_0) \in \mathcal{P}(M), \ x_0 = f^{-1}(T)$

Sei • *Soit* $x_0 \notin T = f(x_0) \ \Rightarrow \ x_0 \in T$ (nach Def. von T) • *selon déf. de* T.
Sei • *Soit* $x_0 \in T = f(x_0) \ \Rightarrow \ x_0 \notin T$ (nach Def. von T) • *selon déf. de* T.
$\Rightarrow \ (x_0 \in T \ \Leftrightarrow x_0 \notin T) \rightsquigarrow$ Widerspruch! • *Contradiction!*

$\rightsquigarrow$ Voraussetzung falsch! • *Hypothèse fausse!* $\rightsquigarrow \ \neg\exists_{f \ bij.} : \ M \overset{bij.}{\longmapsto} \mathcal{P}(M)$

Es gilt: • *Il vaut:* $(|\mathbb{N}| \leq |M| \ \wedge \ M \subset \mathcal{P}(M)) \ \Rightarrow \ |\mathbb{N}| \leq |M| < |\mathcal{P}(M)|$

Kapitel • Chapitre 5

Vektoren – Vecteurs

5.1 Koordinatenunabhängige Vektorrechnung – Calcul vectoriel sans système de coordonnés

5.1.1 Inhalt, Grundlagen – Contenu, fondements

Im Folgenden geht es um den Ausbau von Vektorgeometrie und Vektoralgebra. Grundlage ist dabei der Stoff, der für die Berufsmatur verlangt wird. Zur Vereinheitlichung von Notation und Begriffssprache müssen hier einige bekannte Dinge in Kürze nochmals dargestellt werden.
• *Dans ce qui suit, il s'agit de continuer et compléter la géométrie vectorielle et l'algèbre vectorielle. La base en est la matière nécessaire pour la maturité professionnelle. Pour l'unification de la notation et de la langue spécifique quelques sujets connus sont de nouveau brièvement présentés.*

Hier nicht repetierte Grundlagen für die Theorie: Euklidsche Geometrie, Translationen, Pfeile, Äquivalenzklassen u.s.w. .
• *Des notions et bases pour la théorie qui ne sont plus répétées ici: Géométrie d'Euclide, translations, flèches, classes d'équivalence etc. .*

Definition des Vektors in der Vektorgeometrie:

Vektor = Äquivalenzklasse gleichgerichteter gleichlanger Pfeile.

• **Définition du vecteur dans la géométrie vectorielle:**

• *Vecteur = classes d'équivalence de flèches de la même longueur et direction.*

$\rightsquigarrow$ Ein Vektor definiert geometrisch eine **Translation** aller Punkte der Ebene, des Raumes, ...
• *Par un vecteur, géométriquement on définit une* **translation** *de tous les points du plan, de l'espace, ...*

Repräsentant eines Vektors: Um einen Vektor zu definieren, genügt es, einen einzigen Pfeil der Äquivalenzklasse anzugeben. Ein solcher heisst **Repräsentant** (der Klasse).
• **Représentant d'un vecteur***: Pour définir un vecteur, il suffit de donner une seule flèche de la classes d'équivalence. Celle–là s'appelle* **représentant** *(de la classe).*

Skalar: Element eines Körpers (vorläufig geordnet), z.B. Zahl $\in \mathbb{R}$, Zahl $\in \mathbb{Q}$ u.s.w..
• **Scalaire:** *Elément d'un corps (pour le moment ordonné), par ex. un nombre* $\in \mathbb{R}$*, un nombre* $\in \mathbb{Q}$ *etc..*

Unscharfe Schreibweise • *Façon d'écrire peu exacte*: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.
(Exakter • *Plus exacte*: $\vec{a} \hat{=} \overrightarrow{AB}$.)

Symbole • **Des symboles:** Pfeil • *Flèche*: $\rightsquigarrow$ $\overrightarrow{AB}$.

Vektor: • *Vecteur:* $\rightsquigarrow$
$$\vec{a} = \{\overrightarrow{PQ} \mid (|PQ| = |AB|) \ \wedge \ (\overrightarrow{PQ} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB})\}$$

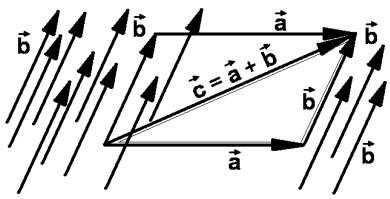
($\uparrow\uparrow$: Gleiche Richtung • *même direction.*)

Länge eines Vektors (Norm, Betrag) • **Longueur d'un vecteur, valeur absolue, module:**
$|\vec{a}|$ $(= \|\vec{a}\|) := |\ \overrightarrow{AB}\ | = a$ (Skalar • *scalaire* $\in \mathbb{R}_0^+$).

5.1.2 Zur Addition – Quant à l'addition

$\rightsquigarrow$ **Addition** • **Addition:**

Geometrisch definierbar durch Parallelogrammaddition • *Peut être définie géométriquement par l'addition dans le parallelogramme.*



Sei • *Soit* $V :=$ {Geom. Vekt. d. Ebene bzw. Raum • *Vect. géom. dans le plan ou l'espace*}.

Definition: • **Définition:** Summe • *Somme*
$\vec{c} := \vec{a} + \vec{b}$:= zusammengesetzte Translation • *Translation composée*
$\rightsquigarrow$ $\overrightarrow{AC} := \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$\rightsquigarrow$ Koordinatenunabhängig! • *Sans système de coordonnés!*

Satz: • **Théorème:** $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ (Dreiecksungleichung) • *(Inequalité du triangle)*

Speziell • **Spécialement:** $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ für • *pour* $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$
$|\vec{a} + \vec{b}| = ||\vec{a}| - |\vec{b}||$ für • *pour* $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$

Regeln: • **Règles:**

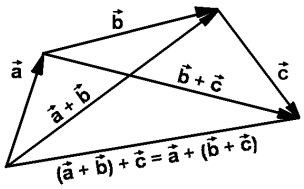
1 $(V, +)$ ist **abgeschlossen** • $(V, +)$ *est* **fermé**.

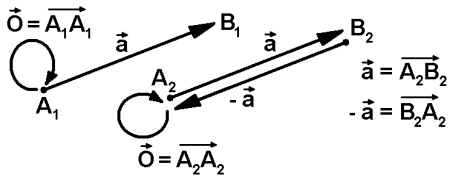
2 **Kommutativgesetz** • **Loi commutative:** $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

3 **Assoziativgesetz** • **Loi associative**: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

4 Def. **Nullvektor** • Déf. **vecteur nul**: $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$
$\rightsquigarrow$ $|\vec{0}| = 0, \qquad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

5 **Inverser Vektor** • **Vecteur inverse**:
Def. • *Déf.*: $\vec{a} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow -\vec{a} := \overrightarrow{BA}$ $\rightsquigarrow$ $\forall_{\vec{a} \in V} : \ \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

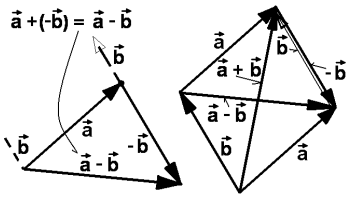


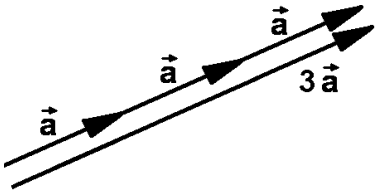


Satz: • **Théorème:** $\rightsquigarrow$ $(V,+)$ ist abelsche Gruppe • $(V,+)$ *est groupe commutatif*

Definition: • **Définition:** **(Subtraktion)** • **(Soustraction)**

$$\vec{a}-\vec{b} := \vec{a}+(-\vec{b})$$





5.1.3 Streckung von Vektoren – Allongement de vecteurs

Idee: Benütze geometrische Streckung eines Pfeils.
• **Idée:** *Utiliser l'allongement géométrique d'une flèche.*

Bsp.: • **Exemple:** Für Pfeile: • *Pour les flèches:*
Sei • *Soit* $\overrightarrow{AB} :\hat{=} \overrightarrow{BC}$ falls • *si* $(|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| \wedge \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC})$
$\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} :\hat{=} 2*\overrightarrow{AB}$, $(-\overrightarrow{AB})+(-\overrightarrow{AB}) := (-2)*\overrightarrow{AB}$.

Allgemeiner: • *Plus général*: Sei • *Soit* $\lambda > 0$:
$\lambda * \overrightarrow{AB} :=$ Geometrisch gestreckter Pfeil mit der λ–fachen Länge (gleicher Anfangspunkt, parallel).
• $\lambda * \overrightarrow{AB} :=$ *Flèche allongée de façon géométrique avec λ fois la longueur (même point initial, parallèle).*

Sei • *Soit* $\lambda < 0$: $\lambda * \overrightarrow{AB} := |\lambda| * \overrightarrow{BA}$

Allgemeiner für Vektoren: • *Plus général pour les vecteurs*:

Definition: • **Définition:** $\lambda * \vec{a} \hat{=} \lambda * \overrightarrow{AB}$ $\rightsquigarrow$ Kurz • *Bréf:* $\lambda\,\vec{a}$
$(\lambda * \vec{a},\ \lambda\,\vec{a}$**:)**

$\rightsquigarrow$ Koordinatenunabhängig! • *Sans système de coordonnés!*

Aus elementargeometrischen Gründen gilt: • *Pour des raisons de géométrie élémentaire il vaut:*

Konsequenz: • **Conséquence:** $|\lambda * \overrightarrow{AB}| = |\lambda| \cdot |\overrightarrow{AB}|$ oder • *ou* $|\lambda * \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

Folgende einfache Regeln und Gesetze sieht man geometrisch ein:
• *Les règles et lois simples suivantes peuvent être vérifiées de façon géométrique*:

Regeln: • **Règles:**

1 $1 * \vec{a} = \vec{a}$

2 $\lambda * \vec{0} = \vec{0}$

3 $(-\lambda) * \vec{a} = -(\lambda * \vec{a}) = (\lambda) * (-\vec{a})$

4 Distr.1: $(\lambda + \mu) * \vec{a} = \lambda * \vec{a} + \mu * \vec{a}$

5 Distr.2: $\lambda * (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda * \vec{a} + \lambda * \vec{b}$

6 Ass.: $(\lambda \cdot \mu) * \vec{a} = \lambda * (\mu * \vec{a})$

5.1.4 Allgemeine Vektordefinition – Définition générale des vecteurs

Sei V = Menge mit $(V, +)$ = abelsche Gruppe. • *Soit V = ensemble avec $(V, +)$ = groupe commutatif.*
Sei K = Menge mit $(K, +, \cdot)$ = Körper. • *Soit K = ensemble avec $(K, +, \cdot)$ = corps.*

Definition: • **Définition:** $((V, +),\ (K, +, \cdot),\ *)\ :=\ (V^{(+)}, K^{(+,\cdot)}, *)$
(Vektorraum • **Espace vectoriel)** heisst **Vektorraum** • *s'appelle* **espace vectoriel**

$:\Leftrightarrow$ es gilt • *il vaut* $\forall_{\vec{a},\vec{b}\in V,\ \lambda,\mu\in K}$

1 Distr.1: $(\lambda + \mu) * \vec{a} = \lambda * \vec{a} + \mu * \vec{a}$

2 Distr.2: $\lambda * (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda * \vec{a} + \lambda * \vec{b}$

3 Ass.: $(\lambda \cdot \mu) * \vec{a} = \lambda * (\mu * \vec{a})$

4 $1 * \vec{a} = \vec{a}$

Bemerkung: • **Remarque:**

$1 * \vec{a} = \vec{a}$ muss als Axiom vorausgesetzt werden, denn sonst könnte $\lambda * \vec{a} = \vec{0}$ für alle $\vec{a} \neq \vec{0}$ nicht ausgeschlossen werden. Hingegen lässt sich $1 * \vec{a} = \vec{a}$ für geometrische Vektoren geometrisch herleiten.
• *Il faut exiger $1 * \vec{a} = \vec{a}$ comme axiome, si non on pourrait trouver $\lambda * \vec{a} = \vec{0}$ pour tous les $\vec{a} \neq \vec{0}$. Par contre, pour des vecteurs géométriques on peut déduire $\lambda * \vec{a} = \vec{0}$ de façon géométrique.*

Folgerungen:
• **Conclusions:**

1 $\lambda * \vec{0} = \lambda * (\vec{0} + \vec{0}) = \lambda * \vec{0} + \lambda * \vec{0} \mid \quad +(-(\lambda * \vec{0}))$ $\Rightarrow$ **Regel:** • **Règle:** $\vec{0} = \lambda * \vec{0}$

2 $0 * \vec{a} = (0 + 0) * \vec{a} = 0 * \vec{a} + 0 * \vec{a} \mid \quad +(-(0 * \vec{a}))$ $\Rightarrow$ **Regel:** • **Règle:** $\vec{0} = 0 * \vec{a}$

3 $(\lambda * \vec{a}) + ((-\lambda) * \vec{a}) = (\lambda + (-\lambda)) * \vec{a} = 0 * \vec{a} = \vec{0} \mid$ $\Rightarrow$ **Regel:** • **Règle:** $(-\lambda) * \vec{a} = -(\lambda * \vec{a})$

4 $\vec{0} = \lambda * \vec{0} = \lambda * (\vec{a} + (-\vec{a})) = \lambda * \vec{a} + \lambda * (-\vec{a}) \mid \quad +(-(\lambda * \vec{a}))$
$\Rightarrow$ **Regel:** • **Règle:** $-(\lambda * \vec{a}) = \lambda * (-\vec{a})$

Bemerkung: • **Remarque:**

Ein Element $\in V$ heisst **Vektor**, ein Element $\in K$ heisst **Skalar**.
• *Un élément* $\in V$ *s'appelle* **vecteur**, *un élément* $\in K$ *s'appelle* **scalaire**.

Beispiele: • **Exemples:**

- $(V^{(+)}, K^{(+,\cdot)}, *) = (\mathbb{Q}^{(+)}, \mathbb{Q}^{(+,\cdot)}, *)$
- $(\mathbb{R}^{(+)}, \mathbb{R}^{(+,\cdot)}, *)$
- $(\mathbb{R}^{(+)}, \mathbb{Q}^{(+,\cdot)}, *)$
- $(\mathbb{Z}_p^{(+)}, \mathbb{Z}_p^{(+,\cdot)}, *)$
- u.s.w. • *etc.*.
- $(\mathbb{Z}^{(+)}, \mathbb{Q}^{(+,\cdot)}, *)$ ☹
- $(\mathbb{Q}^{(+)}, \mathbb{R}^{(+,\cdot)}, *)$ ☹
- $V = \{\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\}, \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$
- Z.B. Vektoren mir zwei Komponenten $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Bekannt aus der Vektorgeometrie.
  • *P.ex. des vecteurs à deux composants* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. *Connu de la géométrie vectorielle.*
- Polynome vom Grade n. • *Polynômes de degré* n.
- In einem Punkt absolut konvergente Potenzreihen. • *Des séries de puissances qui convergent de façon absolue dans un point.*
- U.s.w. • *Etc.*

5.1.5 Unterraum, direkte Summe – Sous–espace vectoriel, somme directe

Sei • *Soit* $(V^{(+)}, K^{(+,\cdot)}, *) = VR'EV$

Definition: • **Définition:** $(U^{(+)}, K^{(+,\cdot)}, *)$ ist **Unterraum (Teilraum)** von $(V^{(+)}, K^{(+,\cdot)}, *)$
(Unterraum, Teilraum)
• **(Sous–espace vectoriel)** • $(U^{(+)}, K^{(+,\cdot)}, *)$ *est* **sous–espace** *de* $(V^{(+)}, K^{(+,\cdot)}, *)$

$$:\Leftrightarrow \ (U^{(+)}, K^{(+,\cdot)}, *) = VR'EV \ \wedge \ U \subseteq V$$

Bsp.: • **Exemple:**

$V = \{\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\}$ mit • *avec* : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$ und • *et* $\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$.

$U = \{\vec{a}\,' = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\}$ mit • *avec* : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ und • *et* $\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\rightsquigarrow$ $\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ ist Unterraum von $\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$

• $\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ *est sous–espace de* $\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$

$\rightsquigarrow$ Vektoren mir zwei Komponenten. • *Des vecteurs à deux composants.* $\rightsquigarrow$ $\vec{a}\,' \hat{=} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Geg.: • **Donné:** $(W^{(+)}, K^{(+,\cdot)}, *) = VR'EV$ mit • *avec* :
$(U^{(+)}, K^{(+,\cdot)}, *), (V^{(+)}, K^{(+,\cdot)}, *)$ Unterräume • *sous–espaces vectoriels*

Definition: • **Définition:** $U + V := \{\vec{x} = \vec{u} + \vec{v} \mid \vec{u} \in U \ \wedge \ \vec{v} \in V\} \subseteq W$
(Summe) • **(Somme)**

Man siehr unmittelbar, dass das folgende Lemma gilt: On voit directement que le lemme suivant est valable:

Lemma: • **Lemme:** **Vor.:** • **Hyp.:**
U, V lineare Teilräume von W
• U, V *sous–espaces linéaires de* W

Beh.: • **Thè.:**
$U + V$ linearer Teilräum von W
• $U + V$ *sous–espace linéaire de* W

Definition: • **Définition:**
(Direkte Summe) • **(Somme directe)** $U \oplus V = W \ \Leftrightarrow \forall_{\vec{x} \in W} \ \exists^{!}_{\vec{u} \in U, \vec{v} \in V} \ : \ \vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$

Bemerkung: • **Remarque:** Direkte Summe bedeutet also, dass die Zerlegung $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ eindeutig ist. • *Somme directe signifie donc que la décomposition* $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ *est univoque.*

Bsp.: • **Exemple:** $(\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \wedge \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) \ \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

5.1.6 Lineare Abhängigkeit – Dépendance linéaire

Im Folgenden werden auch einige Begriffe aufgeführt, die von früheren Schulen her bekannt sein sollten.
• *Dans la matière suivante on mentionne aussi quelques notions, qui devraient être apprises aux écoles*

fréquentées préalablement.

Definition: (Linearkombination) • **Définition: • (Combinaison linéaire)**

$\vec{v}$ Linearkombination von $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}$
• $\vec{v}$ *Combinaison linéaire de* $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}$

$$:\Leftrightarrow \ \exists_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R} \text{ resp. } \in K,\ \lambda_k \neq 0} : \ \vec{v} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{v_k}$$

(Kurz • *Bref*: *LK'CL*)

Statt von einer „Linearkombination“ von Vektoren kann man auch von einer „Vektorkette“ sprechen.
• *Au lieu de parler d'une combinaison linéaire de vecteurs, on peut aussi parler d'une chaîne de vecteurs.*

Geometrie: • Géométrie:

Kollineare[19] Vektoren • Des vecteurs collinéaires[19] $(\vec{a} \overset{\text{col}}{\sim} \vec{b} \ \vee \ (\vec{a} \uparrow\uparrow \lambda \cdot \vec{b}) \ \vee \ (\vec{b} \uparrow\uparrow \lambda \cdot \vec{a}))$:

$$\vec{a} \overset{\text{col}}{\sim} \vec{b} \ :\Leftrightarrow \ \exists_{\lambda \in \mathbb{R}} : \ (\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}) \ \vee \ (\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a})$$

Satz: • Théorème: **<u>Vor.: • Hyp.:</u>**

$$\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$$

<u>Beh.: • Thè.:</u>

$$\vec{a} \overset{\text{col}}{\sim} \vec{b} \ \Leftrightarrow \ \exists_{\lambda_1,\lambda_2 \neq 0} : \ \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} = \vec{0}$$

(Kontraposition • *Contraposition*: $\neg(\vec{a} \overset{\text{col}}{\sim} \vec{b}) \ \Leftrightarrow \ (\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} = \vec{0} \ \Rightarrow \ \lambda_1 = \lambda_2 = 0)$)

<u>Beweis: • Preuve:</u> Geometrisch. • *Géométirquement*

Komplanare Vektoren • Des vecteurs complanaires:

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \overset{\text{com}}{\sim} \Phi : \ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \ || \text{ Ebene } \bullet \textit{ plan } \Phi$$

Satz: • Théorème: **<u>Vor.: • Hyp.:</u>**

$$\vec{a} \not\parallel \vec{b}, \ \ \Phi = \Phi(O, \vec{a}, \vec{b}), \ \ \vec{c} \overset{\text{com}}{\sim} \Phi$$

<u>Beh.: • Thè.:</u>

$\vec{c}$ *LK'CL* (von • *de* $\vec{a}, \vec{b}$).
D. h. • *Ç. v. d.*: $\exists_{\lambda_1,\lambda_2} : \ \vec{c} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}$.
D.h. $\vec{c}$ eindeutig zerlegbar nach $\vec{a}, \vec{b}$
• *Ç.v.d.* $\vec{c}$ *peut être décomposé de façon univoque d'après* $\vec{a}, \vec{b}$.

<u>Beweis: • Preuve:</u>

Geometrisch: Wähle Repräsentanten $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ von O aus. $\rightsquigarrow$ $\lambda_1 \vec{a}$, $\lambda_2 \vec{b}$, $\lambda_i \neq 0$ spannen ein Parallelogramm auf. $\vec{c} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}$ repräsentiert die Diagonale...

[19] Lat. con linea → col linea

• *Géométirquement: Choisir représentants* $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ *à partir de* O. $\rightsquigarrow$ $\lambda_1 \vec{a}$, $\lambda_2 \vec{b}$, $\lambda_i \neq 0$ *donnent un parallélogramme.* $\vec{c} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}$ *représentante la diagonale...*

(Kontraposition • *Contraposition*:

Satz: • **Théorème:** $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nicht komplanar • *non complanaire*

$:\Leftrightarrow \ (\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} = \vec{0} \ \Rightarrow \ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0)$

Satz: • **Théorème:**

Vor.: • **Hyp.:**

Gegeben • *Soient donnés*:
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ (im Raum • *dans l'éspace*),

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nicht komplanar
• $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *non complanaires*

Beh.: • **Thè.:**

$\exists_{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)} : \ \vec{d} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c}$,
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ eindeut. • $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *univoque.*
D. h. • *Ç. v. d.*:
$\vec{d}$ eindeutig zerlegbar nach $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.
• $\vec{d}$ *peut être décomposé de façon univoque d'après* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Beweis: • **Preuve:**

Im Raum mit Parallelepiped oder Spat analog dem 2–dimensionalen Fall.
• *Dans l'espace à l'aide d'un parallélépipède analogiquement au cas avec 2 dimensions.*

Begriffe • **Notions** (Vgl. letzter Satz • *Voir dernier théorème*):

Sei $\vec{d}$ *LK'CL* von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. • *Soit* $\vec{d}$ *LK'CL de* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. $\rightsquigarrow$

Definition: • **Définition:**

- ▷ $\lambda_1 \vec{a}, \lambda_2 \vec{b}, \lambda_3 \vec{c}$: **Vektorielle Komponenten** von $\vec{d}$. • **Composants vectoriels** *de* $\vec{d}$.
- ▷ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$: **Skalare Komponenten** $\vec{d}$. • **Composants scalaires** *de* $\vec{d}$.
- ▷ $V = \{$Vektoren • *vecteurs*$\} \rightsquigarrow$ **linear unabhängig** • **linéairement indépandants**
  $:\Leftrightarrow$ keiner ist *LK'CL* der andern • *aucun n'est LK'CLdes autres.*

$\rightsquigarrow$ Analogie: Kollinear — komplanar — linear abhängig.
• *Analogie: Collinéaire — complanaire – linéairement dépendant.*

Symbol: • **Symbole:** *l.u.'l.i.*

Andernfalls **linear abhängig** • *Autrement* **linéairement dépendant**

Symbol: • **Symbole:** *l.a.'l.d.*.

(Im Raum bedeutet *l.a.'l.d.* auch komplanar, in der Ebene auch kollinear.)
• *(Dans l'éspace l.a.'l.d. signifie aussi complanair, dans le plan il signifie collinéair.)*

Konsequenzen: • **Conséquences:**

Vor.: • **Hyp.:**

Sei • *Soit* $V = \{\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n}\}$

1 **Beh.:** • **Thè.:**

$$V \;\; l.a.'l.d. \Leftrightarrow \exists_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R} \text{ resp. } \in K,\;\; \lambda_k \neq 0} : \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, \vec{v_k} = \vec{0}$$

2 **Beh.:** • **Thè.:**

$$V \;\; l.u.'l.i. \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, \vec{v_k} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \forall_{i=1}^{n} : \; \lambda_i = 0, \;\; \lambda_k \neq 0$$

(D.h.: keiner der Vektoren nach den andern in Komponenten zerlegbar
• *Ç.v.d.: Aucun des vecteurs n'est décomposable en composants d'après les autres.*)

Wichtig: • **Important:**

Statt zu sagen „$\vec{v}$ ist von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots$ linear abhängig" kann man auch sagen **die Vektoren** $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots$ **spannen den Vektor** $\vec{v}$ **auf**.
• *Au lieu de dire "$\vec{v}$ est linéairement dépendant de $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots$", on peut aussi dire le vecteur* **"$\vec{v}$ se base sur** $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots$**"** *ou* **"les vecteurs** $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots$ **supportent** $\vec{v}$**"**.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \, \vec{a} + \mu \, \vec{b} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \lambda, \mu = ?$$

$$\begin{aligned} 3 &= \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 4 \\ 2 &= \lambda \cdot 3 + \mu \cdot 1 \end{aligned} \qquad \rightsquigarrow \;\; \lambda = \frac{1}{3}, \;\; \mu = \frac{2}{3}$$

Bemerkung: • **Remarque:** Dass eine Menge von Vektoren linear unabhängig ist, bedeutet auch, dass es eine für „nicht triviale Nullsumme" $\sum \lambda_i \, \vec{v}_i$ gibt, d.h. $\exists \; \lambda_i \neq 0$. • *"Un ensemble de vecteurs est linéairement independent" signifie qu'il existe une somme zéro* $\sum \lambda_i \, \vec{v}_i$ *qui n'est pas banal, ç.v.d.* $\exists \; \lambda_i \neq 0$.

5.1.7 Basen – Des bases

Geg.: • **Donné:** *VR'EV* $= (V^{(+)}, K^{(+,\cdot)}, *)$.

Definition: • **Définition:** $M \subseteq V$ heisst **Erzeugendensystem** von V
• $M \subseteq V$ *s'appelle* **système de générateurs** *de* V
$:\Leftrightarrow\ \forall_{\vec{v}\in V}:\ \vec{v}$ ist *LK'CL* von Vektoren $\in M$.
• $:\Leftrightarrow\ \forall_{\vec{v}\in V}:\ \vec{v}$ *est LK'CL de vecteurs* $\in M$.

M heisst **Basis** von *VR'EV* • M *s'appelle* **base** *de VR'EV*
$:\Leftrightarrow\ M$ ist *l.u.'l.i.* Erzeugendensystem von *VR'EV*.
• $:\Leftrightarrow\ M$ *est système de générateurs l.u.'l.i. de VR'EV.*

Bsp.: • **Exemple:**
$V = \{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\},\ \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in V$ Erzeugendensystem: • *Système de générateurs:*
$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\} \rightsquigarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Konsequenz: • **Conséquence:** Eine Basis ist also ein minimales Erzeugendensystem.
• *Une base est donc un système de générateurs minimal.*

Bsp.: • **Exemple:** $B = \{\lambda_i, x^2, \ldots, x^n \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\},\ \vec{v} = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_n x^n$

Bemerkung: • **Remarque:**
Im späteren Gebrauch werden wir hier **nur Basen mit endlicher Mächtigkeit** betrachten. Bei Basen mit transfiniten oder unendlichen Mächtigkeiten wird die Situation etwas delikater.
• *Nous allons utiliser seulement des* **bases avec une puissance finie**. *Quant aux bases à puissance transfinie ou infinie la situation est plus délicate.*

Sei • *Soit* M Basis • *base*, $|M| = m,\ m \in \mathbb{N}. \rightsquigarrow$ Man findet sofort • *On trouve tout de suite*:

Satz: • **Théorème:** Alle Basen eines Vektorraums V haben dieselbe Mächtigkeit m.
• *Toutes les bases d'un espace vectoriel* V *ont la même puissance* m.

<u>Beweis: • Preuve:</u>

Idee: Austausch der Basisvektoren. • *Idée: Echanger les vecteurs de base.*

Definition: • **Définition:** Dimension • *Dimension*

Sei • *Soit* $m =$ Mächtigkeit der Basis $(= |\text{Basis}|)$ • $=$ *puissance de la base* $(= |\ \bullet\ \textit{base}|)$

m heisst **Dimension** des *VR'EV* • m *s'appelle* **dimension** *du VR'EV*: $m = Dim(VR'EV)$

Bsp.: • **Exemp.:**

⊘ $V = \{$Vektoren der Ebene • *Vecteurs du plan*$\}$:
$\dim(V) = m = 2$

⊘ $V = \{$Vektoren des Raumes • *Vecteurs de l'espace*$\}$:
$\dim(V) = m = 3$

⊘ $V = \{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \}$: $\rightsquigarrow \quad \dim(V) = m = n$

⊘ $V = \{$Polynome • *polynômes* $p(x)$, $\ pgrad\,(p(x)) \leq n\}$:
$\dim(V) = m = n + 1$,

pgrad = Polynomgrad • *grade polynomial*

Für Basen gelten noch folgende Sätze • *Pour les bases les théorèmes suivants sont aussi valables*:

Regeln: • **Règles:**

⊘ Jedes Erzeugendensystem enthält auch eine Basis: Basis = minimales Erzeugendensystem.
• *Chaque système de générateurs contient aussi une base: Base = système de générateurs minimal.*

⊘ Eine Basis ist eine maximale *l.u.'l.i.* Menge von Vektoren.
• *Une base est un ensemble de vecteurs l.u.'l.i. maximal.*

⊘ Jeder Vektorraum hat mindestens eine Basis.
• *Chaque espace vectoriel contient au moins une base.*

⊘ Sei • *Soit*
$B = \{\vec{a_i} \mid i \in$ Indexmenge • *ensemble d'indices*$\}$ (von • *de* V).
$\rightsquigarrow$ Jeder Vektor $\vec{v} \in V$ lässt sich eindeutig als *LK'CL* der Basis darstellen:
• *Chaque vecteur* $\vec{v} \in V$ *se laisse représenter de façon univoque comme LK'CL de la base*:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{\dots} \lambda_i \, \vec{a_i}$$

Bemerkung: • **Remarque:**

Die Dimension ist unabhängig von der Mächtigkeit. Während für die Mächtigkeit $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}^3| = \dots$ gilt, ist die Vektorraum–Dimension von $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ gleich 1, diejenige von $\mathbb{R}^2$ ist 2 u.s.w.. Im physikalischen Näherungs–Modell der euklidschen Geometrie (verstanden als „Gast der Wirklichkeit") lassen sich „Figuren" in $\mathbb{R}$ nach der Länge ordnen, solche in $\mathbb{R}^2$ hingegen nach Länge und Flächeninhalt. Länge und Flächeninhalt sind unabhängig voneinander (gleicher Umfang, verschiedene Formen und Flächeninhalte möglich). In $\mathbb{R}^3$ kommt noch der Volumeninhalt hinzu u.s.w.. Im geometrischen Raum $\mathbb{R}^3$ sind daher 3 verschiedene Ordnungsprinzipien möglich, von denen im gleichmächtigen $\mathbb{R}^1$ nur eines vorhanden ist. Dimension hat somit mit den Ordnungsmöglichkeiten einer Menge zu tun, die durch von der Mächtigkeit unabhängige Prinzipien gegeben sein müssen. Das kann z.B. geometrisch geschehen.
• *La dimension est indépendante de la puissance. Tandis que pour la puissance il vaut* $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^2| =$

$|\mathbb{R}^3| = \ldots$, la dimension de l'espace vectoriel de $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ est égale à 1, celle de $\mathbb{R}^2$ est 2 etc.. Dans le modèle approximatif physique de la géométrie euclidienne (compris comme "visiteur de la réalité"), on peut classer les "figures" par ordre dans $\mathbb{R}$ d'après la longueur, par contre les figures dans $\mathbb{R}^2$ d'après la longueur et la surface qui sont indépendantes l'une de l'autre (possible: même longueur de la circonférence, formes et surfaces différentes). Dans $\mathbb{R}^3$ on a en plus le volume etc.. Dans l'espace géométrique $\mathbb{R}^3$ on a donc 3 principes d´ordre différents qui sont possibles et dont il ne reste qu'un seul principe dans le $\mathbb{R}^1$. Par contre le $\mathbb{R}^1$ a la même puissance que le $\mathbb{R}^3$. La dimension a donc à faire avec les possibilités d'ordonner un ensemble. Ces possibilités doivent être données par des principes qui sont indépendents de la puissance. Ces principes peuvent être définis de façon géométrique.

5.1.8 Spezielle Typen von Vektoren – Types de vecteurs spéciaux

Ortsvektoren in der Geometrie in einem Koordinatensystem mit dem Ursprung O
• **Des vecteurs liés** *à des points géométriques dans un système de coordonnés avec l'origine O*:

Sei gegeben • *Soit donné*: Punkt • *Point $P \in$* (Raum • *espace*).

Definition: • **Définition:** **Ortsvektor** von P • **Vecteur lié (vecteur de position, rayon vecteur)** *à* $P := |OP|$

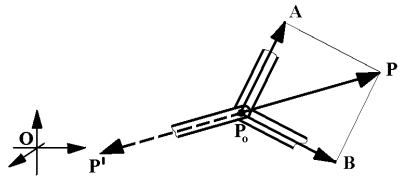
D. h. • *Ç. v. d.*: $|OP|$ ist Repräsentant der Klasse • *est représentant de la classe.*

Ist der Ortsvektor noch eine Funktion einer Variablen, so spricht man beim Graphen von einer **Ortskurve**. • *Si le vecteur lié à un point géométriques dans un système de coordonnés est en plus une fonction d'une variable, on parle d'un* **lieu de transfert en coordonnées**.

Gebundene Vektoren in der Physik: Geometrische Vektoren im Raum mit auf einen isolierten „Unterraum“ eingeschränkter Pfeilklasse. Z.B. an eine Gerade gebundene Vektoren $:= \{$Pfeile $\overrightarrow{OP} \mid P \in$ Gerade durch $O\}$
• **Des vecteurs liés** *en physique: Des vecteurs géométriques dans l'espace avec une classe de flèches restreinte à un "sous–espace" isolé. P. ex. des vecteurs liés à une droite* $:= \{$flèches $\overrightarrow{OP} \mid P \in$ droite qui passe par $O\}$

Bsp.: • **Exemple:** Z.B. in der Statik. Wirkung der Kraft nur auf der Wirkungslinie, Vektor an Wirkungslinie „gebunden“ • *P.ex. statique: Manifestation de la force seulement sur la ligne de manifestation, vecteur "lié" à cette ligne*

Pfeilvektoren oder **punktgebundene Ortsvektoren** (Statik): • *Des* **vecteurs de position liés à un point donné** *(statique):*



Die Pfeile $\overrightarrow{P_0P}, \overrightarrow{P_0A}, \overrightarrow{P_0B}, \overrightarrow{P_0P'}$ addieren sich als Repräsentanten von geometrischen Vektoren wie Vektoren. Daher bilden die an P_0 gebundenen Ortsvektoren oder Pfeile $\{\overrightarrow{P_0P_k}\}$ einen Vektorraum. $\overrightarrow{P_0P_0}$ bildet den Nullvektor. P_0 ist dabei für einen solchen Vektorraum fix gewählt.

• *Comme représentants de vecteurs géométriques, les flèches $\overrightarrow{P_0P}, \overrightarrow{P_0A}, \overrightarrow{P_0B}, \overrightarrow{P_0P'}$ s'additionnent comme des vecteurs. Par conséquent, comme vecteurs de position $\{\overrightarrow{P_0P_k}\}$ reliées à P_0, ces flèches forment un*

espace vectoriel. $\overrightarrow{P_0P_0}$ *donne le vecteur zéro. Pour un tel expace vectoriel, le point* P_0 *est choisi de manière fixe.*

Vektoren können also frei oder gebunden sein. Im zweiten Fall an Punkte, Geraden, Ebenen...
• *Un vecteur peut donc être libre ou bien lié à un point, une droite, un plan...*

5.2 Koordinatenabhängige Vektorrechnung – Calcul vectoriel dans un système de coordonnés

5.2.1 Einführung, Grundlagen, Koordinatensysteme – Introduction, fondements, systèmes de coordonnés

Einige Begriffe • **Quelques notions:**

Orientierte Gerade g • **Droite orientée** g**:**
Auf g ist eine positive Richtung festgelegt, z.B. durch einen zu g kollinearen Vektor $\vec{v}$. (2 Möglichkeiten.)
• *Sur* g *on a défini une direction positive, p.ex. par un vecteur* $\vec{v}$ *collinéair à* g*. (2 possibilités)*

Orientierte Ebene Φ • **Plan orienté** Φ**:**
Auf Φ ist ein positiver Drehsinn festgelegt, z.B. durch eine Rechtsschraube (u.s.w.). (2 Mögl.)
• *Sur* g *on a défini une rotation positive, p.ex. par une vis qui tourne à droite (pour entrer, etc.).*

Orientierter Raum V • **Espace orienté** V**:**
In V ist durch ein Tripel $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ eine Rechtsschraube festgelegt: Drehung $\vec{a} \to \vec{b} \Rightarrow$ Schraube Richtung $\vec{c}$ $\rightsquigarrow$ **Rechtssystem**. (Unendlich viele Möglichkeiten.)
• *Dans* V *on a défini une vis qui tourne à droite par un tripel* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$*: Tourner* $\vec{a} \to \vec{b} \Rightarrow$ *vis direction* $\vec{c}$ $\rightsquigarrow$ **Système de sens direct**. *Nombre de possibilités infini.*

Paralleles Koordinatensystem V • **Système de coordonnés parallèles:**
Gegeben durch eine endliche Basis $B = \{\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n}\}$ eines ($\rightsquigarrow$endlichen) Vektorraumes und einen Ursprung, Punkt O (lat. „Origo“).
• *Donné par une base finie* $B = \{\vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n}\}$ *d'un espace vectoriel (*$\rightsquigarrow$*fini) et une origine (point)* O*.*

Damit sind orientierte Geraden (**Achsen**) und Ebenen (Grundebene, Hauptebenen etc.) und somit ein Koordinatengitter gegeben. • *Ainsi on a donné des droites orientées (des* **axes***) et des plans (plan fondamental, plans principaux etc.) et par conséquence on a une grille de coordonnés.*

Achtung: • **Attention:**
Wenn nicht anders erwähnt, betrachten wir im Folgenden nur Koordinatensysteme mit Äquidistanten Koordinatengitter.
• *Si l'on ne l'exprime pas spécialment on ne considère, dans ce qui suit, que des systèmes de coordonnés aux grilles équidistantes.*

Die Nützlichkeit von Koordinatensystemen beruht auf dem Lemma, dass ein Punkt durch einen Ortsvektor und dieser durch eine Summe von gestreckten Basisvektoren eindeutig festgelegt ist.
• *L'utilité des systèmes de coordonnés se base sur le fait qu'un point est donné de façon univoque par l'origine et une somme de vecteurs de base multipliés par des scalaires.*

($\rightsquigarrow$ Rep. • *Rep.*)

Lemma: • **Lemme:** $\vec{v} = \sum_{i=1}^{\cdots} \lambda_i \, \vec{a}_i$: $\rightsquigarrow$ Zerlegung eindeutig • *Décomposition univoque*

5.2.2 Normalsysteme – Systèmes normaux

Geometrisch kann man eine Längenmessung definieren, die sich auf eine einmal willkührlich festgelegte Einheitslänge bezieht. Im Folgenden nehmen wir immer an, diese Einheitslänge sei festgelegt worden, was wir ja immer tun können.
• *Dans la géométrie on peut définir la mesure de la longueur qui se réfère à une longueur unité définie précédemmemt. — On peut toujours donner une définition convenable.*
Auf dieser Grundlage können wir definieren • *Sur ce fondement nous pouvons définir*:

Definition: • **Définition:** $\vec{e}$ **Einheitsvektor** • **vecteur unité** $:\Leftrightarrow \; |\vec{e}| = 1$

Solche Einheitsvektoren kann man immer herstellen • *On peut toujours créer de tels vecteurs unité*:

Regeln: • **Règles:**

$\oslash \; |\vec{a}| = a \;\wedge\; \vec{a} \| \vec{e} \;\Rightarrow\; \vec{a} = \pm a \cdot \vec{e}$

$\oslash \; |\vec{a}| = a \neq 0 \;\Rightarrow\; \vec{e}_a := \dfrac{\vec{a}}{a}$ ist Einheitsvektor • *est vecteur unité*

Definition: • **Définition:** **Normalbasis** • **Base normale**

Sei • *Soit* $B = \{\vec{e}_i \; ||\vec{e}_i| = 1 \;\wedge\; i \in$ Indexmenge • *ensemble d'indices*$\}$ von • *de* V.

Dann heisst die Basis B **Normalbasis** oder **Einheitsbasis**.
• *Alors la base* B *s'appelle* **base normale** *ou* **base unitaire** $\rightsquigarrow$ Kurz • *Bref*: **NB**

Definition: • **Définition:** **Orthonormalbasis** • **Base ortho–normale**

Sei $B =$ Normalbasis von V. • *Soit* $B =$ *base normale de* V.
Zudem gelte • *En plus on constante*:
$\forall_{\vec{e}_i, \vec{e}_k \in B \times B} : \; i \neq k \;\Rightarrow\; \vec{e}_i \perp \vec{e}_k$ (senkrecht • *perpendiculair*)

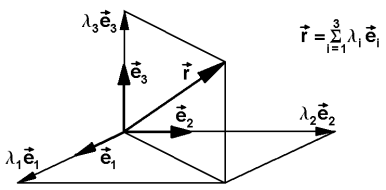
Dann heisst die Basis B **Orthonormalbasis**. • *Alors la base* B *s'appelle* **base ortho–normale**
$\rightsquigarrow$ Kurz • *Bref*: **ONB**

Bemerkung: • **Remarque:** Durch eine *ONB* wird ein **kartesisches Koordinatensystem**[1]definiert.
• *Par une ONB on a defini un* **système de coordonnés cartésiens**[1].

Achtung: • **Attention:**
Wenn nicht anders erwähnt, betrachten wir im Folgenden immer kartesische Koordinaten.
• *Si l'on ne l'exprime pas spécialement, dans ce qui suit, on considère toujours des systèmes de coordonnés cartesiens.*

[1] Lat. Kartesius: → Descartes

5.2.3 Koordinatenvektoren – Vecteurs de coordonnés



$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Schreibweise: • **Façon d' écrire:**

Ortsvektor von P im Raum
• *Vecteur lié à P dans l'espace*:

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = \lambda_1\,\vec{e}_1 + \lambda_2\,\vec{e}_2 + \lambda_3\,\vec{e}_3 := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

(**Spaltenvektor** • **Vecteur de colonne**.)

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: Abkürzung für • *Abréviation pour*

$$\lambda_1\,\vec{e}_1 + \lambda_2\,\vec{e}_2 + \lambda_3\,\vec{e}_3.$$

Begriffe: • **Notions:**

$\lambda_1\,\vec{e}_1,\ \lambda_2\,\vec{e}_2,\ \lambda_3\,\vec{e}_3$ heissen **Komponenten** • $\lambda_1\,\vec{e}_1,\ \lambda_2\,\vec{e}_2,\ \lambda_3\,\vec{e}_3$ *s'appellent* **composants**.

$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ heissen **Koordinaten** • $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ *s'appellent* **coordonnés**.

Schreibweise: • **Façon d' écrire:**

Allgemeiner sei • *Plus généralement il soit*: $V = \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$

$$\rightsquigarrow \text{Spaltenvektor} \bullet \textit{Vecteur de colonne}: \ \vec{r} = \lambda_1\,\vec{e}_1 + \lambda_2\,\vec{e}_2 + \ldots + \lambda_n\,\vec{e}_n := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Im Gegensatz zum Spaltenvektor $\vec{r}$ unterscheiden wir den **Zeilenvektor** $\vec{r}^{\,T}$ (**Transponierter Vektor**)
• *Nous distinguons le vecteur de colonne $\vec{r}$ du* **vecteur de ligne** *(***vecteur transposé***)*:

$$\vec{r}^{\,T} := (\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n)$$

Achtung: • **Attention:** Die Unterscheidung zwischen Zeilenvektor und Spaltenvektor ist dann in der Matrizenrechnung wesentlich. • *La différence entre vecteur de ligne et vecteur de colonne est essentielle dans le calcul des matrices.*

Üblicherweise arbeiten wir in der Geometrie mit Koordinatensystemen, die nach der Rechtsschraubenregel orientiert sind.
• *Normalement, dans la géométrie nous travaillons avec des systèmes de coordonnées qui sont orientés selon la "règle de la vis resp. du filetà droite".*

Einige Herleitungen: • **Quelques érivations:**

$$1\ \ \vec{e}_1 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 \ldots + 0 \cdot \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \vec{e}_n = 0 \cdot \vec{e}_1 + \ldots + 0 \cdot \vec{e}_{n-1} + 1 \cdot \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2\ \ \vec{0} = 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 \ldots + 0 \cdot \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

3 $\lambda\vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda(a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + a_n \cdot \vec{e}_n) = \lambda \cdot (a_1 \cdot \vec{e}_1) + \lambda \cdot (a_2 \cdot \vec{e}_2) + \ldots + \lambda \cdot (a_n \cdot \vec{e}_n) =$

$$= (\lambda \cdot a_1) \cdot \vec{e}_1 + (\lambda \cdot a_2) \cdot \vec{e}_2 + \ldots + (\lambda \cdot a_n) \cdot \vec{e}_n = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$$

4 $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \Rightarrow -\vec{a} = -\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot a_1 \\ (-1) \cdot a_2 \\ \vdots \\ (-1) \cdot a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix}$

5 Die hier benutzte euklidsche Länge setzt eine Orthonormalbasis voraus! (Pythagoras muss gelten: Orthogonale Parallelkoordinaten, normierte Einheiten notwendig!)
• *Ici il faut présupposer qu'on utilise un système de coordonnées orthonormé pour pouvoir utiliser la longueur euclidienne. (Le théorème de Pythagore doit être valable: Il faut des coordonnées parallèles et orthogonales, des unités normées sont nécessaires!)*

$\mathbb{R}^2$: a_1 und a_2 bilden ein rechtwinkliges Dreieck:
• $\mathbb{R}^2$*:* a_1 *et* a_2 *forment un triangle rectangulaire:*

$$|\vec{v}| = r_1 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2},$$

$\mathbb{R}^3$: r_1 und a_3 bilden ein rechtwinkliges Dreieck. (Betrachte den 2-dimensionalen Unterraum, in dem r_1 und a_3 liegen!)
• $\mathbb{R}^3$*:* r_1 *et* a_3 *forment un triangle rectangulaire. (Considérer le sous–espace dans lequel se trouvent* r_1 *et* a_3*)*

$$|\vec{v}| = r_2 = \sqrt{r_1^2 + a_3^2} = \sqrt{(\sqrt{a_1^2 + a_2^2})^2 + a_3^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$\vdots$

$\mathbb{R}^n$: r_{n-1} und a_n bilden ein rechtwinkliges Dreieck. (Betrachte den 2-dimensionalen Unterraum, in dem r_{n-1} und a_n liegen!)
• $\mathbb{R}^3$*:* r_{n-1} *et* a_n *forment un triangle rectangulaire. (Considérer le sous–espace dans lequel se trouvent* r_{n-1} *et* a_n*)*

$$|\vec{v}| = r_n = \sqrt{r_{n-1}^2 + a_n^2} = \sqrt{(\sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2})^2 + a_n^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 + a_n^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$$

6 $\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \\ \vdots \\ y_n - x_n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \mid \overrightarrow{P_1P_2} \mid = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$$

7 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + a_n \cdot \vec{e}_n) + (b_1 \cdot \vec{e}_1 + b_2 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + b_n \cdot \vec{e}_n) =$

$a_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + a_n \cdot \vec{e}_n + b_1 \cdot \vec{e}_1 + b_2 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + b_n \cdot \vec{e}_n = a_1 \cdot \vec{e}_1 + b_1 \cdot \vec{e}_1 + \ldots + a_n \cdot \vec{e}_n + b_n \cdot \vec{e}_n =$

$$(a_1+b_1)\cdot\vec{e}_1+\ldots+(a_n+b_n)\cdot\vec{e}_n=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\\vdots\\a_n+b_n\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\\vdots\\a_n+b_n\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\pm\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}+(\pm1)\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}(\pm1)\cdot b_1\\(\pm1)\cdot b_2\\\vdots\\(\pm1)\cdot b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\pm b_1\\\pm b_2\\\vdots\\\pm b_n\end{pmatrix}$$

8 Basiswechsel: Vgl. unten.
- *Changement de la base: Voir en bas.*

Bsp.: • **Exemple:** $P_1=P_1(2;3;1),\ P_2=P_2(6;15;5),\ |\overrightarrow{OP_1}-\frac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_2}|=?$

$$\overrightarrow{OP_1}-\frac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_2}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}6\\15\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\12\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\6\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow\ |\overrightarrow{OP_1}-\frac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{0^2+3^2+(-1)^2}=\sqrt{0+9+1}=\sqrt{10}$$

Eigenschaften: (... von Spaltenvektoren • *... de vecteurs de ligne*)
• **Qualités:**

1 $$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

2 $$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

3 $$\lambda\vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$$

4 $$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \Rightarrow -\vec{a} = -\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix}$$

5 $$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$$

$\rightsquigarrow$ Euklidsche Länge, „Pythagoras“ ausgedehnt in den n–dimensionalen euklidschen Raum • *Longueur euclidienne, „Pythagore“ étendu pour l'espace euclidien à dimension n*

6 $$\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \mid \overrightarrow{P_1P_2} \mid =$$

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$$

$\rightsquigarrow$ Distanzberechnung • *Calculer la distance*

7 $$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ \vdots \\ a_n \pm b_n \end{pmatrix}$$

8 **Basiswechsel** (Koordinatenwechsel, Koordinatentransformation)
• **Changement de la base** *(Transformation des coordonnés)*:

$\vec{v}$ gegeben in der Basis • *donné dans la base* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$.
Neue Basis • *Base nouvelle*: $\{\vec{a_1}, \vec{_2}, \ldots, \vec{a_n}\}$

$\rightsquigarrow$ $\vec{v} = \lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \ldots + \lambda_n\vec{a_n}$ ist ein Gleichungssystem für die Unbekannten $\{\lambda_k \mid k = 1, \ldots, n\}$.
• $\vec{v} = \lambda_1\vec{a_1} + \lambda_2\vec{a_2} + \ldots + \lambda_n\vec{a_n}$ *est un système d'équations pour les inconnus* $\{\lambda_k \mid k = 1, \ldots, n\}$.
Dieses System kann aufgelöst werden. • *On peut résoudre ce système.*
$\rightsquigarrow$ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ berechnet • $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *calculés*
$\rightsquigarrow$ $\vec{v}$ in der neuen Basis $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}\}$ dargestellt. • $\vec{v}$ *représenté dans la nouvelle base* $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}\}$
$\rightsquigarrow$ Basiswechsel • *Changement de la base.*

5.2.4 Basiswechsel nach dem Austauschverfahren – Changement de base d'après la méthode d'échange des vecteurs

5.2.5 Vektor in einer neuen Basis – Vecteur dans une nouvelle base

Bsp.: • **Exemple:**

Sei • *Soit* $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\},\ \vec{e}_1 = 1\,\vec{e}_1 + 0\,\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \vec{e}_2 = 0\,\vec{e}_1 + 1\,\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Sei • *Soit* $B' = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\},\ \vec{a}_1 = 1\,\vec{e}_1 + 0.5\,\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}1\\0.5\end{pmatrix},\ \vec{a}_2 = -0.5\,\vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}-0.5\\2\end{pmatrix}$

Sei • *Soit* $\vec{v} = 2\,\vec{e}_1 + (-1)\,\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

Problem: • **Problème:** $\vec{v} = \lambda_1\,\vec{a}_1 + \lambda_2\,\vec{a}_2,\ \lambda_1, \lambda_2 = ?$

Es gilt: • *Il vaut:* $\vec{v} = 2\,\vec{e}_1 + (-1)\,\vec{e}_2 = \lambda_1\,\vec{a}_1 + \lambda_2\,\vec{a}_2 = \lambda_1\,(1\,\vec{e}_1 + 0.5\,\vec{e}_2) + \lambda_2\,(-0.5\,\vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2)$
$= \lambda_1\,\vec{e}_1 + \lambda_1\,0.5\,\vec{e}_2 + \lambda_2\,(-0.5)\,\vec{e}_1 + \lambda_2\,2\,\vec{e}_2 = (\lambda_1 - 0.5\,\lambda_2)\,\vec{e}_1 + (0.5\,\lambda_1 + 2\,\lambda_2)\,\vec{e}_2$

$$\Rightarrow\ 2\,\vec{e}_1 + (-1)\,\vec{e}_2 = (\lambda_1 - 0.5\,\lambda_2)\,\vec{e}_1 + (0.5\,\lambda_1 + 2\,\lambda_2)\,\vec{e}_2\ \Rightarrow\ \underbrace{(\lambda_1 - 0.5\,\lambda_2 - 2)}_{=0,\ \vec{e}_1 \nparallel \vec{e}_2}\,\vec{e}_1 + \underbrace{(0.5\,\lambda_1 + 2\,\lambda_2 + 1)}_{=0,\ \vec{e}_1 \nparallel \vec{e}_2}\,\vec{e}_2 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow\ \underbrace{(\lambda_1 - 0.5\,\lambda_2 - 2)}_{=0,\ \vec{e}_1 \nparallel \vec{e}_2}\,\vec{e}_1 = \underbrace{(-0.5\,\lambda_1 - 2\,\lambda_2 - 1)}_{=0,\ \vec{e}_1 \nparallel \vec{e}_2}\,\vec{e}_2$$

$$\left|\begin{array}{lcl}\lambda_1 - 0.5\,\lambda_2 - 2 & = & 0\\ -0.5\,\lambda_1 - 2\,\lambda_2 - 1 & = & 0\end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{lcl}\lambda_1 - 0.5\,\lambda_2 & = & 2\\ 0.5\,\lambda_1 + 2\,\lambda_2 & = & -1\end{array}\right| \Rightarrow\ \lambda_1 = \frac{14}{9},\ \lambda_2 = -\frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow\ \vec{v} = \lambda_1\,\vec{a}_1 + \lambda_2\,\vec{a}_2 = \frac{14}{9}\,\vec{a}_1 - \frac{8}{9}\,\vec{a}_2$$

5.2.6 Nach dem Austauschverfahren – d'après la méthode d'échange des vecteurs

Hier handelt es sich um ein verallgemeinertes Einsetzungsverfahren.
• *Il s'agit ici d'une méthode généralisée de remplacement des variables.*

Geg.: • **Donné:**
Vektorraum *VR'EV* mit den beiden Basen B_1 und B_2. Dabei sei B_2 ausgedrückt durch B_1
• *espace vectoriel avec les deux bases* B_1 *et* B_2. *Soit* B_2 *exprimée par* B_1.

Sei • *Soit* $B_1 = \{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\},\ B_2 = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$:

$$\begin{array}{rcccccccccc}
 & \vec{b}_1 & = & \alpha_{1,1}\vec{a}_1 & + & \ldots & + & \alpha_{1,k}\vec{a}_k & + & \ldots & + & \alpha_{1,n}\vec{a}_n\\
 & \vdots & = & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
\text{(Zeile • } \textit{ligne } i) \rightarrow & \vec{b}_i & = & \alpha_{i,1}\vec{a}_1 & + & \ldots & + & \alpha_{i,k}\vec{a}_k & + & \ldots & + & \alpha_{i,n}\vec{a}_n\\
 & \vdots & = & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
 & \vec{b}_n & = & \alpha_{n,1}\vec{a}_1 & + & \ldots & + & \alpha_{n,k}\vec{a}_k & + & \ldots & + & \alpha_{n,n}\vec{a}_n\\
 & & & & & & & (\bullet\ \textit{Colonne}) & & & & \\
 & & & & & & & (\text{Spalte } k\ \uparrow) & & & &
\end{array}$$

Sei • *Soit* $\vec{v} = \lambda_1\vec{a}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n$.
$\vec{v}$ ist in B_1 ausgedrückt und soll in B_2 ausgedrückt werden

• *$\vec{v}$ est exprimé dans B_1 et doit être exprimé dans B_2: $\vec{v} = \mu_1\vec{b}_1 + \ldots + \mu_n\vec{b}_n$.*

D. h. • *Ç. v. d.*: : Es gilt die μ_k zu berechnen • *Il faut calculer les μ_k.*

Dazu muss man die Vektoren $\vec{b}_i$ von B_2 durch die Vektoren $\vec{a}_k$ von B_1 ausdrücken und in $\vec{v}$ einsetzen
• *Pour cela il faut exprimer les vecteurs $\vec{b}_i$ de B_2 par les vecteurs $\vec{a}_k$ de B_1 et introduire dans $\vec{v}$.*

Durch Koeffizientenvergleich erhält man dann ein Gleichungssystem für die μ_i, das sich lösen lässt.
• *En comparant les coefficients on arrive à un système d'équations pour les μ_i qu'on peut résoudre.*

Man kann aber auch die $\vec{a}_k$ durch die $\vec{b}_i$ ausdrücken (Basiswechsel) und in $\vec{v} = \lambda_1\vec{a}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n$ einsetzen. • *On peut aussi exprimer les $\vec{a}_k$ par les $\vec{b}_i$ (échanger la base) et introduire dans $\vec{v} = \lambda_1\vec{a}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n$*

Das führt zu einer Darstellung $\vec{v} = \lambda_1\vec{a}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n$.
• *Ça mène à une représentation $\vec{v} = \lambda_1\vec{a}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n$.*

Zur Idee des Austauschverfahrens • Quant à l'idée de la méthode d'échange des variables:

Sei z.B. • *Soit p.ex. $\alpha_{i,k} \neq 0$.*
Dann kann $\vec{b}_i$ durch $\vec{a}_k$ wie folgt ausgetauscht werden: • *Alors on peut échanger $\vec{b}_i$ par $\vec{a}_k$ comme il suit:*

Berechne $\vec{a}_k$ aus Zeile Nr. i: • *Calculer $\vec{a}_k$ dans la ligne no. i:*

$$\vec{a}_k = (-\frac{\alpha_{i,1}}{\alpha_{i,k}})\vec{a}_1 + \ldots + (-\frac{\alpha_{i,k-1}}{\alpha_{i,k}})\vec{a}_{k-1} + \frac{1}{\alpha_{i,k}}\vec{b}_i + (-\frac{\alpha_{i,k+1}}{\alpha_{i,k}})\vec{a}_{k-1} + \ldots + (-\frac{\alpha_{i,n}}{\alpha_{i,k}})\vec{a}_n$$

Der Vektor $\vec{b}_i$ steht jetzt rechts in der Spalte Nr. k, der Vektor $\vec{a}_k$ jedoch links.
• *Le vecteur $\vec{b}_i$ se trouve maintenant à droite dans la colonne no. k, par contre le vecteur $\vec{a}_k$ est placé à gauche.*

In dieser Form wird $\vec{a}_k$ jetzt in allen andern Zeilen eingesetzt und vektorweise sofort verrechnet. (Z.B. in der 1. Zeile ist $\vec{a}_k$ mit $\alpha_{1,k}$ zu multiplizieren und zu verrechnen)
• *Alors on introduit $\vec{a}_k$ en cette forme dans toutes les autres lignes en groupant les parties selon les vecteurs qui sont déjà là. (P.ex. dans la ligne no. 1 on multiplie $\vec{a}_k$ avec $\alpha_{1,k}$ et on groupe les expressions d'après les vecteurs.)*

Konsequenz: • Conséquence:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\vec{b}_1 & = & (\alpha_{1,1} - \frac{\alpha_{i,1}}{\alpha_{i,k}}\alpha_{1,k})\vec{a}_1 & + & \ldots & + & (\alpha_{1,k-1} - \frac{\alpha_{i,k-1}}{\alpha_{i,k}}\alpha_{1,k})\vec{a}_{k-1} & + & \frac{\alpha_{1,k}}{\alpha_{i,k}}\vec{b}_i & + & (\alpha_{1,k+1} - \frac{\alpha_{i,k+1}}{\alpha_{i,k}}\alpha_{1,k})\vec{a}_{k+1} \\
 & & & & & & & + & \ldots & + & (\alpha_{1,n} - \frac{\alpha_{i,n}}{\alpha_{i,k}}\alpha_{1,k})\vec{a}_n \\
\vdots & & \vdots & & & & & & & & \vdots \\
\vec{a}_k & = & (-\frac{\alpha_{i,1}}{\alpha_{i,k}})\vec{a}_1 & + & \ldots & + & (-\frac{\alpha_{i,k-1}}{\alpha_{i,k}})\vec{a}_{k-1} & + & \frac{1}{\alpha_{i,k}}\vec{b}_i & + & (-\frac{\alpha_{i,k+1}}{\alpha_{i,k}})\vec{a}_{k+1} \\
 & & & & & & & + & \ldots & + & (-\frac{\alpha_{i,n}}{\alpha_{i,k}})\vec{a}_n \\
\vdots & & \vdots & & & & & & & & \vdots \\
\vec{b}_n & = & (\alpha_{n,1} - \frac{\alpha_{i,1}}{\alpha_{i,k}}\alpha_{n,k})\vec{a}_1 & + & \ldots & + & (\alpha_{n,k-1} - \frac{\alpha_{i,k-1}}{\alpha_{i,k}}\alpha_{n,k})\vec{a}_{k-1} & + & \frac{\alpha_{n,k}}{\alpha_{i,k}}\vec{b}_i & + & (\alpha_{n,n} - \frac{\alpha_{i,n}}{\alpha_{i,k}}\alpha_{n,k})\vec{a}_n \\
 & & & & & & & + & \ldots & + & (\alpha_{n,n} - \frac{\alpha_{i,n}}{\alpha_{i,k}}\alpha_{n,k})\vec{a}_n \\
\vdots & & \vdots & & & & & & & & \vdots
\end{array}$$

Damit ist erreicht, dass in der Zeile Nr. i statt $\vec{b}_i$ neu $\vec{a}_k$ steht, in der Spalte Nr. k dagegen $\vec{b}_i$ statt $\vec{a}_k$ D.h. $\vec{b}_i$ ist durch $\vec{a}_k$ ausgetauscht worden.
• *Ainsi on atteint que dans la ligne no. i il y a $\vec{a}_k$ au lieu de $\vec{b}_i$, par contre dans la colonne no. k on trouve $\vec{b}_i$ au lieu de $\vec{a}_k$. Ça veut dire qu'on a échangé $\vec{b}_i$ par $\vec{a}_k$.*

Wendet man dieses Verfahren n mal an, so gelingt es, alle $\vec{b}_i$ durch die $\vec{a}_k$ auszutauschen.
• *Si l'on applique cette procédure n fois, on arrive à échanger tous les $\vec{b}_i$ par des $\vec{a}_k$.*

Das führt zum System (*) • *Ça mène au système (*)*:

$$\begin{array}{ccccccc} \vec{a}_1 & = & \beta_{1,1}\vec{b}_1 & + & \dots & + & \beta_{1,n}\vec{b}_n \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ \vec{a}_n & = & \beta_{n,1}\vec{b}_1 & + & \dots & + & \beta_{n,n}\vec{b}_n \end{array}$$

Somit ist die Basis B_1 durch die Basis B_2 dargestellt. • *Ainsi on a représenté la base B_1 par la base B_2.*

Hinweis • **A noter:** Dieses Verfahren lässt sich auch zur Lösung von Gleichungssystemen verwenden.
• *On peut aussi utiliser cette méthode pour résoudre des systèmes d'équations.*

Man setze in (*) statt $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ die Unbekannten $x_1, \dots, x_n$ und statt $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ die Zahlen $\gamma_1, \dots \gamma_n$.
• *Mettons dans (*) au lieu de $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ les inconnus $x_1, \dots, x_n$ et au lieu de $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ les nombres $\gamma_1, \dots \gamma_n$.*

System(*) • *Système (*)*

$$\begin{array}{ccccccc} \gamma_1 & = & x_{1,1}\gamma_1 & + & \dots & + & \alpha_{1,n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ \gamma_n & = & \alpha_{n,1}x_1 & + & \dots & + & \alpha_{n,n}x_n \end{array}$$

Dann führt das Austauschverfahren wie vorhin auf die Lösung:
• *Alors la méthode d'échange des variables mène à la solution:*

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & = & \beta_{1,1}\gamma_1 & + & \dots & + & \beta_{1,n}\gamma_n \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ x_n & = & \beta_{n,1}\gamma_1 & + & \dots & + & \beta_{n,n}\gamma_n \end{array}$$

Konsequenz: • **Conséquence:** Um eine Basis auszutauschen genügt es somit, ein Gleichungssystem der Form (*) mit den Parametern γ_i und den Unbekannten x_k zu lösen und dann $\gamma_i \longmapsto \vec{b}_i$ und $x_k \longmapsto \vec{a}_k$ zu substituieren.
• *Pour changer de base il suffit donc de résoudre une système d'équations de forme (*) qui contient les paramètres γ_i et les inconnues x_k. Après il faut substituer de manière suivante: $\gamma_i \longmapsto \vec{b}_i$, $x_k \longmapsto \vec{a}_k$.*

Bsp.: • **Exemple:**

Gleichungssystem:
• *Système d'équations:*

$$\left| \begin{array}{lcl} b_1 & = & 2\,a_1 - 3\,a_2 + a_3 \\ b2 & = & a_1 + 3\,a_2 - a_3 \\ b_3 & = & -a_1 - a_2 + 2\,a_3 \end{array} \right|$$

1. Austausschritt:
• *1ère étape d'échangement:*

$$\left| \begin{array}{lcl} a_1 & = & \dfrac{3\,a_2 - a_3 + b_1}{2} \\ b_2 & = & \dfrac{9\,a_2 - 3\,a_3 + b_1}{2} \\ b_3 & = & \dfrac{-5\,a_2 + 5\,a_3 - b_1}{2} \end{array} \right|$$

2. Austausschritt:
• *2ème étape d'échangement:*

$$\left|\begin{array}{lcl} a_1 & = & \dfrac{b_1+b_2}{3} \\ a_2 & = & \dfrac{3\,a_3-b_1+2\,b_2}{9} \\ b_3 & = & \dfrac{15\,a_3-2\,b_1-5\,b_2}{9} \end{array}\right|$$

3. Austausschritt:
• *3ème étape d'échangement:*

$$\left|\begin{array}{lcl} a_1 & = & \dfrac{b_1+b_2}{3} \\ a_2 & = & \dfrac{-b_1+5\,b_2+3\,b_3}{15} \\ a_3 & = & \dfrac{2\,b_1+5\,b_2+9\,b_3}{15} \end{array}\right|$$

5.2.7 Anwendungen — Applications

Bsp.: • **Exemple:** Gegeben sei eine Kraft $\vec{F}$. Zerlege $\vec{F}$ in Komponenten in Richtung $\vec{b}_1,\ \vec{b}_2,\ \vec{b}_3$.
• *Soit donné une force $\vec{F}$. Chercher la décomposition de la force $\vec{F}$ en composants en direction $\vec{b}_1,\ \vec{b}_2,\ \vec{b}_3$.*

Sei • *Soit* $\vec{F} = \begin{pmatrix} 45 \\ 18 \\ 54 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Es gilt: • *Il vaut:* $\vec{F} = \lambda\vec{b}_1 + \mu\vec{b}_2 + \nu\vec{b}_3 \;\Rightarrow\; \lambda = 7, \mu = 13, \nu = 23$
(Gleichungssystem lösen!) • *Résoudre le système d´équations!*

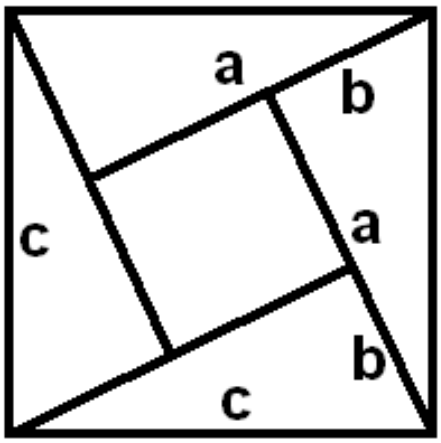
Bemerkung: • **Remarque:** Wären 4 (oder mehr) Richtungsvektoren $\vec{b}_k$ gegeben, so könnte man die 4. Komponente frei wählen (Vorspannung). • *S'il y avait 4 (ou plus) de vecteurs de direction $\vec{b}_k$ donnés, ainsi on pourrait choisir librement la 4–ème composante (tension préalable).*

5.3 Ausblicke in die Geometrie – Quelques pas dans la géométrie

Vorausgesetzt werden Begriffe und Sätze über trigonometrische Funktionen und ihre Umkehrfunktionen, Secans, Cosecans, Periodizität, Monotoniebereiche, Quadrantenrelationen, Zusammenhänge im rechtwinkligen Dreieck, Drehgruppe, Winkel, Winkelmass, Translation, Polarkoordinaten, Pythagoras ($\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1$) etc.
• **On exige** *la connaissance des notions et théorèmes sur des fonctions trigonométriques et leurs fonctions inverses, sécans, cosécans, périodicité, intervalles où les fonctions sont monotones, relations dans les quadrants, relations dans le triangle rectangulaire, groupe des rotations, angles, mesures des angles, translations, coordonnés polaires, Pythagore (*$\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1$*) etc.*

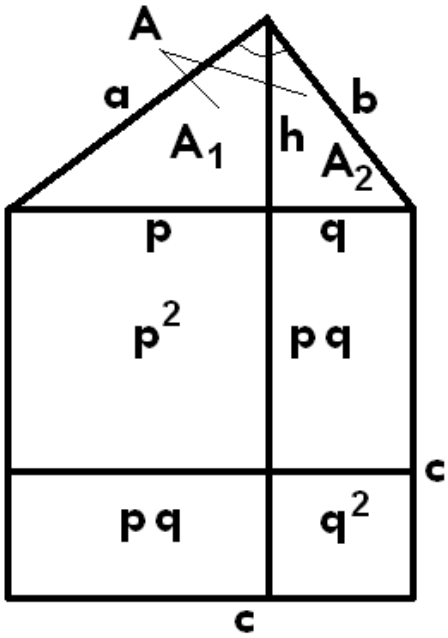
5.3.1 Elementare geometrische Sätze – Théorèmes géométriques élémentaires

Pythagoras, Euklid u.s.w. – Pythagore, Euclide etc.



$$c^2 = 4\,\frac{a\,b}{2} + (a-b)^2$$
$$= 2\,a\,b + a^2 - 2\,a\,b + b^2 = a^2 + b^2$$

$$\rightsquigarrow \quad a^2 + b^2 = c^2$$



1 $A = A_1 + A_2$

Ähnliche $\triangle$ • $\triangle$ *semblables*

$\rightsquigarrow \quad \frac{A_1}{A} = (\frac{a}{c})^2, \quad \frac{A_2}{A} = (\frac{b}{c})^2$

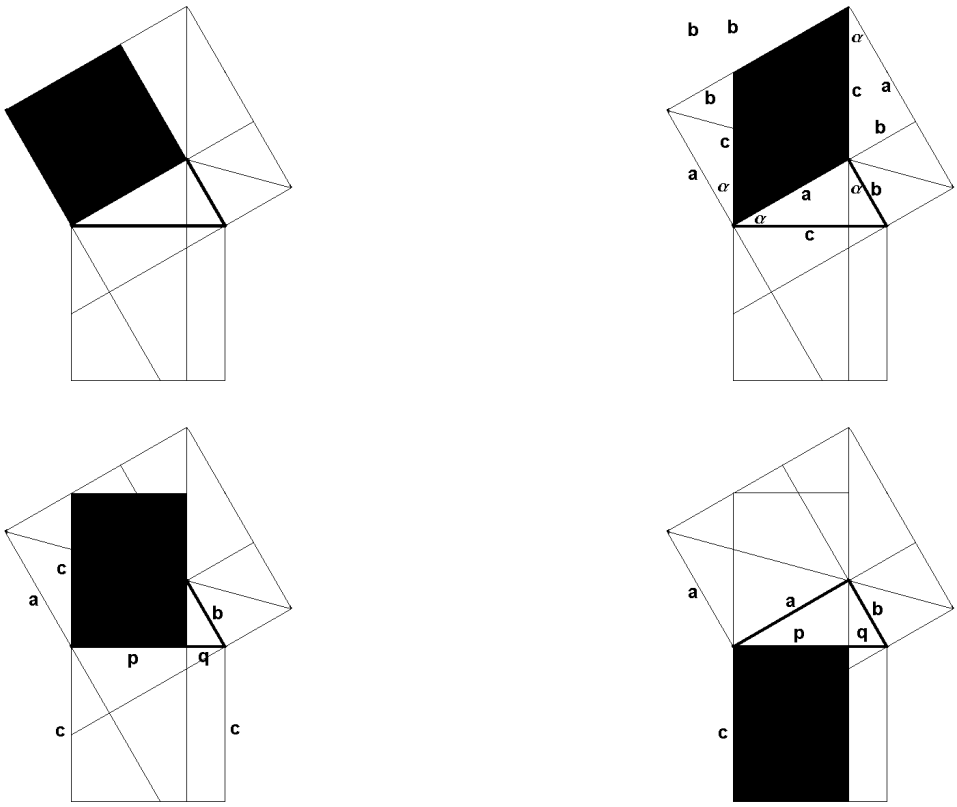
$\Rightarrow \quad A = A_1 + A_2 = A\,(\frac{a}{c})^2 + A\,(\frac{b}{c})^2$

$\rightsquigarrow \quad a^2 + b^2 = c^2$

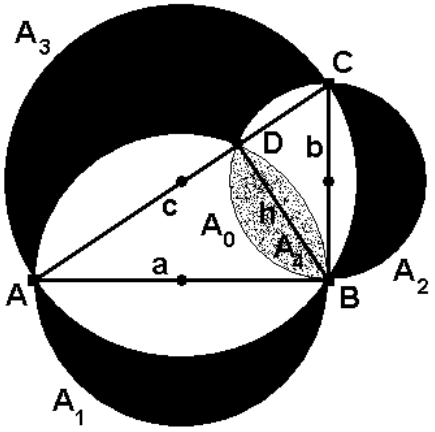
2 $a^2 + b^2 = (p^2 + h^2) + (q^2 + h^2) = c^2 = p^2 + q^2 + 2\,p\,q$

$\Rightarrow \quad 2\,h^2 = 2\,p\,q$

$\rightsquigarrow \quad h^2 = p^2 + q^2$



$$a^2 = c \cdot p, \;\; b^2 = c \cdot q, \;\; a^2 + b^2 = c^2$$



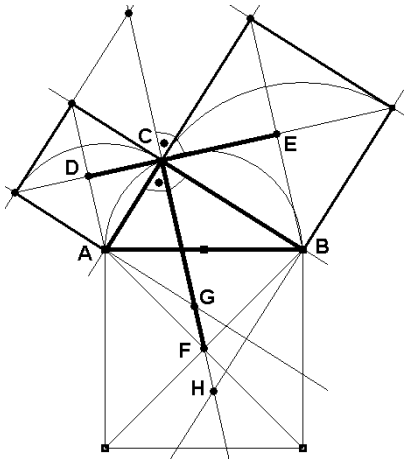
Möndchen des Hippokrates (von Chios, um 440 v.Chr.):
• *Les croissants de Hippocrate (de Chios, env. 440 av.J.C.:)*

$A_{\triangle(A,B,C)}$ *rechtwinklig* • *triangle rectangle*

$A_0 = A_{\triangle(A,B,C)}$

Satz: • **Théorème:**

$A_0 = A_1 + A_2, \;\; A_3 = A_1 + A_2 + A_4$



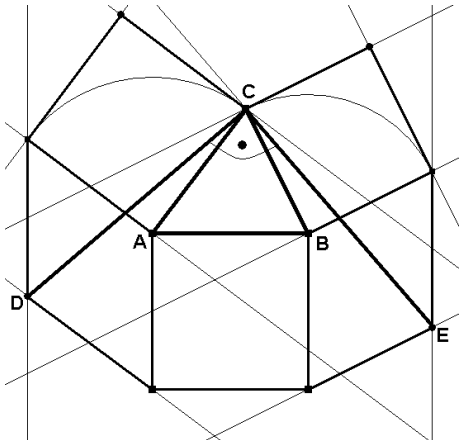
$A_{\triangle(A,B,C)}$ rechtwinklig • *triangle rectangle*

Satz: • **Théorème:**

$\overline{DE} \perp \overline{CF}$,

$|\overline{DE}| = |\overline{CF}|$,

$|\overline{FG}| = |\overline{FH}| = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(|\overline{BC}| - |\overline{AC}|)$

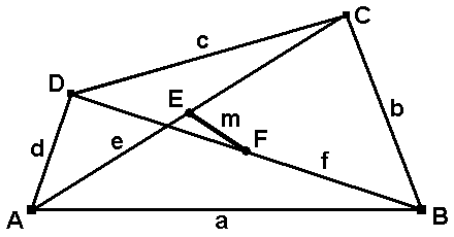


$A_{\triangle(A,B,C)}$ beliebig • *triangle quelconque*

Satz: • **Théorème:**

$\overline{CD} \perp \overline{CE}$,

$|\overline{CD}| = ||\overline{CE}$

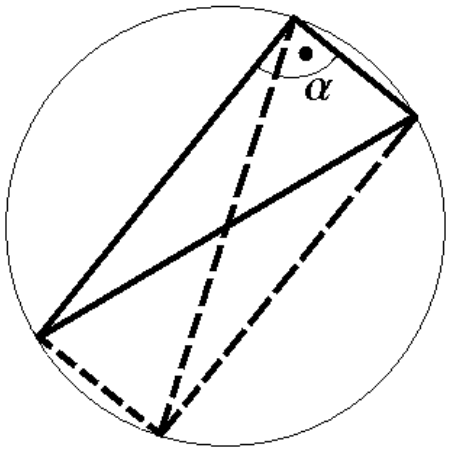


$E =$ Mitte von $\overline{AC}$, $F =$ Mitte von $\overline{BD}$
• $E =$ *centre de* $\overline{AC}$, $F =$ *centre de* $\overline{BD}$

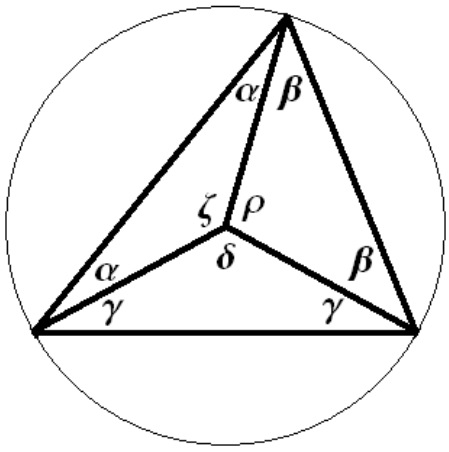
Satz: • **Théorème:**

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4\,m^2$$

Thales, Peripherie– und Zentriwinkel – Thales, angle inscrit, angle au centre



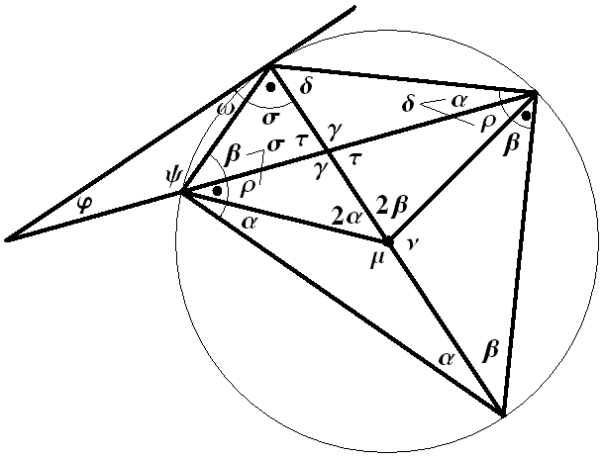
Rechteck $\rightsquigarrow$ $\alpha = 90^o$
• *Rectangle* $\rightsquigarrow$ $\alpha = 90^o$



Gleichschenklige $\triangle$ • $\triangle$ *isocèles*
$\rightsquigarrow$ $\delta = 360^o - \zeta - \rho$
$= 360^o - (180^o - 2\,\alpha) - (180^o - 2\,\beta)$
$= 2\,(\alpha + \beta)$

$$\alpha + \beta = \frac{\delta}{2}$$

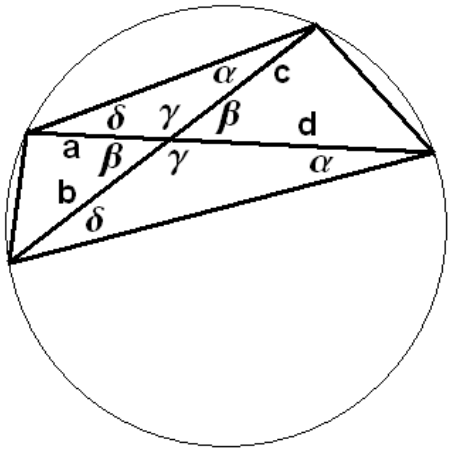
Sehnen–, Tangentenwinkel – Angle de la corde et de la tangente



$\alpha = 90^o - \rho - \beta,$
$\omega = 90^o - \sigma = 90^o - \rho - \beta$

$\rightsquigarrow \ \omega = \alpha$

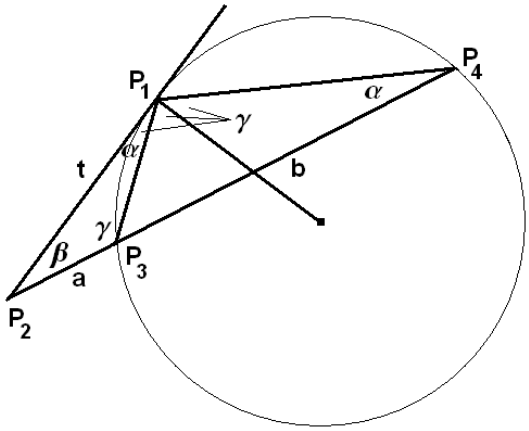
Sehnensatz, Tantentensatz — Théorème de la corde et de la tangente



Ähnliche △ (Peripherie– und Zentriwinkel)
• △ *semblables (angle inscrit, angle au centre)*

$\rightsquigarrow \ \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \ \Rightarrow \ a \cdot d = b \cdot c$

$\rightsquigarrow \ a \cdot d = b \cdot c$

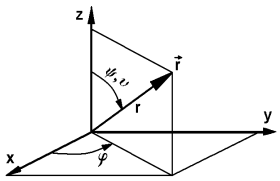


Ähnliche △ • △ *semblables*

$|\overline{P_1P_2}| = t, \ |\overline{P_2P_3}| = a, \ |\overline{P_3P_4}| = b$
$\Rightarrow \ \dfrac{a}{t} = \dfrac{t}{a+b} \ \Rightarrow \ a \cdot (a+b) = t^2$

$\rightsquigarrow \ a \cdot (a+b) = t^2$

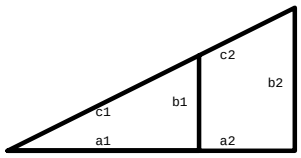
5.3.2 Weitere Begriffe und Folgerungen – D'autres notions et conséquences



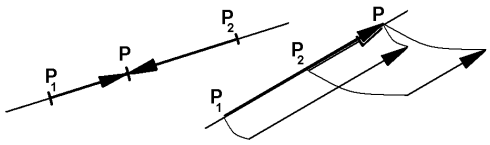
Räumliche Polarkoordinaten
• Coordonnés polaires dans l'espace:
Sei • *Soit* $\overrightarrow{OP} = \vec{r} = \vec{r}(x,y,z) = \vec{r}(r,\varphi,\vartheta)$, $r = |\vec{r}|$
φ, ϑ Winkel
• *angles.*
Zusammenhänge: • **Formules:**
($\rightsquigarrow$ *... ou bien rapports:*)

$$x = r\cos(\varphi)\sin(\vartheta),\ \ y = r\sin(\varphi)\sin(\vartheta),\ \ z = r\cos(\vartheta)$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \ \varphi = \arctan(\frac{y}{x}),\ \ \vartheta = \arccos(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})$$



Bei ungerichteten Strecken sind Streckenverhältnisse z.B. in der Form $\frac{a_1}{b_1}$ möglich. Was aber, wenn a_1 und b_1 als Vektoren genommen und die Richtung berücksichtigt werden müsste? Abhilfe schafft hier das Teilverhältnis.
• *Quant aux arêtes sans direction il est possible de considérer des rapports comme p.ex.* $\frac{a_1}{b_1}$. *Mais quoi faire, si* a_1 *et* b_1 *sont pris comme des vecteurs et si la direction doit être considérée? Ici le remède est le rapport de section.*



Teilverhältnis • **Rapport de section**

$t = (P_1P_2P)$ von P bezüglich $\overline{P_1P_2}$:
• *... de* P *par rapport à* $\overline{P_1P_2}$:
$\overrightarrow{P_1P} = t\,\overrightarrow{P_2P}$ $\quad (\Rightarrow\ t = \pm\frac{|P_1P|}{|P_2P|})$
$\rightsquigarrow$ Implizite Definition! • *Définition implicite!*

Eigenschaften:
• **Qualités:**

Vor.: • Hyp.:

Sei • *Soit* $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OP_1}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OP_2}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$
Kartes. Koord'syst. (**KKS**) • *Syst. de coord. cartes.* (**SCC**)

$t=(P_1P_2P)$

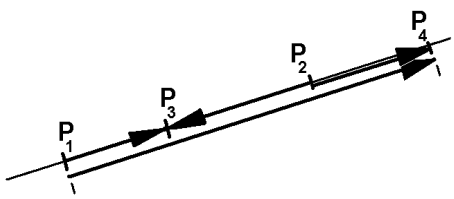
Beh.: • Thè.:

1 $x-x_1=t\,(x-x_2),\;\; y-y_1=t\,(y-y_2),\;\; z-z_1=t\,(z-z_2)$

2 $\overrightarrow{OP}=\dfrac{\overrightarrow{OP_1}-t\cdot\overrightarrow{OP_2}}{1-t}$

3 $(P_2P_1P)=\dfrac{1}{t}$

4 $(P_1PP_2)=1-t$



Seien • *Soient* $P_1,P_2,P_3,P_4\in g$,
$P_i\neq P_k\;(i\neq k)$

Doppelverhältnis (rapport anharmonique, birapport) von P_1,P_2,P_3,P_4:
• **Rapport de double section** *de* P_1,P_2,P_3,P_4:
$(P_1P_2P_3P_4):=\dfrac{(P_1P_2P_3)}{(P_1P_2P_4)}$

Eigenschaften:
• **Qualités:**

Vor.: • Hyp.:

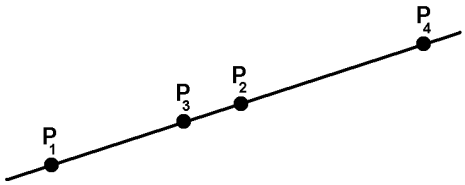
Wie beim Teilverhältnis • *Comme au rapport de section*

Beh.: • Thè.:

1 $(P_1P_2P_3P_4)=\dfrac{(x_3-x_1)(x_4-x_2)}{(x_3-x_2)(x_4-x_1)},\;\; x_3\neq x_2,\;\; x_4\neq x_1$ etc. ...

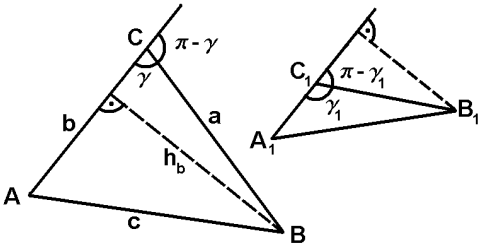
2 $(P_3P_4P_1P_2)=(P_1P_2P_3P_4)$

3 $(P_2P_1P_4P_3)=(P_1P_2P_3P_4)$



Harmonische Punktepaare (P_1P_2) **und** (P_3P_4)
• **Pairs de points harmoniques** (P_1P_2) *et* (P_3P_4):
$(P_1P_2P_3P_4)=-1$,
d. h. • *ç. v. d.* $(P_1P_2P_3)=-(P_1P_2P_4)$

5.3.3 Einige interessante Sätze – Quelques théorémes intéressants

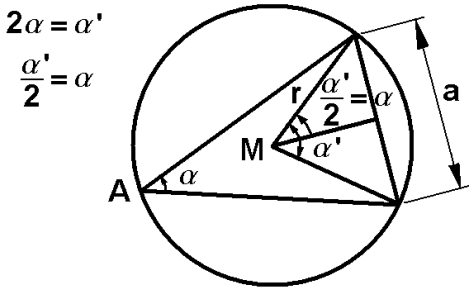


Sinussatz • Théorème du sinus:

Vgl. Skizze • *Voir esquisse*:

$$A_\triangle = \frac{1}{2}\cdot b\cdot h_b = \frac{1}{2}\cdot b\cdot a\cdot\sin(\pi-\gamma) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot b\cdot a\cdot\sin(\gamma) = \ldots = \frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin(\beta)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin(\alpha) \;\Rightarrow$$
$$b\cdot a\cdot\sin(\gamma) = a\cdot c\cdot\sin(\beta) = b\cdot c\cdot\sin(\alpha)$$

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$



Bedeutung • Signification:

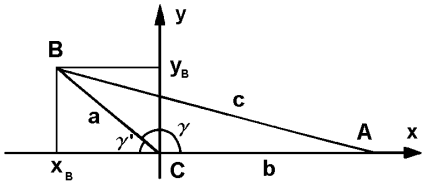
$\sin(\alpha) = \dfrac{a/2}{r} = \dfrac{a}{d}$, $\alpha' = 2\,\alpha$,

$\sin(\alpha) = \sin(\dfrac{\alpha'}{2})$

$\Rightarrow\; d = 2\,r = \dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{b}{\sin(\beta)} = \dfrac{c}{\sin(\gamma)}$

$\rightsquigarrow$ Der Sinussatz liefert den Umkreisradius.

• *Du théorème du sinus résulte le rayon du cercle circonscrit.*



Cosinussatz • Théorème du cosinus:

$y_b = a\cdot\sin(\gamma') = a\cdot\sin(\pi-\gamma) = a\cdot\sin(\gamma)$,

$x_b = -a\cdot\cos(\gamma') = -a\cdot\cos(\pi-\gamma) = a\cdot\cos(\gamma)$

$c^2 = |\,\overrightarrow{AB}\,|^2 = |\,\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\,|^2 =$

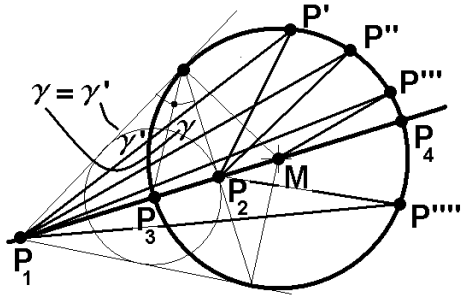
$|\binom{-b}{0} + \binom{a\cdot\cos(\gamma)}{\pm a\cdot\sin(\gamma)}|^2 = |\binom{-b+a\cdot\cos(\gamma)}{\pm a\cdot\sin(\gamma)}|^2 =$

$(a\cdot\cos(\gamma)-b)^2 + (\pm a\cdot\sin(\gamma))^2 =$

$a^2\cos^2(\gamma) - 2\,a\,b\cos(\gamma) + b^2 + a^2\sin^2(\gamma) =$

$a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos(\gamma) = c^2$

$$\Rightarrow\; c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos(\gamma)$$ (etc.. zykl. • *etc., cycl.*)



Apolloniuskreis (Kugel)

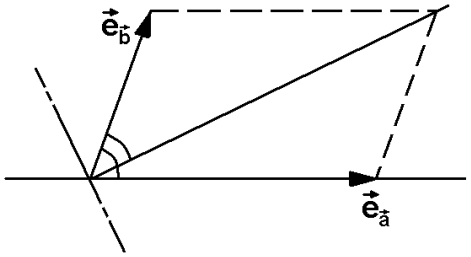
• **Cercle d'Apollonius** *(sphère)*:

$\{P \mid |P_1P| : |P_2P| = const.\}$ ist Kreis (Kugel)

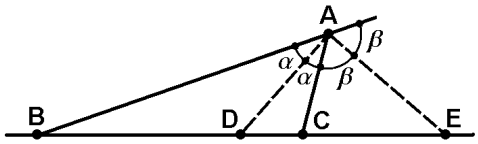
• *. . . est un cercle (sphère)*

Harmonische Punktepaare (P_1P_2) und (P_3P_4)

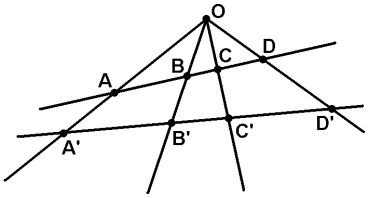
• *Pairs de points harmoniques* (P_1P_2) *et* (P_3P_4)



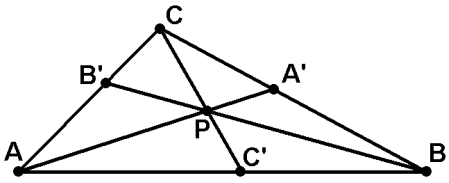
Winkelhalbierung bei Vektoren
• **Partager en deux parties égales l'angle des vecteurs** :
$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \pm \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ halbiert den Zwischenwinkel (Nebenwinkel) von $\vec{a}$ und $\vec{b}$
• $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \pm \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ *partage l'angle intermédiaire resp. adjacent (continu) de* $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$



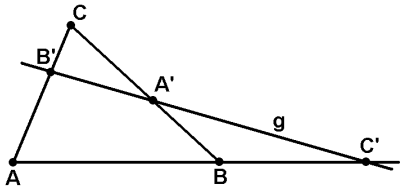
Satz über die Winkelhalbierende
• **Théorème concernant la bissectrice:**
(BC) und (DE) sind harmonische Punktepaare (Apollonius!)
• (BC) *et* (DE) *sont des pairs de points harmoniques (Apollonius!)*



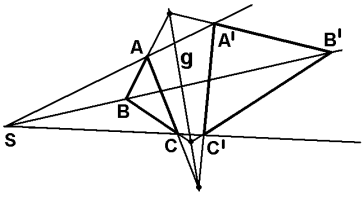
Pappos:
$(ABCD) = (A'B'C'D')$
(Doppelverhältnis invariant bei Projektion
• *Rapport de double section est invariant pour des projections*)



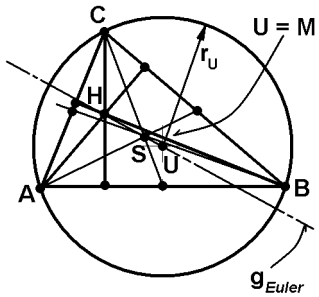
Ceva:
$P \in$ Inneres von $\triangle ABC$,
• $P \in$ *Intérieur de* $\triangle ABC$,
$\lambda = (ABC')$, $\mu = (BCA')$, $\nu = (CAB')$
$\Rightarrow \ \lambda \cdot \mu \cdot \nu = -1$



Menelaos:
Sei • *Soit*
$g \cap$ (*Ecken von* • *sommets de* $\triangle ABC$) $= \{\}$,
$\lambda = (ABC')$, $\mu = (BCA')$, $\nu = (CAB')$
$\Rightarrow \ \lambda \cdot \mu \cdot \nu = +1$



Desargues:
Gehen die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken zweier Dreiecke durch einen Punkt (S), so liegen die Schnittpunkte entsprechender Seiten auf einer Geraden (g).
• *Si les droites de connexion de sommets (pointes) correspondants de deux triangles passent par un point (S), les points d'intersection d'arêtes correspondantes sont situés sur une droite (g).*



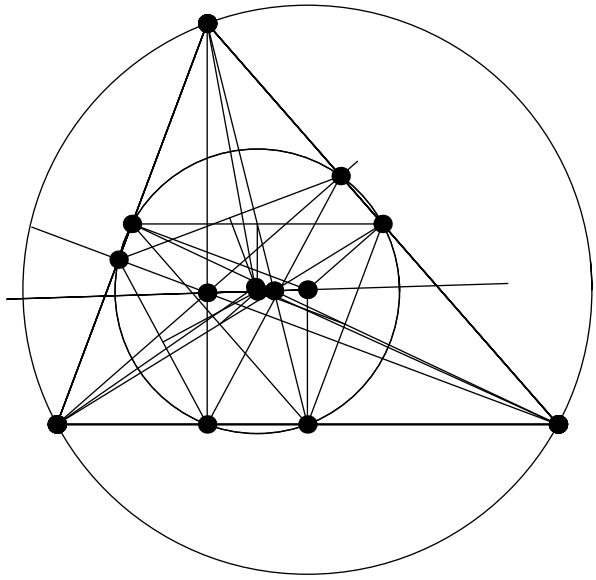
Euler:

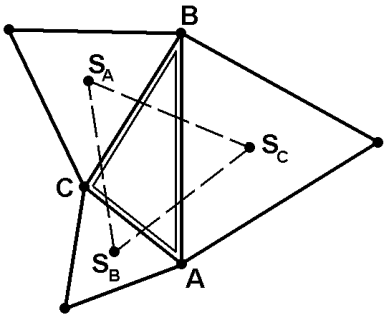
Sei • *Soit*
U = Umkreismittelpunkt • *Centre du cercle circonscrit*
• *U = centre du cercle circonscrit*
H = Höhenschnittpunkt
• *H = Point d'intersectien des hauteurs (verticales)*
S = Schwerpunkt • *S = centre de gravitation*
(Schwerlinien teilen sich im Verh. 2 : 1

• *Le rapport de l'opération est de* 2 : 1)
$\Rightarrow$ $\overline{UHS}$ ist Gerade g • *... est droite g*
$\wedge$ $(HUS) = -2$

Weiter liegen die Seitenhalbierenden– und die Höhenfusspunkte auf einem Kreis (**Feuerbachkreis**) mit Mittelpunkt $F \in g$ (Eulergerade). F ist das Zentrum der Strecke $\overline{HU}$.
• *En plus les pieds des médianes et les pieds des hauteurs sont situés sur un cercle (***cercle de Feuerbach***) avec centre $F \in g$ (droite de Euler). F est le centre de $\overline{HU}$.*

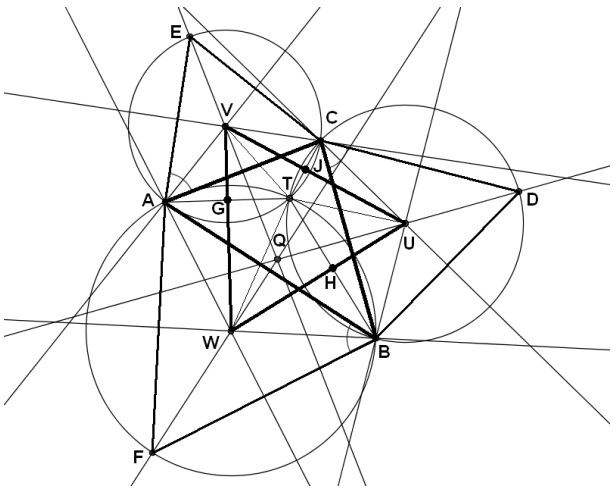
Bild: Der Feuerbachkreis mit Eulergerade und Umkreis.
• *Image: Le cercle de Feuerbach avec la droite de Euler et cercle circonscrit.*





Napoleon (!):

Geg.: • **Donné:**
$\triangle ABC$ beliebig • *quelconque.*
Über jeder Seite wird nach aussen ein gleichseitiges Dreieck mit den Schwerpunkten S_A, S_B, S_C errichtet.
• *Sur chaque côté on construit vers l'extérieur le triangle équilatéral avec les centres de gravitation S_A, S_B, S_C.*
$\Rightarrow$ $\triangle S_A S_B S_C$ ist auch gleichseitig • *est aussi équilatéral.*



Satz von Napoleon (Elementarer Beweis)
• **Théorème de Napoleon:** (Preuve élémentaire)

Geg.: • **Donné:** : $\triangle ABC$
(Fall alle $\measuredangle \geq 90^o$ • *Cas tous les* $\measuredangle \geq 90^o$)
$\triangle AFB, \triangle BDC, \triangle CEA \rightsquigarrow$ gleichseitig • *équilatérals*

Zeigen: • **Démontrer:** Das Dreieck der Schwerpunkte $\triangle UVW$ ist auch gleichseitig.
• *Le triangle des centres de gravité* $\triangle UVW$ *est aussi équilatéral.*

Wir benützen den Satz von Peripheriewinlel α und Zentriwinkel β: • *Nous utilisons le Théorème de l'angle angle inscrit* α *et l'angle au centre* β: $\rightsquigarrow \beta = 2\,\alpha$

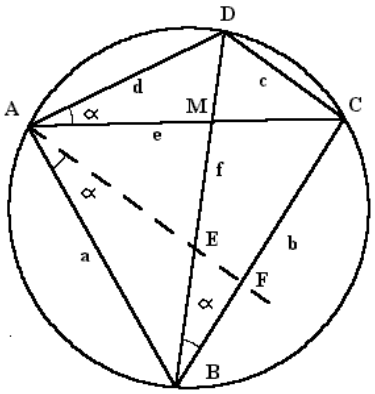
$\rightsquigarrow \measuredangle AEC = 60^o \Rightarrow \measuredangle AVC = 120^o \Rightarrow \measuredangle ATC = \frac{1}{2}(360^o - 120^o) = 120^o \rightsquigarrow$ ebenso • *de même* $\measuredangle BTA = \measuredangle CTB = \measuredangle ATC = 120^o$

$\rightsquigarrow T =$ Schnittpunkt der Kreise um U, V, W. • $T =$ *point d'intersection des circles autour de* U, V, W.

$\rightsquigarrow \overline{VU} =$ Mittelsenkrechte auf • *médiatrice de* $\overline{TC}$: $\overline{VU} \perp_m \overline{TC}$. Ebenso: • *De même:* $\overline{UW} \perp_m \overline{TB}$, $\overline{WV} \perp_m \overline{TA}$

$\rightsquigarrow \measuredangle TGV = \measuredangle TJU = \measuredangle THW = 90^o$

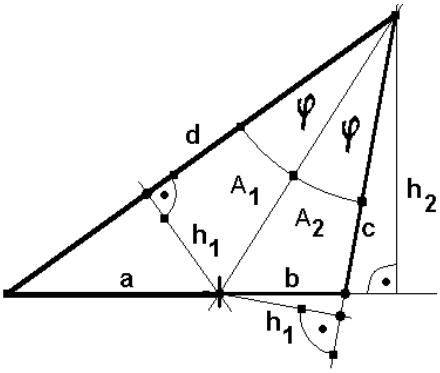
$\rightsquigarrow$ In Figur • *Dans la figure* $VGTJ \Rightarrow \measuredangle GVJ = 360^o - \measuredangle TGV - \measuredangle JTG - \measuredangle VJT = 360^o - 90^o - 120^o - 90^o$ $\rightsquigarrow \measuredangle GVJ = 60^o$. Ebenso: • *De même:* $\measuredangle HWG = \measuredangle JUH = 60^o$. $\rightsquigarrow$ ☺
(Fall $\measuredangle > 90^o$ analog. • *Cas* $\measuredangle > 90^o$*: Façon analogique.*)



Ptolemaios
(Alexandria, ca. 100-170 n.Chr. • *a.J.C.*):

Geg.: • **Donné:**
Sehnenviereck $ABCD$ beliebig. • *Quadrilatère de cordes* $ABCD$ *quelconque.*
$\Rightarrow a\,c + b\,d = e\,f$

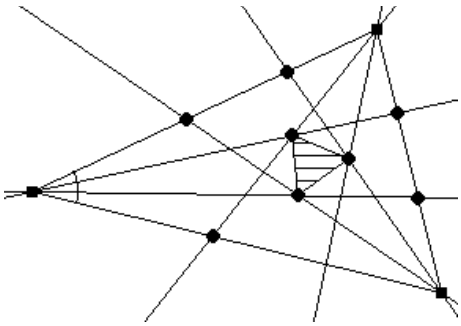
<u>Beweis:</u> • **<u>Preuve:</u>**
Mit Hilfe von Peripherie- und Zentriwinkel (z.B. $\measuredangle\alpha$ in der Skizze) sowie ähnlichen Dreiecken, z.B. $\triangle AMD \sim \triangle BMC$, $\triangle BCE \sim \triangle BDA$ u.s.w..
• *A l'aide de l'angle inscrit- et angle au centre (p.ex.* $\measuredangle\alpha$ *dans l'esquisse) et des triangles semblables, p.ex.* $\triangle AMD \sim \triangle BMC$, $\triangle BCE \sim \triangle BDA$ *etc..*



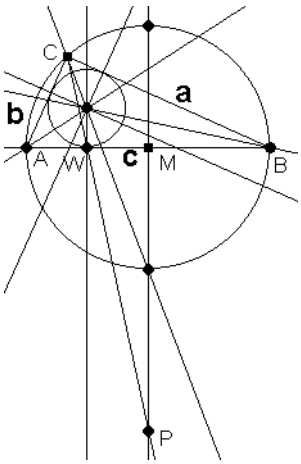
Winkelteilung im Dreieck • *Bissectrice dans un triangle*:

$$2\,A_1 = d \cdot h_1 = a \cdot h_2,\;\; 2\,A_2 = c \cdot h_1 = b \cdot h_2$$
$$\Rightarrow\; \frac{2\,A_1}{2\,A_2} = \frac{d \cdot h_1}{c \cdot h_1} = \frac{a \cdot h_2}{b \cdot h_2} \;\Rightarrow\; \frac{d}{c} = \frac{a}{b}$$
$$\rightsquigarrow\; \frac{d}{a} = \frac{c}{b}$$

☺



Morley: In einem Dreieck werden die Innenwinkel dreigeteilt. Das gezeigte entstehende Dreieck ist immer gleichseitig
• *Dans un triangle on partage les angles en trois parties egales. Le triangle obtenu (montré à côté) est toujours équilatéral.*



Heydebrand:

$$|\overline{MP}| = \frac{a+b+c}{2} = s$$

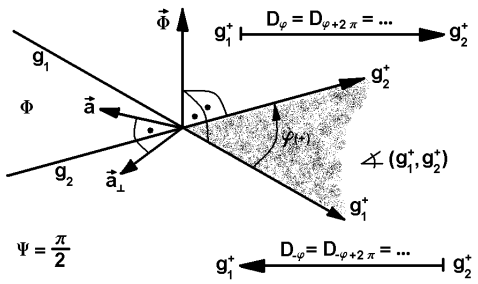
Heron:

$$A_{\triangle} = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

Weitere interessante Sätze rund um das Dreieck vgl. Literatur oder z.T. auch Skript „Architekturmaterial“ vom Autor. (Z.B. In- und Ankreis, 2. Euler-gerade, Problem von Fagnano, Fermat–Punkt, Satz von Eudoxos (siehe „Architekturmaterial, Thema Fünfeck“) u.s.w..)
• **Des autres théorèmes interessants concernant le triangle voir literature ou bien aussi partiellement skript "Architekturmaterial" de l'auteur.** *(P. ex. cercle inscrit et cercle exinscrit, 2ème droite de Euler, problème de Fagnano, point de Fermat, théorème de Eudoxos (voir "Architekturmaterial", sujet pentagone) etc..)*

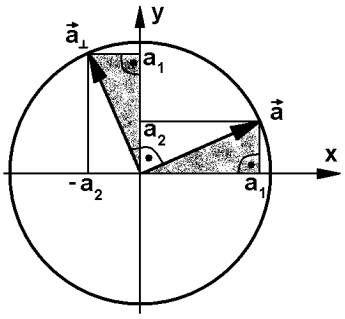
5.3.4 Drehungen – Rotations

Zur Drehung eines Vektors in der Ebene • *Quant à la rotation d'un vecteur dans le plan*:

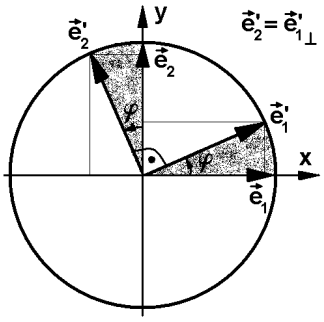


Schreibweise: • **Façon d' écrire:**
$\overrightarrow{a_\perp}$:= Durch Rechtsdrehung entstandener Normalenvektor zu $\vec{a}$.
• $\overrightarrow{a_\perp}$:= *vecteur normal à* $\vec{a}$, *résultat d'une rotation à droite.*

Zusammenhänge: • **Formules:**
(• *Rapports*)
$\overrightarrow{O_\perp} = \vec{O}, \quad |\overrightarrow{a_\perp}| = |\vec{a}|$



Lemma: • **Lemme:**
$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{a_\perp} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$



Lemma: • **Lemme:**
Drehung von $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ • *Rotation de* $\vec{e}_1, \vec{e}_2$
$\vec{e}_1 \xmapsto{D_\varphi} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} = \vec{e}_1{}'$
$\vec{e}_2 \xmapsto{D_\varphi} \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} = \vec{e}_2{}'$

Konsequenz: • **Conséquence:**

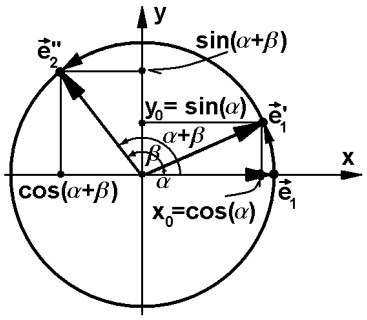
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2 \xmapsto{D_\varphi} \vec{r}\,' = x\,\vec{e}_1{}' + y\,\vec{e}_2{}' = x\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(\varphi) - y\sin(\varphi) \\ x\sin(\varphi) + y\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Lemma: • **Lemme:** $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xmapsto{D_\varphi} \vec{r}\,' = \begin{pmatrix} x\cos(\varphi) - y\sin(\varphi) \\ x\sin(\varphi) + y\cos(\varphi) \end{pmatrix}$

Matrixschreibweise (siehe Seite199): • *Façon d'écrire à l'aide une matrice (voir page 199):*

$$\vec{r}\,' = D_\varphi \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos(\varphi) - y\sin(\varphi) \\ x\sin(\varphi) + y\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

5.3.5 Zusammengesetzte Drehungen, Additionstheoreme – Rotations composées, théorèmes d'addition



Einerseits • *D'une part*:

$$\vec{e}_1 \overset{D_\alpha}{\longmapsto} \vec{e}_1{}' = \begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ \sin(\alpha)\end{pmatrix} \overset{D_\beta}{\longmapsto} \vec{e}_1{}'' = \begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta)\end{pmatrix}$$

mit • *avec* $\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ \sin(\alpha)\end{pmatrix}$

Andererseits nach dem letzten Lemma

• *D'autre part d'après le dernier lemme*:

$$\vec{e}_1 \overset{D_{\alpha+\beta}}{\longmapsto} \vec{e}_1{}'' = \begin{pmatrix}x_0\cos(\beta) - y_0\sin(\beta)\\ x_0\sin(\beta) + y_0\cos(\beta)\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ \vec{e}_1{}'' = \begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_0\cos(\beta) - y_0\sin(\beta)\\ x_0\sin(\beta) + y_0\cos(\beta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)\\ \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)\end{pmatrix}$$

Ersetze β durch $-\beta$ • *Remplacher β par $-\beta$*: $\rightsquigarrow$ $\sin(-\beta) = -\sin(\beta)$, $\cos(-\beta) = \cos(\beta)$

Folgerung: • **Conclusion:** **Additionstheoreme** • **Théorèmes d'addition:**

$$\begin{aligned}\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)\\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha \pm \beta)} = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

Spezialfälle • **Cas spéciaux:**

1 $\alpha = \beta$:

$$\begin{aligned}\sin(2\alpha) &= 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) &&= 2\sin(\alpha)(\pm\sqrt{1-\sin^2(\alpha)})\\ \cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) &&= 2\cos^2(\alpha) - 1 &&= 1 - 2\sin^2(\alpha)\\ \tan(2\alpha) &= \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}\end{aligned}$$

2 $2\alpha = \varphi,\ \alpha = \frac{\varphi}{2}$:

$$\begin{aligned}\cos(\varphi) &= 2\cos^2(\tfrac{\varphi}{2}) - 1 &&= 1 - 2\sin^2(\tfrac{\varphi}{2})\\ \sin(\tfrac{\varphi}{2}) &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\varphi)}{2}} &\wedge\quad& 2\cos(\tfrac{\varphi}{2}) &&= \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\varphi)}{2}}\\ \tan(\tfrac{\varphi}{2}) &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\varphi)}{1+\cos(\varphi)}} &&= \pm\sqrt{\frac{(1-\cos(\varphi))^2}{\sin^2(\varphi)}} &&= \pm\frac{(1-\cos(\varphi))}{\sin(\varphi)}\end{aligned}$$

3 $u := \frac{\alpha+\beta}{2},\ v := \frac{\alpha-\beta}{2},\ \alpha = u+v,\ \beta = u-v$:

$$\begin{array}{rcccl}
\sin(\alpha) \pm \sin(\beta) & = & \sin(u+v) \pm \sin(u-v) & = & \sin(u)\cos(v) + \cos(u)\sin(v) \pm \sin(u)\cos(v) \pm \cos(u)\sin(v) \\
\rightsquigarrow \quad (+): & = & 2\sin(u)\cos(v) & = & 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}) \\
\rightsquigarrow \quad (-): & = & 2\cos(u)\sin(v) & = & 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\sin(\alpha) + \sin(\beta) & = & 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2}) \\
\sin(\alpha) - \sin(\beta) & = & 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})
\end{array}$$

Interessante Zusammenhänge • Des relations intéressantes:

In einem Dreieck ist • *Dans un triangle on trouve*

1 $\tan(\alpha) + \tan(\beta) + \tan(\gamma) = \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta) \cdot \tan(\gamma)$

2 $\tan(3\alpha) = \dfrac{3\tan(\alpha) - \tan^3(\alpha)}{1 - 3\tan^2(\alpha)}$

3 $\dfrac{1+\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2})$

4 $\dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{\tan(\alpha)-\tan(\beta)} = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$

5 $|\sin(\alpha) + \cos(\alpha)| \leq \sqrt{2}$

6 $\sin^4(\alpha) + \cos^4(\alpha) \geq \frac{1}{2}$

7 $\forall_{x\in\mathbb{R}}: \ \sin(\cos(x)) < \cos(\sin(x))$

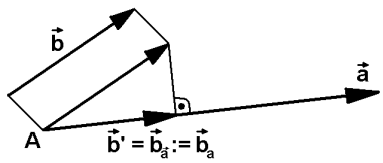
5.3.6 Leben wir in einem 4-dimensionalen Raum? – Est-ce que nous vivons dans un espace de dimension 4?

Um einen Punkt im Raum zu beschreiben, brauchen wir bekanntlich 3 Koordinaten. Der Raum der Ortsvektoren der Punkte im euklidschen Raum ist also 3–dimensional, den die Anzahl der zu den Koordinaten gehörigen Basisvektoren ist 3. Gilt das auch entsprechend für die Ebenen im Raum? — Diese Frage können wir auch mit „ja“ beantworten. Um diese einzusehen, stellen wir uns Kugeln vor mit dem Zentrum im Ursprung. Wenn nun eine beliebige Ebene gegeben ist, können wir uns dazu eine Kugel soweit wachsen lassen, bis sie die Ebene in einem einzigen Tangentialpunkt berührt. (Ausnahme: Ebenen durch den Ursprung. Der Ursprung ist aber nur ein einziger Punkt.) Ebene und Tangentialpunkt gehören also eindeutig zusammen. Zu jeder Ebene weg vom Ursprung gibt es einen eindeutigen Tangentialpunkt und umgekehrt. Es gibt daher so viele Ebenen weg vom Ursprung wie es Tangentialpunkte gibt, also wie es Punkte gibt $\neq$ Ursprung. Wir erkennen daher den „Raum der Ebenen“ als 3–dimensional. Wie aber ist es nun mit dem „Raum der Geraden“ (weg vom Ursprung)?
Um diese Frage zu beantworten hilft folgende Vorstellung: Ist eine beliebige Gerade weg vom Ursprung gegeben, so lassen wir dazu wieder eine Kugel wachsen, bis die Kugel die Gerade berührt. Der Berührungspunkt oder Tangentialpunkt ist eindeutig bestimmt. Zu diesem Punkt gibt es aber eine Tangentialebene an die Kugel, in der die Gerade liegt. In dieser Tangentialebene kann man nun die Gerade um den Tangentialpunkt drehen. Das gibt uns zur Dimension 3 der Ebenen (Tangentialebenen) eine 4. Dimension, die zum Drehwinkel gehört. Da jede Gerade genau einmal Tangente an eine solche Kugel ist, erkennen wir nun den „Raum der Geraden“ oder auch den „Raum der Strahlen“ (Halbgeraden mit $\pm$ gleicher Richtung) als 4-dimensional. Wir leben also in der 4-dimensionalen geometrischen Welt der Geraden! Wie eigenartig und ungewohnt diese Vorstellung doch ist! — Wieso? — Eben weil wir üblicherweise

auf die Punkte fixiert sind — weil wir in Punkten und nicht in Geraden zu denken pflegen...
• *Pour décrire un point dans l'espace, nous avons, comme on sait, besoin de 3 coordonnées. L'espace des vecteur de position des points dans l'espace euclidien est 3–dimensionnel, car le nombre de vecteurs de base dû aux coordonnées est 3. Est–ce que ça vaut aussi pour les plans dans l'espace? – Nous pouvons répondre "oui" à cette question. Pour reconnaître ceci, nous nous imaginons une sphère avec le centre dans l'origine. Si maintenant un plan quelconque est donné, nous pouvons imaginer que la sphère grandit autant jusqu'à ce qu'elle touche le plan dans un point tangentiel univoque. (Exception: plans par l'origine. Mais l'origine est seulement un point unique.) Le plan et le point tangentiel se correspondent de façon biunivoque. À chaque plan loin de l'origine il existe un point tangentiel univoque et vice versa. Par conséquent il existe autant de plans loin de l'origine que de points tangentiels, donc comme il y a des points ≠ l'origine. Par conséquent nous reconnaissons que "l'espace des plaines" est 3–dimensionnel. Mais ce qui concerne "l'espace des droites" (loin de l'origine)? L'idée suivante nous aide à répondre à cette question: Si une droite quelconque est donnée loin de l'origine, nous laissons de nouveau grandir une sphère jusqu'à ce que la sphère touche la droite. Le point de contact ou point tangentiel est clairement déterminé de façon univoque. À ce point, il existe un plan tangentiel à la sphère dans laquelle la droite est située. Dans ce plan tangentiel, on peut maintenant faire tourner la droite dans le plan, fixé au point tangentiel. Ça nous donne une 4ème dimension au 3 dimensions des plans (plans tangentiels), une dimension qui appartient à l'angle de tournure. Comme chaque droite est exactement une fois la tangente à une telle sphère, nous reconnaissons maintenant "l'espace des droites" ou bien "l'espace des rayons" (demi–droites avec la ± même direction) comme 4-dimensionnel. Nous vivons donc dans un monde géométrique de droites qui est 4-dimensionnel! Cette idée est bizarre et inhabituelle! — Pourquoi? — Parce que nous sommes fixés normalement aux points — et parce que nous avons l'habitude de penser "en points" et non "en droites".*

5.4 Zum Skalarprodukt – Quant au produit scalaire

5.4.1 Zur Definition – Quant à la définition



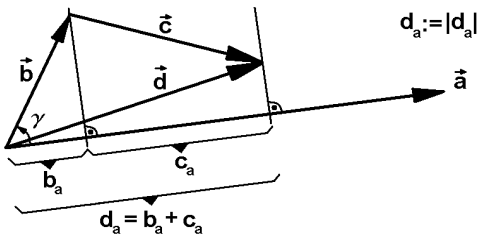
Sei • *Soit* $\vec{a} \neq \vec{0}$,

$\vec{b}_a$ = Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$
• $\vec{b}_a$ = *projection de* $\vec{a}$ *sur* $\vec{a}$

Definitionen: • **Définitions:**
$\vec{b}_a$:= **vektorielle Komponente** von $\vec{b}$ in Richtung $\vec{a}$.
• $\vec{b}_a$:= **Composant vectoriel** *de* $\vec{b}$ *en direction de* $\vec{a}$.
Weiter • *En outre*:

$$b_a = \begin{cases} |\vec{b}_a| & \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}_a \\ -|\vec{b}_a| & \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}_a \end{cases}$$

(**skalare Komponenten** • **composants scalaires**)



(Skizze: • *Esquisse:* $\rightsquigarrow$ $dim = 2$)

Zusammenhänge: • **Formules:**
(• *Rapports:*)

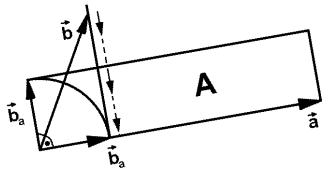
Seien • *Soient* $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$

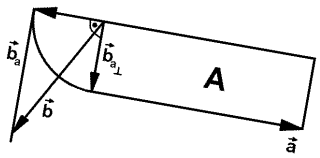
1 $\vec{b}_a + \vec{c}_a = \vec{d}_a$

2 $b_a + c_a = d_a$

3 $b_a = b \cdot \cos(\gamma)$ $\rightsquigarrow$ (**Projektionssatz** • **Théorème de projection**)

Definitionen: • **Définitions:**





A neg.!

Sei der Flächeninhalt des Parallelogramms:
• *Soit la surface du parallelogramme:*
$A = a \cdot b \cdot \cos(\gamma) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\gamma) = a \cdot b_a$
$:= \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ heisst **Skalarprodukt** von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
• $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ *s'appelle* **produit scalaire** *de* $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$.

Schreibweise: • **Façon d' écrire:** $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ (resp. • *resp.* $\langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle$) oder • *ou* $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist also die um a gestreckte Komponente von $\vec{b}$ (in Richtung $\vec{b}$).
• *Le produit scalaire de* $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$ *est donc le composant de* $\vec{b}$ *allongé de* a *(dans la direction du vecteur* $\vec{b}$*).*

Achtung: • **Attention:** $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \neq \vec{a}^{\,T} \cdot \vec{b}$; $(\vec{a}^{\,T} \cdot \vec{b})$ ist das Matrixpordukt • *... est le produit matriciel.*

Hinweis: • *Indication:* $\cos(\gamma) < 0 \;\Rightarrow\; A < 0$

Eigenschaften:
• **Qualités:**

1 **Kommutativität** • **Commutativité**
$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$
(wegen: • *raison:* $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\gamma)$)

2 **Distributivität** • **Distributivité**
$\langle \vec{a}, (\vec{b} + \vec{c}) \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$
(wegen Projektionssatz • *raison: théorème de projection*)

3 **Assoziativität** • **Associativité:**
Für drei Vektoren sinnlos (Abgeschlossenheit, Produkt zweier Vektoren ist kein Vektor mehr) • *Ne donne pas de sens pour trois vecteurs.(Produit non fermé, produit de deux vecteurs est un scalaire)*

4 Jedoch: **Assoziativität** mit Skalar (Fläche!):
• *Par contre* **associativité** *avec un scalaire (surface!):*

$$\lambda \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \lambda \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \lambda \vec{b} \rangle$$

Folgerungen:
• **Conclusions:**

1 $\langle(\vec{a}+\vec{b}),(\vec{c}+\vec{d})\rangle = \langle\vec{a},\vec{c}\rangle + \langle\vec{a},\vec{d}\rangle + \langle\vec{b},\vec{c}\rangle + \langle\vec{b},\vec{d}\rangle$

2 $\langle\lambda\,\vec{a},\mu\,\vec{b}\rangle = (\lambda\,\mu)\,\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$

3 für • *pour* $\vec{a},\vec{b} \neq 0$: $\quad sgn\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = sgn(\cos(\gamma))\rangle$

4 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{a}\perp\vec{b}$

5 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = \pm|\vec{a}|\cdot|\vec{b}| \;\Leftrightarrow\; \vec{a}\parallel\vec{b}$

6 Schwarz: $|\langle\vec{a},\vec{b}\rangle| \leq |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

5.4.2 Skalarprodukt in Komponenten – Le produit scalaire dans les composants

Es ist • *On trouve*:

Erstens • *Premièrement*: $\langle\vec{e}_k,\vec{e}_k\rangle = |\vec{e}_k|\cdot|\vec{e}_k|\cdot\cos(\angle(\vec{e}_k,\vec{e}_k)) = 1\cdot 1\cdot\cos(0) = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$
und • *et* $i \neq k \;\Rightarrow\; \langle\vec{e}_i,\vec{e}_k\rangle = |\vec{e}_i|\cdot|\vec{e}_k|\cdot\cos(\angle(\vec{e}_i,\vec{e}_k)) = 1\cdot 1\cdot\cos(\frac{\pi}{2}) = 1\cdot 1\cdot 0 = 0.$
Also • *Donc*:

$$\langle\vec{e}_i,\vec{e}_k\rangle \;:=\; \delta_{i,k} \;=\; \begin{cases} 0 & \vec{e}_i\perp\vec{e}_k \\ 1 & \vec{e}_i\parallel\vec{e}_k \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ ($\delta_{i,k}$: **Kronecker-Symbol** • **Symbole de Kronecker**)
Zweitens • *Deuxièmement*:

$$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = \langle\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\rangle = \langle(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3),(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3)\rangle$$

Multipliziert man hier distributiv aus und benützt man $\langle\vec{e}_i,\vec{e}_k\rangle = \delta_{i,k}$, so fallen alle Produkte mit gemischten Gliedern weg. Es bleiben nur noch die $\langle\vec{e}_i,\vec{e}_i\rangle = 1$.
• *Si l'on utilise ici la loi distributive et qu'on a aussi trouvé* $\langle\vec{e}_i,\vec{e}_k\rangle = \delta_{i,k}$, *tous les produits avec des termes (indices) mélangés n'apparaissent plus. Il ne reste que les produits* $\langle\vec{e}_i,\vec{e}_i\rangle = 1$.

Konsequenz: • **Conséquence:** $\langle\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \sum_{k=1}^{3} a_ib_i$

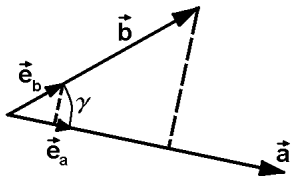
$$\rightsquigarrow\; |\vec{a}| = \sqrt{\langle\vec{a},\vec{a}\rangle}$$

Verallgemeinerung für den $\mathbb{R}^n$ • **Généralisation pour le $\mathbb{R}^n$**

Sei • *Soit* : $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots\vec{e}_n$ *ONB* $\rightsquigarrow$ (Orthonormalbasis • *base ortho–normale*)
und • *et* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.
Analog zum $\mathbb{R}^3$ gewinnt man: • *De façon analogue au* $\mathbb{R}^3$ *on obtient la formule:*

$$\langle\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = \sum_{k=1}^{n} a_ib_i$$

5.4.3 Anwendungen – Applications

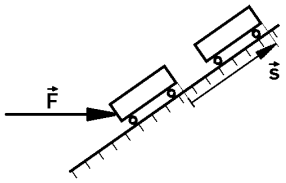


Bsp.: • **Exemple:**

(**Geometrie** • **Géométrie**)

Winkel zwischen zwei Vektoren
• *Angle entre deux vecteurs*:

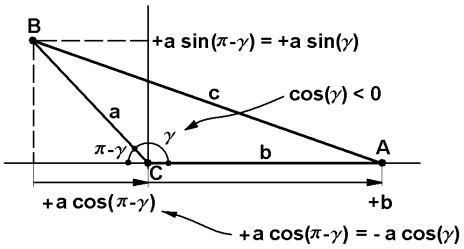
$$\cos(\gamma) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}, \quad \gamma = \arccos(\frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|})$$



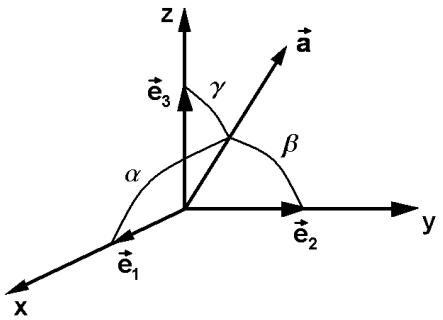
Bsp.: • **Exemple:**
Physik • **Physique:**

Arbeit • *Travail*:

$$W = F_s \cdot s = F \cdot s \cdot \cos(\gamma) = \langle \vec{F}, \vec{s} \rangle$$



Bsp.: • **Exemple:**
Cosinussatz • **Théorème du cosinus:**
$\vec{a} = \begin{pmatrix} a\,\cos(\gamma) \\ a\,\sin(\gamma) \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} -b \\ 0 \end{pmatrix}$
$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}, \ c^2 = c \cdot c = |\vec{c}| \cdot |\vec{c}| = \langle \vec{c}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = a^2 + 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + b^2 = a^2 - b^2 + 2\,a\,b\,\cos(\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})) = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos(\gamma)$
$\rightsquigarrow \ c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos(\gamma)$



Bsp.: • **Exemple:**

Richtungscosinus • **Cosinus de direction:**

Sei • *Soit* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, z.B. • *p.ex.*

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{e}_1 \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{e}_1|} = \langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \cdot \frac{1}{a \cdot 1} = \frac{a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0}{a} = \frac{a_1}{a}$$

$$\Rightarrow \ \alpha = \arccos(\frac{a_1}{a}), \ \beta = \arccos(\frac{a_2}{a}), \ \gamma = \arccos(\frac{a_3}{a}).$$

$$\Rightarrow \ \cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = \frac{a_1^2}{a^2} + \frac{a_2^2}{a^2} + \frac{a_3^2}{a^2} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{a^2} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = 1$$

$$\Rightarrow \ \cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$$

Bemerkung: • **Remarque:**

Eine entsprechende Formel findet man für den $\mathbb{R}^n$. • *On trouve une formule correspondante pour le* $\mathbb{R}^n$.

Problem: • **Problème:** **(Katzenauge)** • **(Catadioptre)**

Seien drei ebene Spiegel $E_1,\ E_2,\ E_3$ gegeben, die senkrecht aufeinander stehen. Von einem Punkt P aus wird ein Strahl in Richtung $\vec{v}$ ausgesendet, der an allen drei Spiegeln reflektiert wird. Man zeige, dass der an allen Spiegeln reflektierte Strahl die Richtung $-\vec{v}$ hat. (Normalenvektoren $\vec{n}_k \perp E_k,\ |\vec{n}_k| = 1$).
• *Soient donnés trois plans $E_1,\ E_2, E_3$ qui sont perpendiculaires l'un sur l'autre. Un rayon est émis d'un point P en direction de $\vec{v}$ et reflété à tous les trois miroirs. Démontrer que le rayon reflété a la direction de $-\vec{v}$. (Vecteurs normaux $\vec{n}_k \perp E_k,\ |\vec{n}_k| = 1$).*

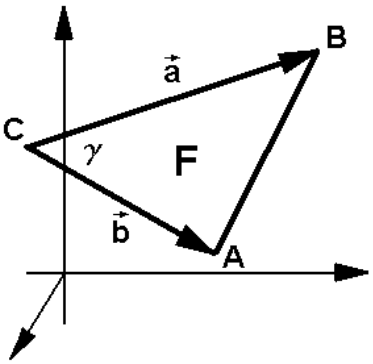
Lösung: • *Solution:*

$\vec{n}_1 \rightsquigarrow\ \vec{n}_2 \rightsquigarrow\ \vec{n}_3 \rightsquigarrow\ \vec{n}_4, \qquad \vec{v}_{k+1} = \vec{v}_k - 2\cdot\vec{n}_k\langle\vec{v}_k,\vec{n}_k\rangle$ Skizze! • *Esquisse!* $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
\vec{v}_2 &= \vec{v}_1 - 2\cdot\vec{n}_1\langle\vec{v}_1,\vec{n}_1\rangle,\\
\vec{v}_3 &= \vec{v}_2 - 2\cdot\vec{n}_2\langle\vec{v}_2,\vec{n}_2\rangle = \vec{v}_1 - 2\cdot\vec{n}_1\langle\vec{v}_1,\vec{n}_1\rangle - 2\cdot\vec{n}_2\langle(\vec{v}_1 - 2\cdot\vec{n}_1\langle\vec{v}_1,\vec{n}_1\rangle),\vec{n}_2\rangle\\
&= \vec{v}_1 - 2\cdot\vec{n}_1\langle\vec{v}_1,\vec{n}_1\rangle - 2\cdot\vec{n}_2\langle\vec{v}_1,\vec{n}_2\rangle + 4\cdot\underbrace{\langle\vec{n}_1\langle\vec{v}_1,\vec{n}_1\rangle,\vec{n}_2\rangle}_{=0,\ \ \vec{n}_1\perp\vec{n}_2} = \vec{v}_1 - 2\cdot\vec{n}_1\langle\vec{v}_1,\vec{n}_1\rangle - 2\cdot\vec{n}_2\langle(\vec{v}_1,\vec{n}_2\rangle\\
\vec{v}_4 &= \ldots = \vec{v}_1 - 2\cdot\vec{n}_1\langle\vec{v}_1,\vec{n}_1\rangle - 2\cdot\vec{n}_2\langle\vec{v}_1,\vec{n}_2\rangle - 2\cdot\vec{n}_3\langle\vec{v}_1,\vec{n}_3\rangle\\
\rightsquigarrow\ \vec{v}_1 + \vec{v}_4 &= 2\cdot(\vec{v}_1 - \vec{n}_1\langle\vec{v}_1,\vec{n}_1\rangle - \vec{n}_2\langle\vec{v}_1,\vec{n}_2\rangle - \vec{n}_3\langle\vec{v}_1,\vec{n}_3\rangle) = \vec{v}_1 - \underbrace{(\vec{v}_1)_{\vec{n}_1} + (\vec{v}_1)_{\vec{n}_2} + (\vec{v}_1)_{\vec{n}_3}}_{=\vec{v}_1,\ \ B=\{\vec{n}_1,\vec{n}_2,\vec{n}_3\}} = \vec{v}_1 - \vec{v}_1 = \vec{0}\\
\rightsquigarrow\ \vec{v}_4 &= -\vec{v}_1
\end{aligned}$$

☺

Problem: • **Problème:** **(Dreiecksflächeninhalt)** • **(Aire d'un triangle)**



$$\begin{aligned}
2\,F &= |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\gamma)\\
&\Rightarrow\ 4\,F^2 = |\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cdot\sin^2(\gamma)\\
&= |\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cdot(1-\cos^2(\gamma))\\
&= (|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|)^2 - (|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\gamma))^2\\
&= (|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|)^2 - \langle\vec{a},\vec{b}\rangle^2
\end{aligned}$$

Satz: • **Théorème:**

$$F = \frac{1}{2}\sqrt{(|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|)^2 - \langle\vec{a},\vec{b}\rangle^2}$$

Beispiele weiterer Anwendungen: • **Exemples pour d'autres applications:**

1 Normalenebene zu Vektor durch gegebenen Punkt. • *Plan normal par rapport à un vecteur à travers un point donné.*

2 Abstand Ebene–Ursprung oder Ebene–Ebene. • *Distance plan–origine ou plan–plan.*

3 Orthogonalzerlegung eines Vektors. • *Décomposition orthogonale d'un vecteur.*

5.4.4 Drehung eines Vektors — Déplacement angulaire d'un vecteur

Problem: • **Problème:**

Gegeben sei $\vec{a}$. Drehe $\vec{a}$ um den Winkel φ um den Punkt O: $D_\varphi(\vec{a}) = \vec{b} \rightsquigarrow\ \vec{b} = ?$.
• *Soit donné $\vec{a}$. Révolution de $\vec{a}$ par l'angle φ autour du point O: $D_\varphi(\vec{a}) = \vec{b} \rightsquigarrow\ \vec{b} = ?$.*

Sei • *Soit* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\vec{a_\perp} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \varphi$, $\measuredangle(\vec{b}, \vec{a_\perp}) = \frac{\pi}{2} - \varphi$

$\rightsquigarrow$ $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) = |\vec{a}|^2 \cdot \cos(\varphi) = (a_1^2 + a_2^2) \cdot \cos(\varphi) = a_1\, b_1 + a_2\, b_2$,
$\wedge$ $\langle \vec{b}, \vec{a_\perp} \rangle = |\vec{b}| \cdot |\vec{a_\perp}| \cdot \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \sin(\varphi) = (a_1^2 + a_2^2) \cdot \sin(\varphi) = -a_2\, b_1 + a_1\, b_2$

Wir erhalten somit ein Gleichungssystem mit 2 Gleichungen für b_1 und b_2:
• *On reçoit donc un système de* 2 *équations pour* b_1 *et* b_2*:*

$$\left| \begin{array}{lcl} a_1\, b_1 + a_2\, b_2 & = & (a_1^2 + a_2^2) \cdot \cos(\varphi) \\ -a_2\, b_1 + a_1\, b_2 & = & (a_1^2 + a_2^2) \cdot \sin(\varphi) \end{array} \right|$$

$\rightsquigarrow$ Lösung: • *Solution:*

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

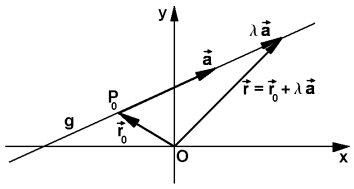
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \xmapsto{D_\varphi} \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Beh.: • **Thè.:**

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \cos\varphi - a_2 \sin\varphi \\ a_1 \sin\varphi + a_2 \cos\varphi \end{pmatrix}$$

5.5 Geradengleichungen – Equations de droites

5.5.1 Parametergleichungen – Equations paramétriques



Sei • *Soit* $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$, $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$, $P \in g$ beliebig • *. . . quelconque,*
$P_0 \in g$ fest • *. . . fixe,*
$\vec{a} = \overrightarrow{P_0P_1} \parallel g$ gegeben • *. . . donné,* $t := \lambda \in \mathbb{R}$ Parameter • *paramètre.*

$\rightsquigarrow$ **Parametergleichung:**
• **équation paramétrique:** $(t := \lambda)$

$$\vec{r} = \vec{r}(\lambda) = \vec{r}_0 + \lambda \cdot \vec{a} = \overrightarrow{0P_0} + \lambda \cdot \overrightarrow{P_0P_1}$$

Im $\mathbb{R}^3$ hat man dann: • *Dans le* $\mathbb{R}^3$ *on obtient:*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

5.5.2 Komponentengleichungen – Equations de composants

Schreibt man die Parametergleichung komponentenweise auf, so erhält man die Komponentengleichung:
• *Si l'on écrit l'équation paramétrique par composants, alors on obtient l'équation de composants:*

$$\begin{array}{rcl} x & = & x_0 + \lambda a_1 \\ y & = & y_0 + \lambda a_2 \\ z & = & z_0 + \lambda a_3 \end{array}$$

Bsp.: • **Exemple:**

$$g_1: \quad \vec{r}_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad g_2: \quad \vec{r}_2(\mu) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Problem: • **Problème:**

Schnittpunkt? Parallel? Windschief? • *Point d'intersection? Parallèle? Gauche (tout de travers)?*

$\rightsquigarrow$ Untersuche • *Etudier*:

$$\vec{r}_1(\lambda) = \vec{r}_2(\mu) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ System • *Système*:

$$\begin{aligned} 0 - 2\lambda - \mu &= 0 \\ 1 - \lambda - 2\mu &= 0 \\ 5 + 2\lambda + \mu &= 0 \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{L} = \{\}$: Windschief • *gauche*!

5.5.3 Spezialfall: Gerade in Grundebene – Cas spécial: Droite dans le plan de référence

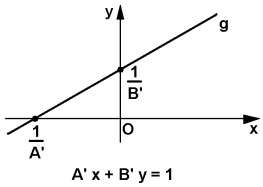
Sei • *Soit* $g \in G_1 \quad \rightsquigarrow \quad z = 0$
G_1 Grundebene, 1. Hauptebene, xy–Ebene • G_1 *Plan référence, 1. plan principal, plan xy*

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda a_1 \\ y &= y_0 + \lambda a_2 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Gerade • *Droite*
$\Rightarrow \vec{a} \neq \vec{0}$, z.B. • *p.ex.* $a_1 \neq 0$
$\Rightarrow t = \dfrac{x - x_0}{a_1}, \quad y = y_0 + \dfrac{x - x_0}{a_1} \cdot a_2$
$\Rightarrow ya_1 - y_0 a_1 - xa_2 + x_0 a_2 = 0$
$\Rightarrow a_2 x - a_1 y + (a_1 y_0 - a_2 x_0)$
$= Ax + By + C = 0$

Form • *Forme* $Ax + By + C = 0$: $\rightsquigarrow$ **Koordinatengleichung** • **Equation de coordonnés**

Z.B. • *P.ex.*
$C \neq 0 \Rightarrow 1 = -\dfrac{A}{C} \cdot x - \dfrac{B}{C} \cdot y = A'x + B'y$
$\rightsquigarrow \quad \dfrac{1}{A'}, \ \dfrac{1}{B'}$: Koordinaten • *Coordonnés*



Eben haben wir benutzt: • *On vient d'utiliser:* $\lambda = \dfrac{x - x_0}{a_1}, \ a_1 \neq 1, \ y = y_0 + \dfrac{x - x_0}{a_1} \cdot a_2$

$\rightsquigarrow \quad y - y_0 = \Delta y = (x - x_0)\dfrac{a_2}{a_1} = \Delta x \dfrac{a_2}{a_1} \Rightarrow \dfrac{a_2}{a_1} = \tan(\varphi) = m$ (Steigung • *montée (pente)*)

$\rightsquigarrow$ **Punkt–Richtungs–Form** • **Formule point–direction (équation de la droite passant par un point donné et ayant une direction donnée)**

$$y - y_0 = \Delta y = m(x - x_0) = \tan(\varphi)(x - x_0) = \tan(\varphi)\Delta x$$

5.5.4 Andere Formen — D'autres formes

Weitere gängige Beziehungen betr. Geradengleichungen sind z.B.:
• *On connaît d'autres rapports courants concernant les équations de la droite, p.ex.:*

Achsenabschnittsform: • Forme de section d'axe:

$$Ax + By + 1 = 0,\ \ a = -\frac{1}{A},\ \ b = -\frac{1}{B}\ \Rightarrow\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Normalform: • Forme normale:

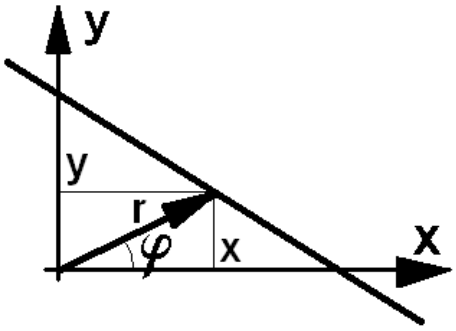
Sei • *Soit* $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},\ \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$

$$\vec{x} - \vec{a} \perp \vec{n}\ \Rightarrow\ \langle \vec{x} - \vec{a}, \vec{n} \rangle = 0\ \Rightarrow\ \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{n} \rangle = \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \rangle - \langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow\ x\ \underbrace{n_1}_{A} + y\ \underbrace{n_2}_{B} - \underbrace{a_1\, n_1 + a_2\, n_2}_{-C} = A\, x + B\, y + C = 0,\ \ \vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

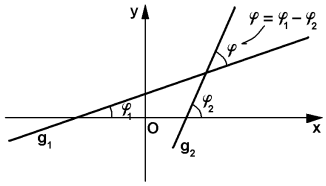
Zur Polarform der Geraden:
• Quant à la forme polaire de la droite:

$\langle \vec{r}, \vec{e}_\varphi \rangle = x\, \cos\varphi + y\, \sin\varphi = |\vec{r}|\, |\vec{e}_\varphi| \cdot \cos 0 =$
$= r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \ \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + t\, a_1 \\ y_0 + t\, a_2 \end{pmatrix},$
$\varphi(t) = \arctan(\dfrac{y_0 + t\, a_2}{x_0 + t\, a_1}),$
$r(t) = \sqrt{(x_0 + t\, a_1)^2 + (y_0 + t\, a_2)^2}$



5.5.5 Winkel zwischen Geraden – Angle entre des droites

$$g_1:\ \ y = m_1 x + q_1,\ \ m_1 = \tan(\varphi_1)$$
$$g_2:\ \ y = m_2 x + q_2,\ \ m_2 = \tan(\varphi_2)$$



Benutze Additionstheoreme • *Utiliser les théorèmes d'addition*:

$$\tan(\varphi) = \tan(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\tan(\varphi_2) - \tan(\varphi_1)}{1 + \tan(\varphi_2) \cdot \tan(\varphi_1)} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1} \rightsquigarrow \quad \varphi = \arctan(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1})$$

Andererseits haben wir: • *D'autre part on a:*

$$g_1:\ \ \vec{r}_1(\lambda) = \vec{a}_0 + \lambda \vec{a},\ \ g_2:\ \ \vec{r}_2(\mu) = \vec{b}_0 + \mu \vec{b},\ \ \varphi = \arccos(\frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|})$$

Damit kann man Probleme wie das folgende lösen
• *Avec ceci on peut résoudre des problèmes comme il suit:*

Geg.: • Donné: $g_1 = g_1(A, B) = \overline{AB},\ \ A(-2/2), B(1/6),\ \ g_2 = g_2(C, \varphi),\ \ C = C(4, 4),$
$\varphi = \dfrac{\pi}{6}$ (Steigungswinkel • *Angle de montée resp. pente.*) $\rightsquigarrow \quad D = g_1 \cap g_2 = ?$

Beachte: • *Faire attention à:*

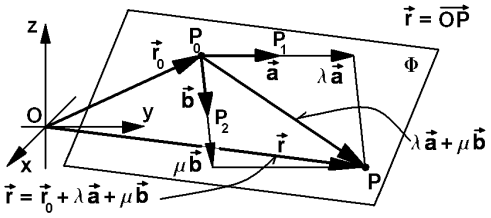
$$g_1: \; A_1\,x + B_1\,y = 0 \;\Rightarrow\; \langle \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle = \langle \vec{n}, \vec{r_1} \rangle = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n} = \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \perp \vec{r_1} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{g_1} \;\Rightarrow\; \vec{n} \perp g_1$$

$$g_2: \; A_1\,x + B_1\,y + C_2 = 0 \;\Rightarrow\; \langle \begin{pmatrix} A_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle + C_2 = \langle \vec{n_2}, \vec{r_2} \rangle + C_2 = 0, \;\; \vec{r_2} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{g_2}$$

$$C_2 \neq 0 \;\Rightarrow\; \mathbb{L}_{g_1} \cap \mathbb{L}_{g_2} = \{\ \} \;\Rightarrow\; g_1 \parallel g_2 \;\Rightarrow\; \vec{n} \perp g_2$$

5.6 Ebenengleichungen – Equations de plans

5.6.1 Parametergleichungen – Equations paramétriques



Sei Φ = Ebene • *Soit* Φ = *plan*,

$P_0, P_1, P_2 \in \Phi$,
$\vec{a} = \overrightarrow{P_0P_1}$, $\vec{b} = \overrightarrow{P_0P_2}$, $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$,

$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda\,\overrightarrow{P_0P_1} + \mu\,\overrightarrow{P_0P_2}$
$= \vec{r}_0 + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$

$\rightsquigarrow$ **Parametergleichung:** • **équation paramétrique:** $\vec{r} = \vec{r}(\lambda, \mu) = \vec{r}_0 + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$

5.6.2 Komponentengleichungen – Equations de composants

Schreibt man die Parametergleichung wieder komponentenweise auf, so erhält man die Komponentengleichung:
• *Si l'on écrit l'équation paramétrique par composants, alors on obtient l'équation de composants:*

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda a_1 + \mu b_1 \\ y &= y_0 + \lambda a_2 + \mu b_2 \\ z &= z_0 + \lambda a_3 + \mu b_3 \end{aligned}$$

Bsp.: • **Exemple:** (Anwendung • *Une application*)

Sei • *Soit* $g: \; \vec{r}_1(t) = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{a}, \;\; \Phi: \; \vec{r}_2(\lambda, \mu) = \vec{r}_0 + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$

Problem: • **Problème:** $g \cap \Phi = ? \rightsquigarrow$ System $\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(\lambda, \mu)$ lösen. • *résoudre* $\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(\lambda, \mu)$.

5.6.3 Koordinatengleichungen – Equations de coordonnés

Berechnet man in einer Komponentengleichung z.B. λ und setzt es in den andern beiden Gleichungen ein, so erhält man zwei Gleichungen in x, y, z, μ. Eliminiert man auf diese Weise auch noch μ, so bleibt noch eine Gleichung in x, y, z. Diese heisst **Koordinatengleichung** und ist von nachstehender Form. (Bei der Elimination von λ und μ benutzt man nur lineare Operationen. Daher ist die entstehende Gleichung linear.)
• *Si l'on calcule dans une équation de composants p. ex.* λ *en l'introduisant après dans les autres deux équations, on obtient deux équations en* x, y, z, μ. *Si l'on élimine encore ce* μ *de la même manière, il ne reste qu'une équation en* x, y, z. *Cette équation s'appelle* **équation de coordonnés**. *Elle a la forme suivante. (En éliminant* λ *et* μ *on n'utilise que des opérations linéaires. L'équation ainsi déduite est*

linéaire)

$$\rightsquigarrow \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

Problem: • **Problème:**

Geg.: • Donné: Koordinatengleichung der Ebene • *Equation de coordonnés du plan*:

$$\Phi: \; Ax + By + Cz + D = \langle \vec{n}, \vec{r} \rangle + D = \langle \vec{a}_\perp, \vec{r} \rangle + D = 0$$

$\rightsquigarrow$ Gesucht: Parametergleichung • *Il faut chercher l'équation paramétrique*:

$$\Phi: \; \vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \cdot \vec{a}$$

Idee: • **Idée:**

Setze z.B. • *Mettez p.ex.* $x = \lambda, \; y = \mu$.
Berechne damit z. • *Calculer avec ces valeurs l'inconnue* z.

$$\rightsquigarrow \quad z = z_0 + \lambda z_1 = \mu z_2 \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: • **Remarque:**

Es gilt: • *Il vaut:* $D = 0 \;\Rightarrow\; \langle \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rangle = 0 \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \perp \Phi$

$\Phi_1: \; A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \;\; \Phi_2: \; A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$
$D_1 \neq D_2 \;\Rightarrow\; \Phi_1 \neq \Phi_2 \;\wedge\; \Phi_1 \| \Phi_2$

Achsenabschnittsform der Ebene: • **Forme de section d'axe du plan:**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

5.6.4 Interpretation von Gleichungen – Interprétation d' équations

Allgemein stellt man fest: • *Généralement on constate:*

- ⊘ Gleichung mit 2 Unbekannten: Gerade in der Ebene.
  • *Equation avec* 2 *inconnues: Droite dans le plan.*
- ⊘ Gleichung mit 3 Unbekannten: Ebene im Raum. • *Equation avec* 3 *inconnues: Plan dans l'espace.*
- ⊘ System von 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten: Gemeinsame Lösung, Schnittmenge zweier Ebenen im Raum: Gerade (abgesehen von Sonderfällen).
  • *Système à* 2 *équations avec* 3 *inconnues: Solution commune, intersection de deux plans dans l'espace: Droite (sauf dans les cas exceptionnels).*

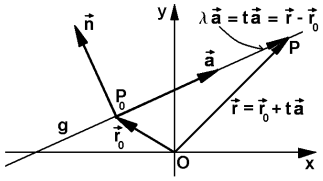
5.6.5 Spezielle Lage von Ebenen – Position spéciale de plans

Sei • *Soit* $\Phi: \; Ax + By + Cz + D = 0$.

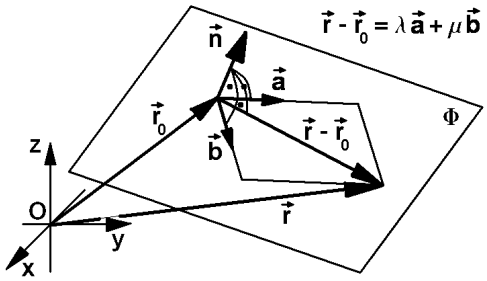
Bsp.: • **Exemple:**

- ⊘ $D = 0, \;\; Ax + By + Cz = 0 \;\Rightarrow\; O(0/0/0) \in \Phi$

⊘ Z.B. • *P.ex.* $C = 0$,
z beliebig • z *quelconque*
$Ax + By + D = 0 \;\Rightarrow\; \Phi\perp$ $x\,y$–Ebene
• $\Phi\perp$ *plan* $x\,y$. $\rightsquigarrow$
Φ erstprojizierend • Φ *projete sur le plan* $x\,y$.
(Entsprechend für die andern Ebenen. • *Correspondant pour les autres plans.*)



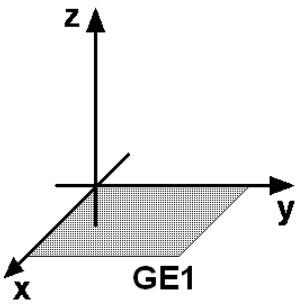
Gerade • *Droite*: $g: \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + t\,\vec{a}$,
$\vec{a}$ orientiert g • *oriente* g, $\vec{n}\perp g$,
$(\vec{a}, \vec{n})$ '+'–Drehung • *rotation* '+'.
$\vec{r} - \vec{r}_0 = \lambda\,\vec{a}\perp\vec{n}$
$\rightsquigarrow$ Distanz • *Distance*



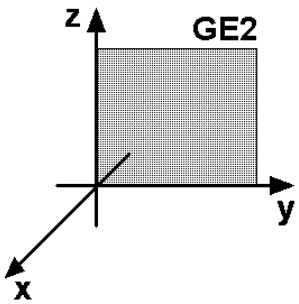
Ebene • *Plan*: $\Phi: \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b}$,
$\vec{a}$, $\vec{b}$ orientieren Φ • ... *orientent* Φ,
$\vec{n}\perp\Phi$,
$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{n})$ Rechtssystem • *Syst. de sens direct*
$\vec{r} - \vec{r}_0 = \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b}\perp\vec{n}$
$\rightsquigarrow$ Distanz • *Distance*

5.6.6 Übersicht – Vue générale

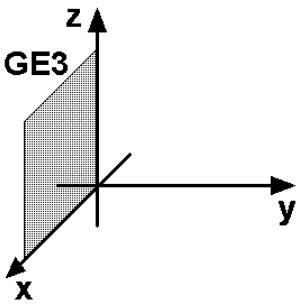
Grundebenen: • *Surface de base (fondamentales):*



$0\,x + 0\,y + 1\,z = 0$

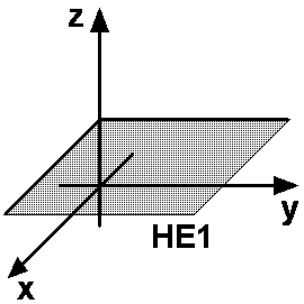


$1\,x + 0\,y + 0\,z = 0$

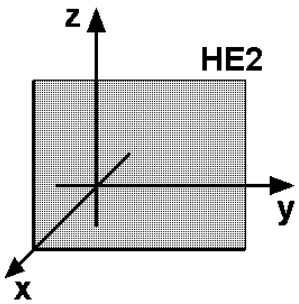


$0\,x + 1\,y + 0\,z = 0$

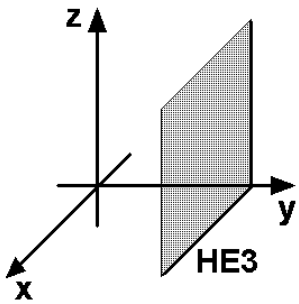
Hauptebenen: • *Surface principales:*



$0\,x + 0\,y + 1\,z = D$

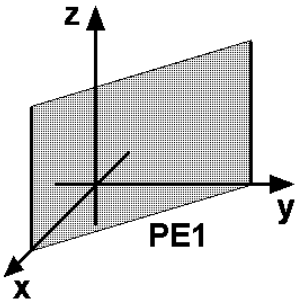


$1\,x + 0\,y + 0\,z = D$

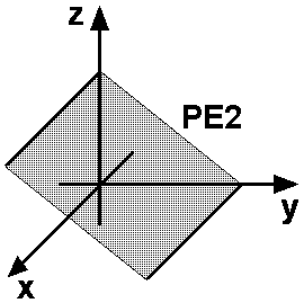


$0\,x + 1\,y + 0\,z = D$

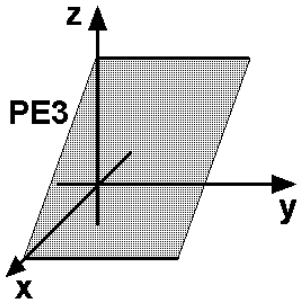
Projizierende Ebenen: • *Surface projetantes:*



$A\,x + B\,y + 0\,z = D$



$0\,x + B\,y + C\,z = D$



$A\,x + 0\,y + C\,z = D$

5.6.7 Hess'sche Normalform – Forme normale de Hess

Es ist immer: • *On a toujours:* $\vec{r} - \vec{r}_0 \perp \vec{n} \rightsquigarrow$

Satz: • **Théorème:** (Kriterium für $\vec{n}$ • *Critère pour* $\vec{n}$):

$$\langle \vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n} \rangle = 0 \quad \text{resp. } \bullet \textit{ resp. } \langle \vec{r}, \vec{n} \rangle = \langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \rangle = \langle \vec{r}_0, \vec{n} \rangle$$
$$= (r_0)_n \cdot n = (r)_n \cdot n = k = const$$

$\rightsquigarrow$ Für • *Pour* $|\vec{n}| = 1$ ist • *on a*:
$(r_0)_n \cdot n = (r_0)_n \cdot 1 = (r_0)_n = k = \pm$Abstand *Origo*–Gerade/ Ebene • $\pm$ *distance Origo–droite/ plan*

In einem *ONS* ist: • *Dans un ONS on trouve*:

$$\langle \vec{r}, \vec{n} \rangle = \langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \rangle = n_1 x + n_2 y + n_3 z = k \;\Rightarrow\; n_1 x + n_2 y + n_3 z + (-k) = 0$$

Diese Gleichung erkennen wir als Koordinatengleichung einer Ebene:
• *On reconnaît cette équation comme équation de coordonnés d'un plan:*

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z + (-k) = Ax + By + Cz + D = 0$$
$$\text{mit } \bullet \textit{ avec } \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \text{ und } \bullet \textit{ et } -k = D$$

Wählt man • *Si l'on choisit* $|\vec{n}| = |\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}| = 1$, so wird • *on trouve donc*
$-k = D = \pm$Abstand *Origo*–Ebene (Gerade: $C = 0$) • $= \pm$ *distance Origo–plan (droite* $C = 0$*).*

Dabei ist • *Il est* $|\vec{n}| = 1 \;\Rightarrow\; \vec{n} := \vec{e}_n \;\wedge\; \vec{e}_n = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \dfrac{1}{|\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}|} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Allgemein ist aber: • *Dans le cas général on a*: $|\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}| \neq 1$.

Die normierte Koordinatengleichung lautet daher: • *L'équation de coordonnés normée est donc:*

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,z+\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0$$

Somit ist: • *Par conséquence on a:* $\dfrac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=-k=$
±Abstand *Origo*–Ebene (Gerade: $C=0$) • $=\pm$*distance Origo–plan (droite* $C=0$*)*

Satz: • **Théorème:**

Vor.: • **Hyp.:**

Ebene • *Plan* $A\,x+B\,y+C\,z+D=0$.
(Gerade • *droite* $C=0$)

Beh.: • **Thè.:**

$$\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=-k=$$

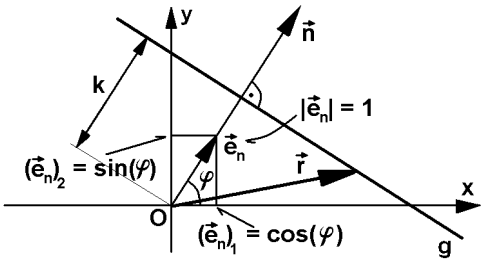
±Abstand *Origo*–Ebene (Gerade: $C=0$)
• $=\pm$*distance Origo–plan (droite* $C=0$*)*

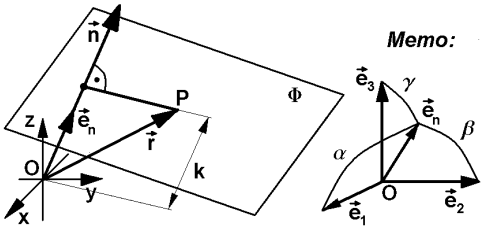
Definition: • **Définition:**

Die folgende normierte Koordinatengleichung heisst **Hess'sche Normalform** (*HNF*)
• *L'équation de coordonnés normée suivante s'appelle* **forme normale de Hess** (*HNF*)

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,z+\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=$$

$$(e_n)_1\,x+(e_n)_2\,y+(e_n)_3\,z+h=\langle\vec{e}_n,\vec{r}\rangle+(-k)=\langle\vec{e}_n,\vec{r}\rangle+h=0$$

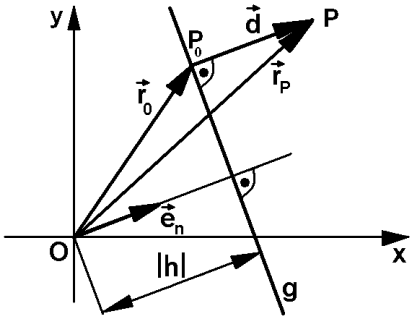




Man findet sofort: • *On trouve tout de suite:*
Gerade • *Droite*: $(e_n)_1=\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}=\cos(\varphi)$, $(e_n)_2=\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}=\sin(\varphi)$.
Ebene • *Plan*: $(e_n)_1=\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\cos(\alpha)$, $(e_n)_2=\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\cos(\beta)$,
$(e_n)_3=\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\cos(\gamma)$ ($\rightsquigarrow$ Richtungscosinuse • *cosinus de direction.*)

5.7 Anwendungen – Applications

5.7.1 Abstand eines Punktes von einer Geraden resp. Ebene – Distance d'un point d'une droite resp. d'un plan

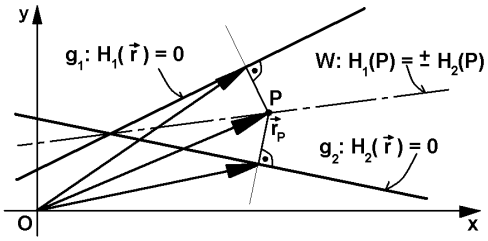


$\vec{r}_p = \vec{r}_0 + \vec{d}$, $\vec{r}_0 = \vec{r}_p - \vec{d} = \overrightarrow{0P_0}$,
$P_0 \in g$ resp. Φ.
$H(\vec{r}_0) = \langle \vec{e}_n, \vec{r}_0 \rangle + h$
$= \langle \vec{e}_n, (\vec{r}_p - \vec{d}) \rangle + h$
$= \langle \vec{e}_n, \vec{r}_p \rangle - \langle \vec{e}_n, \vec{d} \rangle + h$
$= \langle \vec{e}_n, \vec{r}_p \rangle + h - |\vec{e}_n| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos(n \cdot \pi)$
$= H(\vec{r}_p) \pm d = 0$
$\Rightarrow \; H(\vec{r}_p) = \pm d$,
$d =$ Abstand P zu g resp. Φ.
• $d =$ *distance de* P *à* g *resp.* Φ.

5.7.2 Winkelhalbierende – Bisectrice

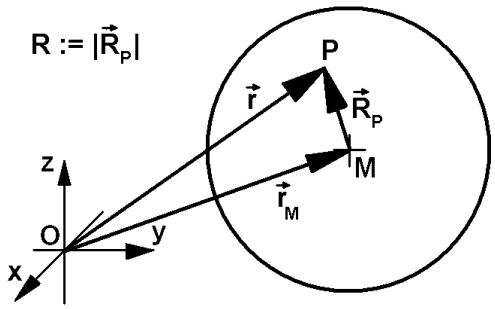
Sei w (oder ϕ) Winkelhalbierende von g_1, g_2 (Φ_1, Φ_2), gegeben durch $H_1(\vec{r}) = H_2(\vec{r}) = 0$

• *Soit* w *(ou* ϕ*) bissectrice de* g_1, g_2 *(*Φ_1, Φ_2*), données par* $H_1(\vec{r}) = H_2(\vec{r}) = 0$



$P \in w$ $(P \in \Phi)$ $\Rightarrow$ $d_1 = d_2$,
$H_1(\vec{r}_p) = \pm H_2(\vec{r}_p)$ $\rightsquigarrow$
Koordinatengleichung, zwei Lösungen ($\pm$)
• *équations de coordonnés, deux solutions* ($\pm$)

5.7.3 Kreis, Kugel, Ellipse – Cercle, sphère, ellipse



Sei $M = M(u/v/w)$ Mittelpunkt
• *Soit* $M = M(u/v/w) =$ *centre*

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Kreis (Kugel) • *cercle (sphère)* :
$K = \{P \mid \overline{MP} = const. = R\}$
$\Rightarrow \; |\vec{r} - \vec{r}_M|^2 = R^2$

$$\Rightarrow \; \left| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \right|^2 = R^2$$

$K: \quad (x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2 = R^2$
(quadratisch!) • *quadratique!*

Andererseits ist: • *D'autre part on a:*

$$|\vec{r} - \vec{r}_M|^2 = \langle (\vec{r} - \vec{r}_M), (\vec{r} - \vec{r}_M) \rangle = \vec{r}^{\,2} - 2 \cdot \langle \vec{r}, \vec{r}_M \rangle + \vec{r}_M{}^2 = R^2$$

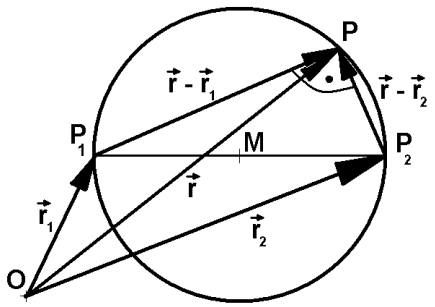
(Wir schreiben • *On écrit* $\langle \vec{r}, \vec{r} \rangle = \vec{r}^{\,2}$.)

Sei • *Soit* $-2\vec{r}_M = \vec{p},\ \vec{r}_M^{\,2} - R^2 = q$ (resp. • *resp.* $\frac{\vec{p}^{\,2}}{4} - R^2 = q$ oder • *ou* $R^2 = \frac{\vec{p}^{\,2}}{4} - q$)

$\Rightarrow\ \vec{r}^{\,2} + \langle \vec{p}, \vec{r}\rangle + q = 0$ resp. • *resp.* $x^2 + y^2 + z^2 + p_1 x + p_2 y + p_3 z + q = 0$
mit • *avec* $R^2 = \frac{\vec{p}^{\,2}}{4} - q > 0$

Satz: • **Théorème:** $\{\vec{r}\}$ ist Kreis (Kugel) • $\{\vec{r}\}$ *est cercle (sphère)*
$\Leftrightarrow \vec{r}^{\,2} + \langle \vec{p}, \vec{r}\rangle + q = 0\ \wedge\ \vec{r}_M = -\frac{1}{2}\vec{p}\ \wedge\ R^2 = \frac{\vec{p}^{\,2}}{4} - q > 0$

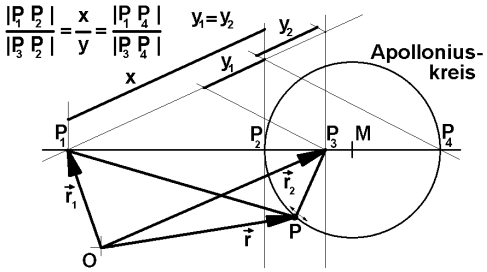
5.7.4 Spezielle Kreise, Kugeln – Cercles, sphères spéciales



Thaleskreis (–kugel):
• **Cercle (sphère) de Thales:**

$K = \{P\}$ Kreis (Kugel) • *Cercle (sphère)*
$\Leftrightarrow\ K = \{P \mid \overline{PP_1} \perp \overline{PP_2}\}$,

Beweis mit
• *preuve à l'aide de*
$\langle (\vec{r} - \vec{r}_1), (\vec{r} - \vec{r}_2)\rangle = 0$
$\rightsquigarrow$ Thaleskreis (–kugel)
• *Cercle (sphère) de Thales.*



Apolloniuskreis (–kugel):
• **Cercle (sphère) d'Apollonius:**

Es ist: • *On trouve:*

$$\frac{\overline{P_1P_2}}{\overline{P_3P_2}} = \frac{x}{y_2} = \frac{x}{y_1} = \frac{\overline{P_1P_4}}{\overline{P_3P_4}} := \lambda \rightsquigarrow$$

Konstr. • *constr.* $P_3,\ P_4$ zu • *pour* $P_1,\ P_2$.

$K = \{P \mid |\overline{P_1P}| : |\overline{P_2P}| = |\lambda|,\ \lambda\cdot \overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{P_2P}\ ,\ |\lambda| \neq 1\}$, ist Kreis (Kugel) • *... est cercle (sphère).*

Beweis mit • *Preuve avec* $(\vec{r} - \vec{r}_1)^2 : (\vec{r} - \vec{r}_2)^2 = \lambda^2 \ \Rightarrow\ (\vec{r} - \vec{r}_1)^2 = (\vec{r} - \vec{r}_2)^2 \cdot \lambda^2$

$$\Rightarrow\ \vec{r}^{\,2} - 2\,\langle \vec{r}, \vec{r}_1\rangle + \vec{r}_1^{\,2} = \lambda^2 \cdot (\vec{r}^{\,2} - 2\,\langle \vec{r}, \vec{r}_2\rangle + \vec{r}_2^{\,2}) \ \Rightarrow\ (1-\lambda^2)\cdot \vec{r}^{\,2} - 2\,\langle \vec{r}, \vec{r}_1 - \lambda^2 \cdot \vec{r}_2\rangle + \vec{r}_1^{\,2} - \lambda^2 \cdot \vec{r}_2^{\,2} = 0$$

$$\Rightarrow\ \vec{r}^{\,2} - 2\,\frac{\langle \vec{r}, \vec{r}_1 - \lambda^2 \cdot \vec{r}_2\rangle}{1-\lambda^2} + \frac{\vec{r}_1^{\,2} - \lambda^2 \cdot \vec{r}_2^{\,2}}{1-\lambda^2} = \vec{r}^{\,2} - 2\,\langle \vec{r}, \frac{\vec{r}_1 - \lambda^2 \cdot \vec{r}_2}{1-\lambda^2}\rangle + \frac{\vec{r}_1^{\,2} - \lambda^2 \cdot \vec{r}_2^{\,2}}{1-\lambda^2} = 0$$

$$\rightsquigarrow\quad \vec{r}_M = \frac{\vec{r}_1 - \lambda^2 \vec{r}_2}{1-\lambda^2},\ \ (\vec{r} - \vec{r}_M)^2 = \vec{R}^2,\ \ \vec{r}^{\,2} - 2\,\langle \vec{r}, \vec{r}_M\rangle + \vec{r}_M^{\,2} - \vec{R}^2 = 0$$

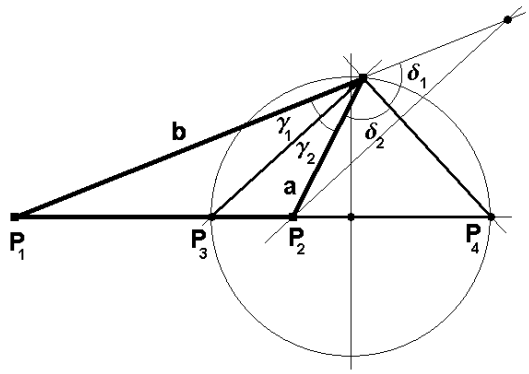
$$\rightsquigarrow\quad \vec{r}_M^{\,2} - \vec{R}^2 = \frac{\vec{r}_1^{\,2} - \lambda^2 \cdot \vec{r}_2^{\,2}}{1-\lambda^2} \rightsquigarrow\quad \vec{R}^2 = \vec{r}_M^{\,2} - \frac{\vec{r}_1^{\,2} - \lambda^2 \cdot \vec{r}_2^{\,2}}{1-\lambda^2} = (\frac{\vec{r}_1 - \lambda^2 \vec{r}_2}{1-\lambda^2})^2 - \frac{\vec{r}_1^{\,2} - \lambda^2 \cdot \vec{r}_2^{\,2}}{1-\lambda^2} = \ldots$$

$$\rightsquigarrow\ \vec{R}^2 = \frac{\lambda^2 \cdot \vec{r}_1^{\,2} - 2\,\lambda^2\,\langle \vec{r}_1, \vec{r}_2\rangle + \lambda^2 \cdot \vec{r}_2^{\,2}}{(1-\lambda^2)^2} = \frac{\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2} \cdot \langle \vec{r}_1, \vec{r}_2\rangle > 0 \rightsquigarrow\ ☺$$

$$\rightsquigarrow\quad \vec{r}_3 = \frac{\vec{r}_1 + \lambda^2 \vec{r}_2}{1+\lambda},\ \ \vec{r}_4 = \frac{\vec{r}_1 - \lambda^2 \vec{r}_3}{1-\lambda}.$$

Satz: • **Théorème:**
Weiter gilt für den Apolloniuskreis:
• *En outre, il vaur pour le cercle d'Apollonius:*

$$\gamma_1 = \gamma_2, \quad \delta_1 = \delta_2$$



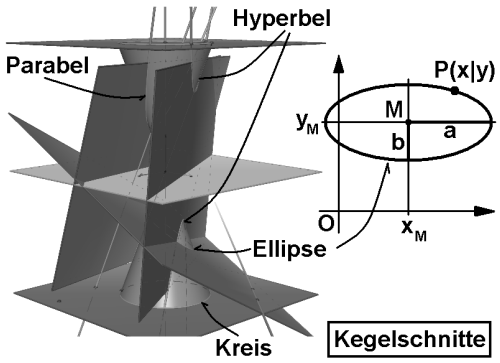
Beweis siehe Seite 348.
• *Preuve voir à la page 348.*

Übergang Kreise $\rightsquigarrow$ Ellipsen: Eine Achse des Kreises strecken.
• *Si l'on passe des cercles aux ellipses: allonger un axe du cercle* $\rightsquigarrow \quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

5.7.5 Kegelschnitte – Sections des cônes

Über Kegelschnitte ist in der Ingenieurmathematikliteratur viel Theorie vorhanden, die an dieser Stelle keinen Platz findet. (Vgl. dazu die Formelbücher.) Später werden wir bei Gelegenheit einige Dinge behandeln.
Zum Verständnis des Begriffs eine kurze Übersicht:
Kegel: Wir betrachten im Raum eine Gerade g, die eine andere Gerade a schneidet, welche wir **Achse** nennen. Lässt man g um a rotieren, so wird ein (unendlich grosses) Volumen ausgeschnitten, das wir **Kegel** nennen (auch Doppelkegel genannt). Die Rotationsfläche heisst **Kegelmantel**.
• *Quant aux sections des cônes, il existe beaucoup de théorie dans la littérature sur les mathématiques pour les ingénieurs, qui ne peut pas être traitée ici pour des raisons de quantité. (Voir manuels de formules.) Plus tard à l'occasion nous allons traiter quelques sujets.*
Pour comprendre la notion une brève vue d'ensemble:
Cône*: Prenos une droite g dans l'espace, qui a un point d'intersection avec une autre droite a qu'on appelle l'***axe***. Si g fait une rotation autour de a, on coupe un volume (de grandeur infinie), qu'on appelle* **cône** *(plus exactement double cône). La surface de rotation est la* **périphérie** *du cône.*

Wenn solche Kegel mit Ebenen geschnitten werden, entstehen auf dem Kegelmantel Schnittkurven. Solche Kurven kann man in drei (resp. vier) Gruppen einteilen: • *Si l'on a une intersection des tels cônes avec un plan, il apparaît sur la périphérie des courbes. On peut distinguer trois (quatre) types de courbes d'intersection:*



⊘ Schnitt durch nur eine der Hälften des Doppelkegels: Ellipse.
• *Section par seulement une des deux parties du double cône: Ellipse.*
In Achsenparalleler Lage:
• *Situé parallèlement aux axes:*

$$\frac{(x-x_M)^2}{a^2}+\frac{(y-y_M)^2}{b^2}=1$$

⊘ Spezialfall: Schnitt $\perp a$: Kreis.
• *Cas spécial: Section $\perp a$: Cercle.*

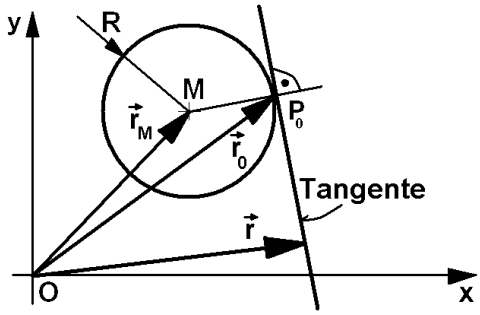
⊘ Schnitt durch beide Hälften des Doppelkegels: Hyperbel. • *Section par les deux parties du double cône: Hyperbole.*
...

$$\frac{(x-x_M)^2}{a^2}-\frac{(y-y_M)^2}{b^2}=1$$

⊘ Schnitt parallel Mantellinie: Parabel.
• *Section parallèle à une droite sur la périphérie (qui passe par le sommet): Parabole.*
...

$$y=a(x-x_0)^2+b$$

5.7.6 Tangente und Tangentialebene — Tangente et plan tangentiel



Sei • *Soit* $t \perp \overline{P_0M}$
$\Rightarrow\ \langle(\vec{r}_0-\vec{r}_M),(\vec{r}-\vec{r}_0)\rangle=0$

Umformen: • *Changer l'expression*:
$0=\langle(\vec{r}_0-\vec{r}_M),(\vec{r}-\vec{r}_M+\vec{r}_M-\vec{r}_0)\rangle$
$=\langle(\vec{r}_0-\vec{r}_M),(\vec{r}-\vec{r}_M\rangle-(\vec{r}_0-\vec{r}_M)^2,$
$(\vec{r}_0-\vec{r}_M)^2=\vec{R}^2=R^2$
(Direkt • *Directement*)
$R^2=R\cdot\overline{MP}_R=\langle(\vec{r}_0-\vec{r}_M),(\vec{r}-\vec{r}_M)\rangle)$

⇝ **Tangentengleichung:**
• **Equation de la tangente:**

$$\langle(\vec{r}_0-\vec{r}_M),(\vec{r}-\vec{r}_M)\rangle=R^2$$

Weitere Umformung: • *D'autres changements:* $\langle\vec{r}_0,\vec{r}\rangle-\langle\vec{r}_M,(\vec{r}+\vec{r}_0)\rangle+\vec{r}_M{}^2=R^2$

Sei • *Soit* $-\vec{r}_M=\dfrac{\vec{p}}{2},\ \vec{r}_M{}^2-R^2=q$

$$\Rightarrow\ \langle\vec{r}_0,\vec{r}\rangle+\frac{1}{2}\langle\vec{p},(\vec{r}+\vec{r}_0)\rangle+q=0$$

oder • *ou* $x\,x_0+y\,y_0+z\,z_0+\frac{1}{2}p_1\,(x_0+x)+\frac{1}{2}\,p_2\,(y_0+y)+\frac{1}{2}\,p_3\,(z_0+z)+q=0$

5.7.7 Polare und Polarenebene — Polaire et plan polaire (et plan tangentiel)

Tangentengleichung (Tangentialebene): • *Equation de la tangente (Plan tangentiel)*:

$$\langle(\vec{r}_0-\vec{r}_M),(\vec{r}-\vec{r}_M)\rangle = R^2 \;\Rightarrow\; \langle(\vec{r}_0-\vec{r}_M),\vec{r}\rangle-\langle(\vec{r}_0-\vec{r}_M),\vec{r}_M\rangle-R^2=0,\;\; \langle(\vec{r}_0-\vec{r}_M),\vec{r}\rangle = Ax+By+Cz,$$

mit • *avec* $\langle(\vec{r}_0-\vec{r}_M),\vec{r}_M\rangle - R^2 = const.,\;\; \vec{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}\;,\;\; P_0 \in K$

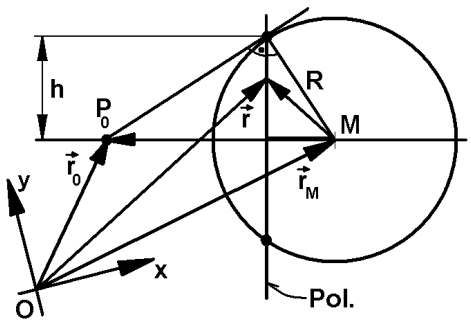
$\rightsquigarrow$ Geraden – resp. Ebenengleichung (Koordinatengleichung)
• *Equation de la droite resp. du plan (équation de coordonnés).*

Wählt man $P_0 \notin \partial K$ (Rand), so ändert man nur die Koeffizienten in der Koordinatengleichung. Die Ebene ändert die Lage, bleibt aber eine Ebene.
• *Si l'on choisit $P_0 \notin \partial K$ (périphérie), on change seulement les coefficients dans l'équation de coordonnés. Le plan change la position, mais il reste un plan.*

Definition: • **Définition:** Sei • *Soit* $\Phi:\; \langle(\vec{r}_0-\vec{r_M}),(\vec{r}-\vec{r}_M)\rangle - R^2 = 0.$

Für $P_0 \notin \partial K$ heisst die Gerade (resp. Ebene) Φ **Polare** zum **Pol** P_0.
• *Pour $P_0 \notin \partial K$ la droite (resp. le plan) Φ s'appelle* **polaire** *pour le* **pôle** P_0.

Polare und Pol bedingen sich also gegenseitig. • *La polaire et le pôle forment toujours une paire.*



Betrachte: • *Etudier:*

$\langle(\vec{r}_0-\vec{r}_M),(\vec{r}-\vec{r}_M)\rangle = R^2.$
Setze zuerst • *Mettre d'abort* $\vec{r}=\vec{r}_1$
und nachher • *et après* $\vec{r}=\vec{r}_2$.
Subtrahiere die beiden so entstehenden Gleichungen: $\rightsquigarrow$
• *Faire la soustraction des deux équations qu'on obtient comme ça*: $\rightsquigarrow$

$$\langle(\vec{r}_0-\vec{r}_M),(\vec{r}_1-\vec{r}_M)\rangle - \langle(\vec{r}_0-\vec{r}_M),(\vec{r}_2-\vec{r}_M)\rangle$$
$$= R^2 - R^2 = 0$$
$$\Rightarrow\; \langle(\vec{r}_0-\vec{r}_M),(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\rangle = 0$$

d. h. • *ç. v. d.* $(\vec{r}_0-\vec{r}_M)\perp(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$

$\rightsquigarrow$ Polare $\perp$ Zentrale. • *Polaire $\perp$ droite qui passe par le centre.*

Weiter: • *En outre*: $\langle(\vec{r}_0-\vec{r}_M),(\vec{r}-\vec{r}_M)\rangle - R^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{1}{|\vec{r}_0-\vec{r}_M|}\cdot(\langle(\vec{r}_0-\vec{r}_M),(\vec{r}-\vec{r}_M)\rangle - R^2) = 0.$

Benütze: • *Utiliser:* $\dfrac{\vec{r}_0-\vec{r}_M}{|\vec{r}_0-\vec{r}_M|} = \vec{e}_n$

$$\rightsquigarrow\; \langle\frac{\vec{r}_0-\vec{r}_M}{|\vec{r}_0-\vec{r}_M|},\vec{r}\rangle + \frac{1}{|\vec{r}_0-\vec{r}_M|}\cdot(\langle(\vec{r}_M-\vec{r}_0),\vec{r}_M\rangle - R^2) = \langle\vec{e}_n,(\vec{r}-\vec{r}_M)\rangle + \frac{R^2}{|\vec{r}_0-\vec{r}_M|} = 0$$

Wegen $\vec{e}_n \perp p$ (Polare, $(\vec{r}_M-\vec{r}_0)$) und $|\vec{e}_n| = 1$ haben wir nun eine *HNF*: $H(\vec{r}-\vec{r}_M) = 0$
• *A cause de $\vec{e}_n \perp p$ (polaire, $(\vec{r}_M-\vec{r}_0)$) et $|\vec{e}_n| = 1$ on a maintenant une HNF: $H(\vec{r}-\vec{r}_M) = 0$*

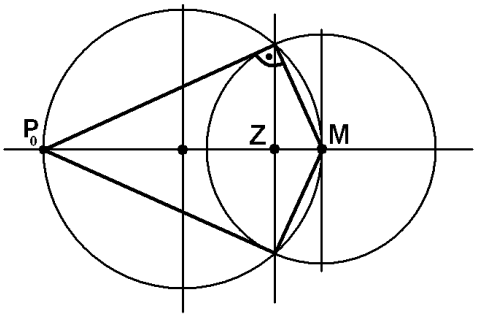
Sei P beliebig im Raum. $\rightsquigarrow$ $H(\vec{r}_P - \vec{r}_M)$ ist die Distanz des durch $\vec{r}_P - \vec{r}_M$ definierten Punktes P zur um $\vec{r}_M$ verschobenen Polaren, d.h. die Distanz von P zur Polaren.
• *Soit P quelconque dans l'espace.* $\rightsquigarrow$ $H(\vec{r}_P - \vec{r}_M)$ *est la distance du point P défini par $\vec{r}_P - \vec{r}_M$ à la polaire déplacée par $\vec{r}_M$, ç.v.d. la distance de P à la polaire.*

Konsequenz: • **Conséquence:** Für $P = M$ gilt: • *Pour $P = M$ on a:*

$H(\vec{r}_M - \vec{r}_M) = \langle \vec{e}_n, \vec{0} \rangle + \frac{R^2}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_M|} = 0 - d = -d =$ Distanz von M zur Polaren.
• $H(\vec{r}_M - \vec{r}_M) = \langle \vec{e}_n, \vec{0} \rangle + \frac{R^2}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_M|} = 0 - d = -d =$ *Distance de M à la polaire.*

$$\Rightarrow \ |\overline{ZM}| = d = \frac{R^2}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_M|} = \frac{R^2}{|\overline{P_0M}|} \ \Rightarrow \ |\overline{ZM}| \cdot |\overline{P_0M}| = R^2$$

$\rightsquigarrow$ Kathetensatz • *Théorème du côté de l'angle droit (Théorème d'Euclide)*



$\rightsquigarrow$ Polarenkonstruktion: Mit Hilfe der Tangenten.
• $\rightsquigarrow$ *Construction de la polaire: A l'aide des tangentes.*

5.7.8 Anwendung: Methode zur Tangentenkonstruktion — Application: Méthode pour la construction de la tangente

Geg.: • **Donné:**
Punkt $P = 0 = P_0(x_0/y_0)$, Kreis (Kugel). • *Point $P = 0 = P_0(x_0/y_0)$, Cercle (Sphère).*

1 Suche Polare p mit Hilfe von: • *Chercher polaire p à l'aide de:* $|\overline{MP_0}| \cdot |\overline{MP}| = R^2$
(Skizze vorhin $\rightsquigarrow$ p. • *Voir esquisse ci–dessus* $\rightsquigarrow$ p.)
$p \cap$ Kreis • *cercle* $= T_i$: $\rightsquigarrow$ Tangentialpunkte • *points de la tangente*
$\Rightarrow$ Tangente berechenbar • *possible de calculer la tangente.*

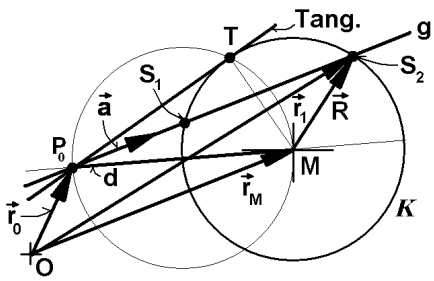
2 Mit Diskriminante • *A l'aide du discriminant*:

Punkt • *Point* $P_0(x_0/y_0) \rightsquigarrow$ Tangente • *Tangente* $y - y_0 = m(x - x_0)$.
Tangentialpunkt • *Point tangentiel* $T_i(x_i/y_i)$
$\rightsquigarrow$ Tangente • *Tangente* $y_i - y_0 = m(x_i - x_0)$.
x_i in Kreisgleichung einsetzen • *Introduire x_i dans l'équation du cercle*
$\rightsquigarrow$ Quadratische Gleichung für x_i und m. • *Equation quadratique pour x_i et m.*
Diskriminante $= 0$ • *discriminant* $= 0$
$\rightsquigarrow$ Genau eine Lösung, genau ein Schnittpunkt Tangente $\cap$ Kreis
• *Exactement un point d'intersection tangente $\cap$ cercle.*

3 Mit Hess'scher Normalform: • *Avec la forme normale de Hess*

Geg.: • Donné: $P_0(x_0/y_0)$, $y - y_0 = m(x - x_0)$
M hat von der Tangente den Abstand R. • *La distance de M à la tangente est R.*
$\rightsquigarrow$ $HNF(\vec{r}_M) = \pm R \rightsquigarrow$ m.

5.7.9 Potenz eines Punktes bezüglich eines Kreises oder einer Kugel — Puissance d'un point par rapport à un cercle ou une boule (shpère)



Gerade g durch P_0: • *Droite g à travers P_0:*

$$\vec{r}_g = \vec{r}_0 + \lambda\,\vec{a}, \quad \vec{r}_0 = \vec{r}_M$$

Kreis • *Cercle K:* $(\vec{r}_K - \vec{r}_M)^2 = R^2$.

Problem: • **Problème:** $g \cap K = ?$,

$$\begin{aligned}
&\vec{r}_g = \vec{r}_K = \vec{r} \;\Rightarrow \\
&R^2 = (\vec{r} - \vec{r}_M)^2 = (\vec{r}_0 + \lambda\,\vec{a} - \vec{r}_M)^2 \Rightarrow \\
&(\vec{r}_0 - \vec{r}_M)^2 + 2\lambda\,\langle(\vec{r}_0 - \vec{r}_M), \vec{a}\rangle + \lambda^2\,\vec{a}^{\,2} = R^2 \\
&\Rightarrow \lambda^2 + \frac{2\,\lambda}{\vec{a}^{\,2}}\langle(\vec{r}_0 - \vec{r}_M), \vec{a}\rangle + \\
&\qquad + \frac{1}{\vec{a}^{\,2}}((\vec{r}_0 - \vec{r}_M)^2 - R^2) = 0
\end{aligned}$$

Dabei ist nach dem Hauptsatz der Algebra: • *D'après le théorème principal de l'algèbre on a:*

$$\frac{2}{\vec{a}^{\,2}}\langle(\vec{r}_0 - \vec{r}_M), \vec{a}\rangle = -(\lambda_1 + \lambda_2) \quad \text{und} \quad \bullet \quad \textit{et} \quad \frac{1}{\vec{a}^2}((\vec{r}_0 - \vec{r}_M)^2 - R^2) = \frac{1}{\vec{a}^2} \cdot K(\vec{r}_0) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$$

mit • *avec* $K(\vec{r}_0) = ((\vec{r}_0 - \vec{r}_M)^2 - R^2)$. $\rightsquigarrow$ *Vieta!*

$K(\vec{r}_0)$ entsteht aus der Kreisgleichung: • *$K(\vec{r}_0)$ est déduit de l'équation du cercle:*

$$K(\vec{r}) = ((\vec{r} - \vec{r}_M)^2 - R^2) = 0$$

(ersetze einfach $\vec{r}$ durch $\vec{r}_0$, P_0 beliebig • *simplement remplacer $\vec{r}$ par $\vec{r}_0$, $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$, P_0 quelconque*).

$K(\vec{r}_0)$ ist allerdings nicht mehr allgemein $= 0$. • *$K(\vec{r}_0)$ n'est plus généralement $= 0$.*

Beachte jedoch: • *A retenir:*
$K(\vec{r}_0) = ((\vec{r}_0 - \vec{r}_M)^2 - R^2)$ ist unabhängig von $\vec{a}$ • *est indépendant de $\vec{a}$.*
($\vec{a}$ ist Richtungsvektor einer Geraden durch P_0. • *$\vec{a}$ donne la direction d'une droite à travers P_0.*)
$\rightsquigarrow$ $K(\vec{r}_0)$ ist konstant für jede Gerade durch P_0.
• *$K(\vec{r}_0)$ est constant pour toutes les droites à travers P_0.*

Definition: • **Définition:** $K(\vec{r}_0) = ((\vec{r}_0 - \vec{r}_M)^2 - R^2)$ heisst **Potenz** von P_0 bezüglich K
• *$K(\vec{r}_0) = ((\vec{r}_0 - \vec{r}_M)^2 - R^2)$ s'appelle* **puissance** *de P_0 par rapport à K.*

Interpretation: • **Interprétation:** $\triangle P_0TM$: $d^2 - R^2 = p^2$, d. h. • *ç. v. d.* :
$\rightsquigarrow$ $((\vec{r}_0 - \vec{r}_M)^2 - R^2) = const.$ Vieta: $\frac{1}{\vec{a}^{\,2}}((\vec{r}_0 - \vec{r}_M)^2 - R^2) = \frac{1}{\vec{a}^{\,2}} \cdot K(\vec{r}_0) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$.
Vgl. oben: λ_1, λ_2 waren Lösungen des Problems '$g \cap K = ?$'.
• *Voir en haut: λ_1, λ_2 étaient les solutions du problème '$g \cap K = ?$'.*

$\Rightarrow\ \vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \lambda_1\vec{a}\ \wedge\ \vec{r}_2 = \vec{r}_0 + \lambda_2\vec{a}$
$\Rightarrow \overrightarrow{P_0S_1} = \lambda_1\vec{a} \wedge\ \overrightarrow{P_0S_2} = \lambda_2\vec{a}\ \Rightarrow\ \langle\overrightarrow{P_0S_1}, \overrightarrow{P_0S_2}\rangle = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \vec{a}^{\,2} = \dfrac{1}{\vec{a}^{\,2}} \cdot K(\vec{r}_0) \cdot \vec{a}^2 = K(\vec{r}_0)$

Ist P_0 innerhalb des Kreises, so sind $\overrightarrow{P_0S_1}$, $\overrightarrow{P_0S_2}$ entgegengesetzt gerichtet:
• *Si P_0 est situé à l'intérieur du cercle, alors $\overrightarrow{P_0S_1}$, $\overrightarrow{P_0S_2}$ ont deux directions contraires l'une à l'autre:*

$$\langle\overrightarrow{P_0S_1}, \overrightarrow{P_0S_2}\rangle = K(\vec{r}_0) < 0$$

Wichtig: • **Important:**

P_0 ausserhalb $K \rightsquigarrow\ \langle\overrightarrow{P_0S_1}, \overrightarrow{P_0S_2}\rangle = K(\vec{r}_0) > 0$: **Sekanten**– und **Tangentensatz**.
P_0 innerhalb $K \rightsquigarrow\ \langle\overrightarrow{P_0S_1}, \overrightarrow{P_0S_2}\rangle = -|K(\vec{r}_0)| < 0$: **Sehnensatz**.
• *P_0 à l'extérieur de $K \rightsquigarrow\ \langle\overrightarrow{P_0S_1}, \overrightarrow{P_0S_2}\rangle = K(\vec{r}_0) > 0$: Théorème de la* **secante**– *et de la* **tangente**.
P_0 à l'intérieur de $K \rightsquigarrow\ \langle\overrightarrow{P_0S_1}, \overrightarrow{P_0S_2}\rangle = -|K(\vec{r}_0)| < 0$: Théorème de la **corde**.

Potenzgerade, Potenzebene: • **Droite, plan radical:**
Gegeben Kreise (Kugeln) • *Soit donné: Cercles (boules, sphères)*: $K_i(\vec{r}) = \vec{r}^{\,2} - 2\langle\vec{r}_{M_i}, \vec{r}\rangle - q_i = 0$.

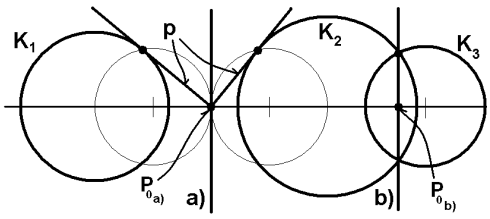
$\rightsquigarrow\ \{P \mid P$ hat bezüglich K_1 und K_2 gleiche Potenz $\} =$
• $= \{P \mid P$ *a la même puissance, par rapport à* K_1 *et* $K_2\} = \{P \mid K_1(\vec{r}) = K_2(\vec{r})\}\ \Rightarrow$

$$K_1(\vec{r}) - K_2(\vec{r}) = \vec{r}^{\,2} - 2\langle\vec{r}_{M_1}, \vec{r}\rangle - q_1 + \vec{r}^{\,2} - 2\langle\vec{r}_{M_2}, \vec{r}\rangle + q_2 = \langle(\vec{r}_{M_2} - \vec{r}_{M_1}), \vec{r}\rangle + (q_1 - q_2) = 0$$

$\rightsquigarrow$ Für $M_1 \neq M_2$ hat man hier eine lineare Gleichung für $\vec{r}$, also eine Gerade resp. Ebene.
• *Pour $M_1 \neq M_2$ on a ici une équation linéaire pour $\vec{r}$, ç.v.d. une droite ou bien un plan.*

Definition: • **Définition:** Diese Gerade (Ebene) heisst **Potenzgerade (Potenzebene)**
• *Cette droite (ce plan) s'appelle* **droite radicale (plan radical)**

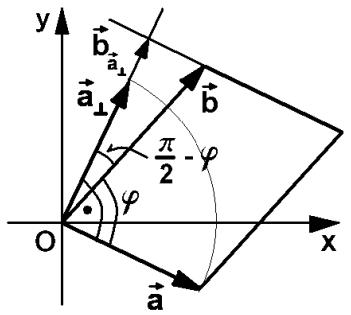
Bsp.: • **Exemple:**



5.8 Flächenprodukt, Vektorprodukt — 'Produit de surface', produit vectoriel

5.8.1 Flächenprodukt, Vektorprodukt — 'Produit de surface'

Wir betrachten Vektoren im $\mathbb{R}^2$. • *On considère des vecteurs dans le $\mathbb{R}^2$.*



Geg.: • **Donné:** $\vec{a}, \vec{b}$, $\vec{a} \nparallel \vec{b}$

Problem: • **Problème:** Eigenschaften des Inhalts des Parallelogramms
• *Qualités du parallélogramme* $(\vec{a}, \vec{b})$?

Sei das KS so gewählt, dass $\vec{a}, \vec{b}$ Ortsvektoren sind (Ecke O). • *Soit choisi le système de coordonnés ainsi que* $\vec{a}, \vec{b}$ *soient des vecteurs qui montent de l'origine aux sommets (sommet* O*).*
Bekannt: • *On sait:*
$b_{a_\perp} = |\vec{b}| \cdot \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$

Wir definieren das Flächenprodukt als ± Inhalt der Parallelogrammfläche:
• *Nous définissons le 'produit de surface' comme ± mesure de l'aire du parallélogramme:*

Definition: • **Définition:** **Flächenprodukt** • **'Produit de surface'**

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{cases} \langle \overrightarrow{a_\perp}, \vec{b} \rangle = a \cdot b_{a_\perp} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi) & \vec{a} \neq \vec{0} \\ 0 & \vec{a} = \vec{0} \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Definition beweist man einfach die folgenden Gesetze:
• *A l'aide de cette définition on prouve facilement les lois suivantes:*

Regeln: • **Règles:**

1 Antikommutativgesetz: • *Loi anticommutative:* $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$
(wegen • *à cause de* sin ...)

2 Distributivgesetz: • *Loi distributive:* $[\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{c}]$
(wegen • *à cause de* $(\vec{b} + \vec{c})_{a_\perp} = \vec{b}_{a_\perp} + \vec{c}_{a_\perp}$)

3 Parallelität: • *Parallélité:* $[\vec{a}, \vec{b}] = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \| \vec{b}$
(spez. für • *spec. pour* $\vec{a} = \vec{0}$; keine Fläche • *pas de surface*)

4 Assoziativgesetz sinnlos • *Loi associative ne donne pas de sense*:
$[\vec{a}, \vec{b}]$ Skalar • *scalaire*, $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$ nicht definiert • *non défini*

5 Assoziativgesetz mit Skalar • *Loi associative avec scalaire* :
$[\lambda \cdot \vec{a}, \vec{b}] = \lambda \cdot [\vec{a}, \vec{b}]$ (Streckung • *allongement*)

Konsequenz: • **Conséquence:**

6 Distributivgesetz: • *Loi distributive:*
$[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c} + \vec{d}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{a}, \vec{d}] + [\vec{b}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{d}]$

7 Assoziativgesetz mit Skalar • *Loi associative avec scalaire* :
$[\lambda \cdot \vec{a}, \mu \cdot \vec{b}] = \lambda \cdot \mu \cdot [\vec{a}, \vec{b}]$

8 Determinanteneigenschaft • *Qualité de déterminant* :
$[\vec{a}, \vec{b}] = [\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}] = a_1 b_2 - a_2 b_1$ (Mult. • *mult.*: $\times$)
Denn: • *Car:*
$[\vec{a}, \vec{b}] = \langle \vec{a}_\perp, \vec{b} \rangle = [\begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}] = -a_2 b_1 + a_1 b_2 = a_1 b_2 - a_2 b_1$

Definition: • **Définition:** $D := \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} := a_1 b_2 - a_2 b_1$

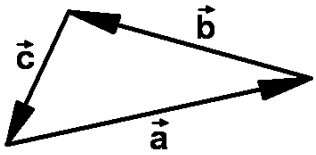
D heisst **zweigliedrige Determinante**.
• *D s'appelle* **déterminant à deux colonnes** *(à deux vecteurs).*

5.8.2 Anwendungen: Sinussatz, Cramer — Applications: Théorème du sinus, Cramer

Sinussatz — Théorème du sinus

Gegeben sei ein Dreieck: • *Soit donné un triangle*: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ z.B. • *p.ex.* $[\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}] + [\vec{c}, \vec{c}]$, $[\vec{c}, \vec{c}] = 0$
$\Rightarrow$ $[\vec{a}, \vec{c}] = -[\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{b}]$, $a \cdot c \cdot \sin(\pi - \beta) = a \cdot c \cdot \sin(\beta) = c \cdot b \cdot \sin(\pi - \alpha) = c \cdot b \cdot \sin(\alpha) \rightsquigarrow$



$$a \cdot c \cdot \sin(\beta) = c \cdot b \cdot \sin(\alpha)$$

Cramersche Regeln für Gleichungssysteme — Règles de Cramer pour des systèmes d'équations

Betrachte: • *Etudier:* $\underline{\begin{vmatrix} a_1 x + b_1 y & = & c_1 \\ a_2 x + b_2 y & = & c_2 \end{vmatrix}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cdot y = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} = \vec{c}$

$\rightsquigarrow$ Das Skalarprodukt führt zum Cosinussatz, das Flächenprodukt zum Sinussatz.
• *Le produit scalaire mène au théorème du cosinus, le 'produit de surface' au théorème du sinus.*

$\rightsquigarrow$ **Merke:** Ein lineares Gleichungssystem entspricht einer Vektorgleichung. $\rightsquigarrow$
• **A retenir:** *Un système linéaire d'équations correspond à une équation des vecteurs.*

Interpretation von • *Interprétation de* $x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} = \vec{c}$: $\vec{c}$ soll linear zerlegt werden nach $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
• *Il faut décomposer $\vec{c}$ linéairement d'après $\vec{a}$ et $\vec{b}$.*

Diese Zerlegung ist eindeutig, falls $\vec{a}, \vec{b}$ *l.u.'l.i.* • *Cette décomposition est univoque, si $\vec{a}, \vec{b}$ l.u.'l.i.*,
d. h. • *ç. v. d.* $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$, d. h. • *ç. v. d.* $[\vec{a}, \vec{b}] \neq 0$

Trick: • **Truc:** Berechne • *Calculer*:

$[\vec{c}, \vec{b}] = [x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}, \vec{b}] = x \cdot [\vec{a}, \vec{b}] + y \cdot [\vec{b}, \vec{b}] = x \cdot [\vec{a}, \vec{b}] + 0 = x \cdot [\vec{a}, \vec{b}]$ und • *et*
$[\vec{a}, \vec{c}] = [\vec{a}, x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}] = x \cdot [\vec{a}, \vec{a}] + y \cdot [\vec{a}, \vec{b}] = 0 + y \cdot [\vec{a}, \vec{b}] = y \cdot [\vec{a}, \vec{b}] \rightsquigarrow$

Satz: • **Théorème:** **(Cramer)** $x = \dfrac{[\vec{c}, \vec{b}]}{[\vec{a}, \vec{b}]}$, $y = \dfrac{[\vec{a}, \vec{c}]}{[\vec{a}, \vec{b}]}$

Andere Schreibweise: • *Façon d' écrire différente:*

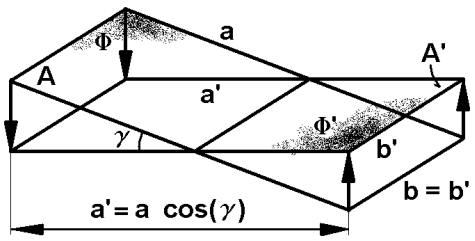
$$x = \frac{[\vec{c},\vec{b}]}{[\vec{a},\vec{b}]} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} := \frac{D_1}{D_0}, \quad y = \frac{[\vec{a},\vec{c}]}{[\vec{a},\vec{b}]} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} := \frac{D_2}{D_0}$$

$$x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} \overset{!}{\overbrace{-}} \vec{c} = \vec{0}, \quad \text{Schema: • } \textit{Schéma:} \quad \begin{array}{ccccccc} \leftarrow & D_0 & \rightarrow & | & \leftarrow & D_2 & \rightarrow \\ a_1 & & b_1 & & -c_1 & & a_1 \\ a_2 & & b_2 & & -c_2 & & a_2 \\ & & \leftarrow & D_1 & \rightarrow & & \end{array}$$

5.8.3 Vektorprodukt — Produit vectoriel

Flächenprojektion — Projection d'une surface

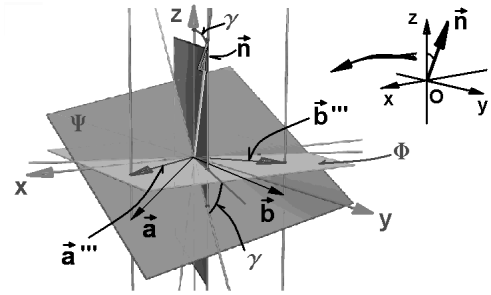
Werkzeug: Projiziere die ebene Fläche Φ auf die Ebene Φ'. Was passiert mit dem Inhalt A bei der Projektion? ($A \longmapsto A'$)
• *Outil: Projeter un plan Φ sur un autre plan Φ'. Qu'est-ce qui se passe avec le contenu d'une surface (figure dans le plan)? ($A \longmapsto A'$)*



Z.B. • *P.ex.*
$A = a \cdot b \longmapsto A' = a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$,
$A \longmapsto A' = A \cdot \cos(\gamma)$
Dieser Satz bleibt bei beliebigen Figuren gültig (Aufteilung in kleine Rechtecke, Grenzwert ...) • *Ce théorème reste valable pour des figures quelconques (Diviser en des rectangles très petits, valeur limite ...)*

5.8.4 Definition Vektorprodukt — Définition produit vectoriel

Wir betrachten Vektoren im $\mathbb{R}^3$. • *On considère des vecteurs dans le $\mathbb{R}^3$.*



Geg.: • **Donné:** $\vec{a},\vec{b} \parallel \Psi$. Sei • *Soit*

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \overset{\text{Proj.(x/y)}}{\longmapsto} \vec{a}\,''' = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Ebenso für • *Pareillement pour* $\vec{b} \longmapsto \vec{b}\,'''$
Sei • *Soit* $\Phi = (x/y)$–(Ebene • *plan*),
$\vec{n} \perp \Psi$, $\gamma = \measuredangle(\Psi,\Phi) = \measuredangle(\vec{n},\vec{e}_z)$,
$(\vec{a},\vec{b},\vec{n}) \rightsquigarrow$ Rechtssyst. • *Syst. de sens direct*

Sei • *Soit* $A =$ Inhalt von Parallelogramm $(\vec{a},\vec{b})$ • $A =$ *mesure de la surface du parallélogramme* $(\vec{a},\vec{b})$
Sei • *Soit* $A''' = \pm$ Inhalt von Parallelogramm • $A''' = \pm$ *mesure de la surface du parallélogramme*

Idee: • **Idée:** Suche einen Vektor $\vec{n}$ wie folgt: • *Choisir un vecteur $\vec{n}$ comme comme suit:*

Wähle die Länge von $\vec{n}$ gleich der Zahl A. • *Choisir la longueur de $\vec{n}$ égal nombre A.*

Dann gilt: • *Alors on obtient:* $A''' = Volume(\vec{a}\,''',\vec{b}\,''') = A \cdot \cos(\gamma)$

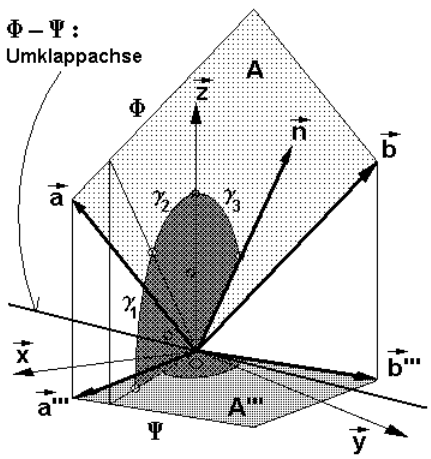
$[\vec{a}\,''', \vec{b}\,'''] = A''' = A \cdot \cos(\gamma) \;\wedge\; A = |\vec{n}| \;\wedge\; |\vec{n}| \cdot \cos(\gamma) = n_3 = \pm|\vec{n}_3|$

Folgerung: • **Conclusion:** $|\vec{n}| = A \;\Leftrightarrow\; n_3 = [\vec{a}\,''', \vec{b}\,''']$

Entsprechendes folgert man für $(\vec{a}\,', \vec{b}\,')$ (Projektionen auf die (y/z)–Ebene) und für $(\vec{a}\,'', \vec{b}\,'')$ (Projektionen auf die (z/x)–Ebene). (Zyklische Vertauschung.)
• *On peut tirer une conclusion correspondante pour* $(\vec{a}\,', \vec{b}\,')$ *(projections sur le plan* (y/z)*) et pour* $(\vec{a}\,'', \vec{b}\,'')$ *(projections sur le plan* (z/x)*). (Echanger de façon cyclique.)*

Z.B. • *P.ex.* $\vec{a}\,' = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \;\; \vec{a}\,'' = \begin{pmatrix} a_3 \\ a_1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; n_1 = [\vec{a}\,', \vec{b}\,'], \;\; n_2 = [\vec{a}\,'', \vec{b}\,'']$

Detailiertere Untersuchung: • **Etude plus détaillé:**



Andere Ansicht • *Vue différente*

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \perp \Phi(\vec{a}, \vec{b}), \;\; \vec{e}_z = \vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \Psi(\vec{a}\,''', \vec{b}\,''')$$

$$\Rightarrow\; \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\pi}{2}, \;\; \gamma_2 + \gamma_3 = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \gamma_1 = \gamma_3$$

Sei • *Soit* $|\vec{n}| = A$

$$A''' = A \cdot \cos(\gamma_1) = A \cdot \cos(\gamma_3) = |\vec{n}| \cdot \cos(\gamma_3) = |\vec{n}| \cdot \underbrace{|\vec{e}_z|}_{=1} \cdot \cos(\gamma_3)$$

$$= \langle \vec{n}, \vec{e}_z \rangle = \langle \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = n_3 \;\Rightarrow\; A''' = n_3$$

Analog: • *De façon analogique:*

$$\Rightarrow\; A' = n_1, \;\; A'' = n_2 \;\Rightarrow\; \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' \\ A'' \\ A''' \end{pmatrix}$$

Zuordnungen: • *Classements:* $A' \longleftrightarrow \alpha_3, \;\; A'' \longleftrightarrow \beta_3, \;\; A''' \longleftrightarrow \gamma_3$

$$\rightsquigarrow \quad |\vec{n}^2| = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = A'^2 + A''^2 + A''''^2 = A^2 \cdot \cos^2(\alpha_3) + A^2 \cdot \cos^2(\beta_3) + A^2 \cdot \cos^2(\gamma_3)$$
$$= A^2 \cdot \underbrace{(\cos^2(\alpha_3) + \cos^2(\beta_3) + \cos^2(\gamma_3))}_{=1} = A^2 \;\Rightarrow\; A = |\vec{n}|$$

Richtungscosinuse verwendet, siehe Seite 97. • *Utiliser cosinus de direction, voir page 97.*

Problem: • *Problème:* $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \vec{b}\,?$

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \rangle = \langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} a_2\, b_3 - a_3\, b_2 \\ a_3\, b_1 - a_1\, b_3 \\ a_1\, b_2 - a_2\, b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rangle$$
$$= (a_2\, b_3\, a_1) - [a_3\, b_2\, a_1] + \{a_3\, b_1\, a_2\} - (a_1\, b_3\, a_2) + \{a_1\, b_2\, a_3\} - [a_2\, b_1\, a_3] = 0$$

Ebenso: • *De la même façon:*

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \rangle = \langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} a_2\, b_3 - a_3\, b_2 \\ a_3\, b_1 - a_1\, b_3 \\ a_1\, b_2 - a_2\, b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \rangle$$
$$= a_2\, b_3\, b_1 - a_3\, b_2\, b_1 + a_3\, b_1\, b_2 - a_1\, b_3\, b_2 + a_1\, b_2\, b_3 - a_2\, b_1\, b_3 = 0$$

$$\Rightarrow \ \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \vec{b}$$

Konsequenz: • **Conséquence:**

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = n_1 \vec{e}_1 + n_2 \vec{e}_2 + n_3 \vec{e}_3 = [\vec{a}\,', \vec{b}\,']\, \vec{e}_1 + [\vec{a}\,'', \vec{b}\,'']\, \vec{e}_2 + [\vec{a}\,''', \vec{b}\,''']\, \vec{e}_3 \ \wedge \ |\vec{n}| = A$$

Definition: • **Définition:**

$\vec{n}$ mit $|\vec{n}| = A$, $\vec{n} \perp \vec{a}, \vec{b}$ ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}$ Rechtssystem) heisst **Vektorprodukt** $\vec{n} := \vec{a} \times \vec{b}$.
• *$\vec{n}$ mit $|\vec{n}| = A$, $\vec{n} \perp \vec{a}, \vec{b}$ ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}$ Syst. de sens direct) s'appelle* **produit vectoriel** $\vec{n} := \vec{a} \times \vec{b}$.

Es gilt also: • *Alors on obtient:*

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} [\vec{a}\,', \vec{b}\,'] \\ [\vec{a}\,'', \vec{b}\,''] \\ [\vec{a}\,''', \vec{b}\,'''] \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3$$

Merkregel: • **Règle à retenir:**

$$\vec{a} \times \vec{b} \ \rightsquigarrow \ \left| \begin{array}{ccccccccc} \vec{e}_1 & & a_1 & & b_1 & & \vec{e}_1 & & a_1 \\ & \searrow & & \nearrow\!\!\!\searrow & & \nearrow\!\!\!\searrow & & \nearrow & \\ \vec{e}_2 & & a_2 & & b_2 & & \vec{e}_2 & & a_2 \\ & \nearrow & & \nearrow\!\!\!\searrow & & \nearrow\!\!\!\searrow & & \searrow & \\ \vec{e}_3 & & a_3 & & b_3 & & \vec{e}_3 & & a_3 \end{array} \right| \quad \text{mit} \ \bullet \ \textit{avec} \ \overset{+}{\searrow}, \ \overset{-}{\nearrow}$$

Andere Merkregel: • *Autre Façon de retenir:*

$$\left| \begin{array}{cccccc} \vec{e}_1 & \searrow & & a_1 & b_1 & \\ \vec{e}_2 & \searrow & \lceil & a_2 & b_2 & \rceil \\ \vec{e}_3 & \searrow & \lceil\lfloor & a_3 & b_3 & \rfloor\rceil \\ & & \lfloor\lceil & a_1 & b_1 & \rceil\rfloor \\ & & \lfloor & a_2 & b_2 & \rfloor \end{array} \right| \qquad \text{(Dreigliedrige Determinante} \ \bullet \ \textit{Déterminant à trois colonnes)}$$

5.8.5 Regeln für das Vektorprodukt — Règles pour le produit vectoriel

1 Zusammenhang mit **Richtungscosinusen**: • *Rapport aux* **cosinus de direction***:*

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = A^2 \cos^2(\alpha) + A^2 \cos^2(\beta) + A^2 \cos^2(\gamma) = A^2(\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma)) = A^2$$

$\rightsquigarrow$ $\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma)$: Richtungscosinuse • *cosinus de direction*

2 **Antikommutativgesetz:** • **Loi anitcommutative:**

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) = -(-\vec{n})$$

Wegen Eigenschaft des Flächenproduktes • *Conséquence du 'produit de surface'*

3 Das **Assoziativgesetz** gilt allgemein **nicht**: • *Généralement la loi* **associative** *n'est* **pas** *valable:*

Bsp.: • **Exemple:** $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)\times\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\vec{0}$

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\times\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}=-\vec{e}_3\neq\vec{0}$

4 **Distributivgesetz:** • **Loi distributive:**

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})$$

Denn das Gesetz gilt komponentenweise für die Flächenprodukte. • *Car la loi est valable par composants pour les 'produits de surface'*

5 **Assoziativgesetz für Skalar:** • **Loi associative pour scalaire:**

$$(\lambda\,\vec{a})\times\vec{b}=\lambda\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

Denn das Gesetz gilt komponentenweise für die Flächenprodukte. • *Car la loi est valable par composants pour les 'produits de surface'*

Konsequenz: • **Conséquence:**

6 Distributivgesetz generell: • *Loi distributive généralement:*

$$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{c}+\vec{d})=(\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{a}\times\vec{d})+(\vec{b}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{d})$$

Denn das Gesetz gilt komponentenweise für die Flächenprodukte.
• *Car la loi est valable par composants pour les 'produits de surface'*

7 Assoziativgesetz für Skalar generell: • *Loi associative pour scalaire généralement:*

$$(\lambda\,\vec{a})\times(\mu\,\vec{b})=(\lambda\cdot\mu)\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

Mittels algebraische Rechnung kann man übrigens jetzt einfach verifizieren:
• *Maintenant il est simple de vérifier par un calcul algèbrique:*

$$\langle\vec{a}\times\vec{b},\vec{a}\rangle=0,\ \ \langle\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\rangle=0,\ \ |\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\varphi)$$

Eine Herleitung der Berechnungsformel des Vektorprodukts mit Hilfe der Regeln ohne Geometrie:
• *Une autre déduction de la formule pour calculer le produit vectoriel à l'aide des règles et sans géométrie:*

Seien • *Soient* $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=a_1\,\vec{e}_1+a_2\,\vec{e}_2+a_3\,\vec{e}_3,\ \ \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=b_1\,\vec{e}_1+b_2\,\vec{e}_2+b_3\,\vec{e}_3$

$\Rightarrow\ \vec{a}\times\vec{b}=(a_1\,\vec{e}_1+a_2\,\vec{e}_2+a_3\,\vec{e}_3)\times(b_1\,\vec{e}_1+b_2\,\vec{e}_2+b_3\,\vec{e}_3)=\sum\limits_{i,k=1}^{3}a_i\,b_k\,(\vec{e}_i\times\vec{e}_k)$

Regeln: • *Règles:* $\vec{e}_i\times\vec{e}_i=\vec{0},\ \ \vec{e}_1\times\vec{e}_2=\vec{e}_3,\ \ \vec{e}_2\times\vec{e}_3=\vec{e}_1,\ \ \vec{e}_3\times\vec{e}_1=\vec{e}_2,\ \ \vec{e}_i\times\vec{e}_k=-\vec{e}_k\times\vec{e}_i$

$$\Rightarrow\ \vec{a}\times\vec{b} = a_1\,b_2\,\vec{e}_3 + a_2\,b_3\,\vec{e}_1 + a_3\,b_1\,\vec{e}_2 - a_2\,b_1\,\vec{e}_3 - a_3\,b_2\,\vec{e}_1 - a_1\,b_3\,\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} a_2\,b_3 - a_3\,b_2 \\ a_3\,b_1 - a_1\,b_3 \\ a_1\,b_2 - a_2\,b_1 \end{pmatrix}$$

5.8.6 Anwendungen — Applications

Physik: Beispiel — Physique: Exemple

Das Drehmoment „Kraft mal Weg“ ist ein Vektor und hat eine Richtung:
• *Le couple de rotation "force multipliée avec le chemin" à une direction. Donc c'est un vecteur:*

$$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}$$

Ebene Probleme — Problèmes dans le plan

In der Ebene kann man das Vektorprodukt ebenfalls verwenden, indem man die gegebenen Vektoren als dreidimensionale Vektoren mit der 3. Komponente 0 interpretiert.
• *Dans un plan, on peut appliquer le produit vectoriel aussi en interprétant les vecteurs donnés comme des vecteurs tridimensionnels avec la troisième composante égale à zéro.*

Elegante Herleitung Koordinatengleichung — Gagner l'équation de coordonnés de façon élégante

Geg.: • **Donné:** Ebene • *Plan* $\Phi:\ \vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$.
Für die Koordinatengleichung gilt:
• *De l'équation de coordonnné on sait:*

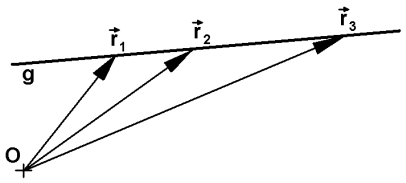
$$Ax + By + Cz + D = 0\ \Rightarrow\ \vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}\ \perp\ \Phi$$

Ebenso: • *D'autre part:* $(\vec{a}\times\vec{b})\perp(\vec{a},\vec{b}) \Rightarrow (\vec{a}\times\vec{b})\perp\Phi\ \Rightarrow\ (\vec{a}\times\vec{b})\parallel\vec{n}$.

Da die Länge von $\vec{n}$ noch wählbar ist, kann man wählen:
• *Comme on peut choisir la longueur de* $\vec{n}$ *librement* ($\neq 0$)*, on peut fixer:*
$\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \vec{a}\times\vec{b}\ \Rightarrow\ A, B, C$ berechnet. • A, B, C *calculés.*
Man berechnet dann D aus $Ax + By + Cz + D = 0$ • *Alors on calcule* D *de* $Ax + By + Cz + D = 0$
mit • *avec* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{r}_0$

Einige Formeln — Quelques formules

1



$$(\vec{r}_1\times\vec{r}_2) + (\vec{r}_2\times\vec{r}_3) + (\vec{r}_3\times\vec{r}_1) = \vec{0}$$

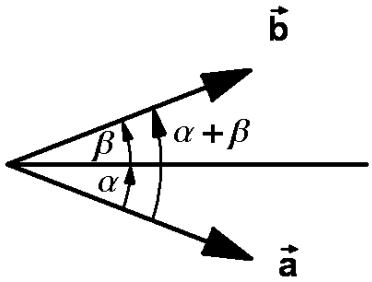
Wegen Richtung, Flächeninhalt.
• *A cause de la direction, grandeur de la surface.*

2 $(\vec{a}\times\vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2}\cdot\vec{b}^{\,2} - \langle\vec{a},\vec{b}\rangle^2$
Wegen • *A cause de* $|(\vec{a}\times\vec{b})| = a\cdot b\sin(\varphi),\ \ \langle\vec{a},\vec{b}\rangle = a\cdot b\cos(\varphi)$

3 **Heron:** $s := \frac{1}{2}(a+b+c) \;\Rightarrow\; A_{\triangle}^2 = s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)$

(Kombiniere Skalarprodukt und Cosinussatz. • *Combiner produit scalaire et théorème du cosinus.*)

Additionstheoreme — Théorèmes d'addition



Sei • *Soit* $\vec{a} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ -\sin(\alpha)\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}\cos(\beta)\\ \sin(\beta)\end{pmatrix}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$

1 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\alpha+\beta) = 1\cdot1\cdot\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha+\beta)$

$\langle\vec{a},\vec{a}\rangle = \langle\begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ -\sin(\alpha)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\cos(\beta)\\ \sin(\beta)\end{pmatrix}\rangle =$

$\cos(\alpha)\,\cos(\beta) - \sin(\alpha)\,\sin(\beta)$

$\Rightarrow\; \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\,\cos(\beta) - \sin(\alpha)\,\sin(\beta)$

2 $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\alpha+\beta) = 1\cdot1\cdot\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha+\beta)$

$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ -\sin(\alpha)\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\cos(\beta)\\ \sin(\beta)\\ 0\end{pmatrix}| =$

$|\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \cos(\alpha)\,\sin(\beta) - (-\sin(\alpha)\,\cos(\beta))\end{pmatrix}|$

$\Rightarrow\; \sin(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\,\sin(\beta) + \sin(\alpha)\,\cos(\beta)$

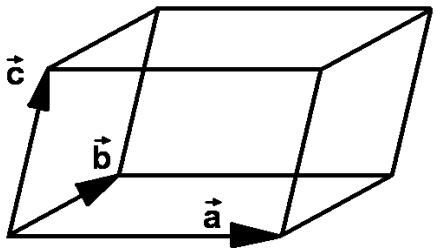
5.9 Spatprodukt (gemischtes Produkt) und weitere Produkte — Produit triple (produit mixte) et autres produits

Begriffe: • **Notions:**

Spatprodukt oder gemischtes Produkt.

• *Produit triple, scalaire triple, produit parallélépipède ou produit mixte*

5.9.1 Definition und Eigenschaften — Définition et qualités



Drei Vektoren • *Trois vecteurs*
$\vec{a},\vec{b},\vec{c} \neq \vec{0}$ mit • *avec*
$\vec{a} \not\parallel \vec{a},\ \vec{b} \not\parallel \vec{c}, \vec{a} \not\parallel \vec{c}$
bilden einen **Spat**, **Parallelflach** oder **Parallelepiped** (griech. Parallelepipedon, „dreidimensionales Parallelogramm“)
• *forment un* **parallélépipède**.

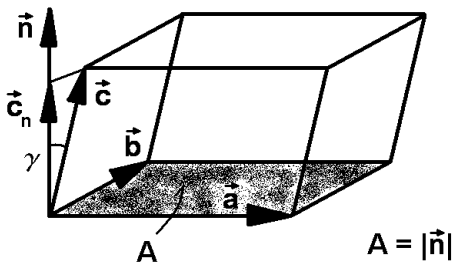
Wie beim Flächenprodukt definieren wir dafür ein „orientiertes, vorzeichenbehaftetes Volumenprodukt“:
• *Comme pour le 'produit de surface' on définit ici un produit orienté du volume:*

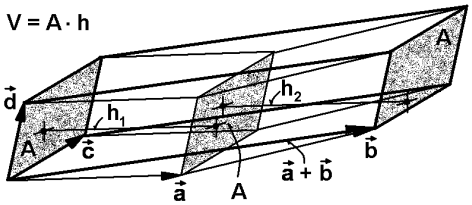
Definition: • **Définition:** **Spatprodukt** • **Produit triple:**

Fall • *Cas* $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ *l.u.'l.i.*:

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]: \quad = \quad \begin{cases} +(\text{Spatvolumen} \bullet \textit{Volume du paral'ep.}) & (\vec{a},\vec{b},\vec{c}) \text{ Rechtssystem} \bullet \textit{Syst.d.s.dir.} \\ -(\text{Spatvolumen} \bullet \textit{Volume du paral'ep.}) & \text{sonst} \bullet \textit{autres cas} \end{cases}$$

Fall • *Cas* $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ *l.a.'l.d.*: $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] := 0$





Einige Körperarten:

Tetraeder
Gerade Pyramide
Schiefe Pyramide
Zylinder
Rohr
Würfel
Quader
Prisma
Schiefes Prisma (Parallelepiped, Spat)
Kugel
Konus
...

• **Quelques types de corps:**

Tétraèdre
Pyramide droite
Pyramide oblique
Cylindre
Tube
Cube
Parallélépipède, rectangle, cuboïde
Prisme
Parallélépipède
Sphère
Cône
...

Notizen: • *Notes:*

⇝

Eigenschaften:
• **Qualités:**

1 $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = [\vec{b},\vec{c},\vec{a}] = [\vec{c},\vec{a},\vec{b}] = -[\vec{c},\vec{b},\vec{a}] = -[\vec{b},\vec{a},\vec{c}] = -[\vec{a},\vec{c},\vec{b}]$

2 (Vgl. Abbildung. • *Voir image.*)

$$\pm V = A \cdot c_n = A \cdot c \cdot \cos(\gamma) = |\vec{n}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos(\gamma) = \langle \vec{n}, \vec{c} \rangle = \langle (\vec{a} \times \vec{b}), \vec{c} \rangle$$

$$\Rightarrow \; [\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \langle (\vec{a} \times \vec{b}), \vec{c} \rangle$$

Damit lässt sich das Spatprodukt einfach berechnen:
• *Grace à cette qualité, on peut facilement calculer le produit triple:*
Sei • *Soit* $\vec{a}\,' = \vec{a}_z$, $\vec{a}\,'' = \vec{a}_x$, $\vec{a}\,''' = \vec{a}_y$ (z.B. • *p.ex.*) $\vec{a}_z$:
Keine z–Koord.. • *pas de coord. z.*
$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = [\vec{b},\vec{c},\vec{a}] = \langle (\vec{b} \times \vec{c}), \vec{a} \rangle = \langle \vec{a}, (\vec{b} \times \vec{c}) \rangle$

$$= \langle \vec{a}, \begin{pmatrix} [\vec{b}_x, \vec{c}_x] \\ [\vec{b}_y, \vec{c}_y] \\ [\vec{b}_z, \vec{c}_z] \end{pmatrix} \rangle = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

3 Rechenschema (**Regel von Sarrus**):
• *Schéma pour calculer* **Règle de Sarrus***:*

$$\left| \begin{array}{ccccccccc} a_1 & & b_1 & & c_1 & & a_1 & & b_1 \\ & \searrow & & \nearrow\!\!\!\searrow & & \nearrow\!\!\!\searrow & & \nearrow & \\ a_2 & & b_2 & & c_2 & & a_2 & & b_2 \\ & \nearrow & & \nearrow\!\!\!\searrow & & \nearrow\!\!\!\searrow & & \searrow & \\ a_3 & & b_3 & & c_3 & & a_3 & & b_3 \end{array} \right| \quad \text{mit • } \textit{avec} \; \overset{+}{\searrow}, \; \overset{-}{\nearrow}$$

Abgekürzt: Für die Berechnung des vorzeichenbehafteten Volumens genügt das folgende Schema: • *Abréviation: Pour calculer le volume chargé de signes le schéma suivant suffit:*

$$\pm V = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} := \det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$$

$\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ heisst auch (3×3)–**Determinante**
• $\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ *s'appelle aussi* **déterminant** *(*3×3*)*

Achtung: • Attention: Die Regel von Sarrus gilt später für höhere Determinanten nicht mehr! • *La règle de Sarrus n'est plus valable pour des déterminants d'ordre supérieur qu'on va traiter plus tard!*

4 $[\lambda\,\vec{a}, \mu\,\vec{b}, \nu\,\vec{c}] = \lambda \cdot \mu \cdot \nu \cdot [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ (Wegen Streckung der Seitenvektoren und des Spatvolumens. • *A cause de l'allongement des vecteurs des côtés et du volume du parallélépipède.*)

5 (Vgl. Abbildung. • *Voir image.*) $[\vec{a}+\vec{b},\vec{c},\vec{d}] = [\vec{a},\vec{c},\vec{d}] + [\vec{b},\vec{c},\vec{d}]$
(Wegen der Volumenberechnung nach „Grundflächeninhalt mal Höhe“.
• *A cause de la formule pour calculer le volume "surface de base fois hauteur"*)

5.9.2 Cramer'sche Regeln für Gleichungssysteme mit 3 Unbekannten — Règles de Cramer pour des systèmes d'équations à 3 inconnues

Betrachte: • *Etudier*:

$$\left|\begin{array}{rcl} a_1x+b_1y+c_1z & = & d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z & = & d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z & = & d_3 \end{array}\right| \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \cdot y + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \cdot z = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c} = \vec{d}$$

$\rightsquigarrow$ Interpretation von $x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c} = \vec{d}$: • *Interprétation de* $x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c} = \vec{d}$:
$\vec{d}$ soll linear zerlegt werden nach $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$. • *Il faut décomposer* $\vec{d}$ *linéairement d'après* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *et* $\vec{c}$.
Diese Zerlegung ist eindeutig, falls • *Cette décomposition est univoque, si* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *l.u.'l.i.*,
d. h. • *ç. v. d.* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ nicht komplanar • *non complanaire*,
d. h. • *ç. v. d. l.u.'l.i.*, d. h. • *ç. v. d.* $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \neq 0$.
In diesem Fall können wir wie beim Flächenprodukt einen Berechnungstrick anwenden:
• *Dans ce cas on pout appliquer un truc de calcul comme pour le 'produit de surface'*:

Trick: • **Truc:** Z.B. • *P.ex.* rechne • *calculer*

$$[\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}] = [x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c}, \vec{b}, \vec{c}] = x \cdot [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + y \cdot \overbrace{[\vec{b}, \vec{b}, \vec{c}]}^{=0} + z \cdot \overbrace{[\vec{c}, \vec{b}, \vec{c}]}^{=0} \Rightarrow [\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}] = x \cdot [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}].$$

Entsprechend erhält man: • *Par la même méthode on obtient:*

$$[\vec{a}, \vec{d}, \vec{c}] = y \cdot [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \ \wedge \ [\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}] = z \cdot [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \rightsquigarrow \quad x = \ldots, \ y = \ldots, \ z = \ldots$$

Regeln: • **Règles:** $x = \dfrac{[\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}]}{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]}, \ y = \dfrac{[\vec{a}, \vec{d}, \vec{c}]}{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]}, \ z = \dfrac{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}]}{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]}$

Diese Regeln werden wir später mit Hilfe von Determinanten verallgemeinern.
• *Plus tard nous allons généraliser ces règles à l'aide de déterminants.*

Bsp.: • **Exemple:**

$$\begin{array}{rcl} 3\,x + 4\,y + 5\,z & = & 6 \\ 7\,x + \beta\,y + z & = & 2 \\ x - 2\,y + 4\,z & = & 8 \end{array}$$

$$\Rightarrow \ x = \frac{-8\ (1+2\,\beta)}{-172+7\,\beta}, \ y = \frac{108}{-172+7\,\beta}, \ z = \frac{18\ (-16+\beta)}{-172+7\,\beta}$$

$\rightsquigarrow$ Nenner 0, keine Lösung für $\beta = \dfrac{172}{7}$ • *Dénominateur* 0, *pas de solution pour* $\beta = \dfrac{172}{7}$

5.9.3 Weitere Produkte — Autres produits

Definition: • **Définition:** **Grassmannprodukt** • **Produit de Grassmann**

$$\vec{g} := \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

Bemerkung: • **Remarque:** Die **Vektorrechnung** wurde begründet von *Grassmann* (1809 – 1877) und *Hamilton* (1805 – 1865) $\rightsquigarrow$ Vektorbegriff. Die **Vektorgeometrie** stammt von *Bieberbach* (1885 – 1962) und andern, ist somit relativ neu!
• *Le* **calcul vectoriel** *a été introduit par Grassmann (1809 – 1877) et Hamilton (1805 – 1865)* $\rightsquigarrow$ *notion de vecteur. La* **géométrie vectorielle** *vient de Bieberbach (1885 – 1962) et autres, elle est donc relativement nouvelle!*

Satz: • **Théorème:** $\vec{g} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \cdot \vec{b} - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \cdot \vec{c}$

(Koeffizientenweise nachrechnen (Computer!). • *Calculer par coefficients (ordinateur!).*)
Daraus ersieht man direkt: • *De cette formule on voit directement:*

Folgerung: • **Conclusion:** Das Vektorprodukt ist **nicht assoziativ**!
• *Le produit vectoriel* **n'est pas associatif***!*

Viererprodukte • *Des produits à quatre facteurs*

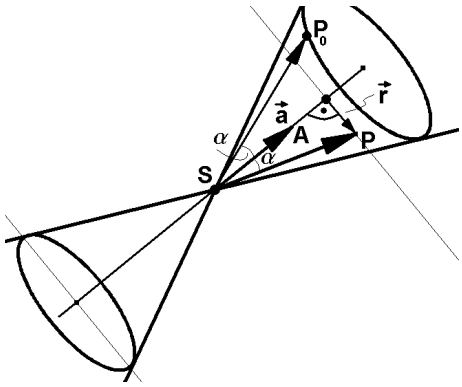
Satz: • **Théorème:**

$$1 \quad \langle (\vec{a} \times \vec{b}), (\vec{c} \times \vec{d}) \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \cdot \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle \cdot \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$$

$$2 \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}] \cdot \vec{c} - [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \cdot \vec{d}$$

5.9.4 Kegel und Zylinder — Cône et cylindre

Kegel — Cône



Geg.: • **Donné:**
Kegel $\mathcal{K}$ mit Achse a und Punkt P_0.
• *Cône* $\mathcal{K}$ *avec axe* a *et point* P_0.

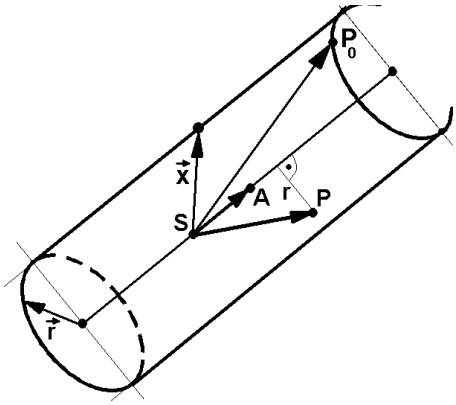
$$\rightsquigarrow \quad a : \vec{v}_a = \overrightarrow{OS} + \lambda\, \vec{a}, \quad P_0 \in \mathcal{K} : \overrightarrow{OP_0}, \quad \overrightarrow{SA} = \vec{a}, \quad P \in \mathcal{K} : \overrightarrow{SP} = \vec{x}$$

Es gilt: • *Il vaut:*

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \vec{a}, \overrightarrow{SP_0} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\overrightarrow{SP_0}|} = \frac{\langle \vec{a}, \overrightarrow{SP} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\overrightarrow{SP}|} = \frac{\langle \vec{a}, \vec{x} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{x}|}$$

Formel: • **Formule:** $\rightsquigarrow \quad (\langle \vec{a}, \overrightarrow{SP_0} \rangle)^2 \cdot |\vec{x}|^2 = (\langle \vec{a}, \vec{x} \rangle)^2 \cdot |\overrightarrow{SP_0}|^2$

Zylinder — Cylindre



Geg.: • **Donné:**
Zylinder $\mathcal{R}$ mit Achse a und Punkt P_0.
• *Cylindre* $\mathcal{R}$ *avec axe* a *et point* P_0.

$$\rightsquigarrow \quad a : \vec{v}_a = \overrightarrow{OS} + \lambda\,\vec{a}, \;\; P_0 \in \mathcal{R} : \overrightarrow{OP_0}$$
$$\overrightarrow{SA} = \vec{a}, \;\; P \in \mathcal{R} : \overrightarrow{SP} = \vec{x}$$

Es gilt: • *Il vaut:* Radius • *Rayon*

$$r = \frac{|\,\overrightarrow{SP_0} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|} = \frac{|\,\overrightarrow{SP} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|} = \frac{|\vec{x} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$$

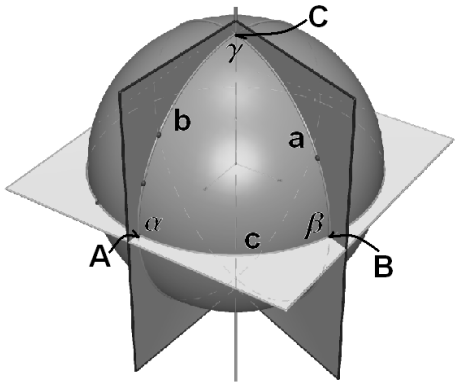
Formel: • **Formule:** $\rightsquigarrow \; |\,\overrightarrow{SP_0} \times \vec{a}|^2 = |\vec{x} \times \vec{a}|^2$

5.9.5 Ausblick — Perspectives

Sphärische Geometrie — Géométrie sphérique

Eine Anwendung der Vektorgeometrie ist die **sphärische Geometrie**.
• *La* **géométrie sphérique** *est une application de la géométrie vectorielle.*

Bsp.: • **Exemple:**



Betrachte ein sphärisches Dreieck (Dreieck auf der Kugeloberfläche.)
• *Considérons un triangle sphérique (triangle sur la sphère.)*

Es gilt der **sphärische Cosinussatz**:
• *On trouve le* **théorème du cosinus** *pour la sphère:*

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \sin(a) \cdot \sin(b) \cdot \cos(\alpha)$$

Sphärische Sinussatz • **Théorème du sinus pour la sphère:**

$$\sin(b) \cdot \sin(\alpha) = \sin(a) \cdot \sin(\beta) \text{ etc.}$$

Determinanten — Déterminants

Wir kennen jetzt die 2×2 und die 3×3–Determinante als Inhalte von Flächen und Volumen.
• *Maintenant nous connaissons le déterminant* 2×2 *et* 3×3 *comme contenu des surfaces et du volume.*

Wir können dieses Schema vervollständigen: • *Nous pouvons compléter ce schéma:*

$\mathbb{R}^1$: ± gerichtete Distanz • *distance orientée* $\rightsquigarrow$ ± Länge • *longueur*
$\mathbb{R}^2$: ± Flächeninhalt • *mesure de surface* $\rightsquigarrow$ Flächenprodukt • *'produit de surface'*
$\mathbb{R}^3$: ± Volumeninhalt • *mesure de volume* $\rightsquigarrow$ Spatprodukt • *produit triple*

$\mathbb{R}^n$: $\pm$ n–dimensionaler Volumeninhalt • *mesure de volume de dimension* $n \rightsquigarrow$ $n \times n$–Determinante • *déterminant* $n \times n \rightsquigarrow$ spezielle Theorie notwendig • *On a besoin d'une théorie spéciale*

Dazu ist der **Matrix–Begriff** notwendig. • *Quant à cela on a besoin de la* **notion de la matrice**.

Hinweis: Eine **Matrix** ist ein rechteckiges Zahlenschema.
• *Idée: Une* **matrice**, *c'est un schéma rectangulaire de nombres.*

Z.B. • *P.ex.* $M = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \dots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \alpha_{m,2} & \dots & \alpha_{m,1n} \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ $m \times n$–**Matrix**. • **matrice** $m \times n$.

Eine $m \times n$–Matrix kann man sich entstanden denken aus n Spaltenvektoren oder aus m Zeilenvektoren.
• *On peut imaginer une matrice* $m \times n$ *être formée par* n *vecteurs de colonne ou bien* m *vecteurs de ligne.*

Das Vektorprodukt im n–Dimensionalen — Le produit vectoriel dans la dimension n

Das Vektorprodukt lässt sich für den $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern (schiefes Produkt $\vec{a} \wedge \vec{b}$). Es ist für grössere n aber kein Vektor mehr.
• *On peut généraliser le produit vectoriel pour le* $\mathbb{R}^n$ *(*$\vec{a} \wedge \vec{b}$*). Mais pour des* n *plus grands, ce n'est plus un vecteur.*

5.10 Berechnungen — Calculs

5.10.1 Koord'gleichung einer Ebene — Equation de coord. d'un plan

Sei • *Soit* $\Phi:\ A\,x + B\,y + C\,z + D = 0,\ \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix},\ \dfrac{|D|}{|\vec{n}|} = |\overline{O\Phi}| = ?$

$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b},\ |\vec{n}| = A,\ \vec{a} = \vec{p_3} - \vec{p_1},\ \vec{b} = \vec{p_2} - \vec{p_1}$

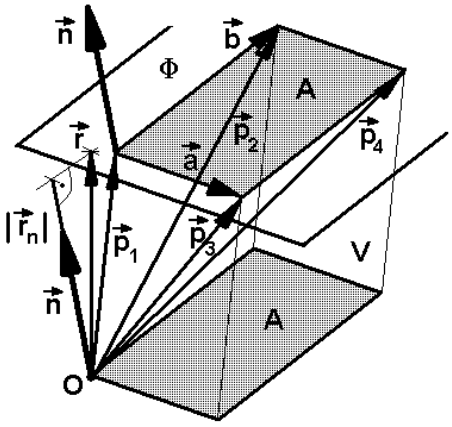
$M = (\vec{p_1}, \vec{a}, \vec{b})$

$$V = |\det(M)| = |A| \cdot |\vec{r}_n| = |\vec{n}| \cdot |\vec{r}_n| = |\langle \vec{r}, \vec{n} \rangle| = |x\,A + y\,B + z\,C|$$

$x\,A + y\,B + z\,C + D = 0$

$\Rightarrow\ x\,A + y\,B + z\,C = -D$

$\Rightarrow\ |D| = |x\,A + y\,B + z\,C| = |\det(M)| = |\det((\vec{p_1}, \vec{p_2} - \vec{p_1}, \vec{p_3} - \vec{p_1}))|$



Formel: • **Formule:** $\Phi:\ x\,A + y\,B + z\,C + D = 0\ \Rightarrow$

1 $|D| = |\det((\vec{p_1}, \vec{p_2} - \vec{p_1}, \vec{p_3} - \vec{p_1}))|$

2 $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \vec{a} \times \vec{b}$

Entsprechend gilt für eine Gerade g: • *Correspondant, on trouve pour une droite g:*

$g:\ \vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{a},\ A\,x + B\,y + C = 0,\ \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},\ \vec{n} = \vec{a}_\perp = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow\ |C| = |A\,x + B\,y| = |\langle \vec{r}, \vec{n} \rangle| = |\langle \vec{r}, \vec{a}_\perp \rangle| = |\langle \vec{r}_n, \vec{a}_\perp \rangle| = |\vec{r}_n| \cdot |\vec{a}_\perp| = |d| \cdot |\vec{a}| = [\vec{r}_0, \vec{a}]\ \Rightarrow\ |C| = [\vec{r}_0, \vec{a}]$

$[\vec{r}_0, \vec{a}] \rightsquigarrow$ (Flächenprodukt) • *('Produit de surface')*

Formel: • **Formule:** $g:\ \vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{a},\ A\,x + B\,y + C = 0\ \Rightarrow$

1 $|C| = [\vec{r}_0, \vec{a}]$

2 $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \vec{a}_\perp$

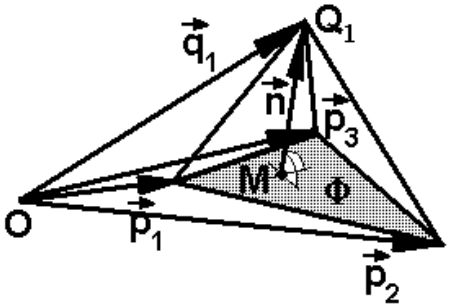
5.10.2 Spiegeln eines Punktes — Refléter un point

Nachdem ich selbst öfters in der Praxis mit Spiegelungsproblemen konfrontiert war, suchte ich nach einer geeigneten Darstellung einer geschlossenen Formel, die das Gewünschte leistet. Das nachtstehend dargestellte Resultat ist eine Möglichkeit:
• *Après avoir été confronté assez souvent, à propos de problèmes pratiques, avec les problèmes de réflexion de points à des plans ou de droites, j'ai cherché une représentation convenable d'une formule fermée qui effectue ce que je désirais. Le résultat représenté en dessous est une possibilité:*

Ebenenspiegelung — Refléter un point à un plan

Der Punkt Q soll an der Ebene Φ gespiegelt werden. — Formel?
• *On veut refléter un point au plan Φ. — Formule?*

$g:\ \vec{r} = \vec{q}_1 + t \cdot \vec{n},\ \ \vec{n} = (\vec{p}_2 - \vec{p}_1) \times (\vec{p}_3 - \vec{p}_1)$



Sei • *Soit* $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

$$\begin{aligned}
&\det((\vec{p}_2 - \vec{p}_1, \vec{p}_3 - \vec{p}_1, \vec{q}_1 - \vec{p}_1)) \\
&= \det((\vec{p}_2 - \vec{p}_1, \vec{p}_3 - \vec{p}_1, \vec{r} - t \cdot \vec{n} - \vec{p}_1)) \\
&= \underbrace{\det((\vec{p}_2 - \vec{p}_1, \vec{p}_3 - \vec{p}_1, \vec{r} - \vec{p}_1))}_{=0 \text{ (Ebene) • (Plan)}} - t \cdot \det((\vec{p}_2 - \vec{p}_1, \vec{p}_3 - \vec{p}_1, \vec{n})) \\
&\rightsquigarrow\ t = -\frac{\det((\vec{p}_2 - \vec{p}_1, \vec{p}_3 - \vec{p}_1, \vec{q}_1 - \vec{p}_1))}{\det((\vec{p}_2 - \vec{p}_1, \vec{p}_3 - \vec{p}_1, \vec{n}))}
\end{aligned}$$

Sei Q_2 = gespiegelter Punkt von Q_1 an Φ. • *Soit Q_2 = point reflété de Q_1 an Φ.*

$$\rightsquigarrow\quad \vec{q}_2 = \overrightarrow{OQ_2} = \vec{q}_1 - 2\,t \cdot \vec{n} = \vec{q}_1 - 2\,\frac{\det((\vec{p}_2 - \vec{p}_1, \vec{p}_3 - \vec{p}_1, \vec{q}_1) - \vec{p}_1)}{\det((\vec{p}_2 - \vec{p}_1, \vec{p}_3 - \vec{p}_1, (\vec{p}_2 - \vec{p}_1) \times (\vec{p}_3 - \vec{p}_1)))} \cdot (\vec{p}_2 - \vec{p}_1) \times (\vec{p}_3 - \vec{p}_1)$$

Formel: • **Formule:** **Geg.:** • **Donné:** $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3\} \rightsquigarrow \Phi$, $\vec{q}_1 \rightsquigarrow Q_1$

Ges.: • **Trouver:** Spielgelpunkt Q_2. • *Point reflété Q_2.*

$$\overrightarrow{OQ_2} = \vec{q}_1 - 2\,\frac{\det((\vec{p}_2 - \vec{p}_1, \vec{p}_3 - \vec{p}_1, \vec{q}_1 - \vec{p}_1))}{\det((\vec{p}_2 - \vec{p}_1, \vec{p}_3 - \vec{p}_1, (\vec{p}_2 - \vec{p}_1) \times (\vec{p}_3 - \vec{p}_1)))} \cdot (\vec{p}_2 - \vec{p}_1) \times (\vec{p}_3 - \vec{p}_1)$$

Bsp.: • **Exemple:** Mit • *Avec Mathematica*:

In:

```
p1 = {0,0,4}; p2={0,6,0}; p3={3,0,0}; q1={2,8,0};
q2 =
q1-2 Det[{p2-p1,p3-p1,q1-p1}]/Det[{p2-p1,p3-p1,Cross[p2-p1,p3-p1]}] Cross[p2-p1,p3-p1]
```

Out:

$\left\{-\frac{38}{29}, \frac{184}{29}, -\frac{72}{29}\right\}$

Andere Fassung: • *Une autre représentation:*

Formel: • **Formule:** **Geg.:** • **Donné:** $\{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3\} \rightsquigarrow \Phi,\ \vec{q}_1 \rightsquigarrow Q_1$
$\vec{a} = \vec{p}_2, \vec{p}_1,\ \ \vec{b} = \vec{p}_3, \vec{p}_1,\ \ \vec{c} = \vec{q}_1 - \vec{p}_1$

Ges.: • **Trouver:** Spielgelpunkt Q_2. • *Point reflété* Q_2.

$$\overrightarrow{OQ}_2 = \vec{q}_1 - 2\,\frac{\det((\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}))}{\det((\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}))} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

Geradenspiegelung — Refléter un point à une droite

Sei • *Soit* $g:\ \vec{r}(t) = \vec{p}_1 + t\,\vec{a},\ \ M \in g,\ \ \overline{MQ}_1 \perp g,\ \ \vec{q}_1 = \overrightarrow{OQ}_1 = \overrightarrow{OM} + t_0\,\vec{a}_\perp,$

$$\rightsquigarrow\ [\vec{a}, \vec{q}_1 - \vec{p}_1] = [\vec{a}, t_0\,\vec{a}_\perp] = t_0\,|\vec{a}|^2 = t_0\,\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle\ \Rightarrow\ t_0 = \frac{[\vec{a}, \vec{q}_1 - \vec{p}_1]}{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} = \frac{[\vec{a}, \vec{q}_1 - \vec{p}_1]}{|\vec{a}|^2}$$

$$\rightsquigarrow\ \overline{OQ}_2 = \vec{q}_2 = \vec{q}_1 - 2\,\frac{[\vec{a}, \vec{q}_1 - \vec{p}_1]}{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} \cdot \vec{a}_\perp = \vec{q}_1 - 2\,\frac{[\vec{a}, \vec{q}_1 - \vec{p}_1]}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}_\perp$$

($[\vec{a}, \vec{q}_1 - \vec{p}_1] \rightsquigarrow$ Flächenprodukt • *'Produit de surface'*)

Formel: • **Formule:** **Geg.:** • **Donné:** $g:\ \vec{r}(t) = \vec{p}_1 + t\,\vec{a},\ \ Q_1 \notin g$

Ges.: • **Trouver:**

Spielgelpunkt Q_2 von Q_1. • *Point reflété* Q_2 *de* Q_1

$$\rightsquigarrow\ \overline{OQ}_2 = \vec{q}_1 - 2\,\frac{[\vec{a}, \vec{q}_1 - \vec{p}_1]}{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} \cdot \vec{a}_\perp = \vec{q}_1 - 2\,\frac{[\vec{a}, \vec{q}_1 - \vec{p}_1]}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}_\perp$$

Kapitel • Chapitre 6

Komplexe Zahlen — Nombres complexes

6.1 Definition von C — Définition de C

6.1.1 Zahlenmenge — Ensemble de nombres

Problem: • **Problème:** Sei • *Soit* $a \in \mathbb{R}^-$, $(a < 0)$
$\rightsquigarrow \quad x^2 = a = -|a|$ hat in $\mathbb{R}$ keine Lösung!
• *n'a pas de solution dans* $\mathbb{R}$*:*

Um die Lösbarkeit trotzdem zu erzwingen, muss $\mathbb{R}$ erweitert werden. $\mathbb{R}$ ist aber lückenlos und dicht (vgl. z.B. Analysis). Wie also vorgehen?
• *Pour obtenir de force une solution, il faut extendre* $\mathbb{R}$*. Mais* $\mathbb{R}$ *n'a pas de lacunes et est dense (p.ex. voir analyse). Comment résoudre alors le problème?*

Definiere dafür eine Äquivalenzrelation: • *Par conséquence définir une relation d'équivalence:*

Definition: • **Définition:** Seien • *Soient* $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}$.
$(a, b) \sim (c, d) :\Leftrightarrow \; a = c \;\wedge\; b = d.$

Folgerung: • **Conclusion:**

1 $(a, b) \sim (c, d) \;\Leftrightarrow\; (a, b) = (c, d)$ $(\Rightarrow)$Äquivalenzrelation
• *relation d'équivalence*

2 Jede Äquivalenzklasse $[(a, b)]$ enthält nur ein Element (a, b).
• *Chaque classe d'équivalence contient seulement un élément* (a, b).

Wir brauchen aber die Klassen $[(a, b)]$, denn diese werden wir als neue, komplexe Zahlen definieren. Ein Zahlenpaar (a, b) dagegen ist immer ein Paar von reellen Zahlen.
• *Nous avons besoin des classes* $[(a, b)]$*, car nous allons définir ces classes comme nouveaux nombres complexes. Par contre les paires* (a, b) *restent des paires de nombres reelles.*

Symbol: • **Symbole:** $[(a, b)] := a + i\,b.$

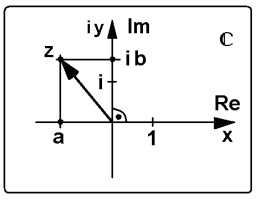
Hier sind $''+''$ und i vorläufig Symbole. i gibt an, dass b das 2. Element des geordneten Paares (a, b) ist und heisst **imaginäre Einheit**.
• *Pour le moment* $''+''$ *et* i *sont des symboles.* i *indique que* b *est le deuxième élément de la paire*

ordonnée (a, b) *et s'appelle* **unité imaginaire** $(c, d) \in \mathbb{R}$.

Idee: • *Idée*: $i = \text{''}\sqrt{-1}\text{''}$.

Definition: • **Définition:** $\{a + i\,b \mid a, b, \in \mathbb{R}\} := \mathbb{C}$ heisst **Menge der komplexen** (**Gauss'schen** Zahlen).
• $\{a + i\,b \mid a, b, \in \mathbb{R}\} := \mathbb{C}$ *s'appelle ensemble des* **nombres complexes** *(nombres de* **Gauss***).*

Geometrische Interpretation:
• **Interprétation géométrique:**
$z = a + i\,b \mathrel{\hat{=}} \vec{z} := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (ONS)



$z = a + i\,b \in \mathbb{C}$

$\vec{z} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

6.1.2 Operationen in C — Opérations dans C

Definition: • **Définition:** **Addition in $\mathbb{C}$:** • **Addition dans $\mathbb{C}$:**
$(a + i\,b) + (c + i\,d) := (a + c) + i\,(b + d)$

Bemerkung: • **Remarque:**

1 In der Definition erscheint $''+''$ in drei verschiedenen Bedeutungen: Symbol in komplexer Zahl, Addition in $\mathbb{R}$, Addition in $\mathbb{C}$. • *Dans la définition* $''+''$ *apparaît en trois significations: Symbole dans un nombre complexe, addition dans* $\mathbb{R}$*, addition dans* $\mathbb{C}$*.*

2 Die Addition in $\mathbb{C}$ entspricht der Vektoraddition in $\mathbb{R}^2$.
• *L'addition dans* $\mathbb{C}$ *correspond à l'addition vectorielle dans* $\mathbb{R}^2$:
$z_0 = z_1 + z_2 \in \mathbb{C} \;\Rightarrow\; \vec{z}_0 = \vec{z}_1 + \vec{z}_2 \in \mathbb{R}^2, \;\; (z_i \hat{=} \vec{z}_i)$.

Folgerung: • **Conclusion:** $(\mathbb{C}, +)$ ist additive Gruppe. • $(\mathbb{C}, +)$ *est groupe additif.*

$0 + i\,0$ ist das **Nullelement** • $0 + i\,0$ *est l'***élément nul**,

$-(a + i\,b) := (-a) + i\,(-b)$ ist das **Inverse** zu $a + i\,b$.
• $-(a + i\,b) := (-a) + i\,(-b)$ *est l'***inverse** *à* $a + i\,b$.

Daher können wir die Subtraktion wie folgt definieren: • *Par conséquence on peut définir la soustraction comme il suit:*

Definition: • **Définition:** $(a + i\,b) - (c + i\,d) := (a + i\,b) + (-(c + i\,d))$

Folgerung: • **Conclusion:** $(a + i\,b) - (c + i\,d) = (a - c) + i\,(b - d)$

Definition: • **Définition:**

Multiplikation in $\mathbb{C}$: • **Multiplication dans $\mathbb{C}$:**

$$(a + i\,b) \cdot (c + i\,d) := (a \cdot c - b \cdot d) + i\,(a \cdot d + b \cdot c)$$

(Links: Multiplikation in $\mathbb{C}$, rechts: Multiplikation in $\mathbb{R}$
• *A gauche: Multiplication dans $\mathbb{C}$, à droite: Multiplication dans $\mathbb{R}$.*)

Idee zu dieser Definition: Man will erreichen dass in $\mathbb{C}$ wie in $\mathbb{R}$ distributiv gerechnet werden kann. Man erreicht damit, dass i^2 die Bedeutung von $\sqrt{-1}$ bekommt.
• *Idée pour cette définition: On veut atteindre qu'on puisse calculer dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$ de façon distributive. Ainsi on obtient que i^2 ait la signigfication de $\sqrt{-1}$.*

Eigenschaften:
• **Qualités:**

1 **Abgeschlossenheit** • **Opération fermée:**
Wegen Definition. • *A cause de la définition.*

2 **Kommutativgesetz** • **Loi commutative:**
$(a + i\,b) \cdot (c + i\,d) = (c + i\,d) \cdot (a + i\,b)$
(wegen • *à cause de* $a \cdot b = b \cdot a$ etc.)

3 **Assoziativgesetz** • **Loi associative:**
$(a + i\,b) \cdot ((c + i\,d) \cdot (e + i\,f)) = ((a + i\,b) \cdot (c + i\,d)) \cdot (e + i\,f)$
(Nachrechnen • *Calculer les deux côtés*)

4 **Einselement** • **Elément unité** $(1 + i\,0)$**:**
$(1 + i\,0) \cdot (a + i\,b) = (a + i\,b)$
$((1 + i\,0) \cdot (a + i\,b) := (1 \cdot a - 0 \cdot b) + i\,(1 \cdot b - 0 \cdot a) = a + i\,b$
Man kann zeigen, dass es nur ein Einselement gibt.
• *On peut montrer qu'il n'y a qu' un élément neutre.*)

5 **Inverses** • **Inverse** $(a + i\,b)^{-1}$ **zu** • *à* $a + i\,b \neq 0 + i\,0$**:**

$$(a + i\,b)^{-1} := \frac{a}{a^2 + b^2} - i\,\frac{b}{a^2 + b^2}$$

Es gilt (Rechnung): • *On trouve (calculer):*
$(a + i\,b) \cdot (a + i\,b)^{-1} = 1 + i\,0$

Folgerung: • **Conclusion:**

1 $(\mathbb{C}, +)$ ist kommutative Gruppe.
• $(\mathbb{C}, +)$ *est groupe commutatif.*

2 $(\dot{\mathbb{C}}, \cdot)$ ist kommutative Gruppe.
• $(\dot{\mathbb{C}}, \cdot)$ *est groupe commutatif.*

3 Es gilt das Distributivgesetz:
• *La loi distributive est valable:*

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$

(Vgl. Rechnung. • *Calculer.*) $\rightsquigarrow$

Satz: • **Théorème:** $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper. • *est un corps.*

(Analog zu $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ oder $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.)
• *(Analogiquement à* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *ou* $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$*.)*

Konsequenz: • **Conséquence:**
Wegen der Kommutativität darf man in $\mathbb{C}$ die **Bruchschreibweise** benützen:
• *A cause de la commutativité il est possible d'écrire les nombres de* $\mathbb{C}$ *à l'aide de fractions:*

$$z_1 \cdot z_2^{-1} = z_2^{-1} \cdot z_1 := \frac{z_1}{z_2}$$

6.1.3 Einbettung von R in C — Plongement de R dans C

Sei • *Soit* $M = \{(a + i\,0 \mid a \in \mathbb{R}) \subset \mathbb{C}\}$.

In M ist: • *Dans* M *on trouve:* $(a_1 + i\,0) + (a_2 + i\,0) = (a_1 + a_2) + i\,0$, $(a_1 + i\,0) \cdot (a_2 + i\,0) = (a_1 \cdot a_2) + i\,0$.

Wir betrachten daher: • *Par conséquence nous considérons:*

$$f : \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{R} \qquad \text{mit • } \textit{avec} \qquad f(a + i\,0) = a.$$

Diese Abbildung ist bijektiv zwischen M und $\mathbb{R}$.
• *Cette application est bijective par rapport à* M *et* $\mathbb{R}$. Daher finden wir: • *Ainsi nous trouvons:*

$$f^{-1}(a_1 + a_2) = ((a_1 + i\,0) + (a_2 + i\,0)) = (a_1 + i\,0) + (a_2 + i\,0) = f^{-1}(a_1) + f^{-1}(a_2).$$

Ebenso: • *Pareillement:* $f^{-1}(a_1 \cdot a_2) = f^{-1}(a_1) \cdot f^{-1}(a_2)$

Daher ist es egal, ob man die Operationen $''+''$ und $''\cdot''$ in M oder in $\mathbb{R}$ ausführt.
• *Il n'importe donc pas qu'on exécute les opérations* $''+''$ *et* $''\cdot''$ *dans* M *ou dans* $\mathbb{R}$.
(f ist **strukturerhaltend**. • f **conserve** *la structure.*)
Somit ist es unnötig, im Hinblick auf diese Operationen M und $\mathbb{R}$ zu unterscheiden, eine Identifikation $M := \mathbb{R}$ ist vertretbar. • *Il est donc inutile de distinguer* M *et* $\mathbb{R}$ *par rapport à ces opérations. On peut accepter une identification* $M := \mathbb{R}$.

$\rightsquigarrow$ **Identifikation:** • **Identification:** $M := \mathbb{R}$, $a := a + i\,0$
$\Rightarrow$ **Einbettung** • **plongement** $\mathbb{R} := M \subset \mathbb{C}$.

6.1.4 Imaginäre Zahlen — Nombres imaginaires

Definiere analog zu vorhin: • *Définissons de façon analogue à plus haut:*

$$0 + i\,b := i\,b, \;\; \mathbb{I} := \{i\,b \mid b \in \mathbb{R}\}$$

Symbol: • **Symbole:** $i\,\mathbb{R} := \mathbb{I}$.

Nun drängt sich folgende Definition auf: • *Maintenant la définition suivante s'impose:*

Definition: • **Définition:** $i\,b := i \cdot b$, $i := i \cdot 1$, $b\,i := b \cdot i$

Folgerung: • **Conclusion:**

1 $a(i\,b) = i\,(a\,b)$
Denn: • *Car:* $a\,(i\,b) = (a + i\,0)(0 + i\,b) = i\,(a\,b)$

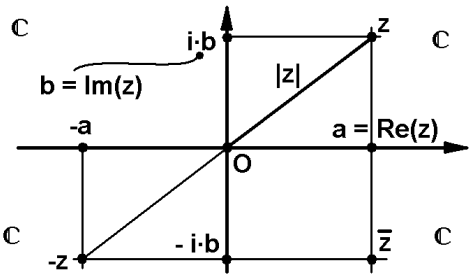
2 $b\,i = i\,b$
Denn: • *Car:* $b\,i = b \cdot i = b(i \cdot 1) =$
$= (b + i\,0) \cdot (0 + i \cdot 1) = 0 + i\,(b \cdot 1) = i\,(b \cdot 1) = i\,b$

3 $i^2 = -1,\ \ i = \pm\sqrt{-1}\,b$
Denn: • *Car:* $i^2 = i \cdot i = (0 + i\,1) \cdot (0 + i\,1) =$
$= (0 - 1 \cdot 1) + i\,(0 + 0) = -1$

6.1.5 Weitere Begriffe — D'autres notions

Sei • *Soit* $z = a + i\,b \in \mathbb{C},\ \ (a, b) \in \mathbb{R}^2$
(Vgl. geometrische Interpretation.
• *Voir interpretation géométrique.*)

$\mathbb{R}$ ist lückenlos und dicht. $\mathbb{C}$ lässt sich daher nicht auch noch auf die Zahlengerade „einpacken. Man muss in die Ebene ausweichen! $\rightsquigarrow$ **Gauss'sche, komplexe Zahlenebene**.
• $\mathbb{R}$ *n'a pas de lacunes et est dense. On n'arrive pas non plus à arranger* $\mathbb{C}$ *sur la droite de nombres. On doit s'effacer dans le plan.* $\rightsquigarrow$ **Plan de Gauss, complexe**.



Definition: • **Définition:**

$a := Re(z)$
heisst **Realanteil** von z • *s'appelle* **partie réelle** *de* z.

$b := Im(z)$
heisst **Imaginäranteil** von z • *s'appelle* **partie imaginaire** *de* z.

$\bar{z} := a - i\,b := a + i\,(-b)$
heisst **konjugiert komplexe** Zahl zu z. • *s'appelle nombre* **conjugé** *par rapport à* z.

$|z| = +\sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$
heisst **Betrag** von z. • *s'appelle* **valeur absolue** *de* z.

Konsequenz: • **Conséquence:** $|z| = |\bar{z}|,\ \ |z| = |\bar{z}| \in \mathbb{R}_0^+$

6.2 Eigenschaften — Qualités

6.2.1 Ordnung — Ordre

Problem: • **Problème:**

Lässt sich $\mathbb{C}$ so wie $\mathbb{R}$ ordnen? • *Est-ce qu'on peut arranger* $\mathbb{C}$ *tel que* $\mathbb{R}$*?*

Untersuchungen zeigen, dass man sehr einfach in $\mathbb{C}$ eine strenge Ordnungsrelation definieren kann. Jedoch ist bis jetzt keine totale Ordnung bekannt, die elementargeometrisch Sinn macht. Der Preis für die Erweiterung von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{C}$ ist also der Verzicht auf eine geometrisch sinnvolle Ordnung.
• *Si l'on traite ce problème, on voit tout de suite qu'il est possible de définir dans* $\mathbb{C}$ *une relation d'ordre stricte. Mais jusqu'à maintenant on ne connaît pas de telle relation d'ordre totale qui donne un sens*

géométrique élémentaire. Alors le prix de l'élargissement de $\mathbb{R}$ *à* $\mathbb{C}$ *est le renoncement à une relation d'ordre raisonnable.*

Bsp.: • **Exemple:**

(Definition einer Ordnungsrelation in $\mathbb{C}$: • *Définition d'une relation d'ordre dans* $\mathbb{C}$*:*)

Sei • *Soit*

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} (\dfrac{1}{1-x}) - 1 & x \in [0,1) \\ -x+1 & x \in [1,\infty) \end{cases}$$

f bildet $\mathbb{R}_0^+$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ ab. $\rightsquigarrow$ $h = f^{-1}$ bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}_0^+$ ab.
• *f applique $\mathbb{R}_0^+$ sur $\mathbb{R}$ de façon bijective.* $\rightsquigarrow$ *$h = f^{-1}$ applique $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_0^+$ de façon bijective.*

$\rightsquigarrow$ Mit h können wir daher $\mathbb{C}$ auf die obere komplexe Halbebene ($Im(z) \geq 0$) abbilden. • *A l'aide de h nous pouvons donc appliquer $\mathbb{C}$ sur le demi–plan complexe en haut (($Im(z) \geq 0$))*

$\rightsquigarrow$ Seien somit: • *Soient donc:* $z_1 = a_1 + i\,b_1$, $z_2 = a_2 + i\,b_2$, $a_k \in \mathbb{R}$, $b_k \in \mathbb{R}_0^+$. $\rightsquigarrow$ $Im(z) \geq 0$

Z. B. sei: • *P. ex soit:*
$a_1 = v_r v_{r_1} \ldots v_3 v_2 v_1, n_1 n_2 n_3 n_4 \ldots$ mit • *avec* $v_j, n_k \in \{0,1,2,\ldots,8,9\}$ (Ziffern • *chiffres*).
Entsprechend: • *Correspondant:* $b_1 = w_s w_{s-1} \ldots w_3 w_2 w_1, m_1 m_2 m_3 m_4 \ldots$.

(Falls $r < s$ fügen wir bei a_1 vorne einfach Ziffern 0 an, bis $r = s$ erreicht ist.
• *Si $r < s$ nous ajoutons devant a_1 des chiffres 0 jusqu'à réaliser $r = s$.*)

Mit z_1 lässt sich nun eine neue Zahl $z_1^* \in \mathbb{R}$ bilden mit der folgenden Ziffernfolge:
• *Avec z_1 on peut construire un nouveau nombre $z_1^* \in \mathbb{R}$ avec la suite de chiffres suivante:*

$$z_1^* = v_r w_r v_{r_1} w_{r_1} \ldots v_3 w_3 v_2 w_2 v_1 w_1, n_1 m_1 n_2 m_2 n_3 m_3 n_4 m_4 \ldots.$$

Nach Konstruktion haben wir eine **bijektive** Zuordnung $z_1 \longmapsto z_1^*$
• *D'après la construction nous avons une application* **bijective** $z_1 \longmapsto z_1^*$
— und auch • *et aussi* $z_2 \longmapsto z_2^*$, z_1^*, $z_2^* \in \mathbb{R}$.

Wegen der Bijektivität der Zuordnungen kann man nun die Ordnung in $\mathbb{C}$ wie folgt definieren:
• *A cause de la bijectivité on peut maintenant définir l'ordre dans* $\mathbb{C}$ *comme il suit:*

$$z_1, z_2 \in \mathbb{C}: \; z_1 < z_2 \;\Leftrightarrow\; z_1^* < z_2^*, \;\; z_1^*, z_2^* \in \mathbb{R}$$

Wegen der Bijektivität der Zuordnung können wir für die Mächtigkeit von $\mathbb{C}$ folgern:
• *A cause de la bijectivité de l'application, on peut tirer la conclusion pour la puissance de* $\mathbb{C}$*:*

Satz: • **Théorème:** $|\mathbb{C}| = |\mathbb{R}|$

6.2.2 Rechenreglen — Règles de calcul

Die folgenden Regeln in $(\mathbb{C},+)$ kann man wegen der Identifikation $z\hat{=}\vec{z}$ meist einfach geometrisch einsehen. Diejenigen in $(\mathbb{C},\cdot)$ findet man durch Rechnung mit den Koeffizienten.
• *On peut très facilement vérifier les règles suivantes dans* $(\mathbb{C},+)$ *à l'aide de l'identification* $z\hat{=}\vec{z}$. *Celles dans* $(\mathbb{C},\cdot)$ *on les vérifie à l'aide d'un calcul avec les coefficients.*

Eigenschaften:
• **Qualités:**

1 $\forall_{z\in\mathbb{C},\lambda\in\mathbb{R}}:\ \lambda\, z = (\lambda\, a) + i\,(\lambda\, b)$

2 $\forall_{z\in\mathbb{C}}:\ z+\bar{z} = 2\,Re(z)$

3 $\forall_{z\in\mathbb{C}}:\ z\cdot\bar{z} = |z|^2$

4 $\forall_{z\in\dot{\mathbb{C}}}:\ z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

5 $\forall_{z\in\mathbb{I},\ (z=i\,b)}:\ z^2 = (i\,b)^2 = -b^2 \in \mathbb{R}_0^-$ oder • *ou* :

6 $\forall_{b\in\mathbb{R}^+}$: $i\,b$ ist Lösung der Gleichung $x^2 = -b^2$
• $\forall_{b\in\mathbb{R}^+}$: $i\,b$ *est solution de l'équation* $x^2 = -b^2$

7 **Konsequenz:** • **Conséquence:** $b = 1 \rightsquigarrow$
$i^2 = -1 \ \Leftrightarrow\ \pm\sqrt{-1} = \pm i$ ist Lösung der Gleichung $x^2 = -1$
• $i^2 = -1 \ \Leftrightarrow\ \pm\sqrt{-1} = \pm i$ *est solution de l'équation* $x^2 = -1$

Achtung: • **Attention:** Jetzt können wir Quadratwurzeln aus negativen reellen Zahlen ziehen. Das Problem beliebiger Wurzeln aus komplexen Zahlen ist damit aber noch nicht gelöst!
• *Maintenant nous pouvons tirer des racines carées de nombres réels négatifs. Mais nous n'avons pas encore résolu le problème des racines quelconques de nombres complexes.*

8 $\forall_{z_1,z_2\in\mathbb{C}}:\ \overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1 + z_2}$

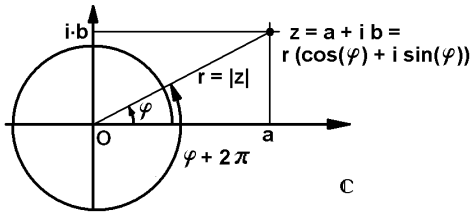
9 $\forall_{z_1,z_2\in\mathbb{C}}:\ \overline{z_1}\cdot\overline{z_2} = \overline{z_1\cdot z_2}$

10 $\forall_{z\in\mathbb{C}}:\ \overline{(\bar{z})} = z$

11 **Symbol:** • **Symbole:** $\rightsquigarrow$ Z.B. • *P.ex.*
$(a)+(i\,b)$ ('+' in • *dans* $\mathbb{C}$) $= a + i\cdot b$ ('·' in • *dans* $\mathbb{C}$) $= (a+i\,0)+(0+i\,1)\cdot(b+i\,0)$ ('+' Symbol in • *symbole dans* $(a+i\,b) = (a+i\,0)+(0+i\,b)$, Addition zweier Zahlen in $\mathbb{C}$ • *addition de deux nombres dans* $\mathbb{C}$) $= (a+i\,b)$ (Symbol für eine komplexe Zahl • *Symbole pour un nombre complexe*)
$\rightsquigarrow$ Anfängliches Symbol '+' und 'Addition +' in $\mathbb{C}$ nicht mehr unterscheidbar. • *On ne peut plus distinguer le symbole initial '+' et 'addition +' dans* $\mathbb{C}$.

6.2.3 Geometrische Interpretation der Multiplikation — Interprétation géométrique de la multiplication

Begriffe: • **Notions:**



$r := |z| \rightsquigarrow$
Betrag von z • **Valeur absolue** *de* z.

$\varphi := Arg(z) \rightsquigarrow$
Argument von z • **Argument** *de* z.

$\rightsquigarrow$ **Polarkoordinatendarstellung** • **Représentation en coordonnés polaires:**
$z = r(\cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi)) = r(\cos(\varphi + 2n\pi) + i\,\sin(\varphi + 2n\pi)),\ \ n \in \mathbb{Z}$
$\rightsquigarrow$ Darstellung nicht eindeutig! • *Représentation non univoque!*

Problem: • **Problème:** $z_1 + z_2 \hat{=} \vec{z}_1 + \vec{z}_2$
$\rightsquigarrow$ Die Addition lässt sich mit Hilfe der Parallelogrammaddition von Vektoren geometrisch deuten.
• *On peut interpréter l'addition de façon géométrique à l'aide de l'addition dans le parallélogramme des vecteurs.*

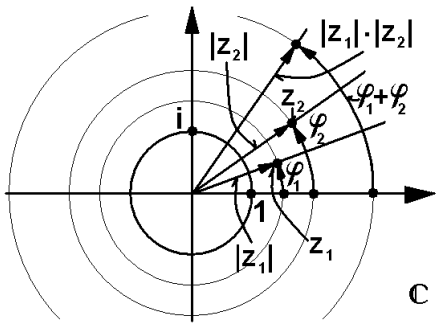
Was ist dagegen die geometrische Bedeutung der Multiplikation?
• Par contre, qu'est la signification géométrique de la multiplication?

Sei • *Soit* $z = z_1 \cdot z_2 \rightsquigarrow$

1 $|z|^2 = |z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 \cdot z_2) \cdot (\overline{z_1 \cdot z_2}) = (z_1 \cdot z_2) \cdot (\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}) = (z_1 \cdot z_2) \cdot \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
$= (z_1 \cdot \overline{z_1}) \cdot (z_2 \cdot \overline{z_2}) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \ \Rightarrow\ |z| = |z_1| \cdot |z_2|$

2 $z = z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos(\varphi_1) + i\,\sin(\varphi_1)) \cdot r_2(\cos(\varphi_2) + i\,\sin(\varphi_2)) =$
$r_1 \cdot r_2 \cdot ((\cos(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2)) + i\,((\cos(\varphi_1) \cdot \sin(\varphi_2) + \sin(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_2))))$
$= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\,\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \rightsquigarrow$

Satz: • **Théorème:**



Vor.: • **Hyp.:** $z = z_1 \cdot z_2$

Beh.: • **Thè.:**

1 $|z| = |z_1| \cdot |z_2|$

2 $Arg(z) = Arg(z_1 \cdot z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2)$

Konsequenz: • **Conséquence:** Bei der Multiplikation komplexer Zahlen werden die Beträge multipliziert und die Winkel addiert! Die Multiplikation führt also zu einer **Drehstreckung**!
• *Pour la multiplication des nombres complexes on doit multiplier les valeurs absolues et additionner les angles! La multiplication mène alors à une* **rotation avec allongement***!*

6.2.4 Exponentialschreibweise — Notation exponentielle

Später wird sich im Zusammenhang mit Differentialgleichungen die folgende, vorläufig symbolische Schreibweise rechtfertigen lassen. • *Plus bas dans le contexte des équations différentielles, on expliquera la façon d'écrire suivante que nous allons utiliser maintenant dans un sens symbolique.*
(Eine vorläufige Begründung kann man mit Hilfe Potenzreihe e^x finden, wenn man $x = i\varphi$ setzt und

einfach einmal klassisch rechnet wie in $\mathbb{R}$. • *Pour le moment on peut trouver une explication en utilisant la série de puissances e^x, si l'on remplace $x = i\varphi$ en calculant comme de coutume dans $\mathbb{R}$.*

Definition: • **Définition:** $z = r(\cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi)) := r \cdot e^{i\varphi}$

Dabei ist: • *Ici on a utilisé:* $\varphi = Arg(z)$.

Wegen der Addition der Argumente (Winkel) bei der Multiplikation komplexer Zahlen findet man somit die Formeln: • *A cause de l'addition des arguments (angles) lors de la multiplication de nombres complexes, on trouve les formules:*

Satz: • **Théorème:**

1 $z = re^{i\varphi} = re^{i(\varphi+2n\pi)}$

2 $z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot e^{i\varphi_1}) \cdot (r_2 \cdot e^{i\varphi_2}) = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

Folgerung: • **Conclusion:**

1 Damit lässt sich das Assoziativgesetz der Multiplikation komplexer Zahlen einfach überprüfen: • *A l'aide de cette formule, on peut vérifier la loi associative de la multiplication des nombres complexes de manière simple:*
$((r_1 \cdot e^{i\varphi_1}) \cdot (r_2 \cdot e^{i\varphi_2})) \cdot (r_3 \cdot e^{i\varphi_3})$
$= (r_1 \cdot r_2) \cdot r_3 \cdot e^{i((\varphi_1+\varphi_2)+\varphi_3)}$
$= r_1 \cdot (r_2 \cdot r_3) \cdot e^{i(\varphi_1+(\varphi_2+\varphi_3))}$
$= (r_1 \cdot e^{i\varphi_1}) \cdot ((r_2 \cdot e^{i\varphi_2}) \cdot (r_3 \cdot e^{i\varphi_3}))$

2 Die folgende Formel wird in der Elektrotechnik oft gebraucht: • *Dans la technique électro, on utilise souvent la formule suivante:*

$$|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

wegen • *à cause de* $|z_1| = |\frac{z_2 \cdot z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = |z_2| \cdot |\frac{z_1}{z_2}|$

3 $Arg(\frac{z_1}{z_2}) = Arg(z_1) - Arg(z_2)$

4 $z^n = (r(\cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi)))^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\,\sin(n\varphi))$
$\Rightarrow\ (re^{i\varphi})^n = r^n \cdot e^{i(n\varphi)}$

Bemerkung: • **Remarque:**

$i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ l^5 = i,\ i^6 = -1,\ i^7 = -i,\ i^8 = 1,\ \ldots$

Benutze die Potenzreihenentwicklung (Analysis): • *Utiliser les séries de puissances (analyse):* $\rightsquigarrow$

$$\cos(\varphi) = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \frac{\varphi^8}{8!} - \frac{\varphi^{10}}{10!} + \ldots = 1 + \frac{(i\,\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\,\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\,\varphi)^6}{6!} + \frac{(i\,\varphi)^8}{8!} + \frac{(i\,\varphi)^{10}}{10!} + \ldots$$

$$i\,\sin(\varphi) = i\,\varphi - \frac{i\,\varphi^3}{3!} + \frac{i\,\varphi^5}{5!} - \frac{i\,\varphi^7}{7!} + \frac{i\,\varphi^9}{9!} - \ldots = i\,\varphi + \frac{(i\,\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\,\varphi)^5}{5!} + \frac{(i\,\varphi)^7}{7!} + \frac{(i\,\varphi)^9}{9!} + \ldots$$

$$\cos(\varphi)+i\,\sin(\varphi) = 1+i\,\varphi+\frac{(i\,\varphi)^2}{2!}+\frac{(i\,\varphi)^3}{3!}+\frac{(i\,\varphi)^4}{4!}+\frac{(i\,\varphi)^5}{5!}+\frac{(i\,\varphi)^6}{6!}+\frac{(i\,\varphi)^7}{7!}+\frac{(i\,\varphi)^8}{8!}+\frac{(i\,\varphi)^9}{9!}+\ldots = e^{i\,\varphi}$$

$$\Rightarrow\ \cos(\varphi)+i\,\sin(\varphi) = e^{i\,\varphi}$$

6.2.5 Wichtige Anwendung: Zeigerdiagramme — Application importante: Diagrammes de coordonnés

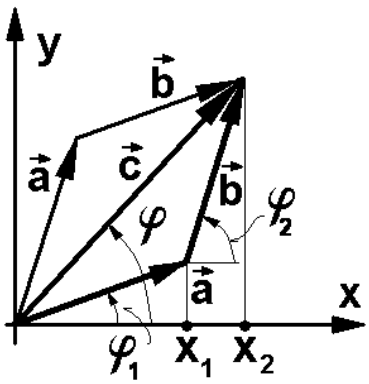
Zeigerdiagramme — Diagrammes de coordonnés

Bsp.: • **Exemple:** (Vgl. auch Seite 177) • *(Voir aussi page 177)*

Zwei Funktionen $a(t)$, $b(t)$ resp. eine Vektorfunktion $\binom{a(t)}{b(t)}$ kann man mit Hilfe der bijektiven Abbildung $\vec{z}\longmapsto z$, $,z\in\mathbb{C}$ statt in einem klassischen kartesischen Koordinatensystem ebenso gut in $\mathbb{C}$ darstellen. Z.B. statt $\{\binom{r\cos(\varphi+t)}{r\sin(\varphi+t)}\}$ erhält man dann den **'Zeiger'** $\{re^{i(\varphi+t)}\}$ (hier ein Kreis).
• *Au lieu de représenter classiquement dans un système cartésien deux fonctions $a(t)$, $b(t)$ resp. une fonction vectorielle $\binom{a(t)}{b(t)}$, on peut aussi les représenter à l'aide de l'application bijective $\vec{z}\longmapsto z$, $,z\in\mathbb{C}$ dans le plan complexe. P.ex. au lieu de $\{\binom{r\cos(\varphi+t)}{r\sin(\varphi+t)}\}$, on obtient alors* **'le coordonné'** $\{re^{i(\varphi+t)}\}$ *(ici un cercle).*

Addition von Schwingungen — Addition d'oscillations

Bsp.: • **Exemple:**



Sei • *Soit*
$\varphi_1 = \omega\,t+\alpha_1$,
$\varphi_2 = \omega\,t+\alpha_2$,
$\varphi = \ \omega\,t+\alpha$,
$x_1 = A\,\cos(\varphi_1)$,
$x_2 = C\,\cos(\varphi)$,
$x_1 - x_1 = B\,\cos(\varphi_2)$,
$|\vec{a}| = A$,
$|\vec{b}| = B$,
$|\vec{c}| = C$,
$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$
$\Rightarrow\ x_1+(x_2-x_1)=x_2$
$\Rightarrow\ A\,\cos(\varphi_1)+B\,\cos(\varphi_2)=C\,\cos(\varphi)$

Ebenso: • *De même:* $A\,\cos(\varphi_1)+B\,\cos(\varphi_2)=C\,\cos(\varphi)$

$$\rightsquigarrow\ \varphi=\arctan\left(\frac{C\,\sin(\varphi)}{C\,\cos(\varphi)}\right)=\arctan\left(\frac{A\,\sin(\varphi_1)+B\,\sin(\varphi_2)}{A\,\cos(\varphi_1)+B\,\cos(\varphi_2)}\right)$$

$$C=\sqrt{(A\,\cos(\varphi_1)+B\,\cos(\varphi_2))^2+(A\,\sin(\varphi_1)+B\,\sin(\varphi_2))^2}$$

$$=\sqrt{A^2+B^2+2\,A\,B\,(\cos(\varphi_1)\cdot\cos(\varphi_2)+\sin(\varphi_1)\cdot\sin(\varphi_2))}=\sqrt{A^2+B^2+2\,A\,B\,\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

Konsequenz: • **Conséquence:**

$$\varphi_1 = \omega\, t + \alpha_1,$$
$$\varphi_2 = \omega\, t + \alpha_2,$$
$$\varphi = \omega\, t + \alpha$$

$$1\ \ C\cos(\varphi) = A\cos(\varphi_1) + B\cos(\varphi_2)$$

$$2\ \ \varphi = \arctan\left(\frac{A\sin(\varphi_1) + B\sin(\varphi_2)}{A\cos(\varphi_1) + B\cos(\varphi_2)}\right)$$

$$3\ \ C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2\,A\,B\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

6.3 Wurzeln aus komplexen Zahlen, Einheitswurzeln — Racines de nombres complexes, racines d'unités

6.3.1 Das Problem mit Wurzeln — Le problème avec des racines

Sei • *Soit* $w \neq 0$ mit • *avec* $w^k = z$. Z.B. • *P.ex.* $(r \cdot e^{i\varphi})^k = r^k \cdot e^{i(k\varphi)}) := R \cdot e^{i\Phi}$
$\Rightarrow\ r = r^n,\ \ \Phi = k\varphi$ oder • *ou* $r = R^{\frac{1}{k}},\ \ \varphi = \dfrac{\Phi}{k}$

Andererseits gilt auch: • *D'autre part on sait:* $e^{i\Phi} = e^{i(\Phi + 2n\pi)}\ \Rightarrow\ \varphi = \dfrac{\Phi + 2n\pi}{k}$.

k ist aber beliebig, d.h. $\varphi = \varphi(k)$ ist **nicht eindeutig**!
• *Mais k est quelconque, ç.v.d.* $\varphi = \varphi(k)$ **n'est pas univoque***!*

Satz: • **Théorème:**

Vor.: • **Hyp.:**

$$w = z^k = (r \cdot e^{i(\Phi + 2n\pi)})^k = |z|^k \cdot e^{i(k\varphi)} := |w| \cdot e^{i\Phi} = |w| \cdot e^{i\Phi + 2n\pi},\ \ n \in \mathbb{Z}$$

Beh.: • **Thè.:**

$$|z| = |w|^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{|w|}\ \wedge\ \varphi = \varphi_n = \frac{\Phi + 2n\pi}{k} \qquad \rightsquigarrow\ \ldots$$

Bemerkung: • **Remarque:**

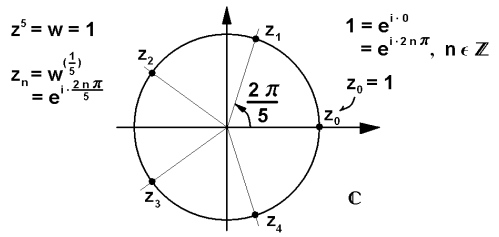
Die Gleichung $z^k = w$ (k, w gegeben) hat verschiedene Lösungen $z_n = |z_n| \cdot e^{i(\varphi_n)}$. $|z_n|$ ist eindeutig ($= |w|^{\frac{1}{k}}$), $e^{i(\varphi_n)}$ jedoch nicht. z_n und z_{n+1} unterscheiden sich nur durch
$\varphi_{n+1} - \varphi_n = \dfrac{\Phi + 2(n+1)\pi - (\Phi + 2n\pi)}{k} = \dfrac{2\pi}{k}$.
Für $k \in \mathbb{N}$ liegt die Lösung z_n daher auf einem **regelmässigen konzentrischen** k**–Eck**!
• *L'equation* $z^k = w$ *(k, w donnés) a différentes solutions* $z_n = |z_n| \cdot e^{i(\varphi_n)}$. $|z_n|$ *est univoque* ($= |w|^{\frac{1}{k}}$), *mais* $e^{i(\varphi_n)}$ *ne l'est pas. On trouve la différence de* z_n *et* z_{n+1} *par*
$\varphi_{n+1} - \varphi_n = \dfrac{\Phi + 2(n+1)\pi - (\Phi + 2n\pi)}{k} = \dfrac{2\pi}{k}$
Alors pour $k \in \mathbb{N}$ *la solution* z_n *se trouve sur une* **figure régulière et concentrique à** k **sommets.***!*

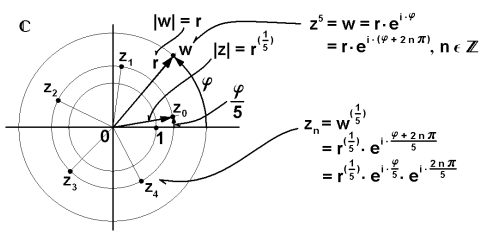
Folgerung: • **Conclusion:**

Für $k \in \mathbb{N}$ hat die Gleichung $z^k = w$ genau k verschiedene Lösungen.
• *Pour* $k \in \mathbb{N}$ *l'équation* $z^k = w$ *a exactement* k *solutions différentes.*

Definition: • **Définition:** Im Falle $w = 1$ heissen die Lösungen z_n von $z^k = 1$ k–**te Einheitswurzeln.**
• *Dans le cas de* $w = 1$ *les solutions* z_n *de* $z^k = 1$ *s'appellent* k–**ièmes racines de l'unité.**

Die k–ten Einheitswurzeln bilden ein regelmässiges konzentrisches k–Eck mit einer Ecke bei $z = 1$ und den andern Ecken $e^{i\frac{2n\pi}{k}}$.
• *Les* k*–ièmes racines de l'unité forment une figure régulière et concentrique à* k *sommets avec un sommet à* $z = 1$ *et les autres sommets à* $e^{i\frac{2n\pi}{k}}$.





Interessant ist nun die Frage, aus welchen k–ten Einheitswurzeln sich durch Potenzieren alle andern k–ten Einheitswurzeln erzeugen lassen. (Z.B. mit $z_2 = e^{i\frac{22\pi}{4}}$ lassen sich nur die 4–ten Einheitswurzeln z_0 und z_2 erzeugen.)
• *Maintenant la question suivante est intéressante: Avec quelles* k*–ièmes racines de l'unité peut–on générer toutes les autres* k*–ièmes racines de l'unité par puissances? (P.ex. avec* $z_2 = e^{i\frac{22\pi}{4}}$ *on ne peut créer que les* 4*–èmes racines de l'unité* z_0 *et* z_2*.)*

Definition: • **Définition:** $z_n = e^{i\frac{2n\pi}{k}}$ heisst k–**te primitive Einheitswurzel**
• $z_n = e^{i\frac{2n\pi}{k}}$ *s'appelle* k–**ième racine de l'unité primitive**
$\Leftrightarrow$ $z_n^m \neq 1$ für • *pour* $m \in \mathbb{N},\ 0 < m < k$.

Konsequenz: • **Conséquence:**
Mit den primitiven Einheitswurzeln lässt sich durch potenzieren das ganze k–Eck erzeugen.
• *A l'aide des racines de l'unité primitives on peut créer toute la figure régulière à* k *sommets par puissances.*

Folgerung: • **Conclusion:** $e^{i\frac{2\pi}{k}}$ ist für $k \in \mathbb{N}$ immer k–te primitive Einheitswurzel
• $e^{i\frac{2\pi}{k}}$ *est pour* $k \in \mathbb{N}$ *toujours* k*–ième racine de l'unité primitive.*

Satz: • **Théorème:**

1 **Vor.:** • **Hyp.:** $ggT'pgdc(k,j) = 1, \;\; k,j \in \mathbb{N}$

Beh.: • **Thè.:** $e^{i\frac{2j\pi}{k}}$ ist k–te primitive Einheitswurzel
• $e^{i\frac{2j\pi}{k}}$ *est k–ième racine de l'unité primitive*

2 **Vor.:** • **Hyp.:** $ggT'pgdc(k,m) = d, \;\; k,m,d \in \mathbb{N}, \;\; d > 1$

Beh.: • **Thè.:** $e^{i\frac{2m\pi}{k}}$ ist $\frac{k}{d}$–te primitive Einheitswurzel
• $e^{i\frac{2m\pi}{k}}$ *est $\frac{k}{d}$–ième racine de l'unité primitive*

3 Die k–ten Einheitswurzeln bilden bezüglich der Multiplikation eine abelsche Gruppe • *Les k–ièmes racines de l'unité forment un groupe commutatif par rapport à la multiplication.*

6.3.2 Ausblicke — Perspectives

1 Sei • *Soit* $z \in \mathbb{C}, \;\; n,m \in \mathbb{Z}, \;\; m \neq 0.$ $\rightsquigarrow$ $z^n, z^{\frac{n}{m}} = u^q$ sind definiert. • *...sont définis.*

$\rightsquigarrow$ Für $r \in \mathbb{R}$ könnte z^r wie folgt erklärt werden:
• *Pour $r \in \mathbb{R}$ on pourrait définir z^r de façon suivante:*

$$= \lim_{r_k \to r} z^{r_k}, \;\; r_k \in \mathbb{Q}$$

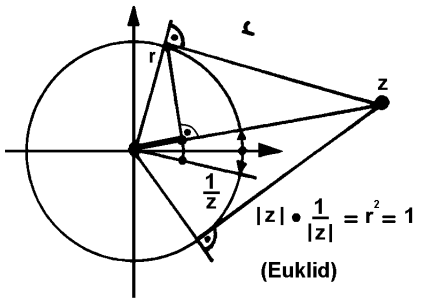
Problem: • **Problème:** Mehrdeutigkeit der Wurzeln (z.B. n verschiedene n–te Einheitswurzeln)!
• *Signification multiple des racines (p.ex. n n–ièmes racines de l'unité différentes.)*
Bsp.: • **Exemple:** $\frac{m_k}{n_k} \to \pi, \;\; \frac{m_k}{n_k} \in \mathbb{Q} \;\Rightarrow\; z^{\frac{m_k}{n_k}} = (z^{m_k})^{(\frac{1}{n_k})} \to z^\pi, \;\; n_k \to \infty$
$\Rightarrow\; z^{\frac{m_k}{n_k}} = z^\pi = \sqrt[\infty]{z^{m_k}} \rightsquigarrow \;\; n_k \to \infty$ $\rightsquigarrow$ verschiedene Wurzeln! • *racines différentes!*

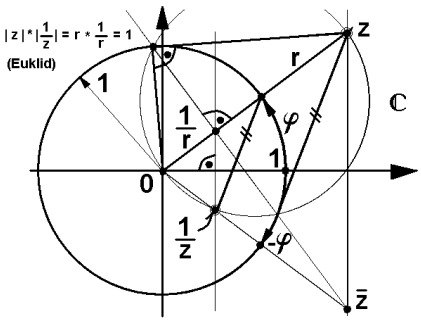
2 **Problem:** • **Problème:** Was sind Potenzen mit komplexen Exponenten?
• *Comment définir des puissances avec des exposants complexes?* Z.B. • *P.ex.* $z_1^{z_2}, \;\; z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
$\rightsquigarrow$ Definition im Zusammenhang mit komplexen Funktionen • *Définition dans le cadre des fonctions complexes.*

3 Im Zusammenhang mit komplexen Funktionen kann auch das Problem der winkeltreuen (**konformen**) Abbildungen studiert werden. • *Dans le cadre des fonctions complexes on peut étudier aussi le problème des fonctions qui conservent l'angle entre deux courbes (***conformes***).*

4 Mit Hilfe der komplexen Funktionen gelingt es gewisse Integrale zu berechnen, die reell nicht berechet werden können. • *A l'aide des fonctions complexes on arrive à calculer certaines intégrales qu'on ne peut pas calculer réellement.*

5





Inversion am Einheitskreis: • Inversion au cercle unité

Sei • *Soit* $z = r \cdot r^{i\varphi} \rightsquigarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{r} \cdot r^{-i\varphi} = \frac{1}{r} \cdot r^{i(-\varphi)}$.

Aus dem gezeichneten $\triangle$ liest man ab: • *Du* $\triangle$ *dessiné on voit:* $r : 1 = 1 : x \;\Rightarrow\; r = \frac{1}{x},\;\; x = \frac{1}{r}$.

Damit ist die Position von $\frac{1}{z}$ konstruierbar. • *Ainsi la position de* $\frac{1}{z}$ *peut être construite.*

6 **Geraden und Kreise bei der Inversion am Einheitskreis: • Les droites et les cercles quant à l'inversion au cercle unité**

$$z = r\,e^{i\,\varphi} \;\Rightarrow\; w = f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}\,e^{-i\,\varphi},\;\; \bar{z} = r\,e^{-i\,\varphi},\;\; f(\bar{z}) = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{r}\,e^{+i\,\varphi} = \bar{w}$$

Sei • *Soit* $M = \{\text{Kreise, Geraden}\} = \{$ • *Cercles, droites*$\}$

Satz: • Théorème: $\rightsquigarrow\; M \longmapsto f(M) = M$

<u>Beweis: • Preuve:</u>

Sei • *Soit* $K \in M \;\Rightarrow\; K = \{(x,y) \mid A\,(x^2+y^2) + B\,x + C\,y + D = 0,\;\; A,B,C,D \in \mathbb{R}\}$

$A = 0 \rightsquigarrow$ Gerade! • $A = 0 \rightsquigarrow$ *Droite!*

Es gilt: • *Il vaut:* $x^2 + y^2 = |z|^2 = z \cdot \bar{z},\;\; x = \dfrac{z+\bar{z}}{2},\;\; y = \dfrac{z-\bar{z}}{2\,i}$

$$\rightsquigarrow\; 0 = A\,(x^2+y^2) + B\,x + C\,y + D = A\,z\,\bar{z} + B\,\frac{z+\bar{z}}{2} + C\,\frac{z-\bar{z}}{2\,i} + D \qquad |\cdot \frac{1}{z\,\bar{z}}$$
$$\Rightarrow\; 0 = A + B\,\frac{1}{2}(\frac{1}{\bar{z}} + \frac{1}{z}) + C\,\frac{1}{2\,i}(\frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{z}) + D\,\frac{1}{z}\,\frac{1}{\bar{z}} = A + B\,\frac{w+\bar{w}}{2} + C\,\frac{-w+\bar{w}}{2\,i} + D\,w\,\bar{w} \rightsquigarrow\; f(K) \in M.$$

A und D vertauschen die Rollen. Daher können aus Geraden Kreise entstehen und umgekehrt.
• *A et D changent leurs rôles. Par conséquent des cercles peuvent avoir comme images des droites et vice versa.*

7 **Das Problem der Erweiterung von $\mathbb{C}$: • Le problème de l'extension de $\mathbb{C}$:**

$\mathbb{C}$ ist nicht die Endstation der Konstruktion sinnvoller Zahlen. Die nächste Erweiterung führt ins Vierdimensionale: Der Schiefkörper der **Hamiltonschen Quaternionen** (1843).
• $\mathbb{C}$ *n'est pas le point final de la construction des nombres qui donnent un sens. La prochaine extention mène dans un expace à quatre dimensions: Le* **corps non commutatif des quaternions de Hamilton** *(1843).*

$z = x_1 + i\,x_2 + j\,x_3 + k\,x_4,\ \ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ mit • *avec* $i^2 := -1,\ \ j^2 := -1,$
$k^2 := -1,\ \ i \cdot j := k,\ \ j \cdot i := -k,\ \ j \cdot k := i,\ \ k \cdot j := -i,\ \ k \cdot i := j,\ \ i \cdot k := -j$

Preis für die Erweiterung: Kommutativgesetz der Multiplikation.
• *Prix pour l'extension: Loi commutative de la multiplication.*

Bemerkung: • Remarque: Eine 3–dimensionale Erweiterung von $\mathbb{C}$ ist nicht möglich.
• *Une extension de* $\mathbb{C}$ *à 3 dimensions n'est pas possible.*
Sonst hätte man Zahlen der Form $z = \lambda + i\mu + j\nu$. • *Si non on aurait des nombres de la forme* $z = \lambda + i\mu + j\nu$.

Bsp.: • Exemple: $z = \lambda + i\mu + j\nu = i \cdot j,\ \ \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R} \rightsquigarrow$ Wegen der für Zahlen zu fordernden Assoziativität, Distributivität und Kommutativität mit Skalaren müsste man rechnen können:
• *Comme on devrait exiger pour des nombres l'associativité, la distributivité et la commutativité avec les scalaires, on pourrait calculer:*

$\exists_{\lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R}} : i \cdot j = \lambda + i\mu + j\nu,\ \ i \cdot (i \cdot j) = (i \cdot i) \cdot j = -j\ \wedge\ -j = (i \cdot i) \cdot j = i \cdot (i \cdot j) = i \cdot (\lambda + i\mu + j\nu)$
$= i\lambda - \mu + ij\nu = i\lambda - \mu + (\lambda + i\mu + j\nu)\nu = -\mu + \nu\lambda + i(\lambda + \nu\mu) + j\nu^2$
$\Rightarrow\ -\mu + \nu\lambda = 0,\ \ (\lambda + \nu\mu) = 0,\ \ \nu^2 = -1\ \wedge\ \nu \in \mathbb{R}\ \Rightarrow$ Widerspruch! • *Contradiction!* ☹

$\rightsquigarrow$ Erweiterung so nicht möglich. • *Extension de cette manière n'est pas possible.*

8 **Algebren • Des algèbres:**

Definition: • Définition: Ein Vektorraum über einem Körper K
• *Un espace vectoriel sur un corps* K

$$((V, +),\ \ (K, +, \cdot),\ \ *) := \ (V^{(+)}, K^{(+,\cdot)}, *)$$

heisst **Algebra über** K • *s'appelle* **algèbre sur** K,

wenn in V neben $''+''$ noch eine zweite Verknüpfung $''*''$ definiert ist mit:
• *si dans* V *on définit à côté de* $''+''$ *une deuxième opération* $''*''$ *avec:*

$''*'' :\ V \times V\ \longmapsto\ V,\ \ (\vec{a}, \vec{b})\ \longmapsto\ \vec{c} = \vec{a} * \vec{b}$ mit • *avec*

(a) Distr. 1: $\vec{a} * (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} * \vec{b}) + (\vec{a} * \vec{c})$

(b) Distr. 2: $(\vec{a} + \vec{b}) * \vec{c} = (\vec{a} * \vec{c}) + (\vec{b} * \vec{c})$

(c) Ass.Sc $(\lambda\,\vec{a}) * (\mu\,\vec{b}) = \lambda\,\mu\,(\vec{a} * \vec{b})$

Beispiele: • **Exemples:**
$(\mathbb{C}^{(+)}, \mathbb{C}^{(+,\cdot)}, \cdot)$, $(\mathbb{R}^{(+)}, \mathbb{R}^{(+,\cdot)}, \cdot)$, $(\mathbb{Q}^{(+)}, \mathbb{Q}^{(+,\cdot)}, \cdot)$
$((\mathbb{R}^3)^{(+)}, \mathbb{R}^{(+,\cdot)}, \times)$ ($\times$: Vektorprodukt • *produit vectoriel*),
$((\mathbb{R}^4)^{(+)}, \mathbb{R}^{(+,\cdot)}, *)$ ($*$: Quaternionenmultiplikation • *Multiplication des quaternions*).

6.4 Zum Hauptsatz der Algebra — Quant au théorème principal de l'algèbre

6.4.1 Der Satz — Le Théorème

Geg.: • **Donné:** $P_n(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z^1 + a_0 z^0 = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$

$\rightsquigarrow$ Polynom vom Grade n • *polynôme du degré* n, Koeffizienten • *coefficients* $c_i \in \mathbb{C}$.

Sei • *Soit* $c \in \mathbb{C}$,
$Q_{n-1}(z) \rightsquigarrow$ Polynom vom Grade $n-1$ mit: • *polynôme du degré* $n-1$ *avec:*

$$\frac{P_n(z)}{z-c} = Q_{n-1}(z) + \frac{R}{z-c}$$

(Dividiere • *Diviser* $\dfrac{P_n(z)}{z-c} \rightsquigarrow$ Rest • *reste* $:= R$, $pgrad\,(R) < pgrad\,(z-c) = 1$)

Bsp.: • **Exemple:** $\dfrac{2\,z^4 - 19\,z^3 + 59\,z^2 - 54\,z - 16}{z-3} = 2\,z^3 - 13\,z^2 + 20\,z + 6 + \dfrac{2}{z-r}, \quad R = 2$

Sei • *Soit* $c_1 =$ Nullstelle von • *zéro de* $P_n(z)$ (Kurz: • *Bref:* $c_1 = NS'Z(P_n(z))$.)
Es ist: • *On trouve:*
$P_n(z) = (z-c_1)Q_{n-1}(z) + R, \;\; 0 = P_n(c_1) = (c_1 - c_1)Q_{n-1}(z) + R = 0 \cdot Q_{n-1}(z) + R = R$
$\Rightarrow \; R = 0 \; \Rightarrow \; P_n(z) = (z-c_1)Q_{n-1}(z)$.

Lemma: • **Lemme:** <u>**Vor.:** • **Hyp.:**</u> $c = NS'Z(P_n(z))$, d. h. • *ç. v. d.* $P_n(c_1) = 0$

<u>**Beh.:** • **Thè.:**</u>
$(z-c_1)|P_n(z)$, d. h. • *ç. v. d.* $\exists_{Q_{n-1}(z)}: \; \dfrac{P_n(z)}{z-c_1} = Q_{n-1}(z)$
oder • *ou* $P_n(z) = Q_{n-1}(z) \cdot (z-c_1)$

Das Lemma kann man natürlich jetzt auch auf $Q_{n-1}(z)$ anwenden.
• *Naturellement on peut appliquer le lemme aussi pour* $Q_{n-1}(z)$.

$\rightsquigarrow$ Sei • *Soit* c_2 *NS'Z* von • *de* $Q_{n-1}(z)$:
$Q_{n-1}(c_2) = 0 \; \Rightarrow \; Q_{n-1}(z) = Q_{n-2}(z) \cdot (z-c_2), \;\; P_n(z) = Q_{n-2}(z) \cdot (z-c_1) \cdot (z-c_2)$ u.s.w. • *etc.*,
$P_n(z) = Q_{n-k}(z) \cdot (z-c_1) \cdot (z-c_2) \cdot \ldots \cdot (z-c_k)$.
Dabei hat $Q_{n-k}(z)$ den Grad $n-k$. • $Q_{n-k}(z)$ *a le degré* $n-k$.

Es gilt: • *On constate:* $Q_{n-k}(z) = Q_0(z) = const.$
$\rightsquigarrow$ $P_n(z)$ kann in maximal n lineare Faktoren $(z-c_k)$ zerlegt werden.
• *On peut factoriser* $P_n(z)$ *en* n *facteurs au maximum.*

$P_n(z)$ kann somit maximal n Nullstellen haben. • *Alors $P_n(z)$ peut avoir au maximum n zéros.*

Lemma: • **Lemme:** **Vor.:** • **Hyp.:** $pgrad\,(P_n(z)) = n$

Beh.: • **Thè.:**

$P_n(z)$ hat maximal n Nullstellen • *$P_n(z)$a au maximum n zéros.*

Weniger einfach zu begründen ist das folgende Lemma (Gauss):
• *On a plus de difficultés de justifier de lemme suivant:*

Lemma: • **Lemme:** **Vor.:** • **Hyp.:** $pgrad\,(P_n(z)) = n$

Beh.: • **Thè.:** $P_n(z)$ hat **mindestens** n Nullstellen
• *$P_n(z)$ a* **au moins** *n zéros.*

Man müsste z.B. zeigen können, dass $P_n : \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$ surjektiv ist
• *On devrait montrer que $P_n : \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$ est surjectif.*

$$\Rightarrow \exists_{z_0} : P_n : z_0 \longmapsto 0 \text{ oder } \bullet \text{ ou } P_n(z_0) = 0.$$

Sei • *Soit $P_n(z) = z \cdot P_{n-1}(z) + a_0$.*

Zeigen: ($P_{n-1}(z)$ surjektiv $\Rightarrow$ $P_{n-1}(z) \cdot z$ ist auch surjektiv.)
• *Montrer: ($P_{n-1}(z)$ est surjectif $\Rightarrow$ $P_{n-1}(z) \cdot z$ est aussi surjectif.)*

Es gilt: Mit $P_{n-1}(z) \cdot z$ ist auch $P_{n-1}(z) \cdot z + a_0$ surjektiv.
• *Il vaut: Avec $P_{n-1}(z) \cdot z$, $P_{n-1}(z) \cdot z + a_0$ est aussi surjectif.*

Konsequenz: • **Conséquence:**
Fundamentalsatz der Algebra: Jedes Polynom vom Grade n hat über $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen, die mehrfach sein können.
• **Théorème fondamental de l'algèbre:** *Chaque polynôme du degré n possède dans $\mathbb{C}$ exactement n zéros – qui peuvent être multiples.*

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$pgrad\,(P_n(z)) = n$

Beh.: • **Thè.:**

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = Q_{n-1}(z) \cdot (z - c_1)$$
$$= Q_{n-2}(z) \cdot (z - c_1) \cdot (z - c_2) = \ldots = a_n (z - c_1) \cdot (z - c_2) \cdot \ldots \cdot (z - c_n)$$

Konsequenz: • **Conséquence:**
$P_n(z)$ ist also ein Produkt von Linearfaktoren der Form $(z - c_k)$, $c_k =$ *NS'Z.*
• *est donc un produit de facteurs linéaires de la forme $(z - c_k)$, $c_k =$ NS'Z.*

Konsequenz: • Conséquence:

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = \overbrace{a_n(z-c_1)\cdot(z-c_2)\cdot\ldots\cdot(z-c_n)}^{\text{(ausmultiplizieren • } \textit{multiplier}\text{)}} =$$
$$a_n[z^n - (z_1+z_2+\ldots+z_n)z^{n-1} + (z_1z_2+z_1z_3+\ldots+z_{n-1}z_n)z^{n-2} + \ldots + (-1)^n z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n]$$

$\rightsquigarrow$ **Verallgemeinerung von Vieta • Vieta généralisé:**

$$-(z_1+z_2+\ldots+z_n) = \frac{a_{n-1}}{a_n},\ \ (z_1z_2+z_1z_3+\ldots+z_{n-1}z_n) = \frac{a_{n-2}}{a_n},\ldots,\ \ (-1)^n z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n = \frac{a_0}{a_n}$$

Problem: • Problème: Der Hauptsatz der Algebra liefert kein Verfahren zur Berechnung der Nullstellen. • *Le théorème fondamental de l'algèbre ne livre pas de méthode pour calculer les zéros.*

Ein Resultat aus dem 19. Jahrhundert: Auf der Basis der *Galois-Theorie* konnte gezeigt werden, dass es für $n > 4$ kein allgemeines endliches algebraisches Verfahren zur Berechnung der Nullstellen von Polynomen mit Hilfe von Radikalen (Wurzelausdrücken) geben kann.
• *Un Resultat du 19–ième siècle: Sur la base de la* théorie de Galois *on était capable de démontrer que pour $n > 4$ il n'y a point de méthode générale algébrique pour calculer les zéros d'un polynôme à l'aide de radicaux (expressions qui contiennent des racines).*

6.4.2 Anwendungen — Applications

Reelle und konjugiert komplexe Koeffizienten — Coefficients réels et conjugués

Sei • *Soit* $\quad P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0,\ \ a_k \in \mathbb{R}\ (\forall_k)$

Verwende: • *Utiliser:* $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2},\ \ \overline{z_1\cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2},\ \ a_k = \overline{a_k}$ (in • *dans* $\mathbb{R}$!)

Sei • *Soit* $P_n(c) = 0$

$$\Rightarrow\ P_n(\bar{c}) = a_n(\bar{c})^n + a_{n-1}(\bar{c})^{n-1} + \ldots + a_1(\bar{c}) + a_0$$
$$= (\overline{a_n})\,(\overline{c^n}) + (\overline{a_{n-1}})\,(\overline{c^{n-1}}) + \ldots + (\overline{a_1})\,(\overline{c}) + (\overline{a_0})$$
$$= \overline{(a_n)\,(c^n)} + \overline{(a_{n-1})\,(c^{n-1})} + \ldots + \overline{(a_1)\,(c)} + \overline{(a_0)} = \overline{(a_n(c^n) + a_{n-1}(c^{n-1}) + \ldots + a_1 c + a_0)}$$
$$= \overline{(P_n(c))} = \overline{(0)} = 0 \qquad \rightsquigarrow$$

Satz: • Théorème: **<u>Vor.: • Hyp.:</u>**

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0,\ \ a_k \in \mathbb{R}\forall_k$$
$$P_n(c) = 0$$

<u>Beh.: • Thè.:</u>

$$P_n(\bar{c}) = 0$$

Konsequenz: • Conséquence:
Ein Polynom mit reellen Koeffizienten hat entweder reelle oder konjugiert komplexe Nullstellen!
• *Un polynôme aux coefficients réels a des zéros réels ou bien des paires complexes conjugués.*

Wir betrachten den Fall der konjugiert komplexen Nullstellen etwas genauer:
• *On va étudier le cas des zéros complexes conjugués de manière un peux plus exacte:*

Sei • *Soit* $P_n(c) = 0,\ c \notin \mathbb{R} \ \Rightarrow\ P_n(\bar{c}) = 0$
$\Rightarrow\ (z-c)(z-\bar{c}) = z^2 - z(c+\bar{c}) + c\cdot\bar{c} = z^2 - 2\,z\,Re(c) + |c|^2 = z^2 + \beta\,z + \gamma,$
$2\,Re(c) = \beta,\ \ |c|^2 = \gamma\ \wedge\ (z^2 + \beta\,z + \gamma)\,|\,P_n(z) \rightsquigarrow$

Satz: • **Théorème:**

Vor.: • **Hyp.:**

$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0,\ \ a_k \in \mathbb{R}\forall_k$

Beh.: • **Thè.:**

$P_n(z)$ ist komplett faktorisierbar
▷ in den konstanten Faktor • *peut être factorisé en facteur constant* a_n,
▷ in lineare Faktoren • *en facteurs linéaires* $(z - c_k)$
▷ und quadratische Faktoren • *et en facteurs quadratiques*
$(z^2 + \beta_j z + \gamma_j)$ mit • *avec* $c_k, \beta_j z, \gamma_j \in \mathbb{R}$

Merke: Ein reelles Polynom ist also sicher in quadratische Faktoren zerlegbar.
• **A retenir:** *On peut sûrement factoriser un polynôme réel en facteurs quadratiques.*

Partialbruchzerlegung — Décomposition d'une fraction rationnelle en fractions partielles

Bsp.: • **Exemple:**

Problem: • **Problème:**

(1) Gleichnamig machen in $\mathbb{R}$: • *Ecriere avec un seul dénominateur dans* $\mathbb{R}$*:*
$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6}{12} + \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{6+8+3}{12} = \frac{17}{12}$

$\rightsquigarrow$ **Problem:** • **Problème:**

(2) Umkehrung der Problemstellung: • *Problème inverse:*

$\frac{17}{12}$ wieder in Teilbrüche $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4})$ zerlegen:
• *Décomposer* $\frac{17}{12}$ *de nouveau en fractions partielles* $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4})$*:*

$12 = 2\cdot 2\cdot 3,$ Nenner: • *dénominateurs:* $\{2,\ 2\cdot 2 = 4;\ 3;\ 2\cdot 3 = 6\}$.

$$\rightsquigarrow \quad \frac{17}{12} = \frac{A}{2} + \frac{B}{3} + \frac{C}{4} + \frac{D}{6},\ \ A, B, C, D = ?$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{17}{12} = \frac{A\cdot 6}{12} + \frac{B\cdot 4}{12} + \frac{C\cdot 3}{12} + \frac{D\cdot 2}{12} = \frac{A\cdot 6 + B\cdot 4 + C\cdot 3 + D\cdot 2}{12}$$

$\Rightarrow\ 17 = A\cdot 6 + B\cdot 4 + C\cdot 3 + D\cdot 2,\ \ A, B, C, D \in \mathbb{Z}.$

Setzt z.B.: Soit p.ex.: $D = 0, C = 1$

$$\Rightarrow\ 17 = A\cdot 6 + B\cdot 4 + 1\cdot 3 + D\cdot 0,\ \ 14 - A\cdot 6 = B\cdot 4,\ \ B = \frac{7-3\cdot A}{2}$$

$\rightsquigarrow$ Lösungen • *Solutions* $B = \ldots, 11, 8, 5, 2, -1, -4, -7\ldots$ u.s.w • *etc.*.
$\rightsquigarrow$ $\{A = 1,\ B = 2,\ C = 1\}$ ist eine mögliche Lösung • *est une solution possible.*

Übertragung der Methode für Polynome: • **Transcription de la méthode pour des polynômes:**

Sei • *Soit* $\dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)} = S_{n-m}(z) + \dfrac{R_{m-1}(z)}{Q_m(z)},\ \ pgrad\,(R_{m-1}) < pgrad\,(Q_m(z)) = m$
(ausdividieren • *diviser*).

$Q_m(z)$ habe z.B. die folgende Zerlegung: • *peut être décomposé de la manière suivante:*
$Q_m(z) = a_n\cdot(z-c_1)\cdot(z-c_2)^2\cdot(z-c_3)\cdot\ldots\cdot(z-c_k)\cdot(z^2+\beta_1 z+\gamma_1)^2\cdot(z^2+\beta_2 z+\gamma_2)\cdot\ldots$
$\rightsquigarrow$ Zerlegung: • *Décomposition:*

$$\frac{R_{m-1}(z)}{Q_m(z)} = \frac{A_1}{z-c_1} + \underbrace{\frac{A_2}{z-c_1} + \frac{A_3}{(z-c_3)^2}}_{\frac{a_2 z+(-A_2c_2+A_3)}{(z-c_3)^2}} + \ldots + \underbrace{\frac{B_1 z+C_1}{z^2+\beta_1 z+\gamma_1} + \frac{B_2 z+C_2}{(z^2+\beta_1 z+\gamma_1)^2}}_{\frac{B_1 z^3+(C_1+\beta_1 B_1)z^2+(\beta_1 C_1+\gamma_1 B_1)z+(\gamma_1 C_1)}{(z^2+\beta_1 z+\gamma_1)^2}} + \frac{B_3 z+C_3}{z^2+\beta_2 z+\gamma_2} + \ldots$$

Die unbekannten Koeffizienten $A_1,\ldots,B_1,\ldots,C_1,\ldots$ kann man durch Koeffizientenvergleich finden oder mit der Methode des Einsetzens der Nullstellen nachdem man erst die Gleichung mit den entsprechenden Linearfaktoren multipliziert hat. • *On peut trouver les coefficients inconnus* $A_1,\ldots,B_1,\ldots,C_1,\ldots$ *par la méthode de comparaison des coefficients ou bien en remplaçant les inconnus par les zéros après avoir multiplié l'équation avec le facteur linéaire en question.*

Bsp.: • **Exemple:** (**Koeffizientenvergleich** • **Méthode de comparer les coefficients**)

Rechts gleichnamig machen, links und rechts müssen dann die Zählerpolynome übereinstimmen, d.h. gleiche Koeffizienten aufweisen. • *A droite mettre au même dénominateur, alors à gauche et à droite les polynômes aux numérateurs doivent être les mêmes, ç.v.d. avoir les mêmes coefficients.*

$$\tfrac{1}{z^2-1} = \tfrac{1}{(z-1)\,(z+1)} = \tfrac{A}{z+1} + \tfrac{B}{z-1}\ \Rightarrow\ \tfrac{1}{(z-1)\,(z+1)} = \tfrac{Az-A}{(z-1)\,(z+1)} + \tfrac{Bz+B}{(z-1)\,(z+1)} = \tfrac{(A+B)z+(-A+B)}{(z-1)\,(z+1)}$$
$$\Rightarrow\ A+B=0\ \wedge\ -A+B=1\ \Rightarrow\ B=\tfrac{1}{2},\ \ A=-\tfrac{1}{2},\ \ \tfrac{1}{z^2-1} = -\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{z+1} + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{z-1}.$$

Bsp.: • **Exemple:** (**Nullstellen einsetzen** • **Remplacer les variables par des zéros:**)

$$\tfrac{1}{z^2-1} = \tfrac{1}{(z-1)\,(z+1)} = \tfrac{A}{z+1} + \tfrac{B}{z-1}\ \mid\cdot(z-1)$$
$$\Rightarrow\ \tfrac{(z-1)}{(z-1)\,(z+1)} = \tfrac{A(z-1)}{z+1} + \tfrac{B(z-1)}{z-1}\ \mid\ \lim_{z\to 1}\ \Rightarrow\ \tfrac{1}{(1+1)} = \tfrac{A(1-1)}{1+1} + \tfrac{B}{1} = B\ \Rightarrow\ B = \tfrac{1}{2}$$
$$\tfrac{1}{z^2-1} = \tfrac{1}{(z-1)\,(z+1)} = \tfrac{A}{z+1} + \tfrac{B}{z-1}\ \mid\cdot(z+1)$$
$$\Rightarrow\ \tfrac{(z+1)}{(z-1)\,(z+1)} = \tfrac{A(z+1)}{z+1} + \tfrac{B(z+1)}{z-1}\ \mid\ \lim_{z\to -1}\ \Rightarrow\ \tfrac{1}{(-1-1)} = \tfrac{A}{1} + \tfrac{B(-1+1)}{-1-1} = B\ \Rightarrow\ A = \tfrac{1}{-2} = -\tfrac{1}{2}$$

Diese Methode funktioniert nicht mehr, wenn eine Nennernullstelle mehrfach vorkommt.
• *Cette méthode ne fonctionne plus si un zéro dans le dénominateur est multiple.*

6.4.3 Bemerkung zur kubischen Gleichung — Remarque concernant l'équation cubique

In der nachfolgenden Bestimmungsgleichung sollen die Nullstellen bestimmt werden:
• *Soit donné le problème de calculer les zéros dans l'équation qui suit:*

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,\ \ a \neq 0 \qquad | \cdot \tfrac{1}{a}$$
$$\rightsquigarrow \quad \tfrac{a}{a}x^3 + \tfrac{b}{a}x^2 + \tfrac{c}{a}x + \tfrac{d}{a} = x^3 + rx^2 + sx + t = 0,\ \ r = \tfrac{b}{a}, s = \tfrac{c}{a}, t = \tfrac{d}{a}$$

Definiere: • *Définir:* $y = x + \frac{r}{3},\ \ x = y - \frac{r}{3} \ \Rightarrow\ (y - \frac{r}{3})^3 + r(y - \frac{r}{3})^2 + s(y - \frac{r}{3}) + t = 0 \rightsquigarrow$

$$0 = y^3 - 3y^2(-\tfrac{r}{3}) + 3y\tfrac{r^2}{9} - \tfrac{r^3}{27} + ry^2 - 2\tfrac{r^2}{3}y + \tfrac{r^3}{9} + sy - \tfrac{rs}{3} + t = y^3 + y\tfrac{r^2}{3} - \tfrac{r^3}{27} - 2\tfrac{r^2}{3}y + \tfrac{r^3}{9} + sy - \tfrac{rs}{3} + t$$
$$= y^3 + \underbrace{(s - \frac{r^2}{3})}_{:=p} y + \underbrace{(2\frac{r^3}{27} - \frac{rs}{3} + t)}_{:=q} \ \Rightarrow\ \text{Reduziert: } \bullet\ \textit{Réduit: } y^3 + py + q = 0$$

Definiere: • *Définir:* $y := u + v \rightsquigarrow \quad y^3 + py + q = (u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$
$\Rightarrow\ u^3 + 3u^2v + 3uv^3 + v^3 + pu + pv + q = u^3 + v^3 + q + (u+v)(3uv + p) = 0$

Z.B. • *P.ex.* : u beliebig wählen • *Choisir librement* u.

Wähle: • *Choisir:* $u = \frac{-p}{3v},\ \ p \neq 0 \ \Rightarrow$
$u^3 + v^3 + q + (u+v)(3uv + p) = \frac{-p}{3v}^3 + v^3 + q + (\frac{-p}{3v} + v)(3\frac{-p}{3v}v + p) = \frac{-p}{3v}^3 + v^3 + q + (\frac{-p}{3v} + v) \cdot 0$
$= \frac{-p}{3v}^3 + v^3 + q = u^3 + v^3 + q = 0 \ \Rightarrow\ u^3 + v^3 = -q \ \Rightarrow\ (u^3 + v^3)^2 = q^2$ mit • *avec* $u = \frac{-p}{3v}$.
$\Rightarrow\ u^6 + 2u^3v^3 + v^6 = u^6 + 2\frac{-p^3}{3^3v^3}v^3 + v^6 = u^6 + 2\frac{-p^3}{27} + v^6 = q^6,\ \ u^6 + v^6 = q^2 + \frac{p^3}{27}$

Andererseits ist: • *D'autre part on a:* $u^3 + v^3 = -q \ \Rightarrow$
v^6 ersetzbar durch • *peut être remplacé par* $v^6 = (v^3)^2 = (-q - u^3)^2 = (q + u^3)^2 = q^2 + 2qu^3 + u^6$
$\Rightarrow\ u^6 + u^6 + 2qu^3 + q^2 = q^2 + \frac{p^3}{27}$

$$\Rightarrow\ \cancel{2}((u^3)^2 + qu^3 - \tfrac{p^3}{27}) = 0 \ \Rightarrow\ u^3_{1,2} = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + 4\frac{p^3}{27}}}{2}$$

Konsequenz: • **Conséquence:** $u^3_{(1,2),n} = \sqrt[3]{\dfrac{-q \pm \sqrt{q^2 + 4\frac{p^3}{27}}}{2}} \cdot e^{\frac{i \cdot 2n\pi}{3}},\ \ n \in \mathbb{Z}$ und • *et*

$$x^3_{(1,2),n} = y^3_{(1,2),n} - \frac{r}{3},\ \ y^3_{(1,2),n} = u_{(1,2),n} + v_{(1,2),n},\ \ v^3_{(1,2),n} = -\frac{p}{3u_{(1,2),n}},\ \ q = \frac{2r^3}{27} - \frac{rs}{3} + t,$$
$$p = s - \frac{r}{3},\ \ r = \frac{B}{A},\ \ s = \frac{C}{A},\ \ t = \frac{D}{A}$$

Damit ist die Lösung der Gleichung 3–ten Grades beschrieben. Interessant ist dabei, dass im Falle $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ immer mindestens eine Lösung reell sein muss (Verlauf des Graphen von $f(x)$), die andern beiden jedoch komplex sein können.
• *Ainsi on a décrit la solution de l'équation du degré 3. Il est intéressant de constater que dans le cas* $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ *une des solutions est toujours réelle (voir forme du graphe de* $f(x)$*), par contre les autres solutions peuvent être complexes.*

Mit vergleichbaren Methoden kann man zur Lösung der Gleichung 4. Grades gelangen (Formeln von **Cardano**).
• *Par une méthode comparable on peut arriver à la solution de l'équation de degré 4 (Formules de* **Cardano***).*

6.4.4 Bemerkung zu einem Beweis des Hauptsatzes der Algebra — Quant à une preuve du théorème principal de l'algèbre

Geg.: • **Donné:** $P_n(z) := a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1z^1 + a_0z^0 = a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1z + a_0$

Polynom vom Grade n • *polynôme du degré* n, Koeffizienten • *coefficients* $c_i \in \mathbb{C}$.

Wie wir gesehen haben, ist folgender Sachverhalt (Lemma) einfach beweisbar:
• *Comme nous avons vu il n'est pas difficile de démontrer le lemme:*

Lemma: • **Lemme:** **Vor.:** • **Hyp.:** $pgrad\,(P_n(z)) = n$

Beh.: • **Thè.:**

$P_n(z)$ hat maximal n Nullstellen • $P_n(z)$*a au maximum* n *zéros.*

(Dieses Lemma ist eine Konsequenz eines andern Lemmas: • *Ce lemme est une conséquence d'un autre lemme:*

Lemma: • **Lemme:** **Vor.:** • **Hyp.:** c Nullstelle von • *zéro de* $P_n(z)$: $P_n(c) = 0$

Beh.: • **Thè.:** $(z - c) \mid P_n(z)$

Die Umkehrung jedoch, das „Lemma von Gauss", ist nicht trivial:
• *Par contre, la thèse inverse, le "lemme de Gauss", n'est pas triviale:*

Lemma: • **Lemme:** **Vor.:** • **Hyp.:** $pgrad\,(P_n(z)) = n$

Beh.: • **Thè.:**

$P_n(z)$ hat minimal n Nullstellen • $P_n(z)$*a au minimum* n *zéros.*

(**Konsequenz:** • **Conséquence: Fundamentalsatz der Algebra** • **Théorème fondamental de l'algèbre**:

Jedes Polynom vom Grade n hat über $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen, die mehrfach sein können.
• *Chaque polynôme du degré* n *possède dans* $\mathbb{C}$ *exactement* n *zéros – qui peuvent être multiples.*)

Zum Beweis des Gauss'schen Lemmas: • *Quant à la preuve du lemme de Gauss*:

Sei • *Soit*
$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = (\ldots \underbrace{(\ldots((a_n z + a_{n-1})z + a_{n-2})z + \ldots)}_{:=p_j(z)} \ldots)z + a_0$$
(nach Horner • *d'après Horner*), $p_j(z) = a_n z^{n-j} + a_{n-1} z^{n-1-j} + \ldots + a_{n-j+1} z + a_{n-j}$
$= (\ldots(\ldots((a_n z + a_{n-1})z + a_{n-2})z + \ldots)\ldots)z + a_{n-j}$

Es ist: • *On trouve:* $p_{j+1}(z) = p_j(z) \cdot z + a_{n-j-1}$.

Sei • *Soit* $p_1 = p_1(z) = a_n \cdot z + a_{n-1})$ (kurz • *bref*)

$\rightsquigarrow$ Andererseits ist: • *D'autre part on trouve:* p_1 ist surjektiv auf $\mathbb{C}$ • p_1 *est surjectif sur* $\mathbb{C}$.

Sei nun angenommen $p_j(z)$ auch surjektiv. — *Admettons que $p_j(z)$ soit aussi surjectif.*
D. h. • *Ç. v. d.*: $\forall_{z_0\in\mathbb{C}}\exists_{c_0\in\mathbb{C}} : p_j(c_0) = z_0$.
(Das bedeutet also, dass jedes z_0 bezüglich p_j ein Urbild c_0 hat.
• *Ça signifie que chaque z_0 a un original c_0 par rapport à p_j.*

Insbesondere hat demnach $z_0 = 0$ ein Urbild c_0: $p_j(c_0) = 0$, d. h. p_j hat eine Nullstelle c_0.
• *Spécialement $z_0 = 0$ a un original c_0: $p_j(c_0) = 0$, ç.v.d. p_j possède un zéro c_0.*)

Wenn es nun gelingt zu zeigen, dass dann auch $p_j(z) \cdot z$ surjektiv ist, so folgt, dass auch $p_{j+1}(z) = p_j(z) \cdot z + a_{n-(j+1)}$ surjektiv ist (denn das $a_{n-(j+1)}$ bewirkt nur eine Translation).
• *Si l'on arrive maintenant a démontrer que $p_j(z) \cdot z$ est aussi surjectif, on peut conclure que $p_{j+1}(z) = p_j(z) \cdot z + a_{n-(j+1)}$ est aussi surjevtif (car $a_{n-(j+1)}$ fait seulement une translation).*

Wegen dem Aufbau von $P_n(z)$ nach dem Hornerschema ist dann auch $P_n(z)$ surjektif, d. h. 0 besitzt ein Urbild c_0, $P_n(z)$ hat eine Nullstelle c_0. Damit wäre das Aauss'sche Lemma gezeigt.
• *A cause de la construction de $P_n(z)$ d'après le schéma de Horner, $P_n(z)$ est donc aussi surjectif, ç.v.d. 0 possède un original c_0, $P_n(z)$ a un zéro c_0. Par conséquence on aurait prouvé le lemme de Gauss.*
Man muss also zeigen können: • *Alors il faut démontrer:*

Vor.: • Hyp.: $p_{j-1}(z)$ surjektiv • *surjectif*

Beh.: • Thè.: $p_j(z) \cdot z$ surjektiv • *surjectif*

Wie man das zeigen könnte, können wir hier nur auf dem Plausibilitätsniveau erklären:
• *La façon de démontrer cela, nous ne pouvons l'expliquer qu'au niveau de la plausibilité.*

Dazu betrachten wir: • *Etudier:* $p_j(z) = a_n z^{n-j} + a_{n-1}z^{n-1-j} + \ldots + a_{n-j} =$

$$= z^{n-j}a_n\underbrace{(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{z} + \frac{a_{n-2}}{a_n}\frac{1}{z^2} + \ldots + \frac{a_{n-2-j}}{a_n}\frac{1}{z^{n-j}})}_{:=1+Q(z)} = z^{n-j}a_n(1 + Q(z))$$

Sei nun R sehr gross und $|z| > R = R_0$: • *Supposons maintenant que R soit très grand et $|z| > R = R_0$:*

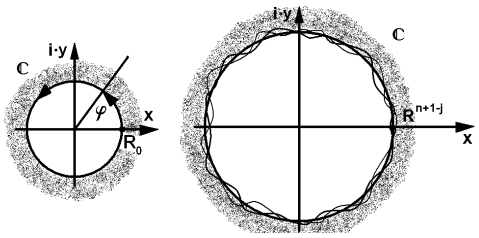
$$\rightsquigarrow \quad |Q(z)| \le (|\tfrac{a_{n-1}}{a_n}||\tfrac{1}{z}| + |\tfrac{a_{n-2}}{a_n}||\tfrac{1}{z^2}| + \ldots + |\tfrac{a_{n-2-j}}{a_n}||\tfrac{1}{z^{n-j}}|) \le$$
$$\le \tfrac{1}{R_0}(|\tfrac{a_{n-1}}{a_n}| + |\tfrac{a_{n-2}}{a_n}|\tfrac{1}{R_0} + \ldots + |\tfrac{a_{n-2-j}}{a_n}|\tfrac{1}{R_0^{n-j-1}}) < \tfrac{1}{R_0}\cdot j \cdot (\max_{k\in\{1,2,\ldots,j\}}|\tfrac{a_{n-k}}{a_n}|) = \tfrac{1}{R_0}\cdots K_0, \quad K_0 \in \mathbb{R}.$$

D. h. • *Ç. v. d.*: $R_0 \to \infty \;\Rightarrow\; |Q(z)| \to 0$.

Für grosse R_0 können wir also schreiben: • *Pour des R_0 très grands alors on peut écrire:*
$Q(z) := \epsilon(z), \;\; p_j(z) = z^{n-j}a_n(1 + \epsilon(z)) \approx z^{n-j}a_n$

Wähle nun den Kreis • *Maintenant choisir le cercle $z(\varphi) = R_0 \cdot e^{i\varphi}, \;\; \varphi \in [0, 2\pi)$.*

Sei R_0 gross • *Soit R_0 grand* $\rightsquigarrow$ $p_j(z)$ durchläuft die kreisartige Kurve • *parcourt la courbe semblable à un cercle $a_n \cdot R_0^{n-j}e^{i\varphi(n-j)} \cdot (1 - \epsilon(z)))$*
(dabei ist $\epsilon(z) \approx 1$ die vorhin studierte kleine Störung. • *$\epsilon(z) \approx 1$ est le petit défaut qu'on vient d'étudier.*)



Wir nehmen an, dass $z(\varphi) = R_0 \cdot e^{i\varphi}$ den Kreis K_0 mit dem Radius R_0 einmal durchläuft.
• *Nous admettons que $z(\varphi) = R_0 \cdot e^{i\varphi}$ parcourt une fois le cercle K_0 au rayon R_0.*

Dann durchläuft $p_j(z) = z^{n-j}a_n(1 + \epsilon(z))$ den „Beinahe–Kreis“ mit dem Radius R_0^{n-j} $n - j$ mal (Kurve $C_{n-j}(R_0)$)
und $p_j(z) \cdot z = z^{n+1-j}a_n(1 + \epsilon(z))$ den „Beinahe–Kreis“ mit dem Radius R_0^{n+1-j} $n+1-j$ mal (Kurve $C_{n+1-j}(R_0)$).
• *Alors $p_j(z) = z^{n-j}a_n(1 + \epsilon(z))$ parcourt le "presque–cercle" au rayon R_0^{n-j} $n - j$ fois (courbe $C_{n-j}(R_0)$) et $p_j(z) \cdot z = z^{n+1-j}a_n(1+\epsilon(z))$ parcourt le "presque–cercle" au rayon R_0^{n+1-j} $n + 1 - j$ fois (courbe $C_{n+1-j}(R_0)$).*

Wenn wir R stetig wachsen lassen, ändert $C_{n-j}(R)$ die Grösse, jedoch kaum die Form ($\epsilon(z)$!). Da p_j surjektiv ist, wird das Äussere von $C_{n-j}(R_0)$ vollständig im Bildbereich liegen (d.h. überdeckt), wenn wir R stetig wachsen lassen. Es ist nun anschaulich klar, dass beim gleichen Wachstumsvorgang auch $C_{n+1-j}(R)$ das Äussere von $C_{n+1-j}(R_0)$ überdecken muss, $p_j(z) \cdot z$ also ausserhalb des Kreises mit dem Radius R_0 auch surjektiv sein muss. (Mit Hilfe der Theorie der konformem Abbildungen und Gitternetzen können wir dies später exakt einsehen.)
• *Si l'on laisse s'agrandir R continuellement, $C_{n-j}(R)$ change la grandeur, mais presque pas la forme ($\epsilon(z)$!). Comme p_j est surjectif, ce qui est en dehors de $C_{n-j}(R_0)$ est placé complètement dans le domaine de valeurs, si l'on laisse s'agrandir R continuellement. Maintenant il est bien clair que aussi $C_{n+1-j}(R)$ va couvrir le domaine en dehors de $C_{n+1-j}(R_0)$, que $p_j(z) \cdot z$ est aussi surjectif en dehors du cercle avec le rayon R. (On peut traiter ce sujet de façon plus exacte plus tard à l'aide de la théorie des applications conformes et des treillis.)*

Mit dem Innern von K_0 verfahren wir gleich. Wenn R stetig gegen 0 geht, so schrumpft K_0 auf den Punkt 0 zusammen. (Später wird gezeigt, dass komplexe Polynome stetig sind.) Die Bildkurve $C_{n-j}(R_0)$ schrumpft dann stetig (lückenlos und dicht) auf $a_n - j$ zusammen ($z \to 0 \;\Rightarrow\; p_j(z) \to a_n - j$). Da p_j surjektiv ist, wird das Innere von $C_{n-j}(R_0)$ vollständig überdeckt. Es ist nun plausibel, dass auch bei $p_j(z) \cdot z$ die Bildkurve $C_{n+1-j}(R_0)$stetig mit $z \to 0$ auf $p_j(0) \cdot 0 = 0$ zusammenschrumpft (lückenlos und dicht), denn aus Stetigkeitsgründen bleibt die Kurve bei diesem Schrumpfungsprozess geschlossen und kann nicht springen. (Angenommen, es würde einmal doch eine punktuelle Lücke w_0 entstehen, so könnte man auf der entsprechenden Kurve eine Bilderfolge $p_j(z_k) \cdot z_k$ finden, die gegen w_0 konvergiert. Die zugehörige Urbildfolge z_k hätte dann einen Häufungspunkt z_0 dessen Bild aber dann w_0 sein müsste, was der Annahme widerspricht.) Ohne uns auf ein sauberes Deduktionsgerüst zu stützen, können wir damit die Gültigkeit der Behauptung „$p_j(z) \cdot z$ surjektiv“ etwa nachvollziehen.
• *Pour l'intérieur du cercle K_0 nous appliquons la même méthode. Si R va vers 0 de façon continue, K_0 se rétrécit sur le point 0. (Plus tard on va montrer que les polynômes complexes sont continus.) La courbe image $C_{n-j}(R_0)$ alors se retire de façon continue (sans lacunes et dense) sur $a_n - j$ ($z \to 0 \;\Rightarrow\; p_j(z) \to a_n - j$). comme p_j est surjectif, l'intérieur de $C_{n-j}(R_0)$ va être couvert complètement. Maintenant il est plausible, que à $p_j(z) \cdot z$ la courbe image $C_{n+1-j}(R_0)$ se retire de façon continue avec $z \to 0$ sur $p_j(0) \cdot 0 = 0$ (sans lacunes et dense), car pour des raisons de continuité la courbe reste fermée pendant ce processus de retirement, elle ne peut pas sauter.(Supposons qu'une fois par hazard on aurait une lacune ponctuelle w_0, alors on pourrait trouver une suite d'images $p_j(z_k) \cdot z_k$ sur la courbe correspondante, qui converge envers w_0. La suite originale z_k qui va avec cette suite d'images alors aurait un point limite z_0 dont l'image serait w_0, par contradiction à la supposition.) Sans s'appuyer sur un système de déduction propre et net, nous pouvons ainsi accepter l'exactitude de la thèse "$p_j(z) \cdot z$ surjectif".*

Bemerkung: • **Remarque:**

Später wird bewiesen, dass Polynome stetige und differenzierbare Funktionen sind, welche Figuren konform abbilden bis auf die Punkte, wo die Ableitung 0 ist. Da wir wissen, dass das bei einem Polynom vom Grade n wegen dem Grad der Ableitung höchstens an $n-1$ Ausnahmestellen sein kann, haben wir die Möglichkeit, darauf mit Hilfe des oben beschriebenen Schrumpfungsprozesses und der Methode der vollständigen Induktion ein Argument aufzubauen, das die Existenz mindestens einer Nullstelle stützt. Damit wäre der Hauptsatz bewiesen.
• *Plus tard on va prouver que des polynômes sont des fonctions continues et dérivables qui génèrent des images conformes (excepté pour les points, où la dérivée est* 0*). Comme nous savons que pour un polynôme du degré n ceci ($f'(z) = 0$) ne peut arriver que dans au maximum $n-1$ places (à cause du degré de la dérivée), on peut prendre cet argument comme base pour démontrer l'existence d'au moins une place de zéro du polynôme (en utilisant le processus de rétrécissement décrit en haut et la méthode de l'induction complète). Avec cela, le théorème principal serait prouvé.*

6.5 Weitere Anwendungen — Autres applications

6.5.1 Summe der Einheitswurzeln — Somme des racines de l'unité

Sei • *Soit* $z_k = e^{i\cdot k\frac{2\pi}{n}} = e^{i\cdot k\varphi} := w^k,\ \ \varphi = \dfrac{2\pi}{n}, w = e^{i\frac{2\pi}{n}}$

($\rightsquigarrow$ n–te Einheitswurzeln • *n–ièmes racines de l'unité*)

Problem: • **Problème:**

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = e^0 + e^{i\varphi} + e^{2i\varphi} + \ldots + +e^{(n-1)i\varphi} = 1 + w + w^2 + w^3 + \ldots + w^{n-1}$$
$$= \frac{1-w^n}{1-w} = \frac{1-e^{ni\varphi}}{1-e^{i\varphi}} = \frac{1-e^{ni\frac{2\pi}{n}}}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}} = \frac{1-1}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}} = 0 \ \Rightarrow\ \forall_n : \sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0$$

Satz: • **Théorème:** Die Summe aller n–ten Einheitswurzeln ist also unabhängig von n immer 0. • *Donc la somme de toutes les n–ièmes racines de l'unité est toujours égale à* 0.

6.5.2 Formeln von De Moivre — Formules de De Moivre

$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi),\ \ (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi} = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$
$\Rightarrow\ \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) = (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^n =$
$(\cos(\varphi))^n + \binom{n}{1} i\,(\cos(\varphi))^{n-1}\sin(\varphi) + \binom{n}{2} i^2\,(\cos(\varphi))^{n-2}(\sin(\varphi))^2 + \binom{n}{3} i^3\,(\cos(\varphi))^{n-3}(\sin(\varphi))^3 + \ldots$
$\ldots + i^n\,(\sin(\varphi))^n =$
$(\cos(\varphi))^n + \binom{n}{1} i\,(\cos(\varphi))^{n-1}\sin(\varphi) - \binom{n}{2}(\cos(\varphi))^{n-2}(\sin(\varphi))^2 - \binom{n}{3} i\,(\cos(\varphi))^{n-3}(\sin(\varphi))^3 + \ldots$
$\ldots + i^n\,(\sin(\varphi))^n$
Der Vergleich von Real– und Imaginäranteil liefert:
• *Si l'on compare la partie réelle et imaginaire on obtient:*

Konsequenz: • **Conséquence:** (**Formeln von De Moivre** • **Formules de De Moivre**)
Re $\rightsquigarrow$ $\cos(n\varphi) = (\cos(\varphi))^n - \binom{n}{2}(\cos(\varphi))^{n-2}(\sin(\varphi))^2 + \binom{n}{4}(\cos(\varphi))^{n-4}(\sin(\varphi))^4 \pm \ldots$
Im $\rightsquigarrow$ $\sin(n\varphi) = \binom{n}{1}(\cos(\varphi))^{n-1}\sin(\varphi) - \binom{n}{3}(\cos(\varphi))^{n-3}(\sin(\varphi))^3 + \binom{n}{5}(\cos(\varphi))^{n-5}(\sin(\varphi))^5 \pm \ldots$

Z.B. • *P.ex.* $n = 2$: $\cos(2\varphi) = (\cos(\varphi))^2 - (\sin(\varphi))^2$, $\sin(2\varphi) = (2\cos(\varphi)) - (\sin(\varphi))$

6.5.3 Fourierentwicklung von Sinus– und Cosinuspotenzen — Séries de Fourier des puissances de sinus et cosinus

Formeln — Formules

Definition: • **Définition:** Eine Reihe der nachfolgenden Form heisst **Fourierreihe**:
• *Une série comme il suit s'appelle* **série de Fourier***:*

$$f(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

Beispiele: • **Exemples:**

1 $\cos^2 t = (\frac{e^{it} + e^{-it}}{2})^2 = \frac{1}{4}(e^{2it} + 2 + e^{-2it}) = \frac{1}{4}(\cos(2t) + i\sin(2t) + 2 + \cos(-2t) + i\sin(-2t))$
$= \frac{1}{4}(\cos(2t) + i\sin(2t) + 2 + \cos(2t) - i\sin(2t)) = \frac{1}{4}(2\cos(2t) + 2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)$

2 $\cos^4 t = (\frac{e^{it} + e^{-it}}{2})^4 = \frac{1}{16}(e^{4it} + 4e^{2it} + 6 + 4e^{-2it} + e^{-4it}) = \ldots = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{8}\cos(4t)$

3 $\sin^2 t = (\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i})^2 = -\frac{1}{4}(e^{2it} - 2 + e^{-2it}) = \ldots = +\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)$

4 $\sin^2 t + \sin t = (\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i})^2 = -\frac{1}{4}(e^{2it} - 2 + e^{-2it}) = \ldots = +\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t) + \sin(t)$

Interessante Anwendungen — Applications intéressantes

Bsp.: • **Exemple:** Sei • *Soit* $\varphi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Benütze: • *Utiliser:*

$$\cos(n\varphi) = (\cos(\varphi))^n - \binom{n}{2}(\cos(\varphi))^{n-2}(\sin(\varphi))^2 + \binom{n}{4}(\cos(\varphi))^{n-4}(\sin(\varphi))^4 \pm \ldots$$

Sei • *Soit* $n = 8m$, $m \in \mathbb{N}$. $\rightsquigarrow$ $\cos(n\varphi) = \cos(8m\frac{\pi}{2}) = \cos(2m\pi) = 1 \rightsquigarrow$

$1 = (\frac{\sqrt{2}}{2})^{8m} - \binom{8m}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2})^{8m-2}(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \binom{8m}{4}(\frac{\sqrt{2}}{2})^{8m-4}(\frac{\sqrt{2}}{2})^4 - \ldots = (\frac{\sqrt{2}}{2})^{8m} \cdot (1 - \binom{8m}{2} + \binom{8m}{4} - \binom{8m}{6} + \ldots)$
$= (\frac{\sqrt{1}}{2})^{4m} \cdot (1 - \binom{8m}{2} + \binom{8m}{4} - \binom{8m}{6} + \ldots) \Rightarrow \forall_{m\in\mathbb{N}} : 2^{4m} = 16^m = 1 - \binom{8m}{2} + \binom{8m}{4} - \binom{8m}{6} + \ldots$

Konsequenz: • **Conséquence:** $\forall_{m\in\mathbb{N}} : \; 2^{4m} = 16^m = 1 - \binom{8m}{2} + \binom{8m}{4} - \binom{8m}{6} + \binom{8m}{8} \pm \ldots$

Kapitel • Chapitre 7

Komplexe Funktionen, konforme Abbildungen — Fonctions complexes, applications conformes

7.1 Differenzierbarkeit, Wege — Dérivés, chemins

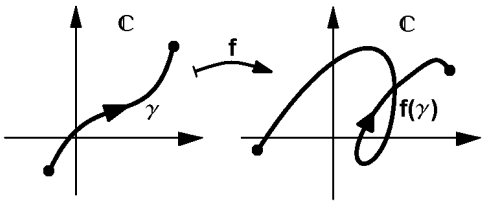
7.1.1 Grundlagen, Stetigkeit — Fondements, continuité

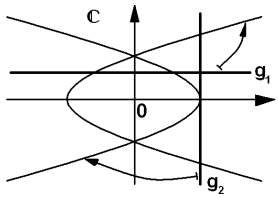
Wir verwenden einige Begriffe, die schon von früher bekannt sein sollten, also nicht mehr neu definiert werden müssen. • *Nous utilisons quelques notions que nous avons déjà définies et que nous pouvons donc utiliser.*

Kurven, Wege • **Des courbes, chemins:** Stetige Funktionen
• *Fonctions continues* $\mathbb{R} \overset{f}{\longmapsto} \mathbb{C}$, z.B. • *p.ex.* $t \in \mathbb{R}$, $f: \ t \longmapsto f(t) = \cos(t) + i\sin(t) \in \mathbb{C}$

Gebietsabbildungen • **Applications de domaines:** Funktionen
• *Fonctions* $\mathbb{C} \overset{f}{\longmapsto} \mathbb{C}$, z.B. • *p.ex.* $z \in \mathbb{C}$, $f: \ z \longmapsto f(t) = z^2 \in \mathbb{C}$

Allgemein: • *Généralement* $f: \ G = D_f \longmapsto G^* = W_f$, $f: \ z \longmapsto f(z) = w$
oder • *ou* $f: \ z = x + iy \longmapsto w = f(z) = u(z) + iv(z) = u(x+iy) + iv(x+iy)$
mit • *avec* $u(z) + Re(f(z))$, $v(z) = Im(f(z))$





Wichtig: • **Important:** Stetige Funktionen. • *Fonctions continues.*

Definition: • **Définition:** f **stetig in** • **continue** *à* $z_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$
oder • *ou* $\lim\limits_{z \to z_0} w = w_0$

„Epsilontisch“ • *A l'aide des quantificateurs*: $\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{z\in U_\delta(z_0)}$:

$$w = f(z) \in U_\epsilon(f(z_0)) = U_\epsilon(w_0)$$

Anschaulich: Nahe z haben nahe $f(z) = w$ zur Folge.
• *Explicite: Des z tout près l'un de l'autre ont comme images des $f(z) = w$ tout près l'un de l'autre.*

Folgerung: • **Conclusion:** f (stetig in • *continue à*) $z_0 \Leftrightarrow u(z)$ (und • *et*) $v(z)$ (stetig in • *continue à*) z_0

Konsequenz: • **Conséquence:**
$u(x+i\,y)$ (und • *et*) $v(x+i\,y)$ (stetig in • *continue à*) x (und • *et*) y (notwendig • *nécessaire*).

Folgende Aussagen beweist man wie in $\mathbb{R}$, indem man den Abstand in $\mathbb{R}$ durch den in $\mathbb{C}$ ersetzt:
• *On prouve les thèses qui suivent comme celles dans $\mathbb{R}$ en remplaçant la distance dans $\mathbb{R}$ par celle dans $\mathbb{C}$:*

Satz: • **Théorème:**

Vor.: • **Hyp.:**

$f_1(z)$, $f_2(z)$ (stetig in • *continue à*) z_0, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

Beh.: • **Thè.:**

1 $\lambda_1 f_1(z) + \lambda_2 f_2(z)$ (stetig in • *continue à*) z_0

2 $f_1(z) \cdot f_2(z)$ (stetig in • *continue à*) z_0

3 $f_2(z_0) \neq 0 \Rightarrow \dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$ (stetig in • *continue à*) z_0

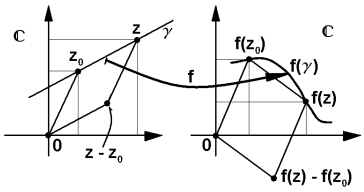
4 $f_1(z_0) = w_0$, $f_2(z)$ (stetig in • *continue à*) $w_0 \Leftrightarrow f_2(f_1(z))$ (stetig in • *continue à*) z_0

Folgerung: • **Conclusion:** Polynome • *Polynômes*: $p(z) = c_n z^n + \ldots + c_1 z + c_0$ (stetig in • *continu à*) $\mathbb{C}$ $(\forall z \in \mathbb{C})$

Stetigkeit in einem Gebiet: • *Continu dans un domaine:*

Definition: • **Définition:** f (stetig in • *continue à*) $G \Leftrightarrow f$ (stetig in • *continu à*) $\forall z \in G$

7.1.2 Differenzierbarkeit — Dérivabilité (différentiabilité)



Sei • *Soit* $\dot{U}_\delta(z_0) = \{z \mid 0 < |z - z_0| < \delta\}$
Betrachte • *Etudier*

$$D(z) := \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{in} \bullet \textit{dans } \dot{U}_\delta(z_0)$$

($D(z)$: Differenzenquotient • *Quotient des différences*)

Definition: • **Définition:**

1 f **komplex differenzierbar** (in z_0)
• f **dérivable de manière complexe** *(dans z_0)*
$\Leftrightarrow \lim\limits_{z \to z_0} D(z)$ existiert • *existe.*

2 f komplex differenzierbar mit der **Ableitung** a
• f *dérivable de manière complexe avec le* **dérivé** a
$\Leftrightarrow \lim\limits_{z \to z_0} D(z) = a := f'(z_0)$

3 f **holomorph**[2] (regulär analytisch) in G
• f **holomorphe**[2] *dans* G
$\Leftrightarrow f'(z)$ existiert • *existe* $\forall_{z \in G}$

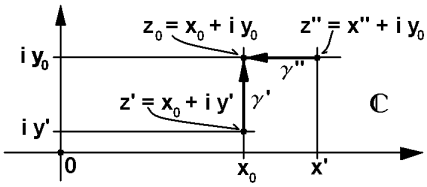
Bsp.: • **Exemple:**

1 $f(z) = a \cdot z + b, \;\; D(z) = \dfrac{az + b - (az_0 + b)}{z - z_0} = \dfrac{a(z - z_0)}{z - z_0} = a \;\Rightarrow\; \lim\limits_{z \to z_0} D(z) = a$

2 $f(z) = z^2, \;\; D(z) = \dfrac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \dfrac{(z + z_0)(z - z_0)}{z - z_0} = (z + z_0) \;\Rightarrow\; \lim\limits_{z \to z_0} D(z) = 2z_0$

3 $f(z) = Re(z) + 2\,i\,Im(z) = x + 2\,i\,y, \;\; D_f = \mathbb{C}, \;\; d(z) = \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \dfrac{(x - x_0) + 2\,i(y - y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)}$

Betrachte zwei verschiedene Wege: • *Considérer deux chemins différentes:*



Sei • *Soit* $z_0 = x_0 + i\,y_0$,
$z' = x_0 + i\,y', \;\; z'' = x'' + i\,y_0$

$$\oslash \;\; z' \to z_0 : \;\; \lim_{z' \to z_0} D(z') = \lim_{z' \to z_0} \frac{(x_0 - x_0) + 2\,i\,(y' - y_0)}{(x_0 - x_0) + i\,(y' - y_0)} = \lim_{z' \to z_0} \frac{2\,i\,(y' - y_0)}{i\,(y' - y_0)} = 2$$

$$\oslash \;\; z'' \to z_0 : \;\; \lim_{z'' \to z_0} D(z'') = \lim_{z'' \to z_0} \frac{(x'' - x_0) + 2\,i\,(y_0 - y_0)}{(x'' - x_0) + i\,(y_0 - y_0)} = \lim_{z' \to z_0} \frac{(x'' - x_0)}{(x'' - x_0)} = 1 \neq 2$$

$\Rightarrow \lim\limits_{z' \to z_0} D(z') \neq \lim\limits_{z'' \to z_0} D(z''), \;\; \lim\limits_{z \to z_0} D(z)$ existiert nicht • *n'existe pas.*

$\rightsquigarrow$ Schon die einfache Funktion $f(z) = Re(z) + 2\,i\,Im(z)$ ist nicht holomorph. Holomorph ist also etwas Spezielles. • *Déjà la fonction simple* $f(z) = Re(z) + 2\,i\,Im(z)$ *n'est pas holomorphe. Holomorphe signifie donc quelque chose de spécial.*

[2] Griech. • *gréc* holo: ganz, völlig, unversehrt • *entier*, morphe: Gestalt • *forme*

7.1.3 Differenzierbarkeitsregeln — Règles pour dérivabilité

Wenn nichts bemerkt ist, gehen die Beweise wie im Reellen (indem man den Abstand in $\mathbb{R}$ durch den in $\mathbb{C}$ ersetzt). • *S'il n'y a pas de remarques, les preuves fonctionnent comme avec les nombres réells (en remplaçant la distance dans $\mathbb{R}$ par celle dans $\mathbb{C}$).*

Satz: • **Théorème:**

Vor.: • **Hyp.:**

$f(z), g(z)$ (holomorph in • *holomorphe dans*) G, $\quad a, b \in \mathbb{C}$

Beh.: • **Thè.:**

1 f, g (stetig in • *continue à*) G

2 Linearität: • *Linéarité*
$F(z) = a \cdot f(z) + b \cdot g(z)$ holomorph in • *holomorphe dans* $G \wedge$
$F'(z) = a \cdot f'(z) + b \cdot g'(z)$

3 Produktenregel: • *Règle du produit*
$F(z) = f(z) \cdot g(z)$ holomorph in • *holomorphe dans* $G \wedge$
$F'(z) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$

4 Quotientenregel: • *Règle du quotient*
Sei • *Soit* $F(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$, $g(z_0) \neq 0 \Rightarrow F(z)$ holomorph in
• *holomorphe dans* $G \wedge F'(z) = \dfrac{f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)}{(g(z))^2}$

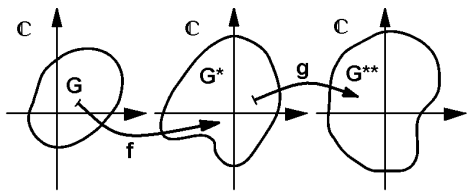
Satz: • **Théorème:**

Vor.: • **Hyp.:**

$f(z)$ holomorph in • *holomorphe dans* G, $f: \; G \longmapsto f(G) \subseteq G^*$, $f: z \longmapsto f(z) = w$
g holomorph in • *holomorphe dans* G^*, $g: \; G^* \longmapsto g(G^*) = G^{**}$
$F = f \circ g, \;\; f(z) = f(g(z))$

Beh.: • **Thè.:**

Kettenregel: • *Règle conjointe:*
$F(z)$ holomorph in • *holomorphe dans* $G \wedge$
$F'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z) = f'(w) \cdot g'(z) = \dfrac{df}{dw} \cdot \dfrac{dg}{dz}$
oder • *ou* $F'(z) = \dfrac{d}{d\,z} f(z) \cdot \dfrac{d}{d\,z} g(z)$



Folgerung: • **Conclusion:**

1 Polynomfunktionen sind holomorph in $\mathbb{C}$. • *Les fonctions polynomiales sont holomorphes dans* $\mathbb{C}$.

2 Rationale Funktionen sind holomorph in $\mathbb{C}$, wenn der Nenner $\neq 0$ ist. • *Les fonctions rationnelles sont holomorphes dans* $\mathbb{C}$, *si le dénominateur est* $\neq 0$.

Problem: • **Problème:** Beim Differenzieren im Reellen hat die Ableitung die Bedeutung einer Tangentensteigung. Aus Dimensionsgründen lässt sich diese Bedeutung bei der komplexen Differenzierbarkeit nicht gebrauchen. Was ist dann der Sinn komplexer Ableitungen? Eine Interpretation werden wir später bei den **konformen Abbildungen** gewinnen können.
• *Quant aux dérivés au réel, le dérivé a la signification de la montée de la tangente. Pour des raisons de la dimension on ne peut plus utiliser cette signification pour les dérivés complexes. Qu'est-ce qui est donc la signification des dérivés complexes? On obtiendra une interprétation quand on traitera les* **applications conformes**.

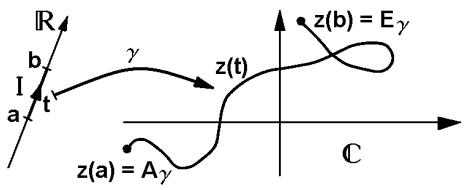
7.1.4 Wege in C — Chemins dans C

Betrachte • *Considérer* $I = [a, b] = \{t \in \mathbb{R} \mid a \leq t \leq b\}$ sowie • *ainsi que* $x(t), y(t)$ diff'bar in • *dérivable dans* I.

Sei • *Soit* $z(t) = x(t) + iy(t), \;\; I \longmapsto \mathbb{C}$

Bsp.: • **Exemple:** $I = [0, 2\pi], \;\; z(t) = \sin(t) + i\cos(t)$ (Abbildung von I auf den Einheitskreis in $\mathbb{C}$. • *Application de* I *sur le cercle unité dans* $\mathbb{C}$)

Definition: • **Définition:** Eine stetige Abbildung • *Une application continue* $\gamma : \; I \longmapsto \mathbb{C}$ mit • *avec* $t \overset{\gamma}{\longmapsto} z(t)$ heisst **Weg in** $\mathbb{C}$ • *s'appelle* **chemin dans** $\mathbb{C}$, $|\gamma| = \{z(t) \mid t \in I\}$ heisst **Spur** v. γ • *s'appelle* **trace** *d.* γ



$z(a) = A_\gamma :=$ **Anfangspunkt** • **Point initial**
$z(b) = E_\gamma :=$ **Endpunkt** • **Point final**

Geschlossene Wege • **Chemins fermés:** $A_\gamma = E_\gamma$

Inverser Weg $(-\gamma)$ zu γ • **Chemins inverses** $(-\gamma)$ *à* γ:
Sei • *Soit* $t = b + a - t', \;\; t' = b + a - t, \; -\gamma : \; t' \longmapsto w(t') \; (= z(t)), \; (t' \in [a, b] \Leftrightarrow t \in [a, b])$.
Läuft t von a nach b, so läuft t' von b nach a. • *Si* t *passe de* a *à* b, t' *passe de* b *à* a.

Definition: • **Définition:** **Differenzierbarer** Weg • *Chemin* **dérivable**: $\gamma : \; t \longmapsto z(t) = x(t) + i\,y(t)$ differenzierbar • *dérivable* $\Leftrightarrow \; x(t), y(t)$ diff'bar • *dérivable.*
$z'(t) = x(t) + i\,y(t) \rightsquigarrow$ Ableitung. • *Dérivé.*

Regeln: • **Règles:**

1 $A_{-\gamma} = E_\gamma, \;\; A_\gamma = E_{-\gamma}$

2 $|\gamma| = |-\gamma|$

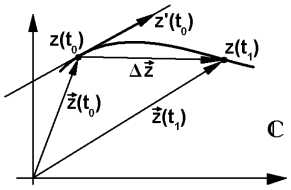
3 $-(-\gamma) = \gamma$

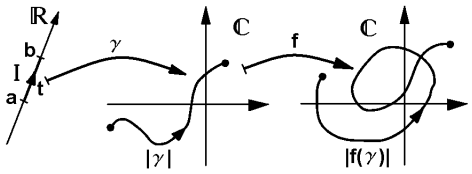
(Wie man sofort sieht... • *Comme on voit tout de suite...*)

7.1.5 Differenzierbare Wege in C — Chemins dérivables dans C

Wir wissen: • *On sait:* γ diff'bar • *dérivable* $\Rightarrow$ Ableitung • *dérivé* : $z'(t) = x(t) + i\,y(t)$

$\rightsquigarrow$ Tangentenvektor an den Weg γ • *vecteur tangentiel du chemin* γ: $\vec{z}\,'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$





Definition: • **Définition:** **Bildweg** von γ • **Chemin image** *de* γ :

$$f \circ \gamma := f(\gamma) : \; t \longmapsto w(t) = f(z(t)), \;\; t \in I$$

Eigenschaften:
• **Qualités:**

1 $f(\gamma)$ ist wieder Weg • *est de nouveau chemin*

2 $|f(\gamma)| = f(|\gamma|)$

3 $A_{f(\gamma)} := A_{f(|\gamma|)} = f(A_\gamma)$

4 $E_{f(\gamma)} := E_{f(|\gamma|)} = f(E_\gamma)$

Weiter gilt die **Kettenregel** (Beweis analog im Reellen):
• *En outre la* **règle conjointe** *est valable (preuve analogue au réel)*:

Satz: • **Théorème:**

Vor.: • **Hyp.:**

f holomorph in • *holomorphe dans* G,
γ diff'barer Weg • *chemin dérivable*: $t \longmapsto z(t)$, $|\gamma| \subset G, \;\; t \in I$

Beh.: • **Thè.:**

Für den Bildweg gilt • *Pour le chemin image on constate:*

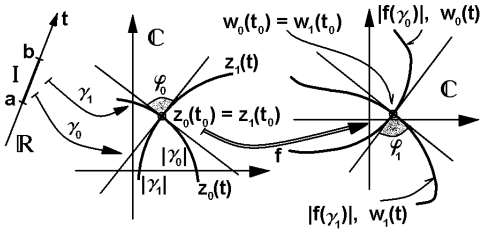
1 $w(t) = f(z(t))$ ist diff'bar in I • *est dérivable dans* I

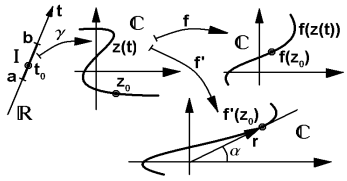
2 $\dfrac{d}{d\,z} w(t) = w'(t) = f'(z(t)) \cdot z'(t) = \dfrac{d}{d\,z} f(z) \cdot \dfrac{d}{d\,t} z(t)$
(Komplexe und reelle Ableitungen gemischt! • *Dérivés complexes et réels mélangés*)

Bsp.: • **Exemple:** $I = [0,1]$, $\gamma:\ t \longmapsto z(t) = t^2 + i(t+1)$, $f:\ z \longmapsto z^2$
$\rightsquigarrow \quad f(\gamma):\ t \longmapsto (t^2 + i(t+1))^2 = w(t) \Rightarrow\ w'(t) = 2z \cdot z'(t) = 2(t^2 + i(t+1)) \cdot (2t+i)$

Bemerkung: • **Remarque:** $z'(t) = \dfrac{d}{dt}z(t) = \dfrac{d}{dt}x(t) + i\dfrac{d}{dt}y(t) = x'(t) + i\,y'(t)$
$\rightsquigarrow$ Integral • *Intégrale*:
$z(t) + C = \int z'(t)\,dt = \int x'(t)\,dt + i\int y'(t)\,dt = x(t) + i\,y(t) + C$

7.2 Konforme Abbildungen — Applications conformes





Sei • *Soit* $f'(z_0) \neq 0$,
$f'(z_0) = |f'(z_0)| \cdot (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) =$
$= r \cdot e^{i\cdot\alpha}$
mit • *avec* $|f'(z_0)| = r,\ \ \alpha = Arg(f'(z_0))$

<u>Betrachte: • *Considérer:*</u> γ diff'bar in • *dérivable dans* G, $I \ni t \overset{\gamma}{\longmapsto} z(t) \in \mathbb{C}$,

Speziell: • *Spécialement:* $z(t_0) = z_0,\ \ z'(t_0) \neq 0$.

Nach Voraussetzung ist: • *Selon la hypothèse on trouve:* $z'(t_0) \neq 0$
$\rightsquigarrow$ Tangentenvektor existiert, die Kurve (Weg) ist **glatt**.
• *Vecteur tangentiel existe, la courbe (chemin) est* **lisse**.

Untersuchung von • **Examen** *de* $f \circ \gamma := f(\gamma)$:

$$w(t) = f(z(t)) \ \Leftrightarrow\ w'(t) = f'(z(t)) \cdot z'(t),\ \ w'(t_0) = f'(z(t_0)) \cdot z'(t_0) = \underbrace{f'(z_0)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{z'(t_0)}_{\neq 0}.$$

Bei der Multiplikation in $\mathbb{C}$ addieren sich die Argumente:
• *A la multiplication dans* $\mathbb{C}$ *les arguments s'additionnent:*
$$Arg(w'(t_0)) = \underbrace{Arg(f'(z_0))}_{:=\alpha} + Arg(z'(t_0)),$$ speziell: • *spécialement:*

$\rightsquigarrow$ Für • *Pour* γ_0, $f(\gamma_0)$: $Arg(w_0'(t_0)) = \alpha + Arg(z_0'(t_0))$.
$\rightsquigarrow$ Für • *Pour* γ_1, $f(\gamma_1)$: $Arg(w_1'(t_0)) = \alpha + Arg(z_1'(t_0))$.
$\Rightarrow \varphi_1 = Arg(w_0'(t_0)) - Arg(w_1'(t_0)) = (\alpha + Arg(z_0'(t_0))) - (\alpha + Arg(z_1'(t_0)))$
$\quad = (Arg(z_0'(t_0))) - (Arg(z_1'(t_0))) = \varphi_0 \ \Rightarrow\ \varphi_0 = \varphi_1$

Definition: • **Définition:** Eine Abbildung heisst **winkeltreu** oder **konform**, wenn sich der Schnittwinkel zweier differenzierbarer Wege ($\measuredangle$ zwischen Tangentenvektoren $\neq \vec{0}$) bei der Abbildung nicht ändert. • *Une application s'appelle* **conforme**, *si pour deux chemins dérivables l'angle d'intersection ($\measuredangle$ entre les vecteurs tangentiels $\neq \vec{0}$) ne change pas à l'application.*

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

f holomorph • *holomorphe* , $f'(z) \neq 0$ in • *dans* G

Beh.: • **Thè.:**

f konform in • *conforme dans* G

7.3 Möbius–Transformationen — Transformations de Möbius

7.4 Definitionen — Définitions

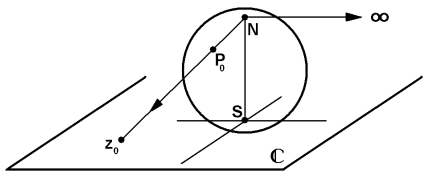
Definition: • **Définition:** $f_M(z) := \dfrac{az+b}{cz+d}$, $c \neq 0$ heisst Möbiustransformation.
• *s'appelle transformation de Möbius.*

Solche Abbildungen spielen in der technischen Praxis eine Rolle. • *Ces applications jouent un certain rôle dans la pratique technique.*

Klassisch gilt: • *On prétend classiquement:* $D_f = \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.
Um eine geschlossene Theorie zu erhalten, ist es aber hier notwendig, den Definitionsbereich für den Fall $-\frac{d}{c}$ auszudehnen: • *Pour obtenir une théorie fermée, il est nécessaire d'élargir le domaine de définition aussi pour le cas* $-\frac{d}{c}$.

Betrachtung: • *On trouve*:

Sei • *Soit* $f_M(z) = u(z) + i\,v(z)$, $z \to -\frac{d}{c} \;\Rightarrow\; r = |f_M(z)| = (u^2+v^2)^{\frac{1}{2}} \to \infty$.



$\mathbb{C}$ erweitern: • *Elargir* $\bar{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$,
$\infty \mathrel{\hat{=}}$ Nordpol der Gauss'schen Zahlenkugel.
• $\infty \mathrel{\hat{=}}$ *pôle nord de la sphère des nombres de Gauss.*

Definition: • **Définition:** $f_M(-\frac{d}{c}) := \infty$, $f_M(\infty) := \frac{a}{c}$

$(z \to \infty \;\Rightarrow\; f_M(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{z+\frac{b}{z}}{z+\frac{d}{z}} \to \dfrac{a}{c})$. Man sieht unmittelbar: • *On voit tout de suite:*

Satz: • **Théorème:** $f_M : \bar{\mathbb{C}} \overset{bij.}{\longmapsto} \bar{\mathbb{C}}$
f_M konform für • *conforme pour* $c \cdot b \neq d \cdot a$, $z \neq \infty$, $z \neq -\frac{d}{c}$

(Kontrolle der Bijektivität: Algebraische Umformung. • *Contrôle de la bijectivité: Transcription algébrique:* $f_M^{-1}(w) = z = -\dfrac{dw-b}{cw-a}$, $f'(z) = \dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}$)

Korollar: • **Corollaire:** f_M^{-1} ist auch Möbiustransformation, speziell:
• f_M^{-1} *est aussi transformation de Möbius, spécialement:*
$-\frac{d}{c} \overset{f}{\longmapsto} \infty, \qquad \infty \overset{f}{\longmapsto} \frac{a}{c},$
$+\frac{a}{c} \overset{f^{-1}}{\longmapsto} \infty, \qquad \infty \overset{f^{-1}}{\longmapsto} -\frac{d}{c}$

7.4.1 Eigenschaften — Qualités

Betrachte: • *considérer:* $f: \; z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{a}{c} \cdot (1 + \dfrac{\frac{b}{a} - \frac{d}{c}}{z + \frac{d}{c}})$

Sei • *Soit* : <u>Trans.</u> :> (Verschiebung • *Translation*), <u>Inv.</u> :> (Kehrwert bilden • *calculer l'inverse*), <u>Rot.</u> :> (Drehstreckung • *rotation et allongement*).

Dann kann man f wie folgt zusammensetzen: • *Alors on peut composer f comme il suit:*

$$z \overset{\text{Trans.}}{\longmapsto} w = z + \frac{d}{c} \overset{\text{Inv.}}{\longmapsto} \frac{1}{w} = \frac{1}{z+\frac{d}{c}} \overset{\text{Rot.}}{\longmapsto} \frac{a}{c} \cdot (\frac{b}{a} - \frac{d}{c}) \cdot \frac{1}{z+\frac{d}{c}} \; (= (\frac{b}{c} - \frac{a \cdot d}{c^2}) \cdot \frac{1}{z+\frac{d}{c}}) \overset{\text{Trans.}}{\longmapsto}$$
$$\overset{\text{Trans.}}{\longmapsto} \frac{a}{c} + \frac{a}{c} \cdot (\frac{b}{a} - \frac{d}{c}) \cdot \frac{1}{z+\frac{d}{c}} \;=\; \frac{a}{c}(1 + \frac{\frac{b}{a} - \frac{d}{c}}{z+\frac{d}{c}}) \;=\; \frac{az+b}{cz+d}$$

$\rightsquigarrow$ Eine Möbiustransformation lässt sich aus Drehstreckungen, Verschiebungen und einer Inversion $w \longmapsto \frac{1}{w}$ zusammensetzen. • *On peut composer les transformations de Möbius par des translations, des rotations et allongements et des inversions $w \longmapsto \frac{1}{w}$.*

Problem: • **Problème:** Drehstreckungen und Verschiebungen sind Ähnlichkeitsabbildungen, führen also Geraden in Geraden und Kreise in Kreise über. Was aber macht die Inversion?
• *Translations, rotations et allongements sont des applications qui appliquent les figures géométriques à des figures semblables. Mais qu'est-ce que font les inversions?*

Durch $z(t)$ sei eine Gerade in $\mathbb{C}$ gegeben. • *Soit donné une droite par $z(t)$.*

Es gilt: • *On constate:* $z(t) = e^{i\varphi} z_0(t)$: $\rightsquigarrow$
Gerade durch Drehung entstanden aus $z_0(t)$ ($\{z_0(t)\}$ in spezieller Lage $\perp$ x–Achse.)
• *Droite qui est obtenue par rotation de $z_0(t)$ ($\{z_0(t)\}$ en situation spéciale $\perp$ axe x .)*

$z(t) = e^{i\varphi} z_0(t) \longmapsto \dfrac{1}{z(t)} = e^{-i\varphi} \cdot \dfrac{1}{z_0(t)}, \;\; z_0(t) = x_0 + i\,t = x_0 \cdot (1 + i\,\dfrac{t}{x_0}) = x_0 \cdot (1 + i\lambda)$
($x_0 \neq 0$: Streckung • *allongement*).
($x_0 = 0 : z_0(t) = i\,t \to \frac{1}{x_0} = \frac{1}{i\,t} = -i\,\frac{1}{t}$, d.h. Gerade $\to$ Gerade • *ç.v.d. droite $\to$ droite.*)

$\rightsquigarrow$ Reduziertes Problem: • *problème réduit:* Gerade • *Droite* $1 + i\lambda \;\longmapsto\; \dfrac{1}{1+i\lambda} = ?$

Es gilt: • *On constate:* $1 \longmapsto 1$ und • *et* $\infty \longmapsto 0$. $\dfrac{1}{2}$ bildet die Mitte zwischen 0 und 1 • *est le milieu entre* 0 *et* 1.

Daher betrachten wir das Bild in einem Koordinatensystem, dessen Ursprung in $(0, \dfrac{1}{2})$ verschoben ist.
• *A cause de ça nous considérons un système de coordonnés dont l'origine est déplaçée à* $(0, \dfrac{1}{2})$.

Somit müssen wir die folgende Abbildung studieren: • *Ainsi nous devons étudier l'application suivante:* $1 + i\lambda \longmapsto \dfrac{1}{1+i\lambda} - \dfrac{1}{2}$. Wir formen um: • *Transcription:*

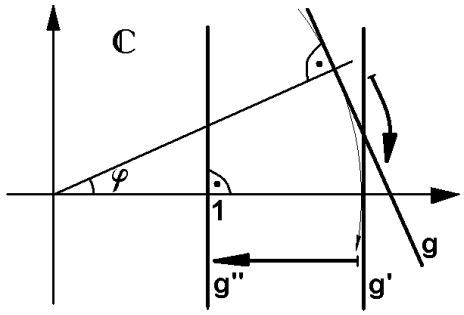
$$|\frac{1}{1+i\lambda} - \frac{1}{2}| = |\frac{1-i\lambda}{1+\lambda^2} - \frac{1}{2}| = |\frac{1 - i\lambda - \frac{1}{2}(1+\lambda^2)}{1+\lambda^2}| = |\frac{-i\lambda + \frac{1}{2}1 - \frac{1}{2}\lambda^2}{1+\lambda^2}| = |\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 2i\lambda + -\lambda^2}{1+\lambda^2}| =$$

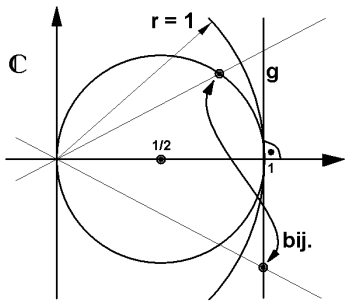
$$\frac{1}{2} \cdot |\frac{1 - 2i\lambda - \lambda^2}{1+\lambda^2}| = \frac{1}{2} \cdot |\frac{(1-i\lambda)^2}{1+\lambda^2}| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\lambda^2}{1+\lambda^2} = \frac{1}{2}$$

$$\rightsquigarrow \quad |\frac{1}{1+i\lambda} - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2} = const.$$

$\rightsquigarrow$ Das Bild der Gerade ist ein Kreis • *L'image de la droite est un cercle.*

Setzt man die Abbildungen wieder zusammen, so folgt, dass eine Gerade in jedem Fall entweder auf eine Gerade oder auf einen Kreis abgebildet wird. • *Si l'on compose les applications on voit qu'une droite est appliquée dans tous les cas sur une droite ou bien sur un cercle.*





Für die Umkehrabbildung h^{-1} von $h: \ z \longmapsto \dfrac{1}{z}$ gilt $h = h^{-1}$. Aus obiger Betrachtung folgt, dass unter h eine nicht zentrisch liegende Gerade in einen nicht zentrisch liegenden Kreis, umgekehrt also ein nicht zentrisch liegender Kreis in eine nicht zentrisch liegende Gerade abgebildet wird. Ein zentrisch liegender Kreis wird unter h bekanntlich auf einen ebensolchen Kreis abgebildet.

• *Pour l'application inverse* h^{-1} *de* $h: \ z \longmapsto \dfrac{1}{z}$ *on constate* $h = h^{-1}$. *Comme on vient de voir il résulte que sous h une droite non-centrale est appliquée sur un cercle non-central et d'autre part un cercle non–central est appliqué sur une droite non–centrale. Un cercle central est appliqué sous h sur un cercle pareil, comme on sait.*

Konsequenz • *Conséquence*:

Satz: • **Théorème:**

Vor.: • **Hyp.:**

f = Möbiustransformation • *transformation de Möbius*,
$K = \{$ Kreise, Geraden, • *cercles, droites* $\}$

Beh.: • **Thè.:**

$f: \ K \longmapsto K$ bijektiv • *bijectif*

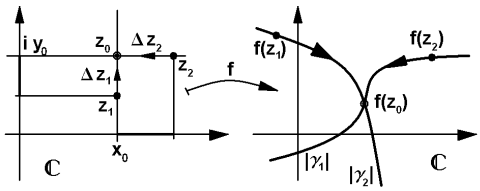
7.5 Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen — Equations différentielles de Cauchy-Riemann

7.5.1 Herleitung — Déduction

Sei • *Soit* $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ holomorph • *holomorphe* ,

$Re(f(z)) = u(z) = u(x,y),\ \ Im(f(z)) = v(z) = v(x,y)$

$\Rightarrow\ f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} D(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$



Betrachte • *Etudier*:

$z_0 = x_0 + i\,y_0$

$z_1 = z_0 + \Delta z_1 = x_0 + i\,(y_0 + \Delta y) = z_0 + i\,\Delta y$

$z_2 = z_0 + \Delta z_2 = (x_0 + \Delta x) + i\,y_0 = z_0 + \Delta x$

Auf • *Sur* γ_1:

$$D(z) = \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{u(z_0 + \Delta x) - u(z_0)}{\Delta x} + i\,\frac{v(z_0 + \Delta x) - v(z_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + i\,\frac{\Delta v}{\Delta x} \ \to\ \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Auf • *Sur* γ_2:

$$D(z) = \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{u(z_0 + i\,\Delta y) - u(z_0)}{i\,\Delta y} + i\,\frac{v(z_0 + i\,\Delta y) - v(z_0)}{i\,\Delta y} = \frac{\Delta u}{i\,\Delta y} + i\,\frac{\Delta v}{i\,\Delta y}$$

$$\to\ \frac{\partial u}{i\,\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

$\lim\limits_{z \to z_0} D(z) = f'(z_0)$ darf nicht vom Weg γ_k abhängen • *ne doit pas dépendre du chemin* γ_k. Daher gilt:

• *Ainsi on constate:* $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\,\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{i\,\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial y}$

Diese Betrachtung lässt sich auch umkehren. • *Cette déduction se laisse aussi inverser.* $\rightsquigarrow$

Satz: • **Théorème:** **Cauchy–Riemann'sche Differentialgleichungen**
• Equations différentielles de Cauchy–Riemann:

f holomorph in • *holomorphe dans* $G \ \Leftrightarrow\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \ \wedge\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

in • *dans* G

Mit diesen Differentialgleichungen lässt sich oft rasch entscheiden, ob eine gegebene Funktion holomorph ist. • *A l'aide de ces équations différentielles on peut souvent vérifier rapidement si une fonction donnée est holomorphe.*

7.5.2 Harmonische Funktionen — Fonctions harmoniques

Sei • *Soit* $\triangle := \dfrac{\partial^2}{\partial x} + \dfrac{\partial^2}{\partial y}$, (allgemeiner • *généralement*: $\triangle := \sum_{k=0}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_k}$)

Definition: • **Définition:** f heisst harmonisch in • *s'appelle harmonique dans* G :
$\Leftrightarrow\ \triangle f = 0$ in • *dans* G

Aus der Analysis ist bekannt, dass für einigermassen „anständige“ Funktionen f gilt:
• *De l'analyse on sait que pour des fonctions "convenables" f on a:* $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2}{\partial y \partial x}$.
In der sogenannten „Funktionentheorie“ wird bewiesen, dass eine in einem Gebiet holomorphe Funktion immer in eine Potenzreihe entwickelt werden kann, also mindestens zweimal differenzierbar ist.
• *Dans la théorie des fonctions complexes on prouve qu'une fonction holomorphe dans un domaine G peut toujours être développée dans une série de puissances. Par conséquence elle est au moins deux fois dérivable.*
Wir definieren nun: • *Nous utilisons la définition suivante:*

Definition: • **Définition:** f **harmonisch** in • **harmonique** *dans* G
$:\Leftrightarrow \ \triangle f = 0$ in • *dans* G

Daher sieht man durch einfache Rechnung mit Hilfe von Cauchy–Riemann:
• *Alors on voit par un calcul simple à l'aide de Cauchy–Riemann:*

Satz: • **Théorème:**

Vor.: • **Hyp.:**

f holomorph in • *holomorphe dans* G

Beh.: • **Thè.:**

f harmonisch in • *harmonique dans* G

Konsequenz: • **Conséquence:**
$f(z) = u(z) + i\,v(z)$ holomorph in • *holomorphe dans* G
$\Leftrightarrow \ u(z), v(z)$ holomorph in • *holomorphe dans* G

Damit haben wir das Rüstzeug für die Diskussion wichtiger **transzendenter** komplexer Funktionen: Exponentialfunktion, Logarithmusfunktion, trigonometrische Funktionen, Arcusfunctionen u.s.w..
• *A l'aide de ce matériel la discussion d'importantes fonctions complexes* **trascendantes** *nous est facilitée: la fonction exponentielle, le logarithme, les fonctions trigonométriques, les fonctions circulaires inverses etc..*

7.6 Komplexe Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion — Fonctions exponentielle et logarithme complexes

Im Reellen kann die Eulersche Exponentialfunktion durch folgende drei Eigenschaften definiert werden:
• *Dans les nombres réels on peut définir la fonction exponentielle d'Euler par les trois qualités suivantes:*

1	f diff'bar in $\mathbb{R}$ • f *dérivable dans* $\mathbb{R}$
2	$\forall_{x\in\mathbb{R}}\ f(x) = f'(x)$
3	$f(0) = 1$

In der Theorie der Differentialgleichungen wird gezeigt, dass eine Lösung f existiert und auch eindeutig bestimmt ist als Lösung des gegebenen Anfangswertproblems.
• *Dans la théorie des équations différentielles on démontre que la solution f existe et qu'elle est univoque comme solution du problème des valeurs initiales.*

Diese Problemstellung lässt sich samt Lösungskonzept ins Komplexe übertragen. Dabei spielt Cauchy–Riemann eine wichtige Rolle. • *Ce problème se laisse transférer dans le complexe. Le concept pour la solution est le même. Cauchy–Riemann joue ici un rôle important.* Vdist
Sei • *Soit* $z = x + i\,y$. Bekannt: • *Nous connaissons déjà*: $e^x,\ e^{iy} := \cos(y) + i\sin(y)$.

Bemerkung: • **Remarque:**

$i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ l^5 = i,\ i^6 = -1,\ i^7 = -i,\ i^8 = 1,\ \ldots$

Benutze die Potenzreihenentwicklung • *Utiliser les séries de puissances:* $\rightsquigarrow$

$$\cos(\varphi) = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \frac{\varphi^8}{8!} - \frac{\varphi^{10}}{10!} + \ldots = 1 + \frac{(i\,\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\,\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\,\varphi)^6}{6!} + \frac{(i\,\varphi)^8}{8!} + \frac{(i\,\varphi)^{10}}{10!} + \ldots$$

$$i\,\sin(\varphi) = i\,\varphi - \frac{i\,\varphi^3}{3!} + \frac{i\,\varphi^5}{5!} - \frac{i\,\varphi^7}{7!} + \frac{i\,\varphi^9}{9!} - \ldots = i\,\varphi + \frac{(i\,\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\,\varphi)^5}{5!} + \frac{(i\,\varphi)^7}{7!} + \frac{(i\,\varphi)^9}{9!} + \ldots$$

$$\cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi) = 1 + i\,\varphi + \frac{(i\,\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\,\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\,\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\,\varphi)^5}{5!} + \frac{(i\,\varphi)^6}{6!} + \frac{(i\,\varphi)^7}{7!} + \frac{(i\,\varphi)^8}{8!} + \frac{(i\,\varphi)^9}{9!} + \ldots = e^{i\,\varphi}$$

$$\Rightarrow\ \cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi) = e^{i\,\varphi}$$

Wir définieren damit: • *Nous définissons donc:*

Definition: • **Définition:** $f(z) := e^z = e^{x+iy} := e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos(y) + i\sin(y))$
(**Exponentialfunktion** • **Fonction exponentielle**)

Die rechte Seite ist bekannt • *On connaît déjà le côté droite.*
$\rightsquigarrow\quad u(x,y) = e^x \cdot \cos(y),\ \ v(x,y) = e^x \cdot \sin(y).$

Für u und v gilt: • *Pour* u *et* v *on calcule:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cdot \cos(y)\ \wedge\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cdot \cos(y).$$

Damit ist f holomorph. • *Donc* f *est holomorphe.*

Daher ist der Differentialquotient wegunabhängig.
• *Alors le quotient différentiel ne depend pas du chemin.*

Wir können daher rechnen: • *Alors on peut calculer:*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta x) - f(z_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{z_0 + \Delta x} - e^{z_0}}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x + iy_0} - e^{x_0 + iy_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} \cdot e^{iy_0} - e^{x_0} \cdot e^{iy_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} \cdot e^{iy_0} =$$
$$= e^{x_0} \cdot e^{iy_0} = e^{x_0 + iy_0} = e^{z_0}$$

$\rightsquigarrow$ $f(z) = e^z$ erfüllt die Differentialgleichung • *$f(z) = e^z$ satisfait l'équation différentielle:* $f(z) = f'(z)$ in • *dans* $\mathbb{C}$.

Zudem gilt: • *En plus on voit:* $f(0) = e^{0+i0} = e^0 = 1$.

Weiter folgt aus der Theorie der Differentialgleichung die Eindeutigkeit der Lösung.
• *En outre on peut déduire de la théorie des équations différentielles que la solution est univoque.*

Satz: • **Théorème:** $f(z) = e^z$ ist die einzige Funktion, die folgende Bedingungen erfüllt
• *$f(z) = e^z$ est la seule fonction qui satisfasse les conditions suivantes:*

1	f diff'bar in $\mathbb{R}$ • *f dérivable dans* $\mathbb{R}$
2	$\forall_{x\in\mathbb{R}}: \; f(x) = f'(x)$
3	$f(0) = 1$

Die folgenden Reglen lassen sich einfach nachprüfen mit Hilfe von: • *Les règles suivantes se laissent vérifier à l'aide de:* $e^z = e^x \cdot (\cos(y) + i\sin(y))$.

Dabei benutzen wir folgende Bezeichnung: • *Nous y utilisons la notation suivante:*

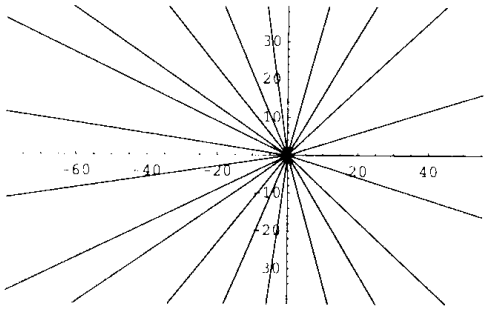
$S_n := \{z = x + i(y + 2n\pi) \mid y \in (-\pi, \pi]\}$ heisst **Periodenstreifen** • *s'appelle* **bande de période**, $\dot{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

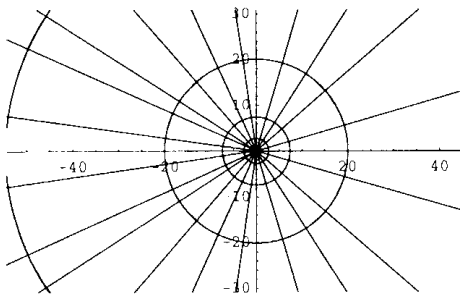
Regeln: • **Règles:**

1	$\lvert e^z\rvert = e^x = e^{Re(z)}$
2	$Arg(e^z) = y = Im(z)$
3	$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$
4	$e^z = e^{z+i2n\pi} = e^z = e^z \cdot e^{i2n\pi}$
5	$S_n \overset{bji.}{\longmapsto} \dot{\mathbb{C}}$

{Horizontale Geraden • *Droites horizontales*} $\longmapsto$ {zentrische Strahlen • *rayons centraux*}

{Vertikale Geraden • *Droites verticales*} $\longmapsto$ {zentrische Kreise • *cercles centraux*}





Wegen der Bijektivität von $f(z) = e^z = w$ auf $(S_n \times \dot{\mathbb{C}})$ existiert jeweils die Umkehrfunktion $f_n^{-1}(w) = z$, allerdings abhängig von n (Standard in der Literatur: $n = 0$). • *A cause de la bijectivité de $f(z) = e^z = w$ sur $(S_n \times \dot{\mathbb{C}})$ la fonction inverse $f_n^{-1}(w) = z$ existe, mais elle dépend de n. (Standard dans la littérature: $n = 0$).*

Bemerkung: • **Remarque:**

Mit Hilfe des Begriffs der **Riemannschen Fläche** gelingt es, die Umkehrfunktion eindeutig zu machen. Dazu Unterscheiden wir verschiedene komplexe Bildebenen $\dot{\mathbb{C}}_n$ mit $f: S_n \longmapsto \dot{\mathbb{C}}_n$. Da der Rand der Streifen S_n auf $\mathbb{R}^{(-)}$ abgebildet wird, denkt man sich alle diese $\dot{\mathbb{C}}_n$ längs der negativen reellen Achse aufgeschnitten und dort mit den beiden Nachbarn $\dot{\mathbb{C}}_{n-1}$ und $\dot{\mathbb{C}}_{n+1}$ verklebt. Das entstehende Gebilde R (eine Riemannsche Fläche) gleicht dann einer Wendeltreppe (nahe beim Ursprung hinkt der Vergleich aber). Für $(\mathbb{C} \times R)$ ist dann f bijektiv.
• *A l'aide de la notion de la* **surface de Riemann** *on arrive à rendre univoque la fonction inverse. Pour cela nous distinguons différents plans images complexes $\dot{\mathbb{C}}_n$: $f: S_n \longmapsto \dot{\mathbb{C}}_n$. Comme le bord de la bande S_n est appliqué sur $\mathbb{R}^{(-)}$, on s'imagine tous ces $\dot{\mathbb{C}}_n$ coupés le long de l'axe réel négatif et collés aux deux voisins $\dot{\mathbb{C}}_{n-1}$ et $\dot{\mathbb{C}}_{n+1}$. La construction obtenue R (une surface de Riemann) ressemble à un escalier tournant (à proximité de l'origine la comparaison est mauvaise). Sur $(\mathbb{C} \times R)$ f est bijectif.*

Definition: • **Définition:** Die eben besprochene Umkehrfunktion $f^{-1}: \dot{\mathbb{C}}_n \longmapsto S_n$ heisst **natürliche Logarithmusfunktion** • *La fonction inverse f^{-1} : $\dot{\mathbb{C}}_n \longmapsto S_n$ dont on vient de parler s'appelle* **logarithme naturel**. $f^{-1}(w) = \ln(w) \longmapsto z$

Üblicherweise werden wir ln auf dem Standardstreifen S_0 betrachten.
• *Normalement nous allons considérer le* ln *sur la bande standard S_0.*

Es ist: • *On trouve:* $f: z = x + i\,y \longmapsto f(z) = e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) = u(x,y) + i\,v(x,y) = w$, $r = |w| = e^x$, $Arg(w) = y$.
$\rightsquigarrow \quad f^{-1}: w = u + iv \longmapsto f^{-1}(w) = \ln(w) = z = x + i\,y$
mit • *avec* $x = ln|w|$, $y = Arg(w) = \arctan(\frac{v}{u}) \quad \rightsquigarrow$

Satz: • **Théorème:**

Vor.: • **Hyp.:**

$f(z) = e^z = w, \ z \in S_0$

Beh.: • **Thè.:**

$f_0^{-1}(w) = \ln(w) = \ln|w| + iArg(w) = \ln|e^z| + iArg(e^z) = z$

Bsp.: • **Exemple:** Sei • *Soit* $x \in \mathbb{R}^+$. $f_0^{-1}(-x) = \ln_0(-x) = \ln(x) + iArg(-x) = \ln(x) + i\pi$,
Speziell: • *Spécialement:* $f_0^{-1}(-1) = \ln_0(-1) = \ln(1) + iArg(-1) = 0 + i\pi = i\pi$.

7.7 Trigonometrische Funktionen, Arkusfunktionen — Fonctions trigonométriques, fonctions circulaires inverses

Bekannt sind die Eulerschen Identitäten: • *Nous connaissons les identités d'Euler:*

$$e^{\pm i\varphi} = \cos(\varphi) \pm i\sin(\varphi)$$

Damit lässt sich Sinus und Cosinus rein analytisch definieren, also losgelöst von Geometrie.
• *A l'aide de ces identités on peut définir les fonctions sinus et cosinus de manière pure analytique, ç.v.d. indépendamment de la géométrie.*

$$\rightsquigarrow \quad \sin(x) := \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2\,i}, \quad \cos(x) := \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Diese Formeln lassen sich jetzt für komplexe z verallgemeinern. • *Maintenant nous pouvons généraliser ces formules pour des z complexes.* $\rightsquigarrow$ Sei • *Soit $z \in \mathbb{C}$*

Definition: • **Définition:**

$$\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2\,i}, \quad \cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$
$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}, \quad \cot(z) = \frac{1}{\tan(z)},$$
$$\arcsin(w) = z \text{ für } \bullet \text{ } \textit{pour } w = \sin(z) \text{ u.s.w } \bullet \textit{ etc.}$$

Bemerkung: • **Remarque:** Die im Reellen geltenden Regeln bleiben erhalten.
• *Les règles connues du réel restent valables:*

1 Differentiationsregeln • *Règles pour les dérivés:*
Z.B. • *P.ex.* $(\sin(z))'_z = \cos(z)$

2 Additionstheoreme • *Théorèmes de l'addition*

3 Regeln für Nullstellen • *Règles pour les zéros*

4 ... u.s.w • *etc.*

Ein Beispiel • *Un exemple*:

Problem: • **Problème:** Was ist das Bild des kartesischen Koordinatengitters unter der Cosinusfunktion? • *Quel est l'image de la grille des coordonnés cartesiens sous la fonction cosinus?*

$$\cos(z) = \cos(x + i\,y) = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} = \frac{e^{ix} \cdot e^{-y} + e^{-ix} \cdot e^{y}}{2}$$
$$= \frac{(\cos(x) + i\sin(x)) \cdot e^{-y} + (\cos(-x) + i\sin(-x)) \cdot e^{y}}{2}$$
$$= \frac{(\cos(x) + i\sin(x)) \cdot e^{-y} + (\cos(x) - i\sin(x)) \cdot e^{y}}{2} = \frac{\cos(x) \cdot (e^{y} + e^{-y}) - i(\sin(x) \cdot (e^{y} - e^{-y}))}{2}$$
$$= \cos(x) \cdot \cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y). \qquad \rightsquigarrow \qquad \cos(z) \hat{=} \begin{pmatrix} \cos(x) \cdot \cosh(y) \\ \sin(x)\sinh(y) \end{pmatrix}$$

In der Regel sind somit die Bilder der horizontalen Geraden Ellipsen, die Bilder der vertikalen Geraden Hyperbeln. • *Donc normalement les images des droites horizontales sond des ellipses, les images des droites verticales sont des hyperboles.*

7.8 Anwendungen — Applications

7.8.1 Idee — Idée

Oft gelingt es Probleme zu lösen, indem man die gegebene geometrisch komplizierte Situation konform in eine einfachere Situation abbildet. Wenn sich bei einer solchen bijektiven Abbildung die Problembedingungen einfach auf die neue Situation übertragen, kann man das Problem in der neuen Situation

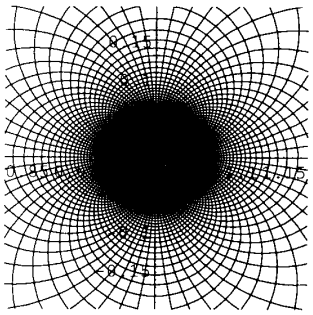
lösen und dann die Lösung zurückabbilden.
• *Souvent on arrive à résoudre le problème en appliquant la situation compliquée donnée de façon conforme en une situation plus simple. Quand, pour une telle application bijective, les conditions du problème sont les mêmes que pour la nouvelle situation, on peut résoudre le problème là et après appliquer la solution à l'inverse.*

Z.B. soll der Potentialverlauf zwischen einem Fahrleitungsdraht und einer Brücke studiert werden. Nimmt man im Querschnitt die Brücke als Gerade und den Draht als Kreis an, so kann man eine konforme Abbildung konstruieren, die diese Situation auf zwei konzentrische Kreise abbildet. Dort ist der Potentialverlauf offensichtlich (Zentralfeld).
• *Par exemple il faut étudier la différence de potentiel entre un pont et le caténaire (ligne de contact) d'un train. Dans la coupe on prend le pont comme droite et le fil comme cercle. Alors on peut construire une application conforme qui transforme cette situation en deux cercles concentriques. Là la différence du potentiel est bien claire (champs centrale).*

7.8.2 Smith–Diagramm — Diagramme de Smith

In der Elektrotechnik spielt die Möbiustransformation $\mathbb{C} \ni z \longmapsto w = f(z) = \dfrac{z-1}{z+1} \in \mathbb{C}$ eine wichtige Rolle. Das Bild des rechtwinkligen Koordinatennetzes der z–Ebene in der w Ebene heisst **Smith–Diagramm** (Smith-Chart).
• *En électronique la transformation de Möbius* $\mathbb{C} \ni z \longmapsto w = f(z) = \dfrac{z-1}{z+1} \in \mathbb{C}$ *joue un rôle important. L'image du système de coordonnés du plan z dans le plan w s'appelle* **diagramme de Smith** *(Smith-Chart).*

f erzeugt vom rechtwinkligen Koordinatennetzes der z–Ebene in der w Ebene folgendes Bild (vgl. Fig.):
• *f crée dans le plan w l'image suivante du système de coordonnés du plan z (voir fig.):*



Das Bild der vertikalen Geraden der z–Ebene mit den Realanteilen $x = 0$ ist der Einheitskreis. Die Bilder aller andern Vertikalen sind Kreise, die im Einheitskreis drin liegen, diesen in $w = 1$ berühren und mit wachsendem $Re(z)$ kleiner werden. Die horizontalen Halbgeraden gehen in Kreislinien über, die die erwähnten Kreise senkrecht schneiden. • *L'image de la droite verticale avec la partie réelle $x = 0$ du plan z est le cercle unité. Les images des autres droites verticales sont des cercles, qui sont situés dans le cercle unité et qui touchent celui à $w = 1$ et qui deviennent de plus en plus petit avec* $\mathrm{Re}(z)$ *s'agrandissant. Les demi–droites horizontales deviennent des parties de cercle qui sont perpendiculaires aux cercles mentionées aux points d'intersection.*

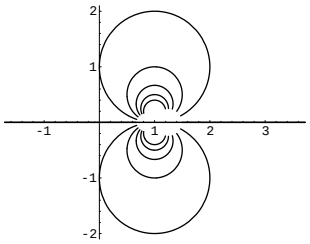
Es gilt: • *Il vaut:* $$f(\tfrac{1}{z}) = \frac{\frac{1}{z}-1}{\frac{1}{z}+1} = \frac{1-z}{1+z} = -\frac{z-1}{1+z} = -f(z)$$

Konsequenz: • **Conséquence:** Im Smidt–Diagramm kann man die Inversen einer komplexen Zahl z graphisch einfach durch Spiegelung an den Ursprung bestimmen. Es gilt: $f(\frac{1}{z}) = -f(z)$.
• *Dans le diagramme de Smidt on peut trouver l'inverse d'un nombre complexe de façon simple: Graphiquement par la réflexion à l'origine. Il vaut:* $f(\frac{1}{z}) = -f(z)$.

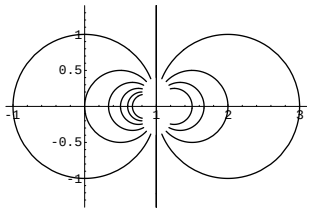
Konstruktion — Construction

Mit *Mathematica:* • *A l'aide de Mathematica:*

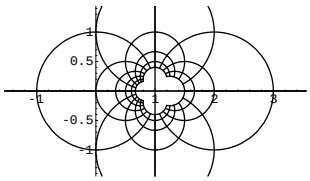
```
f[z_]:=(z-1)/(z+1);
z1[t_,a_]:= t + a I;
z2[t_,b_]:= b + t I;
u[z_]:={Re[f[z]],Im[f[z]]};

p1=ParametricPlot[Evaluate[Table[u[z1[t,a]],{a,-5,5}]],{t,-5,5}, AspectRatio->Automatic];
p2=ParametricPlot[Evaluate[Table[u[z2[t,a]],{a,-5,5}]],{t,-5,5}, AspectRatio->Automatic];
Show[p1,p2];
```



p1



p1



Show[p1,p2]

7.8.3 Joukowski–Profil — Profil de Joukowski

Wir studieren ein konkretes Beispiel: Nous étudions un exemple concret:

Gegeben sei in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ der Kreis: • *Soit donné le cercle dans le plan complexe:* $t \longmapsto z(t) = \sqrt{0.97} \cdot e^{i \cdot t} + (-0.1 + 0.4\,i),\ t \in [0, 2\,\pi]$.

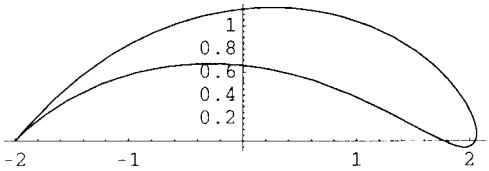
Betrachte dazu noch die komplexe Abbildung: • *Etudions en plus l'application complexe:*

$$\varphi : z \longmapsto \varphi(z) = z + \frac{1}{z}.$$

Hiermit wird folgendes Bild der Kurve $z(t)$ definiert:
• *Ainsi on a défini l'image suivante de la courbe $z(t)$:*

$$\varphi(z(t)) := w(t) = z(t) + \frac{1}{z(t)}$$

Die Kurve $w(t)$ in $\mathbb{C}$ zeigt ein stromlinienförmiges Profil.
Dieses Kurvenprofil spielt in der Aerodynamik (z.B. beim Tragflügel) oder bei Turbinenschaufeln eine Rolle. Es heisst *Joukowski–Profil.*
• *Cette courbe $w(t)$ dans $\mathbb{C}$ montre un profil 'aérodynamique'.*
Ce profil joue un rôle important dans l'aérodynamique (p.ex. à l'aile d'avion) ou l'aube de tourbine. Il s'appelle profil de Joukowski.

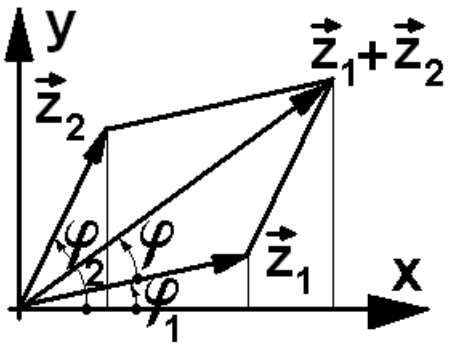


7.8.4 Zeigerdiagramme — diagrammes–vecteurs

In der Elektrotechnik ist es im Zusammenhang mit Wechselstrom üblich, den Strom I und die Spannung U mit Hilfe von **Zeigern** (Vektoren) in Form von komplexen Zahlen zu schreiben. Auf diese Weise lassen sich verschiedene Ströme uns Spannungen einfach addieren.
• *Dans l'électrotechnique, à propos de courant alternatif, il est usuel d'écrire le courant I et la tension U à l'aide de vecteurs ou de rayons comme nombres complexes. De cette manière il est plus simple d'additionner des courans ou des tensions.*

Bsp.: • **Exemple:** $I == I_0 \cos(\omega \cdot t + \varphi_I),\ U = U_0 \cos(\omega \cdot t + \varphi_U)$

$\rightsquigarrow$ Allgemein: • *Généralement:*
$z_{Re} = z_0 \cos(\omega \cdot t + \varphi_0),\ z_{Im} = z_0 \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) \rightsquigarrow\ \vec{z} = \begin{pmatrix} z_0 \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) \\ z_0 \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) \end{pmatrix} \hat{=} z_0 \cdot e^{I\,\omega\,t+\varphi_0}$



Zeiger / Vecteurs ou rayons

Sei • *Soit*

$\vec{z}_1 \hat{=} A_1 \cdot e^{I\,\omega\,t+\varphi_1}$
$\vec{z}_2 \hat{=} A_2 \cdot e^{I\,\omega\,t+\varphi_2}$
$\vec{z} \hat{=} A \cdot e^{I\,\omega\,t+\varphi}$

$\rightsquigarrow$ Es gilt: • *Il vaut:*

$A = |\vec{z}_1 + \vec{z}_2|,$
$\varphi = \varphi_1 + \arccos(\frac{\langle \vec{z}_1, \vec{z}_1 + \vec{z}_2 \rangle}{|\vec{z}_1| \cdot |\vec{z}_1 + \vec{z}_2|})$

$\rightsquigarrow\ A_1 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_1) + A_2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_2) =$

$$= |A_1 \begin{pmatrix} \cos(\omega \cdot t + \varphi_1) \\ \sin(\omega \cdot t + \varphi_1) \end{pmatrix} + A_2 \begin{pmatrix} \cos(\omega \cdot t + \varphi_2) \\ \sin(\omega \cdot t + \varphi_2) \end{pmatrix}| \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_1 + \arccos(\frac{\langle \vec{z}_1, \vec{z}_1 + \vec{z}_2 \rangle}{|\vec{z}_1| \cdot |\vec{z}_1 + \vec{z}_2|}))$$

7.9 Darstellung komplexer Funktionen — Représentation de fonctions complexes

7.9.1 Beispiel einer Kurve — Exemple d'une courbe

Geg.: • **Donné:**

$$z(t) := \frac{1}{1 + i\,t},\ \ g(t) = 1 + i\,t,\ \ z(t) := \frac{1}{g(t)}$$

Code: *(Mathematica)*

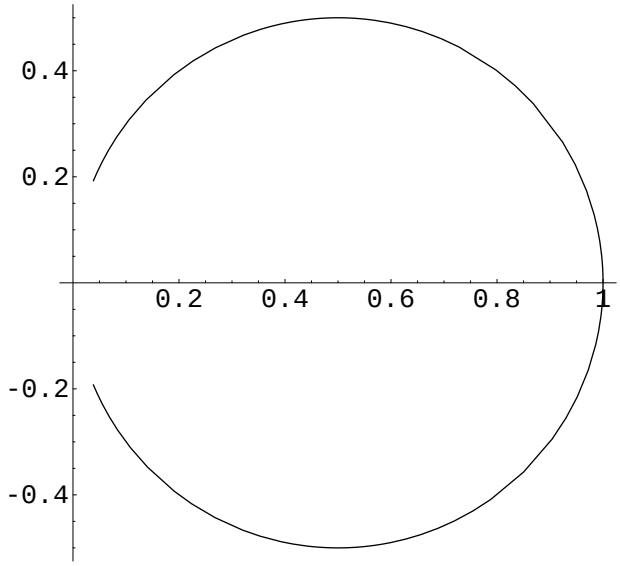
```
z[t_] := 1/(1 + I t);
ParametricPlot[{Re[z[t]], Im[z[t]]}, {t, -5, 5}, AspectRatio -> Automatic];
amplitude[t_] := Norm[z[t]];
Plot[amplitude[t], {t, -5, 5}];
Plot[Arg[z[t]], {t, -5, 5}];
```

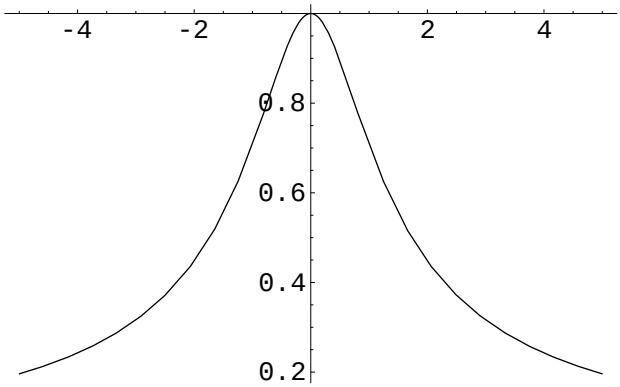
Output: *(Mathematica)*

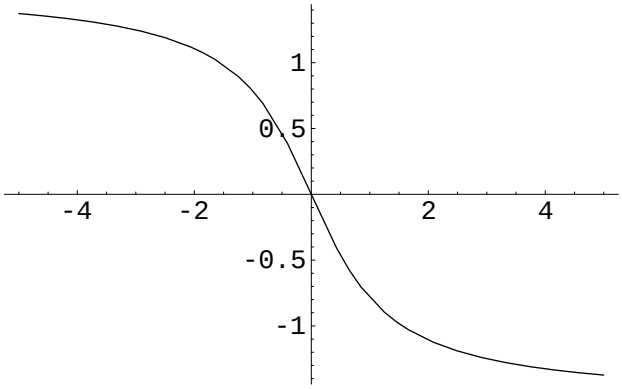
Rechts: Die Funktionskurve im Komplexen.
• *A droite: La courbe de la fonction dans le complexe.*

Unten links: Der Betrag des Funktionswerts.
• *En bas à gauche: La valeur absolue de la valeur de la fonction.*

Unten rechts: Das Argument des Funktionswerts.
• *En bas à droite: La valeur de l'argument de la fonction.*







7.9.2 Beispiel einer rationalen Funktion — Exemple: Fonction rationnelle

Geg.: • **Donné:**

$$f(z) := \frac{2z^2 - z}{z^3 - z^2 + 1}$$

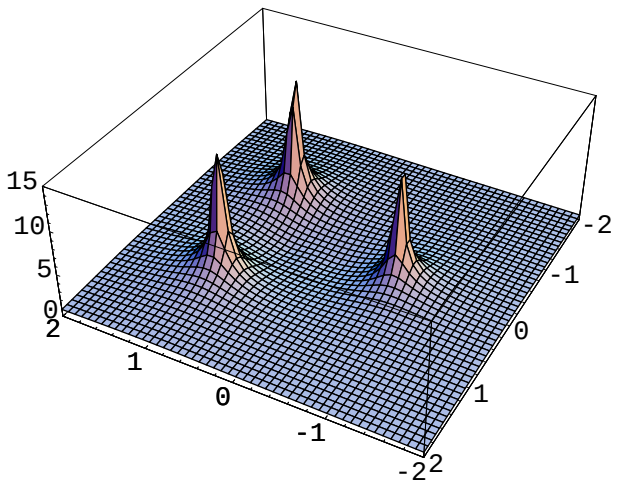
Code: *(Mathematica)*

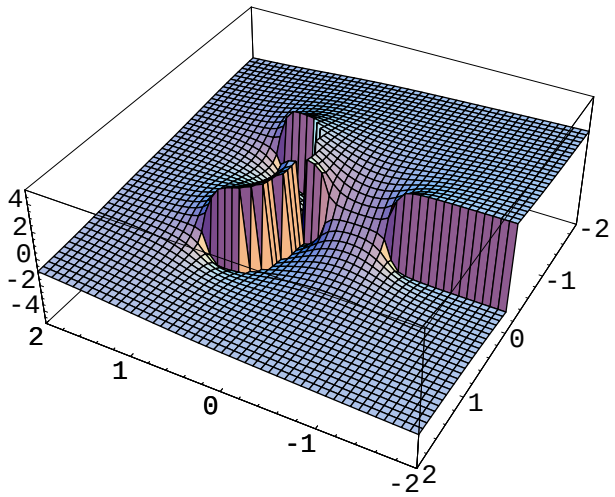
```
f[z_] := (2 z^2 - z)/(z^3 - z^2 + 1)
z[s_, t_] := s + I t;
u[s_, t_] := Norm[f[z[s, t]]];
w[s_, t_] := Arg[f[z[s, t]]];
Plot3D[u[s, t], {s, -2, 2}, {t, -2, 2},
    PlotPoints -> 50, PlotRange -> {0, 15}, ViewPoint -> {-1.3, +2.4, 2.}];
Plot3D[w[s, t], {s, -2, 2}, {t, -2, 2},
    PlotPoints -> 50, PlotRange -> {-5, 5}, ViewPoint -> {-1.3, +2.4, 2.}];
Plot3D[Re[f[z[s, t]]], {s, -2, 2}, {t, -2, 2},
     PlotPoints -> 50, PlotRange -> {-5, 5}, ViewPoint -> {-1.3, +2.4, 2.}];
Plot3D[Im[f[z[s, t]]], {s, -2, 2}, {t, -2, 2},
     PlotPoints -> 50, PlotRange -> {-5, 5}, ViewPoint -> {-1.3, +2.4, 2.}];
```

Output: *(Mathematica)*

Unten links: Der Betrag des Funktionswerts.
• *En bas à gauche: La valeur absolue de la valeur de la fonction.*

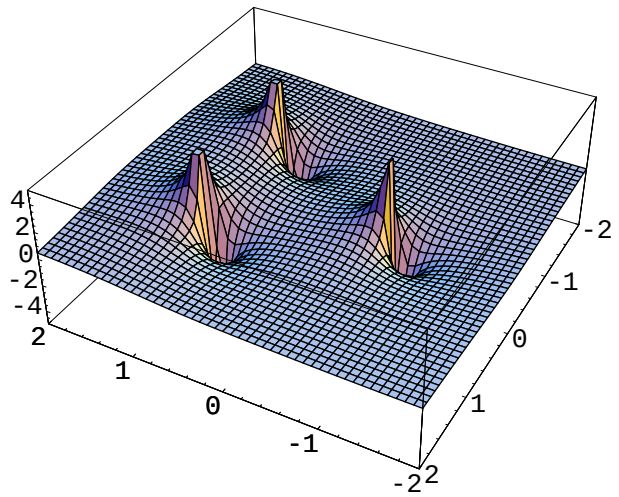
Unten rechts: Das Argument des Funktionswerts.
• *En bas à droite: La valeur de l'argument de la fonction.*

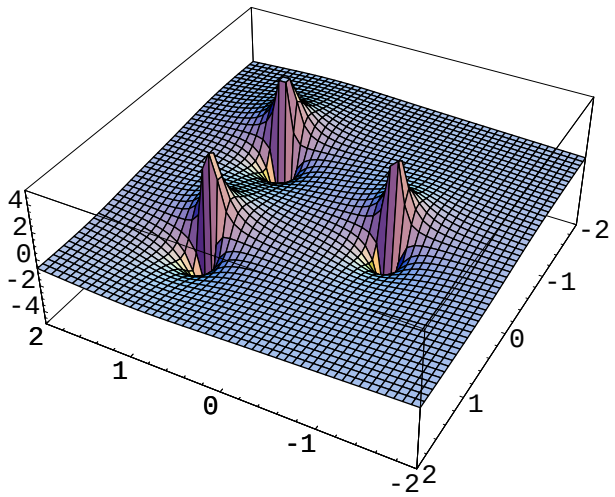




Unten links: Der Realanteil des Funktionswerts.
• *En bas à gauche: La valeur reelle de la valeur de la fonction.*

Unten rechts: Der Imaginäranteil des Funktionswerts.
• *En bas à droite: La valeur imaginaire la valeur de la fonction.*





Kapitel • Chapitre 8

Lineare Gleichungssysteme — Systèmes d'équations linéaires

8.1 Die Struktur des Lösungsraum — La structure de l'espace de solutions

8.1.1 Lineare Gleichung — Equation linéaire

Bekanntlich hat eine lineare Gleichung mit m Unbekannten die Form
• *Comme il est déjà connu, une équation à m inconnues a la forme:*

$n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + \ldots + n_m \cdot x_m = k$ oder • *ou* $n_0 \cdot 1 + n_1 \cdot x_1 + \ldots + n_m \cdot x_m = 0,\ \ k = -n_0,$
$m \in \mathbb{N},\ \forall_i :\ n_i \neq 0$ (sonst käme x_i nicht vor • *si non x_i n'apparaîtrait pas.*

Mit Hilfe des Skalarproduktes kann man schreiben: • *A l'aide du produit scalaire nous pouvons écrire:*

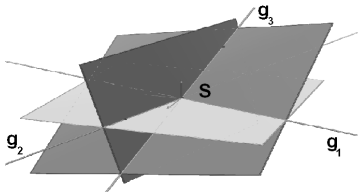
$$n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + \ldots + n_m \cdot x_m = \langle \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \rangle = \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = k,\ \ \vec{n} \text{ fix } \bullet \textit{ fixe.}$$

Geometrische Bedeutung der Lösungsmenge $\{\vec{x}\} = \mathbb{L}$
• **Interprétation géométrique** *de l'ensemble de solutions* $\{\vec{x}\} = \mathbb{L}$*:*

Für $m = 2$ ist $\mathbb{L}$ geometrisch bekanntlich[3] eine Gerade, für $m = 3$ eine Ebene, für $m > 3$ nennen wir das Gebilde **Hyperebene**. $\rightsquigarrow$ **Definition!**
• *Pour $m = 2$, $\mathbb{L}$ est géométriquement une droite, comme nous savons déjà*[3]*. Pour $m = 3$ on a un plan, pour $m > 3$ nous appellons cet ensemble* **hyperplan**. $\rightsquigarrow$ **Définition!**

Mehrere Gleichungen bilden ein **System**.
• *Plusieurs équations forment un système.*

$$\left| \begin{array}{ccc} \langle \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{x} \rangle & = & k_1 \\ & \vdots & \\ \langle \overrightarrow{n_j}, \overrightarrow{x} \rangle & = & k_j \end{array} \right|$$



[3] Vgl. Hess'sche Normalform (*HNF*) • *Voir forme normale de Hess (HNF)*

$|\vec{n}| = |\begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_m \end{pmatrix}| = 1 \Rightarrow k = d.$ Sei • *Soit* $\vec{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow$ Einfluss von $\vec{n}$, k in einer Gleichung: • *Influence de* $\vec{n}$, k *dans une équation:*

1 $\forall_{i\in\{1,\dots,j\}}\ \vec{n}_i = \vec{0} \Rightarrow \vec{k} = \vec{0} \Rightarrow \mathbb{L} = \mathbb{R}^m$
$\vec{k} \neq \vec{0} \Rightarrow \mathbb{L} = \{\}$

2 $\exists_{i\in\{1,\dots,j\}}\ \vec{n}_i \neq \vec{0} \Rightarrow$ **Definitionen:** • **Définitions:**
$\vec{k} = \vec{0}$: **Homogene** Gleichung resp. **homogenes** System $\rightsquigarrow$ $\vec{n}_i \perp \vec{x}$
• *Equation* **homogène** *resp. système* **homogène**
$\vec{k} \neq \vec{0}$: **Inhomogene** Gleichung resp. **inhomogenes** System $\rightsquigarrow$ $\vec{n}_i \not\perp \vec{x}$
• *Equation* **non homogène** *resp. système* **non homogène**

8.1.2 Lineare Mannigfaltigkeit — Variété linéaire

Sei • *Soit* $P_{inh}: \langle \vec{n}, \vec{x}\rangle = k$, $P_{hom}: \langle \vec{n}, \vec{x}\rangle = 0$. ($P \rightsquigarrow$ 'Problem' • *'Problème'*)

⊘ Seien • *Soient* $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ beliebige Lösungen von • *solutions quelconques de* P_{inh} : $\langle \vec{n}, \vec{x}\rangle = k$. Subtrahiere die beiden Gleichungen • *Soustraire les deux équations* $\Rightarrow$ $\vec{x}_0 := \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ Lösung von • *solution de* $P_{inh}: \langle \vec{n}, \vec{x}\rangle = 0$.

Wir sagen: Die Differenz zweier „**inhomogener** Lösungen" ist eine „**homogene** Lösung". • *Nous disons: La différence de deux "***solutions non homogènes***" est une "***solution homogène***".*

⊘ Seien • *Soient* $\vec{x}_1$ inhomogene Lösung • *solution non homogène*, $\vec{x}_0$ homogene Lösung • *solution homogène* $\rightsquigarrow$ $\langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{x_1}\rangle = k$, $\langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{x_0}\rangle = 0$
$\Rightarrow \langle \vec{n}, (\vec{x}_1 \pm \vec{x}_0)\rangle = k \rightsquigarrow$ $\vec{x}_1 \pm \vec{x}_0$ inhomogene Lösung • *solution non homogène.*

Konsequenz: • **Conséquence:**

Seien • *Soient* $\vec{x}_0 \in \mathbb{L}_{hom}$ beliebig • *quelconque*, $\vec{x}_1 \in \mathbb{L}_{inh}$ fix • *fixe* $\rightsquigarrow$ $M = \{\vec{x}_2 = \vec{x}_1 + \vec{x}_0\} \subseteq \mathbb{L}_{inh}$.

Eine solche fix gewählte Lösung wie eben beschrieben nennen wir **partikuläre** Lösung der inhomogenen Gleichung. • *Une solution comme celle qu'on vient de mentionner s'appelle solution* **particulière** *de l'équation non homogène.*

⊘ **Problem:** • **Problème:** Welche Beziehung gilt? • *Laquelle des relation suivantes est juste?* — $M \subset \mathbb{L}_{inh}$ oder • *ou* $M = \mathbb{L}_{inh}$?

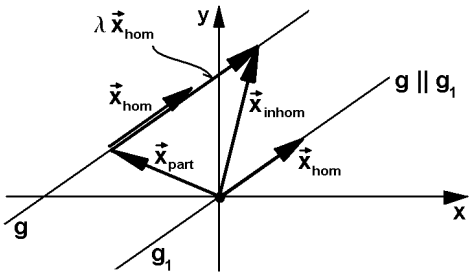
Sei • *Soit* $\vec{x}_{part} = \vec{x}_1$, $\vec{x}_3 \in \mathbb{L}_{inh} \wedge \vec{x}_3 \notin M. \Rightarrow (\vec{x}_3 - \vec{x}_{part}) = \vec{x}_h \in \mathbb{L}_{hom}$
$\Rightarrow \vec{x}_3 = (\vec{x}_{part} + \vec{x}_h) \in M \rightsquigarrow$ Widerspruch! • *Contradiction!* .

Satz: • **Théorème:**

$$\mathbb{L}_{inh} = \{\vec{x} \mid \vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{x}_1,\ \vec{x}_0 \in \mathbb{L}_{hom} \wedge \vec{x}_1 = \vec{x}_{part} \in \mathbb{L}_{inh} \text{ fix • } \textit{fixe} \}$$

Symbol: • **Symbole:** $\mathbb{L}_{inh} = \mathbb{L}_{hom}\ '+'\ \vec{x}_{part}$

Bsp.: • **Exemple:**



$\vec{x} = \lambda\vec{x}_0 + \vec{x}_1 = \lambda\vec{x}_0 + \vec{x}_{part}$
Z.B. • *P.ex.* Gleichung • *équation*
$2x - 3y = -6,\ \mathbb{L} = ?$
$\rightsquigarrow$ Parametergleichung der Geraden
• *Equation paramétrique de la droite?*

$\vec{x}_{part}$: Wähle • *Choisir*
$x = 0 \Rightarrow y = 2,\ \vec{x}_{part} = \binom{0}{2}$

$\vec{x}_{hom}$: $2x - 3y = 0$: Wähle • *Choisir*
$x = 3\lambda \Rightarrow y = 2\lambda \Rightarrow \vec{x}_{hom} = \lambda\binom{3}{2}$

$\rightsquigarrow \quad \vec{x}_{inh} = \vec{x}_{part} + \vec{x}_{hom} = \binom{0}{2} + \lambda\binom{3}{2}$

Allgemeiner: • *Généralement:* <u>$\vec{x}_{hom}$ berechnen: • *calculer:*</u>

$n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + \ldots + n_m \cdot x_m = 0,\ \forall_i :\ n_i \neq 0$
$\rightsquigarrow$ Man kann $m-1$ der Unbekannten x_i frei wählen, die letzte dann eindeutig berechnen.
• *On peut choisir librement $m-1$ des inconnues x_i et puis calculer la dernière.*

▷ Sei • *Soit* $x_1 = 1,\ x_2 = ?,\ x_3 = x_4 = \ldots = x_m = 0 \Rightarrow n_1 \cdot 1 + n_2 \cdot x_2 = 0,\ x_2 = -\frac{n_1}{n_2}$
$\rightsquigarrow \vec{x}_{1_{hom}} = (1, -\frac{n_1}{n_2}, 0, \ldots, 0)^T$
▷ Sei • *Soit* $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = ?,\ x_4 = \ldots = x_m = 0 \Rightarrow n_1 \cdot 1 + n_3 \cdot x_3 = 0,\ x_3 = -\frac{n_1}{n_3}$
$\rightsquigarrow \vec{x}_{2_{hom}} = (1, 0, -\frac{n_1}{n_3}, 0, \ldots, 0)^T$

$\vdots$

▷ Sei • *Soit* $x_1 = 1,\ x_2 = x_3 = \ldots = x_{m-1} = 0,\ x_m = ? \Rightarrow n_1 \cdot 1 + n_m \cdot x_m = 0$
$\rightsquigarrow x_m = -\frac{n_1}{n_m},\ \vec{x}_{m-1_{hom}} = (1, 0, \ldots, 0, -\frac{n_1}{n_{m-1}})^T$

$$\vec{x}_{hom} = \lambda_1\vec{x}_{1_{hom}} + \lambda_2\vec{x}_{2_{hom}} + \ldots + \lambda_{m-1}\vec{x}_{m-1_{hom}} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{n_1}{n_2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_{m-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{n_1}{n_m} \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

Resultat: • *Résultat:*

Satz: • **Théorème:**

<u>**Vor.:** • **Hyp.:**</u>

$$\langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = \langle \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \end{pmatrix} \rangle = n_1 \cdot x_1 + \ldots + n_j \cdot x_j = 0,\ \forall_{i=1,\ldots,j}\, n_i \neq 0$$

<u>**Beh.:** • **Thè.:**</u>

$\mathbb{L}_{hom} = \{\vec{x}_{hom}\}$ = Vektorraum der Dimension $m-1$, $(\vec{n} \perp \vec{x})$.
• = *espace vectoriel de la dimension $m-1$, $(\vec{n} \perp \vec{x})$.*

<u>**Zum Beweis:** • **Quant à la preuve:**</u> ($\mathbb{L}_{hom}$ = *VR'EV*)

1 $\vec{x}_{hom} \in \mathbb{L}_{hom} \Rightarrow \forall_i\, \lambda_i \langle \vec{n}_i, \vec{x}_{hom} \rangle = 0 \Rightarrow \forall_i \langle \vec{n}_i, \lambda_i\, \vec{x}_{hom} \rangle = 0 \qquad \Rightarrow \lambda_i\, \vec{x}_{hom} \in \mathbb{L}_{hom}$

2 $\vec{x}_{hom,1}, \vec{x}_{hom,2} \in \mathbb{L}_{hom} \Rightarrow \forall_i \langle \vec{n}_i, \vec{x}_{hom,1} \rangle = 0 \wedge \langle \vec{n}_i, \vec{x}_{hom,2} \rangle = 0$
$\Rightarrow \forall_i \langle \vec{n}_i, \vec{x}_{hom,1} + \vec{x}_{hom,2} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{x}_{hom,1} + \vec{x}_{hom,2} \in \mathbb{L}_{hom}$

3 $Dim(\mathbb{L}_{hom}) = n \Rightarrow \forall_{\vec{x}} : \vec{x} \in \mathbb{L} \rightsquigarrow$ Widerspruch! • *Contradiction!*

$\vec{x}_{part}$ berechnen • *calculer*:

$n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + \ldots + n_m \cdot x_m = k.$ Z.B. wähle: • *P.ex. choisir:*

$$x_1 = \ldots = x_{m-1} = 0 \;\Rightarrow\; n_m \cdot x_m = k, \;\; \ldots, \;\; x_m = \tfrac{k}{n_m} \;\Rightarrow\; \vec{x}_{part} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{k}{n_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{n_0}{n_m} \end{pmatrix}$$

Konsequenz: • **Conséquence:**
$\mathbb{L}_{inh} = \{\vec{x}_{part} + \vec{x}_{hom} \mid \vec{x}_{hom} \in VR'EV,\; Dim(VR'EV) = m-1,\; \vec{x}_{part} = fix\}$

$\rightsquigarrow$ = um $\vec{x}_{part}$ verschobene Hyperebene • *Hyperplan déplacé par* $\vec{x}_{part}$

$\rightsquigarrow$ "$\mathbb{L}_{inh} = \vec{x}_{part} + \mathbb{L}_{hom}$", $\mathbb{L}_{hom} = VR'EV \rightsquigarrow$

Definition: • **Définition:** $\mathbb{L}_{inh}$ heisst **lineare Mannigfaltigkeit** der Dimension $m-1$ oder „Lösungsraum".
• $\mathbb{L}_{inh}$ *s'appelle* **variété linéaire** *de la dimension* $m-1$ *ou bien espace de "solutions".*

8.1.3 Exkurs: Büschel, Bündel — Traité supplémentaire: Faisceau, gerbe

Sei • *Soit* $\mathbb{L}_1 : \langle \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{x} \rangle = k_1,\; \mathbb{L}_\lambda : \langle \lambda\vec{n}_1, \vec{x} \rangle = \lambda k \;\Rightarrow\; \mathbb{L}_1 \subseteq \mathbb{L}_\lambda.$
($\mathbb{L}_1 \neq \mathbb{L}_\lambda$ für • *pour* $\lambda = 0$)

Sei • *Soit* $\mathbb{L}_1 : \langle \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{x} \rangle = k_1,\; \mathbb{L}_2 : \langle \overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{x} \rangle = k_2 = k_2.$ Sei • *Soit* $\vec{x}_0 \in \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$
$\Rightarrow\; \vec{x}_0 \in \mathbb{L}_3,\; \mathbb{L}_3 : \lambda(\langle \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{x_0} \rangle - k_1) + \mu(\langle \overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{x_0} \rangle - k_2) = 0 \;\Rightarrow\; \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \subseteq \mathbb{L}_3$

Seien • *Soient* $\mathbb{L}_1,\; \mathbb{L}_2$ Geraden (a) resp. Ebenen (b) • *des droites (a) resp. des plans (b)*
$\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$ Punkt (a) resp. Gerade (b) • *un point (a) resp. une droite (b)* $\rightsquigarrow$

Definition: • **Définition:** { Geraden • *Droites* } durch • *à travers* $P = \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$ heisst **Geradenbüschel** • *s'appelle* **faisceau de droites**.
{ Ebenen • *Plans* } durch • *à travers* $P = \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$ heisst **Ebenenbüschel** • *s'appelle* **faisceau de plans**.

Parametergleichung des Büschels: • **Equation paramétrique du faisceau:**
Sei • *Soit* $\vec{x}_0 \in \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$. $\vec{x}_0$ erfüllt • *satisfait*:

$$\mathbb{L}_{\lambda,\mu} : \; \lambda(\langle \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{x_0} \rangle - k_1) + \mu(\langle \overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{x_0} \rangle - k_2) = \langle \underbrace{\lambda\vec{n}_1 + \mu\vec{n}_2}_{\vec{n}}, \vec{x}_0 \rangle - \underbrace{(\lambda k_1 + \mu k_2)}_{v} = 0,$$

$\vec{n}$ Normalenvektor • *vecteur normal*, v: 'Verschiebung' • *'translation'*.

Entsprechend seien: • *Correspondant soient:*
$\mathbb{L}_1,\; \mathbb{L}_2,\; \mathbb{L}_3$ Ebenen mit • *plans avec* $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \cap \mathbb{L}_3 = \{P\}$

$\Rightarrow\; \mathbb{L}_{\lambda,\mu,\nu} : \; \lambda(\langle \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{x_0} \rangle - k_1) + \mu(\langle \overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{x_0} \rangle - k_2) + \mu(\langle \overrightarrow{n_3}, \overrightarrow{x_0} \rangle - k_3) = 0$
$\rightsquigarrow$ Parametergleichung der Ebenen durch P. • *Equation paramétrique du plan qui passe par* P.

Definition: • **Définition:** $\mathbb{L}_{\lambda,\mu,\nu}$ heisst **Ebenenbündel** • *s'appelle* **gerbe de plans**.
Entsprechend bei Geraden **Geradenbündel** • *Correspondant aux droites* **gerbe de droites**.

8.1.4 Verwandlung in eine homogene Gleichung „höherer Ordnung" — Transformation en équation homogène "d'ordre supérieur"

Betrachte: • *Considérer:* $\langle \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \rangle = \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = k := -n_0$

$$\Leftrightarrow 0 = n_0 \cdot 1 + n_1 \cdot x_1 + \ldots + n_m \cdot x_m = \langle \begin{pmatrix} n_0 \\ n_1 \\ \vdots \\ n_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \rangle := \langle \overrightarrow{n^*}, \overrightarrow{x^*} \rangle$$

mit • *avec* $\vec{n}^* := \begin{pmatrix} n_0 \\ n_1 \\ \vdots \\ n_m \end{pmatrix}, \vec{x}^* := \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ wird die Gleichung zu: • *l'équation se transforme à:*
$\langle \overrightarrow{n^*}, \overrightarrow{x^*} \rangle = 0, \;\; \vec{n}^*, \vec{x}^* \in \mathbb{R}^{m+1}, \;\; x_0 = 1$

Nun führen wir für unseren „Hausgebrauch" die folgenden Sprechweisen ein:
• *Maintenant nous introduisons comme "outil privé" la façon de parler suivante:*

Definition: • **Définition:** Die Anzahl Unbekannter m in einer linearen Gleichung nennen wir **Ordnung** der Gleichung.
• *Nous appellons le nombre d'inconnues m dans une équation linéaire* **ordre** *de l'équation.*

$\vec{n}^*, \vec{x}^*$ nennen wir **homogene Erweiterungen** von $\vec{n}, \vec{x}$ $(x_0 = 1)$
• $\vec{n}^*, \vec{x}^*$ *est appellé* **extension homogène** *de* $\vec{n}, \vec{x}$ $(x_0 = 1)$.

Dabei gilt: • *On constate:*

$\langle \overrightarrow{n^*}, \overrightarrow{x^*} \rangle = 0 \overset{bji.}{\longmapsto} \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = k = -n_0.$ Jedoch: • *Mais:* $\langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = k = -n_0 \overset{\neg bji.}{\longmapsto} \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = 0.$

8.1.5 Lineare Gleichungsysteme — Systèmes d'équations linéaires

Wir lenken unser Augenmerk auf die folgenden Eigenschaften von Gleichungen und Gleichungspaaren:
• *Nous considérons les qualités suivantes d'équations et de paires d'équations:*

1) Sei • *Soit* $\lambda \neq 0$. $\langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = k \;\Leftrightarrow \langle \lambda \cdot \vec{n}, \vec{x} \rangle = \lambda \cdot k \;\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{\lambda n^*}, \overrightarrow{x^*} \rangle = 0 \rightsquigarrow$
Eine lineare Gleichung kann man koeffizientenweise mit einer Zahl $\neq 0$ multiplizieren, ohne dass der Lösungsraum $\mathbb{L}$ ändert.
• *On peut multiplier une équation linéaire par coefficients par un facteur $\neq 0$ sans toucher l'espace de solutions $\mathbb{L}$.*

2) Sei • *Soit* $\mathbb{L}_1 : \langle \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{x} \rangle = k$ *resp.* $\langle \overrightarrow{n_1^*}, \overrightarrow{x^*} \rangle = 0 \ \wedge \ \mathbb{L}_2 : \langle \overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{x} \rangle = k_2$ *resp.* $\langle \overrightarrow{n_2^*}, \overrightarrow{x^*} \rangle = 0 \ \Rightarrow \ \mathbb{L}_3 : \langle \vec{n}_1 \pm \vec{n}_2, \vec{x} \rangle = k_1 \pm k_2$ *resp.* $\langle \vec{n}_1^* \pm \vec{n}_2^*, \vec{x}^* \rangle = \langle \vec{n}_3^*, \vec{x}^* \rangle = 0$

$\rightsquigarrow \ \vec{x}_0 \in \mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \ \Rightarrow \ \vec{x}_0 \in \mathbb{L}_3 \ \Rightarrow \ \mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \subseteq \mathbb{L}_3$
$\Rightarrow \ \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \subseteq \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_3$ *resp.* $\mathbb{L}_2 \cap \mathbb{L}_3$

Problem: • **Problème:** Z.B. • *P.ex.* :
$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \stackrel{?}{=} \mathbb{L}_2 \cap \mathbb{L}_3$
Sei • *Soit* $\vec{x}_0 \in \mathbb{L}_2 \cap \mathbb{L}_3 \ \Rightarrow \ \langle \overrightarrow{n_2^*}, \overrightarrow{x_0^*} \rangle = 0 \ \wedge \ \langle \overrightarrow{n_3^*}, \overrightarrow{x_0^*} \rangle = \langle \vec{n}_1^* - \vec{n}_2^*, \vec{x}_0^* \rangle = 0$
Addition • *Additionner* $\Rightarrow \ \langle \overrightarrow{n_1^*}, \overrightarrow{x_0^*} \rangle = 0 \ \Rightarrow \ \vec{x}_0 \in \mathbb{L}_1 \rightsquigarrow \ \mathbb{L}_2 \cap \mathbb{L}_3 \subseteq \mathbb{L}_1$
$\Rightarrow \ \mathbb{L}_2 \cap \mathbb{L}_3 \subseteq \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \ \Rightarrow \ \mathbb{L}_2 \cap \mathbb{L}_3 = \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$.

Ebenso findet man: • *par la même raison on trouve:* $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_3 = \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$

Resultat: • **Résultat:** Ersetzt man die eine von zwei Gleichungen durch die Summe oder die Differenz der beiden Gleichungen, so ändert sich die Lösungsmenge nicht. • *Si l'on remplace une des deux équations par la somme ou la différence des deux équations, l'ensemble de solutions ne change pas.*

Für die eben besprochenen Ersetzungen haben wir einen Namen:
• *Pour les remplacements qu'on vient de discuter on a un nom:*

Definition: • **Définition:** Ersetzt man eine Gleichung durch ein Vielfaches oder eine von zwei Gleichungen durch die Summe oder Die Differenz der beiden, so nennen wir diese Ersetzungen **Elementarsubstitutionen**.
• *Si l'on remplace une équation par un multiple ou bien une des deux équations par la somme ou la différence, alors on parle de* **substitutions élémentaires**.

Satz: • **Théorème:** Wendet man auf ein Gleichungssystem Elementarsubstitutionen an, so ändert die Lösungsmenge nicht. • *Si l'on applique des substitutions élémentaires à un système d' équations, l'ensemble des solutions ne change pas.*

Unter „Lösungsmenge eines Systems" verstehen wir natürlich die Schnittmenge der Lösungsmengen der einzelnen Gleichungen (gemeinsame Lösungsmenge). • *L'ensemble de solutions d'un système d'équations consiste en l'intersection des l'ensembles de solutions des équations qui font part du système (solutions communes).* $\rightsquigarrow$

$$\left| \begin{array}{lcl} \mathbb{L}_1 : \langle \overrightarrow{n_1^*}, \overrightarrow{x^*} \rangle & = & 0 \\ & \vdots & \\ \mathbb{L}_j : \langle \overrightarrow{n_j^*}, \overrightarrow{x^*} \rangle & = & 0 \end{array} \right| \qquad \Rightarrow \ \mathbb{L}_{Syst} = \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \cap \ldots \cap \mathbb{L}_j$$

Für die weiteren Betrachtungen brauchen wir den Begriff der linearen Unabhängigkeit von Gleichungen: • *Pour les considérations qui suivent on a besoin de la notion de l'indépendance linéaire d'équations:*

Definition: • **Définition:** Ein System von linearen Gleichungen heisst **linear unabhängig** (*l.u.'l.i.*) $\Leftrightarrow$ die zugehörige Menge $\{\vec{n}_i^*\}$ ist linear unabhängig. Andernfalls heisst das System linear **abhängig** (*l.a.'l.d.*)
• *Un système d'équations linéaires s'appelle* **linéairement indépendant** $\Leftrightarrow$ *l'ensemble correspondant* $\{\vec{n}_i^*\}$ *est linéairement indépendant.*
Si non il s'appelle **linéairement dépendant**.

Konsequenz: • **Conséquence:** Aus den bei den Vektorraumbasen erworbenen Kenntnissen können wir hier folgern, dass man in einem System linear abhängige Gleichungen reduzieren kann, bis nur noch linear unabhängige übrigbleiben, ohne den Lösungsraum zu verändern. • *Grace aux connaissances acquises en traitant les bases des espaces vectoriels nous pouvons maintenant conclure, que dans un système d'équations linéaires on peut réduire les équations linéairement indépendantes jusqu'à ce qu'on n'a que des équations linéairement dépendantes.*

In diesem Zusammenhang definieren wir: • *Dans ce rapport nous définissons:*

Definition: • **Définition:** **Rang r** ($Rang(S)$) eines linearen Gleichungssystems
$S :=$ Anzahl linear unabhängiger Gleichungen des Systems
$= |\{\vec{n}_i^* \mid i = 1, \ldots, j\}|$
• **rang r** *(Rang(S)) d'un système d'équations linéaires*
$S :=$ *nombre d'équations linéairement dépendantes.*

Dabei ist $r = Rang(S_{inh})$, $r_0 = Rang(S_{hom})$ der Rang des zugehörigen homogenen Systems S_{hom}.
• *Nous écrivons* $r = Rang(S_{inh})$, $r_0 = Rang(S_{hom})$ *pour le rang du système linéaire correspondant homogène.*

Es gilt folgender Satz: • *Le théorème suivant est valable:*

Satz: • **Théorème:**

1 $r \geq r_0$

2 S *l.u.'l.i.* $\Rightarrow$ S^* *l.u.'l.i.* $\quad$ ($\{\vec{n}_i\}$ *l.u.'l.i.* $\Rightarrow$ $\{\vec{n}_i^*\}$ *l.u.'l.i.*)

3 $r > r_0 \Rightarrow \mathbb{L}_{inh} = \{\}$

Bemerkung zum Beweis: • *Remarque quant à la preuve:*

Ad (2): $\vec{n}_i$ kann als Projektion von $\vec{n}_i^*$ ($Dim = m + 1$) in einen Unterraum mit $Dim = m$ aufgefasst werden. Wären die $\vec{n}_i^*$ *l.a.'l.d.*, so würde das auch für die Projektionen $\vec{n}_i$ gelten (denn Linearkombinationen bleiben auch beim Projizieren Linearkombinationen). • *On peut comprendre* $\vec{n}_i$ *comme projection de* $\vec{n}_i^*$ *(*$Dim = m + 1$*) dans un sous-espace de la dimension* m*. Si les* $\vec{n}_i^*$ *étaient linéairement dépendants, les projections* $\vec{n}_i$ *devraient aussi être linéairement indépendantes (les combinaisons linéaires restent des combinaisons linéaires après la projection),*

Ad (1): Das ist eine Konsequenz von (2). • *C'est une conséquence de (2).*

Ad (3): Später ist diese Behauptung direkt mit "Gauss–Jordan" nachvollziehbar.
• *Plus tard on peut comprendre ce fait directement à l'aide de 'Gauss–Jordan".*

Sei • *Soit* $r > r_0$, $\{\vec{n}_i\}$ *l.a.'l.d.* und • *et* $\{\vec{n}_i^*\}$ *l.u.'l.i.*
(ev. nach einer Reduktion. • *peut-être après une réduction.*)
Forme $\vec{n}_i$ so lange um, bis $\vec{n}_1$ *l.a.'l.d.* von $\vec{n}_2$ ist. • *Transformer* $\vec{n}_i$ *jusqu'à ce que* $\vec{n}_1$ *soit l.a.'l.d. de*

$\vec{n}_2. \rightsquigarrow \quad \vec{n}_1 = \lambda\vec{n}_2.$
Wegen $\{\vec{n}_i^*\}$ *l.u.'l.i.* muss aber gelten: • *A cause de* $\{\vec{n}_i^*\}$ *l.u.'l.i. il faut conclure:* $\vec{n}_1^* \neq \lambda\vec{n}_2^*$.
Sei • *Soit* $\vec{x}_0 \in \mathbb{L}_S \neq \{\}. \rightsquigarrow \quad \langle\overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{x_0}\rangle = k_2 \ \wedge \ \langle\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{x_0}\rangle = k_1$
$\Rightarrow \ \langle\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{x_0}\rangle = \langle\overrightarrow{\lambda n_2}, \overrightarrow{x_0}\rangle = \lambda k_2 = k_1 \rightsquigarrow \quad \langle\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{x_0}\rangle = k_1 = \lambda k_2 = \langle\overrightarrow{\lambda n_2}, \overrightarrow{x_0}\rangle$
$\Rightarrow \ \vec{n}_1^* = \lambda \cdot \vec{n}_2^* \ \Rightarrow \ \{\vec{n}_i^*\}$ *l.a.'l.d.* $\rightsquigarrow$ Widerspruch! • *Contradiction!*

Bsp.: • **Exemple:**

S: $1 \cdot x + 2 \cdot y - 2 \cdot 1 = 0, \ 0 \cdot x + 0 \cdot y - 2 \cdot 1 = 0 \rightsquigarrow \quad \vec{n}_1, \vec{n}_2$ *l.a.'l.d.*, $\vec{n}_1^*, \vec{n}_2^*$ *l.u.'l.i.*, $\mathbb{L} = \{\}$.

8.2 Die Eliminationsmethode von Gauss–Jordan zur Lösung von Gleichungssystemen — La méthode d'élimination de Gauss–Jordan pour résoudre les systèmes d'équations

8.2.1 Illustration an einem Lehrbeispiel — Illustration par un exemple

Bisher erwähnte Lösungsmethoden für Gleichungssysteme: Cramer, Austauschverfahren, „probieren."
• *Les méthodes de résolution des équations qu'on a traité jusqu'a maintenant: Cramer, méthode d'échange des variables, "essayer".*

Neue Idee oder Strategie: Versuche das Gleichungssystem mit Hilfe von Elementarsubstitutionen und Umstellungen der Gleichungen solange umzuformen, bis die Lösung sichtbar wird. Ziel: „Dreiecksform" oder „Diagonalform". • **Nouvelle idée ou stratégie:** *Essayer de transformer le système d'équations par substitutions élémentaires et échangement d'équations (et de variables) jusquà ce qu'on obtient une équation où l'on voit la solution. But: Forme de "triangle" ou forme "diagonale".*

Hilfsmittel sind die folgenden Sätze: • *Les moyens sont les théorèmes suivants:*

1 In einem Gleichungssystem darf man die Reihenfolge der Gleichungen (Zeilen) beliebig verändern, ohne dass sich $\mathbb{L}$ ändert. • *Dans un système d'équations on peut changer l'ordre des équations (lignes) comme on veut, sans toucher* $\mathbb{L}$.

2 In einem Gleichungssystem darf man die Reihenfolge der Variablenterme $a_k \cdot x_k$ (Spalten) beliebig verändern, ohne dass sich $\mathbb{L}$ ändert. (Man muss aber die Variablennamen eindeutig kennzeichnen.)
• *Dans un système d'équations on peut changer l'ordre des variables (colonnes) comme on veut, sans toucher* $\mathbb{L}$. *(Mais il faut retenir qu'on doit bien distinguer les noms des variables.)*

3 In einem Gleichungssystem darf man eine Gleichung durch ihr λ–faches ersetzen ($\lambda \neq 0$), ohne dass sich $\mathbb{L}$ ändert. • *Dans un système d'équations on peut remplacer une équation par son multiple* λ *(*$\lambda \neq 0$*), sans toucher* $\mathbb{L}$.
$\rightsquigarrow \quad \{\vec{n}_1^*, \vec{n}_2^*\}$ *l.u.'l.i.* $\Rightarrow \ \{\lambda\vec{n}_1^*, \vec{n}_2^*\}$ *l.u.'l.i.*

4 In einem Gleichungssystem darf man eine Gleichung durch die Summe der Gleichung mit einer andern Gleichung des Systems ersetzen, ohne dass sich $\mathbb{L}$ ändert. • *Dans un système d'équations on peut remplacer une équation par la somme de l'équation avec une autre équation, sans toucher* $\mathbb{L}$. $\rightsquigarrow$
$\{\vec{n}_1^*, \vec{n}_2^*\}$ *l.u.'l.i.* $\Rightarrow \ \{\vec{n}_1^*, \vec{n}_1^* + \vec{n}_2^*\}$ *l.u.'l.i.*

5 Statt mit den Vektoren $\vec{n}_1^*$ kann man auch mit ihren transponierten $(\vec{n}_1^*)^T$ arbeiten.
• *Au lieu de travailler avec les vecteurs* $\vec{n}_1^*$ *on peut aussi travailler avec les transposés* $(\vec{n}_1^*)^T$.

Bsp.: • **Exemple:**
Zu lösen ist das nebenstehende Gleichungssystem. An Stelle des Systems arbeiten wir nur mit den Zeilenvektoren $(\vec{n}_1^*)^T$: • *Le système d'équations ci-joint est à résoudre . Au lieu de travailler avec ce système nous ne considérons que les vecteurs* $(\vec{n}_1^*)^T$.

$$\begin{aligned} 3x + y - z &= 11 && (8.1)\\ x + 3y - z &= 13 && (8.2)\\ x + y - 3z &= 11 && (8.3) \end{aligned}$$

Reduzierte Schreibweise: Übernehme nur die Koeffizienten (die bei diesem speziellen System besonders sind): • *Façon d'écrire spéciale: Ecrire seulement les coefficients (qui dépendent de ce système spécial):*

$$\begin{array}{ccccl} 3 & 1 & -1 & 11 & I_1 \\ 1 & 3 & -1 & 13 & II_1 \\ 1 & 1 & -3 & 11 & III_1 \\ \hline \end{array}$$

$I_2 = III_1$
$II_2 = II_1 - III_1$
$III_2 = I_1 + (-3) \cdot III_1$
(Elementarsubst. • *Subst. élém.*)

$$\begin{array}{ccccl} 1 & 1 & -3 & 11 & I_2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & II_2 \\ 0 & -2 & 8 & -22 & III_2 \\ \hline \end{array}$$

$I_3 = I_2$
$II_3 = (\frac{1}{2}) \cdot II_2$
$III_3 = (II_2 + III_2) \cdot \frac{1}{10}$
($\rightsquigarrow$ $\triangle$–Form • *Forme* $\triangle$)

$$\begin{array}{ccccl} 1 & 1 & -3 & 11 & I_3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & II_3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & III_3 \\ \hline \end{array}$$

$I_4 = I_3 - II_3$
$II_4 = II_3$
$III_4 = III_3$

$$\begin{array}{ccccl} 1 & 0 & -4 & 10 & I_4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & II_4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & III_4 \\ \hline \end{array}$$

$I_5 = I_4 + 4 \cdot III_4$
$II_5 = II_4 - III_4$
$III_5 = III_4$
($\rightsquigarrow$ Diagonalform • *Forme diagonale*)

$$\begin{array}{ccccl} 1 & 0 & 0 & 2 & I_5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & II_5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & III_5 \\ \hline \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ Resultat: • *Résultat:* $x = 2, \;\; y = 3, \;\; z = -2$

8.2.2 Allgemeine Lösung — Solution générale

Gelöst werden soll das folgende allgemeine Gleichungssystem durch Überführung in Diagonalform, wie eben gesehen. Wir setzen ein linear unabhängiges System voraus. • *Il faut résoudre le système général d'équations à côté par transformation en forme diagonale. On prétend que le système soit linéairement indépendant.*

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \vdots \ldots + \ldots \vdots \ldots \vdots \ldots + \ldots \vdots & = & \vdots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jm}x_m & = & b_j \end{array}$$

Wieder schreiben wir nur die Koeffizienten, lassen alle unnötigen Zeichen weg. Zudem seien die Gleichungen immer in einer Reihenfolge, so dass die Diagonalelemente $\neq 0$ sind. Wegen der linearen Unabhängigkeit muss das möglich sein. • *Comme au dessus nous écrivons seulement les coefficients et laissons tomber tous les autres signes. Que les équations soient en outre ordonnées toujours de façon que les éléments dans les diagonales soient $\neq 0$. A cause de l'indépendance linéaire cela doit être possible.*
$\rightsquigarrow \quad a_{kk} \neq 0$

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} & b_1 & I_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} & b_2 & II_1 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & K_1 \\ a_{j1} & a_{j2} & \ldots & a_{jm} & b_j & J_1 \end{array}$$

oder • *ou*

$$\begin{array}{cccccc} a_{11_1} & a_{12_1} & \ldots & a_{1m_1} & b_{1_1} & I_1 \\ a_{21_1} & a_{22_1} & \ldots & a_{2m_1} & b_{2_1} & II_1 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & K_1 \\ a_{j1_1} & a_{j2_1} & \ldots & a_{jm_1} & b_{j_1} & J_1 \end{array}$$

Ersetze nun I_1 durch $\frac{1}{a_{11}} \cdot I_1$ und allgemein K_1 durch $K_1 - \frac{a_{k1}}{a_{11}} \cdot I_1$ (wenige Elementarumformungen). Dadurch wird a_{11} zu 1 und a_{k1} zu 0. • *Maintenant remplacer I_1 par $\frac{1}{a_{11}} \cdot I_1$ et généralement K_1 par $K_1 - \frac{a_{k1}}{a_{11}} \cdot I_1$ (peu de substitutions élémentaires). Ainsi a_{11} devient 1 et a_{k1} devient 0.* $\rightsquigarrow \quad I_2, \ \ldots, \ K_2, \ \ldots$.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & a_{12_2} & \ldots & a_{1m_2} & b_{1_2} & I_2 \\ 0 & a_{22_2} & \ldots & a_{2m_2} & b_{2_2} & II_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & K_2 \\ 0 & a_{j2_2} & \ldots & a_{jm_2} & b_{j_2} & J_2 \end{array}$$

Im nächsten Schritt verfahren wir mit der zweiten Spalte genauso wie mit der ersten. a_{22_2} übernimmt jetzt die Rolle von a_{11} im ersten Schritt und soll in 1 übergeführt werden, a_{k2_2} dagegen in 0 für $k \neq 2$.
• *Dans la prochaine étape a_{22_2} prend le rôle de a_{11} dans la première étape et doit être transformé en 1, tendis que a_{k2_2} doit être transformé en 0 pour $k \neq 2$.*

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & a_{13_3} & \ldots & a_{1m_3} & b_{1_3} & I_3 \\ 0 & 1 & a_{23_3} & \ldots & a_{2m_3} & b_{2_3} & II_3 \\ 0 & 0 & a_{33_3} & \ldots & a_{3m_3} & b_{3_3} & III_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & K_3 \\ 0 & 0 & a_{j3_3} & \ldots & a_{jm_3} & b_{j_3} & J_3 \end{array}$$

Für die Fortsetzung gilt es jetzt drei Fälle zu unterscheiden:
• *Pour pouvoir continuer il faut maintenant distinguer trois cas différents:*

Fälle: • **Cas:** 1. $m = j$ 2. $m < j$ 3. $m > j$

Fall 1: • **Cas 1:**

Führt man das bisher beschriebene Verfahren für alle Spalten durch, wobei immer a_{kk_k} die Rolle von a_{11_1} im ersten Schritt einnimmt, so gelangt man in $j = m$ Schritten zu nebenstehendem System. Damit hat man aber die Lösung, die hier eindeutig ist. • *Si l'on exécute ce processus pour toutes les colonnes en considérant que a_{kk_k} prend toujours le rôle de a_{11_1} dans la première étape, on arrive après $j = m$ étapes au système d'à côté. Par cela on a la solution qui est univoque dans ce cas.*

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{1_{j+1}} & I_{j+1} \\
0 & 1 & 0 & \dots & 0 & b_{2_{j+1}} & II_{j+1} \\
0 & 0 & 1 & \dots & 0 & b_{3_{j+1}} & III_{j+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & K_{j+1} \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b_{j_{j+1}} & J_{j+1}
\end{array}$$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1_{j+1}} \\ b_{2_{j+1}} \\ \vdots \\ b_{j_{j+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1_{m+1}} \\ b_{2_{m+1}} \\ \vdots \\ b_{m_{m+1}} \end{pmatrix}$$

Fall 2: • **Cas 2:**

Wie im Falle 1. gelangt man hier ebenfalls in $j = m$ Schritten zu nebenstehendem System. Da aber $m < j$ ist, gibt es mehr Zeilen als Spalten. Von der Zeile $m + 1$ an ($m + 1 \leq j$) entsteht nach unserer Rechenvorschrift ausser in der letzten Spalte alles 0, da diese Elemente ja alle unterhalb den Diagonalelementen liegen. Die letzte Spalte enthält keine Koeffizienten von Variablen x_k. Sie wird nur mitgerechnet. Dort muss aber keine 0 oder 1 erzeugt werden.

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{1_{j+1}} & I_{j+1} \\
0 & 1 & 0 & \dots & 0 & b_{2_{j+1}} & II_{j+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & K_{j+1} \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b_{j_{j+1}} & J_{j+1} \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{j+1_{j+1}} & J + I_{j+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & K_{j+1} \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{m_{j+1}} & \dots_{j+1}
\end{array}$$

• *Comme dans le cas 1. on arrive aussi ici avec $j = m$ étapes à un système comme celui qui est démontré ici à côté. Comme on a $m < j$, il y a plus de lignes que de colonnes. A partir de la ligne $m+1$ ($m + 1 \leq j$), on obtient que des 0 sauf dans la dernière colonne, car tous les éléments en question sont situés en dessous de la diagonale. La dernière colonne ne contient pas de coefficients de variables x_k. Elle fait partie du calcul. Mais on y ne doit pas générer des 0 ou 1.*

Da wir davon ausgegeangen sind, dass alle Gleichungen (Zeilen) linear unabhängig sind, kann nur eine Zeile der Form $0\ 0\ \dots 0\ b_{j+k_{j+1}}$ ($b_{j+k_{j+1}} \neq 0$ wegen der lin. Unabh.) bestehen. Zwei solche Zeilen sind ja linear abhängig. Daher muss $j = m + 1$ sein. Wieder als Gleichung geschrieben, bedeutet das aber: $0 = b_{j+1_{j+1}} \neq 0$, also ein Widerspruch zur Annahme der Existenz der x_k beim Umformen des Systems. Auch sieht man den Widerspruch zu *Rang* $r = r_0$
• *Comme on est parti du fait que toutes les équations (lignes) sont linéairement indépendantes, il peut exister seulement une ligne de la forme* $0\ 0\ \dots 0\ b_{j+k_{j+1}}$ ($b_{j+k_{j+1}} \neq 0$ *à cause de l'indépendence linéaire).*

Deux lignes de ce genre sont linéairement dépendantes. Comme conséquence on doit avoir $j = m + 1$. *Ecrit de nouveau comme équation ça signifie* $0 = b_{j+1_{j+1}} \neq 0$, *une contradiction donc à l'hypotèse de l'existence des* x_k *en résolvant le système comme ci–dessus. On voit aussi la contradiction à* $\mathrm{Rang} r = r_0$

Konsequenz: • **Conséquence:** In diesem Fall gilt: • *Dans ce cas on obtient:* $\mathbb{L} = \{\}$

Notizen: • *Notes:*

$\rightsquigarrow$

Fall 3: • **Cas 3:**

Wie im Falle 1. gelangt man auch hier ebenfalls in j Schritten zu nebenstehendem System. Da aber $m > j$ ist, gibt es mehr Spalten mit Elementen $a_{\dots}$ als Zeilen . Von der Spalte $j+1$ an $(j+1 \leq m)$ entsteht nach unserer Rechenvorschrift mit Ausnahme der linearen Unabhängigkeit keine vorhersehbare Situation, da diese Elemente ja alle rechts von den Diagonalelementen liegen. Die letzte Spalte enthält wiederum keine Koeffizienten von Variablen x_k. Sie wird nur mitgerechnet.
• *Comme dans le cas 1. on arrive ici aussi avec j étapes à un système comme il est montré à côté. Comme on a $m > j$, il y a plus de colonnes à éléments $a_{\dots}$ que de lignes. A partir de la colonne $j+1$ $(j+1 \leq m)$, on n'obtient pas de situation qu'on puisse prévoir (sauf l'indépendance linéaire), car tous les éléments en question sont situés à droite de la diagonale. La dernière colonne ne contient pas non–plus des coefficients de variables x_k. On y fait le calcul comme aux autres colonnes.*

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \dots & 0 & a_{1(j+1)_{j+1}} & \dots & a_{1m_{j+1}} & & b_{1_{j+1}} & I_{j+1} \\
0 & \dots & 0 & a_{2(j+1)_{j+1}} & \dots & a_{2m_{j+1}} & & b_{2_{j+1}} & II_{j+1} \\
\vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & & \vdots & K_{j+1} \\
0 & \dots & 1 & a_{j(j+1)_{j+1}} & \dots & a_{jm_{j+1}} & & b_{j_{j+1}} & J_{j+1}
\end{array}$$

oder • *ou*

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \dots & 0 & \alpha_{1(j+1)} & \dots & \alpha_{1m} & & \beta_1 & I_{j+1} \\
0 & \dots & 0 & \alpha_{2(j+1)} & \dots & \alpha_{2m} & & \beta_2 & II_{j+1} \\
\vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & & \vdots & K_{j+1} \\
0 & \dots & 1 & \alpha_{j(j+1)} & \dots & \alpha_{jm} & & \beta_j & J_{j+1}
\end{array}$$

oder • *ou*

$$\begin{array}{rcl}
x_1 + 0 + \dots + 0 + \alpha_{1(j+1)}x_{j+1} + \dots + \alpha_{1m}x_m & = & \beta_1 \\
0 + x_2 + \dots + 0 + \alpha_{2(j+1)}x_{j+1} + \dots + \alpha_{2m}x_m & = & \beta_2 \\
\vdots \dots + \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots + \dots \vdots \dots & = & \vdots \\
0 + \dots + 0 + x_j + \alpha_{j(j+1)}x_{j+1} + \dots + \alpha_{jm}x_m & = & \beta_j
\end{array}$$

Schreibt man das Gleichungssystem mit Hilfe von Vektoren, so erhält man:
• *Si l'on écrit le système d'équations à l'aide de vecteurs, on obtient:*

$$x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2 + \dots + x_j \cdot \vec{e}_j + x_{j+1} \cdot \vec{\alpha}_{j+1} + \dots + x_m \cdot \vec{\alpha}_m \quad = \quad \vec{\beta}$$

Da $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_j, \vec{\alpha}_{j+1}, \dots, \vec{\alpha}_m, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^j$ ist und $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_j$ eine Basis bilden, sind $\vec{\alpha}_{j+1}, \dots, \vec{\alpha}_m, \vec{\beta}$ linear abhängig von dieser Basis $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_j\}$. Für jede beliebige Wahl der $x_{j+1}, \dots, x_m$ ist $\vec{\beta} - (x_{j+1}\vec{\alpha}_{j+1} + \dots + x_m\vec{\alpha}_m)$ eindeutig als Linearkombination $x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_j\vec{e}_j$ der Vektoren $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_j$ darstellbar, d.h. zu jeder beliebigen Wahl der $x_{j+1}, \dots x_m$ sind die $x_1, \dots x_j$ eindeutig bestimmt.
• *Comme nous avons $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_j, \vec{\alpha}_{j+1}, \dots, \vec{\alpha}_m, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^j$, et que $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_j$ forment une base, les vecteurs $\vec{\alpha}_{j+1}, \dots, \vec{\alpha}_m, \vec{\beta}$ sont linéairement dépendants de cette base $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_j\}$. Pour chaque choix quelconque des $x_{j+1}, \dots, x_m$, $\vec{\beta} - (x_{j+1}\vec{\alpha}_{j+1} + \dots + x_m\vec{\alpha}_m)$ est déterminé de façon univoque comme combinaison linéaire $x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_j\vec{e}_j$ des vecteurs $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_j$, ç.v.d. pour chaque choix quelconque des $x_{j+1}, \dots x_m$, les $x_1, \dots x_j$ sont déterminés de façon univoque.*

Weil zu $x_{j+1}, \dots, x_m$ eindeutig ein Vektor $\begin{pmatrix} x_{j+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m-j}$ existiert, bedeutet beliebige Wahl von $x_{j+1}, \dots, x_m$ auch beliebige Wahl eines Vektors $\mathbb{R}^{m-j}$. $\{x_{j+1}, \dots, x_m\}$ bildet daher einen Vektorraum der Dimension $m-j$. • *Comme il existe pour $x_{j+1}, \dots, x_m$ un vecteur $\begin{pmatrix} x_{j+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m-j}$ de façon univoque, un choix quelconque de $x_{j+1}, \dots, x_m$ signifie un choix quelconque d'un vecteur $\begin{pmatrix} x_{j+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m-j}$.*

$\{x_{j+1}, \ldots, x_m\}$ *forme donc un espace vectoriel de la dimension* $m - j$.

Bekanntlich bildet $\mathbb{L}_{hom}$ einen Vektorraum *VR'EV*.
• *Comme nous savons,* $\mathbb{L}_{hom}$ *forme un espace vectoriel VR'EV.*
Da mit der Basis $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{m-j}\}$ alle möglichen $\begin{pmatrix} x_{j+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ erzeugt werden können und zu jedem solchen Vektor eindeutig ein gesamter Lösungsvektor $\vec{v}$ mit $\vec{v}^T = (x_1, \ldots x_j, x_{j+1}, \ldots, x_m)^T$ gehört (die $x_1, \ldots x_j$ werden aus den $x_{j+1}, \ldots, x_m$ errechnet), findet man für *VR'EV* sofort die folgende Basis für das homogene Problem: • *Comme on peut générer tous les* $\begin{pmatrix} x_{j+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ *possibles avec la base* $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{m-j}\}$, *et comme pour tous les vecteurs de cette sorte il existe de façon univoque un vecteur de solution* $\vec{v}$ *avec* $\vec{v}^T = (x_1, \ldots x_j, x_{j+1}, \ldots, x_m)^T$ *(les* $x_1, \ldots x_j$ *sont posés sur les* $x_{j+1}, \ldots, x_m$*), on trouve tout de suite pour VR'EV la base suivante pour le problème homogène:*
$\{\vec{l}_1, \ldots, \vec{l}_{m-j}\}$, $\quad \vec{l}_1 = (-\alpha_{1(j+1)}, \ldots, \alpha_{j(j+1)}, 1, 0, \ldots, 0)^T$,
$\vec{l}_2 = (-\alpha_{1(j+2)}, \ldots, \alpha_{j(j+2)}, 0, 1, \ldots, 0)^T, \ldots, \vec{l}_{m-j} = (-\alpha_{1m}, \ldots, \alpha_{jm}, 0, 0, \ldots, 1)^T$.

Jede homogene Lösung hat daher in allen Fällen mit $m \geq j$ die folgende Form:
• *Chaque solution homogène a donc dans tous les cas avec* $m \geq j$ *la forme qui suit:*

$$\vec{x}_{hom} = \sum_{k=1}^{m-j} \lambda \cdot \vec{l}_k$$

Im Folgenden sei: • *Dans ce qui suit nous notons:* $Dim := Dim(\mathbb{L}) = Dim(\mathbb{L}_{hom})$.
Dazu definieren wir: • *En plus nous définissons:*

Definition: • **Définition:** **Ordnung** eines Gleichungssystems $Ord(S) :=$ Anzahl Unbekannte.
• **Ordre** *d'un système d'équations* $Ord(S) :=$ *nombre d'inconnues.*

Für $m \geq j$ haben wir gefunden: • *Nous avons trouvé pour* $m \geq j$ $Ord(S) = j$,
$Rang = m, Dim = m - j, \ \mathbb{L} \neq \{\}$ $(\Rightarrow r = r_0)$.

Dagegen war für $m > j$: • *Par contre pour* $m \geq j$ *on a vu:* $\mathbb{L} = \{\}, \ r \neq r_0$ $(\Rightarrow r > r = 0)$.

Somit können wir den folgenden Satz notieren (**Rangsatz**):
• *Par conséquence nous pouvons noter le théorème suivant (***Théorème du rang***):*

Satz: • **Théorème:**

Vor.: • **Hyp.:**

Gegeben sei ein Gleichungssystem S mit j Gleichungen und m Unbekannten. • *Soit donné un système d'équations S à j équations et m inconnues.*
Sei • *Soit* $\mathbb{L} \neq \{\}$

Beh.: • **Thè.:**

1 $Rang: \; r = r_0$

2 $Dim = Ord(S) - Rang(j) = m - j$

3 $m \geq j$

Vor.: • **Hyp.:**

$$m < j$$

Beh.: • **Thè.:**

$\mathbb{L} = \{\}, \;\; r > r_0$

Bemerkung: • **Remarque:**

$\vec{x}_{inhom} = \vec{x}_{hom} + \vec{x}_{part} \;\Rightarrow\; Dim(\mathbb{L}_{inhom}) = Dim(\mathbb{L}_{hom})$,
$Ord = const. = Dim + r = Dim + r_0 \;\Rightarrow\; r = r_0 \;\rightsquigarrow\; (r \neq r_0 \;\Rightarrow\; \mathbb{L} = \{\})$

8.2.3 Eine Anwendung — Une application

Der Rangsatz lässt sich auch benutzen um zu untersuchen, ob eine Anzahl von Vektoren linear unabhängig ist. Beispiel: $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3, \vec{n}_4$ ist linear unabhängig, wenn für das folgende Gleichungssystem der Rangsatz gilt. • *On peut utiliser le théorème du rang pour examiner si un nombre donné de vecteurs est linéairement indépendant. Exemple: $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3, \vec{n}_4$ est linéairement indépendant si pour le système d'équations suivant le théorème du rang est valable.*
$\rightsquigarrow$ Gleichungssystem: • *système d'équations:*

$$\begin{pmatrix} \langle \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{x} \rangle \\ \langle \overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{x} \rangle \\ \langle \overrightarrow{n_3}, \overrightarrow{x} \rangle \\ \langle \overrightarrow{n_4}, \overrightarrow{x} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \text{mit} \;\bullet\; \textit{avec} \;\; \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix}$$

Bsp.: • **Exemple:** (Mit Zahlen • *Avec des nombres*)

$$\begin{array}{rcl} +1\,x_1 - 2\,x_2 + 3\,x_3 + 5\,x_4 - 4\,x_5 & = & +2 \\ +2\,x_1 - 4\,x_2 + 6\,x_3 + 5\,x_4 + 2\,x_5 & = & -6 \\ +2\,x_1 - 5\,x_2 + 7\,x_3 + 7\,x_4 + 3\,x_5 & = & -7 \\ -1\,x_1 + 1\,x_2 - 2\,x_3 - 3\,x_4 + 5\,x_5 & = & -3 \end{array} \qquad \rightsquigarrow \quad \mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \}$$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit der Existenz von λ, μ ist: • *Avec l'existence de* λ, μ *on obtient:*

$$Dim(\mathbb{L}) = 2 = Ord - Rang = 5 - m \;\Rightarrow\; Ord = m = 5 - 2 = 3$$

$\rightsquigarrow$ Die Anzahl der linear unabhängigen Gleichungen ist 3, d.h. $\{\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3, \vec{n}_4\}$ enthält 3 linear unabhängige Vektoren. • *Le nombre des équations linéairement indépendantes est* 3*, ç.v.d.* $\{\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3, \vec{n}_4\}$ *contient* 3 *vecteurs linéairement indépendants.*

Kapitel • Chapitre 9

Matrizen und Determinanten — Matrices et déterminants

9.1 Gleichungssysteme und Matrizen — Systèmes d'équations et matrices

9.1.1 Der Begriff Matrize – Notion matrice

Matrix — Matrice

Vorläufig verwenden wir den Begriff „Matrix“ in folgender Interpretationsweise:
• *Provisoirement nous interprétons la notion de matrice de la façon suivante:*

Begriff: • **Notion:** Sei • *Soit* : **Matrix** • **Matrice** := rechteckiges Zahlengebilde
• := *Système rectangulaire de nombres*

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jm} \end{pmatrix}$$

$a_{11} \in \mathbb{R}$ resp. • *resp.* $a_{11} \in \mathbb{C}$ u.s.w • *etc.*.

Definition: • **Définition:** Die Elemente • *Les éléments* $a_{11}, \ , a_{22}, \ \dots, \ a_{mm}$ resp. • *resp.* a_{jj} bilden die **Hauptdiagonale**
• $\dots a_{jj}$ *forment la* **diagonale principale.**

Bemerkung: • **Remarque:** Vektoren können wir als Spezialfälle von Matrizen mit nur einer Spalte auffassen, transponierte Vektoren als Matrizen mit nur einer Zeile. • *On peut comprendre les vecteurs comme matrices qui n'ont qu'une colonne, les vecteurs tansposés comme matrices qui n'ont qu'une ligne.*
Seien • *Soient* $\vec{a} \in \mathbb{R}^j, \ \vec{b} \in \mathbb{R}^m$

$$\rightsquigarrow \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{j1} \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

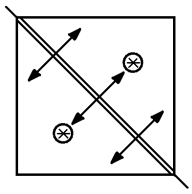
$$\Rightarrow \ \vec{b}^T = (b_1, \dots, b_m) := (b_{11}, \dots, b_{1m})$$

Die Unterscheidung zwischen Vektoren und Matrizen ist für uns nur dann wesentlich, wenn wir

Mathematik–Software einsetzen wie etwa *Mathematica*. • *Faire la différence entre vecteurs et matrices est pour nous essentiel seulement quand nous utilisons des programmes de mathématiques tels que Mathematica.*

Transponierte Matrix — Matrice Transposée

Unter „transponieren“ wollen wir eine Spiegelung der Matrixelemente an der Hauptdiagonalen verstehen. • *Transposer veut dire refléter à la diagonale principale.*



Definition: • **Définition:**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jm} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{j1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & \dots & a_{jm} \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ A^T heisst zu A transponierte Matrix.
• $\rightsquigarrow$ A^T *s'appelle matrice transposée à* A.

Man sieht sofort: • *On voit tout de suite:*

Satz: • **Théorème:** $A = (A^T)^T$

Identifikationen von Matrizen — Identifications de matrices

Eine Matrix lässt sich verschiedentlich interpretieren: • *On peut interpréter une matrice de différentes façons:*

1 Matrix = rechteckiges Zahlenschema • *Matrice = schéma rectangulaire de nombres*

2 Matrix = Zeile von Spaltenvektoren • *Matrice = ligne de vecteurs de colonne*

3 Matrix = Spalte von Zeilenvektoren • *Matrice = colonne de vecteurs transposés (de ligne)*

$$\rightsquigarrow \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jm} \end{pmatrix}, \quad A = (\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{j1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{jm} \end{pmatrix}), \quad A = \begin{pmatrix} (a_{11}, \dots, a_{1m}) \\ \vdots \\ (a_{j1}, \dots, a_{jm}) \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \quad A = (\vec{a_1}, \dots, \vec{a_m}) = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \vdots \\ \alpha_j^T \end{pmatrix}$$

Dass wir hier diese drei Begriffsbildungen der Matrix nicht unterscheiden, führt zu einer bedeutungslosen Unschärfe, die uns, wie schon vorher bemerkt, nicht behindern wird. • *Le fait qu' ici on ne va pas faire la différence entre les trois constructions de la notion matrice mène à une inexactitude qui ne nous gène pas.*

Spezialfälle — Cas spéciaux

1 Matrix mit nur einer Spalte: • *Matrice avec une seule colonne:*

$$A = \vec{a} = (\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \end{pmatrix} = \vec{a}$$

2 Matrix mit nur einer Zeile: • *Matrice avec une seule ligne:*
$B = (\vec{b}^{\,T}) = ((b_1, \ldots, b_m)) := (b_1, \ldots, b_m) = \vec{b}^{\,T}$

3 Matrix = Spalte von Zeilenvektoren • *Matrice = colonne de vecteurs transposés (de ligne)*

Konsequenz: • **Conséquence:** In diesem Rahmen sind Vektoren spezielle Matrizen.
• *Dans ce cadre les vecteurs sont des matrices spéciales.*

9.1.2 Matrixprodukt — Produit matriciel

Matrixprodukt für Vektoren — Produit matriciel pour des vecteurs

Nun können wir das Matrixprodukt für Vektoren definieren, denn Vektoren sind spezielle Matrizen:
• *Maintenant nous pouvons définir le produit matriciel pour les vecteurs, car les vecteurs sont des matrices spéciales:*

Definition: • **Définition:** **Matrixprodukt:** • **Produit matriciel:** $\vec{a}^{\,T} \cdot \vec{b} := \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

Konsequenz: • **Conséquence:**

$$\vec{a}^{\,T} \cdot \vec{b} = (a_1, \ldots, a_m) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = a_1 b_1 + \ldots + a_m b_m = \langle \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \rangle \in \mathbb{R} \text{ resp. } \bullet \text{ \textit{resp.} } \in \mathbb{C}$$

Ein Gewinn: Damit lassen sich Gleichungssysteme kürzer schreiben!
• *Profit: Avec ce produit on peut écrire les systèmes d'équations de façon plus courte:*

$$\text{I: } \left| \begin{array}{lcl} \langle \vec{a}_1, \vec{x} \rangle & = & k_1 \\ \langle \vec{a}_2, \vec{x} \rangle & = & k_2 \\ \vdots & = & \vdots \\ \langle \vec{a}_j, \vec{x} \rangle & = & k_j \end{array} \right| \Leftrightarrow \text{ II: } \left| \begin{array}{lcl} \vec{a}_1{}^{\,T} \cdot \vec{x} & = & k_1 \\ \vec{a}_2{}^{\,T} \cdot \vec{x} & = & k_2 \\ \vdots & = & \vdots \\ \vec{a}_j{}^{\,T} \cdot \vec{x} & = & k_j \end{array} \right| \Leftrightarrow \text{ III: } \begin{pmatrix} \vec{a}_1{}^{\,T} \\ \vec{a}_2{}^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{a}_j{}^{\,T} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_j \end{pmatrix} \Leftrightarrow \text{ IV: } A \cdot \vec{x} = \vec{k}$$

Erklärung: • **Explication:**

I: Mit Skalarprodukt • *Avec produit scalaire*
II: Mit Matrixprodukt • *Avec produit matriciel*
III: Abgekürzte Schreibweise • *Façon d'écrire plus courte (abréviation)*
IV: Kolonne von Zeilenvektoren: Matrix A • *Colonne de vecteurs transposés: Matrice A.*

$\rightsquigarrow$ Die linke Seite des Gleichungssystems schreiben wir also mit Hilfe des Matrixprodukts statt auf j Zeilen nur einmal abgekürzt in der Form $A \cdot \vec{x}$ mit $A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1{}^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{a}_j{}^{\,T} \end{pmatrix}$. Das ergibt eine elegantere, kürzere Schreibweise für das Gleichungssystem.
• *Nous écrivons donc la partie gauche du système d'équations à l'aide du produit matirciel abrégé seulement une fois au lieu de j fois en forme de $A \cdot \vec{x}$ avec $A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1{}^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{a}_j{}^{\,T} \end{pmatrix}$. Ainsi on obtient une façon d'écrire plus élégante et plus courte pour le système d'équations.*

Definition: • **Définition:** Das **Matrixprodukt** $A \cdot \vec{x}$ ist eine Kurzschreibweise für j Matrixprodukte von Vektoren der Form $\vec{a}_1{}^T, \ldots, \vec{a}_j{}^T$.
• *Le* **produit matriciel** $A \cdot \vec{x}$ *est une façon d'écrire abrégée pour* j *produits matriciels de vecteurs de la forme* $\vec{a}_1{}^T, \ldots, \vec{a}_j{}^T$.

$$\rightsquigarrow \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \vec{a}_1, \vec{x} \rangle \\ \vdots \\ \langle \vec{a}_j, \vec{x} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_j \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} (a_{11}, \ldots, a_{1m}) \\ \vdots \\ (a_{j1}, \ldots, a_{jm}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = A \cdot \vec{x} \rightsquigarrow \quad \vec{k} = A \cdot \vec{x}$$

Konsequenz: • **Conséquence:**

1 Das Gleichungssystem • *Le système d'équations*
$$\left| \begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m & = & k_1 \\ \vdots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots & = & \vdots \\ a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jm}x_m & = & k_j \end{array} \right|$$
wird zu • *devient* $A \cdot \vec{x} = \vec{k}$.
Dabei ist A eine $j \times m$–Matrix, $\vec{x}$ ein Vektor $\in \mathbb{R}^m$, $\vec{k}$ ein Vektor $\in \mathbb{R}^j$.
• *Retenons que* A *est une matrice* $j \times m$, $\vec{x}$ *un vecteur* $\in \mathbb{R}^m$, $\vec{k}$ *un vecteur* $\in \mathbb{R}^j$.

2 Eine Matrix A stiftet eine Abbildung $\mathcal{A}$: • *Une matrice* A *génère une application* $\mathcal{A}$:
$$\mathbb{R}^m \xmapsto{\mathcal{A}} \mathbb{R}^j, \qquad \vec{x} \xmapsto{\mathcal{A}} A \cdot \vec{x} = \vec{k}$$

Definition: • **Définition:** Eine solche Abbildung heisst **lineare Abbildung** (nur lineare Operationen „$+, \cdot$“ (Add., Mult. mit Koeff.)).
• *Une telle application s'appelle* **application linéaire** *(seulement les opérations linéaires „$+, \cdot$“ (add., mult. avec coeff.)).*

Problem Schreibweise — Problème façon d'écrire

Beim Matrixprodukt $\vec{a}^T \cdot \vec{b}$ werden Elemente einer Zeile mit Elementen einer Spalte multipliziert und addiert. Beim Skalarprodukt $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ hingegen multipliziert man Elemente einer Spalte mit Elementen einer Spalte. • *Quant au produit matriciel* $\vec{a}^T \cdot \vec{b}$ *les éléments d'une ligne sont multipliés avec les éléments d'une colonne et enfin additionnés. Par contre au produit scalaire* $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ *on multiplie les éléments d'une colonne avec les éléments d'une colonne.*
Weil wir Matrixprodukt und Skalarprodukt in denselben Formeln verwenden, unterscheiden wir hier die beiden Produkte durch ihre Schreibweise, obwohl manchmal in spezialisierten Texten der Ingenieurmathematik auf eine solche Unterscheidung verzichtet wird. • *Comme nous allons utiliser le produit matriciel et le produit scalaire simultanément dans les mêmes formules, nous distinguons ici les deux produits par l'écriture, bien que dans les textes de mathématiques spécialisés pour ingénieurs on renonce souvent à faire cette différence.*

In der Literatur findet man für das Skalarprodukt mehrere verschiedene Schreibweisen:
• *Dans la littérature on trouve différentes façons d'écrire le produit scalaire:*

Bsp.: • **Exemple:** $\vec{a} \cdot \vec{b}$ (Bachmann, Papula, ...), $\vec{a} \circ \vec{b}$ (Pfenninger, ...), $(\vec{a}, \vec{b})$ (Div. Schulbücher, • *Diff. livres d'école* z.B. • *p.ex.* Akad, ...), $(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (Mangold–Knopp, ...), $\beta(\vec{a}, \vec{b})$ (Kowalski, ...), $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ (Nef, ...), $\langle \vec{a} | \vec{b} \rangle$ (Fick, ...), u.s.w • *etc.*

Einfaches Rechnen mit Matrizen — Calcul simple avec les matrices

Später werden wir einfache arithmetische Operationen mit Matrizen verwenden. Diese führen wir auf einfache arithmetische Operationen mit transponierten Vektoren zurück (oder auf des Rechnen mit

Gleichungssystemen, wo man oft Matrizen verwendet):
• *Plus tard nous allons utiliser des opérations arithmétiques simples pour matrices. Nous les dériverons d'opérations arithmétiques simples des vecteurs transposés (ou bien d'opérations arithmétiques avec des systèmes d´équations, où on utilise souvent des matrices.):*

Definition: • **Définition:**

1 Vektoren: • *Vecteurs:*

Summe: • **Somme:** $\vec{a}^{\,T} + \vec{b}^{\,T} := (\vec{a} + \vec{b})^{\,T}$
Produkt mit Skalar: • **Produit avec scalaire:**
$\lambda \cdot \vec{a}^{\,T} := (\lambda \cdot \vec{a})^{\,T}$

2 Matrizen: • *Matrices:*

Summe: • **Somme:**

$$A + B = \begin{pmatrix} \vec{a}_1{}^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{a}_j{}^{\,T} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{b}_1{}^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{b}_j{}^{\,T} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \vec{a}_1{}^{\,T} + \vec{b}_1{}^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{a}_j{}^{\,T} + \vec{b}_j{}^{\,T} \end{pmatrix}$$

Produkt mit Skalar: • **Produit avec scalaire:**

$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \vec{a}_1{}^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{a}_j{}^{\,T} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot \vec{a}_1{}^{\,T} \\ \vdots \\ \lambda \cdot \vec{a}_j{}^{\,T} \end{pmatrix}$$

Spezielle Matrizen — Matrices spéciales

Einige Matrizen haben spezielle Namen. Die folgenden davon werden wir ab und zu brauchen:
• *Quelques matrices ont des noms spéciaux. Les matrices suivantes seront utilisés souvent:*

Definition: • **Définition:**

Nullmatrix: • *Matrice* **nulle***:* $N = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ (Alle Elemente 0 • *Tous les éléments* 0)

Diagonalmatrix: • *Matrice* **diagonale***:* $D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_{jj} \end{pmatrix}$ $(d_{kk} \neq 0, \;\; m = j)$

Einheitsmatrix: • *Matrice* **unité***:* $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(d_{kk} = 1)$

Dreiecksmatrix (obere, untere): • *Matrices* **triangulaires** *(supérieure, inférieure):*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{j1} & \dots & a_{j(j-1)} & a_{jj} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{(j-1)j} \\ 0 & \dots & 0 & a_{jj} \end{pmatrix}$$

Beispiele: • **Exemples:**

Obere Dreiecksmatrix: • *Matrice triangulaire (trigonale) supérieure:* $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$

Untere Dreiecksmatrix: • *Matrice triangulaire (trigonale) inférieure:* $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Symmetrische Matrix: • *Matrice* **symétrique***:* $A = A^T$, $(a_{ik}) = (a_{ki})$

Bemerkung: • **Remarque:** Es ist: • *On consate:*
$E = (\vec{e}_1, \dots \vec{e}_j)$ $j \times j$–Matrix • *matrice* $j \times j$.

9.2 Determinanten — Déterminants

9.2.1 Ausdehnung des Determinantenbegriffs für n grösser 3 — Extension de la notion de déterminant pour n plus grand 3

Begriffsbildung — Obtenir la notion

Problem: • **Problème:**

Flächenprodukt $\rightsquigarrow$ ±Flächeninhalt des Parallelogramms ($Dim = 2$), 2–reihige Determinante
• *'Produit de surface'* $\rightsquigarrow$ *±mesure de la surface du parallélogramme (Dim = 2), déterminant à 2 colonnes*

Spatprodukt $\rightsquigarrow$ ±Volumeninhalt des Spats ($Dim = 3$), 3–reihige Determinante
• *Produit triple* $\rightsquigarrow$ *±mesure du volume du parallélépipède (Dim = 3), déterminant à 3 colonnes*

($Dim = 1 \rightsquigarrow$ ±Länge einer Strecke.)
• *(Dim = 1* $\rightsquigarrow$ *±longeur d'un segment.)*

Eigenschaften solcher „Inhaltsprodukte“ • Qualités de tels "produits de mesure"

1 Vertauschung zweier benachbarter Vektoren $\rightsquigarrow$ Vorzeichenänderung.
Echangement de deux vecteurs proches $\rightsquigarrow$ Changement du signe.

Bsp.: • **Exemple:** $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}]$
Entsprechendes gilt für die Zeilen der Vektoren (Reihenfolge der Basisvektoren).
• *Ainsi pour les lignes des vecteurs (ordre des vecteurs de base).*

2 $[\lambda \cdot \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \lambda \cdot [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ (Streckung) • *allongement*

3 $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}] = [\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}] + [\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}]$ ($\rightsquigarrow$ Cavalieri • *Cavalieri*)

4 $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + 0$ u.s.w. • *etc.*

5 Vektoren linear abhängig $\rightsquigarrow$ Determinante (Inhalt) = 0.
• *Vecteurs linéairement dépendants* $\rightsquigarrow$ *déterminant* = 0

6 Berechnungsformeln (Determinanten von zugehörigen Matrizen)
• *Formules (Déterminants des matrices correspondantes).*

7 Das Einheitsvolumen muss definiert sein: $[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3] = 1$
• *Le volume unité doit être définit:* $[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3] = 1$

Idee der $n \times n$–Determinante: • **Idée du déterminant $n \times n$:**

Begreiffe eine $n \times n$–Matrize als n Spaltenvektoren, die einen „n–dimensionalen Spat“ aufspannen. (Sind die Vektoren linear unabhängig, so bilden sie auch eine Basis des $\mathbb{R}^n$.)
• *Comprenons une matrice $n \times n$ comme n vecteurs de colonne qui donnent un parallélépipède de dimension n. (Si les vecteurs sont linéairement indépendants, ils forment aussi une base du $\mathbb{R}^n$.)*

Der **vorzeichenbehaftete Volumeninhalt** eines solchen Gebildes lässt sich nun z.B. mit Hilfe obiger bekannter Eigenschaften für solche „Inhaltsprodukte“ auch für $n > 3$ definieren.
• *On peut p. ex. définir la* **mesure du volume précédée d'un signe** *d'une telle construction à l'aide des qualités des "produits de contenu" qu'on vient de discuter, aussi pour $n > 3$.*

Definition: • **Définition:** Der vorzeichenbehaftete Volumeninhalt eines n–dimensionalen Spats nennen wir **Determinante** der zugehörigen $n \times n$–Matrix.
• *La mesure du volume précédée d'un signe d' un parallélépipède de dimension n s'appelle* **déterminant** *de la matrice lié $n \times n$.*

Definierende Eigenschaften — Qualités définissantes

Geg.: • **Donné:**

Sei $A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ eine $n \times n$–Matrix, die einen n–dimensionalen Spat definiert. Sei $\det A = [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n]$ der zugehörige „n–dimensionale, vorzeichenbehaftete Volumeninhalt“, der jetzt exakt definiert werden soll. Die Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ seien in der Basis $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ dargestellt:
• *Soit $A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ une matrice $n \times n$ qui définit un parallélépipède de dimension n. Soit $\det A = [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n]$ la mesure du volume lié, précédée d'un signe, que nous voulons définir maintenant. Les vecteurs $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ soient donnés dans la base $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$.*

Z.B. • *P.ex.* $\vec{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} = a_{1k}\vec{e}_1 + \ldots + a_{nk}\vec{e}_n$

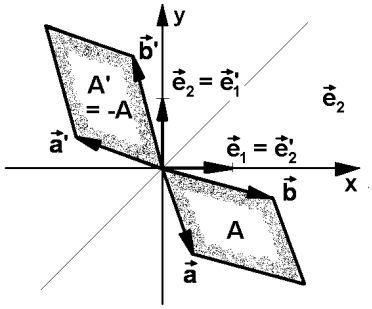
Definition: • **Définition:** $\det A = [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n]$ definieren wir durch die folgenden Eigenschaften: • *Nous définissons $\det A = [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n]$ par les qualités suivantes:*

1 $[\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j, \vec{a}_{j+1}, \ldots, \vec{a}_n] = -[\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{j+1}, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n]$

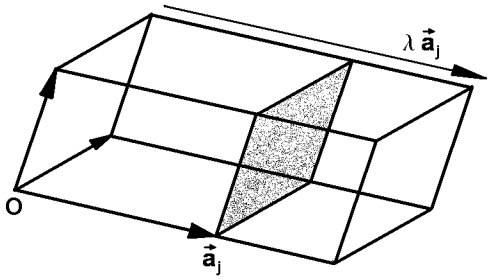
(Vertauschung zweier benachbarter Vektoren $\rightsquigarrow$ Vorzeichenwechsel.)
• *(Echangement de deux vecteurs proches $\rightsquigarrow$ Changement de signe.)*

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & a_{1(j+1)} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & a_{n(j+1)} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1(j+1)} & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n(j+1)} & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Dasselbe gilt, wenn man statt zwei benachbarte Spalten zwei benachbarte Zeilen, d.h. Basisvektoren $\vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}$, vertauscht. • *C'est la même chose, si l'on échange deux lignes voisines, ç.v.d. vecteurs de base* $\vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}$.



2 Streckt man einen „Seitenvektor“ mit einem Faktor λ, so wird das ganze Volumen um λ gestreckt: • *Si l'on allonge un des vecteurs de côté par un facteur* λ, *on allonge tout le volume par* λ.



$[\vec{a}_1, \ldots, \lambda \cdot \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n] = \lambda \cdot [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n]$ oder • *ou*

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & \lambda \cdot a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & \lambda \cdot a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Kurz: • *Bref:* $\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & \lambda \cdot a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & \lambda \cdot a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$

3 Ist ein Seitenvektor Summe zweier Teilvektoren, so ist auch die Determinante (der gesamte Volumeninhalt) Summe der entsprechenden Teildeterminanten (Teilvolumeninhalte): • *Si un des vecteurs de côté est la somme de deux vecteurs partiels, le déterminant (tout le volume) est aussi la somme des deux déterminants partiels (volumes partiels):*

$[\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j + \vec{a}'_j, \ldots, \vec{a}_n] = [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n] + [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}'_j, \ldots, \vec{a}_n]$ oder • *ou*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} + a'_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} + a'_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a'_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a'_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

4 Eichung: Das Volumen des **Einheitsspats** ist 1:
• *Etalonnage: La mesure du* **parallélépipède unité** *est* 1*:*

$$\forall_{n \in \mathbb{N}}: \ \det E = \det(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) = [\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n] = \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} = 1$$

(Für eine *ONB* • *Pour une ONB* , $\vec{e}_i \perp \vec{e}_k, i \neq k$)

Aus 2 und 3 folgt, dass eine Determinante linear ist in allen Spaltenvektoren. Sie ist daher eine **Multilinearform**.
• *De 2 et 3 il suit qu'un déterminant est linéaire en toutes les colonnes. Il est donc une* **forme multilinéaire**.

Folgerungen: • **Conclusions:**

1 **Satz:** • **Théorème:** Ist ein Seitenvektor des Spats $\vec{0}$, so ist die Determinante (der Volumeninhalt) 0. • *Si un des vecteurs de côté du parallélépipède est* $\vec{0}$*, le déterminant (la mesure du contenu) est* 0.

Denn es gilt: • *Car on constate:*

$$[\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{j-1}, \vec{0}_{(j)}, \ldots, \vec{a}_n] = [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{j-1}, 0 \cdot \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n] = 0 \cdot [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{j-1}, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n]$$
$$= 0 \cdot const. = 0 \quad (\vec{a}_j \text{ beliebig } \bullet \textit{ quelconque})$$

2 **Satz:** • **Théorème:** Addiert man zu einer Spalte ein Vielfaches einer andern Spalte, so ändert die Determinante (der Volumeninhalt) nicht. • *Si l'on additionne à une colonne un multiple d'une autre colonne, le déterminant (mesure du volume) ne change pas.*

Hinweis: • *Indication:* Studiere • *Etudier* $[\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_k, \ldots, \vec{a}_n]$

$$[\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j + \lambda \cdot \vec{a}_k, \ldots, \vec{a}_k, \ldots, \vec{a}_n] = [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_k, \ldots, \vec{a}_n] +$$
$$+ [\vec{a}_1, \ldots, \lambda \cdot \vec{a}_k, \ldots, \vec{a}_k, \ldots, \vec{a}_n] = [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_k, \ldots, \vec{a}_n] + \lambda \cdot [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k, \ldots, \vec{a}_k, \ldots, \vec{a}_n],$$

$$[\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k, \ldots, \vec{a}_k, \ldots, \vec{a}_n] = \pm[\vec{a}_k, \vec{a}_k, \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n] := D$$
$$(k + j - 2 \text{ Vertauschungen } \bullet \textit{ échangements})$$
$$\ldots = - \pm [\vec{a}_k, \vec{a}_k, \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n] := -D \ (\vec{a}_k, \vec{a}_k \text{ vertauscht } \bullet \textit{ échangé})$$

$$\Rightarrow \ D = -D \ \Rightarrow \ D = 0 \rightsquigarrow \quad [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j + \lambda \cdot \vec{a}_k, \ldots, \vec{a}_k, \ldots, \vec{a}_n] = [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_k, \ldots, \vec{a}_n]$$

3 **Satz:** • **Théorème:** Bei einer $n \times n$–Matrix ist die Determinante genau dann 0, wenn ein Spaltenvektor linear abhängig von den andern ist. • *Le déterminant pour une matrice* $n \times n$ *est* 0 *exactement quand un vecteur de colonne est linéairement dépendant des autres.*

(Folgerung aus obigen Sätzen. • *Conclusion des théorèmes ci-dessus.*)

9.2.2 Entwicklungssatz — Théorème du développement

(Entwicklungssatz von Laplace • *Théorème de Laplace*)

Adjungierte — Adjointe

Erst eine Definition. Wir verwenden dazu die folgende Notation:
• *D'abord une définition. Nous utilisons la notation suivante:*

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A_{ij} := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \cancel{a_{1j}} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \cancel{\vdots} & & \vdots \\ \cancel{a_{i1}} & \cancel{\dots} & \cancel{a_{ij}} & \cancel{\dots} & \cancel{a_{in}} \\ \vdots & & \cancel{\vdots} & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \cancel{a_{nj}} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A_{ij} entsteht aus A durch Streichung der Zeile i und der Spalte k.
• *A_{ij} est déduit de A en traçant la ligne i et la colonne k.*

Definition: • **Définition:** $\alpha_{ij} := (-1)^{(i+j)} \cdot \det(A_{ij})$
heisst das **algebraische Komplement** oder die **Adjunkte** zum Element a_{ij} der Matrix A
• *s'appelle le* **complément algébrique** *ou* **l'adjointe** *de l'élément a_{ij} de la matrice A.*

$\tilde{A} := A_{adj} := \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ heisst die zu A **adjungierte Matrix** • *s'appelle la* **matrice adjointe** *à A.*

Diese Definition werden wir später bei Gelegenheit einsetzen. • *Nous allons utiliser cette définition plus tard à l'occasion.*

Herleitung des Entwicklungssatzes — Déduction du théorème de Laplace

Wir betrachten: • *Considérons:*

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}\vec{e}_1 + \ldots + a_{n1}\vec{e}_n = \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_{21} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{n1} \end{pmatrix} := \vec{a}_{11} + \vec{a}_{21} + \ldots + \vec{a}_{n1}$$

Ebenso • *De même*: $\vec{a}_2 = \vec{a}_{12} + \vec{a}_{22} + \ldots + \vec{a}_{n2}, \quad \ldots, \quad \vec{a}_n = \vec{a}_{1n} + \vec{a}_{2n} + \ldots + \vec{a}_{nn}$.

Sei • *Soit* $\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Auf diese Determinante wenden wir obige Regeln (Definition) an.
• *A ce déterminant nous appliquons les règles ci-dessus (définition).*

Wir verwenden: • *Nous utilisons:* $\vec{a}_1 = \vec{a}_{11} + \ldots + \vec{a}_{n1} \rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow \quad \det A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n] = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

Zeilenvertauschungen: • *Echangement des lignes:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \\ 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{(n-1)2} & \dots & a_{(n-1)n} \end{vmatrix}$$

Streckungen: • *Allongements:*

$$= (-1)^0 \cdot a_{11} \cdot \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^1 \cdot a_{21} \cdot \begin{vmatrix} 1 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots +$$

$$+ \dots + (-1)^{n-1} \cdot a_{n1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \\ 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{(n-1)2} & \dots & a_{(n-1)n} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^0 \cdot a_{11} \cdot \det M_{11} + (-1)^1 \cdot a_{21} \cdot \det M_{21} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot a_{n1} \cdot \det M_{n1} = \dots$$

Addiere in M_{j1} zur Spalte k die mit $(-a_{kj})$ multiplizierte erste Spalte von M_{j1}. Dadurch entsteht oben jeweils eine 0. • *Additionne dans M_{j1} à la ligne k la première colonne de M_{j1} après l'avoir multipliée par $(-a_{kj})$. Ainsi on obtient chaque fois 0 en haut.* $\rightsquigarrow$

$$(-1)^0 \cdot a_{11} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^1 \cdot a_{21} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots +$$

$$+ \dots + (-1)^{n-1} \cdot a_{n1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{(n-1)2} & \dots & a_{(n-1)n} \end{vmatrix} =$$

Kurz: • *Bref:*

$$(-1)^0 \cdot a_{11} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & \dots & \\ \vdots & \vdots & A_{11} & \vdots \\ 0 & & \dots & \end{vmatrix} + (-1)^1 \cdot a_{21} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & \dots & \\ \vdots & \vdots & A_{21} & \vdots \\ 0 & & \dots & \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot a_{n1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & \dots & \\ \vdots & \vdots & A_{n1} & \vdots \\ 0 & & \dots & \end{vmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ **Untermatrizen** • **sous–matrices** $(-1)^{j-1} \cdot A_{j1} = (-1)^{j+1} \cdot A_{j1}$

Man beachte, dass die so entstandenen Untermatrizen $(-1)^{j+1} \cdot A_{j1}$ bis auf das Vorzeichen gerade die algebraischen Komplemente sind. • *Considérons que les sous–matrices ainsi obtenues sont exactement les compléments algébriques.*

Bis jetzt haben wir folgende Operationen ausgeführt: Summenzerlegung, Streckungen, Zeilenvertauschungen, Addition eines Vielfachen der ersten Spalte zu andern. Wenn wir solche entsprechenden Operationen auch auf die Untermatrizen A_{j1} anwenden, bleiben dabei die ersten Zeilen und Spalten der M_{j1} unangetastet. Jedoch die ersten Zeilen und Spalten der Untermatrizen nehmen dann dieselbe Form an wie diejenigen der M_{j1} • *Jusqu'ici nous avons exécuté les opérations suivantes: Décomposition en une somme, allongements, échangements de lignes, addition d'un multiple de la première colonne à un autre. Si l'on adapte ces opérations aussi pour les sous–matrices A_{j1}, la première ligne et colonne des M_{j1} restent comme elles sont. Mais les premières lignes et colonnes des sous–matrices prennent la même forme que celles des M_{j1}.*

Beispiel: • *Exemple:*

$$(-1)^0 \cdot a_{11} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^0 \cdot a_{11} \cdot ((-1)^0 \cdot a_{22} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots +$$

$$+ \dots + (-1)^{n-2} \cdot a_{n2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{(n-1)3} & \dots & a_{(n-1)n} \end{vmatrix}) =$$

$$(-1)^0 \cdot a_{11} \cdot ((-1)^0 \cdot a_{22} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & A_{111} & \vdots \\ 0 & 0 & & \dots & \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{n-2} \cdot a_{n2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & A_{11(n-1)} & \vdots \\ 0 & 0 & & \dots & \end{vmatrix})$$

Dabei treten hier wieder neue, aber kleinere Untermatrizen auf. Z.B. zu A_{11} gehören die Untermatrizen $A_{11(k)}$. • *On constate qu'on trouve des sous–matrices nouvelles, mais plus petites. P.ex. à A_{11} correspondent les sous–matrices $A_{11(k)}$.*

Dieses Verfahren kann man solange iterieren, bis die verbleibenden Untermatrizen nur noch aus einem Element bestehen. Andererseits entstehen bei jedem Iterationsschritt neue Summanden, und es werden jedes Mal neue Faktoren (Matrixelemente) a_{jk} vor die Determinante gezogen, noch multipliziert mit Faktoren der Form $(-1)^{xyz\cdots}$. Die verbleibenden Matrizen, zu denen die Determinante noch berechnet werden soll, haben alle die Form der Einheitsmatrix E.

• *On peut itérer ce processus jusqu'à ce que les sous–matrices qui restent à traiter ne consistent qu'en un seul élément. D'autre part à chaque pas d'itération on obtient de nouveaux termes additionnels, chaque fois on écrit de nouveaux facteurs (éléments de matrice) a_{jk} devant le déterminant, multipliés encore avec des facteurs de la forme $(-1)^{xyz\cdots}$. Les matrices qui restent et auxquelles il faut encore calculer le déterminant, ont toutes la forme de la matrice unité E.*

Da man in jedem Iterationsschritt eine neue Spalte k behandelt und in der jeweiligen Untermatrix in jedem Summanden eine andere Zeile j nach oben schiebt um dann das erste Element a_{jk} vor die Determinante zu nehmen, stehen schliesslich in jedem Summanden vor der verbleibenden Determinante der Einheitsmatrix Faktoren der Form $(-1)^{xyz\cdots} \cdot a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n}$ mit lauter verschiedenen Indices in den a_{jk}. (Aus jeder Zeile j und Spalte k kommt jeweils ein Faktor a_{jk} vor.) Die Indexfolge $k_1, \ldots, k_n$ ist daher immer eine Permutation von $(1, 2, \ldots, n)$.

• *Comme on traite à chaque étape d'itération une nouvelle colonne k et comme on fait monter dans la sous–matrice traitée actuellement dans chaque terme additionnel une ligne j différente pour pouvoir écrire l'élément a_{jk} devant le déterminant, on obtient devant chaque terme additionnel, devant le déterminant de la matrice unité qui reste, des facteurs de forme $(-1)^{xyz\cdots} \cdot a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n}$ avec des index différents dans les a_{jk}. (De chaque ligne j et colonne k on obtient un facteur a_{jk}.) La suite des index $k_1, \ldots, k_n$ est donc toujours une permutation de $(1, 2, \ldots, n)$.*

Alle Summanden haben daher die folgende Form:

• *Tous les termes additionnels ont donc la forme suivante:*

$$(-1)^{xyz\cdots} \cdot a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n} \cdot \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{xyz\cdots} \cdot a_{1k_1} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n} \cdot 1, \quad \det E = 1$$

$$\rightsquigarrow \quad \det A = \sum_{\cdots}^{\cdots} (-1)^{\cdots} \cdot a_{1k_1} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n} \cdot 1 = \det A = \sum_{\cdots}^{\cdots} (-1)^{\cdots} \cdot a_{1k_1} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n}$$

Da man bei der Iteration sämtliche Kolonnen und Zeilen behandeln muss, läuft die Summation über alle $n!$ Permutationen $\sigma_p(1,\ldots,n) = (k_1,\ldots,k_n)$ der Zahlen $1,\ldots,n$. Man hat daher $n!$ Summanden!
• *Comme lors de l'itération il faut traiter toutes les colonnes et lignes, la sommation a lieu pour toutes les $n!$ permutations $\sigma_p(1,\ldots,n) = (k_1,\ldots,k_n)$ des nombres $1,\ldots,2$. Nous avons donc $n!$ termes additionnels.*

Diejenigen Leser, die etwas mehr über Permutationen Bescheid wissen, sehen leicht, dass der Exponent $xyz\ldots$ von $(-1)^{xyz\cdots}$ gerade das „Vorzeichen" $sgn(\sigma_p)$ der jeweiligen Permutation $\sigma_p(1,\ldots,n)$ ist. ($(-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma_p)} = 1$ für gerade Permutationen, $(-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma_p)} = -1$ für ungerade Permutationen. Gerade Permutation: Gerade Anzahl von Vertauschungen von Elementen.)
• *Les lecteurs qui connaissent un peu mieux les permutations, voient tout de suite que l'exposant $xyz\ldots$ de $(-1)^{xyz\cdots}$ est exactement le "signe" $\mathrm{sgn}(\sigma_p)$ de la permutation actuelle $\sigma_p(1,\ldots,n)$. ($(-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma_p)} = 1$ pour les permutations paires, $(-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma_p)} = -1$ pour des permutations impaires. Permutation paire: Nombre paire d'échangements d'éléments.)*

Satz: • **Théorème:** **Entwicklungssatz** • **Théorème de Laplace**

$$\det A = \sum_{\sigma_p,\ p=1}^{n!} (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma_p)} \cdot a_{1k_1} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n}$$

Bemerkung: • **Remarque:**

1 Es wird schwierig sein, diesen Satz in dieser Form direkt zu verwenden, zumal die praktische Verwendung zur Determinantenberechnung bei grösseren n an der Anzahl Summanden $n!$ (!!!) scheitern wird.
• *Il sera difficile d'utiliser ce théorème directement dans cette forme, d'autant plus que pour l'utilisation pratique pour calculer des déterminants avec des n assez grands cela n'ira pas à cause du nombre de termes additionnels $n!$ (!!!).*

2 Aus dem Entwicklungssatz folgt sofort die Ungültigkeit der Regel von Sarrus für $n \geq 4$. Denn rechnet man wie für $n = 3$ den „Diagonalen entlang", so erhält man eine Summe von $2n$ Produkten. Nach dem Entwicklungssatz müssen es aber $n!$ Produkte sein. Für $n > 3$ ist aber $n! > 2n$.
• *Du théorème de Laplace on déduit tout de suite que la règle de Sarrus n'est plus valable pour $n \geq 4$. Si l'on calcule "le long des diagonales" comme pour $n = 3$, on obtient une somme de $2n$ produits. D'après le théorème de Laplace par contre il faudrait obtenir $n!$ produits. Mais pour $n > 3$ vaut $n! > 2n$.*

3 Ist $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ eine Permutation von $(1, 2\ldots, n)$, so ist auch $(1, 2\ldots, n)$ eine Permutation von $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$.
• *Si $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ est une permutation de $(1, 2\ldots, n)$, alors $(1, 2\ldots, n)$ est aussi une permutation de $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$.*

Im Entwicklungssatz ist die Summe über Produkte $a_{1k_1} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n}$ gebildet, deren Faktoren nach dem ersten Index (dem Zeilenindex) geordnet sind. Niemand hindert einem daran, diese Produkte nach dem zweiten Index, dem Spaltenindex zu ordnen. Dann hat der Satz die nachstehende Form:
• *Dans le théorème de Laplace on calcule la somme des produits $a_{1k_1} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n}$, dont les facteurs sont triés d'après le premier index (index de ligne). Mais personne ne nous empêche de ranger les produits d'après le deuxième index, l'index de colonne. Par conséquent le théorème prend la forme suivante:*

$$\det A = \sum_{\sigma_p,\ p=1}^{n!} (-1)^{sgn(\sigma_p)} \cdot a_{j_1 1} \cdot \ldots \cdot a_{j_n n}.$$

Es ist also egal, ob man die Determinante nach Zeilen oder nach Spalten entwickelt. Daraus folgt, dass die transponierte Matrix A^T dieselbe Determinante hat wie die Matrix A.
• *Il n'importe donc pas, si l'on développe le déterminant d'après les lignes ou les colonnes. On déduit donc que la matrice transposée A^T a le même déterminant que la matrice A.*

4 Bekannt: Bei einer $n \times n$–Matrix ist die Determinante genau dann 0, wenn ein Spaltenvektor linear abhängig von den andern ist. • *On sait: Le déterminant pour une matrice $n \times n$ est 0 exactement quand un vecteur de colonne est linéairement dépendant des autres.*

Um zu testen, ob n Vektoren $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig sind, genügt es demnach zu testen, ob $\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \neq 0$ ist.
• *Pour tester si n vecteurs $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^n$ sont linéairement indépendants, il suffit donc de tester s'il est* $\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \neq 0$.

5 Wir wissen: • *Nous savons:*

$$\det A = (-1)^0 \cdot a_{11} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & a_{1n} \\ 0 & & \ldots & \\ \vdots & \vdots & A_{11} & \vdots \\ 0 & & \ldots & \end{vmatrix} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot a_{n1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & \ldots & \\ \vdots & \vdots & A_{n1} & \vdots \\ 0 & & \ldots & \end{vmatrix}$$

Die Summanden (Produkte $(-1)^{sgn(\sigma_p)} \cdot a_{1k_1} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n}$) im Entwicklungssatz erhalten wir hier aus den Summanden s_k folgender Form: • *Ici les termes de sommation (produits $(-1)^{sgn(\sigma_p)} \cdot a_{1k_1} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n}$) dans le théorème de Laplace sont déduits des termes de sommations de la forme suivante:*

$$(-1)^j \cdot a_{j1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & \ldots & \\ \vdots & \vdots & A_{j1} & \vdots \\ 0 & & \ldots & \end{vmatrix}$$

Die Faktoren $(-1)^j \cdot a_{j1}$ sind hier bekannt. Die weiteren im Entwicklungssatz vorhandenen Faktoren $(-1)^{\cdots}$, a_{mk} müssen demnach aus der Behandlung der Untermatrizen A_{j1} stammen, die ja ihrerseits iterativ genauso wie $\det A$ entwickelt werden. Man berechnet demnach hier beim Entwickeln die Determinanten $\det A_{j1}$. Daher gilt:
• *Ici les facteurs $(-1)^j \cdot a_{j1}$ sont connus. Les autres facteurs $(-1)^{\cdots}$, a_{mk} présents dans le théorème de Laplace doivent donc venir des sous–matrices A_{j1} qui sont développées itérativement de la même façon que* $\det A$. *En développant on calcule donc les déterminants des matrices* $\det A_{j1}$. *C'est pourquoi on peut noter:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & \ldots & \\ \vdots & \vdots & A_{j1} & \vdots \\ 0 & & \ldots & \end{vmatrix} = \det A_{j1}, \quad \det A = (-1)^0 \cdot a_{11} \cdot \det A_{11} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot a_{n1} \cdot \det A_{n1}$$

Statt nach Spalten kann man wegen $\det A = \det A^T$ auch nach Zeilen entwickeln. • *Au lieu de développer d'après les colonnes, on peut aussi développer d'après les lignes à cause de* $\det A = \det A^T$
.

Korollar: • **Corollaire:**

1 Die Regel von Sarrus gilt für $n > 3$ nicht mehr. • *La règle de Sarrus n'est plus valable pour $n > 3$.*

2 $\det A = \det A^T$
$\rightsquigarrow$ Die transponierte Matrix hat dieselbe Determinante.
• *La matrice transposée a le même déterminant.*

3 $\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ *l.a.'l.d.*

4 $\det A = (-1)^0 \cdot a_{11} \cdot \det A_{11} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot a_{n1} \cdot \det A_{n1}$

5 Für grosse n ist der Entwicklungssatz für praktische Rechnungen nicht verwendbar. • *Pour des n très grands le théorème de Laplace n'est pas efficace dans le cadre des calculs pratiques.*

Problem: • **Problème:** Gesucht ist eine Methode zur praktischen effizienten Berechnung von Determinanten für grosse n. • *On cherche une méthode pour le calcul efficace des déterminants pour des n grands.*

9.2.3 Praktische Berechnungsmethoden — Méthodes de calculer

Mit Dreiecksmatrix — Avec matrice triangulaire

Bisher bekannte Methoden: • *Des Méthodes connues jusqu'à présent:*

1 $n = 2$: Flächenprodukt • *Produit de surface*

2 $n = 3$: Spatprodukt, Sarrus • *Produit triple, Sarrus*

3 n nicht zu gross: Entwicklungssatz • *n pas trop grand: Théorème de Laplace*

4 n gross: ? n grand: ?

Idee für grosse n: Transformiere die Matrix A ohne die Determinante zu ändern solange ($\rightsquigarrow A^*$), bis die Berechnung nach dem Entwicklungssatz sehr einfach wird (viele Faktoren 0). Das gelingt durch addieren von Vielfachen von Spalten oder Zeilen zu andern Spalten oder Zeilen.
• **Idée pour des n grands:** *Transformer la matrice A sans toucher le déterminant jusqu'à ce que le calcul d'après le théorème de Laplace devienne très simple ($\rightsquigarrow A^*$, beaucoup de facteurs 0). On y arrive en additionnant des multiples de colonnes ou lignes à d'autres colonnes ou lignes.*

Konkret wünscht man sich als Ziel für die Matrix eine Dreiecksform (oder eine Diagonalform):
• *Concrètement on désire comme but pour la matrice une forme triangulaire (ou diagonale):*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{Transf.}}{\longmapsto} \det A = \det A^* = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

Nach dem Entwicklungssatz gilt dann: • *Selon le théorème de Laplace on conclut:*

$$\det A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^0 \cdot \alpha_{11} \cdot \det A_{11} + (-1)^1 \cdot 0 \cdot \det A_{21} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot 0 \cdot \det A_{n1} =$$

$$= \alpha_{11} \cdot \det A_{11} = \alpha_{11} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} & \ldots & \alpha_{2n} \\ 0 & \alpha_{33} & \ldots & \alpha_{3n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdot \det \tilde{A}_{11} = \ldots = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdot \ldots \cdot \alpha_{nn}$$

Konsequenz: • **Conséquence:** det A lässt sich aus A^* wie folgt berechnen: • *On peut calculer* det A *de* A^* *comme il suit:*

$$\det A = \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdot \ldots \cdot \alpha_{nn} = \prod_{k=1}^{n} \alpha_{kk}$$

Beispiel — Exemple

Erlaubte Zeilenmanipulationen: Addition einer (u.U. vervielfachten) Zeile zu den andern:
• *Des manipulations de lignes: Additionner une ligne (ev. multipliée) à d'autres:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \tfrac{1}{2} = 1$$

Bemerkung: • **Remarque:** Die verwendeten Umformungen, die auf die Dreiecksmatrix führen, sind Elementarsubstitutionen, die wir von der Methode von Gauss–Jordan her kennen. • *Les manipulations utilisées (qui permettent de trouver la forme de matrice triangulaire) sont des substitutions élémentaires comme nous les connaissons déjà de la méthode de Gauss–Jordan.*

9.2.4 Ausdehnung der Cramerschen Regeln für n grösser 3 — Extension des règles de Cramer pour n plus grand 3

Problem: • **Problème:** Löse das $n \times n$–System: • *A résoudre le système* $n \times n$*:*

$$\begin{vmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{vmatrix} \quad \text{oder} \bullet \ \textit{ou} \ \ \vec{a}_1 x_1 + \ldots + \vec{a}_n x_n = \vec{b}$$

Sei • *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nk} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = (\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_k \ldots \vec{a}_n),$$

$$A_{j,\vec{b}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = (\vec{a}_1 \ldots \vec{b} \ldots \vec{a}_n)$$

$A_{j,\vec{b}}$ entsteht aus A durch Ersetzung der k–ten Spalte durch $\vec{b}$.
• $A_{j,\vec{b}}$ *est déduit de* A *en remplaçant la colonne* k *par* $\vec{b}$.

$$\rightsquigarrow \quad \det A_{j,\vec{b}} = [\vec{a}_1 \ldots \vec{b} \ldots \vec{a}_n] = [\vec{a}_1 \ldots \underbrace{\vec{a}_1 x_1 + \ldots + \vec{a}_n x_n}_{=\vec{b}} \ldots \vec{a}_n] =$$

$$\underbrace{[\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_1 x_1 \ldots \vec{a}_n]}_{=0} + \underbrace{\ldots}_{=0} + \underbrace{[\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_k x_k \ldots \vec{a}_n]}_{\neq 0} + \underbrace{\ldots}_{=0} + \underbrace{[\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_n x_n \ldots \vec{a}_n]}_{=0}$$

$[\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_i \ldots \vec{a}_i x_i \ldots \vec{a}_n] = 0$ weil Spalte i *l.a.'l.d.* von Spalte j (dort steht $\vec{a}_i x_i$) • *car colonne* i *l.a.'l.d.*

de colonne j (là il y a $\vec{a}_i x_i$).

$\rightsquigarrow \quad \det A_{j,\vec{b}} = [\vec{a}_1 \ldots \vec{b} \ldots \vec{a}_n] = [\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_k x_k \ldots \vec{a}_n] = x_k \cdot [\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_k \ldots \vec{a}_n] = x_k \cdot \det A$

$\Rightarrow \; x_j = \dfrac{\det A_{j,\vec{b}}}{\det A} \rightsquigarrow$ Lösung eindeutig für $\det A \neq 0$ • *Solution univoque pour* $\det A \neq 0$.

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$\left| \begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \right|$$

Beh.: • **Thè.:**

$\Rightarrow \; x_i = \dfrac{\det A_{j,\vec{b}}}{\det A}$

Lösung eindeutig für $\det A \neq 0$.

• *Solution univoque pour* $\det A \neq 0$.

9.3 Allgemeines Matrixprodukt — Produit matriciel général

9.3.1 Rechenregeln für das Produkt „Matrix mal Vektor“ — Règles de calcul pour le produit ”matrice fois vecteur”

Bekannt: • *Nous savons:* $A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{a}_j^{\,T} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^{\,T} \cdot \vec{x} \\ \vdots \\ \vec{a}_j^{\,T} \cdot \vec{x} \end{pmatrix}$ mit • *avec*

$\vec{a}_i^{\,T} \cdot \vec{x} = \langle \vec{a}_i, \vec{x} \rangle$ (Matrixprodukt und Skalarptodukt • *Produits matriciels et scalaires.*)

Dadurch wird das Produkt $A \cdot \vec{x}$ auf Produkte der Form $\vec{a}_i^{\,T} \cdot \vec{x}$ reduziert. • *Ainsi on réduit le produit $A \cdot \vec{x}$ à des produits de forme $\vec{a}_i^{\,T} \cdot \vec{x}$.*

Eine Matrix können wir auffassen als Spalte von Zeilenvektoren — oder als Zeile von Spaltenvektoren. Folgende Definitionen erweisen sich daher als sinnvoll: • *Nous pouvons comprendre une matrice comme colonne de vecteurs transposés (de ligne) ou bien comme ligne de vecteurs de colonne. Par conséquent les définitions suivantes sont utiles:*

Definition: • **Définition:**

1 $A + B := \begin{pmatrix} \vec{a}_1^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{a}_j^{\,T} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{b}_1^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{b}_j^{\,T} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \vec{a}_1^{\,T} + \vec{b}_1^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{a}_j^{\,T} + \vec{b}_1^{\,T} \end{pmatrix}$

resp. • *resp.* $\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \ldots & a_{jk} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{j1} & \ldots & b_{jk} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \ldots & a_{1k} + b_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} + b_{j1} & \ldots & a_{jk} + b_{jk} \end{pmatrix}$

2 $\lambda \cdot A = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \vec{a}_1^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{a}_j^{\,T} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot \vec{a}_1^{\,T} \\ \vdots \\ \lambda \cdot \vec{a}_j^{\,T} \end{pmatrix}$

resp. • *resp.* $\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \ldots & a_{jk} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \ldots & \lambda \cdot a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda \cdot a_{j1} & \ldots & \lambda \cdot a_{jk} \end{pmatrix}$

Man addiert also Matrizen „zellenweise“. Entsprechend für die Multiplikation mit einem Skalar.
• *Donc on additionne les matrices "par leurs cellules". De même pour la multiplication avec un scalaire.*
Für die einzelnen Zellen gilt: • *Pour les cellules on constate:*

1 $\vec{a}_i^T \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \langle \vec{a}_i, (\vec{x} + \vec{y}) \rangle = \langle \vec{a}_i, \vec{x} \rangle + \langle \vec{a}_i, \vec{y} \rangle = \vec{a}_i^T \cdot \vec{x} + \vec{a}_i^T \cdot \vec{y}$

2 $\vec{a}_i^T \cdot (\lambda \cdot \vec{x}) = \langle \vec{a}_i, (\lambda \cdot \vec{x}) \rangle = \lambda \cdot \langle \vec{a}_i, \vec{x} \rangle = \lambda \cdot (\vec{a}_i^T \cdot \vec{x})$

3 $(\lambda \cdot \vec{a}_i^T) \cdot \vec{x} = \langle (\lambda \cdot \vec{a}_i), \vec{x} \rangle = \lambda \cdot \langle \vec{a}_i, \vec{x} \rangle = \lambda \cdot (\vec{a}_i^T \cdot \vec{x})$

4 $(\vec{a}_i^T + \vec{b}_i^T) \cdot \vec{x} = \langle (\vec{a}_i + \vec{b}_i), \vec{x} \rangle = \langle \vec{a}_i, \vec{x} \rangle + \langle \vec{b}_i, \vec{x} \rangle = \vec{a}_i^T \cdot \vec{x} + \vec{b}_i^T \cdot \vec{x}$

Wenden wir diese Eigenschaften auf alle Zeilen einer Matrix $A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^T \\ \vdots \\ \vec{a}_j^T \end{pmatrix}$ an so ergibt sich:
• *Si l'on applique ces qualités à toutes les lignes d'une matrice $A = \ldots$, on obtient:*

Satz: • **Théorème:**

1 $A \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = A \cdot \vec{x} + A \cdot \vec{y}$

2 $A \cdot (\lambda \vec{x}) = \lambda (A \cdot \vec{x}) = (\lambda \cdot A) \cdot \vec{x}$

3 $(A + B) \cdot \vec{x} = A \cdot \vec{x} + B \cdot \vec{x}$

Für Matrizen gilt nach Definition: • *D'après la définition pour les matrices il vaut:*

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \ldots & a_{jk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \ldots & \lambda \cdot a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda \cdot a_{j1} & \ldots & \lambda \cdot a_{jk} \end{pmatrix}$$

Für Determinanten dagegen: • *Par contre pour les déterminants:*

$$[\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{i-1}, \lambda \cdot \vec{a}_i, \vec{a}_{i+1}, \ldots, \vec{a}_k] = \lambda \cdot [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{i-1}, \vec{a}_i, \vec{a}_{i+1}, \ldots, \vec{a}_k]$$

$\rightsquigarrow$ **Konsequenz:** • **Conséquence:**

Satz: • **Théorème:** $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^k \cdot \det A$

9.3.2 Matrixprodukt „Matrix mal Matrix“und lineare Abbildung — Produit matriciel "matrice fois matirce" et application linéaire

Matrix und lineare Abbildung — Matrice et application linéaire

Sei • *Soit* $A \cdot \vec{u} = \vec{v}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \ldots & a_{jm} \end{pmatrix}$ $j \times m$–Matrix • *matrice* $j \times m$, $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^j$

Durch A wird demnach dem Vektor $\vec{u}$ der Vektor $\vec{v}$ zugeordnet:
$\rightsquigarrow$ A stiftet eine Abbildung $\vec{u} \overset{\mathcal{A}}{\longmapsto} \vec{v} = A \cdot \vec{u}$.
• *Par A on applique donc au vecteur $\vec{u}$ le vecteur $\vec{v}$:*
$\rightsquigarrow$ *A génère une application $\vec{u} \overset{\mathcal{A}}{\longmapsto} \vec{v} = A \cdot \vec{u}$.*
oder • *ou* $\mathcal{A} : \mathbb{R}^m \overset{\mathcal{A}}{\longmapsto} \mathbb{R}^j$.

Nochmals: $\mathcal{A}$ ist gegeben durch die Matrix A. Bei der Berechnung von $\vec{v} = A \cdot \vec{u}$ kommen nur lineare Operationen vor (Addition und Multiplikation). Daher nennen wir eine solche Abbildung **linear**.
• *Répétition: $\mathcal{A}$ est donné par la matrice A. Pour calculer $\vec{v} = A \cdot \vec{u}$ on n'utilise que des opérations linéaires (addition et multiplication). C'est pourquoi nous appelons une telle application* **linéaire**.

Zusammensetzung linearer Abbildungen — Compositions d'applications linéaires

Sei • *Soit* $\mathcal{A} : \vec{u} \longmapsto \vec{v} = A \cdot \vec{u}$, $\mathcal{B} : \vec{v} \longmapsto \vec{w} = B \cdot \vec{v}$
Dabei ist B eine $k \times j$–Matrix. • *B y est une matrice $k \times j$.*
Kombiniert: • *Combiné:*

$$\begin{array}{ccccccc} & & \overset{\mathcal{A}}{\longmapsto} & \vec{v} = A \cdot \vec{u} & \overset{\mathcal{B}}{\longmapsto} & & \\ & \nearrow & & & & \searrow & \\ \vec{u} & & & & & & \vec{w} = B \cdot \vec{v} = B \cdot (A \cdot \vec{u}) \\ & \searrow & & & & \nearrow & \\ & & \longmapsto & \overset{\mathcal{B}\circ\mathcal{A}}{\longmapsto} & \longmapsto & & \end{array}$$

Für die zusammengesetzte Abbildung gilt demnach: • *Quant à l'application composée on constate:*

$$\mathcal{B} \circ \mathcal{A} : \vec{u} \longmapsto \vec{w} = B \cdot (A \cdot \vec{u})$$

Problem: • **Problème:** Es stellt sich nun die naheliegende Frage, ob etwa die zusammengesetzte Abbildung $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ wieder durch eine Matrix gegeben ist. — Und wen ja, durch welche Matrix?
• *Maintenant on se pose la question, si l'application $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ est de nouveau donné par une matrice. — Et si oui, par laquelle?*

Diese Frage wollen wir nun untersuchen. • *Maintenant nous allons étudier cette question:*

Seien • *Soient* :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jm} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{j1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{jm} \end{pmatrix} \right) = (\vec{a_1}, \dots, \vec{a_m}) = \begin{pmatrix} (a_{11}, \dots, a_{1m}) \\ \vdots \\ (a_{j1}, \dots, a_{jm}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\alpha_1}^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{\alpha_j}^{\,T} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \dots & b_{kj} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{k1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{kj} \end{pmatrix} \right) = (\vec{b_1}, \dots, \vec{b_j}) = \begin{pmatrix} (b_{11}, \dots, b_{1j}) \\ \vdots \\ (b_{k1}, \dots, b_{kj}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\beta_1}^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{\beta_k}^{\,T} \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \quad \vec{w} = \mathcal{B}(\vec{v}) = \mathcal{B}(A \cdot \vec{u}) = B \cdot (A \cdot \vec{u}) = B \cdot \left(\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \right) = \dots$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \dots & b_{kj} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \cdot u_1 + \dots + a_{1m} \cdot u_m \\ \vdots \\ a_{j1} \cdot u_1 + \dots + a_{jm} \cdot u_m \end{pmatrix} = \dots$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} \cdot (a_{11} \cdot u_1 + \dots + a_{1m} \cdot u_m) + \dots + b_{1j} \cdot (a_{j1} \cdot u_1 + \dots + a_{jm} \cdot u_m) \\ \vdots \\ b_{k1} \cdot (a_{11} \cdot u_1 + \dots + a_{1m} \cdot u_m) + \dots + b_{kj} \cdot (a_{j1} \cdot u_1 + \dots + a_{jm} \cdot u_m) \end{pmatrix} = \dots$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} \cdot a_{11} \cdot u_1 + \dots + b_{11} \cdot a_{1m} \cdot u_m + \dots + b_{1j} \cdot a_{j1} \cdot u_1 + \dots + b_{1j} \cdot a_{jm} \cdot u_m \\ \vdots \\ b_{k1} \cdot a_{11} \cdot u_1 + \dots + b_{k1} \cdot a_{1m} \cdot u_m + \dots + b_{kj} \cdot a_{j1} \cdot u_1 + \dots + b_{kj} \cdot a_{jm} \cdot u_m \end{pmatrix} = \dots$$

$$= \begin{pmatrix} u_1 \cdot (b_{11} \cdot a_{11} + \ldots + b_{1j} \cdot a_{j1}) + \ldots + u_m \cdot (b_{11} \cdot a_{1m} + \ldots + b_{1j} \cdot a_{jm}) \\ \vdots \\ u_1 \cdot (b_{k1} \cdot a_{11} + \ldots + b_{kj} \cdot a_{j1}) + \ldots + u_m \cdot (b_{k1} \cdot a_{1m} + \ldots + b_{kj} \cdot a_{jm}) \end{pmatrix} = \ldots$$

$$= \begin{pmatrix} (b_{11} \cdot a_{11} + \ldots + b_{1j} \cdot a_{j1}) & \ldots & (b_{11} \cdot a_{1m} + \ldots + b_{1j} \cdot a_{jm}) \\ \vdots & & \vdots \\ (b_{k1} \cdot a_{11} + \ldots + b_{kj} \cdot a_{j1}) & \ldots & (b_{k1} \cdot a_{1m} + \ldots + b_{kj} \cdot a_{jm}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = \ldots$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{\beta}_1{}^T \cdot \vec{a}_1 & \ldots & \vec{\beta}_1{}^T \cdot \vec{a}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \vec{\beta}_k{}^T \cdot \vec{a}_1 & \ldots & \vec{\beta}_k{}^T \cdot \vec{a}_m \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} \langle \vec{\beta}_1, \vec{a}_1 \rangle & \ldots & \langle \vec{\beta}_1, \vec{a}_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \vec{\beta}_k, \vec{a}_1 \rangle & \ldots & \langle \vec{\beta}_k, \vec{a}_m \rangle \end{pmatrix} \cdot \vec{u} := (B \circ A) \cdot \vec{u}$$

Definition: • **Définition:**

$$(B \circ A) := \begin{pmatrix} \vec{\beta}_1{}^T \cdot \vec{a}_1 & \ldots & \vec{\beta}_1{}^T \cdot \vec{a}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \vec{\beta}_k{}^T \cdot \vec{a}_1 & \ldots & \vec{\beta}_k{}^T \cdot \vec{a}_m \end{pmatrix}$$

heisst **Produktmatrix** von A und B • *s'appelle* **produit des matrices** A *et* B.

Satz: • **Théorème:**

1 Sei • *Soit* $\mathcal{B} \circ \mathcal{A} : \vec{u} \longmapsto \vec{w} = B \cdot (A \cdot \vec{u})$
Die zusammengesetzte Abbildung $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ ist wieder durch eine Matrix gegeben, die Produktmatrix $B \cdots A$.
• *L'application composée* $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ *est donnée par une matrice, le produit des matrices* $B \cdots A$.

2 Die Produktmatrix ist eine $k \times m$–Matrix, die wie folgt berechnet wird: • *Le produit des matrices est une matrice* $k \times m$ *qu'on calcule de la façon suivante:*

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1j} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \ldots & b_{kj} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \ldots & a_{jm} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{\beta}_1{}^T \\ \vdots \\ \vec{\beta}_k{}^T \end{pmatrix} \cdot (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m) = \begin{pmatrix} \vec{\beta}_1{}^T \cdot \vec{a}_1 & \ldots & \vec{\beta}_1{}^T \cdot \vec{a}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \vec{\beta}_k{}^T \cdot \vec{a}_1 & \ldots & \vec{\beta}_k{}^T \cdot \vec{a}_m \end{pmatrix}$$

Um in der Produktmatrix das Element in der Zeile j und der Spalte k, d.h. r_{jk} zu erhalten, multiplizert man also nach der Skalarproduktregel die Spalte j der ersten Matrix B mit der Zeile k der zweiten Matrix A.
• *Pour obtenir donc l'élément dans la ligne* j *et dans la colonne* k*, c.v.d.* r_{jk}*, on multiplie d'après la règle du produit scalaire la colonne* j *de la première matrice* B *avec la ligne* k *de la deuxième matrice* A.

Beispiele: • **Exemples:**

1 $$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \; A \cdot B \neq B \cdot A$$

2 $A \cdot E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = A$

3 $E \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = A$

4 $A \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N$

5 Allgemein: • *Généralement:*

$$A \cdot E = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = A$$

Ebenso: • *De même:* $E \cdot A = A$

$\rightsquigarrow$ Resultat: • *Résultat:*

Satz: • **Théorème:**

1 Allgemein ist für Matrizen:
• *Généralement il vaut pour les matrices:*

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Das Kommutativgesetz gilt nur in Spezialfällen.
• *La loi commutative vaut seulement dans des cas spéciaux.*

2 Sei • *Soit* $N =$ Nullmatrix • *Matrice nulle*
$\rightsquigarrow$ $A \cdot N = N \cdot A = N$

3 Sei • *Soit* $E =$ Einheitsmatrix • *Matrice unité*
$\rightsquigarrow$ $A \cdot E = E \cdot A = A$

9.3.3 Nochmals Matrixmultiplikation — Multiplication matricielle encore une fois

Exkurs: Herleitung der Matrixmultiplikation mit Hilfe von Gleichungssystemen:
• *Traité supplémentaire: Dérivation de la multiplication matricielle avec des systèmes d´équations:*

Geg.: • **Donné:** $B \cdot \vec{y} = \vec{x},\ A \cdot \vec{x} = \vec{c} \Rightarrow A \cdot (B \cdot \vec{y}) = \vec{c} \overset{?}{=} (A \cdot B) \cdot \vec{y},\ (A \cdot B) = ?$

$\rightsquigarrow\ \vec{y} \overset{B}{\longmapsto} \vec{x} = B \cdot \vec{y} \overset{A}{\longmapsto} \vec{c} = A \cdot \vec{x} = A \cdot (B \cdot \vec{y}) = ?, \qquad \vec{y} \overset{B \circ A}{\longmapsto} \vec{c}, \qquad "B \circ A" = ?$

$$A \cdot \vec{x} = \vec{c} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot \vec{y} = \vec{x} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}\, y_1 + b_{12}\, y_2 \\ b_{21}\, y_1 + b_{22}\, y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\,(b_{11}\, y_1 + b_{12}\, y_2) + a_{12}\,(b_{21}\, y_1 + b_{22}\, y_2) \\ a_{21}\,(b_{11}\, y_1 + b_{12}\, y_2) + a_{22}\,(b_{21}\, y_1 + b_{22}\, y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}\, b_{11}\, y_1 + a_{11}\, b_{12}\, y_2 + a_{12}\, b_{21}\, y_1 + a_{12}\, b_{22}\, y_2 \\ a_{21}\, b_{11}\, y_1 + a_{21}\, b_{12}\, y_2 + a_{22}\, b_{21}\, y_1 + a_{22}\, b_{22}\, y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{21})\, y_1 + (a_{11}\, b_{12} + a_{12}\, b_{22})\, y_2 \\ (a_{21}\, b_{11} + a_{22}\, b_{21})\, y_1 + (a_{21}\, b_{12} + a_{22}\, b_{22})\, y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}\,b_{11} + a_{12}\,b_{21} & a_{11}\,b_{12} + a_{12}\,b_{22} \\ a_{21}\,b_{11} + a_{22}\,b_{21} & a_{21}\,b_{12} + a_{22}\,b_{22} \end{pmatrix}}_{X} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \; X := A \cdot B = \; ''B \circ A''$$

$$\rightsquigarrow \; A \cdot B := X = \begin{pmatrix} a_{11}\,b_{11} + a_{12}\,b_{21} & a_{11}\,b_{12} + a_{12}\,b_{22} \\ a_{21}\,b_{11} + a_{22}\,b_{21} & a_{21}\,b_{12} + a_{22}\,b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \; A \cdot B := \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1^T \\ \vec{\alpha}_2^T \end{pmatrix} \cdot (\vec{b}_1, \vec{b}_2) = \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1^T \cdot \vec{b}_1 & \vec{\alpha}_1^T \cdot \vec{b}_2 \\ \vec{\alpha}_2^T \cdot \vec{b}_1 & \vec{\alpha}_2^T \cdot \vec{b}_2 \end{pmatrix}$$

Folgerung: • **Conclusion:** $(\vec{\alpha}_j^T) \cdot (\vec{b}_k) = (\vec{\alpha}_j^T \cdot \vec{b}_k)$

$\rightsquigarrow$ Zeile j mal Spalte k = Zelle (j,k) • $\rightsquigarrow$ *Ligne j fois colonne k = position (j,k)*

9.3.4 Untermatrizen — Des sous–matrices

Seien • *Soient* $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$

Dabei sind die A_{ik} und die B_{kj} Untermatrizen (Teilmatrizen) von zulässiger Grösse, so dass die nachfolgenden Operationen definiert sind.
• *Les A_{ik} et B_{kj} sont des sous–matrices de dimensions convenables de façon que les opérations suivantes soyent définies.*

Dann gilt: • *Alors il vaut:*

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A_{11}\;A_{12}) \cdot \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix} & (A_{11}\;A_{12}) \cdot \begin{pmatrix} B_{12} \\ B_{22} \end{pmatrix} \\ (A_{21}\;A_{22}) \cdot \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix} & (A_{21}\;A_{22}) \cdot \begin{pmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \; A \cdot B = \begin{pmatrix} A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21} & A_{11} \cdot B_{12} + A_{12} \cdot B_{22} \\ A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21} & A_{21} \cdot B_{12} + A_{22} \cdot B_{22} \end{pmatrix}$$

Konsequenz: • **Conséquence:**

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21} & A_{11} \cdot B_{12} + A_{12} \cdot B_{22} \\ A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21} & A_{21} \cdot B_{12} + A_{22} \cdot B_{22} \end{pmatrix}$$

Bsp.: • **Exemple:**

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & X \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & Y \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; A_{21} \cdot X + A_{22} \cdot B_{22} = C_{22}, \;\; X,\; Y = ?$$

$$\Rightarrow \; X = A_{21}^{-1} \cdot (C_{22} - A_{22} \cdot B_{22}) \;\Rightarrow\; Y = A_{11} \cdot X + A_{12} \cdot B_{22} = A_{11} \cdot A_{21}^{-1} \cdot (C_{22} - A_{22} \cdot B_{22}) + A_{12} \cdot B_{22}$$

9.4 Spezielle Matrizen, Inverse — Matrices spéciales, inverse

9.4.1 Spezielle geometrische Abbildungen — Applications géométriques spéciales

Streckungen — Allongements

1 Die **Nullmatrix** N bildet jeden Vektor $\vec{v}$ auf den Nullvektor $\vec{0}$ ab:
• *La* **matrice nulle** N *applique chaque vecteur $\vec{v}$ sur le vecteur nul $\vec{0}$:*

$$\forall_{\vec{v}} : N \cdot \vec{v} = \vec{0} \;\; (N \; j \times k \;\Rightarrow\; \vec{v} \in \mathbb{R}^k, \;\; \vec{0} \in \mathbb{R}^j)$$

2 Die **Einheitsmatrix** E bildet jeden Vektor $\vec{v}$ auf sich selbst ab:
• *La* **matrice unité** N *applique chaque vecteur* $\vec{v}$ *sur lui–même:*

$$\forall_{\vec{v}} : E \cdot \vec{v} = \vec{v}$$

3 $$S_\lambda := \lambda \cdot E = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

S_λ bewirkt eine zentrische Streckung • *provoque une transformation homothétique*:

$$\vec{v} \longmapsto S_\lambda \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$$

4 $$S_{i,\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \; (\lambda \text{ in Spalte } i \;\bullet\; \textit{dans la colonne } i.) \rightsquigarrow$$

$S_{i,\lambda}$ bewirkt eine Achsenstreckung (Achse i) • *provoque un allogement axial (axe i).*

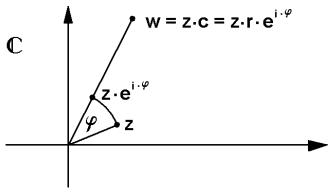
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{i-1} \\ \lambda \cdot v_i \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Es gilt: • *Il vaut:* $S_{i,\lambda}^n = S_{i,\lambda^n}$

5 Ist $\lambda = -1$, so erhält man eine Spiegelung. • *Si* $\lambda = -1$ *on obtient une symétrie axiale.*
$S_{i,-1}$ = Spiegelungsmatrix • *matrice de réflexion.*

6 Drehmatrizen im $\mathbb{R}^2$: Vgl. nächster Abschnitt. • *Matrices de rotation dans le* $\mathbb{R}^2$*: Voir plus bas.*

Drehungen — Rotations



Benutze die geometrischen Eigenschaften der komplexen Multiplikation. Eine Multiplikation von $z \in \mathbb{C}$ mit $c = |c| \cdot e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ bedeutet eine zentrische Streckung von z um $|c|$ und eine Drehung um $\varphi = Argc$ um den Ursprung.
• *Utilise les qualités géométriques de la multiplication complexe. Une multiplication de* $z \in \mathbb{C}$ *avec* $c = |c| \cdot e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ *signifie une transformation homothétique de* z *par* $|c|$ *et une rotation de* $\varphi = Arg(c)$ *par l'origine.*

Wähle also $|c| = 1 \rightsquigarrow$ Drehung von $z = a + i\,b \hat{=} \binom{a}{b}$ um $\varphi = Arg(c)$.
• *Choisis donc* $|c| = 1 \rightsquigarrow$ *Rotation de* $z = a + i\,b \hat{=} \binom{a}{b}$ *par* $\varphi = Arg(c)$.

$$\rightsquigarrow \quad z = a + i\,b \hat{=} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \vec{v} \overset{D_\varphi}{\longmapsto} \vec{v}\,' \hat{=} z' = a' + +i\,b' = z \cdot e^{i\varphi} \qquad \Rightarrow$$

$$\vec{v}\,' \hat{=} z' = a' + +i\,b' = (a + i\,b) \cdot (\cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi)) = (a\cos(\varphi) - b\sin(\varphi)) + i(a\sin(\varphi) + b\cos(\varphi))$$

$$\vec{v}\,' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a\cos(\varphi) - b\sin(\varphi)) \\ (a\sin(\varphi) + b\cos(\varphi)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = D_\varphi \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Satz: • **Théorème:** $D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$
bewirkt eine Drehung um den Winkel φ um den Ursprung O
• *provoque une rotation par l'angle φ autour de l'origine O.*

Begriff: • **Notion:**
Die Matrix D_φ nennen wir **Drehmatrix**. • *Nous appelons la matrice D_φ* **matrice de rotation**.

Achtung: • **Attention:**

Bei Drehungen im $\mathbb{R}^3$ spielt die **Drehachse** eine wesentliche Rolle. Neben dem Winkel ist also die Achse anzugeben. • *Quant aux rotations dans le $\mathbb{R}^3$* **l'axe de rotation** *joue un rôle important. Il faut donc donner l'angle et l'axe pour décrire la rotation.*

Drehungen im $\mathbb{R}^3$ lassen sich elementargeometrisch zusammensetzen aus Drehungen um zwei Koordinatenachsen. Solche Drehungen können mit Matrizen beschrieben werden, die aus Drehmatrizen im $\mathbb{R}^2$ gewonnen werden: • *On peut composer les rotations dans le $\mathbb{R}^3$ avec les moyens de la géométrie élémentaire de rotations autour de deux axes de coordonnés. De tels rotations peuvent être décrites par des matrices composées de matrices de rotation dans le $\mathbb{R}^2$:*

Z.B. • *P.ex.* $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} := D_{\varphi,3}$

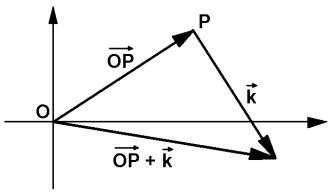
$\rightsquigarrow$ Drehung um die z–Achse • *Rotation autour de l'axe z.*

Achtung: • **Attention:** Allgemein ist: • *Généralement on constate:*

$$D_{\alpha,i} \cdot D_{\beta,k} \neq D_{\beta,k} \cdot D_{\alpha,i} \ (i \neq k)$$

(Probiere: • *Essaie:* $i = 3,\ k = 1,\ \alpha = \beta = \pi$)

Verschiebungen — Translations



Problem: • **Problème:**
Verschiebe einen Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ (Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$) mit Hilfe der Matrixmultiplikation.
• *Fais la translation d'un point $P \in \mathbb{R}^2$ ($\overrightarrow{OP}$: vecteur lié au point géométrique P) à l'aide de la multiplication de matrices.*

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \longmapsto A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av_1 + bv_2 \\ cv_1 + dv_2 \end{pmatrix} = \vec{v}\,' = \vec{v} + \vec{k} = \begin{pmatrix} v_1 + k_1 \\ v_2 + k_2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{const.} \ \Rightarrow \ \forall_{v_1,v_2} : \begin{pmatrix} av_1 + bv_2 \\ cv_1 + dv_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + k_1 \\ v_2 + k_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ b = 0 \ \wedge \ c = 0 \ \Rightarrow \ a = d = 1 \ \Rightarrow \ \vec{k} = \overrightarrow{const.} \qquad \rightsquigarrow \ \text{Widerspruch! • } \textit{Contradiction!}$$

Folgerung: • **Conclusion:** Eine Translation im $\mathbb{R}^2$ kann nicht durch eine Matrixmultiplikation in $\mathbb{R}^2$ ausgeführt werden. • *Il n'est pas possible d'exécuter une translation dans le $\mathbb{R}^2$ à l' aide d'une multiplication de matrices dans le $\mathbb{R}^2$.*

Es gibt aber einen Ausweg mit Hilfe eines Tricks: • *Il y a une solution à l'aide d'un truc:*

Trick: • **Truc:** Gehe in den $\mathbb{R}^3$ in die Ebene Φ mit $z = 1$: • *Allons dans le $\mathbb{R}^3$ dans le plan Φ avec $z = 1$:*

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \longmapsto \vec{v}^* = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Benutze: • *Utilise:* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k_1 \\ 0 & 1 & k_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\rightsquigarrow \quad \vec{v} \longmapsto A \cdot \vec{v}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k_1 \\ 0 & 1 & k_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + k_1 \\ v_2 + k_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Durch die Multiplikation von $\vec{v}^*$ mit A wird zu $\vec{v}^*$ der Translationsvektor $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ addiert.

• *Par la multiplication de $\vec{v}^*$ avec A on additionne le vecteur de translation $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ à $\vec{v}^*$.*

$\rightsquigarrow$ **Konsequenz:** • **Conséquence:** Der Trick besteht also darin, dass man statt in $\mathbb{R}^2$ die Operationen Streckung, Drehung, Translation in $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ ausführt. Dort kann man somit die Kongruenzabbildungen der ebenen Geometrie mit Hilfe einer einzigen Operationsart, den Matrixmultiplikationen, ausführen. Das ist nützlich in der Bildschirmgeometrie.
• *Le truc consiste à exécuter les opérations allongement, rotation, translation dans $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ au lieu de les exécuter dans $\mathbb{R}^2$. Là on peut exécuter les applications congrues de la géomértie dans le plan à l'aide d'un seul type d'opérations, la multiplication des matrices. C'est utile dans la géométrie sur l'écran.*

9.4.2 Reguläre Matrizen, Rang, Inverse — Matrices régulières, rang, inverses

Rang, Inverse — Rang, inverses

Wir repetieren Bekanntes: • *Nous répétons des choses déjà connues:*

1 Für ein Gleichungssystem $S: \ A \cdot \vec{x} = \vec{u}$ gilt: • *Pour un système d'équations $S: \ A \cdot \vec{x} = \vec{u}$ il vaut:* $Ord(S) = Rang(S) + Dim(\mathbb{L}) = n, \ \ \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

2 $S: \ A \cdot \vec{x} = \vec{u} \ \Rightarrow \ \vec{x}_S = \vec{x}_{hom} + \vec{x}_{part}$
Lösung $\vec{x}$ eindeutig • *Solution $\vec{x}$ univoque*
$\Leftrightarrow \vec{x}_{hom} = \vec{0} \ \Leftrightarrow Dim(\mathbb{L}) = 0 \ \Leftrightarrow Ord(S) = Rang(S) \ \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

3 $\det(A) = \det(A^T)$

Somit gilt: • *Par conséquent on trouve:*

Satz: • **Théorème:** $S: \ A \cdot \vec{x} = \vec{u}$ eindeutig lösbar • *peut être résolu de façon univoque*
$\Leftrightarrow A$ besitzt n linear unabhängige Zeilen und Spalten • *A possède n lignes et colonnes linéairement indépendantes.*

Denn nach Gauss–Jordan kann man A beim Lösen von $A \cdot \vec{x} = \vec{u}$ diagonalisieren. Dabei ändert der Rang nicht. • *Car d'après Gauss–Jordan on peut donc diagonaliser A en résolvant $A \cdot \vec{x} = \vec{u}$. A cette occasion le rang ne change pas.*

Sei also A eine $n \times n$–Matrix. • *Soit donc A une matrice $n \times n$.*

Zur Berechnung der Determinante ist es nützlich, die Matrix in eine Dreiecks– oder Diagonalmatrix umzuformen. Die verwendeten Umformungen sind Elementarsubstitutionen, die den Rang eines Geichungssystems nicht ändern. Wegen $\det(A) = \det(A^T)$ gilt daher: Anzahl linear unabhängige Zeilen von A = Anzahl linear unabhängige Spalten von A. (Sonst hätte man sofort für eine passende Untermatrix einen Widerspruch.)
• *Pour calculer le déterminant, il est utile de changer la forme de la matrice en forme triangulaire ou en forme de matrice diagonale. Les substitutions utilisées sont des substitutions élémentaires qui ne changent pas le rang d'un système d'équations. A cause de* $\det(A) = \det(A^T)$ *il vaut: Nombre de lignes linéairement indépendantes de A = nombre de colonnes linéairement indépendantes de A. (Si non on obtient tout de suite une contradiction pour une sous–matrice qui convient.)*

Daher können wir jetzt definieren: • *C'est pourquoi nous pouvons définir maintenant:*

Definition: • **Définition:** *Rang*(A) := Anzahl linear unabhängige Zeilen von A = Anzahl linear unabhängige Spalten von A

• *Rang*(A) := *Nombre de lignes linéairement indépendantes de A = nombre de colonnes linéairement indépendantes de A.*

Sinngemäss sagt man: **Zeilenrang = Spaltenrang**. • *Dans ce sens là, on dit:* **Rang de lignes = rang de colonnes**.

Für die zu A gehörige Abbildung $\mathcal{A}$ können wir daher folgern: • *Pour l'application $\mathcal{A}$ liée à A nous pouvons donc déduire:*

$\forall_{\vec{u}}: \; A \cdot \vec{x} = \vec{u}$ eindeutig lösbar • *peut être résolu de façon univoque*
$\Leftrightarrow \mathcal{A}: \; \vec{x} \longmapsto A \cdot \vec{x} = \vec{u}$ bijektiv • *bijective*

Konsequenz: • **Conséquence:** Daher existiert zu $\mathcal{A}$ eine eindeutige, bijektive Umkehrabbildung $\mathcal{A}^{-1}$. • *C'est pourquoi pour $\mathcal{A}$ il existe une application inverse $\mathcal{A}^{-1}$ univoque et bijective.*

Problem: • **Problème:** Es stellt sich die natürliche Frage, ob $\mathcal{A}^{-1}$ so wie $\mathcal{A}$ auch durch eine Matrix gegeben ist. • *Il se pose la question, si $\mathcal{A}$ est aussi donné par une matrice comme $\mathcal{A}^{-1}$.*

Zur Lösung des Problems verfolgen wir das folgende Konzept: Wir nehmen an, $\mathcal{A}^{-1}$ sei durch eine Matrix gegeben, die wir A^{-1} nennen. Falls es gelingt, A^{-1} zu berechnen, so ist mit dem Resultat der Berechnung die Existenz der Matrix A^{-1} bewiesen. Dass sich A^{-1} berechnen lässt, wollen wir nachstehend zeigen. • *Pour résoudre le problème nous poursuivons le concept suivant: Nous supposons que $\mathcal{A}^{-1}$ soit donné par une matrice A^{-1}. Si nous arrivons à calculer A^{-1}, le résultat du calcul prouve l'existance de A^{-1}. Plus bas nous allons démontrer qu'on peut calculer A^{-1}.*

Definition: • **Définition:** Im Falle der Existenz von $\mathcal{A}^{-1}$ heisst die zugehörige Matrix A^{-1} die **Inverse** (inverse Matrix) von A.
• *Si $\mathcal{A}^{-1}$ existe, la matrice A^{-1} liée a $\mathcal{A}^{-1}$ s'appelle* **la matrice inverse** *de A.*

Rechnung • **Calcul:** Sei $\mathcal{A}$ bijektiv $\Rightarrow$ $\mathcal{A} \circ \mathcal{A}^{-1} = Ident.$.

Wir nehmen an, dass die Matrix A^{-1} existiere. • *Soit $\mathcal{A}$ bicektif. Nous supposons que la matrice $A^{-1} := X$ existe.*

Es gilt dann: • *Il vaut donc:* $A \cdot A^{-1} = E \;\Rightarrow\; A \cdot X = E.$

Sei • *Soit* $X = (\vec{x}_1, \ldots \vec{x}_n) \;\Rightarrow\; A \cdot (\vec{x}_1, \ldots \vec{x}_n) = E = (\vec{e}_1, \ldots \vec{e}_n)$
Die Matrixmultiplikation folgt der Regel „Zeile mal Spalte“ • *La multiplication des matrices suit la règle "ligne fois colonne".*
Die Einschränkung auf Spalten ergibt daher Gleichungen der Form: • *La restriction à des lignes donne donc des équations de la forme:* $A \cdot \vec{x}_k = \vec{e}_k$.
Da nach Voraussetzung $\mathcal{A}$ bijektiv, also $A \cdot \vec{x} = \vec{u}$ eindeutig lösbar ist, ist auch $\forall_k : A \cdot \vec{x}_k = \vec{e}_k$ eindeutig lösbar, $\vec{x}_k$ ist eindeutig berechenbar. • *D'après l'hypothèse, $\mathcal{A}$ est bijektif, donc $A \cdot \vec{x} = \vec{u}$ est résoluble de façon univoque, $\forall_k : A \cdot \vec{x}_k = \vec{e}_k$ aussi est résoluble de façon univoque, $\vec{x}_k$ peut être calculé de façon univoque.*
$A^{-1} = X = (\vec{x}_1, \ldots \vec{x}_n)$ ist eindeutig berechenbar • *peut être calculé de façon univoque.* $\rightsquigarrow$

Satz: • **Théorème:**

Vor.: • **Hyp.:**

$\mathcal{A}$ bijektiv • *bijectif*

Beh.: • **Thè.:**

Zu $\mathcal{A}^{-1}$ existiert eindeutig eine Matrix $A^{-1} = X$. • *pour $\mathcal{A}^{-1}$ il existe de façon univoque une matrice $A^{-1} = X$.*

$$\forall_{\vec{x}} : \quad \left(\begin{array}{c} \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{u} \\ = A^{-1} \cdot (A \cdot \vec{x}) \\ = (A^{-1} \cdot A) \cdot \vec{x} \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathcal{A}} \\ \xleftarrow{\mathcal{A}^{-1}} \\ \end{array} \quad \begin{array}{c} A \cdot \vec{x} = \vec{u} \\ = A \cdot (A^{-1} \cdot \vec{u}) \\ = (A \cdot A^{-1}) \cdot \vec{u} \end{array} \right)$$

Hier ist die Assoziatiovität der Matrixmultiplikaiton verwendet worden. Diese gilt bekanntlich allgemein für Abbildungen. Denn wir wissen: • *Ici on a utilisé l'associativité de la multiplication des matrices qui vaut généralement pour des applications. Car nous savons:*

$\forall_{\vec{x}} : (\mathcal{A} \circ (\mathcal{B} \circ \mathcal{C}))(\vec{x}) = (A \cdot (B \cdot C)) \cdot \vec{x}, \quad = (\mathcal{A} \circ (\mathcal{B} \circ \mathcal{C})) \cdot \vec{x} = ((\mathcal{A} \circ \mathcal{B}) \circ \mathcal{C})(\vec{x}) = ((A \cdot B) \cdot C) \cdot \vec{x}$. Wähle • *Choisir* $\vec{x} = \vec{e}_k, \; k = 1, 2, \ldots, n \;\Rightarrow$ spaltenweise überprüfbar: • *on peut examiner par colonnes:* $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$((A \cdot B) \cdot C)$, $(A \cdot (B \cdot C))$ seien definiert • *soient définis*

Beh.: • **Thè.:**

$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

Verändere die Bezeichnungen: • *Changer les noms:* (Symb. • *symb.* $\hookrightarrow$)
$A \hookrightarrow A^{-1}$, $B \hookrightarrow A$, $C \hookrightarrow \vec{x}$. ($\vec{x}$ als Matrix aufgefasst • *compris comme matrice.*)
$\rightsquigarrow \quad (A^{-1} \cdot A) \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot (A \cdot \vec{x})$.
Ebenso: • *De même:* $(A \cdot A^{-1}) \cdot \vec{u} = A \cdot (A^{-1} \cdot \vec{u})$.
$\rightsquigarrow \quad \forall_{\vec{x}}: \ \vec{x} = (\mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{A})(\vec{x}) = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}(\vec{x})) = (A^{-1} \cdot (A \cdot \vec{x})), \ \vec{x} = (\mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{A})(\vec{x}) = (A^{-1} \cdot A) \cdot \vec{x}$
$\Rightarrow \ \forall_{\vec{x}}: \ \vec{x} = (A^{-1} \cdot A) \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot (A \cdot \vec{x}) \ \Rightarrow \ (A^{-1} \cdot A) = E, \ ((\mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{A}) = Ident. \hat{=} E)$
Ebenso: • *De même:* $(A \cdot A^{-1}) = E \rightsquigarrow$ **Konsequenz:** • **Conséquence:**

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

A sei $n \times n$– Matrix • *A matrice* $n \times n$

Beh.: • **Thè.:**

1 $Rang(A) = Ord(S) = n \ \Leftrightarrow$ inverse Matrix A^{-1} existiert eindeutig
• *matrice inverse* A^{-1} *existe de façon univoque*

2 $Rang(A) = Ord(S) = n \ \Rightarrow \ A, A^{-1}$ stiften bijektive Abbildungen
• *provoquent des applications bijectives* und • *et*
$(A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1}) = E$

Regularität — Réguliarité

Sei • *Soit A* $n \times n$–Matrix • *Matrice* $n \times n$

Definition: • **Définition:** $Rang(A) = n \ \Leftrightarrow A$
heisst **reguläre** Matrix • *s'appelle matrice* **régulière**

(Gegenteil: „Nicht regulär“. Die Erfahrung zeigt, das das sprachlogische deutsche Gegenteil „irregulär“ manchmal schon jemanden gestört hat. • *Contraire: "non-régulier" et aussi "irrégulier". Le problème de l'allemand n'existe pas en français.*) $\rightsquigarrow$

Korollar: • **Corollaire:** A regulär • *régulier* $\Leftrightarrow A$ besitzt Inverse • *possède inverse* A^{-1}

Im regulären Fall hat somit die Gleichung $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ nur die Nulllösung: $\mathbb{L} = \{\vec{0}\}$. • *Dans le cas régulier l'équation* $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ *n'a que la solution nulle:* $\mathbb{L} = \{\vec{0}\}$.

Falls im nicht–regulären Fall eine Lösung existiert, so existiert auch eine Lösung $\vec{x} \neq \vec{0}$ ($Dim(\mathbb{L}) > 0$).
• *Si dans ce cas non–régulier il existe une solution, alors il existe aussi une solution* $\vec{x} \neq \vec{0}$ *(*$Dim(\mathbb{L}) > 0$*).*

Dann ist: • *Alors il vaut:* $A \cdot (\lambda\vec{x}) = \lambda(A \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}, \;\; \vec{x} \in \mathbb{L}$

Ebenso ist: • *De même on trouve:* $\vec{x_1}, \vec{x_2} \in \mathbb{L} \;\Rightarrow\; A \cdot (\vec{x_1} + \vec{x_2}) = \Rightarrow\; A \cdot \vec{x_1} + A \cdot \vec{x_2} = \vec{0} + \vec{0}$.

$\rightsquigarrow$ 1. $\vec{x} \in \mathbb{L} \;\Rightarrow\; \lambda\vec{x} \in \mathbb{L}$

2. $\vec{x_1}, \vec{x_2} \in \mathbb{L} \;\Rightarrow\; \vec{x_1} + \vec{x_2} \in \mathbb{L}$

Daraus ersieht man, dass $\mathbb{L} = \mathbb{L}_{hom}$ ein Vektorraum *VR'EV* ist (von früher bekannt!).
• *On en voit donc que* $\mathbb{L} = \mathbb{L}_{hom}$ *est un espace vectoriel VR'EV(connu depuis longtemps!).*

Satz: • **Théorème:**

Vor.: • **Hyp.:**

$A \cdot \vec{x} = \vec{0}$

Beh.: • **Thè.:**

$\mathbb{L} = \mathbb{L}_{hom}$ ist Vektorraum • *est un espace vectoriel VR'EV*

In der Mathematik ist die folgende Definition gebräuchlich: • *Dans les mathématiques la définition suivante est souvent utilisée:*

Definition: • **Définition:**

$\mathbb{L} = \mathbb{L}_{hom} = \{\vec{x} \mid A \cdot \vec{x} = \vec{0}\} = \{\vec{x} \mid \mathcal{A}: \; \vec{x} \longmapsto \vec{0}\}$
heisst **Kern** der Abbildung $\mathcal{A}$ • *s'appelle* **noyeau** *de l'application* $\mathcal{A}$.

Weiter wissen wir, dass im Falle $Rang(A) = n$ alle Zeilen und Spalten von A linear unabhängig sind. Das bedeutet, dass die Spaltenvektoren von A einen n–dimensionalen Spat aufspannen mit dem Volumeninhalt $|\det(A)| \neq 0$ ($\neq 0$ wegen lin. unabh.). Gleiches gilt für die Inverse A^{-1}.
• *En outre nous savons que dans le cas* $Rang(A) = n$ *toutes les lignes et colonnes de* A *sont linéairement indépendantes. Cela signifie que les vecteurs de colonnes de* A *provoquent un parallélépipède de dimension* n *dont le contenu de volume est* $|\det(A)| \neq 0$ *(*$\neq 0$ *à cause de lin. indép.). La même chose vaut pour l'inverse* A^{-1}.

Satz: • **Théorème:**

Vor.: • **Hyp.:**

A reguläre $n \times n$–Matrix • *matrice* $n \times n$ *régulière*

Beh.: • **Thè.:**

$\det(A) \neq 0, \;\; \det(A^{-1}) \neq 0$

Affinität — Affinité

Sei • *Soit* $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \;\; A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ zu Abblidung $\mathcal{A}$ • *concrétisant l'application* $\mathcal{A}$.

Es gilt: • *Il est donc:* $\mathcal{A}: \; \vec{v} \longmapsto A \cdot \vec{v} = \vec{u}, \qquad \mathcal{A}: \; \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$

Definition: • **Définition:** Falls A regulär ist, heisst $\mathcal{A}$ **affin**[4]
• *Si A est régulier, $\mathcal{A}$ s'appelle* **affin**[4]

Satz: • **Théorème:** Eine affine Abbildung führt Geraden in Geraden über.
• *Une application affine applique des droites sur des droites.*

Zum Beweis: • *Quant à la preuve:*

$$g:\ \vec{r} = \vec{r}_0 + t\cdot\vec{a} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 + ta_1 \\ r_2 + ta_2 \end{pmatrix} \longmapsto A\cdot\vec{r} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 + ta_1 \\ r_2 + ta_2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a\,r_1 + a\,t\,a_1 + b\,r_2 + b\,t\,a_2 \\ c\,r_1 + c\,t\,a_1 + d\,r_2 + d\,t\,a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,r_1 + b\,r_2 \\ c\,r_1 + d\,r_2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} a\,a_1 + b\,a_2 \\ c\,a_1 + d\,a_2 \end{pmatrix} = \vec{r}_0{}' + t\cdot\vec{a}'$$
$\Rightarrow$ Gerade für $\vec{a}' \neq 0$ • *droite pour $\vec{a}' \neq 0$.*

9.4.3 Übersicht über die Gesetze der Matrizenrechnung — Vue d'ensemble des lois du calcul matriciel

Bekannt: • **On connaît:**

- ⊘ Berechnung der Summe zweier Matrizen $A + B$. • *Calcul de la somme de deux matrices $A + B$.*
- ⊘ Berechnung des Produkts einer Matrix mit einem Skalar $\lambda \cdot A$.
  • *Calcul du produit d'une matrice avec un scalaire $\lambda \cdot A$.*
- ⊘ Berechnung des Produkts zweier Matrizen $A \cdot B$. • *Calcul du produit de deux matrices $A \cdot B$.*
- ⊘ Einheitsmatrix E, Nullmatrix N, Inverse A^{-1}. (Berechnung vgl. später.)
  • *Matrice unitée E, matrice nulle N, matrice inverse A^{-1}. (Calcul voir plus bas.)*

Seien • *Soient*

$M_{j,k} := \{A \mid A$ ist $j \times k$–Matrix • *est matrice $j \times k$* $\}$

$R_n := \{A \mid A$ regulär, $n \times n$–Matrix • *matrice régulière, $n \times n$* $\}$

$-A := (-1)\cdot A$

Da die nachstehend erwähnten Operationen in den Matrizen zellenweise ausgeführt werden, können wir folgern: • *Comme les opérations mentionnées en ce qui suit sont exécutées par cellules dans les matrices, nous pouvons déduire:*

Konsequenz: • **Conséquence:**

- ⊘ $A, B \in M_{j,k} \;\Rightarrow\; A + B \in M_{j,k}$

  ($M_{j,k}$ **abgeschlossen** bezüglich $''+''$ • **fermé** *par rapport à* $''+''$.)
- ⊘ $A + B = B + A$ (**Kommutativität** • **commutativité**)
- ⊘ $(A + B) + C = A + (B + C)$ (**Assoziativität** • **associativité**)

[4] Lat. affinis: verwandt • *apparenté*

$\oslash$ $A + N = N + A = A$ (**Neutrales Element** • **élément neutre**)

$\oslash$ $A + (-A) = N$ (**Inverses** $(-A)$ bezüglich $''+''$ • **Inverse** $(-A)$ *par rapport à* $''+''$)

$\rightsquigarrow$ **Konsequenz:** • **Conséquence:**

Satz: • **Théorème:** $(M_{j,k}\,, +)$ ist abelsche Gruppe • *est groupe commutatif*

Für $A, B \in M_{j,k}\,,\ \ j \neq k$ ist $A \cdot B$ nicht definiert. • *Pour* $A, B \in M_{j,k}\,,\ \ j \neq k\ \ A \cdot B$ *n'est pas défini.*
Daher ergibt $(M_{j,k}\,, \cdot)$ keine sinnvolle Struktur • $(M_{j,k}\,, \cdot)$ *ne donne donc pas de structure qui a un sens.*

Hingegen ist $A \cdot B$ definiert für $A, B \in M_{n,n}$. • *Par contre* $A \cdot B$ *est défini pour* $A, B \in M_{n,n}$.
Seien also: • *Soient donc:* $A, B \in M_{n,n}$.

Bekannt: • **On connaît:**

1 $A \cdot B \neq B \cdot A$ (ausser in Spezialfällen) • *Sauf dans des cas spéciaux.*

$\rightsquigarrow$ **Nicht kommutativ** • **non commutatif**

Speziell: • *Spécialement*: $A^{-1} \cdot B \neq B \cdot A^{-1}$ (A^{-1} statt • *au lieu de* A)
Da somit die Reihenfolge der Faktoren wesentlich ist, macht die Schreibweise $\dfrac{B}{A}$ keinen Sinn. Denn bei dieser Schreibweise ist die Reihenfolge nicht definiert. • *Comme donc l'ordre des facteurs est essentiel, la façon d'écrire* $\dfrac{B}{A}$ *n'a pas de sens. Car dans cette façon d'écrire l'ordre n'est pas visible.*

2 $M_{n,n}$ **abgeschlossen** bezüglich $''\cdot''$: • **fermé** *par rapport à* $''\cdot''$:
$A, B \in M_{n,n} \ \Rightarrow\ A \cdot B \in M_{n,n}$

3 $\forall_{A,B,C}:\ A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$: **Assoziativität** • **Associativité**:
(Oben gezeigt • *Démontré plus haut.*)

4 $\forall_A:\ A \cdot E = E \cdot A = A$
$\Rightarrow\ \exists$ neutrales Element (**Einselement**) • *élément neutre (***élément unité***).*

5 Noch nicht gezeigt: Verbindung zwischen $''+''$ und $''\cdot'' \rightsquigarrow$ **Distributivgesetze**
• *Pas encore démontré: Liaison entre* $''+''$ *et* $''\cdot'' \rightsquigarrow$ **lois distributives***:*

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C,\ \ (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

Zum Beweis: Verwende Assoziativität der Matrixmultiplikation sowie Distributivität des Produktes „Matrix mal Vektor“. • *Quant à la preuve: Utilise l'associativité de la multiplication des matrices ainsi que la distributivité du produit "matrice fois vecteur".*

$\forall_{\vec{x}}:\ (A \cdot (B + C)) \cdot \vec{x} = A \cdot ((B + C) \cdot \vec{x}) = A \cdot (B \cdot \vec{x} + C \cdot \vec{x}) = A \cdot (B \cdot \vec{x}) + A \cdot (C \cdot \vec{x})$
$= (A \cdot B) \cdot \vec{x} + (A \cdot C) \cdot \vec{x}$

Wähle nun: • *Choisis maintenant:* $\vec{x} = \vec{e}_k,\ \ k = 1, 2, \ldots, n$
$\Rightarrow\ \ A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ gilt spaltenweise • *est déduit pour les colonnes.*

Ebenso für • *Ainsi pour* $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

6 Reguläre Matrizen haben **Inverse**:
• *Des matrices régulières ont des* **inverses** *:*

$\forall_{A\in R_n}\exists_{A^{-1}}:\ A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$

7 **Abgeschlossenheit:** • **Opération fermée:** $A,B\in R_n\ \Rightarrow\ A\cdot B\in R_n$

8 **Inverse des Produkts** $\rightsquigarrow$ Einzelne Faktoren vertauschen:
• **Inverse du produit:** *échanger les facterus seuls:*
Seien • *Soient* $A,B\in R_n\ \Rightarrow\ A\cdot B,\ B\cdot A\in \mathbb{R}_n$

$$\begin{tikzcd}
 & \vec{v}=A\cdot\vec{u} \arrow[dr, "\mathcal{B},\ bij."] & \\
\vec{u} \arrow[ur, "\mathcal{A},\ bij."] \arrow[dr] & & \vec{w}=B\cdot\vec{v}=B\cdot(A\cdot\vec{u})=(B\cdot A)\cdot\vec{u} \\
 & \mathcal{B}\circ\mathcal{A},\ bij. \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow\ (B\cdot A)\cdot(A^{-1}\cdot B^{-1})=B\cdot(A\cdot A^{-1})\cdot B^{-1}=B\cdot B^{-1}=E=(B\cdot A)\cdot(B\cdot A)^{-1}$
$\Rightarrow\ (A^{-1}\cdot B^{-1})=(B\cdot A)^{-1}$

Satz: • **Théorème:** $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$

9 **Nicht–Abgeschlossenheit** von $(R_n\,,+)$: • $(R_n\,,+)$ **non fermé***:*

Bsp.: • **Exemple:** $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\in R_n\,,\ (\det(A)=1),\ B=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}\in R_n\,,$
$(\det(B)=-1),\ A+B=\begin{pmatrix}2&2\\0&0\end{pmatrix}\notin R_n\,,\ (\det(A+B)=0)$

10 $(M_{n,n}\,,\cdot)$ **nicht nullteilerfrei** • **libre de diviseurs de zéro**:

$\rightsquigarrow\ \exists_{A,B}:\ A\neq N,\ B\neq N,\ A\cdot B=N$

Bsp.: • **Exemple:** $A\cdot B=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=N$

$\rightsquigarrow\ A\cdot B=N=A\cdot N\not\Rightarrow\ B=N$ Kürzen nicht erlaubt! • *Simplifier ne pas permis!*

Folgerungen: (Zur algebraischen Struktur der Matrizen mit ihren Operationen
• **Conclusions:** • *Quant à la structure algébrique des matrices avec leurs opérations.*)

1 $(M_{n,n}\,,+)$ ist eine abelsche Gruppe • *est un groupe d'Abel.*

2 $(M_{n,n}\,,+,\cdot)$ ist ein nicht–kommutativer, nicht nullteilerfreier Ring mit Einselement • *est un anneau non–commutatif, non libre de diviseurs de zéro, avec élément unité.*

3 $(R_n\,,\cdot)$ ist eine nicht–abelsche Gruppe • *est un groupe non–commutatif.*

4 $(R_n\,,+)$ ist nicht abgeschlossen • *n'est pas fermé.*

Anwendungen: • **Applications:**
Z.B. beim **Lösen von Gleichungen**. • *P.ex. pour résoudre des équations.*

Eine Gruppe ist diejenige algebraische Struktur, in der algebraische Gleichungen lösbar sind, in denen die Unbekannten isoliert vorkommen, z.B. $a \circ x = b$ (Unbekannte nicht in Verknüpfung mit Unbekannten). • *Un groupe est la structure algébrique, dans laquelle les inconnues sont ilolées, p. ex.* $a \circ x = b$ *(inconnue non liée à inconnues).*

Bsp.: • **Exemple:** ($A, B, C, \ldots$ reguläre Matrizen, X unbekannt • $A, B, C, \ldots$ *matrices régulières* X *inconnue*)

1 $A \cdot (X \cdot (C \cdot D)) = D \;\Rightarrow\; A \cdot (X \cdot C) \cdot D \cdot D^{-1} = D \cdot D^{-1} = E \;\Rightarrow\; X = A^{-1} \cdot C^{-1}$

2 $A \cdot (X \cdot (C \cdot D)) = C \cdot D \;\Rightarrow\; (A \cdot X) \cdot (C \cdot D) = C \cdot D \;\Rightarrow\; A \cdot X = E \;\Rightarrow\; X = A^{-1}$

3 $A \cdot X + 2X = C - X \;\Rightarrow\; A \cdot X + 3E \cdot X = C \;\Rightarrow\; (A + 3E) \cdot X = C = X = (A + 3E)^{-1} \cdot C$

4 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X \right) + \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Kurz: • *Bref:* $A(B \cdot X) + C = 3D \;\Rightarrow\; A(B \cdot X) = 3D - C \;\Rightarrow\; X = B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot (3D - C)$

$\rightsquigarrow$ **Problem:** • **Problème:**

Berechung der Inversen • *Calculer l'inverse* $B^{-1} \cdot A^{-1} = (A \cdot B)^{-1}$!

Achtung: • **Attention:** Bei der Berechnung von Matrixprodukten mit dem Rechner muss die Operationsreihenfolge genau beachtet werden. Das Matrixprodukt ist nicht kommutativ! • *Si l'on calcule des produits matriciels à l'aide de la calculatrice, il faut bien respecter l'ordre des opérations. Le produit matriciel n'est pas commutatif.*

$$A \cdot B^{-1} \stackrel{?}{=} \frac{A}{B} \stackrel{?}{=} B^{-1} \cdot A \;\Rightarrow\; \frac{A}{B} \text{ sinnlos • } \textit{insensé.}$$

Bemerkung: • **Remarque:**

Falls man das Problem der Berechnung der Inversen Matrix gemeistert hat, kann man damit auch **Gleichungssysteme einfacher lösen**: • *Si l'on a maîtrisé le problème de calculer l'inverse d'une matrice on peut l'utiliser pour* **résoudre des systèmes d'équations***:*
$A \cdot \vec{x} = \vec{u} \;\Rightarrow\; \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{u}$ (falls A^{-1} existiert • *si* A^{-1} *existe*).
Das ist vor allem nützlich beim Rechnen mit Computern
• *C'est utile si l'on calcule à l'ordinateur (calculatrice).*

9.4.4 Berechnung der Inversen einer regulären Matrix — Calculer l'inverse d'une matrice régulière

Mit Hilfe von Gauss–Jordan — A l'aide de Gauss–Jordan

Sei • *Soit* $A \in R_n$ **Problem:** • **Problème:** $A^{-1} = X = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = ?$

Bekannt: • *Nous savons:* $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = A \cdot X = E = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$
$\rightsquigarrow$ $A \cdot X = E$ oder • *ou* $A \cdot (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$

Das Matrixprodukt wird nach der Vorschrift „Zeile r mal Spalte s (d.h. $\vec{x}_s$) gleich Element a_{rs}“ resp. „Matrix A mit Zeilen $r = 1, \ldots, n$ mal Spalte s gleich Elemente a_{rs}, $r = 1, \ldots, n$ gleich Vektor $\vec{e}_s$“gebildet.
• *Le produit matriciel se calcule d'après la prescription "ligne r fois colonne s (ç.v.d. $\vec{x}_s$) égal élément a_{rs}" resp. „matrice A avec lignes $r = 1, \ldots, n$ fois colonne s égal éléments a_{rs}, $r = 1, \ldots, n$ égal vecteur $\vec{e}_s$"*

Um $A^{-1} = X$ zu berechnen, müssen demnach n Gleichungen folgender Art gelöst werden:
• *Pour calculer $A^{-1} = X$ il faut donc résoudre n équations du type comme il suit:*

$$A \cdot \vec{x}_s = \vec{e}_s$$

Idee: • **Idée:** Wende den Algorithmus von Gauss–Jordan zur Lösung der Gleichungen an. Wende diesen Algorithmus simultan an auf alle n Gleichungssysteme. Dadurch wird der Aufwand nicht wesentlich grösser im Vergleich zu einem einzigen System. • *Applique l'algorithme de Gauss–Jordan pour résoudre les équations. Applique cet algorithme simultanément pour tous les n systèmes. Ainsi le travail n'est pas essentiellement plus grand par rapport au travail pour un seul système.*

Bsp.: • **Exemple:**

$$A \cdot A^{-1} = A \cdot (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Im Schema nach Gauss–Jordan stehen jetzt auf der rechten Seite 3 Kolonnen statt wie bisher nur eine. Denn es sind simultan 3 Gleichungen zu lösen. Im Resultat stehen dann rechts wieder 3 Kolonnen, d.h. eine Matrix $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = X = A^{-1}$. • *Dans le schéma d'après Gauss–Jordan on trouve maintenant à droite 3 colonnes au lieu d'une colonne comme on est habitué. Car il faut résoudre simultanément 3 équations. Dans le résultat on trouve de nouveau 3 colonnes à droite, ç.v.d. une matrice $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = X = A^{-1}$.*

$\rightsquigarrow$

1	0	-1	1	0	0	$A \cdot X = E$
3	1	-3	0	1	0	
1	2	-2	0	0	1	
1	0	-1	1	0	0	
0	1	0	-3	1	0	
0	2	-1	-1	0	1	
1	0	-1	1	0	0	
0	1	0	-3	1	0	
0	0	-1	5	-2	1	
1	0	0	-4	2	-1	
0	1	0	-3	1	0	
0	0	-1	5	-2	1	
1	0	0	-4	2	-1	$E \cdot X = A^{-1}$
0	1	0	-3	1	0	
0	0	1	-5	2	-1	

$$\rightsquigarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe von Cramer — A l'aide de Cramer

Eine andere Methode ergibt sich mit Hilfe der **Cramerschen Regeln** • *On obtient une autre méthode à l'aide des* **règles de Cramer**.

Betrachte dazu • *Etudie:* $A \cdot (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = E \rightsquigarrow$

$$A \cdot \vec{x}_k = \vec{e}_k \quad \text{d. h. } \bullet \text{ ç. v. d. } \quad A \cdot \begin{pmatrix} x_{1k} \\ \vdots \\ x_{jk} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{pmatrix} = \vec{e}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ Zeile } \bullet \textit{ ligne } k$$

Nach Cramer gilt für die Lösungen: • *D'après Cramer on a pour les solutions:*

$$x_{jk} = \frac{\det(A_{j,\vec{e}_k})}{\det(A)}, \quad j = 1, \ldots, n$$

Dabei kann man $\det(A_{j,\vec{e}_k})$ wie folgt interpretieren:
• *Dans ce rapport on peut interpréter* $\det(A_{j,\vec{e}_k})$ *comme il suit:*

$$\det(A_{j,\vec{e}_k}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{k,j-1} & 1 & a_{k,j+1} & \ldots & a_{kn} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$(-1)^{(k+j)-2} \det \begin{pmatrix} 1 & a_{k1} & \ldots & a_{kn} \\ 0 & a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{k1} & \ldots & a_{kn} \\ 0 & & \ldots & \\ \vdots & \vdots & A_{kj} & \vdots \\ 0 & & \ldots & \end{pmatrix} = (-1)^{(k+j)-2} \det A_{kj} = \alpha_{kj}$$

$\rightsquigarrow$ algebraisches Komplement von a_{kj} (Kofaktor) • *complément algébrique de* a_{kj} *(cofacteur).*

$$\Rightarrow \; x_{jk} = \frac{\alpha_{kj}}{\det(A)}$$

Wichtig: • Important:

Beachte die vertauschten Indices! • *Tiens compte des index échangés!*

$$\rightsquigarrow \quad X = A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1n} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A}^T$$

$\tilde{A} = A_{adj}$: Adjunkte von A • *Adjointe de* A

Satz: • Théorème: **Vor.: • Hyp.:** A regulär • *régulier* $(\det(A) \neq 0)$

Beh.: • Thè.: $A^{-1} = \dfrac{\tilde{A}^T}{\det(A)}$

Anwendung: Berechnung der Inversen kleiner Matrizen — Application: Calculer l'inverse des matrices petites

Die Berechnung der Inversen mit Hilfe der Adjunkten eignet sich vor allem für kleine Matrizen.
• *Le calcul de l'inverse à l'aide de l'adjointe est surtout utile pour des matrices petites.*

Bsp.: • **Exemple:** 2×2– Matrix: • *Matrice* 2×2:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\tilde{A}^T}{\det(A)} = \frac{1}{a\,d - b\,c} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Z.B. • *P.ex.* : $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 5 - 2 \cdot 3} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

9.4.5 Regeln für Transponierte und Produkt — Règles pour la transposé et le produit

Für die Inverse kennen wir den Vertauschungssatz: • *Pour l'inverse nous connaissons le théorème de l'échangement:* $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Interessanterweise gilt für die Transponierte eine entsprechende Regel:
• *Il est intéressant que pour la transposé on obtient une règle semblable:*

Benutze die Abkürzung: • *Utiliser l'abréviation:* $C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1s} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \dots & c_{rs} & \dots & c_{rn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{ns} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} := (c_{rs} \dots)$

Sei • *Soit* $(A \cdot B)^T = (\begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1^T \\ \vdots \\ \vec{\alpha}_n^T \end{pmatrix} \cdot (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n))^T \overset{Ab.}{=} ((\vec{\alpha}_r^T \dots) \cdot (\vec{b}_s \dots))^T = (((\vec{\alpha}_r^T) \cdot (\vec{b}_s)) \dots)^T$

$$= (\langle \vec{\alpha}_r, \vec{b}_s \rangle \dots)^T = (\langle \vec{b}_s, \vec{\alpha}_r \rangle \dots) = ((\vec{b}_s^T \cdot \vec{\alpha}_r) \dots) = (\vec{b}_s^T \dots) \cdot (\vec{\alpha}_r \dots) = (\begin{pmatrix} \vec{b}_1^T \\ \vdots \\ \vec{b}_n^T \end{pmatrix} \cdot (\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_n))^T =$$

$$= B^T \cdot A^T$$

Satz: • **Théorème:** $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Konsequenz: • **Conséquence:**
$(M^T)^{-1} \cdot M^T = E = (M \cdot M^{-1}) = E^T = (M \cdot M^{-1})^T = (M^{-1})^T \cdot M^T \;\Rightarrow\; (M^T)^{-1} = (M^{-1})^T.$

D.h. transponieren und invertieren sind vertauschbar.
• *Les opérations de transposition et d'inversion peuvent être échangées.*

Satz: • **Théorème:** $(M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$

Weiter gilt: • *En outre il vaut:*

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

A beliebige Matrix
• *A matrice quelconque*

Beh.: • **Thè.:**

$A^T \cdot A$ symmetrisch • *symétrique*

Beweis: • **Preuve:** Sei • *Soit* $A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^T \\ \ldots \\ \vec{a}_n^T \end{pmatrix}$

$\Rightarrow M = (m_{k,j}) = A^T \cdot A = (\vec{a}_k^T \cdot \vec{a}_j) = \langle \vec{a}_k, \vec{a}_j \rangle = \langle \vec{a}_j, \vec{a}_k \rangle = (\vec{a}_j^T \cdot \vec{a}_k) = (m_{j,k}) = M^T$ ☺

Bemerkung: • **Remarque:** Allgemein gilt aber $A^T \cdot A \neq A \cdot A^T$.
• *Mais généralement il vaut* $A^T \cdot A \neq A \cdot A^T$.

Beweis: • **Preuve:**

Sei • *Soit* $m \neq n$, $A: (m \times n) \Rightarrow A^T: (n \times m) \Rightarrow A^T \cdot A: (n \times n) \wedge A \cdot A^T: (m \times m)$
$\Rightarrow A^T \cdot A \neq A \cdot A^T$

9.4.6 Schwach besetzte Matrizen — Matrices aux éléments minuscules

Sei • *Soit* $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \in M_{n,n}$

Wir betrachten jetzt speziell solche Matrizen, die in der Hauptdiagonale viel grössere Elemente haben als neben der Hauptdiagonale. Speziell: Die Summe der absoluten Elemente einer Zeile ohne das Hauptdiagonalelement soll kleiner sein als das Hauptdiagonalelement. Wir definieren:
• *Maintenant nous considerdons spécialement des matrices qui possèdent dans la diagonale principale des éléments beaucoup plus grands que les éléments non dans la diagonale principale. Spécialement: La somme des éléments absolus dans une ligne, sans l'élément de la diagonale principale, doit être plus petite que l'élément de la diagonale principale. Nous définissons:*

Definition: • **Définition:** Für A gilt das **starke Zeilenkriterium**
• *Pour A le critère fort pour les lignes est valable*
$\Leftrightarrow \forall_i: \ |a_{ii}| > \sum_{j=1, i \neq j} a_{ij}$

Nun gilt der Satz: • *Maintenant, le théorème suivant est valable:*

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

Für $A \in M_{n,n}$ oder für A^T gilt das starke Zeilenkriterium.
• *Pour $A \in M_{n,n}$ ou pour A^T le critère fort pour les lignes est valable.*

Beh.: • **Thè.:**

$A \in R_n$ (regulär) • *(régulière)*

Beweis: • Preuve:

Indirekt $\rightsquigarrow$ Annahme: A singulär. • *Indirectement* $\rightsquigarrow$ *Supposition: A singulière.*
$\rightsquigarrow$ $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ hat eine Lösung $\vec{x} \neq \vec{0}$. • *... a une solution* $\vec{x} \neq \vec{0}$.

Sei • *Soit* $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $|x_k| := Max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, $\quad \vec{x} \neq \vec{0} \Rightarrow |x_k| \neq 0, \ \dfrac{|x_j|}{|x_k|} \leq 1$

$$\rightsquigarrow A \cdot \vec{x} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1,j} \cdot x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{n,j} \cdot x_j \end{pmatrix} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} \cdot x_j = 0 \Rightarrow a_{k,k} \cdot x_k = - \sum_{j=1,\ j \neq k}^{n} a_{k,j} \cdot x_j$$

$$\Rightarrow |a_{k,k}| = |\sum_{j=1,\ j \neq k}^{n} a_{k,j} \cdot \frac{x_j}{x_k}| \leq \sum_{j=1,\ j \neq k}^{n} |a_{k,j}| \cdot \frac{|x_j|}{|x_k|} \leq \sum_{j=1,\ j \neq k}^{n} |a_{k,j}| \Rightarrow |a_{k,k}| \leq \sum_{j=1,\ j \neq k}^{n} |a_{k,j}| \rightsquigarrow$$

Widerspruch zu starkem Zeilenkriterium. • *Contradiction par rapport au critère fort pour les lignes.*

$\rightsquigarrow$ $A \in R_n \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow A^T \in R_n. \rightsquigarrow$ ☺

Bsp.: • Exemple: Sei • *Soit* $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A \in R_n$.

9.4.7 Rechenbeispiele — Exemples de calcul

Beispiele: • Exemples: Berechne X ! • *Calculer X !*

1 $3 \cdot X \cdot A^2 + A \cdot B = N \Rightarrow X \cdot (3A^2) = (-1) \cdot A \cdot B \Rightarrow X = (-\frac{1}{3}) \cdot A \cdot B \cdot (A^2)^{-1}$

2 $A \cdot B^2 \cdot X - 2A^T \cdot x = A^2 \cdot b^T \cdot C$
$\Rightarrow (A \cdot B^2 - 2A^T) \cdot X = A^2 \cdot B^T \cdot C \Rightarrow X = (A \cdot B^2 - 2A^T)^{-1} \cdot A^2 \cdot B^T \cdot C$

3 $A \cdot V^2 - 2A^T \cdot X = A^2 \cdot B^T \cdot C$
$\rightsquigarrow X = \dfrac{1}{2} (A^T)^{-1} \cdot (A \cdot V^2 - A^2 \cdot B^T \cdot C)$

4 $A \cdot \vec{x} + \lambda \cdot B \cdot \vec{x} = \vec{c} \Rightarrow (A + \lambda \cdot B) \cdot \vec{x} \Rightarrow \vec{x} = (A + \lambda \cdot B)^{-1} \cdot \vec{c}$,
falls • *si* $(A + \lambda \cdot B)^{-1}$ existiert • *existe.*

5 $A^T \cdot X = B^T + A - A^T$
$\Rightarrow X = (A^T)^{-1} \cdot B^T + (A^T)^{-1} \cdot A - (A^T)^{-1} \cdot A^T = (A^{-1})^T \cdot B^T + (A^{-1})^T \cdot (A^T)^T - (A^{-1})^T \cdot A^T$
$= (B \cdot A^{-1})^T + (A^T \cdot A^{-1})^T - (A \cdot A^{-1})^T = (B \cdot A^{-1} + A^T \cdot A^{-1})^T - E$
$= ((B + A^T) \cdot A^{-1})^T - E = (A^{-1})^T \cdot (B^T + A) - E \ (= X)$

9.5 Nochmals geometrische Anwendungen — D'autres applications géométriques

9.5.1 Matrixkomposition — Composition de matrices

Geg.: • Donné:

$\vec{v_1} \longmapsto M \cdot \vec{v_1} = \vec{w_1}$, $\vec{v_2} \longmapsto M \cdot \vec{v_2} = \vec{w_2}$,..., $\vec{v_n} \longmapsto M \cdot \vec{v_n} = \vec{w_n}$, $\qquad \vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}$ Basis B • *base* B.

Rezept: • **Méthode:**

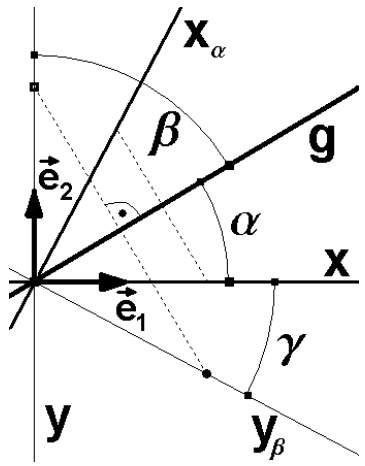
$$\rightsquigarrow \; M \cdot \underbrace{(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n})}_{B, \quad \det(B) \neq 0} = \underbrace{(\vec{w_1}, \vec{w_2}, \ldots, \vec{w_n})}_{W} \;\Rightarrow\; M \cdot B = W \;\Rightarrow\; M = W \cdot B^{-1}$$

Bsp.: • **Exemple:** $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$$w_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; W = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; M = W \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

9.5.2 Matrix zur Geradenspiegelung — Matrice pour la réflexion à une droite

Spiegelung an einer Geraden g in einer Ebene: • *réflexion à une droite g dasn un plan:*



$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - 2\,\beta = \frac{\pi}{2} - 2\,(\frac{\pi}{2} - \alpha) = -\frac{\pi}{2} + 2\,\alpha$$

$$S_g : \; \vec{e}_1, x \mapsto x_\alpha, \;\; S_g(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos(2\,\alpha) \\ \sin(2\,\alpha) \end{pmatrix}$$

$$S_g : \; \vec{e}_2, y \mapsto y_\beta, \;\; S_g(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{2} + 2\,\alpha) \\ \sin(-\frac{\pi}{2} + 2\,\alpha) \end{pmatrix}$$

$$S_g(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} \cos(2\,\alpha)\,\cos(-\frac{\pi}{2}) - \sin(2\,\alpha)\,\sin(-\frac{\pi}{2}) \\ \sin(-\frac{\pi}{2})\,\cos(2\,\alpha) + \cos(-\frac{\pi}{2})\,\sin(2\,\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \; S_g(\vec{e}_2) = S_g(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} \cos(2\,\alpha) \cdot 0 - \sin(2\,\alpha) \cdot (-1) \\ (-1) \cdot \cos(2\,\alpha) + 0 \cdot \sin(2\,\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\sin(2\,\alpha) \\ -\cos(2\,\alpha) \end{pmatrix}$$

Sei • *Soit* $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\,\vec{e}_1 + b\,\vec{e}_2$

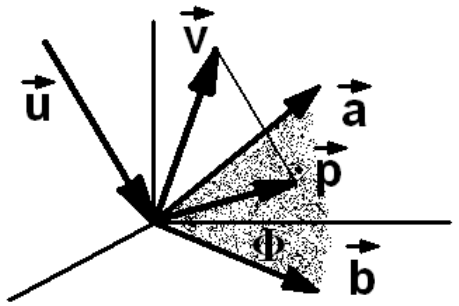
$$\rightsquigarrow \; S_g \;\; \vec{v} \mapsto S_g(\vec{v}) = a\,S_g(\vec{e}_1) + b\,S_g(\vec{e}_2) = a \begin{pmatrix} \cos(2\,\alpha) \\ \sin(2\,\alpha) \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} +\sin(2\,\alpha) \\ -\cos(2\,\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,\cos(2\,\alpha) + b\,\sin(2\,\alpha) \\ a\,\sin(2\,\alpha) - b\,\cos(2\,\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \; S_g(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a\,\cos(2\,\alpha) + b\,\sin(2\,\alpha) \\ a\,\sin(2\,\alpha) - b\,\cos(2\,\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\,\alpha) & \sin(2\,\alpha) \\ \sin(2\,\alpha) & -\cos(2\,\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Satz: • **Théorème:** Matrix zur Spiegelung an g: • *Matrice pour la réflexion à la droite g:*

$$S_{g,\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(2\,\alpha) & \sin(2\,\alpha) \\ \sin(2\,\alpha) & -\cos(2\,\alpha) \end{pmatrix}$$

9.5.3 Projektion auf Ebene, Matrix — Projection sur un plan, matrice



Geg.: • **Donné:**
Projektionsrichtung $\vec{u}$, Ebene $\Phi(\vec{a},\vec{b})$
• *Direction de projektion* $\vec{u}$, *plan* $\Phi(\vec{a},\vec{b})$

$\Phi = \{\vec{x} = \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b} \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$

Projektion: • *Projection:* $P_{\Phi,\vec{u}} \quad \rightsquigarrow$

$P_{\Phi,\vec{u}}(\vec{u}) = P_{\Phi,\vec{u}} \cdot \vec{u} = \vec{0} \qquad (*)$
$P_{\Phi,\vec{u}}(\vec{a}) = P_{\Phi,\vec{u}} \cdot \vec{a} = \vec{a} \qquad (*)$
$P_{\Phi,\vec{u}}(\vec{b}) = P_{\Phi,\vec{u}} \cdot \vec{b} = \vec{b} \qquad (*)$

$P_{\Phi,\vec{u}}$ = Projektionsmatrix • $P_{\Phi,\vec{u}}$ = *matrice de projection* $\quad \rightsquigarrow \; P_{\Phi,\vec{u}} \cdot (\vec{a},\vec{b},\vec{0}) = (\vec{a},\vec{b},\vec{0})$

$\rightsquigarrow \; Kern(P_{\Phi,\vec{u}}) = \{t\,\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\}, \qquad Image(P_{\Phi,\vec{u}}) = \Phi = \{\vec{x} = \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b} \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$

(*) $\rightsquigarrow$ 9 Gleichungen mit 9 Unbekannten! • 9 *équations avec* 9 *inconnus!*

Anderer Weg: • *Autre chemin:*

Sei • *Soit* $\{\vec{a},\vec{b},\vec{u}\}$ = Basis • *base*, $\quad \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \;\Rightarrow\; \exists_{\lambda,\mu,\nu}:\; \vec{v} = \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b} + \nu\,\vec{u}$

$$\rightsquigarrow \; \vec{v} = \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b} + \nu\,\vec{u} = \underbrace{(\vec{a},\vec{b},\vec{u})}_{A} \cdot \begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix} \longmapsto P_{\Phi,\vec{u}}(\vec{v}) = \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b} + \nu\,\vec{0} = \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b}$$

$$\vec{v} = A \cdot \begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \vec{v} \qquad \begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \cdot (A^{-1} \cdot \vec{v})$$

$$P_{\Phi,\vec{u}}(\vec{v}) = \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b} + \nu\,\vec{0} = \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b} = A \cdot \begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ 0\end{pmatrix} = A \cdot \left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \cdot (A^{-1} \cdot \vec{v})\right)$$

Satz: • **Théorème:** Matrix zur Projektion $P_{\Phi,\vec{u}}$: • *Matrice pour projection* $P_{\Phi,\vec{u}}$:

$\{\vec{a},\vec{b},\vec{u}\}$ = Basis • *base* $\qquad (\det A = \det(\vec{a},\vec{b},\vec{u}) \neq 0)$

$$\Rightarrow \; P_{\Phi,\vec{u}} = A \cdot \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \cdot A^{-1}$$

Sei • *Soit* $A = (\vec{a},\vec{b},\vec{u}),\;\; A' = (\vec{a},\vec{b},\vec{0})$

$$\Rightarrow \; P_{\Phi,\vec{u}}:\; A = (\vec{a},\vec{b},\vec{u}) \longmapsto A' = (\vec{a},\vec{b},\vec{0}) = P_{\Phi,\vec{u}} \cdot (\vec{a},\vec{b},\vec{u}) = P_{\Phi,\vec{u}} \cdot A$$

$\vec{a},\vec{b},\vec{u}$ *l.u.'l.i.*$\rightsquigarrow$ $\det(A) \neq 0 \;\Rightarrow\; A^{-1}$ ex. • *ex.*

$$\rightsquigarrow \; A' = P_{\Phi,\vec{u}} = \cdot A \;\Rightarrow\; P_{\Phi,\vec{u}} = A' \cdot A^{-1} = (\vec{a},\vec{b},\vec{0}) \cdot (\vec{a},\vec{b},\vec{u})^{-1}$$

Satz: • **Théorème:** Matrix zur Projektion $P_{\Phi,\vec{u}}$: • *Matrice pour projection* $P_{\Phi,\vec{u}}$*:*

$\{\vec{a},\vec{b},\vec{u}\}$ = Basis • *base* $(\det A = \det(\vec{a},\vec{b},\vec{u}) \neq 0)$

$$\Rightarrow\ P_{\Phi,\vec{u}} = A' \cdot A^{-1} = (\vec{a},\vec{b},\vec{0}) \cdot (\vec{a},\vec{b},\vec{u})^{-1}$$

Weiter gilt: • *En outre il vaut:*

Satz: • **Théorème:** Matrix zur Normalproj. $P_{\Phi,\vec{u}}$: • *Matrice pour proj. normale* $P_{\Phi,\vec{u}}$*:*

$\{\vec{a},\vec{b},\vec{u}\}$ = Basis • *base* $(\det A = \det(\vec{a},\vec{b},\vec{u}) \neq 0,\ \ \vec{u} = \vec{a}\times\vec{b})$
Sei • *Soit* $B = (\vec{a},\vec{b}),\ \ \vec{a},\vec{b} \in \mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow\ P_{\Phi,\vec{u}} = B \cdot (B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T$$

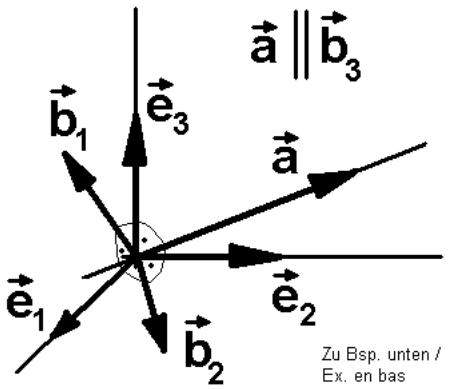
<u>Beweis: • Preuve:</u>

Z.B. automatisch: Verifiziere $B \cdot (B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T \equiv A' \cdot A^{-1}$ mit einem CAS, z.B mit *Mathematica.*
• *Automatiquement: Vérifier* $B \cdot (B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T \equiv A' \cdot A^{-1}$ *à l'aide d'un CAS, p. ex. avec Mathematica.*

9.5.4 Drehung um Raumachse — Révolution autour d'une axe dans l'espace

Geg.: • **Donné:** Achse a durch O, Achsenrichtung $\vec{a}$ • *Axe* a *par* O *direction* $\vec{a}$

Ges.: • **Trouver:** Drehe P $(\overrightarrow{OP})$ um a um α. • *Tourner* P $(\overrightarrow{OP})$ *autour de* a *(sur* a*) par* α.



Wähle orthonormales Koordinatensystem $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3$ mit $\vec{b}_1 = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a},\ \ \vec{b}_2 \perp \vec{b}_1$:
$\langle\vec{b}_1,\vec{b}_2\rangle = 0,\ \ |\vec{b}_2| = 1.$
• *Choisir système de coordonnées orthonormal* $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3$ *avec* $\vec{b}_1 = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a},\ \ \vec{b}_2 \perp \vec{b}_1$:
$\langle\vec{b}_1,\vec{b}_2\rangle = 0,\ \ |\vec{b}_2| = 1.$

$$\vec{b}_3 = \vec{b}_1 \times \vec{b}_2,\ \ \vec{b}_2 \neq 0,\ \ \vec{a} = \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}.$$

Bsp.: • **Exemple:** $\vec{b}_2 \in V = \{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\} =$
$V = \{\begin{pmatrix} -c \\ c \\ a-b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b-c \\ -a \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ c-a \\ -b \end{pmatrix}\}$
$|\vec{v}_k| \to Max,\ \ k \to Max$

Andere Situation (siehe Bild oben): • *Autre situation (voir image en haut):*

Bsp.: • **Exemple:** Gegeben: Ebene Φ: • *Soit donné: Un plan* Φ*:* $\Phi = \Phi(O,\vec{v}_1,\vec{v}_2),\ \ \vec{a} = \overrightarrow{OP_?} \perp \Phi.$

$\rightsquigarrow$ Wähle: • *Choisir:* $\vec{a} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2,\ \ \vec{b}_3 = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a},\ \ \vec{b}_1 = \frac{1}{|\vec{v}_1|}\vec{v}_1,\ \ \vec{b}_2 = \vec{b}_3 \times \vec{b}_1 \rightsquigarrow\ (\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3) = ONS$.

Suche Matrix M: • *Chercher matrice M:*

$$(M:\ \{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\} \longmapsto \{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}) \ \Leftrightarrow (M^{-1}:\ \{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\} \longmapsto \{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\})$$

$\rightsquigarrow$ Es gilt: • *Il vaut:* $\forall_k\ M^{-1}\cdot\vec{e}_k = \vec{b}_k \ \Rightarrow\ M^{-1} = (\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)$

Lemma: • **Lemme:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$M^{-1} = (\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)$$

Beh.: • **Thè.:**

$$(M:\ \{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\} \longmapsto \{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}) \ \Leftrightarrow (M^{-1}:\ \{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\} \longmapsto \{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\})$$

Speziell: • *Spécialement:* $M^{-1}\cdot\vec{e}_k = \vec{b}_k$

$$\rightsquigarrow\ M = (\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)^{-1}:\ \vec{v} = \overrightarrow{OP} \longmapsto \vec{v}' = \overrightarrow{OP}' = M\cdot\overrightarrow{OP} = (\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)^{-1}\cdot\overrightarrow{OP}$$

P' kann man nun um α um die x–Achse ($\vec{e}_1$) drehen.
• *Maintenant on peut tourner P' autour de l'axe x ($\vec{e}_1$) par α.*

$$\rightsquigarrow\ \vec{v}'' = \overrightarrow{OP}'' = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{OP}' = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)^{-1}\cdot\overrightarrow{OP}$$

Jetzt kann man P'' mit Hilfe von M^{-1} wieder zurückabbilden und erhält so den gesuchten um a gedrehten Punkt P'''.
• *Maintenant on peut applique P'' à l'aide de M^{-1} et on obtient ainsi le point P''' qu'on cherche.*

$$\rightsquigarrow\ \overrightarrow{OP}''' = (\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)\cdot\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)^{-1}\cdot\overrightarrow{OP}\ ,\ \ \vec{v}''' = M^{-1}\cdot D_\alpha\cdot M\cdot\vec{v}$$

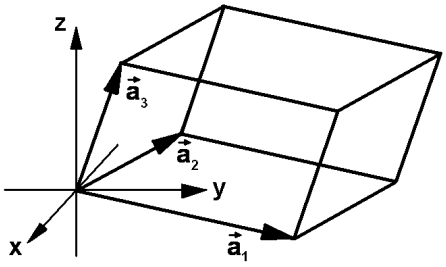
Satz: • **Théorème:** Drehmatrix $D_{\alpha,\vec{a}}$: • *Matrice de révolution $D_{\alpha,\vec{a}}$:*

$(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)$ nach Konstriktion wie oben beschrieben • *construit comme indiquée au–dessus*

$$D_{\alpha,\vec{a}} = (\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)\cdot\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)^{-1} = M^{-1}\cdot D_\alpha\cdot M$$

9.6 Matrixprodukt und Basiswechsel — Produit de matrices et changement de base

9.6.1 Determinantenmultiplikationssatz — Théorème de la multiplication des déterminants



Durch • *Par* $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ ist ein n–dimensionaler Spat gegeben • *on a donné un parallélépipède de dimension* n.
Bezüglich einer Orthonormalbasis ist das vorzeichenbehaftete Volumen dieses Spats gleich: • *Par rapport à une base orthonormale le volume marqué d'un signe est le même:*
$[\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n] = \det A, \;\; A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$

Dabei ist: • *Soit:*
$$\vec{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} = a_{1k}\vec{e}_1 + \ldots + a_{nk}\vec{e}_n$$

Problem: • **Problème:** Was passiert mit diesem Volumen, wenn man von einer beliebigen gegebenen Basis $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ (hier $B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$) zu einer neuen Basis $B' = \{\vec{b}_1{}', \ldots, \vec{b}_n{}'\}$ übergeht?
• *Qu'est-ce qui se passe avec le volume si l'on passe d'une base donnée quelconque* $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ *(ici* $B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$*) à une nouvelle base quelconque* $B' = \{\vec{b}_1{}', \ldots, \vec{b}_n{}'\}$*?*

Überlegung am Beispiel • *Etude à l'exemple:* $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Neue Basis • *nouvelle base* $B' = \{(\vec{e}_1)', (\vec{e}_2)', (\vec{e}_3)'\}$.

Sei • *Soit* $(\vec{e}_1)' = \frac{1}{2} \cdot \vec{e}_1, \;\; 2(\vec{e}_1)' = \vec{e}_1$

$$\rightsquigarrow \quad \vec{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ a_{3k} \end{pmatrix}_B = a_{1k} \cdot \vec{e}_1 + a_{2k} \cdot \vec{e}_2 + a_{3k} \cdot \vec{e}_3 = a_{1k} \cdot 2(\vec{e}_1)' + a_{2k} \cdot 2(\vec{e}_2)' + a_{3k} \cdot 2(\vec{e}_3)'$$

$$= a'_{1k} \cdot (\vec{e}_1)' + a'_{2k} \cdot (\vec{e}_2)' + a'_{3k} \cdot (\vec{e}_3)' = \begin{pmatrix} a'_{1k} \\ a'_{2k} \\ a'_{3k} \end{pmatrix}_{B'}$$

$$\text{mit} \;\bullet\; \textit{avec} \;\; a'_{ik} = 2a_{ik} \quad \text{oder} \;\bullet\; \textit{ou} \;\; \begin{pmatrix} a'_{1k} \\ a'_{2k} \\ a'_{3k} \end{pmatrix}_{B'} = 2 \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ a_{3k} \end{pmatrix}_B$$

Ein Basiswürfelinhalt $[(\vec{e}_1)', (\vec{e}_2)', (\vec{e}_3)']$ hat hier nur $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ des Volumeninhalts des ursprünglichen Basiswürfels ($[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]$), gemessen im ursprünglichen System B. • *La mesure* $[(\vec{e}_1)', (\vec{e}_2)', (\vec{e}_3)']$ *d'un cube de base n'a qu'un* $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ *du contenu du cube de base original* ($[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]$) *par rapport au système* B.

Hingegen wird die Masszahl des Inhalts des Spates $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}_B$ (bezüglich B) jetzt 8 mal so gross wie die Masszahl des Inhalts bezüglich B'. ($\{\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3\}_{B'}$.) • *Par contre la mesure du contenu du parallélépipède* $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}_B$ *(par rapport à* B*) est maintenant* 8 *fois la mesure du contenu par rapport à* B'. *(* $\{\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3\}_{B'}$.*)*

$$\rightsquigarrow \quad \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)_B = 8 \cdot \det(\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \vec{a}'_3)_{B'}, \quad \det(A)_B = 8 \cdot \det(A')_{B'}$$

Vergleich mit dem Entwicklungssatz: • *Comparaison avec le théorème de Laplace:*
($m(\ldots)$ = Mass von ... • *mesure de ...*, $\ldots_B$ = bezüglich B • *par rapport à* B)

$$\pm V_B = m(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n)_B = \det(A)_B = \sum_{\sigma_p,\ p=1}^{n!} (-1)^{sgn(\sigma_p)} \cdot a_{1k_1} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n} \cdot 1$$
$$= \sum_{\sigma_p,\ p=1}^{n!} (-1)^{sgn(\sigma_p)} \cdot a_{1k_1} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n} \cdot \det(E_B) = \sum_{\sigma_p,\ p=1}^{n!} (-1)^{sgn(\sigma_p)} \cdot a_{1k_1} \cdot \ldots \cdot a_{nk_n} \cdot m(B_B) =$$
$$= \det(A_B) \cdot \det(B_B)$$

$$\pm V_{B'} = m(\vec{a}_1{}', \vec{a}_2{}', \ldots, \vec{a}_n{}')_{B'} = \det(A')_{B'} = \sum_{\sigma_p,\ p=1}^{n!} (-1)^{sgn(\sigma_p)} \cdot a'_{1k_1} \cdot \ldots \cdot a'_{nk_n} \cdot 1_{B'}$$
$$= \sum_{\sigma_p,\ p=1}^{n!} (-1)^{sgn(\sigma_p)} \cdot a'_{1k_1} \cdot \ldots \cdot a'_{nk_n} \cdot \det(E_{B'}) = \sum_{\sigma_p,\ p=1}^{n!} (-1)^{sgn(\sigma_p)} \cdot a'_{1k_1} \cdot \ldots \cdot a'_{nk_n} \cdot m(B'_{B'}) =$$
$$= \det(A'_{B'}) \cdot \det(B'_{B'})$$

Dabei ist: • *On vient de voir:*
Volumeninhalt von B bezüglich B' • *Mesure du volume de* B *par rapport à* B'
$= \det(B)_{B'} \rightsquigarrow$ $\det(A'_{B'}) = \pm V_{B'} = m(\vec{a}_1{}', \vec{a}_2{}', \vec{a}_3{}')_{B'} = \det(A_B) \cdot \det(B)_{B'}$

Im Beispiel oben: • *Dans l'exemple au dessus:*
$\det(A_{B'}) = \det(\vec{a}_1{}', \vec{a}_2{}', \vec{a}_3{}')_{B'} = [\vec{a}_1{}', \vec{a}_2{}', \vec{a}_3{}'] = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3] \cdot 8$, $det((\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)_{\{(\vec{e}_1)', (\vec{e}_2)', (\vec{e}_3)'\}}) = 8$

Diese Problematik kennen wir längst z.B. beim Umrechnen physikalischer Masse. Etwa $18m^3 = 18 \cdot 10^6 cm^3$. Hier findet ein Wechsel von der Einheitsbasis in m zur Einheitsbasis in cm statt.
• *Ce problème est connu depuis longtemps p.ex. du changement d'un système de mesure à l'autre en physique. P.ex.* $18m^3 = 18 \cdot 10^6 cm^3$. *On change p.ex. la base unité de* m^3 *en* cm^3.
Auf Grund dieser unmittelbaren Anschaulichkeit können wir folgenden Satz formulieren:
• *En raison de cette évidence nous pouvons formuler le théorème suivant:*

Satz: • **Théorème:**

Vor.: • **Hyp.:**

$M' = A_{B'}$ definiere einen Spat S bezüglich der Basis B' • *définis un parallélépipède* S *par rapport à la base* B'
$M = A_B$ definiert S bezüglich B • *définit* S *par rapport à* B.
$\det(B_{B'}) = \pm$ Volumeninhalt von B in der Basis B' • $= \pm$ *mesure du volume de* B *dans la base* B'

Beh.: • **Thè.:**

$\det(M') = \det(A_{B'}) = \det(A_B) \cdot \det(B_{B'}) = \det(M) \cdot \det(B_{B'})$
oder • *ou*
$\det(A_B) = \dfrac{\det(A_{B'})}{\det(B_{B'})}$

Gewinn: Dieser Satz lässt sich auf die Determinante eines Matrixprodukts anwenden:
• **Avantage:** *On peut appliquer ce théorème au déterminant d'un produit matriciel:*

Für die nachfolgende Betrachtung nehmen wir an, dass für die Basen folgende Beziehungen gelten:
• *Pour la discussion suivante on suppose que pour les bases les relations suivantes sont valables:*

$$B' = \{\vec{b}_1{}', \ldots, \vec{b}_n{}'\} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}, \;\; B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$$

Der Spat S sei gegeben durch: • *Le parallélépipède S soit donné par:*

$A_B = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ resp. • *resp.* $A_{B'} = (\vec{a}'_1, \ldots, \vec{a}'_n)$
$\rightsquigarrow$ Beachte: • *Considère:*

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & \\
E \hat{=} \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\} = \arrow[ur, mapsto] & & & & & \\
B' \hat{=} \{\vec{b}_1{}', \ldots, \vec{b}_n{}'\} \arrow[r, mapsto] & \arrow[r, mapsto] \arrow[r, mapsto, "\mathcal{B}"] & \arrow[r, mapsto] & B \hat{=} \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\} \arrow[r, mapsto] & \arrow[r, mapsto] \arrow[r, mapsto, "\mathcal{C}=\mathcal{A}\circ\mathcal{B}^{-1}"] & \arrow[r, mapsto] & A \hat{=} \{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\} \arrow[dr, mapsto] & \arrow[r, mapsto] \arrow[r, mapsto, "\mathcal{A}"] & \arrow[r, mapsto] & \arrow[r, mapsto] & \arrow[r, mapsto] & \arrow[r, mapsto] & \arrow[dr, mapsto] & \\
 & & & & & & & & & & & & &
\end{tikzcd}$$

Dabei gehört zu $\mathcal{B}$ die Matrix $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ (Basis $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$). Entsprechend für $\mathcal{A}, \mathcal{C}$.
• *Ici l'application $\mathcal{B}$ va avec la matrice $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ (base $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$). Correspondant pour $\mathcal{A}, \mathcal{C}$.*

Für die Abbildung der Vektoren ergibt sich das folgende Diagramm: • *Pour l'application des vecteurs on obtient le diagramme suivant:*

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & \\
E \arrow[ur, mapsto] & & B = B \cdot E \arrow[r, mapsto] & & \vec{a}_k = C \cdot \vec{b}_k = (A \cdot B^{-1}) \cdot \vec{b}_k \arrow[dr, mapsto] & \\
\vec{e}_k = B^{-1} \cdot \vec{b}_k = B^{-1} \cdot (B \cdot \vec{e}_k) \arrow[r, mapsto] & \arrow[r, mapsto] \arrow[r, mapsto, "\mathcal{B}"] & \vec{b}_k = B \cdot \vec{e}_k \arrow[r, mapsto] & \arrow[r, mapsto] \arrow[r, mapsto, "\mathcal{C}=\mathcal{A}\circ\mathcal{B}^{-1}"] & (A \cdot B^{-1}) \cdot (B \cdot \vec{e}_k) = A \cdot \vec{e}_k & \\
 & & & & &
\end{tikzcd}$$

Sei A eine reguläre Matrix, zu der die Determinante studiert werden soll. B stiftet eine Basisabbildung, d.h. muss ebenfalls regulär sein. (Somit existiert B^{-1}.) Wegen $C = A \cdot B^{-1}$ muss daher mit A auch C regulär sein. Ansonst sind A und B (und daher auch C) beliebig.
• *Soit A une matrice régulière dont il faut étudier le déterminant. B provoque une application de base, ç.v.d. doit aussi être régulier. (Par conséquent B^{-1} existe.) A cause de $C = A \cdot B^{-1}$, C doit être régulier avec A. En outre A et B (et par conséquent aussi C) sont quelconques.* $\rightsquigarrow$

$\pm\text{Volumeninhalt}(S)_{B' \hat{=} E}$ • $= \pm$*mesure du volume*$(S)_{B' \hat{=} E} = \det(A) = \det(A_{B'})$
$\pm\text{Volumeninhalt}(S)_B$ • $= \pm$*mesure du volume*$(S)_B = \det(C_B) = \det((A \cdot B^{-1})_B)$
$\pm\text{Volumeninhalt}(B)_{B'}$ • $= \pm$*mesure du volume*$(B)_{B'} = \det(B')$

Nach dem letzten Satz gilt: • *D'après le dernier théorème il vaut:*

$$\det(A_{B'}) = \det(C_B) \cdot \det(B_{B'}) \;\Rightarrow\; \det(A_{B'}) = \det((A \cdot B^{-1})_B) \cdot \det(B_{B'})$$

Kurz: • *Bref:* $\det(A) = \det(A \cdot B^{-1}) \cdot \det(B) = \det(C) \cdot \det(B)$,
Beachte: • *Considérer* $A_{B'}$, $(A \cdot B^{-1})_B$, $B_{B'}$, C_B sind die gegebenen Matrizen • *sont les matrices données* ($\rightsquigarrow$ A, $A \cdot B^{-1}$, B, C).

Wir benützen • *Nous utilisons* $A \cdot B^{-1} = C \;\Rightarrow\; A = C \cdot B \rightsquigarrow$
$\det(A) = \det(C \cdot B) = \det(A \cdot B^{-1}) \cdot \det(B) = \det(C) \cdot \det(B) \;\Rightarrow\; \det(C \cdot B) = \det(C) \cdot \det(B)$

Es gilt: • *Il vaut:* $(C \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot C^{-1}$

Daraus ersehen wir, dass ein Produkt genau dann regulär ist, wenn die Faktoren regulär sind.
• *Nous en voyons qu'un produit est régulier exactement quand les facteurs le sont.*

$\rightsquigarrow$ **Konsequenz:** • **Conséquence:**

Satz: • **Théorème:** **Determinantenmultiplikationssatz**
• Multiplication des déterminants

Vor.: • **Hyp.:**

$A_1, A_2 \in M_{n,n}$

Beh.: • **Thè.:**

$\det(A_1 \cdot A_2) = \det(A_1) \cdot \det(A_2)$

Wegen • *A cause de* $A \cdot A^{-1} = E$ und • *et* $1 = \det(E) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$
folgt jetzt: • *il suit:*

Korollar: • **Corollaire:** **Vor.:** • **Hyp.:** $A \in R_n$

Beh.: • **Thè.:** $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}$

Wir beachten: • *Nous tenons compte de:* $\det(A^2) = \det(A) \cdot \det(A) = \det(A)^2$
und • *et* $\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1}, \lambda\vec{a}_k, \vec{a}_{k+1}, \ldots, \vec{a}_n) = \lambda \cdot \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_{k-1}, \vec{a}_k, \vec{a}_{k+1}, \ldots, \vec{a}_n)$
Dann folgt für • *Alors on déduit pour* $A \in M_{n,n}$

Korollar: • **Corollaire:** $\det(A^k) = \det(A)^k$

Korollar: • **Corollaire:** $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$

Korollar: • **Corollaire:** $\det(\lambda \cdot E) = \det \begin{pmatrix} \lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^n \cdot \det(E) = \lambda^n$

Beispiele: • **Exemples:**

1 $\det(5 \cdot (\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{20})^{-1}) = 5^3 \cdot ((\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix})^{20})^{-1} = 125 \cdot ((1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2})^{20})^{-1} =$

$= 125 \cdot (1^{20})^{-1} = 125$

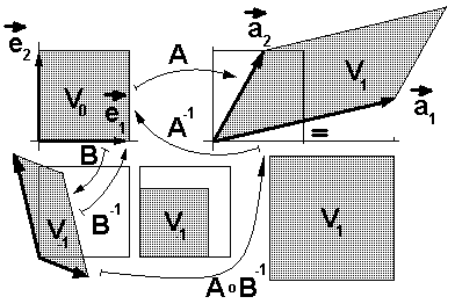
2 $\det(5 \cdot (\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{20})^{-1}) = 5^3 \cdot ((\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix})^{20})^{-1} = 125 \cdot ((1 \cdot 2 \cdot 1)^{20})^{-1} =$

$= 125 \cdot (2^{20})^{-1} = \dfrac{125}{2^{20}} = \dfrac{125}{1048576} = \dfrac{5^3}{2^{20}}$

$$3\ \det(A) = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120, \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{120},$$

$$(A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix})$$

9.6.2 Determinantenmult. vereinfacht — Multipl. des déterm. simplifiée



Sei • *Soit* $V_{-1} = 1\,old$

$V_0 = \det((\vec{e}_1, \vec{e}_2)) = 1\,original,$

$V_1 = \det((\vec{a}_1, \vec{a}_2)) \cdot 1\,original = \det(A)\cdot 1\,original \mathrel{\hat{=}} 1\,new$

$1\,original \mathrel{\hat{=}} \det(A^{-1})\cdot 1\,new$

$\Rightarrow\ 1\,original\ =\ \det(A^{-1})\cdot\det(A)\cdot 1\,original$

Folgerung: • **Conclusion:** $1 = \det(A^{-1})\cdot\det(A)$

$$\Rightarrow\ \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

$V_{-1} = \det(B^{-1})\cdot 1\,original \mathrel{\hat{=}} 1\,old \ \Rightarrow\ 1\,original \mathrel{\hat{=}} \det(B)\cdot 1\,old,$

$1\,new \mathrel{\hat{=}} \det(A)\cdot 1\,original \ \Rightarrow\ 1\,new \mathrel{\hat{=}} \det(A)\cdot\det(B)\cdot 1\,old$

$\det(A\circ B)\cdot 1\,old \mathrel{\hat{=}} 1\,new \mathrel{\hat{=}} \det(A)\cdot\det(B)\cdot 1\,old \ \Rightarrow\ \det(A\circ B)\cdot 1\,old = \det(A)\cdot\det(B)\cdot 1\,old$

$\Rightarrow\ \det(A\circ B) = \det(A)\cdot\det(B) = \det(B)\cdot\det(A) = \det(B\circ A)$

Folgerung: • **Conclusion:** (1) $\det(A\circ B) = \det(A)\cdot\det(B)$

(1) $\det(A\circ B) = \det(B\circ A)$

9.6.3 Determinantenmult. u. Geometrie — Multipl. des déterm. et géom.

Geometrische Sätze — Théorèmes géométriques

Wir betrachten Matrixabbildungen: • *Nous considérons des applications matricielles:*

$$\mathrm{M} : \vec{a} \longmapsto \vec{b} = M\cdot\vec{a} = \mathrm{M}(\vec{a})$$

$$\mathrm{M} : \vec{u} \longmapsto \vec{v} = M\cdot\vec{u} = \mathrm{M}(\vec{u})$$

$$\mathrm{A} : \vec{x} \longmapsto \vec{y} = A\cdot\vec{x} = \mathrm{A}(\vec{x})$$

$$A = (\vec{a}_1,\ \ldots,\ \vec{a}_n),\ \ \mathrm{A} : \vec{e}_k \longmapsto \vec{a}_k = A\cdot\vec{e}_k = \mathrm{A}(\vec{e}_k)$$

Es gilt: • *Il vaut:* $(\vec{0} = M\cdot\vec{0}\ \wedge\ \vec{u}\neq\vec{0}\ \wedge\ \vec{v} = M\cdot\vec{u} = \vec{0})\ \Leftrightarrow \det(A) = 0.$

$((\vec{0} \longmapsto \vec{0} = A \cdot \vec{0} = \mathrm{A}(\vec{0})) \wedge (\vec{0} \neq \vec{u} \longmapsto \vec{0} = A \cdot \vec{u} = \mathrm{A}(\vec{u})) \rightsquigarrow \quad \vec{0} \neq \vec{u}$ Urbilder zu $\vec{0}$. • *image inv. de* $\vec{0}$.)

Sätze über Matrixabbildungen: • Théorèmes pour applications matricielles:

Sei • *Soit* $\det(A) \neq 0, \quad \det(M) \neq 0, \quad \ldots$

1 $g_1: \ \vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{a}, \ \ M \cdot \vec{r} = M \cdot (\vec{r}_0 + t \cdot \vec{a}) = M \cdot \vec{r}_0 + M \cdot (t \cdot \vec{a}) = \underbrace{M \cdot \vec{r}_0}_{\vec{s}_0} + t \cdot \underbrace{M \cdot \vec{a}}_{\vec{b} \neq \vec{0}} = \vec{s}_0 + t \cdot \vec{b}$

$\Rightarrow \ g_1: \ \vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{a} \longmapsto h_1: \ \vec{s} = \vec{s}_0 + t \cdot \vec{b}$

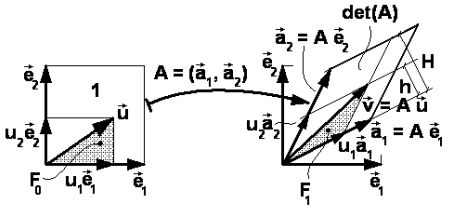
$\rightsquigarrow$ Das Bild einer Gerade ist eine Gerade.
• *L'image dune droite est une droite.*

2 $g_1 \| g_2, \ \ g_1: \ \vec{r} = \vec{r}_1 + t \cdot \vec{a} \longmapsto h_1: \ \vec{s} = \vec{s}_1 + t \cdot \vec{b}, \ \ g_2: \ \vec{r} = \vec{r}_2 + t \cdot \vec{a} \longmapsto h_2: \ \vec{s} = \vec{s}_2 + t \cdot \vec{b}$
$\Rightarrow \ h_1 \| h_2$.

$\rightsquigarrow$ Parallele Geraden werden in parallele Geraden abgebildet.
• *Les images de droites parallèles sont des droites parallèles.*

3 $\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + t_1 \cdot \vec{a} \longmapsto M \cdot \vec{r}_1 = \vec{s}_1 = \vec{s}_0 + t_1 \cdot \vec{b}$
$\vec{r}_2 = \vec{r}_0 + t_2 \cdot \vec{a} \longmapsto M \cdot \vec{r}_2 = \vec{s}_2 = \vec{s}_0 + t_2 \cdot \vec{b}$
$\rightsquigarrow \ (t_1 \cdot |\vec{a}|) : (t_2 \cdot |\vec{a}|) = \dfrac{t_1 \cdot |\vec{a}|}{t_2 \cdot |\vec{a}|} = \dfrac{t_1}{t_2} = \dfrac{t_1 \cdot |\vec{b}|}{t_2 \cdot |\vec{b}|} = (t_1 \cdot |\vec{b}|) : (t_2 \cdot |\vec{b}|)$.
$\rightsquigarrow$ Streckenverhältnisse an parallelen Strecken bleiben erhalten
• *Des rapports de deux segments parallèles ne changent pas.*

4 **Abbildung von Flächen:** Polygonflächen lassen sich in achsenparallele Dreiecke zerlegen. Allgemeine Flächen lassen sich durch Polygonflächen approximieren. Somit gilt das Abbildungsverhalten bei achsenparallelen Dreiecken auch für allgemeine Flächen. Wir brauchen nur achsenparallele Dreiecke zu studieren.
• **Applications de surfaces:** *On peut décomposer les surfaces polygonales dans les triangles axe–parallèles. Des surfaces quelconque se laissent approcher par polygonales. Par conséquent les règles d'applications qui valent pour les triangles axe–parallèles sont aussi valables pour les surfaces quelconque. Nous pouvons donc réduire nos études aux triangles axe-parallèles.*



$F(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \longmapsto F(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \det(A) = |\vec{a}_1| \cdot H.$

$$\frac{h}{H} = \frac{u_2 \cdot |\vec{a}_2|}{|\vec{a}_2|} = u_2 \ \Rightarrow \ h = u_2 \cdot H$$

$$F_0 = \frac{u_1 \cdot u_2}{2} \longmapsto F_1 = \frac{u_1 \cdot |\vec{a}_1| \cdot h}{2} = \frac{u_1 \cdot |\vec{a}_1| \cdot u_2 \cdot H}{2} = \frac{u_1 \cdot u_2 \cdot |\vec{a}_1| \cdot H}{2}$$

$$|\vec{a}_1| \cdot H = \det(A) \ \Rightarrow \ F_1 = \frac{u_1 \cdot u_2 \cdot \det(A)}{2} = F_0 \cdot \det(A)$$

$$\Rightarrow \ F_1 = \mathrm{A}(F_0) = F_0 \cdot \det(A)$$

$\rightsquigarrow$ Bei der Abbildung durch eine Matrix A wird ein Flächeninhalt mit $\det(A)$ multipliziert.
• *A l'occasion d'une application par une matr. A la mesure d'une surface est multipliée avec* $\det(A)$.

5 Sei • *Soit* $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$, $(\vec{a}, \vec{b})$ = Parallelogramm mit Inhalt $F_0 = \det(\vec{a}, \vec{b})$
• $(\vec{a}, \vec{b})$ = *parallélogramme avec la surface ou le volume* $F_0 = \det(\vec{a}, \vec{b})$

Sei • *Soit* $\vec{a} \longmapsto \vec{c} = M \cdot \vec{a}$, $\vec{b} \longmapsto \vec{d} = M \cdot \vec{b}$, $F_0 = \det(\vec{a}, \vec{b}) \longmapsto F_1 = \det(\vec{c}, \vec{d})$, $F_0 \neq 0$

$\Rightarrow F_1 = \det(\vec{c}, \vec{d}) = \det(M) \cdot F_0 = \det(M) \cdot \det(\vec{a}, \vec{b}) \Rightarrow F_1 \neq 0$

Konsequenz: • *Conséquence:* $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$, $\vec{a} \longmapsto \vec{c} = M \cdot \vec{a}$, $\vec{b} \longmapsto \vec{d} = M \cdot \vec{b} \Rightarrow \vec{c} \not\parallel \vec{d}$.

$\rightsquigarrow$ d.h. nicht parallele Vektoren werden in nicht parallele Vektoren abgebildet.
• $\rightsquigarrow$ *ç.v.d. les images des vecteurs qui ne sont pas parallèles ne sont pas nun plus parallèles.*

6 $\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} \longmapsto M \cdot \vec{r} = M \cdot \vec{r}_0 + \lambda \cdot M \cdot \vec{a} + \mu \cdot M \cdot \vec{b} = \vec{s} = \vec{s}_0 + \lambda \cdot \vec{c} + \mu \cdot \vec{d}$, $\vec{a} \not\parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{c} \not\parallel \vec{d}$.

$\rightsquigarrow$ d.h. eine Ebene wird in eine Ebene abgebildet. • $\rightsquigarrow$ *ç.v.d. l'image d'un plan est aussi un plan.*

7 $\vec{a} = \overrightarrow{OA} \longmapsto M \cdot \vec{a} = M \cdot \overrightarrow{OA} = \vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB} \longmapsto M \cdot \vec{b} = M \cdot \overrightarrow{OB} = \vec{c} = \overrightarrow{OD}$, $A \neq B$,
$\vec{0} = \overrightarrow{OO} \longmapsto M \cdot \vec{0} = M \cdot \overrightarrow{OO} = \vec{0}$, $\vec{b} - \vec{a} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$

Sei • *Soit* $C = B \Rightarrow \vec{0} \neq \vec{b} - \vec{a} = \overrightarrow{AB} \longmapsto \vec{d} - \vec{c} = \overrightarrow{CD} = \vec{0}$
$\Rightarrow ((\vec{0} \longmapsto \vec{0}) \wedge (\vec{0} \neq \overrightarrow{AB} \longmapsto \vec{0})) \Rightarrow \det(M) = 0 \rightsquigarrow$ Widerspruch! • *Contradiction!*

$\rightsquigarrow$ Punkte (Ortsvektoren) werden eineindeutig auf (Ortsvektoren) abgebildet. Verschiedene Punkte haben verschiedene Bilder.
• *Les images des points (vecteurs de position) sont des points (vecteurs de position). Des points différents ont des images différentes.*

8 $F_0 = \det((\vec{e}_1, \vec{e}_2)) = \det(E) = 1 \cdot 1 = 1$

$F_1 = \det((\vec{a}_1, \vec{a}_2)) = \det(A)$

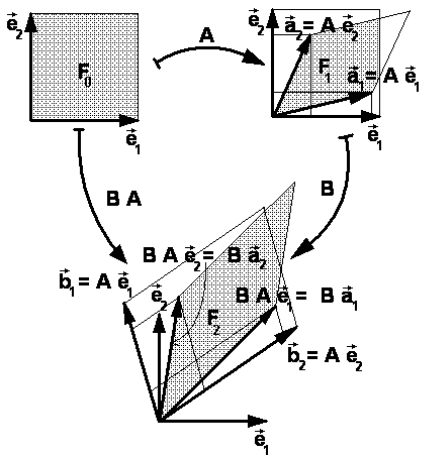
$F_2 = \det((\vec{b}_1, \vec{b}_2)) \cdot \det(A) = \det(B) \cdot \det(A) \wedge$

$F_2 = \det(B \cdot A)$

Konsequenz: • **Conséquence:**

Determinantenmultiplikationssatz
• **Théorème de la multiplication des déterminants**

$$\det(B) \cdot \det(A) = \det(B \cdot A)$$

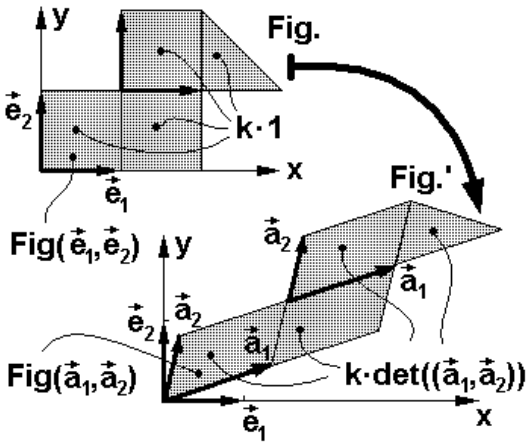


9 **Bemerkung:** • **Remarque:** Analoges kann man für die Dimension 3 herleiten und dann durch vollständige Induktion für die Dimension n.
• *On peut déduire analogiquement le théorème pour la dimension 3 et ensuite par l'induction complète pour la dimension n.*

10 **Konsequenz:** • **Conséquence:** $\det(A)\cdot\det(A^{-1}) = \det(E) \;\Rightarrow\; \det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

u.s.w • *etc.*

Neuer Beweis Det'mult'satz — Nouvelle preuve théor. mult. d. déterm.



$Fig(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n) \longmapsto Fig(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n)$

$\rightsquigarrow\; \det((\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)) \longmapsto \det((\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n)) \rightsquigarrow$

$k\cdot\det((\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)) \longmapsto k\cdot\det((\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n))$,
$(k\in\mathbb{Q})$ oder • *or* $(k_n\in\mathbb{Q},\;\; k_n\to k\in\mathbb{R})$

Es gilt: • *Il vaut:*
$k\cdot\det((\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)) = k\cdot\det(E) = k\cdot 1 = k$

Matrix: • *Matrice:* $A = ((\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n)) \rightsquigarrow$

$V(Fig.) = k\cdot 1 \longmapsto V(Fig.') = k\cdot\det(A)$

Andererseits: • *D'autre part:*

Sei $Fig. = B \rightsquigarrow$ B eine Matrix mit $\det(B) = k$ • *Soit* $Fig. = B \rightsquigarrow$ B *une matrice avec* $\det(B) = k$

$\rightsquigarrow\; B:\; E = (\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n) \longmapsto B = (\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_n), \qquad \det(E) = 1 \longmapsto k = \det(B) = \det((\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_n))$

$\rightsquigarrow\; A:\; E = (\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n) \longmapsto A = (\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n), \qquad \det(E) = 1 \longmapsto \det(A) = \det((\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n))$

Zusammen „symbolisch“ geschrieben: • *Ensemble, écrit "symboliquement":*

$$E \overset{B}{\longmapsto} Fig. = B\cdot E = B \overset{A}{\longmapsto} Fig.' = A\cdot(B\cdot E) = A\cdot B$$
$$\Rightarrow\; V(Fig.') = \det(A\cdot B) = k\cdot\det(A) = \det(B)\cdot\det(A)$$

$$\rightsquigarrow\quad \det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B) \qquad \text{q.e.d., ☺}$$

9.6.4 Lineare Abbildung und Basisabbildung — Application linéaire et application de base

Sei • *Soit* $M\in R_n$ (regulär • *regulier*). Sei • *Soit* $\vec{v}_k$ Bild von • *image de* $\vec{e}_k$: $\vec{e}_k \overset{\mathcal{M}}{\longmapsto} \vec{v}_k = M\cdot\vec{e}_k$

Detailierter: • *En detail:*

$$M\cdot\vec{e}_k = (\vec{m}_1,\ldots,\vec{m}_n)\cdot\vec{e}_k = \begin{pmatrix} m_{11} & \ldots & m_{1k} & \ldots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \ldots & m_{nk} & \ldots & m_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{1k} \\ \vdots \\ m_{nk} \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow\quad \vec{v}_k = M\cdot\vec{e}_k = \vec{m}_k \;\Rightarrow\; \vec{m}_k = \vec{v}_k \;\Rightarrow\; M = (\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n)$

Studiere nun: • *Etudie maintenant:*

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1\vec{e}_1 + \ldots + a_n\vec{e}_n \overset{M}{\longmapsto} M \cdot \vec{a} = M \cdot (a_1\vec{e}_1 + \ldots + a_n\vec{e}_n) = a_1 M\vec{e}_1 + \ldots + a_n M\vec{e}_n =$$
$$= a_1\vec{v}_1 + \ldots + a_n\vec{v}_n$$

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$M \in F_n, \;\; M \cdot \vec{e}_k = \vec{v}_k$

Beh.: • **Thè.:**

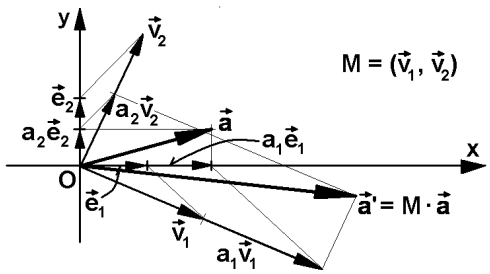
1 $\quad M = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$

2 $\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \longmapsto a_1\vec{v}_1 + \ldots + a_n\vec{v}_n$

Konsequenz: • **Conséquence:** $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + \ldots + a_n\vec{e}_n \longmapsto M \cdot \vec{a} = a_1\vec{v}_1 + \ldots + a_n\vec{v}_n$

Um $\vec{a}$ abzubilden genügt es somit, die Basisvektoren $\vec{e}_k$ durch deren Bilder $\vec{v}_k$ zu ersetzen. Die Abbildung wird auf die Basis reduziert. Es lassen sich daher auf diese Weise sehr rasch serienweise Bildpunkte rechnen. (Computergraphik!)
• *Pour appliquer $\vec{a}$ il suffit donc d'appliquer les vecteurs de base $\vec{e}_k$, ç.v.d. de les remplacer par leurs images $\vec{v}_k$. Ainsi l'application est réduite à la base. On peut donc calculer les points images très vite en série. (Graphique à l'ordinateur, "computergraphic"!)*

Bsp.: • **Exemple:**



Sei umgekehrt z.B. gegeben: • *D'autre part soit p.ex. donnè:* $(Dim = 2)$

$B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}, \;\; B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}, \;\; \vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_n\vec{e}_2 \longmapsto \vec{v} = M \cdot \vec{a} = a_1\,\vec{v}_1 + a_2\,\vec{v}_2 = (\vec{v})'$

M lässt sich dann sofort konstruieren: • *Maintenant on peut construire la matrice M de façon simple:*

$$\Rightarrow \; M = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$$

9.7 Gauss–Algorithmus mit Matrizen — Algorithme de Gauss avec des matrices

Wir wollen uns hier noch überlegen, wie man den Gauss–Algorithmus mit Hilfe der Matrizenrechnung auf einem Computer implementieren könnte. Dazu wollen wir zuerst nachweisen, dass der Gauss–Algorithmus äquivalent ist zur Faktorisierung $A = U \cdot L$. A ist die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems, L eine obere und U eine untere Dreiecksmatrix (LU–Zerlegung, Low, Up, manchmal auch LR–Zerlegung, Links, Rechts).
• *Ici, nous voulons encore réfléchir comment on pourrait implémenter l'algorithme de Gauss à l'aide du calcul matriciel pour pouvoir l'executer sur un ordinateur. Dans cette intention, nous voulons d'abord prouverque l'algorithme de Gauss est à la factorisation $A = U \cdot L$. A est la matrice des coefficients du système d'équations, L est une matrice triangulaire supérieure et R une telle matrice inférieure (décomposition, Low, Up, des fois aussi décomposition LR, Links, Rechts).*

Gleichungssystem: • *Système d'équations:* $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ mit • *avec* $A = U \cdot L$.

(L und U seien vorläufig gegeben. • *Supposons que L et U soient données.*

Sei • *Soit* $L \cdot \vec{x} = \vec{y} \;\Rightarrow\; U \cdot \vec{y} = U \cdot (L \cdot \vec{x}) = (U \cdot L) \cdot \vec{x} = A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

Konzept: • **Programme:**

Löse: • *Résoudre:*

1 U wird schrittweise durch Modellierung der Elementarsubstitutionen konstruiert.
• *On construit U pas à pas en modelant les substitutions élémentaires.*

2 $L \cdot U = A \;\Rightarrow\; L = A \cdot U^{-1}$. U ist Dreiecksmatrix. Daher ist U^{-1} einfach berechenbar.
• *U est une matrice triangulaire. C'est donc facile de calculer U^{-1}.*

3 $U \cdot \vec{y} = \vec{b} \;\Rightarrow\; \vec{y} = \ldots$ (vorwärts einsetzen) • *(insérer direction en avant)*

4 $L \cdot \vec{x} = \vec{y} \;\Rightarrow\; \vec{x} = \ldots$ (rückwärts einsetzen) • *(insérer direction en arrière)*

5 Exakte Ausführungen zum Thema siehe **Anhang** sowie .nb–Programm:
• *Informations auxiliaires voir* **annexe** *et programme .nb:*

http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Zusatz/LU_Zerlegungen.pdf
http://rowicus.ch/Wir/MathematicaPackages/LU_Zerlegungen.nb

Bsp.: • **Exemple:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Konstruktion von L: • *Construction de L:*

$$L_1 = E - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\; A_1 = L_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -13 \end{pmatrix}$$

$$L_2 = E - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ L = L_2 \cdot A_1 = L_2 \cdot L_1 \cdot A = (L_2 \cdot L_1) \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$A = U \cdot L \ \Rightarrow\ U = A \cdot L^{-1} \rightsquigarrow$ Konstruktion von L^{-1}: • *Construction de L^{-1}:*

$$L^{-1} : \rightsquigarrow \quad L \cdot L^{-1} = E \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow\ L^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{5}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow\ A = U \cdot L \ \Rightarrow\ U = A \cdot L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{5}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U^{-1} : \rightsquigarrow \quad U \cdot U^{-1} = E \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow\ U^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Sei • *Soit* $A \cdot \vec{x} = (U \cdot L) \cdot \vec{x} = \vec{b}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \vec{b} = L^{-1} \cdot (U^{-1} \cdot \vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{5}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{5}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{43}{7} \\ -\frac{47}{7} \\ \frac{24}{7} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ \vec{x} = L^{-1} \cdot (U^{-1} \cdot \vec{b}) = \begin{pmatrix} \frac{43}{7} \\ -\frac{47}{7} \\ \frac{24}{7} \end{pmatrix}$$

Bemerkung: • **Remarque:** Bei diesem Verfahren wurde nur die Matrixmultiplikation sowie lineare Gleichungen mit einer Unbekannten bei der Konstruktion der Matrizen. • *Pendent l'application de cette méthode, nous avons utilisé que la multiplication de matrice ainsi que les équations linéaires avec une inconnue pour la construction des matrices.*

9.8 Iterative Berechnung der Inversen — Calcul itératif de l'inverse

9.8.1 Methode — Méthode

Geg.: • **Donné:** $A \cdot \vec{x} = \vec{b} \ \Rightarrow\ \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$

Ges.: • **Trouver:** $A^{-1} \approx ?$ $E = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) = A \cdot A^{-1} = A \cdot (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) \Rightarrow A \cdot \vec{x}_k = \vec{e}_k$

Methode: • **Méthode:**

Wähle: • *Choisir:* $A = D - P,\ D = A + P,$
D leicht invertiertbar, z.B. Diagonalmatrix. • *D facilement à invertir, p.ex. matrice diagonale.*

$\rightsquigarrow A \cdot \vec{x} = \vec{b} = (D - P) \cdot \vec{x} = D \cdot \vec{x} - P \cdot \vec{x} \Rightarrow D \cdot \vec{x} = \vec{b} + P \cdot \vec{x} \Rightarrow \vec{x} = D^{-1} \cdot (\vec{b} + P \cdot \vec{x})$
$\rightsquigarrow$ Iteration! • *itération!* $\vec{x}_{k+1} = D^{-1} \cdot (\vec{b} + P \cdot \vec{x}_k)$

Algorithmus: — **Algorithme:**

1 Schätze den Startwert $\vec{x}_0$. • *Estimer la valeur initiale $\vec{x}_0$.*

2 Iteration: • *itération:* $\vec{x}_{k+1} = D^{-1} \cdot P \cdot \vec{x}_k + D^{-1} \cdot \vec{b},\ X_{k+1} = D^{-1} \cdot P \cdot X_k + D^{-1} \cdot E$

3 Analogie: • *Analogiquement:* $y = a \cdot x + b \Rightarrow y_{k+1} = a \cdot x_k + b,\ x_{k+1} = y_{k+1},\ x_0 = c$

Bsp.: • **Exemple:** Sei • *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 1 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A^{-1} \approx \begin{pmatrix} 1.04356 & -0.217804 & 0.045454 & -0.00947 & 0.001893 \\ -0.217804 & 1.089015 & -0.227273 & 0.047348 & -0.00947 \\ 0.045454 & -0.227273 & 1.090909 & -0.227273 & 0.045454 \\ -0.00947 & 0.047348 & -0.227273 & 1.089015 & -0.217804 \\ 0.001893 & -0.00947 & 0.045454 & -0.217804 & 1.04356 \end{pmatrix} \text{(Progr.)}$$

Iteration, 20 Schritte: • *Itération, 20 étapes:*

$$X_{20} = \begin{pmatrix} 1.04356 & -0.217804 & 0.045454 & -0.00947 & 0.001893 \\ -0.217804 & 1.089015 & -0.227273 & 0.047348 & -0.00947 \\ 0.045454 & -0.227273 & 1.090909 & -0.227273 & 0.045454 \\ -0.00947 & 0.047348 & -0.227273 & 1.0890145 & -0.217804 \\ 0.001893 & -0.00947 & 0.045454 & -0.217804 & 1.04356 \end{pmatrix}$$

Die einzelnen Schritte können hier aus Platzgründen nicht wiedergegeben werden.
• *Par raison de place, on ne peut pas représenter ici toutes les étapes.*

Bsp.: • **Exemple:** (Nur eine Spalte.) • *(Seulement une colonne.)*

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resultat (20 Schritte): • **Résultat** *(20 étapes):*

$$\begin{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1. \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1. \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1. \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1. \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} -0.142857 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.375 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0. \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1. \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0.035714 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -0.303571 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.069444 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.8 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0.229592 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -0.219246 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.189286 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.813889 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0.205499 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -0.116582 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.17683 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.837857 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0.176166 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -0.12873 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.160096 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.835366 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0.179637 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -0.143914 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.162 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.832019 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0.183975 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -0.142136 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.164431 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.8324 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0.183467 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -0.139902 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.164148 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.832886 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0.182829 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -0.140163 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.163792 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.83283 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0.182904 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -0.140491 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.163834 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.832758 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0.182997 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -0.140453 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.163886 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.832767 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0.182986 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -0.140404 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.16388 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.832777 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0.182973 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -0.14041 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.163872 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.832776 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0.182974 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -0.140417 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.163873 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.832774 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0.182976 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -0.140416 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.163874 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.832775 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0.182976 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -0.140415 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.163874 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.832775 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0.182976 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -0.140415 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.163874 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.832775 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0.182976 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -0.140416 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.163874 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.832775 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0.182976 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -0.140416 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.163874 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.832775 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0.182976 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -0.140416 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.163874 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0.832775 \end{pmatrix}
\end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_{16} = \begin{pmatrix} \frac{40361401822776048473}{220582915793352000000} \\ -\frac{3441468719471965 5413}{2450921286592800000000} \\ \frac{464757837087275827409}{2836066060200240000000} \\ \frac{7289520032087024773 7}{8753290309260000000 0} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.182976 \\ -0.140415 \\ 0.163874 \\ 0.832775 \end{pmatrix}$$

Exaktes Resultat: • **Résultat exact:**

$$\begin{pmatrix} \frac{273}{1492} \\ -\frac{419}{2984} \\ \frac{489}{2984} \\ \frac{2485}{2984} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.18297587131367293 \\ -0.14041554959785524 \\ 0.1638739946380697 \\ 0.832774798927614 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: • **Remarque:**

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}_{14} = \begin{pmatrix} 0.182976 \\ -0.140415 \\ 0.163874 \\ 0.832775 \end{pmatrix}$$

9.8.2 Rahmen der Methode — Cadre de la méthode

Voraussetzungen, Matrixnorm — Conditions, norme d'une matrice

Geg.: • **Donné:**

Sei • *Soit* $A \cdot \vec{x}_k = \vec{e}_k$, $\det(A) \neq 0$ (A regulär.) • *(A régulière.)* $\rightsquigarrow$ $\exists_{A^{-1}}$: $\vec{x}_k = A^{-1} \cdot \vec{e}_k$
$\rightsquigarrow$ $\vec{x}_k$ eindeutig • *univoque,* $A^{-1} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$

Zudem sei $\det(D) \neq 0$ • *En outre soit* $\det(D) \neq 0$ $\rightsquigarrow$ $\exists_{D^{-1}}$, $(\forall_i\ d_{ii} \neq 0 \Leftrightarrow \det(D) \neq 0)$

Vorerst brauchen wir doch den Begriff der L^2–**Norm:**
• *D'abord on a encore besoin de la notion* **norme** L^2

Definition: • **Définition:** $||A||_2 = ||(a_{i,k})||_2 = \sqrt{\sum_{i,j} a_{i,k}^2}$

heisst L^2–**Norm** von A. • *s'appelle* **norme** L^2 *de* A.

Bsp.: • **Exemple:** $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \Rightarrow ||A||_2 = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2+i^2}$

Es gilt der Satz: • *Le théorème suivant est valable:*

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$||D^{-1} \cdot P||_2 < 1$$

Beh.: • **Thè.:**

Die Iteration konvergiert. • *L'itération converge.*

Bsp.: • **Exemple:** $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow D^{-1} \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{7} & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{9} & 0 & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow ||D^{-1} \cdot P||_2 \approx 0.38648604812295\ldots < 1$$

Brauchbarkeit — Utilité

Brauchbar ist das Verfahren für sehr grosse reguläre Matrizen mit Diagonalelementen $\neq 0$, welche schwach besetzt sind und die Hauptlast in der Diagonale aufweisen. Beispiel: Bandmatrizen (z.B. numerische Behandlung von Differentialgleichungen). Das Verfahren ist nicht sehr empfindlich gegenüber von Rundungen. Jedoch ist die Konvergenz oft langsam.
• *La méthode est utilisable pour les matrices régulières et très grandes avec les éléments diagonaux* $\neq 0$. *Ça veut dire des matrices qui sont qui ont peux de valeurs* $\neq 0$, *mais qui ont des valeurs grandes dans la diagonale. Exemple des matrices qui ont la forme d'un ruban (par exemple pour le traitement numérique d'équation différentielles). La méthode n'est pas très sensible vis-à-vis des arrondissements. Cependant la convergence est souvent lente.*

Der Aufwand hält sich bei diesem Verfahren in Grenzen: Pro Schlaufe max. $2\,n^2$ Multiplikationen.
• *Avec cette méthode, la dépense de temps est limitée: Il y a au maximum* $2\,n^2$ *multiplications par boucle.*

9.8.3 Jacobi–Verfahren für Gleichungssysteme — Méthode de Jacobi pour des systèmes d'équations

Idee — Idée

$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \;\Rightarrow\; A \cdot \vec{x} + \vec{x} = \vec{b} + \vec{x} = \vec{b} + E \cdot \vec{x} \;\Rightarrow\; \vec{x} = \vec{b} + E \cdot \vec{x} - A \cdot \vec{x} = \vec{b} - (A - E) \cdot \vec{x}$

$$\Rightarrow \vec{x} = \vec{b} - (A - E) \cdot \vec{x}$$

Versuche damit eine Iteration: • *Essayer avec cette équation une itération:*

$$\Rightarrow \ \vec{x}_{k+1} = \vec{b} - (A - E) \cdot \vec{x}_k$$

Start: • *Au début:* $\vec{x}_0 = \vec{c}$

Durchführung — Exécution

Notwendig: **Normierung der Diagonalen**. • *Nécessaire:* **Normalisation de la diagonale**.

Bsp.: • **Exemple:**

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{7} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{8} & 1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 1 & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Bsp.: • **Exemple:**

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 1 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Resultat: • *Résultat:* $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0.156015 \\ -0.026316 \\ 0.101504 \\ -0.240602 \\ 0.429574 \end{pmatrix}$

Iteration: • *Itération:*

$$\begin{pmatrix} 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 1. & 0.142857 & -0.25 & 0. & -0.2 & 0.333333 \\ 2. & 0.267857 & -0.107143 & 0.13 & -0.2 & 0.413333 \\ 3. & 0.196429 & 0.104524 & 0.101429 & -0.252 & 0.413333 \\ 4. & 0.090595 & 0.014048 & 0.079895 & -0.240571 & 0.434133 \\ 5. & 0.135833 & -0.106141 & 0.093419 & -0.231958 & 0.429562 \\ 6. & 0.195928 & -0.051887 & 0.114011 & -0.237368 & 0.426117 \\ 7. & 0.168801 & 0.021935 & 0.105325 & -0.245605 & 0.42828 \\ 8. & 0.131889 & -0.010983 & 0.093855 & -0.24213 & 0.431575 \\ 9. & 0.148349 & -0.055541 & 0.099048 & -0.237542 & 0.430185 \\ 10. & 0.170628 & -0.035619 & 0.106125 & -0.239619 & 0.42835 \\ 11. & 0.160667 & -0.008623 & 0.102972 & -0.24245 & 0.429181 \\ 12. & 0.147168 & -0.020686 & 0.098704 & -0.241189 & 0.430313 \\ 13. & 0.1532 & -0.037029 & 0.100613 & -0.239482 & 0.429809 \\ 14. & 0.161371 & -0.029725 & 0.103198 & -0.240245 & 0.429126 \\ 15. & 0.15772 & -0.01983 & 0.102043 & -0.241279 & 0.429431 \\ 16. & 0.152772 & -0.024252 & 0.100478 & -0.240817 & 0.429845 \\ 17. & 0.154983 & -0.030243 & 0.101177 & -0.240191 & 0.42966 \\ 18. & 0.157979 & -0.027566 & 0.102125 & -0.240471 & 0.42941 \\ 19. & 0.15664 & -0.023938 & 0.101701 & -0.24085 & 0.429522 \\ 20. & 0.154826 & -0.025559 & 0.101128 & -0.240681 & 0.429673 \end{pmatrix}$$

Hinreichende Bedingungen für die Konvergenz
• Conditions suffisantes pour la convergence:

Vor.: • **Hyp.:**

Die Diagonale der Matrix ist normiert.
• *La Diagonale de la matrice est normalisée.*

Beh.: • **Thè.:**

1 $\forall_i \sum_k |a_{i,k}| < 2$ resp. • *resp.* $\forall_k \sum_i |a_{i,k}| < 2$

2 $\forall\ (a_{i,i+1} \neq 0 \ \wedge\ a_{j+1,j} \neq 0)$:
$(\forall_i \sum_k |a_{i,k}| \leq 2 \ \wedge\ \exists_i : \sum_k |a_{i,k}| < 2)$
$\vee\ (\forall_k \sum_i |a_{i,k}| \leq 2 \ \wedge\ \exists_k : \sum_i |a_{i,k}| < 2)$

9.8.4 Jacobi–Verfahren, inverse Matrix — Méthode de Jacobi, matrice inverse

Approximiere die Inverse der Bandmatrix A mit der Jacobi-Metode (Iteration). Statt ein einziges Gleichungssystem sind hier mehrere simultan zu behandeln.
• *Approcher l'inverse de la matrice A qui a la forme "de bande"à l'aide de la méthode de Jacobi (itération). Au lieu de résoudre un seul système d'équations on a ici plusieurs qu'on traiter simultanément.*
Idee: • *Idée:*

$$A^{-1} = E - (A - E) \cdot A^{-1} \ \Rightarrow\ A_{n+1}^{-1} \approx E - (A - E) \cdot A_n^{-1}$$

Sei • *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 1 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 1 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}$$

Man findet nach 6 Schritten: • *On trouve après* 6 *étapes:*

$$A_7^{-1} \approx \begin{pmatrix} 1.02084 & -0.10419 & 0.01064 & -0.00107 & 0.00012 & -0.000001 \\ -0.20837 & 1.04212 & -0.10634 & 0.01087 & -0.00108 & 0.00013 \\ 0.04256 & -0.21267 & 1.04257 & -0.10636 & 0.01089 & -0.00104 \\ -0.00858 & 0.04344 & -0.21274 & 1.04258 & -0.10635 & 0.01067 \\ 0.00179 & -0.00873 & 0.04345 & -0.21266 & 1.04215 & -0.10415 \\ -0.00027 & 0.00178 & -0.00859 & 0.04256 & -0.20836 & 1.02087 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} \approx \begin{pmatrix} 1.02084 & -0.10421 & 0.01064 & -0.00109 & 0.00011 & -0.00001 \\ -0.20842 & 1.04212 & -0.10638 & 0.010860 & -0.00111 & 0.00011 \\ 0.04255 & -0.21277 & 1.04256 & -0.10643 & 0.01086 & -0.00109 \\ -0.00869 & 0.04344 & -0.21286 & 1.04256 & -0.10638 & 0.01064 \\ 0.00177 & -0.00887 & 0.04344 & -0.21277 & 1.04219 & -0.104212 \\ -0.00035 & 0.00177 & -0.00869 & 0.04255 & -0.20842 & 1.02084 \end{pmatrix}$$

9.9 D'Gl und Differenzenmethode — Equation différentielle et méthode d'équations aux différences

Bsp.: • **Exemple:**

Wir betrachten die folgende Differentialgleichung (Randwertproblem):
• *Nous étudions l'équation différentielle suivante (problème de valeur aux limites):*

$$3\,y''(x) - 5\,y'(x) + y(x) + 2\,x = 0,\;\; a = 0,\;\; b = 10,\;\; y(a) = -2; y(b) = 5;$$

Nun diskretisieren wir das Problem indem wir das Intervall $I = [a, b]$ in n Teile gleicher Länge h teilen (Teilpunkte x_k).
• *Maintenant nous discrétisons le problème en partageant l'intervalle $I = [a, b]$ en n segment de longueur h égale (points de section x_k).*

$$\rightsquigarrow\;\; x_0 = a,\;\; x_n = b,\;\; h = \frac{b-a}{n},\;\; x_k = a = k \cdot h$$

Nun ersetzen wir die Differentialquotienten durch die Differenzenquotienten:
• *Maintenant nous remplaçons les quotients différentiels par les quotients des différences:*

$$y'(x_k) \approx \frac{y(x_k) - y(x_{k-1})}{h},\;\; y''(x_k) \approx \frac{y'(x_{k+1}) - y'(x_k)}{h} = \frac{y_{k+1} - 2\,y_k + y_{k-1}}{h^2}$$

$$\frac{2\,x_k\,h^2 + (5\,h+3)\,y_{k-1} + \left(h^2 - 5\,h - 6\right)\,y_k + 3\,y_{k+1}}{h^2} = 0,$$

$$\Rightarrow\;\; \frac{(5\,h+3)\,y_{k-1} + \left(h^2 - 5\,h - 6\right)\,y_k + 3\,y_{k+1}}{h^2} = -2\,x_k$$

Wir studieren zuerst das Beispiel mit $n = 11$. $y_0 = y(x_0) = y(a)$ und $y_{11} = y(x_{11} = y(b))$ sind gegeben. Daher müssen noch $y_1, y_2, \ldots, y_{10}$ berechnet werden. Dazu verwenden wir obige Gleichungen. Diese ergeben ein System:
• *Nous étudions d'abord l'exemple avec $n = 11$. $y_0 = y(x_0) = y(a)$ et $y_{11} = y(x_{11} = y(b))$ sont données. Par conséquent il faut encore callculer $y_1, y_2, \ldots, y_{10}$. Dans cette intention nous utilisons les équations mentionnées en haut. Celles–ci forment un système:*

$$\begin{aligned}
\frac{(5\,h+3)\,y_0 + \left(h^2 - 5\,h - 6\right)\,y_1 + 3\,y_2}{h^2} &= -2\,x_1 \\
&\vdots \\
\frac{(5\,h+3)\,y_{k-1} + \left(h^2 - 5\,h - 6\right)\,y_k + 3\,y_{k+1}}{h^2} &= -2\,x_k \\
&\vdots \\
\frac{(5\,h+3)\,y_9 + \left(h^2 - 5\,h - 6\right)\,y_{10} + 3\,y_{11}}{h^2} &= -2\,x_{10}
\end{aligned}$$

Wie man sieht, kommen in jeder Zeile immer nur drei der Unbekannten y_k vor. Daher ist die Koeffizientenmatrix eine Bandmatrix, die nur in drei Diagonalen, der Hauptdiagonale und den beiden Nebendiagonalen, besetzt ist. Gleichungssysteme mit solchen Matrixen sind einfach lösbar.
• *Comme on voit, dans chaque ligne il y a seulement trois inconnus y_k. Par conséquent la matrice des*

coefficients est une matrice de bande qui a les éléments $\neq 0$ seulement dans trois diagonales, la diagonale principale et les deux diagonales secondaires voisines. Les systèmes d'équation avec les telles matrices sont résolubles de façon simple.

Bemerkung: • **Remarque:** Falls die D'Gl nicht linear ist, kann man die Matrizenmethode nicht ohne weiteres anwenden. Man muss sich dann überlegen, ob man die Gleichung eventuell z.B. mit Hilfe einer Potenzreihenentwicklung linearisieren könnte.
• *Si l'éq. diff. n'est pas linéaire, on ne peut pas utiliser la méthode de matrice sans d'autres méthodes, cela ne va pas aussi facilement. Il faut donc réfléchir si éventuellement on pourrait par exemple linéariser l'équation à l'aide d'un série de puissances.*

Resultat der Berechnung: • *Résultat le calcul:*

$$M \cdot \vec{y} = \vec{b} \;\Rightarrow\; M \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18086 \\ 4000 \\ 6000 \\ 8000 \\ 10000 \\ 12000 \\ 14000 \\ 16000 \\ 18000 \\ 39965 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 12936 & -3993 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10043 & -12936 & 3993 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10043 & -12936 & 3993 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10043 & -12936 & 3993 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10043 & -12936 & 3993 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10043 & -12936 & 3993 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10043 & -12936 & 3993 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10043 & -12936 & 3993 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10043 & -12936 & 3993 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10043 & -12936 \end{pmatrix}$$

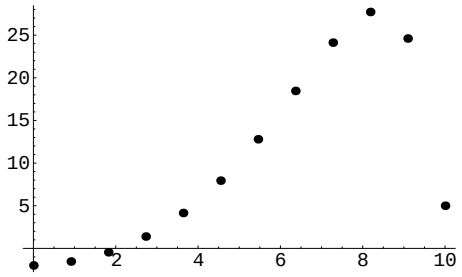
Exakte Lösung: • *Solution exacte:*

$$y(x) =$$

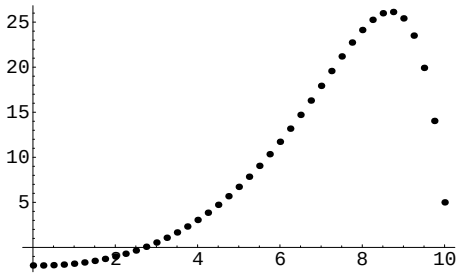
$$\frac{e^{-\frac{1}{6}(-5+\sqrt{13})x}\left(2e^{\frac{1}{6}((-5+\sqrt{13})x+50)}(x+5)-2e^{\frac{1}{6}((-5+\sqrt{13})x+20\sqrt{13}+50)}(x+5)+35e^{\frac{1}{3}\sqrt{13}(x+5)}-8e^{\frac{1}{3}(\sqrt{13}x+25)}+8e^{\frac{5}{3}(5+2\sqrt{13})}-35e^{\frac{5\sqrt{13}}{3}}\right)}{-e^{25/3}+e^{\frac{5}{3}(5+2\sqrt{13})}}$$

$$\approx -2\,x + 8.00002759115\,e^{0.2324081207560\,x} - 0.0000275911538341\,e^{1.43425854591\,x} - 10$$

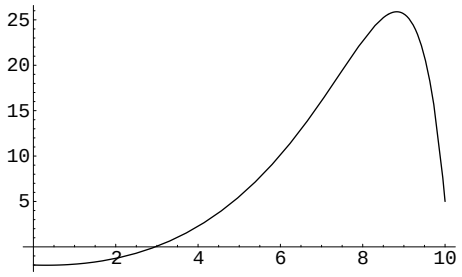
In den nachstehenden Diagrammen sind die Resultate der Berechnung für $n = 11,\ n = 40$ dem exakten Resultat gegenübergestellt:
• *Dans les diagrammes suivants, on voit la comparaison des résultats du calcul pour $n = 11,\ n = 40$ et du résultat exact:*



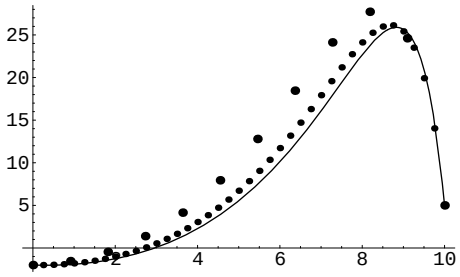
12 Punkte, $n = 11$ • *12 points,* $n = 11$



41 Punkte, $n = 40$ • *41 points,* $n = 40$



Exakte Lösung • *Solution exacte*



Alles zusammen • *Tout ensemble*

Kapitel • Chapitre 10

Eigenwertprobleme — Problèmes des valeurs propres

10.1 Eigenwerte, Eigenvektoren — Valeurs propres, vecteurs propres

Formulierung des Eigenwertproblems (*EWP'PVP*) mit Matrizen:
• Formuler le problème des valeurs propres (*EWP'PVP*) à l'aide de matrices:

Gegeben: Matrix A. Gesucht: Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}, \mathbb{C}; \ldots$ und Vektoren $\vec{x} \neq \vec{0}$, sodass gilt: $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$.
• *Donné: Matrice A. Trouver: Nombres $\lambda \in \mathbb{R}, \mathbb{C}, \ldots$ et vecteurs $\vec{x} \neq \vec{0}$ tels qu'il vaut: $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$.*

Definition: **• Définition:**

In $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$ heisst λ **Eigenwert** (EW) und $\vec{x} \neq \vec{0}$ **Eigenvektor** (EV).
• *Dans $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$ λ s'appelle* **valeur propre** *(EW) et $\vec{x} \neq \vec{0}$ s'appelle* **vecteur propre** *(EV).*

Bemerkung: **• Remarque:**

1 $\vec{x} = \vec{0}$ ist immer Lösung von $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \rightsquigarrow$ $\vec{0}$ nicht als Lösung interessant
• *est toujours solution de • n'intéresse pas comme solution.*

2 Mit $\vec{x}$ ist auch $\lambda \cdot \vec{x}$ Eigenvektor. • *Si $\vec{x}$ est vecteur propre $\lambda \cdot \vec{x}$ aussi est vecteur propre.*

3 $\vec{x} \xmapsto{\mathcal{A}} \lambda \cdot \vec{x} = A \cdot \vec{x}$ bedeutet, dass $\vec{x}$ durch $\mathcal{A}$ in $\lambda \cdot \vec{x}$ gestreckt wird • *signifie que par $\mathcal{A}$ $\vec{x}$ est appliqué (allongé) sur $\lambda \cdot \vec{x}$.*
$\rightsquigarrow$ Invarianz der Richtung!
• *Direction ne change pas!*

Verallgemeinerung des Eigenwertproblems:
• Généralisation du problème de la valeur propre:

Gegeben: Funktion oder Operator f. Gesucht: Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}, \mathbb{C}; \ldots$ und Vektoren oder Funktionen $\vec{x} \neq \vec{0}$, sodass gilt: $f(\vec{x}) = \lambda \cdot \vec{x}$.
• **Donné:** *Fonctions ou opérateurs f. Trouver: Nombres $\lambda \in \mathbb{R}, \mathbb{C}, \ldots$ et vecteurs ou fonctions $\vec{x} \neq \vec{0}$ tels qu'il vaut: $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$.*

Beispiele: • **Exemples:**

1 $A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \quad \begin{array}{rcll} x_1 + x_2 & = & \lambda \cdot x_1 & (I) \\ x_2 & = & \lambda \cdot x_2 & (II) \end{array}$

Sei • *Soit* $\lambda = 0 \Rightarrow (II): \ x_2 = 0 \Rightarrow (I): \ x_1 = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$
$\rightsquigarrow$ Widerspruch! • *Contradiction!*

Sei • *Soit* $\lambda \neq 1, \quad \Rightarrow (I): \ x_2 = (\lambda - 1) \cdot x_1$

Sei • *Soit* $\lambda \neq 1 \Rightarrow (II): \ x_2 = 0 \Rightarrow (I): \ x_1 = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$
$\rightsquigarrow$ Widerspruch! • *Contradiction!*

$\rightsquigarrow \quad \lambda = 1 \Rightarrow (I): \ x_2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ k \neq 0$ beliebig • *quelconque.*

2 $A \cdot \vec{x} = D_\varphi \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \vec{x}$
$\rightsquigarrow$ Dieses Problem (Drehung um φ) hat aus geometrischen Gründen für $\varphi \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$ keine Lösung $\vec{x} \neq \vec{0}$, denn es gilt dann $D_\varphi \cdot \vec{x} \not\parallel \vec{x}$. • *Ce problème (révolution par φ) n'a, pour des raisons géométriques, pas de solutions $\vec{x} \neq \vec{0}$ pour $\varphi \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$, car là il vaut $D_\varphi \cdot \vec{x} \not\parallel \vec{x}$.*

10.2 Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren — Calcul de valeurs propres et vecteurs propres

10.2.1 Charakteristisches Polynom — Polynôme charactéristique

Problem: • **Problème:**

Gesucht ist ein Algorithmus zur Bestimmung von λ und $\vec{x}$. • *On aimerait trouver un algorithme pour calculer λ et $\vec{x}$.*

$A \cdot \vec{x} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$ ist ein nichtlineares Gleichungssystem mit $n+1$ Unbekannten $x_1, \ldots, x_n, \lambda$ • *est un système d'équations non–linéaire à $n+1$ inconnues $x_1, \ldots, x_n, \lambda$.*

Studiere: • *Etudie:*

$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \Leftrightarrow \underbrace{(A - \lambda E)}_{M_\lambda} \cdot \vec{x} = M_\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0}, \ \vec{x} \neq \vec{0} \rightsquigarrow \quad \vec{x} \xmapsto{M_\lambda} M_\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0} \rightsquigarrow \ \vec{x} \in Kern(M_\lambda)$

$''Kern'' \rightsquigarrow$ **Kern** • **noyeau:**

$Kern(\mathcal{M}) = \{\vec{x} \mid \mathcal{M}(\vec{x}) = \vec{0}\}$ (vgl. Regularität von Matrizen • *voir réguliarité de matrices.*)

Wenn λ bekannt ist, haben wir mit $M_\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0}$ ein homogenes lineares Gleichungssystem für $\vec{x}$ gegeben, das eine Lösung $\vec{x} \neq \vec{0}$ (Eigenvektor) haben soll. • *Si λ est connu, alors on a par $M_\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0}$ un système*

d'équations homogène linéaire qui doit donc avoir une solution $\vec{x} \neq \vec{0}$ (vecteur propre).

$\rightsquigarrow$ $Dim(\mathbb{L}) > 0 \;\Rightarrow\; Rang(M_\lambda) < Ord(Syst) \;\Rightarrow\; M_\lambda \notin R_n$: M_λ kann nicht regulär sein
• M_λ *ne peut pas être régulier*: $\det(M_\lambda) = \det(A - \lambda E) = 0$.

Konsequenz: Eine Lösung $\vec{x} \neq \vec{0}$ existiert somit genau dann, wenn gilt: $\det(M_\lambda) = 0$.
• **Conséquence:** *Une solution $\vec{x} \neq \vec{0}$ existe exactement quand* $\det(M_\lambda) = 0$.

Daher definiert man: • *C'est pourquoi on définit:*

Definition: • **Définition:** $P_n(\lambda) := \det(M_\lambda) = \det(A - \lambda E)$
heisst **charakteristisches Polynom von** A
• *s'appelle* **polynôme charactéristique** *de* A.

Nach dem Entwicklungssatz gilt: • *Selon le théorème du développement on déduit:*

Lemma: • **Lemme:** **Vor.:** • **Hyp.:** $A \in M_{n,n}$

Beh.: • **Thè.:**

$P_\lambda = \det(A - \lambda E)$ ist Polynom vom Grade n • *est polynôme du degré* n.

$\rightsquigarrow$

Satz: • **Théorème:** Das *EWP'PVP* $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$ hat eine Lösung $\vec{x} \neq \vec{0}$
• *L' EWP'PVP* $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$ *a une solution* $\vec{x} \neq \vec{0}$
$\Leftrightarrow P_\lambda = \det(A - \lambda E) = 0$

Ein Polynom vom Grade n hat maximal n verschiedene Nullstellen. Daher gilt:
• *Un polynôme du degré* n *possède au maximum* n *zéros. C'est pourquoi on constate:*

Korollar: • **Corollaire:** **Vor.:** • **Hyp.:** $A \in M_{n,n}$

Beh.: • **Thè.:**

A besitzt maximal n Eigenwerte.
• A *possède au maximum* n *valeurs propres.*

Es gilt: • *On constate:* $\vec{x} = EV \;\Rightarrow\; t \cdot \vec{x} = EV\,,\; t \neq 0$.

$\rightsquigarrow$ Gerade • *Droite* $\{\vec{x} = t\vec{x}_0 \mid t \in \mathbb{R}\} = \{EV\}$ geht durch die Abbildung $\mathcal{A}$ in sich selbst über, dies jedoch allgemein nicht punktweise • *est appliqué sous l'application* $\mathcal{A}$ *sur soi- même, mais généralement pas point par point.* $(\vec{x} \longmapsto A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \parallel \vec{x})$

$\rightsquigarrow$ Eine derartige Gerade durch den Ursprung, die bei der Abbildung $\mathcal{A}$ fix bleibt, nennen wir **Fixgerade**. • *Une telle droite à travers l'origine qui reste fixe sous l'application* $\mathcal{A}$*, s'appelle* **droite fixe**.

Bsp.: • **Exemple:**

(a) Eigenwerte • *Valeurs propres*:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}. \; P(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 \cdot 1 = 0$$

$$\Rightarrow \; P(\lambda) = 12 - 7\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

$$\Rightarrow \; \lambda_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} \; \Rightarrow \; \lambda_1 = 5, \;\; \lambda_2 = 2$$

(b) Eigenvektoren • *Vecteurs propres*:

$\underline{\lambda_2 = 2}$: $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{aligned} 4x_1 + x_2 &= 2x_1 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 2x_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Dieses homogene Problem hat eine Lösung: • *Ce problème homogène a une solution:*

$\vec{x} \neq 0, \;\; Dim(\mathbb{L}) = 1 \rightsquigarrow$ Wähle als Parameter: • *Choisis comme paramètre:*

$t := x_1 \;\Rightarrow\; x_2 = -2t \;\Rightarrow\; \vec{x}(t) = \binom{t}{-2t} = t\binom{1}{-2} \rightsquigarrow$ Fixgerade • *Droite fixe.*

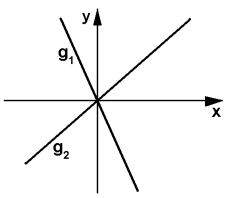
$\underline{\lambda_1 = 5}$: $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{aligned} 4x_1 + x_2 &= 5x_1 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 5x_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Dieses homogene Problem hat eine Lösung: • *Ce problème homogène a une solution:*

$\vec{x} \neq 0, \;\; Dim(\mathbb{L}) = 1 \rightsquigarrow$ Wähle als Parameter: • *Choisis comme paramètre:*

$t := x_1 \;\Rightarrow\; x_2 = t \;\Rightarrow\; \vec{x}(t) = \binom{t}{t} = t\binom{1}{1} \rightsquigarrow$ Fixgerade • *Droite fixe.*



Über den Winkel zwischen den Fixgeraden lässt sich hier keine allgemeine Aussage machen. • *Ici il n'est pas possible de déduire un rapport général concernant l'angle entre les droites fixes.*

10.2.2 Eigenwerte und Eigenvektoren der Inversen Matrix — Valeurs propres et vecteurs propres de la matrice inverse

Sei • *Soit* $A \in R_n, \;\; A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$ (*EWP'PVP*) $\Leftrightarrow A^{-1} \cdot (A \cdot \vec{x}) = A^{-1} \cdot (\lambda \cdot \vec{x})$

$\Leftrightarrow E \cdot \vec{x} = \lambda \cdot (A^{-1} \cdot \vec{x}) \;\Leftrightarrow A^{-1} \cdot \vec{x} = \dfrac{1}{\lambda} \cdot \vec{x} = \lambda^{-1} \cdot \vec{x} \rightsquigarrow$

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:** $A \in R_n$

Beh.: • **Thè.:**

λ *EW* zu • *EW à* A $\Leftrightarrow \lambda^{-1}$ *EW* zu • *EW à* A^{-1}

$\vec{x}$ *EV* zu • *EV à* λ $\Leftrightarrow \vec{x}$ *EV* zu • *EV à* λ

Bsp.: • **Exemple:**

EW : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = +1,$

$\det(A^{-1} - \mu E) = \begin{vmatrix} 1-\mu & -1 \\ 0 & 1-\mu \end{vmatrix} = (1-\mu)^2 = 0 \;\Rightarrow\; \mu_{1,2} = +1 = \dfrac{1}{\lambda}$

EV : $A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{aligned} x_1 + x_2 &= x_1 \\ x_2 &= x_2 \end{aligned}$

$\Rightarrow\; x_2 = 0,\; x_1 := t =$ Parameter • *paramètre.* $\rightsquigarrow$ $EV:\; \vec{x}(t) = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ebenso für: • *De même pour:*

$A^{-1} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{aligned} x_1 - x_2 &= x_1 \\ x_2 &= x_2 \end{aligned} \qquad \Rightarrow\; x_2 = 0,\; x_1 := t$

10.2.3 Beispiele — Exemples

Auf Seite 236 haben wir die Projektionsmatrix kennengelernt. Diese Matrix hat aus geometrischen Gründen die Eigenwerte $\{1, 1, 0\}$ und die Eigenvektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{0}$.
• *De la page 236, nous connaissons la matrice de projection. Par raisons géométriques, cette matrice a les valeurs propres* $\{1, 1, 0\}$ *et les vecteurs propres* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{0}$.

Auf Seite 237 sind wir der Drehmatrix im Raum begegnet. Diese Matrix hat wiederum aus geometrischen Gründen den reellen Eigenwert 1 und dazu zwei konjugiert komplexe Eigenwerte, wie man sofort nachrechnet. Zum reellen Eigenwert 1 gehört als Eigenvektor der Achsenrichtungsvektor $\vec{a} = \vec{b}_1$. Die andern Eigenvektoren sind komplex, was nur geometrisch, aber nicht rechnerisch ein Problem ist.
• *A la page 237, nous avons rencontré la matrice de révolution dans l'expace. Par raisons géométriques, cette matrice possède la valeur propre réelle* 1 *et deux valeurs propres complexes et conjuguées, comme on peut voir tout de suite par un calcul. Pour la valeur propre réelle* 1 *on trouve le vecteur propre* $\vec{a} = \vec{b}_1$ *qui donne la direction de l'axe. Les autres vecteurs propres sont complexes, ce qui est un problème pour la situation géométrique, mais pour le calcul ça n'importe pas.*

Matrix: • *Matrice:* $D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Eigenwerte: • *Valeurs propres:* $\{1, \cos(\alpha) - i\ \sin(\alpha), \cos(\alpha) + i\ \sin(\alpha)\}$

Eigenvektoren: • *Vecteurs propres:* $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

10.3 Eigenschaften von Eigenwerten und Eigenvektoren — Qualités de valeurs propres et vecteurs propres

10.3.1 Lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren — Indépendence linéaire de vecteurs propres

Indirekte Betrachtung: • *Argumentation indirecte:*

Seien • *Soient* $i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$
$\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$ EV zu *EW* $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ • $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$ *EV à EW* $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$
mit $\vec{x}_1$ linear abhängig von $\{\vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k\}$ • *avec* $\vec{x}_1$ *linéairement dépendants de* $\{\vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k\}$
(angepasste Nummerierung • *Numérotation adaptée*).

Sei • *Soit* $\{\vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k\}$ linear unabhängig • *linéairement indépendant*

$$\rightsquigarrow \quad \vec{x}_1 = \sum_{i=2}^{k} \mu_i \vec{x}_i.\ A\vec{x}_1 = \lambda_1 \vec{x}_1 \ \Rightarrow\ A \sum_{i=2}^{k} \mu_i \vec{x}_i = \lambda_1 \sum_{i=2}^{k} \mu_i \vec{x}_i \ \Rightarrow\ \sum_{i=2}^{k} \mu_i A\vec{x}_i = \sum_{i=2}^{k} \mu_i \lambda_1 \vec{x}_i$$
$$\Rightarrow\ \sum_{i=2}^{k} \mu_i \lambda_i \vec{x}_i = \sum_{i=2}^{k} \mu_i \lambda_1 \vec{x}_i \ \Rightarrow\ \sum_{i=2}^{k} (\mu_i \lambda_i - \mu_i \lambda_1) \vec{x}_i = \sum_{i=2}^{k} \underbrace{\mu_i}_{\exists \mu_i \neq 0} \underbrace{(\lambda_i - \lambda_1)}_{\lambda_i \neq \lambda_1} \vec{x}_i = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ $\{\vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k\}$ linear abhängig • *linéairement dépendant* $\rightsquigarrow$ Widerspruch! • *Contradiction!*

$\rightsquigarrow$ Annahme $\vec{x}_1$ linear abhängig von $\{\vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k\}$ falsch. • *Supposition* $\vec{x}_1$ *linéairement dépendant de* $\{\vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k\}$ *fausse.*

Satz: • **Théorème:**

Vor.: • **Hyp.:**

$\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$ $(k \leq n)$ verschiedene *EV* zu verschiedenen *EW*
• *EV différents à EW différents* $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$

Beh.: • **Thè.:**

$\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$ linear unabhängig • *linéairement indépendant.*
D.h. $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ spannen einen k–dimensionalen Vektorraum auf.
• *ç.v.d.* $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ *tendent un espace vectoriel de dimension* k.

Definition: • **Définition:** Die Lösungsmenge $\{\vec{x}\}$ von $(A - \lambda_i E)\vec{x} = \vec{0}$ nennen wir den **Eigenraum** zu λ_i. Ensprechend den durch $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$ gegebenen Vektorraum (wie oben) den Eigenraum zu $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ resp. zur Matrix A. • *Nous appelons l'ensemble de solutions* $\{\vec{x}\}$ *de* $(A - \lambda_i E)\vec{x} = \vec{0}$ *l'espace propre à* λ_i. *Correspondant l'espace vectoriel donné par* $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k\}$ *(comme en haut) l'espace propre à* $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ *resp. à la matrice* A.

(Es gilt: • *Il vaut:* $(A - \lambda_i E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow A \cdot \vec{x} = \lambda_i \vec{x}$)

Korollar: • **Corollaire:** $k = Dim(Eigenraum(A)) =$ • $Dim(EspacePropre(A))$
$\Rightarrow\ k \leq n = Rang(A)$

Bsp.: • **Exemple:**

Sei • *Soit* $\vec{x_1}, \vec{x_2}$ *l.u.'l.i.*, $\vec{x_1}, \vec{x_2}$ *EV* zu λ • $\vec{x_1}, \vec{x_2}$ *EV à* λ Sei • *Soit* $\vec{a} = \mu_1 \vec{x_1} + \mu_2 \vec{x_2} \Rightarrow$ $A \cdot \vec{a} = A \cdot (\mu_1 \vec{x_1} + \mu_2 \vec{x_2}) = \mu_1 \cdot A \cdot \vec{x_1} + \mu_2 \cdot A \cdot \vec{x_2} = \mu_1 \cdot \lambda \cdot \vec{x_1} + \mu_2 \cdot \lambda \cdot \vec{x_2} = \lambda \cdot (\mu_1 \cdot \vec{x_1} + \mu_2 \cdot \vec{x_2}) = \lambda \cdot \vec{a} \Rightarrow A \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a}$ $\rightsquigarrow$ $\vec{a}$ ist auch *EV* zu λ. • $\vec{a}$ *est aussi EV à* λ.

10.3.2 Zu den Eigenwerten nicht regulärer Matrizen — Quant aux valeurs propres de matrices non régulières

$A \in M_{n,n}, A \notin R_n \Rightarrow \det(A) = 0$

$$\Rightarrow P_n(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \lambda^n + \lambda^{n-1} c_{n-1} + \ldots + \lambda c_1 + c_0 = \lambda^n + \lambda^{n-1} c_{n-1} + \ldots + \lambda c_1 = 0,$$

denn • *car* $c_0 = P_n(0) = \det(A - 0E) = \det(A) = 0$

$\rightsquigarrow P_n(\lambda) = \lambda(\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} c_{n-1} + \ldots + c_1 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \in \mathbb{L}\ (P_n(\lambda) = 0) \rightsquigarrow \lambda = 0 \in \{EW\}$

Zum *EV* $\vec{x}_0$ zu $\lambda = 0$: • *Quant au EV* $\vec{x}_0$ *à* $\lambda = 0$:
$\rightsquigarrow \forall_{\vec{x}_0 \in Kern(\mathcal{A})}\ A \cdot \vec{x}_0 = \lambda \cdot \vec{x}_0 = 0 \cdot \vec{x}_0 = \vec{0} \Rightarrow Kern(\mathcal{A}) \subseteq$ Eigenraum • *espace propre*
$\rightsquigarrow Kern(\mathcal{A}) =$ Eigenraum zu λ • *... espace propre à* λ.

$\rightsquigarrow Kern(\mathcal{A}) =$ Eigenraum zu λ • *... espace propre à* λ.

Satz: • **Théorème:**

Vor.: • **Hyp.:**

Zur Abbildung $\mathcal{A}$ gehöre die Matrix A • *La matrice* A *appartient à l'application* $\mathcal{A} \rightsquigarrow A \in M_{n,n}, A \notin R_n$

Beh.: • **Thè.:**

$\lambda = 0$ ist Eigenwert • *est valeur propre*
$Kern(\mathcal{A}) =$ Eigenraum zu λ • *... espace propre à* λ

10.3.3 Zu den Eigenwerten transponierter Matrizen — Quant aux valeurs propres de matrices transposées

Es gilt: • *Il vaut:* $P_n(\lambda)_{A^T} = \det(A^T - \lambda E) = \det(A^T - \lambda E^T) = \det(A^T - (\lambda E)^T)$
$= \det(A - \lambda E)^T = \det(A - \lambda E) = P_n(\lambda)_A$

$\Rightarrow$ A und A^T haben dasselbe charakteristische Polynom und somit dieselben Eigenwerte
• *A et A^T ont le même polynôme caractéristique et donc les mêmes valeurs propres.*

Satz: • **Théorème:** A und A^T haben dasselbe charakteristische Polynom und somit dieselben Eigenwerte. • *A et A^T ont le même polynôme caractéristique et donc les mêmes valeurs propres.*

10.3.4 Matrixpotenzen — Puissances de matrices

Konsequenz: • **Conséquence:**

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \;\Rightarrow\; A \cdot A \cdot \vec{x} = A^2 \cdot \vec{x} = A \cdot \lambda \cdot \vec{x} = \lambda \cdot A \cdot \vec{x} = \lambda^2 \cdot \vec{x} \;\Rightarrow\; \ldots A^n \cdot \vec{x} = \lambda^n \cdot \vec{x}$$

Formel: • **Formule:** $A^n \cdot \vec{x} = \lambda^n \cdot \vec{x}$

10.3.5 Diagonalisierung regulärer Matrizen — Diagonalisation de matrices régulières

Seien • *Soient* $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ *EW* von • *de* $A \in R_n$ mit • *avec* $\lambda_i \neq \lambda_k$ $(i \neq k)$. (Alle Eigenwerte seien somit verschieden. • *Toutes les valeurs propres soient donc différentes*)

Schreibe die Menge der Gleichungen • *Ecris l'ensemble d'équations*

$$A \cdot \vec{x}_1 = \lambda_1 \cdot \vec{x}_1,\;\; A \cdot \vec{x}_2 = \lambda_2 \cdot \vec{x}_2,\;\; \ldots, A \cdot \vec{x}_n = \lambda_n \cdot \vec{x}_n \qquad \left(\rightsquigarrow\; A \cdot (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \ldots\right)$$

als eine Matrixgleichung der Form: • *comme une équation de matrices de la forme suivante:*

$$A \underbrace{(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)}_{X(Matr.)} = (\lambda_1 \vec{x}_1, \ldots, \lambda_n \vec{x}_n) =$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 x_{11} & \ldots & \lambda_n x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 x_{n1} & \ldots & \lambda_n x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \ldots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = X D_{\lambda,n} \;\Rightarrow\; A \cdot X = X \cdot D_{\lambda,n}$$

Dabei ist also X die Matrix, in deren Spalten die Eigenvektoren stehen. Und $D_{\lambda,n}$ ist die Diagonalmatrix, deren Diagonalelemente die Eigenwerte sind in der zu den Eigenvektoren von X entsprechenden Reihenfolge. • *Ici X est donc la matrice qui contient comme colonnes les vecteurs propres. Et $D_{\lambda,n}$ est la matrice diagonale qui contient comme éléments de diagonale les valeurs propres de X dans l'ordre correspondant aux valeurs propres dans X.*

$\rightsquigarrow$ $A \cdot X = X \cdot D_{\lambda,n}$ gibt die vollständige Lösung des Eigenwertproblems wieder. • $A \cdot X = X \cdot D_{\lambda,n}$ *redonne la solution complète du problème des valeurs propres.*

Da die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind, sind die Spalten von X linear unabhängig, d.h. $X \in R_n$, X^{-1} existiert. • *Comme les vecteurs propres de différentes valeurs propres sont linéairement indépendants, les colonnes de X sont aussi linéairement indépendantes, ç.v.d. $X \in R_n$, X^{-1} existe.* $\rightsquigarrow \quad A = X \cdot D_{\lambda,n} \cdot X^{-1}$

Satz: • **Théorème:**

Vor.: • **Hyp.:**

$A \in R_n$, alle Eigenwerte verschieden. • *Toutes les valeurs propres différentes*
$X =$ Matrix, deren Spalten die Eigenvektoren von A sind.
• $X =$ *matrice, dont les colonnes sont les vecteurs propres de A.*
$D_{\lambda,n} =$ Diagonalmatrix mit den Eigenwerten als Diagonalelemente in der zu X entsprechenden Reihenfolge. • $D_{\lambda,n} =$ *matrice diagonale avec les valeurs propres comme éléments de diagonale dans l'ordre correspondant à X.*

Beh.: • **Thè.:**

$A = X \cdot D_{\lambda,n} \cdot X^{-1}, \;\; D_{\lambda,n} = X^{-1} \cdot A \cdot X$

Bemerkung: • **Remarque:** Die Darstellung von A in der Form $X \cdot D_{\lambda,n} \cdot X^{-1}$ nennen wir auch die **Diagonalisierung von A.** • *Nous appelons la représentation de A dans la forme $X \cdot D_{\lambda,n} \cdot X^{-1}$ aussi* **diagonalisation** *de A.*

Wir wollen etwas allgemeiner formulieren: • *Nous formulons de façon plus générale:*

Definition: • **Définition:** Falls es zu A eine Diagonalmatrix $D_{\lambda,n}$ sowie eine Matrix $X \in R_n$ gibt mit $A = X \cdot D_{\lambda,n} \cdot X^{-1}$, so nennen wir A **diagonalisierbar**. • *S'il existe pour A une matrice diagonale $D_{\lambda,n}$ et une matrice $X \in R_n$ avec $A = X \cdot D_{\lambda,n} \cdot X^{-1}$, nous disons que A peut être* **diagonalisé**.

Nach obigem Satz kann umgekehrt zu gewünschten verschiedenen *EW* und *EV* die Matrix A komponiert werden, die diese *EW* ud *EV* besitzt. • *D'autre part en utilisant le théorème d'en haut nous pouvons maintenant composer la matrice A qui possède des EW différents et des EV qu'on désire.*

Bsp.: • **Exemple:**

Geg.: • **Donné:** $\lambda_1 = 1, \;\; \lambda_2 = 2, \;\; \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \;\; \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \; X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \;\; D_{\lambda,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \;\; X^{-1} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; A = X \cdot D_{\lambda,2} \cdot X^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

10.3.6 Anwendung auf Matrixpotenzierung — Application pour des puissances de matrices

$A = X \cdot D \cdot X^{-1}$

$\Rightarrow\ A^2 = (X \cdot D \cdot X^{-1}) \cdot (X \cdot D \cdot X^{-1}) = X \cdot D \cdot (X^{-1}) \cdot X) \cdot D \cdot X^{-1} = X \cdot D \cdot D \cdot X^{-1} = X \cdot D^2 \cdot X^{-1}$

$\Rightarrow\ A^3 = (X \cdot D^2 \cdot X^{-1}) \cdot (X \cdot D \cdot X^{-1}) = X \cdot D^2 \cdot (X^{-1}) \cdot X) \cdot D \cdot X^{-1} = X \cdot D^2 \cdot D \cdot X^{-1} = X \cdot D^3 \cdot X^{-1}$

$\ldots\ \Rightarrow\ A^k = X \cdot D^k \cdot X^{-1}$

Korollar: • **Corollaire:**

Vor.: • **Hyp.:**

$$A = X \cdot D \cdot X^{-1}$$

Beh.: • **Thè.:**

$$A^k = X \cdot D^k \cdot X^{-1},\ \ k \in \mathbb{N}$$

Bemerkung: • **Remarque:**

1 $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$

2 Für grosse k reduziert die Formel $A^k = X \cdot D^k \cdot X^{-1}$ die Operationsschritte wesentlich! • *Pour des k qui sont grands, la formule $A^k = X \cdot D^k \cdot X^{-1}$ réduit le nombre des opérations de façon essentielle.*

10.3.7 Eigenwerte der Diagonalmatrix — Valeurs propres de la matrice diagonale

Studiere: • *Etudie:* $D_{\lambda,n} \cdot \vec{x} = \lambda\, \vec{x}$

$\rightsquigarrow$ *EW* von • *de* $D_{\lambda,n}$:

$$P_n(\lambda) = \det(D_{\lambda,n} - \lambda E) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda_1 - \lambda) \cdot (\lambda_2 - \lambda) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - \lambda) = 0$$

$\Rightarrow\ EW : \lambda \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$

$$D_{\lambda,n} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\, x_1 \\ \vdots \\ \lambda_n\, x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_k\, x_1 \\ \vdots \\ \lambda_k\, x_n \end{pmatrix} = \lambda_k\, \vec{x}\ \Rightarrow\ \lambda_i\, x_i = \lambda_k\, x_i,\ i = 1, \ldots, n.$$

$\rightsquigarrow\quad x_i = 0,\ i \neq k,\ \ x_k$ frei • *libre.* $\rightsquigarrow$ Setze • *Choisis:* $x_k = 1\ \Rightarrow\ EV\ \vec{x}_k = \vec{e}_k$.

Satz: • **Théorème:**

Vor.: • **Hyp.:**

$A \in R_n$, alle EW verschieden • *Toutes les EW différentes.*
$D_{\lambda,n}$ zugehörige Diagonalmatrix • *matrice lié à A.*

Beh.: • **Thè.:**

$D_{\lambda,n}$ hat dieselben Eigenwerte wie A. • $D_{\lambda,n}$ *a les mêmes valeurs propres que A.*

$\{\vec{e}_1, \ldots \vec{e}_n\}$ sind Eigenvektoren zu $D_{\lambda,n}$ • *sont des vecteurs propres de* $D_{\lambda,n}$

Korollar: • **Corollaire:** A und $D_{\lambda,n}$ haben dasselbe charakteristische Polynom $P_n(\lambda)$
• *A et* $D_{\lambda,n}$ *ont le même polynôme caractéristique* $P_n(\lambda)$.

Kontrolle: • **Contrôle:**

$P_n(\lambda)_A = \det(A - \lambda E) = \det(X \cdot D_{\lambda,n} \cdot X^{-1} - \lambda X \cdot X^{-1}) =$
$= \det(X \cdot (D_{\lambda,n} - \lambda E) \cdot X^{-1}) = \det(X)\det(D_{\lambda,n} - \lambda E)\det(X^{-1}) =$
$= \det(X)\det(D_{\lambda,n} - \lambda E)\det(X)^{-1} = \det(X)\det(X)^{-1}\det(D_{\lambda,n} - \lambda E) =$
$= \det(D_{\lambda,n} - \lambda E) = P_n(\lambda)_{D_{\lambda,n}}$

10.3.8 Zu Spur und Determinante — Quant à la trace et le déterminant

Sei • *Soit :* $P_n(\lambda)_A = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n-1,n} & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$

und • *et :* $P_n(\lambda)_D = \det(D - \lambda E) = \begin{vmatrix} d_{11} - \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_{22} - \lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & d_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$

Falls gilt: • *S'il vaut:* $\lambda_k = d_{kk}$,
so gilt (Hauptsatz der Algebra): • *alors on a par conséquent (théorème principal de l'algèbre):*

$$P_n(\lambda)_A = P_n(\lambda)_D$$

$\rightsquigarrow$ Rechnung: • *Calculer:* $P_n(\lambda)_A =$
$(-\lambda)^n + \alpha_{n-1}(-\lambda)^{n-1} + \ldots + \alpha_1(-\lambda)^1 + \alpha_0 = P_n(\lambda)_D = (-\lambda)^n + \delta_{n-1}(-\lambda)^{n-1} + \ldots + \delta_1(-\lambda)^1 + \delta_0$

Bedeutung der Koeffizienten: • *Signification des coefficients:*

Wähle: • *Choisir:* $\lambda = 0 \Rightarrow \alpha_0 = P_n(0)_A = \det(A - 0E) = \det(A) = P_n(0)_D = \delta_0$
$= \det(D - 0E) = \det(D) = \prod_{k=1}^{n} d_{kk} = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k \Rightarrow \det(A) = \det(D) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$

Studiere nun den 2. Term • *Etudie le 2ème terme* $\alpha_{n-1}(-\lambda)^{n-1}$ resp. • *resp.* $\delta_{n-1}(-\lambda)^{n-1}$.

Diese Terme in $P_n(\lambda)_A$ resp. $P_n(\lambda)_D$ werden nach dem Entwicklungssatz gebildet.
• *On obtient ces termes dans $P_n(\lambda)_A$ resp. $P_n(\lambda)_D$ d'après le théorème de développement.*

Z.B. • *P.ex.* $P_n(\lambda)_A = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n-1,n} & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$

$$= \sum_{\dots} (-1)^{\dots} \beta_{1k_1}\beta_{2k_2}\dots\beta_{nk_n}, \;\; \beta_{ik_i} \in \{a_{rs} \mid r \neq s\} \;\vee\; \beta_{ik_i} \in \{a_{jj} - \lambda_j\} \qquad \rightsquigarrow$$

$\alpha_{n-1}(-\lambda)^{n-1}$ ist derjenige Anteil an der Summe in der Entwicklung von $\det(A - \lambda E)$, der entsteht, wenn im Produkt $\beta_{1k_1}\beta_{2k_2}\dots\beta_{nk_n}$ $n-1$ mal der Anteil $(-\lambda)$ in einem Diagonalelement genommen wird und ein einziges Mal (man hat n Faktoren!) nicht das $(-\lambda)$.
Da alle Faktoren aus verschiedenen Zeilen und Spalten stammen müssen, kann auch dieser letzte Faktor nur aus einem Diagonalelement stammen und muss daher jeweils der Anteil a_{jj} sein.
$(-1)^{\dots}$ wird in diesem Falle immer $= 1$, da es gleichviele Zeilen und Spaltenvertauschungen benötigt (also 2 mal eine Anzahl = gerade Zahl), um ein Diagonalelement an die erste Stelle in der Matrix zu verschieben.
Bei der Determinantenentwicklung werden alle Möglichkeiten von Anordnungen aufsummiert. Wegen $P_n(\lambda)_A = P_n(\lambda)_D$ ist daher:

• *$\alpha_{n-1}(-\lambda)^{n-1}$ est la seule partie de la somme dans le développement de $\det(A - \lambda E)$ qui naît quand, pour calculer le produit $\beta_{1k_1}\beta_{2k_2}\dots\beta_{nk_n}$, on prend $n-1$ fois la partie $(-\lambda)$ dans un élément de diagonale et une seule fois (on a n facteurs!) pas l'élément $(-\lambda)$.*
Comme tous les facteurs viennent de lignes et de colonnes différentes, le dernier facteur vient aussi d'un élément de la diagonale et doit donc être la partie a_{jj}.
Dans ce cas $(-1)^{\dots}$ devient toujours $= 1$, parce qu'il faut le même nombre d'échangements de lignes que d'échangements de colonnes (donc 2 fois un nombre = nombre pair) pour déplacer un élément de la diagonale à la première place d'une matrice.
Au cours du développement du déterminant on fait la somme sur tous les arrangements possibles. A cause de $P_n(\lambda)_A = P_n(\lambda)_D$ il suit:

$$\alpha_{n-1}(-\lambda)^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} (-\lambda)^{n-1} a_{ii} = (-\lambda)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \delta_{n-1}(-\lambda)^{n-1} = (-\lambda)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} d_{ii} = (-\lambda)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Wir definieren jetzt: • *Nous définissons maintenant:*

Definition: • **Définition:** Die Summe der Diagonalelemente $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ einer Matrix A heisst **Spur** der Matrix A.
• *La somme des éléments de la diagonale $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ d'une matrice A s'appelle* **trace** *de la matrice A.*

Lemma: • **Lemme:** **Vor.:** • **Hyp.:** $\det(A - \lambda E) = \det(B - \lambda E)$

Beh.: • **Thè.:**

1 $\det(A) = \det(B)$

2 $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$
resp. • *resp.* $Sp'Tr\,(A) = Sp'Tr\,(B)$

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

A diagonalisierbar • *peut être diagonalisé* $(A = X \cdot D_{\lambda,n} \cdot X^{-1})$

Beh.: • **Thè.:**

1 $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} d_{ii} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

2 $Sp'Tr\,(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

Eine Anwendung: • **Une Application:**

Im nächsten Abschnitt werden wir Matrizen untersuchen, die gleiche Eigenwerte besitzen. Zwei Matrizen können somit nur dann diese Eigenschaft haben, wenn sie dieselbe Spur besitzen, was sehr rasch mit einer einfachen Addition der Diagonalelemente überprüfbar ist.
• *Dans la section suivante nous allons examiner des matrices qui ont les mêmes valeurs propres. Deux matrices peuvent donc avoir cette qualité seulement quand elles ont la même trace. C'est une qualité qu'on peut vite contrôler à l'aide d'une simple addition des éléments de diagonale.*

10.4 Ähnliche Matrizen — Matrices semblables

10.4.1 Grundlagen — Fondements

Definition — Définition

Definition: • **Définition:** Zwei Matrizen A und B, die sich mit derselben Diagonalmatrix D diagonalisieren lassen, nennen wir **ähnlich**: $A \sim B$.
• *Deux matrices A et B qu'on peut diagonaliser avec la même matrice diagonale D s'appellent* **semblables***: $A \sim B$.*

Für solche Matrizen gilt somit: • *Pour de telles matrices il vaut donc:*

$$A = X_1 \cdot D_{\lambda,n} \cdot X_1^{-1}, \quad B = X_2 \cdot D_{\lambda,n} \cdot X_2^{-1}$$

Konsequenz: • **Conséquence:** Ähnliche Matrizen haben gleiche Eigenwerte, Determinanten und Spuren, jedoch wie wir sehen werden allgemein verschiedene Eigenvektoren. • *Les matrices semblables*

ont les mêmes valeurs propres, mêmes déterminants, les mêmes traces, mais, comme on va voir, généralement des vecteurs propres différents.

Matrixprodukte — Produits de matrices

Wir führen jetzt eine etwas ausgedehnte Rechnung durch, die uns aber zu einem interessanten Resultat bringt. • *Maintenant nous exécuterons un calcul un peu long, mais qui nous mène à un résultat intéressant.*

Studiere: • *Etudie:* $A \cdot B - \lambda E = A \cdot B - \lambda E$, A, B regulär • *régulier.*

$A \cdot B - \lambda E = (E - \lambda B^{-1}A^{-1}) \cdot A \cdot B = (E - \lambda B^{-1}A^{-1}) \cdot (\lambda E + A \cdot B - \lambda E)$
$\rightsquigarrow \quad (E - \lambda B^{-1}A^{-1}) \cdot (\lambda E + A \cdot B - \lambda E) = A \cdot B - \lambda E \qquad \Rightarrow$
$\lambda E(E - \lambda B^{-1}A^{-1}) = (A \cdot B\lambda E) - (E - \lambda B^{-1}A^{-1}) \cdot (A \cdot B - \lambda E) \mid \cdot (A \cdot B - \lambda E)^{-1}, \ \lambda \neq \lambda_i(AB)$
$\Rightarrow \ \lambda E(E - \lambda B^{-1}A^{-1})(A \cdot B\lambda E)^{-1} =$
$= (A \cdot B - \lambda E)(A \cdot B - \lambda E)^{-1} - (E - \lambda B^{-1}A^{-1})(A \cdot B - \lambda E)(A \cdot B - \lambda E)^{-1} \mid B\cdot$
$\Rightarrow \ \lambda(B - \lambda B \cdot B^{-1}A^{-1})(A \cdot B\lambda E)^{-1} = B \cdot E - (B - \lambda B \cdot B^{-1}A^{-1})E \ \Rightarrow$
$\lambda(B \cdot A - \lambda E)A^{-1}(A \cdot B\lambda E)^{-1} = B \cdot E - (B \cdot A - \lambda E) \cdot A^{-1} \mid \cdot (B \cdot A - \lambda E)^{-1}, \ \lambda \neq \lambda_i(BA)$
$\Rightarrow \ \lambda EA^{-1}(A \cdot B\lambda E)^{-1} = (B \cdot A - \lambda E)^{-1} \cdot B - (B \cdot A - \lambda E)^{-1} \cdot (B \cdot A - \lambda E) \cdot A^{-1} \mid A\cdot$
$\Rightarrow \ \lambda(A \cdot B\lambda E)^{-1} = A \cdot (B \cdot A - \lambda E)^{-1} \cdot B - E$ oder • *ou*
I) $(A \cdot B\lambda E)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A \cdot (B \cdot A - \lambda E)^{-1} \cdot B - \frac{1}{\lambda} E$ oder • *ou*
II) $(B \cdot A\lambda E)^{-1} = A^{-1}(\lambda(A \cdot B - \lambda E)^{-1} + E)B^{-1} = A^{-1}\lambda(A \cdot B - \lambda E)^{-1}B^{-1} + A^{-1}B^{-1}$

Aus I) und II) folgt: • *On déduit de I) et II):*

$(A \cdot B\lambda E)^{-1}$ existiert • *existe* $\Leftrightarrow (B \cdot A\lambda E)^{-1}$ existiert • *existe*— oder • *ou*
$(A \cdot B\lambda E)^{-1} \neg($ existiert • *existe*$) \ \Leftrightarrow (B \cdot A\lambda E)^{-1} \neg($ existiert • *existe*$)$ — oder • *ou*
$\det(A \cdot B) = 0 \ \Leftrightarrow \det(B \cdot A) = 0$ — oder • *ou*

λ *EW* von • *de* $A \cdot B \ \Leftrightarrow \lambda$ *EW* von • *de* $B \cdot A$

Konsequenz: • **Conséquence:** $\{$ *EW* von • *de* $A \cdot B\} = \{$ *EW* von • *de* $B \cdot A\}$

Satz: • **Théorème:** $A \cdot B \sim B \cdot A$

Rep.: Matrixpotenzierung — Rep.: Puissances de matrices

Sei • *Soit* $A = X \cdot D_{\lambda,n} \cdot X^{-1} \rightsquigarrow \ A^2 = (X \cdot D_{\lambda,n} \cdot X^{-1}) \cdot (X \cdot D_{\lambda,n} \cdot X^{-1}) = X \cdot D^2_{\lambda,n} \cdot X^{-1} \ \Rightarrow \ \ldots$
$\Rightarrow \ A^k = X \cdot D^k_{\lambda,n} \cdot X^{-1}$

Dabei gilt (Kontrolle!): • *Il vaut (contrôler!):* $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$A = X \cdot D_{\lambda,n} \cdot X^{-1}, \;\; D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Beh.: • **Thè.:**

1 $A^k = X \cdot D^k_{\lambda,n} \cdot X^{-1}, \;\; D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$

2 λ_j *EW* von • *EW de A* $\Rightarrow$ λ_j^k *EW* von • *EW de* A^k

Anwendung: • *Application:* Schnelle Potenzierung von Matrizen (höhere Potenzen) • *Calculer très vite des puissances de matrices (puissances très hautes).*

10.4.2 Abbildungen im Eigenraum — Applications dans l'espace propre

Sei • *Soit* $X = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$, $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$ = Menge der *EV* zu verschiedenen *EW* • *ensemble des EV pour des EW différentes.*

$\rightsquigarrow$ $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$ ist Basis • *est base.*

Es gilt: • *Il vaut:* $\mathcal{X} : \vec{e}_k \longmapsto X\vec{e}_k = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k, \ldots, \vec{x}_n) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{x}_k \rightsquigarrow X^{-1}\vec{x}_k = \vec{e}_k$

Sei • *Soit* $\vec{v} = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k \, \vec{x}_k \;\Rightarrow\; A \cdot \vec{v} = A \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k \, \vec{x}_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k A \cdot \vec{x}_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k \lambda_k \cdot \vec{x}_k$.

$\rightsquigarrow$ $X^{-1} \cdot A \cdot \vec{v} = X^{-1} \cdot (X \cdot D \cdot X^{-1}) \cdot \vec{v} = D \cdot X^{-1} \cdot \vec{v} = D \cdot (X^{-1} \cdot \vec{v}) = D \cdot X^{-1} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k \vec{x}_k$

$$= D \cdot \sum_{k=1}^{n} \mu_k X^{-1} \cdot \vec{x}_k = D \cdot \sum_{k=1}^{n} \mu_k \vec{e}_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mu_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \mu_n \end{pmatrix}$$

Weiter gilt: • *En outre il vaut:*

$$X^{-1} \cdot \vec{v} = X^{-1} \cdot \sum_{k=1}^{n} \mu_k \, \vec{x}_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \cdot X^{-1} \cdot \vec{x}_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \, \vec{e}_k = \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}_{\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}}$$

Konsequenz: • **Conséquence:**

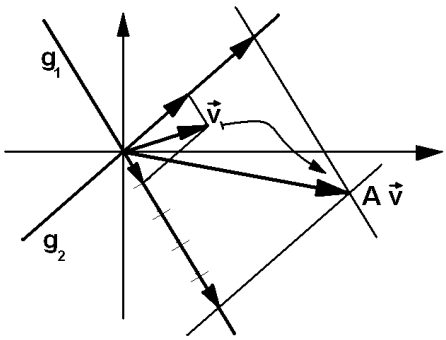
$$\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \, \vec{x}_k \xmapsto{\mathcal{A}} A\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \, \lambda_k \, \vec{x}_k \;\Leftrightarrow\; X^{-1} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \longmapsto D \cdot (X^{-1} \cdot \vec{v}) = X^{-1} \cdot A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mu_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \mu_n \end{pmatrix}$$

D.h. der Abbildung von $\vec{v}$ in der Basis $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$ duch die Matrix A entspricht die Abbildung von $X^{-1} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$ in der Orthonormalbasis $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ durch die Matrix D.

• *C.à.d. à l'application de $\vec{v}$ dans la base $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$ par la matrice A correspond l'application de $X^{-1} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$ dans la base orthonormale $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ par la matrice D.*

Zur Übersicht das Schema: • *Pour gagner une meilleure vue voilà le schéma:*

$$\begin{array}{ccc}
\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \vec{x}_k = \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}_{\{\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n\}} & \longmapsto & A \cdot \vec{v} = \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} \lambda_1 \mu_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \mu_n \end{pmatrix}_{\{\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n\}} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mu_k \vec{x}_k \\
\downarrow \text{(Verpflanzung durch } X^{-1}) \downarrow & & \downarrow \text{(Verpflanzung durch } X^{-1}) \downarrow \\
\downarrow \text{(Transplantation par } X^{-1}) \downarrow & & \downarrow \text{(Transplantation par } X^{-1}) \downarrow \\
X^{-1} \vec{v} = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \vec{e}_k = \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}_{\{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n\}} & \longmapsto & X^{-1} \cdot A \cdot \vec{v} = \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} \lambda_1 \mu_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \mu_n \end{pmatrix}_{\{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n\}} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mu_k \vec{e}_k
\end{array}$$



Bsp.: • **Exemple:**

$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow EW: \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2,$

$EV: \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(Rechnung! • *Calcul!*)

$\rightsquigarrow \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \end{pmatrix} =$

$= \mu_1 \vec{x}_1 + \mu_2 \vec{x}_2 \overset{\mathcal{A}}{\longmapsto} \mu_1 A\vec{x}_1 + \mu_2 A\vec{x}_2 =$

$= \mu_1 \lambda_1 \vec{x}_1 + \mu_2 \lambda_2 \vec{x}_2 = 5\mu_1 \vec{x}_1 + 2\mu_2 \vec{x}_2$

mit • *avec* $\mathcal{A}: \vec{v} \longmapsto A\vec{v}$

10.5 Konstruktion einer Matrix — Construction d'une matrice

Problem: • **Problème:**

Sei eine geometrische Abbildung folgender Art gegeben:
• *Soit donné: Une application géométrique de façon suivante:*

Geg.: • **Donné:** $\vec{x_1}, \ \vec{x_2}, \ \lambda_1, \ \lambda_2$

$\vec{v} = \mu_1 \vec{x_1} + \mu_2 \vec{x_2} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}_{\{\vec{x_1},\vec{x_2}\}} \longmapsto A \cdot \vec{v} = \lambda_1 \mu_1 \vec{x_1} + \lambda_2 \mu_2 \vec{x_2} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mu_1 \\ \lambda_2 \mu_2 \end{pmatrix}_{\{\vec{x_1},\vec{x_2}\}}$

Ges.: • **Trouver:** Matrix • *Matrice* A?

Konstruktion: • **Construction:** $X = (\vec{x_1}, \vec{x_2}),\ \ D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = X \cdot D \cdot X^{-1}$

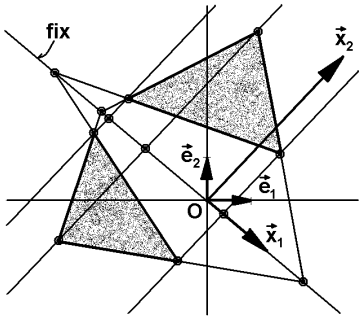
Bsp.: • **Exemple:**

$\overrightarrow{OP}\,' = -2\ \overrightarrow{OP}$ in Richtung • *en direction de* $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OQ}\,' = \overrightarrow{OQ} \rightsquigarrow$ fix in Richtung • *fixe en direction de* $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$A = X \cdot D \cdot X^{-1} =$

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{18}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$

Skizze nicht massstäblich! • *Esquisse: Ne pas à l´échelle!*



10.6 Diagonalisierung spezieller Matrizen — Diagonalisation de matrices spéciales

10.6.1 Definitionen — Définitions

Sei • *Soit* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ mit • *avec* $a_{ik} \in \mathbb{C},\ \mathbb{R}$. Wir setzen: • *Nous admettons:*

Definition: • **Définition:** $\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \dots & \bar{a}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{a}_{n1} & \dots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix}$ (Konj. komplex • *complexe conj.*)

Allgemein nennen wir Matrizen mit reellen Koeffizienten **reelle Matrizen**, Matrizen mit komplexen Koeffizienten **komplexe Matrizen**. • *Généralement nous appelons des matrices avec des coefficients réels des* **matrices réelles**, *celles avec des coefficients complexes des* **matrices complexes**.

Definition: • **Définition:** Gegeben sei eine Matrix A. • *Soit donné une matrice* A.

Wir sagen: • *Nous appelons:*

A **hermitesch**[5] • **hermitique**	$\Leftrightarrow$	A	$=$	$(\bar{A})^T$
A **symmetrisch** • **symétrique**	$\Leftrightarrow$	A	$=$	A^T
A **unitär** • **unitaire**	$\Leftrightarrow$	A^{-1}	$=$	$(\bar{A})^T$
A **orthogonal** • **orthogonal**	$\Leftrightarrow$	A^{-1}	$=$	A^T
A **schiefsymmetrisch** • **symétrique gauche**	$\Leftrightarrow$	A	$=$	$-A^T$

Bemerkung: • **Remarque:** Reelle hermitsche Matrizen sind symmetrisch, reelle unitäre Matrizen sind orthogonal. • *Les matrices réelles hermitiques sont symétriques, les matrices réelles unitaires sont orthogonales.*

Lemma: • **Lemme:** Es gilt: • *Il vaut:* $(\bar{A})^T = \overline{(A^T)}$

[5] Charles Hermite: 1822 – 1901

Sei A reell und schiefsymmetrisch. • *Soit A réelle et symétrique gauche.* ($\rightsquigarrow\ \forall_j\ a_{jj} = 0$)

$$\rightsquigarrow\quad a_{ik} = -a_{ki}, \rightsquigarrow\ A^2 = A \cdot A := \begin{pmatrix} \vec{a}_1^T \\ \vdots \\ \vec{a}_n^T \end{pmatrix} \cdot (-\vec{a}_1, \ldots, -\vec{a}_n) = -(\langle \vec{a}_i, \vec{a}_k \rangle \ldots) = -(\langle \vec{a}_k, \vec{a}_i \rangle \ldots)$$

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

A reell, schiefsymmetrisch.
• *A réelle, symétrique gauche.*

Beh.: • **Thè.:**

A^2 symmetrisch • *A^2 symétrique*

Bsp.: • **Exemple:** $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} -13 & -12 & 8 \\ -12 & -20 & -6 \\ 8 & -6 & -25 \end{pmatrix}$

10.6.2 Wichtige Eigenschaften — Qualités importantes

Orthogonale Matrix — Matrice orthogonale

Sei M beliebige orthogonale Matrix. • *Soit M matrice orthogonale quelconque.*
D. h. • *Ç. v. d.:* $M^{-1} = M^T$ resp. • *resp.* $E = M \cdot M^T$

$\Rightarrow\ \det(E) = 1 = \det(M \cdot M^T) = \det(M) \cdot \det(M^T) = \det(M) \cdot \det(M) = \det(M)^2$
$\rightsquigarrow\quad \det(M) = \pm 1, |\det(M)| = 1.$

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

M orthogonale Matrix • *M matrice orthogonale*

Beh.: • **Thè.:**

$\det(M) = \pm 1$

Symmetrische Matrix — Matrice symétrique

Sei A reguläre, symmetrische Matrix mit lauter verschiedenen Eigenwerten $\neq 0$.
• *Soit A matrice régulière symétrique à des valeurs propres différentes $\neq 0$.*

$\rightsquigarrow\quad A = X \cdot D \cdot X^{-1}$ (D Diagonalmatrix mit EW in der Diagonalen, X entsprechende Matrix der Eigenvektoren • *D matrice avec les EW dans la diagonale, X matrice correspondante des vecteurs propres.*) $\rightsquigarrow$

$\Leftrightarrow A \cdot X = X \cdot D \Leftrightarrow (A \cdot X)^T = (X \cdot D)^T \Rightarrow X^T \cdot A^T = D^T \cdot X^T$
$\Leftrightarrow X^T \cdot A = D \cdot X^T$ (Symmetrie! • *Symétrie!*)

$\Leftrightarrow D \cdot X^T \cdot X = X^T \cdot A \cdot X = X^T \cdot X \cdot D$

Sei • *Soit* $X^T \cdot X := M$

Konsequenz: • **Conséquence:** $A = X \cdot D \cdot X^{-1}$ ist äquivalent zu • *est équivalent à* $D \cdot M = M \cdot D$ resp. • *resp.* $M = D \cdot M \cdot D^{-1}$, $M = X^T \cdot X$ (EV)

Wir studieren $M = D \cdot M \cdot D^{-1}$ elementweise. • *Nous étudions les éléments de* $M = D \cdot M \cdot D^{-1}$.

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11}\lambda_1^{-1} & \dots & m_{1n}\lambda_n^{-1} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1}\lambda_1^{-1} & \dots & m_{nn}\lambda_n^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 m_{11}\lambda_1^{-1} & \dots & \lambda_1 m_{1n}\lambda_n^{-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_n m_{n1}\lambda_1^{-1} & \dots & \lambda_n m_{nn}\lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \; M = X^T \cdot X = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\lambda_1^{-1}m_{11} & \dots & \lambda_1\lambda_n^{-1}m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_n\lambda_1^{-1}m_{n1} & \dots & \lambda_n\lambda_n^{-1}m_{nn} \end{pmatrix}$$

Hier sind alle EW λ_k verschieden (Vor.!), die EV sind also linear unabhängig und bilden eine Basis. Daher ist $\det(X) \neq 0$ und somit $\det(M) = \det(X)\det(X^T) = \det(X)^2 \neq 0$, d.h. M ist regulär. Nach Vor. ist ebenfalls A regulär. Somit gilt:
• *Ici toutes les EW* λ_k *sont différentes (hyp.!), les EV sont donc linéairement indépendants et forment une base. On a donc* $\det(X) \neq 0$ *et* $\det(M) = \det(X)\det(X^T) = \det(X)^2 \neq 0$, *c'est–à–dire* M *est régulier. D'après l'hypothèse,* A *est également régulier. Il vaut donc:*

$$\lambda_i \cdot \lambda_k^{-1} \quad = \quad \begin{cases} \neq 0, \;\; 1 & i \neq k \\ = 1 & i = k \; (\lambda_i \neq 0) \end{cases}$$

Das oben gegebene Gleichungssystem $m_{ik} = \lambda_i \, \lambda_k^{-1} m_{ik}$ für die Koeffizienten m_{ik} kann nur bestehen, falls $m_{ik} = 0 \;\vee\; \lambda_i \, \lambda_k^{-1} = 1$. • *Le système d'équations* $m_{ik} = \lambda_i \, \lambda_k^{-1} m_{ik}$ *pour les coefficients* m_{ik} *donné en haut peut seulement être juste si* $m_{ik} = 0 \;\vee\; \lambda_i \, \lambda_k^{-1} = 1$.
$\rightsquigarrow \quad m_{ik} = 0, \; i \neq k \;\Rightarrow\; M$ Diagonalmatrix • *matrice diagonale.*

Wegen $\det(M) \neq 0$ (M regulär) kann M keine 0 in der Diagonale haben.
• *A cause de* $\det(M) \neq 0$ *(M régulier) M ne peut pas avoir de* 0 *dans la diagonale.*

$\rightsquigarrow \quad m_{ii} = \underbrace{\lambda_i \, \lambda_i^{-1}}_{=1} m_{ii} \neq 0 \;\Rightarrow\;$ für • *pour* $m_{ii} \in \dot{\mathbb{R}}, \dot{\mathbb{C}}$ keine Bedingung • *pas de condition.*

$\rightsquigarrow$ **Problem:** • **Problème:** Wie $m_{ii} \in \dot{\mathbb{R}}, \dot{\mathbb{C}}$ wählen? • *Comment choisir* $m_{ii} \in \dot{\mathbb{R}}, \dot{\mathbb{C}}$*?*

Studiere: • *Etudie:* $M = X^T \cdot X = \begin{pmatrix} \vec{x}_1{}^T \\ \vdots \\ \vec{x}_n{}^T \end{pmatrix} \cdot (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \begin{pmatrix} m_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_{nn} \end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow \quad \vec{x}_i{}^T \cdot \vec{x}_k = \langle \vec{x}_i, \vec{x}_k \rangle \quad = \quad \begin{cases} 0 & i \neq k \\ m_{ii} & i = k \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ Für die Eigenvektoren $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ von A gilt: • *Pour les vecteurs propres* $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ *de A il vaut:* $\vec{x}_i \perp \vec{x}_k, \; i \neq k$ und • *et* $|\vec{x}_i|^2 = m_{ii}$.

Da die Länge der Eigenvektoren $\neq 0$ frei wählbar ist, dürfen wir sie normieren.
• *Comme la longueur des vecteurs propres* $\neq 0$ *peut être choisie librement, nous pouvons la normaliser.*

$\rightsquigarrow$ Wähle: • *Choisis:* $\vec{e}_{\vec{x}_k} := \vec{u}_k = \dfrac{\vec{x}_k}{|\vec{x}_k|}$. $\rightsquigarrow$ $X = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ wird zu • *devient* $U = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ mit • *avec* $m_{ii} = |\vec{u}_i|^2 = \langle \vec{u}_i, \vec{u}_i \rangle = 1 \rightsquigarrow M = E$

Satz: • **Théorème:**

Vor.: • **Hyp.:**

$A \in R_n$, $A = A^T$, *EW* $\lambda_i \neq \lambda_k, i \neq k$
$U = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) = U = (\dfrac{\vec{x}_1}{|\vec{x}_1|}, \ldots, \dfrac{\vec{x}_n}{|\vec{x}_n|})$ = Matrix der normierten Eigenvektoren • *matrice des vecteurs propres normalisés.*

Beh.: • **Thè.:**

1 $\langle \vec{u}_i, \vec{u}_k \rangle = 0$ $(i \neq k)$ d. h. • *ç. v. d.* $\vec{u}_i \perp \vec{u}_k$ $(i \neq k)$

2 $X^T \cdot X = M = D_X$ Diagonalmatrix • *matrice diagonale*

3 $U^T \cdot U = E$ resp. • *resp.* $\langle \vec{u}_i, \vec{u}_k \rangle = \delta_{ik}$

Folgerung: • **Conclusion:** $U^T = U^{-1} \rightsquigarrow U$ ist orthogonal • *U est orthogonal.*

Hermitesche Matrix — Matrice hermitique

Sei • *Soit* $A \in \mathbb{R}$, A = hermitesche Matrix • *matrice hermitique*, $\vec{x}$ *EV* , λ *EW* :

$$A\vec{x} = \lambda \vec{x} \quad (\rightsquigarrow \vec{x} \neq \vec{0}).$$

Definition: • **Définition:** $\vec{x}^{\,*} = (\overline{\vec{x}})^T$ (konj, transp. • *konj, transp.*)

$\rightsquigarrow$ $A^* = A$ (Hermitesche Matrix • *Matrice hermitique*)

Man sieht sofort: • *On voit tout de suite:*

Lemma: • **Lemme:**

1 $(\vec{x}^{\,*})^* = \vec{x}$

2 $(A^*)^* = A$

3 $A^* \cdot B^* = (B \cdot A)^*$

Sei • *Soit* $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ Matrixprod. • *Produit de matrice* $\vec{x}^{\,*} \cdot \vec{x}$ = Skalarprod. • *Prod. scal.*

$\rightsquigarrow$ $\vec{x}^{\,*} \cdot \vec{x} = \langle \overline{\vec{x}}, \vec{x} \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} \bar{x}_i \cdot x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2 = |\vec{x}| \neq 0$ (da • *parce que* $\vec{x} \neq \vec{0}$)

Weiter ist: • *En outre on constate:*
$\lambda \cdot (\vec{x}^{\,*} \cdot \vec{x}) = \vec{x}^{\,*} \cdot (\lambda \cdot \vec{x}) = \vec{x}^{\,*} \cdot (A \cdot \vec{x}) = \vec{x}^{\,*} \cdot ((A \cdot \vec{x})^*)^* = \vec{x}^{\,*} \cdot (\vec{x}^{\,*} \cdot A^*)^* = ((\vec{x}^{\,*} \cdot A^*) \cdot \vec{x})^* =$
$(\vec{x}^{\,*} \cdot A^* \cdot \vec{x})^* = (\vec{x}^{\,*} \cdot \lambda \cdot \vec{x})^* = (\lambda \cdot \vec{x})^* \cdot (\vec{x}^{\,*})^* = (\vec{x}^{\,*} \cdot \lambda^*) \cdot (\vec{x}^{\,*})^* = (\vec{x}^{\,*} \cdot \overline{\lambda}) \cdot (\vec{x}^{\,*})^* = \overline{\lambda} \cdot (\vec{x}^{\,*} \cdot \vec{x}) \neq 0$
(wie vorgängig gezeigt • *comme on a démontré en haut.*)

$\rightsquigarrow \quad \lambda \cdot (\vec{x}^{\,*} \cdot \vec{x}) = \overline{\lambda} \cdot (\vec{x}^{\,*} \cdot \vec{x}) \neq 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \overline{\lambda} \;\Rightarrow\; \lambda \in \dot{\mathbb{R}}$

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$A^* = A \in R_n$ (Hermitesche Matrix • *Matrice hermitique*)

Beh.: • **Thè.:** $EW\ \lambda \in \dot{\mathbb{R}}$

Spezialfall: • *Cas spécial:*

Korollar: • **Corollaire:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$A^T = A$, Koeff. • *coeff.* $A_{ik} \in \mathbb{R}$
(Reell symmetrische Matrix • *Matrice réelle, symétrique*)

Beh.: • **Thè.:** $EW\ \lambda \in \dot{\mathbb{R}}$

Reell–symmetrische Matrizen können also keine nicht–reellen Eigenwerte haben! • *Les matrices réelles et symétriques ne peuvent pas avoir de valeurs propres non–réelles.*

Bemerkung: • **Remarque:** Bei einer symmetrischen Matrix müssen jedoch die Eigenwerte nicht unbedingt verschieden sein. Beispiel: E • *Les valeurs propres d'une matrice symétrique ne doivent pas être différentes. Exemple: Matrice E.*

Merke: • *A retenir:*

Folgerung: • **Conclusion:** Sei $A \in R_n$ reelle symmetrische Matrix mit lauter verschiedenen Eigenwerten. Dann gilt: • *Soit $A \in R_n$ matrice réelle symétrique avec toutes les valeurs propres différentes. Alors il vaut:*

1 $EW \in \dot{\mathbb{R}}$

2 EV sind orthogonal • *sont orthogonaux*
EV normiert • *normalisés*
$\rightsquigarrow \; A = U \cdot D \cdot U^T, \;\; U^{-1} = U^T$

Matrixkomposition mit EW — Composition de matrices avec VP

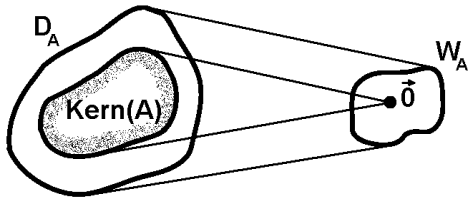
Problem: • **Problème:** Gesucht ist eine geometrische Abbildung, die den Vektor $\vec{x}_1$ in $\lambda_1\,\vec{x}_1$ streckt, $\vec{x}_2$ in $\lambda_2\,\vec{x}_2$ und $\vec{x}_3$ in $\lambda_3\,\vec{x}_3$ (Vektoren *l.u.'l.i.*). Die Abbildung soll zudem Geraden auf Geraden abbilden, also linear sein. • *Trouver une application géométrique qui extend le vecteur $\vec{x}_1$ à $\lambda_1\,\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ à $\lambda_2\,\vec{x}_2$ et $\vec{x}_3$ à $\lambda_3\,\vec{x}_3$ (vecteurs l.u.'l.i.). En plus l'application doit appliquer des droites à des droites, ç.v.d. être linéaire.*

Lösung: • **Solution:** Sei • *Soit* $X = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3), \;\; D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

Bekanntlich hat Matrix $A = X \cdot D \cdot X^{-1}$ die *EW* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und die *EV* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$, leistet also gerade $A \cdot \vec{x}_k = \lambda_k \cdot \vec{x}_1$. • *Comme nous savons, la matrice* $A = X \cdot D \cdot X^{-1}$ *possède les EW* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *et les EV* $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$, *satisfait donc les propriétés exigées.*

10.7 Ausbau und Ergänzungen — Complètement des notions

10.7.1 Rang und Defekt einer linearen Abbildung— Rang et défaut d'une application linéaire



Sei $\mathcal{A}$ lineare Abbildung mit Matrix A.
• *Soit* $\mathcal{A}$ *application linéaire dont la matrice soit* A.
$D_{\mathcal{A}}$ ist Vektorraum der Dimension n.
• $D_{\mathcal{A}}$ *est espace vectoriel de la dimension* n.
$Kern(\mathcal{A}) = \{\vec{x} \mid A \cdot \vec{x} = \vec{0} = \mathbb{L}_{hom}\}$

$\rightsquigarrow \quad D_{\mathcal{A}} \overset{\mathcal{A}}{\longmapsto} W_{\mathcal{A}} \subseteq V,$
(V = Wertevorrat • *réserve de valeurs*)

$\rightsquigarrow \quad Kern(\mathcal{A}) \overset{\mathcal{A}}{\longmapsto} \vec{0}$

Wir definieren: • *Nous définissons:*

Definition: • **Définition:**

$Rang(\mathcal{A}) := Dim(W_{\mathcal{A}})$
$Defect(\mathcal{A}) := Dim(Kern_{\mathcal{A}})$: Defekt von • *défaut de* $\mathcal{A}$

$\mathcal{A}$ ist durch eine Matrix gegeben. Somit ist $\forall_{\vec{v} \in W_{\mathcal{A}}}$ die Theorie der linearen Gleichungssysteme anwendbar, ausgedrückt durch $A \cdot \vec{x} = \vec{v}$. Daher erhalten wir mit dem Rangsatz:
• $\mathcal{A}$ *est donné par une matrice.* $\forall_{\vec{v} \in W_{\mathcal{A}}}$ *on peut donc appliquer la théorie des systèmes d'équations linéaires, exprimé par* $A \cdot \vec{x} = \vec{v}$. *On obtient donc à l'aide du théorème du rang:*

Satz: • **Théorème:**

Vor.: • **Hyp.:** $Dim(D_{\mathcal{A}}) = n$

Beh.: • **Thè.:** $Rang(\mathcal{A}) + Defect(\mathcal{A}) = n$

10.7.2 Caley-Hamilton, Nilpotenz — Caley-Hamilton, nilpotence

Der Satz — Le théorème

Sei • *Soit* A Matrix mit • *matrice avec* $P_n(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \lambda c_1 + c_0$.

Es gilt: • *Il vaut:* λ_k *EW* $\Rightarrow$ $P_n(\lambda_k) = (-1)^n \lambda_k^n + c_{n-1}\lambda_k^{n-1} + \ldots + \lambda_k c_1 + c_0 = 0$

$\Rightarrow \; E \cdot P_n(\lambda_k) = (-1)^n \lambda_k^n E + c_{n-1}\lambda_k^{n-1} E + \ldots + \lambda_k c_1 E + c_0 E = 0 \cdot E = N.$

Komponiere damit: • *Compose à l'aide de cela:*

$$\begin{pmatrix} P_n(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_n(\lambda_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^n\lambda_1^n + c_{n-1}\lambda_1^{n-1} + \ldots + \lambda_1 c_1 + c_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (-1)^n\lambda_n^n + c_{n-1}\lambda_n^{n-1} + \ldots + \lambda_n c_1 + c_0 \end{pmatrix} = N$$

$$\Rightarrow\ (-1)^n \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}^n + c_{n-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}^{n-1} + \ldots + \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} c_1 + c_0 E =$$

$$= (-1)^n D_\lambda^n + c_{n-1} D_\lambda^{n-1} + \ldots + D_\lambda c_1 + c_0 E = N$$

Sei • *Soit* $A = X \cdot D_\lambda \cdot X^{-1} \Rightarrow$

$A^k = (X \cdot D_\lambda \cdot X^{-1}) \cdot (X \cdot D_\lambda \cdot X^{-1}) \cdot \ldots \cdot (X \cdot D_\lambda \cdot X^{-1}) = X \cdot D_\lambda \cdot D_\lambda \cdot \ldots \cdot D_\lambda \cdot X^{-1} =$
$= X \cdot D_\lambda^k \cdot X^{-1} \Rightarrow A^k = X \cdot D_\lambda^k \cdot X^{-1} \rightsquigarrow$

$X \cdot ((-1)^n D_\lambda^n + c_{n-1} D_\lambda^{n-1} + \ldots + D_\lambda c_1 + c_0 E = (-1)^n D_\lambda^n + c_{n-1} D_\lambda^{n-1} + \ldots + D_\lambda c_1 + c_0 E) \cdot X^{-1}$
$= X \cdot N \cdot X^{-1} = N$

$\Rightarrow (-1)^n X \cdot D_\lambda^n \cdot X^{-1} + c_{n-1} X \cdot D_\lambda^{n-1} \cdot X^{-1} + \ldots + X \cdot D_\lambda \cdot X^{-1} c_1 + c_0 X \cdot E \cdot X^{-1}$
$= (-1)^n A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \ldots + A c_1 + c_0 E = N$

Der Fall $A = X \cdot D_\lambda \cdot X^{-1}$ trifft sicher dann ein, wenn $A \in R_n$ und alle *EW* verschieden sind.
• *Le cas* $A = X \cdot D_\lambda \cdot X^{-1}$ *arrive certainement quand* $A \in R_n$ *et toutes les EW sont différentes.*

Es gilt aber noch allgemeiner der Satz: • *Mais il vaut encore plus généralement le théorème:*

Satz: • Théorème: **Caley–Hamilton**

Vor.: • Hyp.:

λ *EW* von • *de A*

$\rightsquigarrow P_n(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \lambda c_1 + c_0 = 0$

Beh.: • Thè.:

$(-1)^n A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \ldots + A c_1 + E c_0 = N$

Kurz: • *Bref:* $P_n(A) = N$

Eine Anwendung — Une application

$(-1)^n A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \ldots + A\, c_1 + E\, c_0 = N$
$\Rightarrow (-1)^n A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \ldots + A\, c_1 = A \cdot ((-1)^n A^{n-1} + c_{n-1} A^{n-2} + \ldots + E\, c_1) = N - E\, c_0 = -E\, c_0$
oder • *ou* $A \cdot \dfrac{1}{c_0} \cdot ((-1)^n A^{n-1} + c_{n-1} A^{n-2} + \ldots + E\, c_1) = E$
$\Rightarrow A^{-1} = \dfrac{1}{c_0} \cdot ((-1)^n A^{n-1} + c_{n-1} A^{n-2} + \ldots + E c_1)$ für • *pour* $c_0 = \det(A) \neq 0,\ A \in R^n$

Korollar: • **Corollaire:** **Vor.:** • **Hyp.:** $A \in R_n$

Beh.: • **Thè.:**

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot ((-1)^n A^{n-1} + c_{n-1} A^{n-2} + \ldots + E\, c_1)$$

$\rightsquigarrow$ Liegen die Koeffizienten c_k von A aus $\mathbb{Z}$, so sind die Koeffizienten von A^{-1} rational.
• *Si les coefficients c_k de A sont dans $\mathbb{Z}$, les coefficients de A^{-1} sont rationnels.*
Wichtig: • **Important:**

A^{-1} lässt sich also als Polynom in A schreiben!
• *A^{-1} se laisse donc écrire comme polynôme dans A!*

Nilpotenz — Nilpotence

Definition: • **Définition:** A heisst **nilpotent** • *A s'appelle* **nilpotent**:

$$\Leftrightarrow \exists_{n \in \mathbb{N}} : \; A^n = N$$

Dann gilt: • *Alors il vaut:* $\det(A)^n = \det(A^n) = \det(N) = 0 \;\Rightarrow\; \det(A) = 0, \;\; A \notin R_n$

Zudem: • *En plus:* $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \;\Rightarrow\; A \cdot A \cdot \vec{x} = A^2 \cdot \vec{x} = A \cdot \lambda \cdot \vec{x} = \lambda \cdot A \cdot \vec{x} = \lambda^2 \cdot \vec{x} \;\Rightarrow\; \ldots$
$\Rightarrow\; A^n \cdot \vec{x} = N \cdot \vec{x} = \vec{0} = \lambda^n \cdot \vec{x} \;\Rightarrow\; \lambda = 0$ für • *pour* $\vec{x} \neq \vec{0}$ $\quad (\forall \lambda \; EW\,)$

Da alle EW somit 0 sind, gilt nach dem Hauptsatz der Algebra: • *Comme toutes les EW sont donc* 0, *il suit d'après le théorème principal de l'algèbre:*

$P_n(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \lambda c_1 + c_0 =$
$= (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \ldots (\lambda_n - \lambda) = (0 - \lambda)(0 - \lambda) \ldots (0 - \lambda) = (-\lambda)^n$

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

A nilpotent • *nilpotent*, $\lambda = EW$ von • *de* A

Beh.: • **Thè.:**

1 $\quad A \notin R_n$

2 $\quad \forall_{\lambda \; EW} \;\; \lambda = 0$

3 $\quad P_n(\lambda) = (-\lambda)^n$

Folgerung: • **Conclusion:** $P_n(A) = (-A)^n = N$ ist Spezialfall von Caley–Hamilton
• *est cas spécial de Caley–Hamilton.*

Bemerkung: • **Remarque:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N$$

10.7.3 Hauptvektoren, Spektrum u.s.w. — Vecteurs principaux, spectre etc.

Seien A Matrix mit: • *Soient A matrice avec: EW λ_i, EV $\vec{x}_i$, $P_n(\lambda) = \det(A - \lambda E)$*

Definition: • **Définition:**

1 Ist λ_i k–fache NS von $P_n(\lambda)$, so heisst $o(\lambda_i) = k$ **algebraische Vielfachheit** von λ_i.
• *Si λ_i est zéro de $P_n(\lambda)$ avec la multiplicité k, $o(\lambda_i) = k$ s'appelle* **multiplicité algébrique** *de λ_i.*

2 Wiederholung: Der Kern von $A - \lambda_i E$ ist der **Eigenraum** von A zu λ_i. • *Répétition: Le noyeau de $A - \lambda_i E$ est l'***espace propre** *de A à λ_i.*
(Das ist die Menge der Vektoren, für die gilt: • *C'est l'ensemble de vecteurs pour lesquels il vaut: $A\vec{x} = \lambda_i \vec{x}$* oder • *ou $\vec{x} \longmapsto A\vec{x} - E\vec{x} = \vec{0}$.*)

3 Die Dimension des Eigenraumes von A zu λ_i heisst **geometrische Vielfachheit** oder kurz Vielfachheit $\nu(\lambda_i)$ von λ_i. • *La dimension de l'espace propre de A pour λ_i s'appelle* **mulitplicité géométrique** *ou bref multiplicité $\nu(\lambda_i)$ de λ_i.*

Man kann zeigen, dass gilt: • *On peut démontrer qu'il vaut:*

Satz: • **Théorème:**

$$1 \leq \nu(\lambda_i) \leq o(\lambda_i) \leq n = grad(P_n(\lambda))$$

<u>Beweis: • Preuve:</u>

Sei • *Soit* $A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \rightsquigarrow (A - \lambda E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$, $A - \lambda E := M(\lambda)$ ($n \times n$–Matrix) • *(matrice $n \times n$)*

Sei λ_1 Eigenwert mit $o(\lambda_1) = k_1$. • *Soit λ_1 valeur propre avec $o(\lambda_1) = k_1$.*
$\rightsquigarrow P_n(\lambda) = \det(M(\lambda)) = (\lambda - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_s)$

$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \Leftrightarrow M(\lambda) \cdot \vec{x} = \vec{0} \rightsquigarrow$ Es gilt: • *Il vaut:* : $Rang(M(\lambda)) + Dim(\mathbb{L}) = n$
Dabei ist $\mathbb{L}$ der Kern von $M(\lambda)$ (Vektorraum!). • *Ici $\mathbb{L}$ est le noyeau de $M(\lambda)$ (espace vectoriel!).*

Bei der Lösung des Gleichungssystems nach Gauss–Jordan wird $M(\lambda)$ durch Elementartransformationen in eine Matrix der folgenden Form übergeführt: • *Si l'on va résoudre le système d'équations d'après Gauss–Jourdan, on transforme $M(\lambda)$ par transformations élémentaires dans une matrice de la forme suivante:*

$$M(\lambda) \longmapsto \tilde{A} := \begin{pmatrix} M_1 & N \\ N & M_2 \end{pmatrix}, \; Dim(M_2) = Dim(\mathbb{L}), \; N = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \; M_1 \in R_n,$$
$$Rang(M_1) = Rang(M(\lambda))$$

Für $\lambda = \lambda_1 = EW$ ist $M_2 = N$ und M_1 eine reguläre Diagonalmatrix.
• *Pour* $\lambda = \lambda_1 = EW$ *il vaut:* $M_2 = N$ *et* M_1 *est une matrice diagonale et regulière.*

Elementartransformationen an einer beliebigen Matrix A kann man bekanntlich durch Multiplikation mit reguläten Matrizen $B_{i,j,k}$ ausführen. So sieht man z.B., dass die unten angegebene Matrix $B_{1,3,k}$ bei einer Multiplikation von links her in der Matrix A zur 1. Zeile das k–fache der Zeile mit der Nummer 3 addiert. • *Comme nous savons, on peut réaliser les transformations élémentaires des matrices* A *quelconques par multiplication avec des matrices régulières* $B_{i,j,k}$. *P.ex. on voit que la matrice* $B_{1,3,k}$ *(qui est montrée en bas) additionne la ligne numéro* 3 *(de la matrice* A*) multipliée par* k *à la ligne numéro* 1 *de la matrice* A *par multiplication depuis la gauche.*

Bsp.: • **Exemple:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}, \quad B_{1,3,k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{2,3,k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots$$

$$\rightsquigarrow B_{1,3,k} \cdot A = \begin{pmatrix} 1+9\,k & 2+10\,k & 3+11\,k & 4+12\,k \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

$$B_{2,3,k} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5+9\,k & 6+10\,k & 7+11\,k & 8+12\,k \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

mit • *avec* $\det(B_{i,j,k}) = 1$

Weiter braucht man noch Zeilenvertauschungen, die ebenfalls mit Matrizen $C_{i,j}$ ausführbar sind.
• *En outre on a encore besoin d'échangements de lignes. Quant à celà on utilise aussi des matrices* $C_{i,j}$.

Bsp.: • **Exemple:** $C_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_{1,3} \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$

Wie man sieht ist $\det(C_{i,j}) \neq 0$. • *Comme on voit il vaut* $\det(C_{i,j}) \neq 0$. $\quad (\det(C_{1,3}) = -1)$

Lemma: • **Lemme:** **Vor.:** • **Hyp.:**

Elementartransformationen
• *Transformations élémentaires*

$$M(\lambda) \longmapsto \tilde{M}(\lambda) := \begin{pmatrix} M_1 & N \\ N & M_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = EW$$

Beh.: • **Thè.:**

$$\exists_T \ : \ T \cdot M(\lambda) = \begin{pmatrix} M_1 & N \\ N & M_2 \end{pmatrix}, \quad \det(T) \neq 0$$

T ist ein Produkt von Matrizen der Form $B_{i,j,k}$ und $C_{i,j}$. Nach dem Determinantenmultiplikationssatz ist daher $\det(T) \neq 0$. • *T est un produit de matrices de la forme $B_{i,j,k}$ et $C_{i,j}$. Selon le théorème de la multiplication des déterminants il vaut donc* $\det(T) \neq 0$.

Sei • *Soit* $\lambda = \lambda_1 + \varepsilon,\ \varepsilon << 1 \Rightarrow \lambda \neq EW$

$$\rightsquigarrow \det(M(\lambda)) = (\lambda-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(\lambda-\lambda_1)\cdot(\lambda-\lambda_2)\cdot\ldots\cdot(\lambda-\lambda_s) = \varepsilon\cdot\ldots\cdot\varepsilon\cdot(\lambda_1+\varepsilon-\lambda_2)\cdot\ldots\cdot(\lambda_1+\varepsilon-\lambda_s) =$$
$$= \varepsilon^{k_1}\cdot(\lambda_1+\varepsilon-\lambda_2)\cdot\ldots\cdot(\lambda_1+\varepsilon-\lambda_s) \neq 0, \quad \Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0}\det(M(\lambda)) = 0$$

$\rightsquigarrow \det(M(\lambda)) = \det(T)\cdot\det(\tilde{M}(\lambda)),\ \det(T) \neq 0 \Rightarrow \det(\tilde{M}(\lambda)) \approx \varepsilon^{k_1}\cdot k_2,\ k_2 \neq 0,$
$\tilde{M}(\lambda)$ = Ergebnismatrix nach Gauss–Jordan. • *... matrice, résultat après Gauss–Jordan.*

Bei der Berechnung von $\det(\tilde{M}(\lambda_1)) = \det(\begin{pmatrix} M_1 & N \\ N & M_2 \end{pmatrix})$ nach dem Determinantenentwicklungssatz entstehen also dann k_1 Faktoren der Grösse ε und $n-k_1$ Faktoren q_i mit $|q_i| >> 0$, die vielleicht ungefähr die Diagonalelemente von M_1 sein könnten.
• *Lors du calcul de* $\det(\tilde{M}(\lambda_1)) = \det(\begin{pmatrix} M_1 & N \\ N & M_2 \end{pmatrix})$ *d'après le théorème du développement du déterminant on obtient avec $\varepsilon \to 0$ donc k_1 facteurs 0 et $n-k_1$ facteurs $\neq 0$ qui probablement pourraient être approximativement les éléments de la diagonale de M_1.*

$$\rightsquigarrow \det(M_2) \approx \varepsilon^{k_1}\cdot k_3,\ k_3 \neq 0$$

Nun kann es möglich sein, dass die k_1 Faktoren ε schon in den Elementen von M_2 stecken. Ein Faktor der Grösse ε könnte aber auch durch die Summation entstehen, wenn etwa gleich grosse positive und negative Produkte addiert werden. Daher kann man statt der Gleichheit nur folgern: $n - Rang(M_1) \leq k_1$. Lässt man dann $\varepsilon \to 0$ gehen, so folgt: • *Maintenant il peut être possible que les k_1 facteurs ε se trouvent déjà dans les éléments de M_2. Mais un facteur de la grandeur ε peut aussi résulter de la sommation, si on additionne deux produits qui sont l'un positif et l'autre négatif et à peu près de la même grandeur. C'est pourquoi qu'on ne peut conclure que le rapport suivant à la place de l'égalité: $n - \text{Rang}(M_1) \leq k_1$. Alors, si on laisse aller $\varepsilon \to 0$, on peut déduire:*

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$\tilde{M}(\lambda_1) := \begin{pmatrix} M_1 & N \\ N & M_2 \end{pmatrix}$$

wie oben • *comme ci–dessus*

Beh.: • **Thè.:**

$$M_2 = N,\ \ Rang(M_1) \geq n - k_1$$

Nun gilt: • *Maintenant in vaut:*

$$n = Rang(M(\lambda_1)) + Dim(\mathbb{L}) = Rang(M_1) + Dim(\mathbb{L})$$
$$\geq n - k_1 + Dim(\mathbb{L}) \Rightarrow k_1 = o(\lambda_1) \geq Dim(\mathbb{L}) = \nu(\lambda_1)$$

Konsequenz: • **Conséquence:** $\nu(\lambda_1) \leq o(\lambda_1)$

1. Beispiel: • **Exemple 1:** Sei • *Soit* $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Die Rechnung zeigt: • *Le calcul montre:*

$\det(M) = 1,\ \ M \in R_n,\ \{EW\} = \{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1\} \ \Rightarrow\ o(\lambda_1) = 3,\ \ EV = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$
$\Rightarrow\ \nu(\lambda_1) = Dim(\mathbb{L}) = 2 < o(\lambda_1) = 3$

2. Beispiel: • **Exemple 2:** Sei • *Soit* $M = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Die Rechnung zeigt: • *Le calcul montre:*

$\det(M) = 1,\ \ M \in R_n,\ \{EW\} = \{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1\} \ \Rightarrow\ o(\lambda_1) = 3,\ \ EV = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$
$\Rightarrow\ \nu(\lambda_1) = Dim(\mathbb{L}) = 3 = o(\lambda_1)$
☺

Im Falle von $\nu(\lambda_i) < o(\lambda_i)$ existieren zu λ_i sogenannte **Hauptvektoren** höherer Stufe.
• *Dans le cas* $\nu(\lambda_i) < o(\lambda_i)$ *il existent pour* λ_i *des* **vecteurs principaux** *de niveau supérieur.*

Definition: • **Définition:** $\vec{x}$ heisst **Hauptvektoren** q**–ter Stufe** zu λ_i, wenn gilt:
• $\vec{x}$ *s'appelle* **vecteur principal du niveau** q *pour* λ_i*, s'il vaut:*

$$(A - \lambda_i E)^q \cdot \vec{x} = \vec{0},\ \ (A - \lambda_i E)^{q-1} \cdot \vec{x} \neq \vec{0}$$

Wir zeigen, dass ein Hauptvektor $\vec{x}_i$ zu λ_i keine Komponenten in Richtung anderer Hauptvektoren $\vec{x}_k$ zu $\lambda_k \neq \lambda_i$ hat: • *Nous déduisons le fait qu'un vecteur principal* $\vec{x}_i$ *pour* λ_i *n'a pas de composants en direction d'autres vecteurs principaux* $\vec{x}_k$ *pour* $\lambda_k \neq \lambda_i$*:*

Wir nehmen das Gegenteil an: • *Nous admettons le contraire:* Sei • *Soit* $\vec{x}_i = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \vec{x}_k$.

Es ist: • *il vaut:* $(A - \lambda_i\, E) \cdot \vec{x}_k = A\,\vec{x}_k - \lambda_i\, E\,\vec{x}_k = \lambda_k\,\vec{x}_k - \lambda_i\,\vec{x}_k = (\lambda_k - \lambda_i)\,\vec{x}_k$
$\Rightarrow\ (A - \lambda_i\, E)^q \cdot \vec{x}_k = (\lambda_k - \lambda_i)\,(A - \lambda_i\, E)^{q-1} \cdot \vec{x}_k = \ldots = (\lambda_k - \lambda_i)^q \cdot \vec{x}_k$

$$\rightsquigarrow\quad \vec{0} = (A - \lambda_i\, E)^q \cdot \vec{x}_i = (A - \lambda_i\, E)^q \sum_{k=1}^{n} \mu_k\,\vec{x}_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k\,(A - \lambda_i\, E)^q \cdot \vec{x}_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k\,(\lambda_k - \lambda_i)^q \cdot \vec{x}_k$$

mit • *avec* $\{\vec{x}_k\}$ *l.u.'l.i.* $\Rightarrow\ \mu_k\,(\lambda_k - \lambda_i)^q = 0,\ \ \lambda_k \neq \lambda_i\ (k \neq i)\ \Rightarrow\ \forall_{k \neq i}\, \mu_k = 0$
$\rightsquigarrow$ Widerspruch! • *Contradiction!*

Konsequenz: • **Conséquence:** Ein Hauptvektor $\vec{x}_i$ zu λ_i hat keine Komponenten in Richtung anderer Hauptvektoren $\vec{x}_k$ zu $\lambda_k \neq \lambda_i$. • *Un vecteur principal* $\vec{x}_i$ *pour* λ_i *n'a pas de composants en direction d'autres vecteurs principaux* $\vec{x}_k$ *pour* $\lambda_k \neq \lambda_i$.

Mit den Eigenvektoren und den Hauptvektoren höherer Stufe kann man also eine Basis des gesamten Vektorraums mit $Dim(VR'EV) = Rang(A)$ komponieren. • *Avec les vecteurs propres et les vecteurs principaux de niveau supérieur on peut donc composer une base de l'espace vectoriel avec* $Dim(VR'EV) = Rang(A)$.

Definition: • **Définition:** Der **Hauptraum** zu λ_i ist der **Spann** (Menge der Linearkombinationen) aller Hauptvektoren zu λ_i. • *L'espace principal de* λ_i *est l'ensemble des combinaisons linéaires de tous les vecteurs principaux de* λ_i.

Konsequenz: • **Conséquence:** Die Dimension des Hauptraumes ist $o(\lambda_i)$. Hauptvektoren der Stufe 1 sind Eigenvektoren. • *La dimension de l'espace principal est* $o(\lambda_i)$*. Les vecteurs principaux du niveau*

1 *sont les vecteurs propres.*

Bemerkung: • **Remarque:** Hat λ_i die algebraische Vielfachheit 1, so gibt es keine Hauptvektoren höherer Stufe. • *Si* λ_i *a la multiplicité algébrique* 1, *il n'existent pas des vecteurs principaux du niveau supérieur.*

Definition: • **Définition:**

1 Das **Spektrum** von A ist die Menge der Eigenwerte von A:
• *Le* **spectre** *de* A *est l'ensemble des vecteurs propres de* A*:*

$$\sigma(A) = \{\lambda_i, \ldots \lambda_n\} \subset \mathbb{C}$$

2 Die **Resolventenmenge** von A ist:
• *L'ensemble* **résolvant** *de* A *est:* $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$

Folgerung: • **Conclusion:** Für $\lambda \in \rho(A)$ existiert daher $(A - \lambda E)^{-1}$.
• *Pour* $\lambda \in \rho(A)$, *le terme* $(A - \lambda E)^{-1}$ *existe donc.*

Definition: • **Définition:** $(A - \lambda E)^{-1}$ heisst **Resolvente** zu A.
• *s'appelle* **résolvante** *de* A.

10.7.4 Beispiele — Exemples

1. Beispiel: • **Exemple 1:** Drehung • *Rotation*,

<u>*EW*</u>: Sei • *Soit* $D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\ P_\varphi(\lambda) = \det(D_\varphi - \lambda E) = \cos(\varphi) - \lambda - \sin(\varphi)\sin(\varphi)\cos(\varphi) - \lambda = \\ = \cos^2(\varphi) - 2\lambda\cos(\varphi) + \lambda^2 - (-\sin^2(\varphi)) = \lambda^2 - 2\lambda\cos(\varphi) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow\ \lambda_{1,2} = \frac{2\cos(\varphi) \pm \sqrt{4\cos^2(\varphi) - 4}}{2} = \cos(\varphi) \pm \sqrt{\cos^2(\varphi) - 1} = \cos(\varphi) \pm i \cdot \sqrt{1 - \cos^2(\varphi)} = \\ = \cos(\varphi) \pm i \cdot \sqrt{\sin^2(\varphi)} = \cos(\varphi) \pm i \cdot \sin(\varphi) \in \mathbb{R} \ \text{ für } \bullet \ \textit{pour } \varphi = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

<u>*EV*</u>:

$$\varphi = 0 \ \Rightarrow\ \lambda = 1 \ \Rightarrow\ D_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E \ \Rightarrow\ \ EWP'PVP : E \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \ \Rightarrow\ \forall_{\vec{x}} : \vec{x} \in \mathbb{L}$$

$\Rightarrow$ speziell: • *spécialement:* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} \in \mathbb{L}$ (Basis • *base*).

2. Beispiel: • **Exemple 2:**

<u>*EW*</u>:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ P_k(\lambda) = \det(A - \lambda E) = (1 - \lambda)^2 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda_{1,2} = 1$$

<u>*EV*</u>:

$$E \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \ \Rightarrow\ \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ \begin{pmatrix} x + k \cdot y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ x + k \cdot y = x$$

$\triangleright$ $k = 0 \ \Rightarrow\ A = E \ \Rightarrow\ \forall_{\vec{x}} : \vec{x} \in \mathbb{L} \ \Rightarrow$ speziell: • *spécialement:* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} \in \mathbb{L}$ (Basis • *base*).

$\triangleright\ k \neq 0 \ \Rightarrow\ y = 0 \ \Rightarrow\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x\,\vec{e}_1$, z.B. • *p.ex.* $\{\ EV\} = \{\vec{e}_1\}$.
$\rightsquigarrow\ \neq$ Basis! • $\neq$ *base!*

$\rightsquigarrow$ Hauptvektoren: Noch ein Vektor notwendig! • *Vecteurs principaux: Il manque un vecteur!*
$\rightsquigarrow\ (A - \lambda E) = (A - E) = \begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow\ ((A - \lambda E) \cdot (A - \lambda E)) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (A - \lambda E)^2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = N \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}\ \forall_{\vec{x}}$
$\Rightarrow\ \mathbb{L} = \{\vec{x} \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ \wedge\ x, y \in \mathbb{R}\}$

Speziell: • *Spécialement:* $\vec{e}_2 \in \mathbb{L} \ \Rightarrow\ \vec{e}_2 =$ Hauptvektor • *vecteur principal.*

$\vec{e}_1 = EV \ \Rightarrow\ \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$: Basis mit Eigen- und Hauptvektor(en) • *La base est composée de vecteur(s) propres et de vecteur(s) principaux.*

10.7.5 Polynomnullstellen und EW — Zéros de pôlynomes et VP

Als Beispiel wählen wir Dimension = 5. • *Comme exemple nous choisissons dimension* = 5.

Sei • *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$, $A_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 + \frac{1}{x} \end{pmatrix}$,

$$\frac{1}{x} \cdot E = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \ \Rightarrow\ A_x - \frac{1}{x} \cdot E := M_x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{x} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{x} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{x} & 1 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

Eine Rechnung zeigt: • *On calcule:* $x^4 \cdot \det(M_x) = a_4\,x^4 + a_3\,x^3 + a_2\,x^2 + a_1\,x^1 + a_0\,x^0 := p(x)$

Sei • *Soit* $x \neq 0,\ p(x) = 0,\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x^4 \\ x^3 \\ x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\ A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^4 \\ x^3 \\ x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 \\ x^1 \\ 1 \\ p(x) = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 \\ x^1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ A_x \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 + \frac{1}{x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^4 \\ x^3 \\ x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 \\ x^1 \\ x^0 = 1 \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix} = x^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x^4 \\ x^3 \\ x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} = x^{-1} \cdot \vec{x}$$

$\Rightarrow\ A_x \cdot \vec{x} = x^{-1} \cdot \vec{x} \rightsquigarrow\ x^{-1}$ ist *EW* von A_x zum *EV* $\vec{x}$. • x^{-1} *est EW de* A_x *pour le EV* $\vec{x}$.

Dazu ist: • *En outre on a:* $\quad p(x) = x^4 \cdot \det(M_x)$.

10.8 Geometrische Anwendungen — Applications géométriques

10.8.1 Begriffe: Morphismen — Notions: Morphismes

Sei $(A, \circ_1, \circ_2, \ldots, \circ_n)$ eine algebraische Struktur. • *Soit* $(A, \circ_1, \circ_2, \ldots, \circ_n)$ *une structure algébrique.*

($\rightsquigarrow$ A: Menge • *ensemble*, $\circ_k$: Verknüpfung zwischen Elementen aus A • *adjonction d'éléments de A.*

D.h. • *Ç.v.d.* $a_k, a_l \in A \;\Rightarrow\; ((a_k) \circ_i (a_l)) \in A \;\; (\forall_{k,l,i})$.

Bsp.: • **Exemple:** $\circ_1 = \,'+'$, $\circ_2 = \,'\cdot'$

Ebenso sei $(B, *_1, *_2, \ldots, *_n)$ eine algebraische Struktur mit den Verknüpfungen $*_1, *_2, \ldots, *_n$.
• *De même* $(B, *_1, *_2, \ldots, *_n)$ *soit une structure algébrique avec les adjonctions* $*_1, *_2, \ldots, *_n$.

Definition: • **Définition:** Eine Abbildung $\Phi : A \longmapsto B$ heisst **Homomorphismus**
• *Une application* $\Phi : A \longmapsto B$ *s'appelle* **homomorphisme**

$$\Leftrightarrow \qquad \forall_{i,k,l} : \qquad \Phi((a_k) \circ_i (a_l)) = (\Phi((a_k)) *_i (\Phi(a_l)))$$

$\Phi((a_k) \circ_i (a_l)) \rightsquigarrow$ Bild der Verknüpfung $((a_k) \circ_i (a_l))$ • *Image de l'adjonction* $((a_k) \circ_i (a_l))$.

$\Phi((a_k)), \Phi((a_l)) \rightsquigarrow$ Bilder der $(a_k), (a_l)$ • *Images de* $(a_k), (a_l)$.

$(\Phi((a_k)) *_i (\Phi(a_l))) \rightsquigarrow$ Verknüpfung der Bilder • *Adjonction des images.*

D.h. ein Homomorphismus ist strukturerhaltend: Es kommt auf dasselbe heraus, ob man die Verknüpfung zweier Elemente (in der Urbildmenge) abbildet — oder ob man die Bilder zweier Elemente (in der Bildmenge) verknüpft.
• *Ç.v.d. un homomorphisme conserve la structure: C'est la même chose si l'on applique l'adjonction de deux éléments (dans l'ensemble des originaux) — ou si l'on fait l'adjonction de deux images d'éléments (dans l'ensemble d'images).*

Bsp.: • **Exemple:** $A = \mathbb{R}_0^+$, $B = \mathbb{R}$, $\Phi :\; Phi(x) = \ln(x)$, $'\circ' = '+'$, $'*' = '\cdot'$

$$\Rightarrow \; \Phi(x_1 \circ x_2) = \ln(x_1 \cdot x_2) = \Phi(x_1) + \Phi(x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$$

Definition: • **Définition:**

Endomorphismus: Homomorphismus von A auf sich selbst.
• **Endomorphisme:** *Homomorphisme de A sur soi–même.*

Isomorphismus Φ**:** Φ Homomorphismus und Φ bjiektiv.
• **Isomorphisme** Φ**:** Φ *homomorphisme et* Φ *bjiectif.*

Automorphismus: Isomorphismus von A auf sich selbst.
• **Automorphisme:** *Isomorphisme de A sur soi–même.*

10.8.2 Lineare Abbbildung, Matrix und Basisabbildung — Application linéaire, matrice et application de base

Definition — Définition

Sei • *Soit* $V = \{\vec{x}_i \mid i \in M\}$, $M =$ Indexmenge • *ensemble des index.*
Ebenso für • *De même pour* V'.

Wir definieren für V und V' unabhängig von der Darstellung der Vektoren $\vec{x}_i$ in einer Basis den Begriff „lineare Abbildung“ neu und allgemeiner: • *Nous définissons pour V et V', indépendamment de la représentation des vecteurs $\vec{x}_i$ dans une base, de nouveau et de façon plus générale la notion "application linéaire":*

Definition: • **Définition:**

$\Phi : \vec{x} \longmapsto \vec{x}\,'_{V'} = \Phi(\vec{x})$:

$\Phi : V \longmapsto V'$ heisst **linear**: • *s'appelle* **linéaire**:

$$\Leftrightarrow \forall_{\vec{x},\vec{y}\in V} \quad \Phi(\vec{x}+\vec{y}) = \Phi(\vec{x}) + \Phi(\vec{y})$$
$$\forall_{\vec{x}\in V, \lambda\in\mathbb{C}(\mathbb{R})} \quad \Phi(\lambda\,\vec{x}) = \lambda\,\Phi(\vec{x})$$

Konsequenz: • **Conséquence:** $\forall_{\vec{x},\vec{y}\in V}$: $\Phi(\vec{x}+\vec{y}) = \Phi(\vec{x}) + \Phi(\vec{y})$ bedeutet, dass Φ ein Homomorphismus ist • *signifie que Φ est un homomorphisme.*

Wendet man dieses Gesetz auf Summen mit mehreren Summanden an, so folgt:
• *Si l'on applique cette loi pour des sommes avec plusieurs termes additionnels, on déduit:*

Satz: • **Théorème:**

Vor.: • **Hyp.:**

Φ linear • *linéaire*

Beh.: • **Thè.:**

$$\Phi(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\,\vec{x}_i) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\,\Phi(\vec{x}_i)$$

Dabei ist: • *Il vaut:* $m \leq Dim(VR'EV)$ mit • *avec* $VR'EV = LK'CL(\{\vec{x}_i\})$.

Speziell für $\lambda_i = x_i$ und $\vec{x}_i = \vec{e}_i$, d.h. für $\sum_{i=1}^{n} x_i\,\vec{e}_i = \vec{x}_i$ folgt:

• *Spécialement pour $\lambda_i = x_i$ et $\vec{x}_i = \vec{e}_i$, ç.v.d. pour $\sum_{i=1}^{n} x_i\,\vec{e}_i = \vec{x}_i$ il suit:*

Korollar: • **Corollaire:**

Vor.: • **Hyp.:**

Φ linear • *linéaire*

Beh.: • **Thè.:**

$$\Phi(\vec{x}) = \Phi(\sum_{i=1}^{n} x_i\,\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \Phi(\vec{e}_i)$$

Konsequenz: • **Conséquence:** Kennt man die Bilder $\Phi(\vec{e}_i)$ der Basisvektoren $\vec{e}_i$, so kennt man auch $\Phi(\vec{x})\ \forall_{\vec{x}}$. • *Si l'on connaît les images $\Phi(\vec{e}_i)$ des vecteurs de base $\vec{e}_i$, on connaît aussi les images $\Phi(\vec{x})\ \forall_{\vec{x}}$.*

Lineare Abbildung und Matrix — Application linéaire et matrice

Sei • *Soit* $\{\vec{e}_i \mid i = 1,\ldots,n\}$ eine Basis von • *une base de* V, $Dim(V) = n$.
Sei • *Soit* $\{(\vec{e}_i)' \mid i = 1,\ldots,n\}$ eine Basis von • *une base de* V', $Dim(V') = m$.
Dann ist (nach Definition der linearen Abbildung) $\Phi(\vec{e}_i)$ eine Linearkombination der $(\vec{e}_k)'$.

• *D'après la définition de l'application linéaire,* $\Phi(\vec{e}_i)$ *est alors une combinaison linéaire des* $(\vec{e}_k)'$.

$$\rightsquigarrow \quad \exists_{\alpha_{ki}} : \ \Phi(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ki}(\vec{e}_k)' \ \in V'$$

Wir führen in Anlehnung an das Skalarprodukt die folgende Kurzschreibweise ein:
• *Nous introduisons, selon le produit scalaire, la façon d'écrire brève suivante:*

Schreibweise: • **Façon d' écrire:** $\vec{x}_V = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_V \overbrace{:=}^{Def.} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{Matr.} \circ \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{pmatrix}_V$

Für das Bild eines beliebigen Vektors $\vec{x} \in V$ folgt damit:
• *Pour l'image d'un vecteur quelconque* $\vec{x} \in V$ *on déduit en utilisant cette façon d'écrire:*

Sei • *Soit* $\Phi(\vec{e}_i) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ki}(\vec{e}_k)')$, $\vec{e}_i = (\vec{e}_i)_V$, $\vec{e}_k{}' = (\vec{e}_k)_{V'}$

$$V' \ni \vec{x}' = \Phi(\vec{x}) = \Phi(\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \Phi(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (\sum_{k=1}^{m} \alpha_{ki}(\vec{e}_k)') =$$

$$= x_1 \cdot (\alpha_{11}(\vec{e}_1)' + \ldots + \alpha_{m1}(\vec{e}_m)') + \ldots + x_n \cdot (\alpha_{1n}(\vec{e}_1)' + \ldots + \alpha_{mn}(\vec{e}_m)') =$$
$$= (x_1\alpha_{11} + \ldots x_n\alpha_{1n})(\vec{e}_1)' + \ldots + (x_1\alpha_{m1} + \ldots x_n\alpha_{mn})(\vec{e}_m)' =$$

$$= \begin{pmatrix} (x_1\alpha_{11} + \ldots x_n\alpha_{1n}) \\ \vdots \\ (x_1\alpha_{m1} + \ldots x_n\alpha_{mn}) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} (\vec{e}_1)' \\ \vdots \\ (\vec{e}_m)' \end{pmatrix}_{V'} = (\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}) \circ \begin{pmatrix} (\vec{e}_1)' \\ \vdots \\ (\vec{e}_m)' \end{pmatrix}_{V'} =$$

$$= (M \cdot \vec{x}) \circ \begin{pmatrix} (\vec{e}_1)' \\ \vdots \\ (\vec{e}_m)' \end{pmatrix}_{V'} = \begin{pmatrix} (x_1)' \\ \vdots \\ (x_m)' \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} (\vec{e}_1)' \\ \vdots \\ (\vec{e}_m)' \end{pmatrix}_{V'} = (x_1)'(\vec{e}_1)' + \ldots + (x_m)'(\vec{e}_m)' = \vec{x}' \in V'$$

Dabei ist • *Il y est:* $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = M$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_V = \vec{x} \in V$, $\Phi(\vec{x}) = \vec{x}' \in V'$

Dass $\vec{x}_V = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_V$ die Darstellung von $\vec{x}$ in der betrachteten Basis in V und $\vec{x}_V{}' = \begin{pmatrix} (x_1)' \\ \vdots \\ (x_m)' \end{pmatrix}_{V'}$ die Darstellung von $\vec{x}'$ in der entsprechenden betrachteten Basis in V' ist, sieht man an den Indices n und m.

• *On voit par les index* n *et* m *que* $\vec{x}_V = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_V$ *est la représentation de* $\vec{x}$ *dans la base considérée dans* V *et* $\vec{x}_V{}' = \begin{pmatrix} (x_1)' \\ \vdots \\ (x_m)' \end{pmatrix}_{V'}$ *la représentation de* $\vec{x}'$ *dans la base considérée correspondante dans* V'.

$\rightsquigarrow$

Satz: • **Théorème:** Eine lineare Abbildung $\Phi:\ V \overset{in}{\longmapsto} V'$ (in V') ist wie folgt gegeben:
• *Une application linéaire* $\Phi:\ V \overset{in}{\longmapsto} V'$ *(dans V') est donnée comme il suit:*

$$\Phi : \vec{x}_V = \vec{x} \circ \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \longmapsto (\vec{x})' = (\vec{x})' \circ \begin{pmatrix} (e_1)' \\ \vdots \\ (e_n)' \end{pmatrix}_{V'}$$

mit • *avec* $(\vec{x})'_{V'} = (M \cdot \vec{x})_{V'},\ \ M = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$

Konsequenz: • **Conséquence:** Eine lineare Abbildung $\Phi:\ V \overset{in}{\longmapsto} V'$ ist durch eine Matrix M gegeben. • *Une application linéaire* $\Phi:\ V \overset{in}{\longmapsto} V'$ *est donnée par une matrice M.*

Lineare Abbildung und Basisabbildung — Application linéaire et application de la base

Wendet man Φ speziell auf die Basis an, so gilt:
• *Si l'on applique Φ spécialement pour la base, on obtient:*

$$\Phi(\vec{e}_i) = \Phi((\vec{e}_i)_V) = \Phi(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_V) = 1 \cdot (\alpha_{1i}(\vec{e}_1)' + \ldots + \alpha_{mi}(\vec{e}_m)')) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ki}\,(\vec{e}_k)'$$

$\rightsquigarrow$ Für alle Vektoren zusammen: • *Pour tous les vecteurs ensemble:*

$$\Phi:\ \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \Phi(\vec{e}_1) \\ \vdots \\ \Phi(\vec{e}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{m} \alpha_{k1}(\vec{e}_k)' \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{m} \alpha_{kn}(\vec{e}_k)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} (\vec{e}_1)' \\ \vdots \\ (\vec{e}_m)' \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{mn} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} (\vec{e}_1)' \\ \vdots \\ (\vec{e}_m)' \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{m1})^T * \begin{pmatrix} (\vec{e}_1)' \\ \vdots \\ (\vec{e}_m)' \end{pmatrix} \\ \vdots \\ (\alpha_{1n}, \ldots, \alpha_{mn})^T * \begin{pmatrix} (\vec{e}_1)' \\ \vdots \\ (\vec{e}_m)' \end{pmatrix} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} (\vec{e}_1)' \\ \vdots \\ (\vec{e}_m)' \end{pmatrix} = M^T * \begin{pmatrix} (\vec{e}_1)' \\ \vdots \\ (\vec{e}_m)' \end{pmatrix}$$

($\circ$: Formales Skalarprodukt • *forme de produit scalaire*
$*$: Formales Matrixprodukt • *forme de produit de matrice*)

Satz: • **Théorème:** Ist die Matrix M durch eine lineare Abbildung $V \overset{\Phi}{\longmapsto} V'$ gegeben, so wird durch M^T die Basis von V auf die Basis von V' abgebildet: • *Si la matrice M est donnée par une application linéaire $V \overset{\Phi}{\longmapsto} V'$, M^T applique la base de V sur la base de V':*

$$\vec{x}_V \overset{\Phi}{\longmapsto} \vec{x}\,'_{V'} = (M \cdot \vec{x})_{V'}$$

$$\Phi : \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \Phi(\vec{e}_1) \\ \vdots \\ \Phi(\vec{e}_n) \end{pmatrix} = M^T * \begin{pmatrix} (\vec{e}_1)\,' \\ \vdots \\ (\vec{e}_m)\,' \end{pmatrix}$$

Dabei berechnet sich $M^T * \begin{pmatrix} (\vec{e}_1)\,' \\ \vdots \\ (\vec{e}_m)\,' \end{pmatrix}$ nach den Regeln des Matrixprodukts. • *Ici l'expression* $M^T * \begin{pmatrix} (\vec{e}_1)\,' \\ \vdots \\ (\vec{e}_m)\,' \end{pmatrix}$ *se calcule d'après les règles du produit matriciel.*

Konsequenz: • **Conséquence:** Wenn somit M^T durch die Basisabbildung bekannt ist, so kennt man auch die neuen Koordinaten $(M \cdot \vec{x})$ eines jeden Vektors $\vec{x}$. • *Si on connaît donc M^T parce qu'on connaît l'application de la base, on connaît donc aussi les coordonnées $(M \cdot \vec{x})$ de n'importe quel vecteur $\vec{x}$.*

Bsp.: • **Exemple:** $(\vec{e}_1)\,' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2)\,' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $V = V'$ (Spezialfall • *Cas spécial*)

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \vec{e}_1\,' \\ \vec{e}_2\,' \end{pmatrix} = (M^T)^{-1} * \begin{pmatrix} (\vec{e}_1) \\ (\vec{e}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot \vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2 \\ 1 \cdot \vec{e}_1 + (-1)\,\vec{e}_2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \Phi : \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \Phi(\vec{e}_1) \\ \Phi(\vec{e}_2) \end{pmatrix} = M^T * \begin{pmatrix} (\vec{e}_1)\,' \\ (\vec{e}_2)\,' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\left(\frac{1}{3}\right) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} (\vec{e}_1)\,' \\ (\vec{e}_2)\,' \end{pmatrix},$$

$$M^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\left(\frac{1}{3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \vec{v}_V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_V \longmapsto (\vec{v}\,')_{V'} = (M * \vec{v})_{V'} = (M * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix})_{V'} = \begin{pmatrix} 1\,x_1 + 2\,x_2 \\ 1\,x_1 - 1\,x_2 \end{pmatrix}_{V'}$$

Dimensionssatz — Théorème de la dimension

Wegen der Definition der Linearität gilt: • *A cause de la définition de la linéarité il vaut:*

$$\Phi(\vec{x}_1), \Phi(\vec{x}_2) \in V' \;\Rightarrow\; \Phi(\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2) = \lambda_1 \Phi(\vec{x}_1) + \lambda_2 \Phi(\vec{x}_2) \in V'$$

Das bedeutet, dass die Menge der Bilder $\{\Phi(\vec{x})\} = \Phi(V)$ einen Vektorraum $\subseteq V'$ bilden, der in natürlicher Weise Unterraum von V' ist.
• *Cela signifie que l'ensemble des images $\{\Phi(\vec{x})\} = \Phi(V)$ constituent un espace vectoriel $\subseteq V'$ qui forme de façon naturelle un sous–espace de V'.* $\rightsquigarrow$

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

Φ linear • *linéaire*, $\Phi : V \longmapsto \Phi(V) \subseteq V'$

Beh.: • **Thè.:**

$\Phi(V)$ ist Unterraum von V' • *est sous–espace de* V'

Seien • *Soient* $\vec{x} \in V$, $(\vec{x})' \in V'$. Sei Φ gegeben durch die Matrix M. • *Soit* Φ *donné par la matrice* M.

Wegen • *A cause de* $(\vec{x})' = M \cdot \vec{x}$ gilt: • *il vaut:*

Φ bijektiv • *bijectif* $\Rightarrow$ M regulär • *régulier* $\Rightarrow$ $\Phi : \; 0 \overset{bij.}{\longmapsto} 0'$.

Daher gilt • *Donc il suit:*

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

Φ linear • *linéaire*

Beh.: • **Thè.:**

Φ bijektiv • *bijectif* $\Rightarrow$ $\Phi : \; 0 \overset{bij.}{\longmapsto} 0'$ $\Rightarrow$ Φ bildet *l.u.'l.i.* Vektoren auf *l.u.'l.i.* Vektoren ab. • .Φ applique des vecteurs *l.u.'l.i.* sur des vecteurs *l.u.'l.i.*.

Φ ist somit Isomorphismus • Φ *est donc isomorphisme.*

Konsequenz: • **Conséquence:** Φ Isomorphismus • *isomorphisme* $\Rightarrow$ $Dim(V) = Dim(V')$

Von früher kennen wir die Definition: • *Nous connaissons déjà la définition:*

Definition: • **Définition:** $Kern(\Phi) := \{\vec{x} \in V \mid \vec{x} \longmapsto \Phi(\vec{x}) = 0' \in V'\}$

Es gilt der Satz: • *Nous déduisons le théorème:*

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

Φ linear • *linéaire*, $\Phi: V \longmapsto \Phi(V) \subseteq V'$

Beh.: • **Thè.:**

$Kern(\Phi)$ = linearer Unterraum von V'
• = *sous–espace linéaire de* V'.

Zum Beweis: • *Quant à la preuve:* $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in Kern(\Phi)$

$$\Rightarrow \Phi(\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2) = \lambda_1\Phi(\vec{x}_1) + \lambda_2\Phi(\vec{x}_2) = \lambda_1 0' + \lambda_2 0' = 0' \Rightarrow \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 \in Kern(\Phi).$$

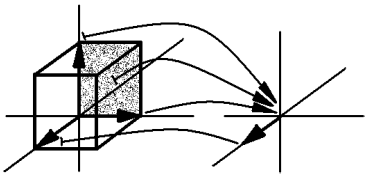
Daher folgt: • *Il suit donc:*

Korollar: • **Corollaire:** **Vor.:** • **Hyp.:**

Φ linear • *linéaire*, $\Phi: V \longmapsto \Phi(V)$

Beh.: • **Thè.:**

$Kern(\Phi) = \{0\} \Leftrightarrow Dim(V) = Dim(V')$



Da Φ durch eine Matrix M gegeben ist, folgt aus dem Rangsatz für Gleichungssysteme ($M \cdot \vec{x} = \vec{b}$) der **Dimensionssatz**:
• *Comme* Φ *est donné par une matrice* M *on déduit du théorème du rang pour des systèmes d'équations* ($M \cdot \vec{x} = \vec{b}$) *le* **théorème de la dimension***:*

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

Φ linear • *linéaire*, $\Phi: V \longmapsto \Phi(V) \subseteq V'$

Beh.: • **Thè.:**

$Dim(V) = Dim(Kern(\Phi)) + Dim(\Phi(V))$

10.8.3 Affinitäten — Affinités

Definition, Eigenschaften — Définition, qualités

Wir betrachten hier geometrische Abbildungen in der Ebene: $\Phi: \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$
• *Ici nous considérons des applications géométriques dans le plan:* $\Phi: \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$

Sei • *Soit* $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$. Wir definieren: • *Nous définissons:*

Definition: • **Définition:**

$$\Phi : \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \Phi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a_1 x + b_1 y + c_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 \end{pmatrix} = M \cdot \vec{x} + \vec{c}$$

heisst **Affinität** • *s'appelle* **affinité**.

Sei Φ Affinität • *Soit* Φ *affinité.*
Sei g Gerade, gegeben durch: • *Soit* g *droite, donnée par:* $\vec{r} = \vec{u}t + \vec{v}$.

Dann gilt: • *Puis il vaut:*
$\phi(\vec{r}) = M \cdot \vec{r} + \vec{c} = M(\vec{u}\,t + \vec{v}) + \vec{c} = (M\vec{u})\,t + M\vec{v} + \vec{c} := \vec{u}\,'\,t + \vec{v}\,' + \vec{c} = \vec{u}\,'\,t + +\vec{c}\,'$.

Falls gilt: $\vec{u}\,' = M\,\vec{u} \neq \vec{0}$, so ist durch $\phi(\vec{r})$ ebenfalls eine Gerade $\vec{u}\,'\,t + \vec{c}\,'$ gegeben.
• *S'il vaut:* $\vec{u}\,' = M\,\vec{u} \neq \vec{0}$, *par* $\phi(\vec{r})$ *est donc aussi donné une droite* $\vec{u}\,'\,t + +\vec{c}\,'$.

Bei einer Geraden gilt immer: • *Pour une droite il vaut toujours:* $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Falls M regulär ist, so folgt dann immer: • *Si* M *est régulier, il suit donc toujours:* $\vec{u}\,' = M\vec{u} \neq \vec{0}$.

Falls M nicht regulär ist, so könnte jedoch $\vec{u}\,' = \vec{0}$ werden. Das ist der Fall für $\vec{u} \in Kern(\Phi)$.
• *Si* M *n'est pas régulier, on pourrait avoir* $\vec{u}\,' = \vec{0}$. *C'est le cas s'il vaut:* $\vec{u} \in \mathrm{Kern}(\Phi)$.

Konsequenz: • **Conséquence:**
In jedem Fall gilt aber: $\Phi(\vec{r})$ ist geometrisch eine Gerade oder ein Punkt.
• *Dans tous les cas il vaut* $\Phi(\vec{r})$ *est géométriquement une droite ou un point.*

Daher definieren wir: • *C'est pourquoi nous définissons:*

Definition: • **Définition:**

1 Φ bijektiv resp. M regulär $\rightsquigarrow$ Φ heisst **Affinität** (gewöhnliche Affinität).
• Φ *bijektif resp.* M *régulier* $\rightsquigarrow$ Φ *s'appelle* **affinité** *(affinité commune).*

2 Φ nicht bijektiv resp. M nicht regulär $\rightsquigarrow$ Φ heisst **entartete** oder **singuläre Affinität**.
• Φ *non bijektif resp.* M *non régulier* $\rightsquigarrow$ Φ *s'appelle* **affinité singulière**.

Für Affinitäten kann man durch Rechnung den folgenden Satz beweisen:
• *Pour des affinités on pout prouver par calcul le théorème suivant:*

Notizen: • *Notes:*

$\rightsquigarrow$

Satz: • **Théorème:**

1 Gewöhnliche Affinitäten bilden Geraden in Geraden ab.
• *Les affinités communes appliquent les droites sur les droites.*

2 Gewöhnliche Affinitäten sind parallelentreu. • *Les affinités communes appliquent les parallèles sur les parallèles.*

3 Gewöhnliche Affinitäten lassen orientierte Streckenverhältnisse invariant. • *Les affinités communes laissent les rapports de segments invariants.*

4 Zu Dreiecken $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ existiert genau eine Affinität $\Phi : \triangle ABC \longmapsto \triangle A'B'C'$. • *Pour des triangles $\triangle ABC$ et $\triangle A'B'C'$ il existe exactement une affinité $\Phi : \triangle ABC \longmapsto \triangle A'B'C'$.*

5 Sei Φ Affinität mit $\Phi(\vec{x}) = M \cdot \vec{x} + \vec{c}$, $Fig = Fig(P_1, \ldots, P_n)$ sei eine geradelinig begrenzte Figur, $m(Fig)$ sei deren Inhalt, $\Phi(Fig) = Fig' = Fig'(P'_1, \ldots, P'_n)$ sei die Bildfigur und $m(\Phi(Fig))$ sei deren Inhalt. Dann gilt: $\rightsquigarrow$ Beh.: • *Soit Φ affinité avec $\Phi(\vec{x}) = M \cdot \vec{x} + \vec{c}$, $Fig = Fig(P_1, \ldots, P_n)$ soit une figure bornée par des segments de droites, $m(Fig)$ dont le contenu, $\Phi(Fig) = Fig' = Fig'(P'_1, \ldots, P'_n)$ soit l'image de la figure avec le contenu $m(\Phi(Fig))$. Alors il vaut:*

<u>Beh.: • Thè.:</u>

$$m(\Phi(Fig)) = m(Fig') = m(Fig) \cdot \det(M)$$

(Gilt auch bei entarteten Affinitäten.
• *Vaut aussi pour des affinités singulières*)

6 Sei • *Soit* $\forall_{\Phi_1,\Phi_2} \Phi_1(\vec{x}) = M_1 \cdot \vec{x} + \vec{c}_1$,
$\Phi_2(\vec{x}) = M_2 \cdot \vec{x} + \vec{c}_2$, $(\Phi_2 \circ \Phi_1)(\vec{x}) = M_2 \cdot (M_1 \cdot \vec{x} + \vec{c}_1) + \vec{c}_2$
$= (M_2 \cdot M_1) \cdot \vec{x} + M_2 \cdot \vec{c}_1 + \vec{c}_2$

Sei • *Soit* $M_\Phi = \{\Phi \mid \Phi$ Affinität • *affinité*$\}$

<u>Beh.: • Thè.:</u> $(M_\Phi, \circ)$ ist Gruppe • *est groupe*

Spezielle Affinitäten — Affinités spéciales

Hier eine Liste: • *Voilà une liste:* $(\Phi(\vec{x}) = M \cdot \vec{x} + \vec{c})$

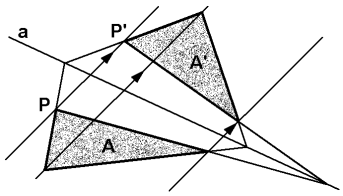
- ⊘ $M = E \rightsquigarrow$ Translation • *Translation*
- ⊘ $M = \lambda \cdot E$, $\vec{c} = \vec{0} \rightsquigarrow$ Streckung • *Allongement*
- ⊘ Spiegelungen • *Réfléctions*
- ⊘ Rotation • *Rotation*
- ⊘ Kongruenzabbildung • *Application congrue*

- ⊘ Ähnlichkeitsabbildung • *Similitude*
- ⊘ Perspektive Affinität (normale und schiefe Affinität oder Scherung) • *Affinité perspective (affinité normale et oblique)*
- ⊘ Eulersche Affinität • *Affinité d'Euler*
- ⊘ ...

Ausser der perspektiven Affinität und der Eulerschen Affinität sind uns diese Abbildungen nicht unbekannt. • *Excépté l'affinité perspective et l'affinité d'Euler ces applications ne nous sont pas inconnues.*

Perspektive Affinität — Affinité perspective

Hier existiert eine **Fixgerade** (Fixpunktgerade, sie besteht aus lauter Fixpunkten), die **Affinitätsachse**. Alle Verbindungsgeraden von Urbildpunkt zu Bildpunkt sind parallel zu einer Richtung, der **Affinitätsrichtung**.
Normale Affinität: Affinitätsachse ⊥ Affinitätsrichtung.
Schiefe Affinität oder **Scherung:** Sonst.



• *Ici il existe une* **droite fixe** *(double — elle est entièrement constituée de points fixes),* **l'axe d'affinité**. *Toutes les droites de jonction de points originaux à des points images sont parallèles à une direction, la* **direction d'affinité**.
Affinité normale: *Axe d'affinité ⊥ direction d'affinité.*
Affinité oblique*: Dans les autres cas.*

Spezialfall: • Cas spécial:

$\vec{x}\,' = M \cdot \vec{x}, \;\; \vec{c} = \vec{0}, \;\; EW \;\; \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1.$

Speziell: • Spécialement:
$\lambda_1 = 1 \;\Rightarrow\; EV \;\; \vec{x}_1$: Richtung der Fixpunktgerade • *Direction de la droite (double) fixe.*

$\rightsquigarrow$ **Schiefe Symmetrie • Symétrie oblique.**

Eulersche Affinität — Affinité d'Euler

Die **Eulersche Affinität** Entsteht durch Zusammensetzung zweier normaler Affinitäten mit zueinander senkrechten Achsen.
• *On obtient l'***affinité d'Euler** *si l'on compose deux affinités normales avec des axes perpendiculaires.*

Man findet: • *On trouve:*

Vor.: • Hyp.: Seien • *Soient* $\Phi(\vec{x}) = M \cdot \vec{x} + \vec{c}, \;\; \vec{c} = \vec{0}, \;\; \vec{x}\,' = M \cdot \vec{x}, \;\; \det(M) \neq 0.$

Eigenschaften: Φ Eulersche Affinität • *affinité de'Euler*
• **Qualités:** $\Leftrightarrow M$ symmetrisch • *symétrique.*

Konsequenzen: • Conséquences:
In diesem Fall hat M verschiedene Eigenwerte: • *Dans ce cas M a des valeurs propres différentes:*

$\lambda_1 \neq \lambda_2, \neq 0.$

Für die *EV* gilt: • *Pour les EV il vaut:* $\vec{x}_1 \perp \vec{x}_2$

Spezialfall: • **Cas spécial:**
$\vec{x}_1 = \vec{e}_1,\ \vec{x}_2 = \vec{e}_2 \ \Rightarrow\ \Phi(\vec{x}_1) = \Phi(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot x \\ \lambda_2 \cdot y \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ Eulersche Affinität • *Affinité d'Euler.*

10.8.4 Isometrien — Isométries

Definition: • **Définition:** $\Phi : \vec{x} \longmapsto \vec{x}\,' = M \cdot \vec{x}$ heisst **Isometrie** • *s'appelle* **isométrie**
$\Leftrightarrow \quad \forall_{\vec{x}_1, \vec{x}_2} :\ \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle = \langle M \cdot \vec{x}_1, M \cdot \vec{x}_2 \rangle$

Konsequenz: • **Conséquence:** $|\vec{x}_1| = |M \cdot \vec{x}_1| \quad \rightsquigarrow$

Folgerung: • **Conclusion:** Isometrien sind längentreu.
• *Les isométries conservent la longueur.*

$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ stiftet eine Isometrie • *crée une isométrie*

$$\Leftrightarrow \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle = \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle = x^2 + y^2 = \langle M \cdot \vec{x}_1, M \cdot \vec{x}_2 \rangle = \langle \begin{pmatrix} a_1 x + b_1 y \\ a_2 x + b_2 y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 x + b_1 y \\ a_2 x + b_2 y \end{pmatrix} \rangle =$$

$$(a_1 x + b_1 y)^2 + (a_2 x + b_2 y)^2 = (a_1^2 + a_2^2)x^2 + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2)xy + (b_1^2 + b_2^2)y^2$$
$$\Rightarrow\ \forall_{x,y} :\ x^2 + y^2 = (a_1^2 + a_2^2)x^2 + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2)xy + (b_1^2 + b_2^2)y^2$$
$$\Rightarrow\ (a_1^2 + a_2^2) = 1,\ \ (a_1 b_1 + a_2 b_2) = 0,\ \ (b_1^2 + b_2^2) = 1$$

Sei • *Soit* $a_1 := \cos(\varphi) \ \Rightarrow\ a_2 = \pm \sin(\varphi)$. Z.B. für $''+''$ • *P.ex. pour* $''+''$: $a_2 = \sin(\varphi)$

$\Rightarrow\ (a_1 b_1 + a_2 b_2) = \cos(\varphi)\, b_1 + \sin(\varphi)\, b_2 = 0$
$\Rightarrow$ Z.B. • *P.ex.* $b_1 = -\sin(\varphi),\ \ b_2 = \cos(\varphi),\ \ M = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} = D_\varphi.$
$\rightsquigarrow$ Drehung • *rotation.*

Berücksichtigt man die andern möglichen Vorzeichenverteilungen, so ergibt sich: $M = \pm D_{\pm\varphi}$
• *Si l'on considère aussi les autres possibilités de signes, on obtient:* $M = \pm D_{\pm\varphi}$

Satz: • **Théorème:**

Vor.: • **Hyp.:**

$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ Isometrie • *Isométrie*

Beh.: • **Thè.:**

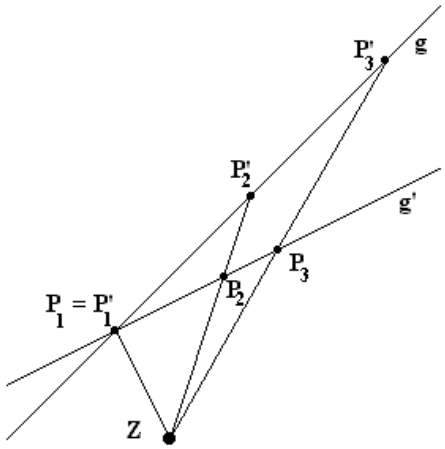
$M = \pm D_{\pm\varphi}$
(Drehung und Punktspiegelung • *rotation et symétrie ponctuelle*)

10.8.5 Kollineationen — Collinéations

Die Abbildung — L'application

(Im Folgenden handelt es sich um einen „Ausblick".)
• *Dans ce qui suit, il s'agit d'un "regard vers l'avenir".*

Kollineationen sind Abbildungen, die Geraden in Geraden oder Punkte überführen. Als Beispiel betrachten wir die **Zentralperspektive in der Ebene**.
• *Les* **collinéations** *sont des applications qui transfèrent des droites dans des droites ou des points. Comme exemple, nous considérons* **la perspective centrale dans un plan**.



Wie ein Blick in die Skizze sofort zeigt, bleiben bei der Abbildung $P \longmapsto P'$ die Streckenverhältnisse nicht invariant.
• *Comme on voit tout de suite dans le croquis, les rapports de deux segments ne restent pas invariants après l'application* $P \longmapsto P'$.

Konsequenz: • **Conséquence:** Die Abbildung $P \longmapsto P'$ kann daher nicht durch eine Matrix gegeben werden. • *L'application* $P \longmapsto P'$ *ne peut donc pas être réalisée par une matrice.*

Denn müsste sein: • *Car sinon on aurait:*

$$\mathcal{M} : \vec{v} = \vec{a} + \lambda\,\vec{b} \longmapsto M \cdot \vec{v} = M \cdot \vec{a} + \lambda \cdot M \cdot \vec{b} = \vec{a}\,' + \lambda \cdot \vec{b}\,'$$

$$\rightsquigarrow \overrightarrow{P_2P_1} = \vec{b} = \lambda \cdot \overrightarrow{P_3P_1} \longmapsto \overrightarrow{P_2{}'P_1{}'} = \vec{b}\,' = \lambda \cdot \overrightarrow{P_3{}'P_1{}'}$$

d. h. • *ç. v. d.*

$$\frac{|\,\overrightarrow{P_3P_1}\,|}{|\,\overrightarrow{P_2P_1}\,|} = \frac{|\,\overrightarrow{P_3{}'P_1{}'}\,|}{|\,\overrightarrow{P_2{}'P_1{}'}\,|}$$

Das stimmt in der Skizze jedoch nicht. • *Dans l'esquisse c'est faux.*

Hingegen wissen wir schon, dass das Doppelverhältnis hier invariant bleiben muss.
• *Par contre nous savons que dans notre cas le rapport anharmonique (birapport) doit rester invariant.*

Sei • *Soit* $\quad Z = Z(0;0),\ \ g:\ \vec{v} = \vec{a} + \lambda\,\vec{b},\ \ g':\ \vec{v}\,' = \vec{a}\,' + \lambda\,\vec{b}\,',\ \ \vec{a}\,' = \vec{a}$

mit • *avec* $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ \ \vec{v}\,' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},\ \ \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},\ \ \vec{a}\,' = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix},\ \ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},\ \ \vec{b}\,' = \begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \end{pmatrix}$

Um das Abbildungsgesetz algebraisch fassen zu können, wollen wir $P'(x', y')$ aus $P(x, y)$ berechnen.
• *Pour pouvoir exprimer algébriquement la loi de l'application, nous voulons calculer* $P'(x', y')$ *si* $P(x, y)$ *est donné.*

Sei • *Soit* $\quad P(x, y) \longmapsto P'(x', y'),\quad \overrightarrow{ZP} \longmapsto \overrightarrow{ZP'} = k \cdot \overrightarrow{ZP}$

$$\rightsquigarrow\ \vec{v}\,' = k \cdot \vec{v} = k \cdot (\vec{a} + \lambda\,\vec{b}) = \vec{a} + \mu\,\vec{b}\,' = k \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot x \\ k \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Es gilt: • *Il vaut:* $\quad \vec{v}\,' \| \vec{v} \ \Rightarrow\ \vec{v}\,' \perp \vec{v} \ \Rightarrow\ \langle \vec{v}_\perp, \vec{v}\,' \rangle = 0 \ \Rightarrow\ \langle \begin{pmatrix} -a_2 - \lambda\,b_2 \\ a_1 + \lambda\,b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 + \mu\,b_1{}' \\ a_2 + \mu\,b_2{}' \end{pmatrix} \rangle = 0$

$$\rightsquigarrow\ -a_1\,a_2 - \mu\,a_2\,b_1{}' - \lambda\,a_1\,b_2 - \lambda\,\mu\,b_2\,b_1{}' + a_1\,a_2 + \mu\,a_1\,b_2{}' + \lambda\,a_2\,b_1 - \lambda\,\mu\,b_1\,b_2{}' = 0$$

$\rightsquigarrow\ \mu\,(a_1\,b_2{}' - a_2\,b_1{}' + \lambda\,b_1\,b_2{}' - \lambda\,b_2\,b_1{}') = \lambda\,(a_1\,b_2 - a_2\,b_1)$

$\Rightarrow\ \mu\,(\det\begin{vmatrix} a_1 & b_1{}' \\ a_2 & b_2{}' \end{vmatrix} + \lambda\,\det\begin{vmatrix} b_1 & b_1{}' \\ b_2 & b_2{}' \end{vmatrix}) = \lambda\,\det\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\ \Rightarrow\ \mu\,(\det(\vec{a},\vec{b}\,') + \lambda\,\det(\vec{b},\vec{b}\,')) = \lambda\,\det(\vec{a},\vec{b})$

Formel: • **Formule:** $\vec{v} = \vec{a} + \lambda\,\vec{b} \longmapsto \vec{v}\,' = \vec{a} + \dfrac{\lambda\,\det(\vec{a},\vec{b})}{\det(\vec{a},\vec{b}\,') + \lambda\,\det(\vec{b},\vec{b}\,')}\,\vec{b}\,'$

Das kann keine lineare Abbildung sein, denn λ kommt auch im Nenner vor!
• *Ceci ne peut pas être une application linéaire car λ apparaît dans le dénominateur!*

Es gilt: • *Il vaut:* $x = a_1 + \lambda\,b_1,\ \ y = a_2 + \lambda\,b_2$

$\rightsquigarrow$ Ist z.B. $b_1 \neq 0$, so kann man statt λ auch x als Parameter einführen:
• *S'il est p.ex. $b_1 \neq 0$, on peut aussi utiliser x comme paramètre au lieu de λ:*

$$\lambda\frac{x - a_1}{b_1}$$

Allgemein hat daher hier die Abbildungsgleichung die folgende Form:
• *Généralement l'équation de l'application a la forme suivante:*

$$\vec{v} \longmapsto \vec{v}\,' = \vec{v}_0 + \vec{v}_1\,\frac{x\cdot c_1}{x\cdot c_2 + c_3}\Big|_{b_1\neq 0} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1\,\frac{y\cdot c_4}{y\cdot c_5 + c_6}\Big|_{b_2\neq 0}$$

Zentralprojektion einer Ebene im Raum — Projection centrale d'un plan dans l'espace

Wir betrachten eine Zentralprojektion $\mathcal{A}$ mit $Z = O,\ \ \mathcal{A}:$ Ebene $\Phi \longmapsto \Phi\,'$:
• *Nous considérons une projection centrale $\mathcal{A}$ avec $Z = O,\ \ \mathcal{A}:$ plan $\Phi \longmapsto \Phi\,'$:*

$$\Phi:\ \vec{v} = \vec{a} + \lambda\,\vec{b} + \mu\,\vec{c} \longmapsto \Phi\,':\ \vec{w} = \vec{a}\,' + \nu\,\vec{b}\,' + \xi\,\vec{c}\,',\ \ \vec{w} = \mathcal{A}(\vec{v}) = \kappa\,\vec{v}$$

$$\rightsquigarrow\quad \vec{w} = \vec{a}\,' + \nu\,\vec{b}\,' + \xi\,\vec{c}\,' = \kappa\,\vec{v} = \kappa\,(\vec{a} + \lambda\,\vec{b} + \mu\,\vec{c})\ \Rightarrow\ \nu\,\vec{b}\,' + \xi\,\vec{c}\,' + \kappa\,(-\vec{a} - \lambda\,\vec{b} - \mu\,\vec{c}) = \vec{a}\,'$$

$$\rightsquigarrow\ \text{Cramer: } \kappa = \frac{D_3}{D_0} = \frac{\det((\vec{b}\,',\vec{c}\,',\vec{a}\,'))}{\det((\vec{b}\,',\vec{c}\,',(-\vec{a} - \lambda\,\vec{b} - \mu\,\vec{c})))}\ \Rightarrow\ \vec{w} = \kappa\,\vec{v} = \frac{\det((\vec{b}\,',\vec{c}\,',\vec{a}\,'))}{\det((\vec{b}\,',\vec{c}\,',(-\vec{a} - \lambda\,\vec{b} - \mu\,\vec{c})))}\,\vec{v}$$

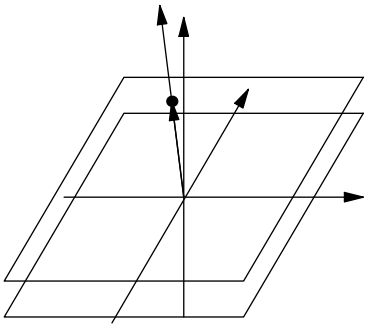
$$\Rightarrow\ \vec{w} = \frac{\det((\vec{b}\,',\vec{c}\,',\vec{a}\,'))}{\det((\vec{b}\,',\vec{c}\,',(-\vec{a} - \lambda\,\vec{b} - \mu\,\vec{c})))}\cdot(\vec{a} + \lambda\,\vec{b} + \mu\,\vec{c})$$

Formel: • **Formule:** $\vec{w} = \mathcal{A}(\vec{v}) = \dfrac{-\det((\vec{b}\,',\vec{c}\,',\vec{a}\,'))}{\det((\vec{b}\,',\vec{c}\,',(\vec{a} + \lambda\,\vec{b} + \mu\,\vec{c})))}\cdot(\vec{a} + \lambda\,\vec{b} + \mu\,\vec{c})$

Matrizen und Zentralprojektion — Matrices et projection centrale

Wie bei der Berechnung der Translation mit Hilfe von Matrizen wollen wir auch hier wieder eine **projektive Sichtweise** verwenden. Zu diesem Zwecke führen wir wieder eine dritte Koordinate ein, die wir vorerst $= 1$ setzen $\rightsquigarrow\ \vec{a} \longmapsto \vec{a}_z$. Bei einer Matrixmultiplikation könnte aber einmal eine solche Koordinate $\neq 1$ werden. Daher gehen wir zu Äquivalenzklassen über, indem wir alle Vektoren $\neq \vec{0}_z$ zu einer Klasse zusammenfassen, die auseinander durch Streckung mit einem Faktor $\lambda \neq 0$ hervorgehen. Falls die 3. Koordinate $\neq 0$ ist, wählen wir daraus den Repräsentanten mit der 3. Koordinate $= 1$. D.h. wir arbeiten dann in einer Hauptebene parallel zur (x, y)–Ebene auf der Höhe $z = 1$. Man kann sich leicht vorstellen, dass Vektoren mit sehr grossen x– oder y–Koordinaten bei der Streckung mit dem Kehrwert einer solchen grossen Koordinate dann einen z–Wert aufweisen, der gegen 0 strebt. $z = 0$

bedeutet daher ein Ortsvektor zu einem „unendlich fernen Punkt“.
• *Ici nous appliquons une "vue projective", comme au calcul de la translation à l'aide de matrices. À cette fin, nous utilisons de nouveau une troisième coordonnée que nous mettons d'abord* $= 1 \rightsquigarrow \vec{a} \longmapsto \vec{a}_z$. *Mais lors d'une multiplication de matrice, une telle coordonnée pourrait devenir une fois* $\neq 1$. *Par conséquent nous passons à classe d´équivalence en groupant tous les vecteurs* $\neq \vec{0}_z$ *dans une classe s'ils se distinguent seulement d'un facteur multiplicatif* $\lambda \neq 0$ *l'un de l'autre. Si la 3ème coordonnée est* $\neq 0$, *nous choisissons le représentant avec la 3ème coordonnée* $= 1$. *C.-à.-d. nous travaillons dans un plan parallèle au plan* (x, y) *à la hauteur* $z = 1$. *On peut s'imaginer facilement qu'un de ces vecteurs à des coordonnées* x *ou* y *très grandes prend une valeur* z *qui va vers* 0 *si on multiplie ce vecteur avec l'inverse d'une de ces valeurs très grandes. Par conséquent,* $z = 0$ *signifie un vecteur de position qui "pointe vers l'infini".*



$$[\vec{v}_z] = \{\vec{w}_z \mid \exists_\varrho\ \vec{w}_z = \varrho \cdot \vec{v}_z\}$$

Wie schon bei den Pfeilen und Vektoren setzen wir den Repräsentanten für die Klasse:
• *Comme on a fait pour les flèches et les vecteurs, nous prenons le représentant pour la classe:*

$$\vec{w}_z = \varrho \cdot \vec{v}_z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_z \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Addition definieren wir mit Hilfe von Translationsmatrizen (siehe Seite 220), das Streckungsprodukt mit λ durch eine Multiplikation mit M der Form:
• *Nous définissons l'addition à l'aide de matrices de translation (voir page 220), le produit d'extension (d'allongement) avec* λ *par une multiplication avec* M *dont la forme est la suivante:*

$$M = (\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}), \quad \lambda \cdot \vec{v}_z := M \cdot \vec{v}_z$$

Nun wollen wir zeigen, wie man mit Hilfe von hintereinander ausgeführten Matrixmultiplikationen von $\vec{v}_z(\lambda) = \vec{a}_z + \lambda \cdot \vec{b}_z,\ \vec{b}_z \neq \vec{0}_z$, zu $\vec{w}_z(t) = \vec{a}_z + \mu \cdot \vec{c}_z$ gelangen kann:
• *Maintenant nous voulons montrer commment on peut passer de* $\vec{v}_z(\lambda) = \vec{a}_z + \lambda \cdot \vec{b}_z,\ \vec{b}_z \neq \vec{0}_z$, *à* $\vec{w}_z(t) = \vec{a}_z + \mu \cdot \vec{c}_z$ *à l'aide d'une série de multiplications de matrices l'une après l'autre:*

$$\vec{v}_z(\lambda) = \vec{a}_z + \lambda \cdot \vec{b}_z = \begin{pmatrix} a_1 + \lambda\, b_1 \\ a_2 + \lambda\, b_2 \\ 1 \end{pmatrix} \xmapsto{M_1} M_1 \cdot \begin{pmatrix} a_1 + \lambda\, b_1 \\ a_2 + \lambda\, b_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 + \lambda\, b_1 \\ a_2 + \lambda\, b_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\, b_1 \\ \lambda\, b_2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \lambda\, b_1 \\ \lambda\, b_2 \\ 1 \end{pmatrix} \xmapsto{M_2} M_2 \cdot \begin{pmatrix} \lambda\, b_1 \\ \lambda\, b_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda\, b_1 \\ \lambda\, b_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\, b_1^2 \\ \lambda\, b_2^2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \lambda\, b_1^2 \\ \lambda\, b_2^2 \\ 1 \end{pmatrix} \xmapsto{M_3} M_3 \cdot \begin{pmatrix} \lambda\, b_1^2 \\ \lambda\, b_2^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda\, b_1^2 \\ \lambda\, b_2^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\,(b_1^2 + b_2^2) \\ \lambda\, b_2^2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \lambda\,(b_1^2 + b_2^2) \\ \lambda\, b_2^2 \\ 1 \end{pmatrix} \xmapsto{M_4} M_4 \cdot \begin{pmatrix} \lambda\,(b_1^2 + b_2^2) \\ \lambda\, b_2^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b_1^2+b_2^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b_1^2+b_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda\,(b_1^2 + b_2^2) \\ \lambda\, b_2^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \xmapsto{M_5} M_5 \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & d_2 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ d_1 + \lambda \cdot d_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{d_1+\lambda \cdot d_2} \\ \frac{\lambda}{d_1+\lambda \cdot d_2} \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ d_1+\lambda\, d_2 \end{pmatrix} \xmapsto{M_6} M_6 \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ d_1+\lambda\, d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ d_1+\lambda\, d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\, c_1 \\ \lambda\, c_2 \\ d_1+\lambda\, d_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\lambda\cdot c_1}{d_1+\lambda\, d_2} \\ \frac{\lambda\, c_2}{d_1+\lambda\, d_2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \frac{\lambda\cdot c_1}{d_1+\lambda\, d_2} \\ \frac{\lambda\, c_2}{d_1+\lambda\, d_2} \\ 1 \end{pmatrix} \xmapsto{M_7} M_7 \cdot \begin{pmatrix} \frac{\lambda\cdot c_1}{d_1+\lambda\, d_2} \\ \frac{\lambda\, c_2}{d_1+\lambda\, d_2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\lambda\cdot c_1}{d_1+\lambda\, d_2} \\ \frac{\lambda\, c_2}{d_1+\lambda\, d_2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + \frac{\lambda\cdot c_1}{d_1+\lambda\, d_2} \\ a_2 + \frac{\lambda\, c_2}{d_1+\lambda\, d_2} \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{w}_z$$

Zusammen: • Résumé:

$$A = M_8 \cdot (M_7 \cdot (M_6 \cdot (M_5 \cdot (M_4 \cdot (M_3 \cdot (M_2 \cdot (M_1)))))))) =$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \left(\frac{c_1}{{b_1}^2+{b_2}^2} + \frac{a_1\, d_2}{{b_1}^2+2\, {b_2}^2}\right) & b_2 \left(\frac{c_1}{{b_1}^2+{b_2}^2} + \frac{2\, a_1\, d_2}{{b_1}^2+2\, {b_2}^2}\right) & -\left(\frac{(a_1\, b_1+a_2\, b_2)\, c_1}{{b_1}^2+{b_2}^2}\right) + a_1 \left(d_1 - \frac{(a_1\, b_1+2\, a_2\, b_2)\, d_2}{{b_1}^2+2\, {b_2}^2}\right) \\ \frac{b_1\, (c_2+a_2\, d_2)}{{b_1}^2+2\, {b_2}^2} & \frac{2\, b_2\, (c_2+a_2\, d_2)}{{b_1}^2+2\, {b_2}^2} & \frac{-(a_1\, b_1\, (c_2+a_2\, d_2))+a_2 \left({b_1}^2\, d_1+2\, {b_2}^2\, d_1-2\, b_2\, (c_2+a_2\, d_2)\right)}{{b_1}^2+2\, {b_2}^2} \\ \frac{b_1\, d_2}{{b_1}^2+2\, {b_2}^2} & \frac{2\, b_2\, d_2}{{b_1}^2+2\, {b_2}^2} & d_1 - \frac{(a_1\, b_1+2\, a_2\, b_2)\, d_2}{{b_1}^2+2\, {b_2}^2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ \vec{v}_z(\lambda) = \vec{a}_z + \lambda\cdot\vec{b}_z = \begin{pmatrix} a_1+\lambda\, b_1 \\ a_2+\lambda\, b_2 \\ 1 \end{pmatrix} \xmapsto{A} A\cdot(\vec{a}_z+\lambda\cdot\vec{b}_z) = \begin{pmatrix} c_1\, t + a_1\ (d_1+d_2\, t) \\ c_2\, t + a_2\ (d_1+d_2\, t) \\ d_1+d_2\, t \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_1 + \frac{\lambda\cdot c_1}{d_1+\lambda\, d_2} \\ a_2 + \frac{\lambda\, c_2}{d_1+\lambda\, d_2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow\ \vec{v}_z(\lambda) \xmapsto{A} \begin{pmatrix} a_1 + \frac{\lambda\cdot c_1}{d_1+\lambda\, d_2} \\ a_2 + \frac{\lambda\, c_2}{d_1+\lambda\, d_2} \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{w}_z = \vec{a}_z + (\frac{\lambda}{d_1+\lambda\, d_2})\cdot\vec{c}_z \qquad ☺$$

10.8.6 Kegelschnitte — Sections coniques

Normaltypen — Types normaux

Ellipse[6] • Ellipse[6]

$x^2+y^2 = \cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi) = 1$ $(x=\cos(\varphi),\ \ y=\sin(\varphi))$ stellt bekanntlich einen Kreis dar
• *donne un cercle, comme on sait.*

Durch Achsenstreckungen $x' = ax,\ \ y' = by$ erhalten wir die Ellipsengleichung in Normallage: Zentrum O, Kegelschnittachsen = Koordinatenachsen.
• *Par allongements des axes $x' = ax,\ \ y' = by$ nous obtenons les ellipses en position normale: Centre O, axes de section coniques = axes des coordonnés.*

$$(\frac{x'}{a})^2 + (\frac{y'}{b})^2 = 1 \text{ (Halbachsen • } \textit{Demi–axes } a,\ b.)$$

Hyperbel[7] • Hyperbole[7]

Studiere: • *Etudie:* Hyperbel • *Hyperbole* $f(x) = y = \dfrac{1}{x}$.

Drehe diese Kurve um • *Retourne cette courbe de* $-\dfrac{\pi}{4} \hat{=} -45^o$: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = D_{-\varphi}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = D_\varphi \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

[6] Ellipse: griech. Mangel • *Ellipse grec: manque*
[7] Hyperbel: griech. Überfluss • *Hyperbole: grec: abondance*

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix}$$

Es gilt: • *Il vaut:*

$y = \dfrac{1}{x} \;\Rightarrow\; 1 = x \cdot y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x-y) \cdot (x+y) = \dfrac{1}{2} \cdot (x^2 - y^2) \;\Rightarrow\; 2 = x^2 - y^2$,

$$1 = (\frac{x}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{y}{\sqrt{2}})^2 \text{ (Halbachsen • } \textit{Demi–axes } \frac{1}{\sqrt{2}}.)$$

$\rightsquigarrow$ Hyperbelgleichung in Normallage: Zentrum O, Kegelschnittachsen = Koordinatenachsen.
• *Hyperbole en position normale: Centre O, axes de section coniques = axes de coordonnés.*

Parabel[8] • Parabole[8]

Studiere: • *Etudie:*

Parabel • *Parabole* $f(x) = y = x^2$ oder • *ou* $x = y^2$.
Verschiebe die letzte Kurve in x–Richtung und strecke sie in y–Richtung:
• *Fais la translation de la dernière courbe en direction de x et extends–la en direction d'y:*

$$\rightsquigarrow \; x' = a + (\frac{y'}{c})^2$$

Was die vielen Darstellungsmöglichkeiten von Kegelschnitt bei Verwendung spezieller interessanter Parameter für praktische Anwendungen betrifft, sei auf die Fachliteratur verwiesen.
• *En ce qui concerne le grand nombre de possibilités pour représenter les sections coniques pour des applications pratiques il faut consulter la littérature spéciale.*

Quadratische Form — Forme quadratique

Betrachte die algebraische Kurve: • *Considère la courbe algébrique:*

$P(x, y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \zeta = 0.$

Setze • *Mets:* $\alpha = a,\;\; \beta = 2b,\;\; \gamma = c,\;\; \delta = d,\;\; \varepsilon = e,\;\; \zeta = f$

$$\rightsquigarrow \; ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Das ist bekanntlich die Gleichung eines Kegelschnittes, falls die Lösungsmenge unendlich ist (Ellipse, Parabel, Hyperbel und entartete Fälle). • *Comme on sait c'est l'équation d'une section conique, si l'ensemble de solutions est infini (ellipse, parabole, hyperbole, cas dégénérés).*
Wir definieren: • *Nous définissons:*

Definition: • Définition: $ax^2 + 2bxy + cy^2$ heisst die zu $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ gehörige **quadratische Form**.
• $ax^2 + 2bxy + cy^2$ *s'appelle la* **forme quadratique** *de* $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$.

[8] Parabel: griech. Gleichnis • *Parabole: grec: comparaison , parabole (bibl.)*

Ohne gemischtes Glied — Sans terme mixte

Sei • *Soit* $b = 0$ (kein gemischtes Glied — sans terme mixte). $\rightsquigarrow$ $ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0$
Sei • *Soit* $a, c \neq 0$

Diese Gleichung kann man durch quadratische Ergänzung umformen.
• *On peut changer cette équation par complément quadratique.*

$$\rightsquigarrow \; ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = a(x^2 + \frac{2dx}{2a}) + c(y^2 + \frac{2ey}{2c}) + f =$$
$$a(x^2 + \frac{2dx}{2a} + \frac{d^2}{4a^2}) + c(y^2 + \frac{2ey}{2c} + \frac{e^2}{4c^2}) + f - \frac{d^2}{4a} - \frac{e^2}{4c} = 0$$

(Ergänzung von: • *on a complété par:* $a\frac{d^2}{4a^2} + c\frac{e^2}{4c^2} - \frac{d^2}{4a} - \frac{e^2}{4c}$). $\rightsquigarrow$

$$ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = a(x + \frac{d}{2a})^2 + c(y + \frac{e}{2c})^2 + f - \frac{d^2}{4a} - \frac{e^2}{4c} = a(x')^2 + c(y')^2 + k = 0$$

mit • *avec* $x' = x + \frac{d}{2a}$, $y' = y + \frac{e}{2c}$, $k = f - \frac{d^2}{4a} - \frac{e^2}{4c}$

Konsequenz: • **Conséquence:**
Setze: • *Remplacer:* $|\frac{a}{-k}| := \frac{1}{\sqrt{a_1}}$, $|\frac{c}{-k}| := \frac{1}{\sqrt{b_1}}$, $k := f - \frac{d^2}{4a} - \frac{e^2}{4c}$

$\rightsquigarrow$ $ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0$ wird zu • *devient* $\pm(\frac{x'}{a_1})^2 \pm (\frac{y'}{b_1})^2 = 1$

D.h. man hat einen Kegelschnitt in Normallage: Zentrum O, Kegelschnittachsen = Koordinatenachsen. (x', y') ist aus (x, y) durch eine Translation entstanden. • *ç.v.d. on a une section conique en position normale: Centre O, axes de section conique = axes de coordonnés. (x', y') a été obtenu de (x, y) par une translation.*

Die Fälle $a = 0$, $c = 0$ sind einfacher: Falls $a = 0$ ist, fällt die Verschiebung in x–Richtung weg. Analog für $c = 0$. • *Les cas $a = 0$, $c = 0$ sont plus simples: Si $a = 0$, la translation en direction de x tombe. De même pour $c = 0$.*

Mit gemischtem Glied — Avec terme mixte

Sei • *Soit* $b \neq 0$.

Idee: • **Idée:** Versuche durch eine Transformation, d.h. durch einen Übergang zu einem neuen Koordinatensystem, die Situation $b = 0$ zu erreichen. • *Essaie de créer la situation $b = 0$ par transformation, ç.v.d. en introduisant un système de coordonnés nouveaux.*

Schreibe dazu die quadratische Form mit Hilfe des Matrixproduktes:
• *Pour cette intention, écris la forme quadratique à l'aide du produit matriciel:*

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = (ax + by, bx + cy) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{x}^T \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x}$$

und • *et* $dx + ey = (d, e) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = K \cdot \vec{x}$.

$\rightsquigarrow$ A ist symmetrisch: • *A est symétrique:* $A = U \cdot D \cdot U^{-1} = U \cdot D \cdot U^T$.

Sei • *Soit* $U := P^T \rightsquigarrow A = P^T \cdot D \cdot P$.

U besteht aus den Eigenvektoren von A, die normiert gewählt werden können. $\rightsquigarrow$ U unitär
• *U est constitué par les vecteurs propres de A qu'on peut choisir normés.* $\rightsquigarrow$ *U unitaire*

$$\Rightarrow U^{-1} = U^T, \quad E = U \cdot U^{-1} = U \cdot U^T = P^T \cdot P$$

$$\Rightarrow ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 = \vec{x}^{\,T} \cdot A \cdot \vec{x} + K \cdot \vec{x} + f = \vec{x}^{\,T} \cdot (P^T \cdot D \cdot P) \cdot \vec{x} + K \cdot E \cdot \vec{x} + f =$$
$$= (P \cdot \vec{x})^T \cdot D \cdot (P \cdot \vec{x}) + K \cdot (P^T \cdot P) \cdot \vec{x} + f = (P \cdot \vec{x})^T \cdot D \cdot (P \cdot \vec{x}) + (K \cdot P^T) \cdot (P \cdot \vec{x}) + f$$

Sei • *Soit* $P \cdot \vec{x} = \vec{y}, \ (K \cdot P^T) = Q$

Konsequenz: • **Conséquence:**
$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = \vec{y}^{\,T} \cdot D \cdot \vec{y} + Q \cdot \vec{y} + f = 0$
mit • *avec* $\vec{y} = P \cdot \vec{x}, \ Q = (K \cdot P^T) = (m, n), \ K = (d, e), \ A = P^T \cdot D \cdot P = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad P^T = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$$

Sei • *Soit* $\vec{y} = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{y}^{\,T} \cdot D \cdot \vec{y} + Q \cdot \vec{y} + f = P(z, w) = \lambda_1 z^2 + \lambda_2 w^2 + mz + nW + f = 0$

Damit ist der Fall mit gemischtem Glied zurückgeführt auf den Fall ohne gemischtes Glied.
• *Ainsi ce cas au terme mixte est réduit au cas sans terme mixte.*

Transformation im Detail — La transformation en détail

Wir studieren die Abbildung • *Nous étudions l'application* $\vec{y} = P \cdot \vec{x}$
oder • *ou* $\vec{x} = P^{-1} \cdot \vec{y} = P^{-1} \cdot \vec{y} = U \cdot \vec{y} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \cdot \vec{y}$ $(\vec{x}_k = EV_{\,A})$.

Wir benützen nun den unter 10.8.2 begründeten Satz, angepasst auf die Situation hier:
• *Nous utilisons maintenant le théorème déduit en 10.8.2, adapté à cette situation:*

Ist die Matrix $U = P^T$ durch eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \xmapsto{\Phi} \mathbb{R}^2$ gegeben, so wird durch $P = U^T$ die Basis zu $\vec{y}$ (oben neue Basis) von $\mathbb{R}^2$ auf die Basis zu $\vec{x}$ (oben alte Basis) von $\mathbb{R}^2$ abgebildet. • *Si la matrice $U = P^T$ est donnée par une application linéaire $\mathbb{R}^2 \xmapsto{\Phi} \mathbb{R}^2$, $P = U^T$ applique la base à $\vec{y}$ (en haut nouvelle base) de $\mathbb{R}^2$ sur la base à $\vec{x}$ (en haut vieille base) de $\mathbb{R}^2$.*

$$\rightsquigarrow \quad \Phi : \begin{pmatrix} (\vec{e}_1)' \\ (\vec{e}_2)' \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \Phi((\vec{e}_1)') \\ \Phi((\vec{e}_2)') \end{pmatrix} = U^T \circ \begin{pmatrix} (\vec{e}_1) \\ (\vec{e}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x}_1{}^T \\ \vec{x}_2{}^T \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} (\vec{e}_1) \\ (\vec{e}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} (\vec{e}_1) \\ (\vec{e}_2) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} x_1 \cdot \vec{e}_1 + y_1 \cdot \vec{e}_2 \\ x_2 \cdot \vec{e}_1 + y_2 \cdot \vec{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} EV_{\,1} \\ EV_{\,2} \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ $(\vec{e}_k)'$ im neuen System ist im alten System $\vec{x}_k = EV_k$. • $(\vec{e}_k)'$ *dans le nouveau système est dans le vieux système* $\vec{x}_k = EV_k$.

Konsequenz: • **Conséquence:** : Bei obiger Transformation durch die Matrix P, mit der man das gemischte Glied der quadratischen Form zum Verschwinden bringen kann, werden die normierten Eigenvektoren von A (die Matrix der Quadratischen Form) gerade die Basisvektoren (Einheitsvektoren) des neuen Systems. • *Dans la transformation ci–dessus par la matrice P, par laquelle on peut faire*

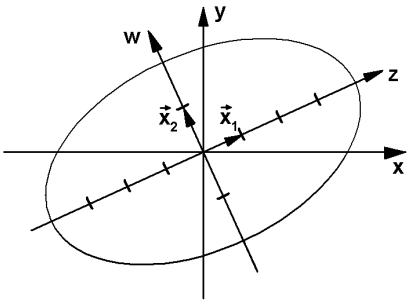
disparaître le terme mixte de la forme quadratique, les vecteurs propres normalisés de A (la matrice de la forme quadratique) deviennent exactement les vecteurs de base (vecteurs unités) du système nouveau.

Beispiel — Exemple

Sei • *Soit* $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0,\ d = e = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix},\ \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 9$

$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow 5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 4z^2 + 9w^2 - 36 = 0$



$\rightsquigarrow$ Neue Gleichung (Ellipse): • *Nouvelle équation (ellipse):*

$$(\frac{z}{3})^2 + (\frac{w}{2})^2 = 1$$

$\varphi = \frac{1}{2}$ (Skizze! • *Esquisse!*)

10.9 Anwendungen bei Rekursionen — Applications aux récursions

Wir wollen hier beispielhaft eine Anwendung zum Thema „Folgen und Rekursionen“ studieren. Dazu betrachten wir die bekannte Fibonacci–Folge $[1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots]$. Diese Folge kann wie folgt rekursiv definiert werden:

• *Comme exemple nous étudions une application quant au sujet "suites et récursions". Dans ce but nous considérons la suite connue de Fibonacci* $[1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots]$. *On peut définir cette suite comme ceci:*

$$a_1 = 1,\ \ a_2 = 1,\ \ a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

Die Berechnung dieser Folge kann man auch mit Hilfe einer Matrix ausführen:

• *On peut aussi calculer les termes de cette suite à l'aide d'une matrice:*

Sei • *Soit*

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} := M \cdot \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ a_n + a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Für die EW und die EV von M finden wir: • *Pour les EW et les EV de M nous trouvons:*

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda \cdot (1-\lambda) - 1 \cdot 1 = -\lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$M \cdot \vec{x}_{1,2} = \lambda_{1,2} \cdot \vec{x}_{1,2} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,2} \\ y_{1,2} \end{pmatrix} = \lambda_{1,2} \cdot \begin{pmatrix} x_{1,2} \\ y_{1,2} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left| \begin{array}{lcl} y_{1,2} & = & \lambda_{1,2} \cdot x_{1,2} \\ x_{1,2} + y_{1,2} & = & \lambda_{1,2} \cdot y_{1,2} \end{array} \right|$$

Da die beiden letzten Gleichungen linear abhängig sein müssen, finden wir aus der ersten Gleichung für die Eigenvektoren:

• *Comme ces deux équations doivent être linéairement dépendantes, nous trouvons à l'aide de la première équation:*

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix},\ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \text{ mit } \bullet \text{ avec } \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Dabei gilt: • *Quant à ces experssions on trouve:* $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}=-1,\ \ \frac{1+\sqrt{5}}{2}=-\frac{1}{(\frac{1-\sqrt{5}}{2})}$

Die hier vorkommenden Ausdrücke kennen wir vom **goldenen Schnitt**:
• *Les expressions qu'on trouve ici sont connues de la* **section d'or***:*

Sei • *Soit* $c=a+b,\ \ c:b=(a+b):b=b:a,\ \ b:a=\frac{b}{a}=x\ \Rightarrow\ \frac{a+b}{b}=1+\frac{a}{b}=\frac{b}{a}\ \Rightarrow\ x=1+\frac{1}{x}$

$$\Rightarrow\ x^2-x-1=0\ \Rightarrow\ x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Für $n\to\infty$ finden wir formal: • *Pour* $n\to\infty$ *nous trouvons de façon formelle:*

$$\begin{pmatrix}a_n\\a_{n+1}\end{pmatrix}=M\cdot\begin{pmatrix}a_{n-1}\\a_n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a_\infty\\a_{\infty+1}\end{pmatrix}=M\cdot\begin{pmatrix}a_{\infty-1}\\a_\infty\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}a_\infty\\a_\infty\end{pmatrix}=M\cdot\begin{pmatrix}a_\infty\\a_\infty\end{pmatrix}$$

Da bei der Fibonacci–Folge gilt $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}\geq a_n+1$, gilt für den Limes:
• *Comme pour la suite de Fibonacci il vaut* $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}\geq a_n+1$, *on trouve pour la valeur limite:*

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a_\infty=\infty$$

Daher macht die $\begin{pmatrix}a_n\\a_{n+1}\end{pmatrix}=M\cdot\begin{pmatrix}a_{n-1}\\a_n\end{pmatrix}$ für $n\to\infty$ keinen Sinn. Wenn wir aber links und rechts in der Gleichung die Vektoren mit a_n^{-1} strecken, so wird das anders, denn es gilt:
• *C'est pourquoi l'équation* $\begin{pmatrix}a_n\\a_{n+1}\end{pmatrix}=M\cdot\begin{pmatrix}a_{n-1}\\a_n\end{pmatrix}$ *n'est pas pratique pour* $n\to\infty$. *Mais si on allonge les vecteurs à gauche et à droite dans cette équation, la situation change, car il vaut:*

$$\forall_n:\ a_{n+1}\geq a_n\geq 1\ \Rightarrow\ 0<\frac{a_{n-1}}{a_n}\leq 1\ \Rightarrow\ 1\leq\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n+a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{a_{n-1}}{a_n}\leq 1+1=2$$

Weiter gilt für $x:=\frac{a_n}{a_{n-1}}>1$: • *En outre il vaut pour* $x:=\frac{a_n}{a_{n-1}}>1$*:*

Da die Folge $b_n:=\frac{a_{n+1}}{a_n}\in[1,2]$ nicht zwingen streng monoton, aber wie bewiesen beschränkt ist, ist sie nicht zwingend konvergent. Hier kommen wir mit einer Kettenbruchentwicklung weiter:
• *Comme la suite* $b_n:=\frac{a_{n+1}}{a_n}\in[1,2]$ *n'est pas forcément monotone et stricte, tandis qu'elle est bornée comme on vient de voir, elle n'est pas forcément convergeante. Ici nous faisons des progrès à l'aide d'un développement en fraction continue:*

$$b_n:=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n+a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{1}{\frac{a_n}{a_{n-1}}}=1+\frac{1}{1+\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{a_{n-3}}{a_{n-2}}}}=\dots$$

$$\dots=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ddots\frac{a_2}{a_1}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ddots\frac{1}{1}}}\rightsquigarrow$$ Abbrechender Kettenbruch!
• *Développement en fraction continue coupé!*

Andererseits kennen wir die konvergente Kettenbruchentwicklung von $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$:
• *D'autre part nous conaissons le développement en fraction continue convergeant de* $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$*:*

$$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ \Leftrightarrow(x>0\ \wedge\ x^2-x-1=0)\rightsquigarrow\ x^2=x+1\ |\cdot\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow\ x = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}} = \ldots = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\ddots}}}} \rightsquigarrow\ b_n \to x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$\rightsquigarrow$ Konvergenz! • *Convergence!*

Andererseits können wir nun auch die folgende Gleichung studieren: • *D'autre part nous pouvons donc étudier l'équation suivante:*

$$\begin{pmatrix} \frac{a_n}{a_n} \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} \frac{a_{n-1}}{a_n} \\ \frac{a_n}{a_n} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ b_n \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} (b_{n-1})^{-1} \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ b_\infty \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} (b_\infty)^{-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (b_\infty)^{-1} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \underline{\left| \begin{array}{lcl} 1 & = & 1 \\ b_\infty & = & 1 + (b_\infty)^{-1} \end{array} \right|} \rightsquigarrow\ b_\infty = 1 + (b_\infty)^{-1} \ \Rightarrow\ b_\infty^2 = b_\infty + 1 \ \Rightarrow\ \Rightarrow\ b_\infty^2 - b_\infty - 1 = 0$$

Möglichkeiten: • *Possibilités:* $\Rightarrow\ b_\infty = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \approx \begin{cases} 1.61803 \\ -0.618034 \end{cases}$

Wegen $b_n \in [1,2]$ gilt: • *Comme on a trouvé* $b_n \in [1,2]$ *il vaut:* $\quad b_\infty = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Konsequenz: • **Conséquence:**

Interessant ist, dass zur Berechnung von b_∞ aus der letzten Gleichung die Startwerte $a_1 = a_2 = 1$ nicht gebraucht wurden. Das heisst vermutlich (wir müssten das noch beweisen!), man könnte also mit ganz anderen Werten starten und damit dasselbe b_∞ finden. Weiter ist es denkwürdig, dass b_∞ in den Eigenwerten und in den Eigenvektoren steckt. Das ist eine Entdeckung, die nach einer weiteren Untersuchung bei allgemeiner gestellten derartigen Problemen verlangt. Das würde jedoch den hier gestellten Rahmen sprengen.
• *Il est intéressant que les valeurs initiales* $a_1 = a_2 = 1$ *n'ont pas été utilisées au calcul de* b_∞ *à l'aide de l'équation précédente. Ça veut dire que probablement on pourrait démarrer ainsi avec des valeurs tout à fait autres que* $a_1 = a_2 = 1$ *et on pourrait trouver comme ça le même* b_∞ *(ce qu'on devrait prouver!). En plus il est mémorable qu'on trouve* b_∞ *dans les valeurs propres et dans les vecteurs propres. C'est une découverte qui demande une étude ou une recherche plus vaste concernant des tels problèmes posés plus généralement. Cependant ça briserait le cadre établi chez nous.*

10.10 Anwendungen der Matrizenrechnung — Applications du calcul matriciel

10.10.1 Ausgleichsrechnung — Calcul d´ajustement de données

Problem: • **Problème:**

Geg.: • **Donné:** $\{(x_i; y_i) \mid i \in \text{Indexmenge}$ • *Ensemble des indices*$\}$
$\rightsquigarrow$ Menge von Messpunkten. • *Ensemble de points expérimentals de mesure.*

Ges.: • **Trouver:** Ausgleichsgerade $y = f(x) = a\,x + b$ • *Droite d´ajustement* $y = f(x) = a\,x + b$

Wunsch: • *Désir:* $(x_i; y_i) \approx (x_i; f(x_i) = a\,x_i + b) \rightsquigarrow\ |f(x_i) - y_i| = |a\,x_i + b - y_i| = r_i \to Min$
$a, b = ?$

Aus praktischen Gründen ersetzt man dieses Problem in der Theorie der kleinsten Quadrate durch die folgende Fragestellung (Vgl Skript Analysis oder Statistik):

• *Pour des raisons pratiques, on remplace ce problème dans la méthode des carrés minimaux par le problème suivant (Voir scripts d'analyse ou statistiques):*

$$\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(a\,x_i+b-y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \to Min$$

Wir benützen nun die folgende Abkürzung: • *En ce qui suit nous utilisons l'abréviation suivante:*

Definition: • **Définition:** $S(\vec{x}) := \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{1} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i$

Es gilt: • *Il vaut:* $\sum_{i=1}^{n} r_i^2 = \langle \vec{r}, \vec{r} \rangle, \;\; \vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,x_1+b-y_1 \\ \vdots \\ a\,x_n+b-y_n \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow \;\; R_q(a,b) := \langle \vec{r}, \vec{r} \rangle := \vec{r}^2 = (a \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix})^2 = (a\,\vec{x} + b\,\vec{1} - \vec{y})^2$

$= a^2\,\vec{x}^2 + b^2\,\vec{1}^2 + \vec{y}^2 + 2(a\,b\,\langle \vec{x}, \vec{1} \rangle + a\,\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + b\,\langle \vec{1}, \vec{y} \rangle) = a^2\,\vec{x}^2 + b^2\,n + \vec{y}^2 + 2(a\,b\,S(\vec{x}) + a\,\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + b\,S(\vec{y}))$

$\rightsquigarrow$ $R_q(a,b)$ ist eine quadratische Funktion von a, b.
• $R_q(a,b)$ *est une fonction du second degré (du second degré) de* a, b.

$\rightsquigarrow$ Problem: • *Problème:* $R_q(a,b) \to Min$.

Damit sind wir bei einem gewöhnlichen Extremalproblem angelangt, das man am besten mit Hilfe der Differentialrechnung oder einem Formelbuch löst. (Siehe Analysis–Skript.) Damit findet man die Ausgleichsgerade $f(x) = a\,x + b$.
• *Ici, nous sommes arrivés au problème ordinaire de trouver le point extrémal, qu'on peut résoudre à l'aide du calcul différentiel ou d'un livre de formule. (Voir cours d'analyse.) Ainsi on trouve la droite d´ajustement* $f(x) = a\,x + b$.

10.10.2 Überbestimmte Gleichungssysteme — Systèmes d'équations surdéterminés

Das Problem — Le problème

In der Praxis kommt es manchmal vor, dass man einem überbestimmten Gleichungssystem begegnet. Man kennt z.B. den Zusammenhang zwischen x und y. Dieser sei im einfachsten Fall bei einer Messvorrichtung durch $f(x) = y = a\,x + b$ gegeben. Man misst nun z.B. bei einer Einstellung x erst den Wert y_1 und später bei derselben Einstellung x den Wert y_2. Das führt zum System $y_1 = a\,x+b, \;\; y_2 = a\,x+b$, welches für $x_1 \neq x_2$ nicht lösbar ist. (Offenbar hatte sich etwas in unkontrollierbarer Weise verändert.) Statt der exakten Lösung kann man nun aber eine **optimale Lösung** suchen, wobei noch zu definieren ist, was wir unter „optimal“ verstehen wollen. Z.B. können wir das Gleichungssystem durch $y_1 = a\,x + b + r_1, \;\; y_2 = a\,x + b + r_2$ ersetzen mit möglichst kleinen r_1 und r_2, so dass das System exakt lösbar wird. Hier könnte man daher versuchen, in Anlehnung an die Methode der kleinsten Quadrate $R_q(x) := r_1^2 + r_1^2 = (y_1 - a\,x - b)^2 + (y_2 - a\,x - b)^2$ als quadratische Funktion von x zu minimieren, d.h. mit Hilfe der Differentialrechnung das Minimum zu berechnen. Der so errechnete Wert x ist dann optimal. $R_q(x)$ ist dann minimal, jedoch nicht $= 0$.
• *Dans la pratique, il se passe parfois qu'on rencontre un système d'équations surdéterminé. On connaît par exemple le rapport entre* x *et* y. *A un instrument de mesure celui-ci est donné dans le cas le plus simple par* $f(x) = y = a\,x + b$. *A un ajustage donné* x, *on mesure maintenant d'abord par exemple* y_1

et après avec le même ajustage la valeur y_2. Ceci mène au système $y_1 = a\,x + b,\ \ y_2 = a\,x + b$, qui n'est pas soluble pour $x_1 \neq x_2$. (Apparemment quelque chose avait changé d'une manière incontrôlable.) Au lieu de la solution exacte, on peut maintenant chercher une **solution optimale**, *tandis qu'il faut encore définir ce que nous voulons comprendre sous "de façon optimale". P.ex. nous pouvons remplacer le système d'équation par $y_1 = a\,x + b + r_1,\ \ y_2 = a\,x + b + r_2$ avec r_1 et r_2 aussi petits que possible pour que le système devienne soluble de façon exacte. Ici, on pourrait essayer par conséquent de minimiser $R_q(x) := r_1^2 + r_1^2 = (y_1 - a\,x - b)^2 + (y_2 - a\,x - b)^2$ comme fonction carrée de x, comme à la méthode des métode des carrés minimaux, c.-à.-d., calculer le minimum à l'aide du calcul différentiel. La valeur x ainsi calculée est alors optimale. $R_q(x)$ est alors minimal, mais non pas $= 0$.*

Die mathematische Behandlung des linearen Problems — Le traitement mathématique du problème linéaire

Geg.: • **Donné:** Unexaktes lineares Gleichungssystem • *Système d'équations linéaire non exact:*

$$A \cdot \vec{x} \approx \vec{b},\ \ A \cdot \vec{x} \neq \vec{b} \ \Rightarrow\ A \cdot \vec{x} = \vec{b} + R(\vec{x}),\ \ R(\vec{x}) := A \cdot \vec{x} - \vec{b}$$

$A:\ (m \times n),\ \ \vec{b}:\ (m \times 1),\ \ \vec{x}:\ (m \times 1),\ \ \vec{R}:\ (m \times 1)$
$R \rightsquigarrow$ Residuen– oder Restmatrix, Fehlermatrix • *Matrice des erreurs ou résiduelle*

Definition: • **Définition:** Quadratsumme: • *Somme des carrés:*

$$S(x) := R^T(x) \cdot R(x) = \sum_{i=1}^{m} r_i^2$$

Definition: • **Définition:** $\vec{x}_0$ **optimale Lösung** von $A \cdot \vec{x} = \vec{b} \ \Leftrightarrow S(\vec{x}_0)$ minimal.
• $\vec{x}_0$ **solution optimale de** $A \cdot \vec{x} = \vec{b} \ \Leftrightarrow S(\vec{x}_0)$ *minimale.*

D.h.: • *Ç.v.d.:* $\forall_{\vec{x} \neq \vec{x}_0} S(\vec{x}_0) \leq S(\vec{x}),\ \ (\vec{x}, \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n)$

Problem: • **Problème:** Gesucht ist jetzt eine Methode zur Auffindung von $\vec{x}_0$.
• *Maintenant il faut trouver une méthode pour calculer $\vec{x}_0$.*

Bei den Regeln für die Matrixmultiplikation haben wir gezeigt, dass $A^T \cdot A$ immer symmetrisch ist, jedoch oft $A^T \cdot A \neq A \cdot A^T$ gilt.
• *Quand aux règles pour la multiplication des matrices, on a démonré qu'il vaut toujours $A^T \cdot A$, mais souvent aussi $A^T \cdot A \neq A \cdot A^T$.*

Es gilt: • *Il vaut:* $A \cdot \vec{x} = \vec{b} \ \Rightarrow\ A^T \cdot A \cdot \vec{x} = A^T \cdot \vec{b}$.

Definition: • **Définition:** $A^T \cdot A \cdot \vec{x} = A^T \cdot \vec{b}$ nennen wir das zu $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ gehörige **Normalgleichungssystem**.
• *Nous appelons $A^T \cdot A \cdot \vec{x} = A^T \cdot \vec{b}$ le* **système d'équations normal** *lié à $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.*

Satz: • **Théorème:** Das Normalgleichungssystem hat immer mindestens eine Lösung.
• *Le système d'équations normal a toujours au moins une solution.*

Zum Beweis: • *Quant à la preuve:*

A induziert eine Abbildung f: • *A induit une application f:* $\rightsquigarrow\ A \cdot \vec{x} := f(\vec{x})$

$\rightsquigarrow\ Kern(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot \vec{x} = \vec{0}\},\ Im(A) = \{\vec{b} \in \mathbb{R}^n \mid \exists_{\vec{x} \in \mathbb{R}^n} :\ \vec{b} = A \cdot \vec{x}\}$

Es gilt: • *Il vaut:*

$Kern(A)$ und $Im(A)$ sind bekanntlich Vektorräume.
• *Nous savons que* $Kern(A)$ *et* $Im(A)$ *sont des espaces vectoriels.*

Konsequenz: • **Conséquence:**

Sei • *Soit* $\vec{b}_1, \vec{b}_1 \in Im(A)\ \Rightarrow\ \exists_{\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^n} :\ (A \cdot \vec{x}_1 = \vec{b}_1)\ \wedge\ (A \cdot \vec{x}_2 = \vec{b}_2)$
$\Rightarrow\ \alpha_1\, A \cdot \vec{x}_1 + \alpha_2\, A \cdot \vec{x}_2 = \alpha_1\, \vec{b}_1 + \alpha_2\, \vec{b}_2 \in Im(A)$

Falls also $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ eine Lösung hat, so gilt $\vec{b} \in Im(A)$. Andernfalls ist $\vec{b} \notin Im(A)$.
• *Si donc* $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ *a une solution, il vaut* $\vec{b} \in Im(A)$. *Sinon il vaut* $\vec{b} \notin Im(A)$.

Sei • *Soit* $A = (\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \rightsquigarrow\ \{\lambda_1\, \vec{a}_1 + \ldots + \lambda_n\, \vec{a}_n \mid \lambda_k \in \mathbb{R}\ \forall_k\} = \{A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}\} = Im(A)$
$\Rightarrow\ \forall_k :\ \vec{a}_k \in Im(A).$

Sei • *Soit* $V_0 := Im(A),\ V_1 := Im(A)_\perp \rightsquigarrow\ V_0, V_1 \in\ VR'EV$

Sei • *Soit* $\mathbb{R}^m =$ lineare Hülle von V_0, V_1 • $=$ *fermeture linéaire de* V_0, V_1

Sei • *Soit* $\vec{b} \in \mathbb{R}^m\ \Rightarrow\ \exists_{\vec{b}_0, \vec{b}_1} :\ \vec{b} = \vec{b}_0 + \vec{b}_1,\ \vec{b}_0 \in V_0 = Im(A),\ \vec{b}_1 \in V_1 = Im(A)_\perp$

$\rightsquigarrow\ \exists_{\vec{x}_0} :\ \vec{b}_0 = A \cdot \vec{x}_0$

$$\forall_k\ \vec{a}_k \in Im(A)\ \wedge\ \vec{b}_1 Im(A)_\perp\ \Rightarrow\ A^T \cdot \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^T \\ \vdots \\ \vec{a}_n^T \end{pmatrix} \cdot \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^T \cdot \vec{b}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_n^T \cdot \vec{b}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \vec{a}_1, \vec{b}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \vec{a}_n, \vec{b}_1 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ A^T \cdot \vec{b} = A^T \cdot (\alpha_0\, \vec{b}_0 + \alpha_1\, \vec{b}_1) = \alpha_0\, A^T \cdot \vec{b}_0 + \alpha_1\, A^T \cdot \vec{b}_1 = \alpha_0\, A^T \cdot \vec{b}_0 + \vec{0} = \alpha_0\, A^T \cdot \vec{b}_0$$

Es gilt: • *Il vaut:* $\vec{b}_0 \in V_0 = Im(A)$
$\Rightarrow\ \exists_{\vec{z}_0 = \frac{1}{\alpha_0}\, \vec{x}_0} :\ \vec{b}_0 = A \cdot \vec{z}_0 = A \cdot \frac{1}{\alpha_0}\, \vec{x}_0\ \Rightarrow\ A^T \cdot \vec{b} = \alpha_0\, A^T \cdot \vec{b}_0 = \alpha_0\, A^T \cdot A \cdot \frac{1}{\alpha_0}\, \vec{x}_0 = A^T \cdot A \cdot \vec{x}_0$

$\rightsquigarrow\ \vec{x}_0$ ist Lösung von • *est solution de* $A^T \cdot \vec{b} = A^T \cdot A \cdot \vec{x}_0$.

$\rightsquigarrow$ Das Normalgleichungssystem hat immer mindestens eine Lösung.
• *Le système d'équations normal a toujours au moins une solution.* ☺

Jetzt wollen wir noch zeigen, dass eine exakte Lösung des Normalgleichungssystems immer eine optimale Lösung von $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ist.
• *Maintenant, nous démontrons encore qu'une solution exacte du système d'équations normal est toujours aussi une solution optimale de* $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.

Sei • *Soit* $\vec{r} := R(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} - \vec{b},\ S(\vec{x}) := \langle \vec{r}, \vec{r} \rangle = \vec{r}^T \cdot \vec{r}$
$\rightsquigarrow\ S$ ist quadratisch in den Komponenten von $\vec{x}$ nach Konstruktion.
• *D'après la construciton,* S *est quadratique dans les composants de* $\vec{x}$.

$\rightsquigarrow\ S(\vec{x}) = (A\cdot\vec{x}-\vec{b})^T\cdot(A\cdot\vec{x}-\vec{b}) = (A\cdot\vec{x})^T\cdot(A\cdot\vec{x}) - 2\,(A\cdot\vec{x})^T\cdot\vec{b} + \vec{b}^T\cdot\vec{b}$

Verwende • *Utiliser* $A^T\cdot B = (\vec{a}_j^T)\cdot(\vec{b}_k) = \langle\vec{a}_j,\vec{b}\rangle = \langle\vec{b},\vec{a}_j\rangle = (\vec{b}_j^T)\cdot(\vec{a}_k) = B^T\cdot A$

$$\rightsquigarrow\ S(\vec{x}+\vec{y}) = (A\cdot(\vec{x}+\vec{y}))^T\cdot(A\cdot(\vec{x}+\vec{y})) - 2\,(A\cdot(\vec{x}+\vec{y}))^T\cdot\vec{b} + \vec{b}^T\cdot\vec{b}$$
$$= \underbrace{(A\cdot\vec{x})^T\cdot(A\cdot\vec{x})}_{S} - 2\ \underbrace{(A\cdot\vec{x})^T\cdot(A\cdot\vec{y})}_{(A\cdot\vec{y})^T\cdot A\cdot\vec{x}=\vec{y}^T\cdot A^T\cdot A\cdot\vec{x}} + (A\cdot\vec{y})^T\cdot(A\cdot\vec{y}) - \underbrace{2\,(A\cdot\vec{x})^T\cdot\vec{b}}_{S} - 2\ \underbrace{(A\cdot\vec{y})^T}_{\vec{y}^T\cdot A^T}\cdot\vec{b} + \underbrace{\vec{b}^T\cdot\vec{b}}_{S}$$
$$= S(\vec{x}) + 2\,\vec{y}^T(A^T\cdot A\cdot\vec{x} - A^T\cdot\vec{b}) + (A\cdot\vec{y})^T\cdot(A\cdot\vec{y})\rightsquigarrow$$

Lemma: • **Lemme:** $S(\vec{x}+\vec{y}) = S(\vec{x}) + 2\,\vec{y}^T(A^T\cdot A\cdot\vec{x} - A^T\cdot\vec{b}) + (A\cdot\vec{y})^T\cdot(A\cdot\vec{y})$ ☺

Satz: • **Théorème:** $\vec{x}_0$ optimale Lösung von $A\cdot\vec{x}=\vec{b} \Leftrightarrow \vec{x}_0$ exakte Lösung von $A^T\cdot A\cdot\vec{x} = A^T\cdot\vec{b}$
• $\vec{x}_0$ *solution optimale de* $A\cdot\vec{x}=\vec{b} \Leftrightarrow \vec{x}_0$ *solution exacte de* $A^T\cdot A\cdot\vec{x} = A^T\cdot\vec{b}$

<u>Beweis:</u> • **<u>Preuve:</u>**

1 $\Longleftarrow$ Sei $\vec{x}_0$ Lösung von $A^T\cdot A\cdot\vec{x} = A^T\cdot\vec{b}$ • *Soit* $\vec{x}_0$ *solution de* $A^T\cdot A\cdot\vec{x} = A^T\cdot\vec{b}$
Nach dem vorhergehenden Satz existiert $\vec{x}_0$ • $\vec{x}_0$ *existe d'après le théorème précédent.*

$$\rightsquigarrow\ \vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{x}_1 \ \Rightarrow\ S(\vec{x}) = S(\vec{x}_0+\vec{x}_1) = S(\vec{x}_0) + 2\,\vec{x}_1^T\underbrace{(A^T\cdot A\cdot\vec{x}_0 - A^T\cdot\vec{b})}_{A\cdot\vec{x}_0-\vec{b}=0} + \underbrace{(A\cdot\vec{x}_1)^T\cdot(A\cdot\vec{x}_1)}_{=|A\cdot\vec{x}_1|^2\geq 0}$$

$$\Rightarrow\ S(\vec{x}) = S(\vec{x}_0+\vec{x}_1) \geq S(\vec{x}_0)$$

2 $\Longrightarrow$ Sei $\vec{x}_0$ optimale Lösung von $A\cdot\vec{x}=\vec{b}$, $\vec{x}_1$ Lösung von $A^T\cdot A\cdot\vec{x} = A^T\cdot\vec{b}$
• *Soit* $\vec{x}_0$ *solution optimale de* $A\cdot\vec{x}=\vec{b}$, $\vec{x}_1$ *solution de* $A^T\cdot A\cdot\vec{x} = A^T\cdot\vec{b}$

$$S(\vec{x}_0) = S(\vec{x}_1+(\vec{x}_0-\vec{x}_1)) = S(\vec{x}_1)+2\,(\vec{x}_0-\vec{x}_1)^T\underbrace{(A^T\cdot A\cdot\vec{x}_1 - A^T\cdot\vec{b})}_{=0} + \underbrace{(A\cdot(\vec{x}_0-\vec{x}_1))^T\cdot(A\cdot(\vec{x}_0-\vec{x}_1))}_{=|A\cdot(\vec{x}_0-\vec{x}_1)|^2\geq 0}$$

$$\Rightarrow\ S(\vec{x}_0) \geq S(\vec{x}_1)$$

Es gilt aber: • *Mais il vaut:*

$\vec{x}_0$ **optimale Lösung** von $A\cdot\vec{x}=\vec{b} \Leftrightarrow S(\vec{x}_0)$ minimal.
• $\vec{x}_0$ **solution optimale de** $A\cdot\vec{x}=\vec{b} \Leftrightarrow S(\vec{x}_0)$ *minimale.* $\Rightarrow\ S(\vec{x}_0) \not> S(\vec{x}_1) \ \Rightarrow\ S(\vec{x}_0) = S(\vec{x}_1)$

$\rightsquigarrow\ (A\cdot(\vec{x}_0-\vec{x}_1))^T\cdot(A\cdot(\vec{x}_0-\vec{x}_1)) = |A\cdot(\vec{x}_0-\vec{x}_1)|^2 \not\geq 0 \ \Rightarrow\ \ldots = 0 \ \Rightarrow\ A\cdot(\vec{x}_0-\vec{x}_1) = \vec{0}$
$\Rightarrow\ A\cdot\vec{x}_0 = A\cdot\vec{x}_1 \ \Rightarrow\ A^T\cdot A\cdot\vec{x}_0 = A^T\cdot A\cdot\vec{x}_1 = A^T\cdot A\cdot\vec{b} \ \Rightarrow\ A^T\cdot A\cdot\vec{x}_0 = A^T\cdot A\cdot\vec{b}$ ☺

Lösungen in der Erfahrungspraxis — Solutions dans la pratique selon expérience

Fall $(A^T\cdot A)$ **regulär**: $\rightsquigarrow$ Lösung von $A^T\cdot A\cdot\vec{x} = A^T\cdot A\cdot\vec{b}$ eindeutig, $\vec{x} = (A^T\cdot A)^{-1}\cdot A\cdot\vec{b}$.
• **Le cas** $(A^T\cdot A)$ **régulière**: $\rightsquigarrow$ *La solution de* $A^T\cdot A\cdot\vec{x} = A^T\cdot A\cdot\vec{b}$ *est univoque,* $\vec{x} = (A^T\cdot A)^{-1}\cdot A\cdot\vec{b}$.

Fall $(A^T \cdot A)$ **singulär**: $\rightsquigarrow$ Lösung nicht eindeutig, es gibt unendlich viele Lösungen.
• **Le cas** $(A^T \cdot A)$ **singulière**: $\rightsquigarrow$ *La solution n'est pas univoque, il y a un nombre infini de solutions.*

$\rightsquigarrow$ **Frage:** Welche Lösung soll man nehmen?
• **Question:** *Laquelle des solution faut–il prendre?*

Um die Auswahl einzuschränken, ist es günstig, eine solche Lösung zu wählen, für die $\vec{x}_0$ minimal ist, d.h. $|\vec{x}| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} \to Min$ gilt.
• *Pour restreindre le choix on peut prendre une solution pour laquelle* $\vec{x}_0$ *est minimale, ç.v.d.* $|\vec{x}| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} \to Min$.

$$\rightsquigarrow \ |\vec{x}_0| \leq |\vec{x}_0| \forall_{\vec{x} \in \mathbb{L}}$$

Sind $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ zwei verschiedene Lösungen, so bedeutet das: $\langle \vec{x}_1 - \vec{x}_2, \vec{x}_0 \rangle = 0$. Damit kann man $\vec{x}_0$ bestimmen.
• *Pour deux solutions* $\vec{x}_1$ *et* $\vec{x}_2$ *différentes, cela signifie:* $\langle \vec{x}_1 - \vec{x}_2, \vec{x}_0 \rangle = 0$. *Al'aide de cette équation on peut calculer* $\vec{x}_0$.

Zur Auffindung der Lösung $\vec{x}_0$**:** • **Trouver la solution** $\vec{x}_0$**:**

Wir wissen, dass $(A^T \cdot A)$ reell und symmetrisch ist. Die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von $(A^T \cdot A)$ sind daher reell und es gibt ein $j \in \mathbb{N}$, $j < n$ mit $\lambda_k = 0$ für $k > j$. Die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{b}_k$ sind orthogonal resp. im Falle der Wählbarkeit orthogonal wählbar. Sei f die durch $(A^T \cdot A)$ induzierte Abbildung, so ist $\vec{b}_k \in Kern(f)$ für $k > j$. Damit gilt: $Im(f) = \{\alpha_1 \vec{b}_1 + \ldots + \alpha_j \vec{b}_j \mid \alpha_k \in \mathbb{R}\}$. Wegen $f(\vec{b}_j) = \lambda_k \cdot \vec{b}_j$ gilt $f: \ Im(f) \overset{bij.}{\longmapsto} Im(f)$. Nun wissen wir, dass das Problem $A^T \cdot A \cdot \vec{x} = A^T \cdot A \cdot \vec{b}$ immer mindestens eine Lösung hat und dass somit in $\mathbb{L}$ mindestens ein absolutes Minimum $\vec{x}_0$ existiert.
• *Nous savons que* $(A^T \cdot A)$ *est réelle et symétrique. Donc les valeurs propres* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *de* $(A^T \cdot A)$ *sont réelles et il existe un nombre* $j \in \mathbb{N}$, $j < n$ *avec* $\lambda_k = 0$ *für* $k > j$. *Les vecteurs propres correspondants* $\vec{b}_k$ *sont orthogonals resp. on peut les choisir de façon orthogonale s'il y a la possibilité de choisir. Soit* f *l'application donnée par* $(A^T \cdot A)$. *Donc il vaut* $\vec{b}_k \in Kern(f)$ *pour* $k > j$. *Ça nous donne:* $Im(f) = \{\alpha_1 \vec{b}_1 + \ldots + \alpha_j \vec{b}_j \mid \alpha_k \in \mathbb{R}\}$. *A cause de* $f(\vec{b}_j) = \lambda_k \cdot \vec{b}_j$ *il vaut* $f: \ Im(f) \overset{bij.}{\longmapsto} Im(f)$. *Maintenant nous savons que le problème* $A^T \cdot A \cdot \vec{x} = A^T \cdot A \cdot \vec{b}$ *a toujours au moins une solution et que donc dans* $\mathbb{L}$ *il existe au moins un minimum absolu* $\vec{x}_0$.

Daher kann man $\vec{x}_0$ in folgender Form darstellen:
• *C'est pourquoi on peut représenter* $\vec{x}_0$ *par la forme suivante:*

$$\vec{x}_0 = \sum_{k=1}^{j} \alpha_k \vec{b}_k + \sum_{k=j+11}^{n} \alpha_k \vec{b}_k$$

$$\Rightarrow \ (A^T \cdot A) \cdot \vec{x}_0 = \underbrace{(A^T \cdot A) \cdot \sum_{k=1}^{j} \alpha_k \vec{b}_k}_{\sum_{k=1}^{j} \lambda_k \alpha_k \vec{b}_k} + \underbrace{(A^T \cdot A) \cdot \sum_{k=j+11}^{n} \alpha_k \vec{b}_k}_{=0} = \sum_{k=1}^{j} \lambda_k \alpha_k \vec{b}_k = A^T \cdot \vec{b}$$

Seinen nun die Eigenvektoren $\vec{b}_k$ normiert. • *Soyent les vecteurs propres* $\vec{b}_k$ *normalisés.* $\rightsquigarrow \ |\vec{b}_k| = 1$

$$\rightsquigarrow \ A^T \cdot A) \cdot \sum_{k=1}^{j} \alpha_k \vec{b}_k = A^T \cdot \vec{b} \ \Rightarrow \ \vec{x}_1 := \sum_{k=1}^{j} \alpha_k \vec{b}_k \in \mathbb{L} \ , \ |\vec{x}_1|^2 = \sum_{k=1}^{j} \alpha_k^2 \leq |\vec{x}_0|^2 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2, \ j < n$$

Da $\vec{x}_0$ aber minimal ist, muss nun gelten: • *Comme $\vec{x}_0$ est minimal, il vaut:*

$$|\vec{x}_0|^2 = |\vec{x}_1|^2 \;\Rightarrow\; \sum_{k=j+11}^{n} \alpha_k^2 = 0,\;\; \alpha_k = 0 \forall_{k>j} \;\Rightarrow\; \vec{x}_0 \in Im(f)$$

Nun gilt wegen $f:\; Im(f) \overset{bij.}{\longmapsto} Im(f)$: • *Maintenant il vaut à cause de $f:\; Im(f) \overset{bij.}{\longmapsto} Im(f)$:*

$$f(\vec{x}_0) = (A^T \cdot A) \cdot \vec{x}_0 = A^T \cdot \vec{b} = \vec{y}_0 \in Im,\;\; \vec{x}_0 = f^{-1}(\vec{y}_0) = f^{-1}(A^T \cdot \vec{b})$$

$\rightsquigarrow$ $\vec{x}_0 = f^{-1}(A^T \cdot \vec{b})$ eindeutig. • $\vec{x}_0 = f^{-1}(A^T \cdot \vec{b})$ *univoque.*

Beispiele — Exempses

1. Beispiel: • **Exemple 1:**

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b},\;\; A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\;\; \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\; A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 21 & 28 \\ 28 & 45 \end{pmatrix},\;\; \det A^T \cdot A = 161 \neq 0,\;\; \vec{x} = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{65}{161} \\ \frac{16}{23} \end{pmatrix},$$

$$R = A \cdot \vec{x} - \vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{27}{161} \\ \frac{108}{161} \\ -\frac{324}{161} \end{pmatrix},\;\; S = R^T(x) \cdot R(x) = (\frac{729}{161}) \neq (0)$$

$\vec{x}$ ist daher optimale Lösung, aber nicht exakte Lösung von $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.
• *$\vec{x}$ est donc solution optimale, mais non pas solution exacte de $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.*

2. Beispiel: • **Exemple 2:**

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b},\;\; A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},\;\; \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\; A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 44 & 22 \\ 22 & 11 \end{pmatrix},\;\; \det A^T \cdot A = 0,\;\; \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{35}{22} - \frac{y}{2} \\ y \end{pmatrix},\;\; y \in \mathbb{R},$$

$$R = A \cdot \vec{x} - \vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{90}{11} \\ -\frac{60}{11} \\ -\frac{90}{11} \end{pmatrix},\;\; S = R^T(x) \cdot R(x) = (\frac{1800}{11}) \neq (0)$$

$\vec{x}$ ist daher optimale Lösung, aber nicht exakte Lösung von $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.
• *$\vec{x}$ est donc solution optimale, mais non pas solution exacte de $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.*

Kapitel • Chapitre 11

Ausblick — Perspective

11.1 Quaternionen, Raumdrehungen — Quaterniones, révolutions dans l'espace

Quaternionen: Hamilton 1843. • *Quaterniones: Hamilton 1843.*

Seien • *Soient* $\alpha \in \mathbb{R},\ \vec{v} \in \mathbb{R}^3,\ \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

Symbol: • **Symbole:** $\alpha \uplus \vec{v} := (\alpha, \vec{v}) :\hat{=} \begin{pmatrix} \alpha \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},\ \mathbb{H}_{\mathbb{Q}} = \{(\alpha, \vec{v}) \mid \alpha \in \mathbb{R},\ \vec{v} \in \mathbb{R}^3\}$

Definition: • **Définition:** (Addition) • *(Addition)*

$$(\alpha, \vec{v}) + (\beta, \vec{w}) := (\alpha + \beta, \vec{v} + \vec{w})$$

$\rightsquigarrow$ $(\mathbb{H}_{\mathbb{Q}}, +)$ ist abelsche Gruppe (Vektoraddition).
• $(\mathbb{H}_{\mathbb{Q}}, +)$ *est groupe commutatif (addition de vecteurs).*

Definition: • **Définition:** (Multiplikation) • *(Multiplication)*

$$(\alpha, \vec{v}) \diamond (\beta, \vec{w}) := (\alpha \cdot \beta - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle, \alpha \cdot \vec{w} + \beta \cdot \vec{v} + (\vec{v} \times \vec{w}))$$

$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$: Skalarprodukt • *Produit scalaire*
$(\vec{v} \times \vec{w})$: Vektorprodukt • *Produit vectoriel*

Schreibweise: • **Façon d' écrire:** $(\alpha, \vec{0}) := \alpha,\ (0, \vec{v}) := \vec{v} \rightsquigarrow$ Problemlos • *Sans problème*

Bemerkung: • **Remarque:** Die Multiplikation ist nicht kommutativ!
• *La multiplication n'est pas commutative!*

Definition: • **Définition:** (Konjugation) • *(Conjugation)*

$$\overline{(\alpha, \vec{v})} := (\alpha, -\vec{v})$$

Konsequenz: • **Conséquence:** $(\alpha, \vec{v}) \diamond \overline{(\alpha, \vec{v})} = (\alpha^2 + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle, \vec{0}) = \alpha^2 + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$

Definition: • **Définition:** (Betrag, Länge) • *(Valeur absolue, longueur)*

$$|(\alpha, \vec{v})| := \sqrt{\alpha^2 + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = \sqrt{\alpha^2 + \vec{v}^2}$$

Definition: • **Définition:** (Inverses) • *(Inverse)*

$$(\alpha, \vec{v})^{-1} := \frac{\overline{(\alpha, \vec{v})}}{|(\alpha, \vec{v})|^2}$$

Eigenschaften: $((\alpha, \vec{v}), \diamond)$ abgeschlossen, assoziativ, $1 =$ neutrales Element, Inverses existiert
• **Qualités:** ($\rightsquigarrow$ Gruppe), $((\alpha, \vec{v}), +, \diamond)$ distributiv $\rightsquigarrow$ Schiefkörper.
• $((\alpha, \vec{v}), \diamond)$ *fermée, associative,* $1 =$ *élément neutre, l'inverse existe*
($\rightsquigarrow$ groupe), $((\alpha, \vec{v}), +, \diamond)$ *distributif* $\rightsquigarrow$ *corps non commutatif.*

Symbol: • **Symbole:** $\alpha \uplus \vec{v} := (\alpha, \vec{v}) :\hat{=} \begin{pmatrix} \alpha \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} := \alpha\, \vec{e_1} + v_1\, \vec{e_2} + v_2\, \vec{e_3} + v_3\, \vec{e_4} := \alpha + v_1\, i + v_2\, j + v_3\, k$

Eigenschaften: $i \diamond j = k = -j \diamond i, \;\; i \diamond i = -1, \;\; \ldots$
• **Qualités:**

$\rightsquigarrow$ Formel von Hamilton für die Raumdrehung um den Winkel φ um die Achse $\overrightarrow{OP} = \vec{v}$:
• *Formule de Hamilton pour la révolution dans l'espace par l'angle* φ *autour de l'axe* $\overrightarrow{OP} = \vec{v}$:

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$Q := (\cos(\frac{\varphi}{2}), \sin(\frac{\varphi}{2})\, \vec{e}_v), \;\; \vec{e}_v^{\,2} = 1$$

Beh.: • **Thè.:**

$$\vec{x} \overset{D_{\varphi, \vec{e}_v}}{- - - -\!\!\longrightarrow} \vec{y} = Q \diamond \vec{x} \diamond \bar{Q}$$

Bemerkung: • **Remarque:** $\overrightarrow{OP_1} = \vec{x} := (0, \vec{x})$
Korkenzieherregel! • *Règle du tire-bouchon!*

Beweis: • **Preuve:**

Komponentenweise nachrechnen. Formel von Hamilton: Vergleich mit dem Resultat, das die klassische Matrizenrechnung ergibt.

• *Contrôler les composants par le calcul. Formule de Hamilton: Comparer avec le résultat qu'on obtient par le calcul matriciel classique.*

11.2 Algebraische Kurven — Courbes algébriques

11.2.1 Algebraische Kurven in der Ebene — Courbes algébriques dans le plan

Sei $p(x)$ ein Polynom: • *Soit $p(x)$ un polynôme:* $p(x) = y = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$

Graphisch ist die Kurve auffassbar als Punktmenge, beschrieben durch Ortsvektoren:
• *Graphiquement on peut comprendre la courbe comme ensemble de points, décrits par des vecteurs:*

$$\begin{pmatrix} x \\ y = p(x) \end{pmatrix}.$$

Eine andere Darstellung ist: • *Voici une autre représentation:*

$$P(x,y) = p(x) - y = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 - y = 0$$

Das ist ein Spezialfall folgender Gleichung: • *C'est un cas spécial de l'équation suivante:*

$$\begin{array}{rcccccccccc} P(x,y) & = & \alpha_{n,0}\, y^n\, x^0 & + & \alpha_{n-1,1}\, y^{n-1}\, x^1 & + & \ldots & + & \alpha_{1,n-1}\, y^1\, x^{n-1} & + & \alpha_{0,n}\, y^0\, x^n \\ & & & + & \alpha_{n-1,0}\, y^{n-1}\, x^0 & + & \ldots & + & \alpha_{1,n-2}\, y^1\, x^{n-2} & + & \alpha_{0,n-1}\, y^0\, x^{n-1} \\ & & & & & & \ddots & \vdots & & \vdots & \\ & & & & & & & + & \alpha_{1,0}\, y^1\, x^0 & + & \alpha_{0,1}\, y^0\, x^1 \\ & & & & & & & & & + & \alpha_{0,0}\, y^0\, x^0 \end{array}$$

$P(x,y)$ ist ein **Polynom** in x und y von **Grade** n. • *$P(x,y)$ est un* **polynôme** *en x et y de* **degré** n.
Kurz: • *Bref:* $P(x,y) = \sum_{r,s=0,\ r+s\le n}^{n} \alpha_{r,s}\, y^r\, x^s$: Polynom in 2 Variablen • *polynôme avec 2 variables.*

Wir definieren: • *Nous définissons:*

Definition: • **Définition:** Die Lösungsmenge von $P(x,y) \equiv 0$ in der Ebene ($\mathbb{R}^2$) heisst **algebraische Kurve**. • *L'ensemble de solutions de $P(x,y) \equiv 0$ dans le plan ($\mathbb{R}^2$) s'appelle* **courbe algébrique**.

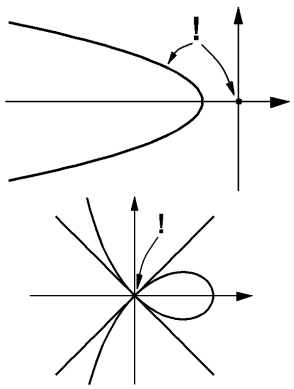
(Schreibe kurz: • *Ecrire brièvement:* $P(x,y) = 0$)

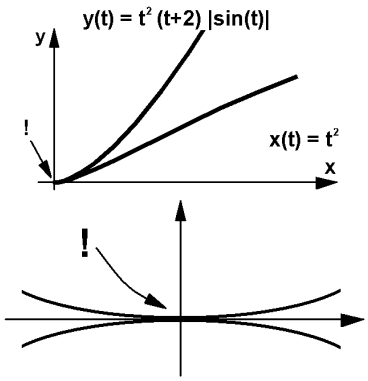
Die Kurve heisst „algebraisch", weil die Gleichung $P(x,y) = 0$ eine algebraische Gleichung (Polynomgleichung) ist. • *La courbe s'appelle "algébrique", parce que l'équation $P(x,y) = 0$ est une équation algébrique (équation de polynôme).*

11.2.2 Diskussion solcher Kurven — Discussion de telles courbes

Bei speziell einfachen Kurven kann man vorgehen wie bei Funktionen mit einer Variablen: Es interessieren Symmetrie, Achsenschnittpunkte, Ausdehnung (Definitionsbereiche, Wertebereiche), Extrema (Minima, Maxima), Wendepunkte, Konvexität, Asymptoten u.s.w..
• *Quant aux courbes spéciales et simples on peut agir commme pour les fonctions à une variable: On s'intéresse à la symétrie, aux points d'intersection avec les axes, à l'extension (domaines de définition et de valeurs), extrémums (minimum, maximum), points d'inflexion convexité, asymptotes, etc..*

Bei andern solchen Kurven trifft man auch auf interessante Neuheiten. Z.B. spezielle Punkte wie: **Singuläre Punkte: Isolierte Punkte, Spitzen** oder **Doppelpunkte: Knoten, Berührungsknoten**, **Zweige**, vgl. Skizzen. • *D'autres courbes de ce type offrent aussi des nouveautés intéressantes: P.ex des points spéciaux comme:* **Des points singuliers: Des points isolés, des pointes** *ou des* **points doubles: des noeuds, des noeuds de contact**, *des* **branches**, *voir esquisse.*





11.2.3 Beispiele — Exemples

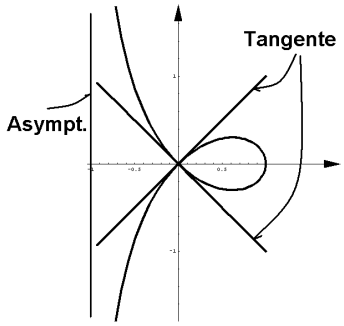
Bsp.: • **Exemple: (1)**

$P(x,y) = x^2(x^2-1) - y^2(y^2-1) = 0 \;\Rightarrow\; \pm x\sqrt{x^2-1} = \pm y\sqrt{y^2-1} \;\Rightarrow$ Lösung nur für
• *solution seulement pour* $x^2 \geq 1,\;\; y^2 \geq 1.$

Zudem existieren aber auch isolierte Lösungen:
• *En plus il existe aussi des solutions isolées:*

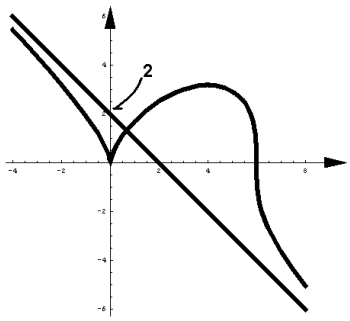
$$x = y = 0,\;\; x = 0 \;\wedge\; y = \pm 1,\;\; y = 0 \;\wedge\; x = \pm 1$$

Bsp.: • **Exemple: (2)**



$$P(x,y) = y^2(1+x) - x^2(1-x) = 0$$

Bsp.: • **Exemple: (3)**



$$P(x,y) = y^3 - x^2(6-x) = 0$$

Zur Gewinnung des Graphs in diesen Beispielen: Löse die Gleichung nach y auf und bearbeite die entstehenden Zweige (Teilfunktionen). • *Comment obtenir le graphe? Résoudre l'équation d'après y et discuter les branches obtenues (fonctions partielles).*

11.2.4 Algebraische Kurven im Raum — Courbes algébriques dans l'espace

Verallgemeinerung, Polynom in j Variablen:
• Généralisation, Polynôme avec j variables:

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_l) = \sum_{r,s,\ldots,l=0,\ r+s+\ldots+l\leq n}^{n} \alpha_{r,s,\ldots,l} \cdot x_1^r \cdot x_2^s \cdot \ldots \cdot x_j^l.$$

Z.B. 3 Variablen: • *P.ex.* 3 *variables:* $P(x,y,z) = 0$,

Bsp.: • *Expl.:* $x + y + z = 0$ oder • *ou* $z = -x - y$.

Damit ist aber eine **Ebene im Raum** definiert und nicht eine Kurve. Eine Kurve ergibt sich erst, wenn man zwei solche Ebenen schneidet. • *Ainsi on a défini un* **plan dans l'espace** *et non pas une courbe. On obtient une courbe seulement quand on fait l'intersection de deux plans.*

Allgemeiner: • *Généralisation:*

$$\begin{aligned} P(x,y,z)_1 &= 0 \\ P(x,y,z)_2 &= 0 \end{aligned}$$

ergibt eine algebraische Kurve im Raum • *définit une courbe algébrique dans l'espace.*

Daraus ersieht man: • *Ainsi on voit:*

Konsequenz: • **Conséquence:**
Die Schnittmenge von $n-1$ Hyperebenen $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ im $\mathbb{R}^n$ ergibt eine algebraische Kurve im $\mathbb{R}^n$.
• *L'ensemble d'intersection de $n-1$ hyperplans $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ dans le $\mathbb{R}^n$ donne une courbe algébrique dans le $\mathbb{R}^n$.*

11.3 Polyedersatz — Théorème des polyèdres

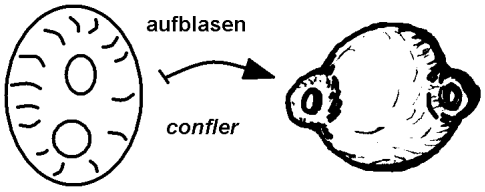
11.3.1 Begriffe — Notions

Definition: • **Définition:** Ein **Polyeder**[9] ist ein durch endlich viele ebenen Flächen begrenzter endlicher Körper. • *Un* **polyèdre**[9] *est un corps fini limité par un nombre fini de plans.*

Einteilung: Konvexe, nicht konvexe, solche ohne Löcher, solche mit n Löchern, ...
• *Classement: Des polyèdres convexes, non–convexex, sans trous, avec n trous, ...*

Zur Klassifizierung verwenden wir die „Gummigeometrie“:
• *Pour faire une classification nous utilisons la "géométrie de gomme":*

Wir denken uns den Körper aus Gummi gebaut, sodass er aufblasbar ist. Hat der Körper kein Loch, so entsteht beim Aufblasen ein **kugelartiges Gebilde**. Hat er ein Loch, so kann er auf diese Weise zu einem **Torus** oder Reifen (Pneu) aufgeblasen werden und dann weiter zu einem kugelartigen Gebilde mit irgendwo aussen einem Henkel (wie bei einer Tasse). Hat der Körper zwei Löcher, so ist er entsprechend deformierbar in einen Doppeltorus und dann in ein kugelartiges Gebilde mit zwei Henkeln u.s.w..



Allgemein: Hat der Körper n Löcher, so lässt er sich in ein kugelartiges Gebilde mit n Henkeln deformieren. Jedes Polyeder ist so deformierbar.

• *Nous nous imaginons que le corps est fait en gomme, de façon qu'on puisse le gonfler. Si le corps n'a pas de trous, on obtient après l'avoir gonflé un corps en forme de* **boule**. *S'il a un trou, on peut lui donner la forme de* **torus**, *ou bien de pneu et après de corps en forme de boule avec une anse n'importe où(comparable à une tasse). Si le corps a deux trous, on peut le déformer en un torus double ou respectivement en un corps en forme de boule avec deux anses etc..*

Généralement: Si le corps a n trous, on peut le déformer en un corps en forme de boule avec n anses.

Sei p die Anzahl der so entstehenden Henkel. • *Soit p le nombre d'anses qu'on obtient ainsi.*

Definition: • **Définition:** p heisst **Geschlecht** des Polyeders. • *p s'appelle le* **genre** *du polyèdre.*

Körper, die gleiches Geschlecht haben, heissen **topologisch äquivalent**.
Les corps qui ont le même genre, s'appellent **topologiquement équivalents**.

11.3.2 Der Satz — Le théorème

Im Folgenden betrachten wir ein Polyeder mit e **Ecken**, k **Kanten** und f **Flächen**. • *En ce qui suit nous considérons un polyèdre à e* **sommets**, *k* **arêtes** *et f* **surfaces** *(plans).*

Satz: • **Théorème:** (**Polyedersatz**[10] • **Théorème polyédrale**[10])

Vor.: • **Hyp.:**

Gegeben sei ein Polyeder vom Geschlecht p. • *Soit donné un polyèdre du genre p.*

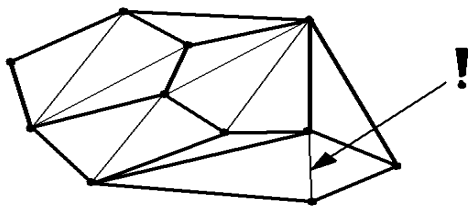
Beh.: • **Thè.:**

$e - k + f = 2 - 2p$

Definition: • **Définition:** $2 - 2p$ heisst **Eulersche Charakteristik** • *s'appelle* **caractéristique d'Euler**.

Wir untersuchen die Sache hier im Falle $p = 0$. • *Nous examinons ici la chose dans le cas $p = 0$.*

Falls das Polyeder Flächen besitzt, die keine Dreiecke sind, zerlegen wir diese Fächen in Dreiecke mit den bestehenden Eckpunkten. Dabei zerschneidet eine neue Kante eine bestehende Fläche in zwei neue Flächen. Die Kantenzahl k und die Flächenzahl f erhöhen sich um eins, e bleibt gleich. Somit ändert $z_0 = e - k + f$ nicht. Wir haben damit künstlich erreicht, dass alle Seitenflächen Dreiecke sind bei gleichem z_0.



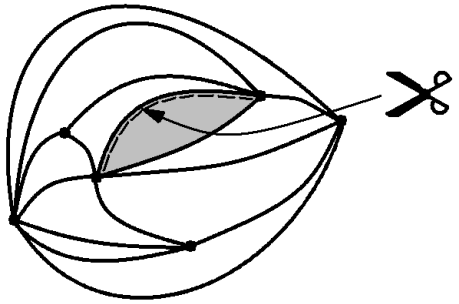
• *Si le polyèdre possède des surfaces qui ne sont pas des triangles, nous décomposons ces surfaces en triangles avec les sommets qui existent déjà. Une nouvelle arête coupe une surface en deux nouvelles surfaces. Le nombre des arêtes k et le nombre de surfaces f augmentent chacun de un, tandis que le nombre de sommets e n'est pas touché. Le nombre $z_0 = e - k + f$ ne change donc pas. Nous avons atteint par cette opération artificielle que toutes les surfaces du polyèdre sont maintenant des triangles et que le*

[10] Ein allgemeiner Beweis stammt z.B. von Cauchy. • *Un preuve générale a été donné p.ex. de Cauchy*

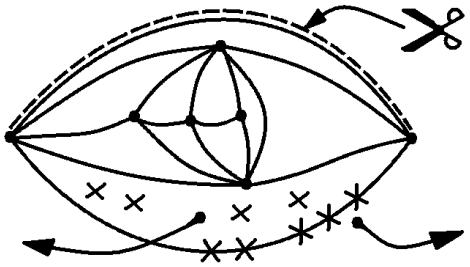
nombre z_0 est resté le même.

Nun wenden wir auf den Körper die Gummigeometrie an: Wir schneiden den Körper jetzt längs einer Kante zwischen zwei benachbarten Ecken auf und deformieren dann die Oberfläche derart, dass sie auf der Ebene liegt. Die aufgeschnittene Kante erscheint dabei jetzt doppelt, darf daher nur einmal gezählt werden. ($z_0 \longmapsto z_1 = z_0 + 1$.)

• *Maintenant nous coupons le corps le long d'une arête entre deux sommets voisins et nous déformons la surface de manière qu'elle soit étendue dans le plan. L'arête coupée apparaît maintenant deux fois, mais il ne faut la compter qu'une fois. ($z_0 \longmapsto z_1 = z_0 + 1$.)*



Entfernen wir nun in der Ebene von aussen her eine Kante und auch die damit eingeschlossene Dreiecksfläche, so bleibt z_0 wieder gleich. Bei dieser Operation können aber „freie Ecken" entstehen: Eine übriggebliebene Ecke am Ende einer Kante (ihre „freie Kante"), die keine Fläche mehr umschliesst. Entfernt man aber diese freie Ecke auch mit ihrer freien Kante, so ändert z_0 nicht.



• *Si nous effaçons dans le plan depuis dehors une arête et aussi sa surface triangulaire enfermée par cette arête, le nombre z_0 reste de nouveau le même. Mais par cette opération on peut créer des "sommets libres": Un sommet qui reste au bout d'une arête (son "arête libre"), qui n'enferme plus de surface. Mais si on efface aussi ce sommet libre ensemble avec son arête libre, le nombre z_0 ne change pas.*

Auf diese Weise kann man die in die Ebene ausgebreitete Oberfläche des Polyeders durch Entfernung von Kanten, Flächen und Ecken solange abbauen bis nur noch eine Dreiecksfläche übrigbleibt, deren eine Kante die beim Aufschneiden entstanden ist, also doppelt vorhanden war und daher nicht gezählt werden darf.

• *De cette manière nous pouvons réduire la surface du polyèdre étendue dans le plan en effaçant des arêtes, surfaces et sommets jusqu'à ce qu'il ne reste qu'une surface triangulaire dont une arête a été créée en coupant une arête du polyèdre en deux. Cette arête est donc double, il ne faut pas la compter.*

Am Schlusse bleibt dann noch: • *A la fin il reste donc:*

$f = 1,\ e = 3,\ k = 2$ (nur 2 zählen, eine doppelt • *compter seulement* 2, *une est double.*)
$\rightsquigarrow \quad z_0 = e - k + f = 3 - 2 + 1 = 2 = 2 - 2p,\ p = 0 \rightsquigarrow \quad e - k + f = 2 - 2p$ mit • *avec* $p = 0$.

11.3.3 Platonische Körper — Corps platoniques

Definition: • **Définition:** Ein Polyeder heisst **regulär**, wenn alle Seitenflächen kongruente regelmässige n–Ecke sind. • *Un polyèdre s'appelle* **régulier**, *si toutes les surfaces sont des figures à n sommets réguliers.*

Die regulären Polyeder nennt man auch **platonische Körper**[11]
• *Les polyèdres réguliers s'appellent aussi* **corps platoniques**.

(Alle Kanten gleich lang, alle Winkel gleich gross.
• *Toutes les arêtes de la même longueur, tous les angles de la même grandeur.*)

Euklid hat es unternommen, mit den damaligen Mitteln und Begriffen die Geometrie weitgehend axiomatisch exakt aufzubauen (die „Elemente", dreizehn Bücher), um dann im 13. Buch zu beweisen, dass es nur 5 platonische Körper gibt.
• *Euclide est arrivé à construire la géométrie de façon axiomatique et exacte à l'aide des moyens et des notions disponibles à l'époque (les "Eléments", treize livres). Il a démontré dans son* 13ème *livre qu'il n'existe que* 5 *corps platoniques.*

Der Beweis des Satzes von Euklid gelingt leicht auf Grund des Polyedersatzes. Man kann dabei die Tatsache benützen, dass in einem regelmässigen Körper in einer Ecke minimal $m = 3$ Flächen und maximal $m = 5$ regelmässige Flächen zusammenstossen können.
• *On obtient la preuve du théorème d'Euclide facilement sur la base du théorème du polyèdre. On peut en utiliser le fait que dans un corps régulier dans un sommet on peut avoir au minimum $m = 3$ et au maximum $m = 5$ surfaces régulières qui se touchent.*

Schuld daran sind die Grössen der Innenwinkel der Flächen. Beim gleichseitigen Dreieck beträgt die Grösse eines Innenwinkels an einer Ecke $\alpha(3) = 60^o$, beim Quadrat $\alpha(4) = 90^o$, beim regelmässigen Fünfeck $\alpha(5) = 108^o$, beim regelmässigen Sechseck $\alpha(6) = 120^o$ und beim regelmässigen Siebeneck gerundet $\alpha(7) = 128.5^o$. Sechs regelmässige Flächen können daher höchstens nur in der Ebene zusammenstossen: Sechs regelmässige Dreiecke. Für einen endlichen Körper im Raum sind es somit höchstens fünf.
• *La cause en est la grandeur des angles à l'intérieur de la surface. Quant au triangle équilatéral, la grandeur d'un angle à l'intérieur est $\alpha(3) = 60^o$, pour le carré elle est $\alpha(4) = 90^o$, pour le polygône régulier à cinq sommets elle est $\alpha(5) = 108^o$, pour six sommets elle est $\alpha(6) = 120^o$ et pour sept sommets elle est environ $\alpha(7) = 128.5^o$, arrondi. Six surfaces régulières ne peuvent donc se toucher que dans le plan: Ce sont six triangles réguliers. Pour un polyèdre fini dans l'espace le nombre correspondant est donc cinq.*

Stossen an einem Punkt n regelmässige Flächen mit dem Innenwinkel $\alpha(n)$ zusammen, so kann die Summe der Grössen der zusammenstossenden Winkel den vollen Winkel nicht übersteigen. Man hat daher im Raum die Bedingung $n \cdot \alpha(n) < 360^o$
• *Si à un certain point n surfaces régulières, avec la mesure de l'angle $\alpha(n)$, se touchent, la somme des mesures des l'angles ne peut pas surmonter l'angle plein. On a donc la condition $n \cdot \alpha(n) < 360^o$.*

Daher bleiben nur noch folgende fünf Möglichkeiten an einer Ecke eines regelmässigen Polyeders:
• *C'est pourquoi il reste encore les cinq possibilités suivantes à un sommet d'un polyèdre régulier:*

1	3 Dreieck	• *Triangles* $\rightsquigarrow$ $3\alpha(3) = 180^o < 360^o$
	4 Dreiecke	• *Triangles* $\rightsquigarrow$ $4\alpha(3) = 240^o < 360^o$
	5 Dreiecke	• *Triangles* $\rightsquigarrow$ $5\alpha(3) = 320^o < 360^o$

[11] Nach Platon, griech Philosoph • *D'après Platon, philosophe grec*

	(6 Dreiecke	• *Triangles* $\rightsquigarrow$ $6\alpha(3) = 360^o \not< 360^o$)
2	3 Quadrate	• *carrés* $\rightsquigarrow$ $3\alpha(4) = 270^o < 360^o$
	(4 Quadrate	• *carrés* $\rightsquigarrow$ $4\alpha(4) = 360^o \not< 360^o$)
3	3 Fünfecke	• *polygônes réguliers à 5 sommets* $\rightsquigarrow$ $3\alpha(5) = 324^o < 360^o$
	(4 Fünfecke	• *polygônes réguliers à 5 sommets* $\rightsquigarrow$ $4\alpha(5) = 432^o \not< 360^o$)
	(3 Secksecke	• *polygônes réguliers à 6 sommets* $\rightsquigarrow$ $3\alpha(6) = 360^o \not< 360^o$)

Somit gilt das Lemma: • *On peut donc tirer la conclusion:*

Lemma: • **Lemme:** Es gibt maximal 5 regelmässige Polyeder.
• *Il existe au maximum* 5 *polyèdres réguliers.*

Jetzt muss man noch zeigen, dass auch minimal 5 solche existieren, indem man ihre Konstruktion angibt. Für das Tetraeder, das Hexaeder und das Oktaeder gewinnt man problemlos die Einsicht der Existenz aus der Anschauung, was einem die Konstruktion möglich macht. Schwieriger ist es für die restlichen zwei Fälle. Hier hilft der Polyedersatz weiter. Z.B. bei 3 regelmässigen Fünfecken gilt: $k = 5 \cdot f \cdot \frac{1}{2}$ (Jede Fläche besitzt 5 Kanten und jede Kante wird bei zwei aneinanderstossenden Flächen gezählt, also doppelt.) Weiter sieht man auf analoge Weise: $e = 5 \cdot f \cdot \frac{1}{3}$.

$\Rightarrow\ 2 = e - k + f = 5 \cdot f \cdot \frac{1}{3} - 5 \cdot f \cdot \frac{1}{2} + f \ \Rightarrow\ 2 \cdot 6 = 10f - 15f + 6f \ \Rightarrow\ f = 12$
$\rightsquigarrow$ Dodekaeder ... Die weiteren Ausführungen seien dem Leser überlassen.

• *Il faut encore montrer que par contre il existe aussi au minimum* 5 *polyèdres réguliers, en indiquant la construction. Quant au tétraèdre, à l'hexaèdre et à l'octaèdre on voit sans problème la situation géométrique du corps, on peut donc les construire. Mais la construction est plus difficile dans les deux cas qui restent. Ici le théorème du polyèdre nous est utile. P.ex. pour* 3 *polygônes réguliers à* 5 *sommets il vaut:* $k = 5 \cdot f \cdot \frac{1}{2}$ *(Chaque surface possède* 5 *arêtes et on compte chaque arête pour deux surfaces qui s'y touchent. On les compte donc doublement.) En plus on voit de façon analogue:* $e = 5 \cdot f \cdot \frac{1}{3}$.

$\Rightarrow\ 2 = e - k + f = 5 \cdot f \cdot \frac{1}{3} - 5 \cdot f \cdot \frac{1}{2} + f \ \Rightarrow\ 2 \cdot 6 = 10f - 15f + 6f \ \Rightarrow\ f = 12$
$\rightsquigarrow$ *Dodécaèdre ... Pour le reste je laisse les détails au lecteur.*

Hinweis: • *Indication:*
Seitenflächen regelmässige n–Ecke • *Les surfaces sont des figures à* n *sommets réguliers* $\rightsquigarrow$

$$k = \frac{m \cdot e}{2} \quad \text{oder} \ \bullet \ \textit{ou} \quad e = \frac{2 \cdot k}{m}$$
$$e = \frac{n \cdot f}{m} \quad \text{oder} \ \bullet \ \textit{ou} \quad f = \frac{m \cdot e}{n}$$
$$k = \frac{n \cdot f}{2} \quad \text{oder} \ \bullet \ \textit{ou} \quad f = \frac{2 \cdot k}{n}$$
$$3 - k + f = 2 \ \Rightarrow\ 2 \cdot n \cdot (e - 2) = m \cdot e \cdot (n - 2), \ \ m = 3, 4, 5, \ \ n \geq 3$$

Satz: • **Théorème:** **Euklid** • **Euclide**

Es gibt exakt 5 regelmässige Körper (platonische Körper): Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder.
• *Il existe exactement* 5 *corps réguliers (corps platoniques): Tetraèdre, hexaèdre, octaèdre, dodécaèdre und icosaèdre.*

(Tetraeder $\rightsquigarrow$ 4 Flächen, Tetra $\rightsquigarrow$ 4, Hexa $\rightsquigarrow$ 6, Okto $\rightsquigarrow$ 8, Dodeka $\rightsquigarrow$ 12, Ikosa $\rightsquigarrow$ 20)
• *(Tétraèdre $\rightsquigarrow$ 4 surfaces, tetra $\rightsquigarrow$ 4, hexa $\rightsquigarrow$ 6, octo $\rightsquigarrow$ 8, dodeca $\rightsquigarrow$ 12, icosa $\rightsquigarrow$ 20)*

Eigenschaften: • **Qualités:**

Man stellt fest, dass immer zwei Polyeder dual sind. Dies in dem Sinne, dass der eine Körper in den andern einschreibbar ist, sodass Die Ecken des innern Körpers auf den Flächenmittelpunkten des äusseren Körpers liegen.
• *On constante que toujours deux polyèdres forment un ensemble dual. C'est dans le sens qu'un des corps peut être inscrit dans l'autre de façon que les sommets du corps intérieur touchent le centre des surfaces du corps extérieur.*

Über platonische Körper existiert eine ausgedehnte Literatur, auf die hier nicht eingegangen werden kann. Hier sollen die folgenden Ausführungen zur Bedeutung genügen:
• *Il existe une vaste littérature sur les corps platoniques, littérature que nous ne pouvons pas considérer ici. En ce qui concerne l'importance, les aspects suivants doivent suffir:*

Die Literatur lehrt, dass schon Pythagoras[12] einige dieser Körper gekannt haben muss. Platos Freund Theätet[13] lehrte darüber. Plato[14] hat das Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder und Ikosaeder in seinem Dialog <Timaios> den Elementen Feuer, Erde, Luft und Wasser zugeordnet. Das Dodekaeder jedoch der Himmelmaterie. (Später sprach man auch von 'quinta Essenzia — die Quintessenz'.) Weiter haben sich auch u.a. Leonardo da Vinci[15], Albrecht Dürrer[16], Johannes Kepler[17] und Leonard Euler[18] mit der Sache beschäftigt. Wegen ihrer idealen Gestalt haben platonischen Körper vor allem in den bildenden Künsten Spuren hinterlassen. Sie hatten ihre Wirkung dort , wo die Raumgestaltung, die Meditation, die Idee, die Theorie, die Schönheit im Zentrum steht, die staunen lässt, also im Reich der Gefühle. Abgesehen von der Kristallographie, der Chemie (Gitterstrukturen) sowie bei Verpackungsproblemen, haben sie in praktischer Naturwissenschaft und Technik bis heute keinen beherrschenden Einfluss gehabt — was nicht ausschliesst, dass das in Zukunft noch ändern kann.
• *On apprend de la littérature que déjà Pythagore[12] doit avoir connu quelques uns de ces corps. Theätet[13], ami de Platon, les enseignait. Platon[14] a postulé la correspondance entre tétraèdre, hexaèdre, octaèdre et ikosaèdre et les éléments feu, terre, air et eau dans son dialogue <Timaios>, le dodécaèdre par contre correspond à la matière céleste (resp. du ciel). (Plus tard on a aussi parlé de la <quinta essenzia — cinquième essence>.) En outre il y a les savants et artistes suivants qui ont étudié ces corps: Leonardo da Vinci[15] ('Léonard de Vinci'), Albrecht Dürrer[16], Johannes Kepler[17] et Leonard Euler[18]. A cause de la forme idéale les corps platoniques ont surtout laissé des traces ou influencé les Beaux Arts — là, où le but central est de former dans l'espace, est la méditation, l'idée, la théorie, la beauté qui nous émerveille, où l'on s'adresse au sentiment. A part la cristallographie, la chimie (les structures des grilles) et des problèmes d'emballage, ils n'ont pas eu de forte influence dans la science naturelle et dans la technique jusqu'à aujourd'hui — ce qui ne veut pas dire que cela ne puisse encore changer à l'avenir.*

[12] Pyhtagoras • *Pythagore* 580–500 v.Chr. • *av.J.Chr.*
[13] Theätet †369 v.Chr. • *av.J.Chr.*
[14] Plato 427–374 v.Chr. • *av.J.Chr.*
[15] Leonardo da Vinci 1452–1519
[16] Albrecht Dürrer 1471–1528
[17] Johannes Kepler 1571–1630
[18] Leonard Euler 1707–1783

Kapitel • Chapitre 12

Anhang 1: Ellipsen, Kegelschnitte — Annexe 1: Ellipses, sections coniques

Bemerkung: • **Remarque:**

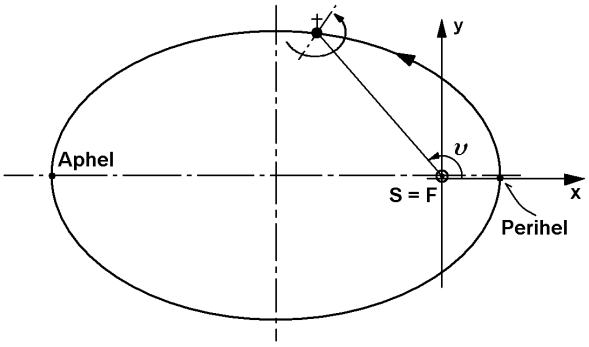
Dieser Teil ist dem Sonnenuhren-Skript des Autors entnommen, das bisher nur in deutscher Sprache erschienen ist.
• *Cette partie est prise du script concernant les cadrans solaires. Jusqu'à maintenant ce script n'a été publié qu'en allemand.*

12.1 Ellipsenbeziehungen und Flächensatz

12.1.1 Die Erde im Ekliptikalsystem

Die Erde bewegt sich bekanntlich nach dem **ersten keplerschen Gesetz** auf einer elliptischen Bahn um die Sonne, die in einem der Brennpunkte steht. Den Winkel von der Sonne aus gesehen zwischen der Perihel–Richtung und der Richtung zur Erde nennt man $\vartheta =$ **wahre Anomalie**. Dieser Winkel ist für Beobachtungen wichtig. Die folgende Skizze zeigt die Situation stark verzeichnet von einem Betrachter aus gesehen, der im Nordpol der Ekliptikebene steht.

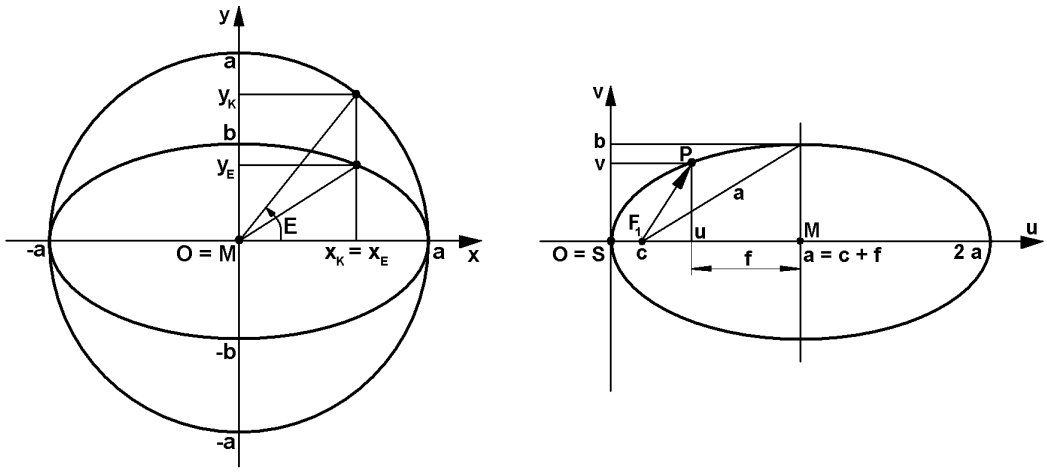
Abbildung 12.1: Die Erde um die Sonne vom Ekliptik–Nordpol aus gesehen



12.1.2 Beziehungen an der Ellipse

Im Folgenden stellen wir einige Tatsachen zusammen, die die Ellipse betreffen. Einige Beziehungen sind nicht trivial und können nicht in wenigen Zeilen hergeleitet werden. Obwohl heutzutage ausgedehnte Behandlungen der Kegelschnitte (Ellipse) in einem Ingenieurstudium nicht mehr grosse Priorität geniessen, gehört der Stoff zur analytischen Geometrie des klassischen Gymnasiums. Daher sei für weitere einschlägige Behandlungen auf die Schulbuchliteratur verwiesen.
Eine Tatsache ist schon Kindern bekannt, die noch keine Geometrie kennen: Eine Ellipse zeichnet man, indem man in ein Brett zwei Nägel einschlägt, daran dann eine Schnur befestigt, sie mit einem Bleistift spannt und damit dann auf der Unterlage die Kurve aufzeichnet, die die gespannte Schnur ermöglicht. Es ist bekanntlich eine Ellipse. Der Beweis, dass diese Kurve exakt eine Ellipse ist, ist allerdings nicht so tri-vial wie das Zeichnen.
Man kann also sagen: Die Menge der Punkte, deren Abstandsumme zu zwei festen Punkten (**Brennpunkte**) F_1 und F_2 konstant ist, bildet eine **Ellipse**: $|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = const. = 2\,a$. Wie kann man das einsehen?
Wir definieren die **Ellipse** als die Figur, die man durch Achsenstreckung aus dem zentrischen Kreis mit dem Radius a erhält.
Der Streckungsfaktor sei $\frac{b}{a}$. a ist die **grosse Halbachse** der Ellipse und b die **kleine Halbachse**. Als Koordinatensystem verwenden wir hier ein **Ellipsenmittelpunkt–zentriertes Ekliptikalsystem** (Zentrum im Ellipsenmittelpunkt, Koordinatenachsen auf den Halbachsen).

Abbildung 12.2: Ellipse, Mittelpunkts– und Scheitelpunktskoordinatensysteme



Wir lesen ab (vgl. Skizze 12.2):

$$x_K = x_E = a\,\cos(E),\;\; y_K = a\,\sin(E),\;\; y_E = \frac{b}{a}\cdot a\,\sin(E) = b\,\sin(E) = \frac{b}{a}\cdot y_K$$

Definition: • **Définition:** E heisst **exzentrische Anomalie**.

Im Kreis gilt: $x_K^2 + y_K^2 = a^2 \;\Rightarrow\; \frac{x_K^2}{a^2} + \frac{y_K^2}{a^2} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{x_E^2}{a^2} + \frac{y_E^2}{b^2} = 1$

Formel: • **Formule:** **Mittelpunktsgleichung:**

$$\frac{x_E^2}{a^2} + \frac{y_E^2}{b^2} = 1 \text{ oder } y_E^2 = b^2 - (\frac{b}{a})^2\,x_E^2$$

Im **Koordinatensystem des Scheitelpunktes** habe ein Ellipsenpunkt die Koordinaten u und v: $P = P(u, v)$. Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein: $f = \sqrt{a^2 - b^2}$. c sei vorerst beliebig. (Später

werden wir c gleich $a - f$ setzen, vorläufig aber noch nicht.) F sei der Punkt der x resp. jetzt der u–Achse mit der Koordinate c. Dann gilt: $|\overrightarrow{FP}|^2 = r^2 = (u-c)^2 + v^2$.

Weiter verwenden wir die Symbole: $p := \dfrac{b^2}{a}$ und $\varepsilon := \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}}$, $a\,\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2} = f \;\Rightarrow\; \varepsilon = \dfrac{f}{a}$.
Weiter gilt: $\varepsilon^2 = 1 - \dfrac{b^2}{a^2} \;\Rightarrow\; \dfrac{b^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2$

Definition: • **Définition:** ε heisst **numerische Exzentrizität**.

Es gilt: $\varepsilon \in [0, 1]$.

Für das Folgende ist es notwendig, die Mittelpunktsgleichung für das Scheitelpunktskoordinatensystem umzurechnen und neu zu interpretieren. Zwischen den beiden Koordinatensystemen bestehen die Beziehungen $a + x_E = u$ und $y_E = v$

$$\frac{x_E^2}{a^2} + \frac{y_E^2}{b^2} = 1 \;\Rightarrow\; a^2\,y_E^2 + b^2\,x_E^2 = a^2\,b^2 \;\Rightarrow\; a^2\,v^2 + b^2\,(u-a)^2 = a^2\,b^2$$
$$\Rightarrow\; a^2\,v^2 + b^2\,u^2 - 2\,b^2\,u\,a + b^2\,a^2 = a^2\,b^2 \;\Rightarrow\; a^2\,v^2 + b^2\,u^2 = 2\,b^2\,u\,a \;\Rightarrow\; v^2 = -\frac{b^2}{a^2}\,u^2 + 2\,\frac{b^2}{a}\,u$$
$\Rightarrow\; v^2 = 2\,p\,u - (1-\varepsilon^2)\,u^2$. Diese Gleichung nennen wir Scheitelpunktsgleichung.

Formel: • **Formule:** **Scheitelpunktsgleichung:**

$$v^2 = 2\,p\,u - (1-\varepsilon^2)\,u^2$$

Mit dieser Gleichung erhalten wir jetzt für ein beliebiges c mit dem Koordinatenpunkt F (vgl. oben):
$|\overrightarrow{FP}|^2 = r^2 = (u-c)^2 + v^2 = (u-c)^2 + 2\,p\,u - (1-\varepsilon^2)\,u^2 = u^2 - 2\,u\,c + c^2 + 2\,p\,u - (1-\varepsilon^2)\,u^2 =$
$c^2 + 2\,u\,p - 2\,u\,c + u^2 - u^2 + \varepsilon^2\,u^2 = c^2 + 2\,u\,(p-c) + \varepsilon^2\,u^2 \overset{*}{=} (c \pm \varepsilon\,u)^2 + 2\,u\,(p - c - (\pm\varepsilon\,c)) \qquad (*)$

Jetzt *wählen* wir c *speziell* so, dass gilt: $p - c - (\pm\varepsilon\,c) = p - c\,(1 \pm \varepsilon) = 0$.
Diese Gleichung hat wegen '$\pm$' zwei Lösungen: $c_1 = \dfrac{p}{1+\varepsilon}$ und $c_2 = \dfrac{p}{1-\varepsilon}$

Definition: • **Définition:** Die Punkte $F_1 = F_1(c_1, 0)$ und $F_2 = F_2(c_2, 0)$, die diesen beiden . Lösungen entsprechen, nennen wir **Brennpunkte**

Wegen der Lage der Ellipse ist $b \le a \;\Rightarrow\; 0 \le \dfrac{b^2}{a^2} \le 1 \;\Rightarrow\; 0 \le 1 - \dfrac{b^2}{a^2} \le 1 \;\Rightarrow\; 0 \le \varepsilon = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}} \le 1$.
Wegen $p = \dfrac{b^2}{a} > 0$ ist daher $c_1 > 0$ und $c_2 > 0$. Da a als Streckenlänge sowieso positiv ist, gilt nun:
$$c_1 + c_2 = \frac{p}{1+\varepsilon} + \frac{p}{1-\varepsilon} = p \cdot \frac{1-\varepsilon+1+\varepsilon}{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)} = p \cdot \frac{2}{1-\varepsilon^2} = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{2}{1-(1-\frac{b^2}{a^2})} = \frac{2\,b^2}{a \cdot \frac{b^2}{a^2}} = 2\,a$$
$$\Rightarrow\; c_1 + c_2 = 2\,a,\;\; c_1 - a = a - c_2,\;\; |a - c_1| = |a - c_2|$$

Daraus folgt, dass F_1 und F_2 symmetrisch zum Ellipsenmittelpunkt M liegen, denn $c_{1,2}$ wird vom Scheitelpunkt S aus gemessen und a ist die grosse Halbachse, liefert also die erste Koordinate von M.

Es gilt weiter: $e := \frac{1}{2}\,|c_1 - c_2| = \frac{1}{2}\,|\frac{p}{1+\varepsilon} - \frac{p}{1-\varepsilon}| = \frac{1}{2}\,|\frac{p - p\,\varepsilon - p - p\,\varepsilon}{1-\varepsilon^2}| = |\frac{p\,\varepsilon}{1-\varepsilon^2}| = p \cdot \frac{1}{1-\varepsilon^2} =$

$$= \varepsilon\,\frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{1-(1-\frac{b^2}{a^2})} = \varepsilon\,\frac{b^2}{a} \cdot \frac{a^2}{b^2} = \varepsilon\,a$$

Definition: • **Définition:** $e = \varepsilon\,a$ heisst **lineare Exzentrizität**.

Es gilt: $e^2 = \varepsilon^2\,a^2 = (1 - \frac{b^2}{a^2}) \cdot a^2 = a^2 - b^2$

Formel: • **Formule:** $\varepsilon^2\,a^2 = e^2 = a^2 - b^2$

Nun setzen wir $c_{1,2} = \frac{p}{1 \pm \varepsilon}$ in $(*)$: $r^2 = c^2 + 2\,u\,(p - c) + \varepsilon^2\,u^2$ ein:

$$\Rightarrow\ r^2 = (\frac{p}{1\pm\varepsilon})^2 + 2\,u\,(p - \frac{p}{1\pm\varepsilon}) + \varepsilon^2\,u^2 = (\frac{p}{1\pm\varepsilon})^2 + 2\,u\,p\,(1 - \frac{1}{1\pm\varepsilon}) + \varepsilon^2\,u^2 =$$

$$= \frac{p^2}{(1\pm\varepsilon)^2} + 2\,u\,p\,\frac{\pm\varepsilon}{1\pm\varepsilon} + \varepsilon^2\,u^2 = (\frac{p}{1\pm\varepsilon} \pm \varepsilon\,u)^2.$$

Diese Gleichung hat zwei Lösungen: $r_1 = \frac{p}{1+\varepsilon} + \varepsilon\,u$ und $r_2 = \frac{p}{1-\varepsilon} - \varepsilon\,u$

$\Rightarrow\ r_1 + r_2 = \frac{p}{1+\varepsilon} + \varepsilon\,u + \frac{p}{1-\varepsilon} - \varepsilon\,u = \frac{p}{1+\varepsilon} + \frac{p}{1-\varepsilon} = const.$ (Unabhängig von u!)

$$\Rightarrow\ r_1 + r_2 = p \cdot (\frac{1}{1+\varepsilon} + \frac{1}{1-\varepsilon}) = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1+\varepsilon+1-\varepsilon}{1-\varepsilon^2} = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{2}{1-(1-\frac{b^2}{a^2})} = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{2\,a^2}{b^2} = 2\ a$$

Formel: • **Formule:** $r_1 + r_2 = 2\,a = const.$

Das Kind, das wie oben beschrieben mit zwei Nägeln und einer Schnur eine Kurve zeichnet, bekommt also tatsächlich eine Ellipse.

Für die spezielle Wahl $P = H$ $(r_1 = r_2)$ finden wir daher wegen $|a - c_1| = |a - c_2|$:

$r_1 + r_2 = \sqrt{(a-c_1)^2 + b^2} + \sqrt{(c_2 - a)^2 + b^2} = 2\,\sqrt{(a-c_1)^2 + b^2} = 2\,a$
$\Rightarrow\ (a - c_1)^2 + b^2 = a^2\ \Rightarrow\ f^2 = a^2 - b^2 = (a - c_1)^2\ \Rightarrow\ |a - c_2| = a - c_1 = f,\ \ (a > c_1.)$

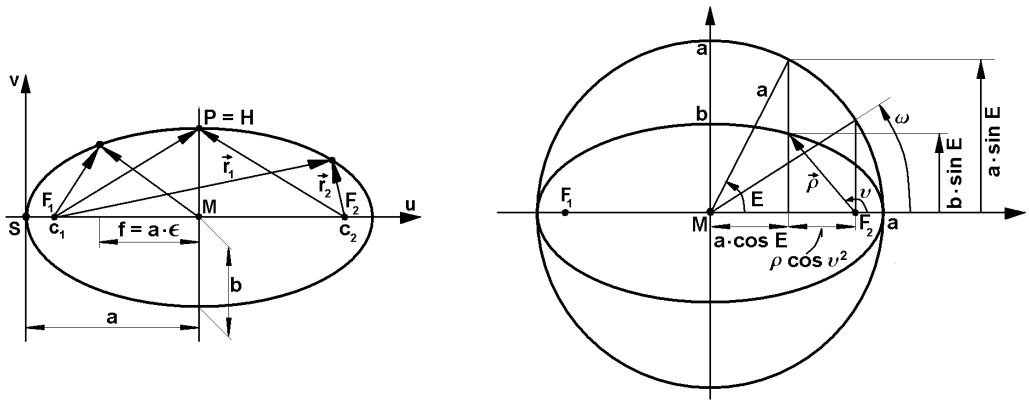
Formel: • **Formule:** Für den Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkt gilt:

$$|a - c_2| = a - c_1 = \sqrt{a^2 - b^2} = f = e = \varepsilon\,a$$

Konsequenz: • **Conséquence:** Lineare Exzentrizität und Brennpunktsabstand sind bei der Ellipse identisch.
Es gilt weiter: $b = \sqrt{a^2 - f^2} = \sqrt{a^2 - a^2\,\varepsilon^2} = a\,\sqrt{1-\varepsilon^2}$
$\Rightarrow\ \varrho^2 = (f - a\,\cos(E))^2 + (b\,\sin(E))^2 = (a\,\varepsilon - a\,\cos(E))^2 + (a\,\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\sin(E))^2 =$
$= a^2\,(\varepsilon - \cos(E))^2 + (\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\sin(E))^2 = a^2\,(\varepsilon^2 - 2\,\varepsilon\,\cos(E) + \cos^2(E) + \sin^2(E) - \varepsilon^2\,\sin^2(E)) =$
$= a^2\,(\varepsilon^2 - 2\,\varepsilon\,\cos(E) + 1 - \varepsilon^2\,(1 - \cos^2(E))) = a^2\,(1 - 2\,\varepsilon\,\cos(E) + \varepsilon^2\,\cos^2(E)) = a^2\,(1 - \varepsilon\,\cos(E))^2$

Formel: • **Formule:** $\varrho = a\,(1 - \varepsilon\,\cos(E))$

Abbildung 12.3: Beziehungen an der Ellipse



In der letzten Skizze lesen wir ab:

$f = a \cdot \varepsilon = a\ \cos(E) - (+\varrho\ \cos(\vartheta)) \ \Rightarrow\ \varrho\ \cos(\vartheta) = a\ \cos(E) - a\,\varepsilon = a\,(\cos(E) - \varepsilon)$ ($\rightsquigarrow$ negativ für $\vartheta > 90^o$!)

Formel: • **Formule:** $\varrho\ \cos(\vartheta) = a\,(\varepsilon - \cos(E))$

Definition: • **Définition:** ϑ heisst **wahre Anomalie**.

Die wahre Anomalie ist bekanntlich für die Beobachtung wichtig.

Wenn wir jetzt die letzten beiden Formeln einerseits addieren und andererseits subtrahieren, bekommen wir zwei Ausdrücken, in deren Quotient sich das ϱ herauskürzt:

$$\varrho\,(1 - \cos(\vartheta)) = a\,(1 - \varepsilon\ \cos(E)) - a\,(\cos(E) - \varepsilon) = a\,(1 + \varepsilon - \cos(E) - \varepsilon\ \cos(E)) = a\,(1 + \varepsilon)\,(1 - \cos(E))$$

$$\varrho\,(1 + \cos(\vartheta)) = a\,(1 - \varepsilon\ \cos(E)) + a\,(\cos(E) - \varepsilon) = a\,(1 - \varepsilon + \cos(E) - \varepsilon\ \cos(E)) = a\,(1 - \varepsilon)\,(1 + \cos(E))$$

$$\rightsquigarrow\ \frac{\varrho\,(1 - \cos(\vartheta))}{\varrho\,(1 + \cos(\vartheta))} = \frac{a\,(1 + \varepsilon)\,(1 - \cos(E))}{a\,(1 - \varepsilon)\,(1 + \cos(E))}\ \Rightarrow\ \sqrt{\frac{1 - \cos(\vartheta)}{1 + \cos(\vartheta)}} = \sqrt{\frac{(1 + \varepsilon)\,(1 - \cos(E))}{(1 - \varepsilon)\,(1 + \cos(E))}}$$

Aus der Trigonometrie kennen wir die Formel: $\tan(\frac{\alpha}{2}) = \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}}$

$$\rightsquigarrow\ \tan(\frac{\vartheta}{2}) = \sqrt{\frac{1 - \cos(\vartheta)}{1 + \cos(\vartheta)}} = \sqrt{\frac{(1 + \varepsilon)\,(1 - \cos(E))}{(1 - \varepsilon)\,(1 + \cos(E))}} = \sqrt{\frac{(1 + \varepsilon)}{(1 - \varepsilon)}} \cdot \sqrt{\frac{(1 - \cos(E))}{(1 + \cos(E))}} = \sqrt{\frac{(1 + \varepsilon)}{(1 - \varepsilon)}} \cdot \tan(\frac{E}{2})$$

Aus der letzten Skizze ersehen wir: $f = a \cdot \varepsilon = a\ \cos\omega\ \Rightarrow\ \varepsilon = \cos\omega$

Formel: • **Formule:** $\varepsilon = \cos\omega$

$$\rightsquigarrow \ \tan(\frac{\vartheta}{2}) = \sqrt{\frac{(1+\varepsilon)}{(1-\varepsilon)}} \cdot \tan(\frac{E}{2}) = \sqrt{\frac{(1+\cos(\omega))}{(1-\cos(\omega))}} \cdot \tan(\frac{E}{2}) = \frac{1}{\sqrt{\frac{(1-\cos(\omega))}{(1+\cos(\omega))}}} \cdot \tan(\frac{E}{2}) = \frac{1}{\tan(\frac{\omega}{2})} \cdot \tan(\frac{E}{2})$$

$$\rightsquigarrow \ \tan(\frac{\vartheta}{2}) = \cot(\frac{\omega}{2}) \cdot \tan(\frac{E}{2}) \ \Rightarrow \ \tan(\frac{E}{2}) = \tan(\frac{\vartheta}{2}) \cdot \tan(\frac{\omega}{2})$$

Formel: • **Formule:** $\tan(\frac{E}{2}) = \tan(\frac{\vartheta}{2}) \cdot \tan(\frac{\omega}{2})$

Dies ist eine wichtige Formel, die in der Praxis der Sonnenuhrberechnung eine Rolle spielen wird. Da im System Sonne–Erde die Ellipsenform weitgehend konstant ist, ω also nicht stark ändert, haben wir hier einen direkten Zusammenhang zwischen der wahren Anomalie ϑ, die für die wahre Erdposition massgebend ist, und der exzentrischen Anomalie E, die für die **mittlere Zeit** massgebend ist.

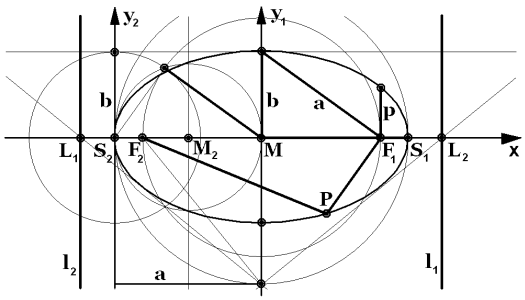
12.2 Zusammenfassung: Eigenschaften von Kegelschnitten

12.2.1 Allgemeine Bemerkung

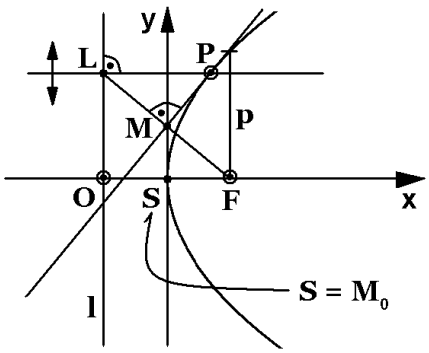
Die Kegelschnitte nicht degenerierter Art sind bekanntlich die Ellipse, die Parabel und die Hyperbel. In der Ebene werden solche Kurven durch quadratische Gleichungen beschrieben. Weiter gibt es die degenerie-rten Schnittgebilde Gerade und Punkt (Schnitte durch die Kegelspitze G). Andererseits beschreiben quadratische Gleichungen mit zwei Variablen immer Kegelschnitte, falls damit überhaupt Kurven in der reellen Ebene beschrieben werden. Dass das nicht immer so sein muss, zeigt die Gleichung $x^2 + y^2 = -1$, die keine reelle Lösung hat.
Für die Ellipse haben wir eine Serie von Gleichungen und Eigenschaften hergeleitet. Für die Parabel und die Hyperbel kann man das in analoger Weise tun. Aus Gründen des Umfangs wollen wir hier die Herleitungen in die Übungen eingliedern und dem Leser selbst überlassen. Nachfolgend begnügen wir uns daher mit einer Übersicht.

12.2.2 Übersicht

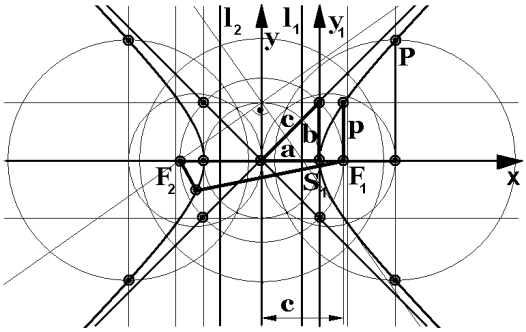
Diagramme



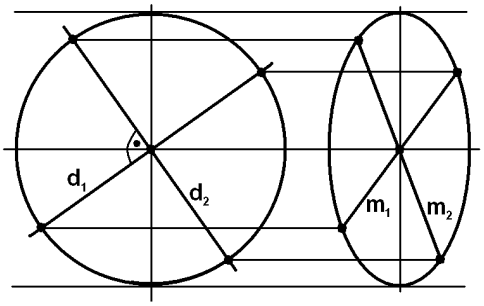
Ellipse



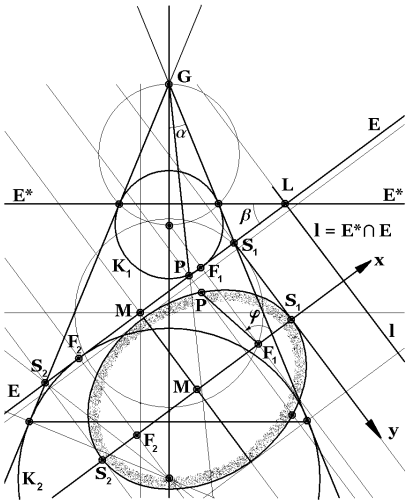
Parabel



Hyperbel



Konjugierte Durchmesser



Kegel, Schnitt, Dandelinkugel

E	$\rightsquigarrow$	Schnittebene
E^*	$\rightsquigarrow$	Berührungskreis einer Dandelinkugel
K	$\rightsquigarrow$	Dandelinkugel
l	$\rightsquigarrow$	Leitlinie, $l = E \cap E^*$
F	$\rightsquigarrow$	Brennpunkt
S	$\rightsquigarrow$	Scheitelpunkt
p	$\rightsquigarrow$	Quermass
m_j	$\rightsquigarrow$	Konjugierte Durchmesser
ε	$\rightsquigarrow$	Numerische Exzentrizität
c	$\rightsquigarrow$	Lineare Exzentrizität
$a,\ b$	$\rightsquigarrow$	Halbachsen
A	$\rightsquigarrow$	Inhalt

Numerische Exzentrizität

$$\varepsilon := \frac{|\overline{PF}|}{|\overline{PL}|} = \frac{\sin(\beta)}{\cos(\alpha)}$$

Kreis	$\beta = 0$	$\varepsilon = 0$
Ellipse	$\alpha < \frac{\pi}{2} - \beta$	$\varepsilon < 1$
Parabel	$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$	$\varepsilon = 1$
Hyperbel	$\alpha > \frac{\pi}{2} - \beta$	$\varepsilon > 1$

Koordinatensystemunabhängige Situation

	Ellipse	Parabel	Hyperbel
Abstandsbeziehung	$\lvert\overline{PF_1}\rvert + \lvert\overline{PF_2}\rvert = 2\,a$	$\lvert\overline{PF}\rvert = \lvert\overline{PL}\rvert$	$\lvert\lvert\overline{PF_1}\rvert - \lvert\overline{PF_2}\rvert\rvert = 2\,a$
Lineare Exzentrizität	$c^2 = a^2 - b^2$	—	$c^2 = a^2 + b^2$
Numerische Exzentrizität	$\varepsilon = \frac{a}{c} < 1$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = \frac{a}{c} > 1$
Quermass	$p = \frac{b^2}{a}$	p	$p = \frac{b^2}{a}$
Flächeninhalt	$A = a\,b\,\pi$	—	—

Koordinatensystem im Mittelpunkt

	Ellipse	Parabel	Hyperbel
Mittelpunktsgleichung	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$y^2=2\,p\,x$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
Parametergleichung	$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\,\cos(t)\\b\,\sin(t)\end{pmatrix}$	—	$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pm a\,\cosh(t)\\b\,\sinh(t)\end{pmatrix}$
Brennpunkte	$F_1=(c,0),\ \ F_2=(-c,0)$	$F=(\frac{p}{2},0)$	$F_1=(c,0),\ \ F_2=(-c,0)$
Leitlinien	$x=\pm\frac{a^2}{c}$	$x=-\frac{p}{2}$	$x=\pm\frac{a^2}{c}$
Tangente/ Polare in P	$\frac{x_P\cdot x}{a^2}+\frac{y_P\cdot y}{b^2}=1$	$y_P\cdot y=p\,(x+x_P)$	$\frac{x_P\cdot x}{a^2}-\frac{y_P\cdot y}{b^2}=1$
Axymptoten	—	—	$y=\pm\frac{b}{a}\,x$
Steig. konj. Durchm.	$\tan(\gamma_{m_1})\cdot\tan(\gamma_{m_2})=-\frac{b^2}{a^2}$	—	$\tan(\gamma_{m_1})\cdot\tan(\gamma_{m_2})=\frac{b^2}{a^2}$

Koordinatensystem im Scheitelpunkt

	Ellipse	Parabel	Hyperbel
Scheitelpunktsgleichung	$y^2=2\,p\,x-\frac{p}{a}\,x^2$	$y^2=2\,p\,x$	$y^2=2\,p\,x+\frac{p}{a}\,x^2$
Mit numerischer Exzentrizität	$y^2=2\,p\,x-(1-\varepsilon^2)\,x^2$	$y^2=2\,p\,x-(1-\varepsilon^2)\,x^2$	$y^2=2\,p\,x-(1-\varepsilon^2)\,x^2$

Koordinatensystem im Brennpunkt

Gleichung in Polarkoordinaten, Pol in einem Brennpunkt, Achse durch Scheitel:

	Ellipse	Parabel	Hyperbel
Polarkoordinatengleichung	$r(\varphi)=\frac{p}{1+\varepsilon\cdot\cos(\varphi)}$	$r(\varphi)=\frac{p}{1+\varepsilon\cdot\cos(\varphi)}$	$r(\varphi)=\frac{p}{1+\varepsilon\cdot\cos(\varphi)}$

Parallelfläche

Die Schnittkurve des Kegelmantels mit einer Ebene E ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, wenn es eine Parallelebene E' zu E durch die Kegelspitze G gibt, die mit dem Kegelmantel folgende Schnittmenge gemeinsam hat:

	Ellipse	Parabel	Hyperbel
Schnittmenge	1 Punkt (G)	1 Gerade (durch G)	2 Geraden (durch G)

Kapitel • Chapitre 13

Anhang 2: Gleichungstypen – Annexe 2: Types d'équations

13.1 Typen von Gleichheitszeichen und Gleichungen

Gleichheitszeichen finden wir in folgenden Bedeutungstypen:

1 Bijektion, z.B. $360^o \hat{=} 2\,\pi$

2 Aussagen, z.B. $x = x$, $5 = 4$ oder $5 = 6$

3 Funktionsgleichung, z.B. $f(x) = \sin(x)$

4 Wertzuweisung in einem Computerprogramm, z.B. $\ldots; c = 3; \ldots$

5 Bestimmungsgleichungen, z.B. $5\,x + 4 = 7 \rightsquigarrow \; x = ?$

6 ...

13.2 Arten von Bestimmungsgleichungen

Bei Bestimmungsgleichungen geht es darum, den Wert einer Unbekannten in der Gleichung zu berechnen oder zu bestimmen.

13.2.1 Gleichungen mit einer oder mehreren Unbekannten

Bei Gleichungen mit einer Unbekannten z.B. in $\mathbb{R}$ suchen wir oft eine Lösungsmenge, die wir als Teilmenge von $\mathbb{R}$ beschreiben wollen, geometrisch also als Teilmenge der Punkte einer Geraden (Zahlengeraden). Bei zwei Unbekannten stossen wir analog auf eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, die sich geometrisch als Teilmenge der Punktmenge einer Ebene befreifen lässt. Entsprechend führen Gleichungen mit 3 Unbekannten geometrisch auf räumliche Gebilde u.s.w..

13.2.2 Gleichungen und Systeme von Gleichungen

Nach der Anzahl Gleichungen unterscheiden wir zwischen Einzelgleichungen und Systemen von mehreren Gleichungen. Bei Systemen mit mehreren Gleichungen sind die gemenisamen Lösungen gesucht. Das bedeutet, dass man die Schnittmenge der Lösungsmengen der einzelnen Teilgleichugnen sucht.

13.2.3 Gleichungen mit Standardfunktionen von einer Unbekannten

Um zu einer Übersicht zu gelangen, unterscheiden wir je nach Form der in der Gleichung vorkommende Funktionen:

1 Lineare Gleichung. Lösungsstrategie: Arithmetische Umformungen, bis die Unbekannte isoliert ist.

2 Quadratische Gleichung. Lösungsstrategie: Lösungsformeln (quadratische Ergänzung, Vieta).

3 Polynome vom Grad 3 oder 4. Lösungsstrategie: Formeln von Cardano oder Approximation.

4 Polynome vom Grad grösser 4. Keine allgemeine exakte Lösungsmethode. Ausweg: Numerisch, graphisch...

5 Wurzelgleichungen. Lösungsstrategie: Wurzeln durch potenzieren eliminieren.

6 Betragsgleichungen. Lösungsstrategien:

(a) Betrag durch potenzieren eliminieren.
(b) Fallunterscheidungen.
(c) Graphische Lösung.

7 Exponentialgleichungen. Lösungsstrategie: Basen gleich machen, wegen der Monotonie einer Exponentialfunktion sind dann auch die Exponenten gleich.

8 Logarithmengleichungen. Lösungsstrategie: Basen gleich machen, jeweils alles unter den Logarithmus bringen $\rightsquigarrow$ Numeri vergleichen.

9 Trigonometrische Gleichungen. Lösungsstrategien: Diverse Methoden. Goniometrische Formeln verwenden. Z.B. Pythagoras für Sinus und Cosinus...

Generell kann man sich bei einer Unbekannten immer auch eine graphische Lösung überlegen. Dabei fasst man die linke Seite sowie die rechte Seite je als eine Funktion der Unbekannten auf und sucht die Stellen, wo sich die beiden Funktionskurven schneiden.

13.2.4 Lineare Gleichungssysteme

1 Wir unterscheiden homogene und inhomogene Systeme.

2 Homogenes System: Hat immer mindestens die Nulllösung.

3 Die Lösungsmenge ist geometrisch interpretierbar. Gemeinsame Lösungen von Gleichungen $\rightsquigarrow$ Schnittmenge.

4 Anzahl Lösungen, Möglichkeiten:

(a) Widerspruch (keine Lösung)
(b) Exakt eine Lösung
(c) Unendlich viele Lösungen (geometrisches Gebilde, lineare Mannigfaltigkeiten).

5 Lösungsmethoden:

(a) Matrixmethode
(b) Additionsmethode (Elementarsubstitututionen, systematisch: Gauss-Jordan-Verfahren, Dreiecksform, Diagonalform)
(c) Gleichsetzungsmethode
(d) Einsetzungsmethode (Austauschverfahren)

Kapitel • Chapitre 14

Anhang 3: Kryptologie – Annexe 3: Cryptologie

• *Ici, il y a pour le moment seulement le texte allemand à disposition. La traduction française manque.*

14.1 Public key, RSA-Verfahren

Das hier besprochene **RSA-Verfahren** ist ein „public key –Chiffrierverfahren“, das durch seine relative Einfachheit besticht. Man benennt es nach den Erfindern Ronald L. **R**ivest, Adi **S**hamir und Leonard **A**dleman.

Zuerst wollen wir den Begriff **„public key –Chiffrierverfahren“** verstehen lernen. Generell hat man beim Chiffrieren die Absicht, eine unterwegs geheim zu haltende Nachricht von einer Stelle oder Person A an eine Stelle oder zu einer Person B zu übermitteln, ohne dass die Nachricht unterwegs von einer dritten Stelle oder Person verstanden werden kann. Ein ursprünglicher Klartext wird dazu chiffriert oder verschlüsselt, dann übermittelt, dann wieder dechiffriert oder entschlüsselt. Danach muss der ursprüngliche Klartext wieder in seiner alten Form vorhanden sein.

Im hier besprochenen Falle dient zur Verschlüsselung und Entschlüsselung ein **kryptologischer Algorithmus**, welcher durch eine offen bekannte mathematische Funktion gegeben ist. Um die Geheimhaltung des chiffrierten Textes „einigermassen sicher“ zu machen, benützt man **Schlüssel**, hier in Form von Zahlenwerten, welche beim Chiffrieren und Dechiffrieren entscheident sind. Alleine den Sendern und Empfängern muss der Schlüssel bekannt sein. Man kann es auch so einrichten, dass es einen **Chiffrierschlüssel** gibt und einen andern, aus dem Chiffrierschlüssel berechenbaren **Dechiffrierschlüssel**. In dieser Situation ist es sogar möglich, den Chiffrierschlüssel **öffentlich** zu machen, wenn die Zeit zur Berechnung des Dechiffrierschlüssels aus dem Chiffrierschlüssel auch mit dem schnellsten Computer alle realen Möglichkeiten übersteigt. Die Idee dazu stammt aus den Jahrn um 1970 (Ellis, Cocks und Williamson) und später 1977 (Diffie-Hellman). Beim RSA–Verfahren benützt man an dieser Stelle die Tatsache, dass allgemein der Rechenaufwand zur exakten Faktorisierung sehr grosser Zahlen extrem gross ist.

14.2 Durchführung des RSA–Verfahrens — Exécution de la méthode RSA

`(Vgl. auch: http://de.wikipedia.org/wiki/RSA-Kryptosystem )`

14.2.1 Wahl der Primzahlen — Choisir les nombres premiers

Das RSA–Verfahren basiert auf zwei vorerst gewählten grossen Primzahlen p und q, $p \neq q$ mit einer sehr grossen Anzahl von Dezimalziffern. p und q sollten stochastisch unabhängig sein. (Momentan wird je eine Anzahl von über 150 Ziffern empfohlen.) Diese beiden Primzahlen müssen strikte geheim gehalten werden. Mühelos können wir mit Hilfe eines Computers (z.B. mit *Mathematica*) das Produkt $N = p \cdot q$ berechnen. Die Faktorisierung dieses Produktes mit über 300 Ziffern ist ohne Vorwissen mit unrealistisch grossem Aufwand verbunden.

Bsp.: • **Exemple:** $1111\ldots111 * 222222\ldots222$ (je 160 Ziffern) ergibt die Ziffern:
2469135802469135802469135802469135802469135802469135802469135802469135802469135802469135802469135802469135802469135802469135802469135802469135802469135802469135308641975308641975308641975308641975308641975308641975308641975308641975308641975308641975308641975308641975308641975308641975308641975308641975308641975308641975308641975308642 mit einer Rechenzeit $t < 0.000001$ Sekunden.

Praktisch kann man diese Primzahlen p und q durch Raten einer Zahl und danach Anwenden eines Primzahltests bestimmen.

14.2.2 Bestimmung der beiden Schlüssel — Callculer des deux clefs

1 Wir berechnen jetzt $\varphi(N) = \varphi(p \cdot q) = (p-1)(q-1)$, wobei φ die Eulersche φ–Funktion bedeutet.

2 Wir wählen dann eine Zahl e (e gross) mit $1 < e < \varphi(N)$, $e \not| \varphi(N)$.

3 Dann berechnen wir mit Hilfe des euklidschen Algorithmus (ev. erweiterteter Algorithmus) eine Zahl d so, dass das Produkt $d \cdot e$ kongruent 1 modulo $\varphi(N)$ ist: $d \cdot e \equiv 1\ (\varphi(N))$. ($d$ ist damit ein „Inverses“ zu e.)
Vgl. dazu auch: *http://de.wikipedia.org/wiki/Erweiterter_euklidischer_Algorithmus* .
Natürlich kann man auch d wählen und damit e wie oben berechnen.

4 Der **öffentliche Schlüssel** *(public key)* besteht jetzt aus dem Primzahlprodukt N sowie dem **öffentlichen Exponenten** e.

5 Der **private Schlüssel** *(private key)* besteht aus dem **privaten Exponenten** d. Dieser darf nur dem Anwender bekannt sein.

6 Eine Firma kann nun so für einen gegebenen Kunden zu einem gewählten Paar p und q schliesslich N sowie d und e bestimmen. N und e können ungesichert aufbewahrt werden. e hingegen muss dem Kunden überlassen werden.

Ein oft gezeigtes Beispiel:

Seien $p = 11$ und $q = 13$ die beiden Primzahlen. (Diese sind aus Gründen der praktischen Nachvollziehbarkeit hier klein statt gross gewählt.) Das Produkt wird damit $N = pq = 143$. Damit wird $\varphi(N) = (p-1)(q-1) = 10 \cdot 12 = 120$. Nun muss gelten: $ggT'pgdc(e, 120) = 1$. Sei nun z.B. $e = 23$ gewählt. $\rightsquigarrow$ Öffentlicher Schlüssel $(N, e) = (120, 23)$. Nun müssen wir d berechnen: $d \cdot e \equiv 1\ (\varphi(N)) \Rightarrow \exists_k\ d \cdot e + k \cdot \varphi(N) = 1$, $d = \dfrac{1 - k \cdot \varphi(N)}{e} = \dfrac{1 - k \cdot 120}{23}$. Mit $k = -9$ finden wir $d = 47 \in \mathbb{N}$. Bei grossen Zahlen N und e bringt die Ratemethode hier nicht unbedingt Erfolg. Der erweiterte euklidsche Algorithmus führt dann weiter.

Bemerkenswert ist, dass für das weitere Prozedere die beiden Primzahlen p und q nicht mehr gebraucht werden, also vergessen werden können. Sie müssen jedoch auch weiterhin geheim bleiben.

14.2.3 Verschlüsselung (Codierung) — Chiffrement (codage)

Wir gehen hier als Beispiel davon aus, dass es sich bei einer angenommenen geheim zu übermittelnden Nachrichtum um einen Text mit Buchstagen und Zahlen handelt und dass wir jedes verwendete Zeichen im ASCII-Code darstellen können. In diesem Code sind 33 nicht–druckbare sowie die 95 druckbaren Zeichen definiert, beginnend mit dem Leerzeichen, total also 128 Zeichen. Damit genügt für jedes Zeichen eine natürliche Dezimalzahl mit maximal drei Stellen. Sei K ein solches Zeichen einer Nachricht und C seine Verschlüsselung. Um ein Zeichen K zu verschlüsseln, ist jetzt hier die Bedingung $K < 143$ erfüllt.
Die Zahl $K = 7$ verschlüsseln wir daher wie folgt:
$N = 143,\ \ e = 23,\ \ C = K^e\ (mod\ N) = 7^{23}\ (mod\ 143) \equiv (((7^2)^2)^2)^2 * (7^2)^2 * 7^2 * 7\ (mod\ 143) \equiv 2\ (mod\ 143)$
(Sukzessive Berechnung der Restklassen). Schneller ist man mit dem *Mathematica*–Befehl $Mod[7^{23}, 143]$.
Somit ist $C = 2$ zu übermittlen.
Will man hier eine Nachricht in Form einer ASCII–Sequenz übermitteln, die durch eine natüliche Zahl ≥ 143 darstellt werden kann, so kann man die Sequenz in gleichlange Blöcke aufteilen, welche jeder für sich eine Zahl < 143 darstellt. Dann wird eben eine Folge von Teilnachrichten K_i (Teilklartexten) verschlüsselt. Damit erhält man dann eine Folge von chiffrierten Blöcken C_i, welche zu übermitteln sind.

14.2.4 Entschlüsselung (Decodierung) — Décodage (déchiffrement)

Die Decodierung auf der andern Seite funktioniert nach der Formel $K \equiv C^d\ (mod\ N)$. Das ist hier der zentrale theoretische Punkt und daher überprüfungsbedürfdig.

<u>Beweis: • Preuve:</u>

Statt $u \equiv v\ mod\ N$ schreiben wir einfacher und kürzer mit Hilfe der Restklassenschreibweise

$$[u]_N = [v]_N,\ \text{kurz}\ [u] = [v].$$

Sei vorerst $[C^d]_N = [K']_N$. $\Rightarrow\ [K']_N = [C^d]_N = [(K^e)^d]_N = [K^{e\cdot d}]_N = [K]_N^{e\cdot d}$.

Es gilt: $N = p \cdot q\ \wedge\ \varphi(N) = \varphi(p \cdot q) = (p-1)(q-1)\ \wedge\ d \cdot e = 1 + m \cdot \varphi(N)$
$\Rightarrow\ [d \cdot e]_{(p-1)(q-1)} = [1]_{(p-1)(q-1)}\ \Rightarrow\ \exists_{u \in \mathbb{Z}} :\ d \cdot e = 1 + u\,(p-1)(q-1)$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1 $p|\,K$

$\rightsquigarrow\ [K]_p = [0]_p\ \Rightarrow\ [K']_p = [K^{e\cdot d}]_p = [0]_p\ \Rightarrow\ [K]_p = [K']_p$

2 $q|\,K$

$\rightsquigarrow$ Herleitung wie eben gehabt: $\ldots\ \Rightarrow\ [K]_q = [K']_q$

3 $p \not| K,\ \ q \not| K$

Hier gilt nach dem kleinen Fermatschen Satz: $[K^{p-1}]_p = [1]_p\ \wedge\ [K^{q-1}]_q = [1]_q$

$\rightsquigarrow\ [K^{e\cdot d}]_p = [K^{1+u\,(p-1)(q-1)}]_p = [K \cdot K^{u\,(p-1)(q-1)}]_p = [K]_p \cdot [(K^{u\,(q-1)})^{(p-1)}]_p = [K]_p \cdot [1]_p = [K]_p$

$\rightsquigarrow\ [K']_p = [K^{e\cdot d}]_p = [K]_p$

4 Ebenso mit q statt mit p: $[K']_q = [K^{e\cdot d}]_q = [K]_q$

5 $\rightsquigarrow\ [K^{e\cdot d} - K]_p = [0]_p\ \wedge\ [K^{e\cdot d} - K]_q = [0]_q\ \Rightarrow\ [K^{e\cdot d} - K]_{p\cdot q} = [K^{e\cdot d}]_{p\cdot q} - [K]_{p\cdot q} = [0]_{p\cdot q}$

$$\rightsquigarrow\ K^{e\cdot d} \equiv K\ (mod\ (p \cdot q = N))$$

14.2.5 Das Sicherheitsproblem — Le problème de la sécurité

N ist bei diesem Verfahren bekannt, jedoch p und q nicht. Daher lautet die Frage, was wohl die Chance ist, die beiden Faktoren p und q von N zu finden. Damit könnte man dann via $\varphi(N)$ und dem öffentlichen Schlüssel (N, e) den geheimen Schlüssel d berechnen und damit eine Botschaft dechiffrieren, falls dafür der Geheimtext gegeben ist.

Bekannt ist (Jahr 2006), dass die wachsende Rechenleistung moderner Computer nur eine kurzfristige Sicherheit bedingt. Mit dem schnellen Algorithmus des **quadratischen Siebs** sind bereits Zahlen mit über 100 Stellen faktorisiert worden. Eine weitere Methode der Faktorisierung benutzt **elliptische Kurven**, ist aber für Zahlen mit über ca. 50 Stellen untauglich. Mit der **Methode des Zahlkörpersiebs** ist im Jahre 2005 von Wissenschaftlern der Universität Bonn eine im Rahmen der „RSA Factorization Challenge“ von RSA Laboratories vorgegebene 200-stellige Dezimalzahl in ihre zwei (großen) Primfaktoren zerlegt worden — mit einer Rechenzeit von ca. eineinhalb Jahren. Erreichbar scheint heute die Faktorisierung einer Zahl mit 640 Bits (bzw. 193 Dezimalstellen). Heute üblicher RSA-Schlüssel benutzen dagegen mindestens 300 Dezimalstellen für N.

Vgl. auch $http://de.wikipedia.org/wiki/Elliptische_Kurve$,
$http://de.wikipedia.org/wiki/Quadratisches_Sieb$,
$http://de.wikipedia.org/wiki/Zahlkörpersieb$.

14.2.6 Hinweise — Indications

1 Allgemeine Hinweise: Vgl. z.B. $http://de.wikipedia.org/wiki/RSA-Kryptosystem$.

2 Hinweise zur aktuellen Situation sind auch auf dem Internet zu finden, z.B. auf der Home-page von RSA-Laboratories: http://www.rsasecurity.com/

3 Bisher oft empfohlene Sicherheitsparameter waren:
Allgemein: Zahlen N mit $3 \cdot 256 = 768$ Bits ($\approx 1.5525 \cdot 10^{231}$)
Firmen: Zahlen N mit $4 \cdot 256 = 1024$ Bits ($\approx 1.79769 \cdot 10^{308}$)
Hochsicherheit: Zahlen N mit $8 \cdot 256 = 2048$ Bits ($\approx 3.2317 \cdot 10^{616}$).

4 Für das Problem der Angriffe gegen das RSA–Verfahren vgl. die Spezialliteratur.

5 Ein weiteres Problem: Die Erzeugung von Primzahlen. Z.B. stellt sich die Frage: Wieviele Primzahlen mit 308 Dezimalstellen mag es geben: $A(308)$? Zur Abschätzug benutzen wir die Formel der asymptotische Dichte der Primzahlen: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\pi(x)}{(\frac{x}{ln(x)})} = 1\ \Rightarrow\ \pi(x) \approx \dfrac{x}{ln(x)}$
$\Rightarrow\ A(308) \approx \pi(10^{309}) - \pi(10^{309}) \approx \dfrac{10^{309}}{ln(10^{309})} - \dfrac{10^{308}}{ln(10^{308})} \approx 1.264479 \cdot 10^{306}$. Vorratsprobleme wird es damit also kaum geben. Zur praktischen Erzeugung von Primzahlen konsultiere man die Spezialliteratur.

6 Das heute sehr aktuelle Problem der digitalen Unterschrift kann hier nur am Rande gestreift werden. Es geht in dieser Sache nicht bloss um die Übermittlung eines geheimen Textes, sondern um die Identifizierung des andern, d.h. um die Verifizierung der Identität. Auch hier konsultiere man die Spezialliteratur.
Vgl z.B. $http://de.wikipedia.org/wiki/Digitale_Unterschrift$.

Kapitel • Chapitre 15

Anhang 4: Verschiedenes – Annexe 4: Diverses choses

15.1 Häufig verwendete Abkürzungen – Abréviations fréquemment utilisées

Vor.	• *Hyp.*	Voraussetzung • *Hypothèse*
Beh.	• *Thè .*	Behauptung • *Thèse*
Bew.	• *Pre.*	Beweis • *Preuve*

Seiten: • Pages:

Arg, 140
Beh. • *Thè.*, 345
Defect, 280
Dim, 66
EV , 259
EW , 259
EWP'PVP , 259
ggT'pgdc, 29
grad, 283
HNF, 106
Im, 137
kgV'ppmc, 29
Kern, 260
l.a.'l.d., 65
LK'CL, 63
l.u.'l.i., 64
ONB , 70
ONS , 105
Ord, 194
pgrad , 67
Rang, 187
Re, 137
sgn, 32
Sp'Tr , 271
VR'EV, 61
Vor. • *Hyp.*, 345

15.2 Mathematica–Programme – Prog. pour Mathematica

`http://www.hta-bi.bfh.ch/~wir/MathemDF/Mathem.html#Pack`

- ⇝ Geometrische Berechnungen: Source-File
- ⇝ Geometrische Berechnungen: Work-File
- ⇝ Polyeder-Geometrie: Source-File
- ⇝ Polyeder-Geometrie: Work-File
- ⇝ Geometrie mit Zirkel und Lineal

Kapitel • Chapitre 16

Anhang „Bemerkungen“ — Annexe

• *Ici, il y a pour le moment seulement le texte allemand à disposition. Momentanément, la traduction française manque encore.*

16.1 Bemerkung zu Drehung und Gegendrehung

Gegeben sei ein beliebiges, aber fixes Koordinatensystem KS_{fix} im Raum und dazu geometrische Objekte im Raum, z.B. ein Würfel als einfaches Objekt. Weiter sei ein zweites, bewegliches Koordinatensystem im Raum gegeben mit andern gegebenen Objekten, die in diesem beweglichen Koordinatensystem fix befestigt sind, z.B. ein Tetraeder. Wir wollen uns das Tetraeder ganz nahe beim Würfel denken. Die Ursprünge der verwendeten KS seine jedoch von den Objekten weit entfernt. Drehen oder bewegen wir das bewegliche Koordinatensystem KS_{lose}, so ändern sich in diesem die Koordinaten der im Raum fixen Objekte, z.B. des Würfels. Die KS_{lose}–Koordinaten der mit dem KS_{los} fix verbundenen Objekte, z.B. des Tetraeders, ändern sich nicht. Das Tetraeder bewegt sich mit dem KS_{lose} vom Würfel weg. Die Vektoren des Tetraeders verhalten sich daher **kovariant** mit dem Koordinatensystem KS_{lose}, ihre Koordinaten sind in KS_{lose} **invariant**. Man kann die Sache auch umkehren: Wenn sich die Koordinaten von Objekten in einem KS beim Bewegen dieses KS nicht ändern, so verhalten sich diese Objekte **kovariant** mit diesem KS. Die Koordinaten des Tetraeders ändern sich also im fix gegebenen KS_{fix} **kovariant** mit dem KS_{lose}, da das Tetraeder sich im Raum — und damit im KS_{fix} — bewegt. Um die alte Position mit den alten Koordinaten im KS_{fix} wieder herzustellen, muss das Tetraeder zurück in die Nähe des Würfels bewegt werden, die Position resp. die Koordinaten ändern sich dann **kontravariant**, wenn wir diesmal das KS_{lose} nicht mit zurückbewegen. Wenn sich das KS_{lose} somit bewegt hat und der im Raum fixe Würfel seine Position beibehält, so ändern sich seine Koordinaten **kontravariant**. Der Würfel ist ja an derjenigen Position geblieben, an die das Tetraeder schliesslich wieder zurückbewegt worden ist.

16.2 Winkelhalbierende im Dreieck — Bissectrice d. le triangle

Bemerkung: Ohne Übersetzung.

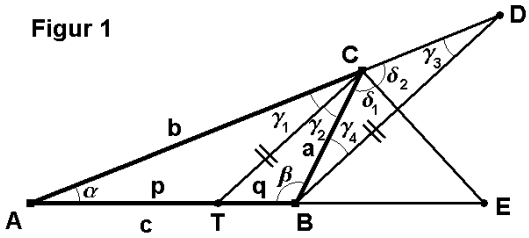
Satz über die Winkelhalbierenden im Dreieck I:

Vor.:

Sei $\gamma_1 = \gamma_2$ und danach $\overline{BD} \parallel \overline{CT}$

$\Rightarrow\ \gamma_1 = \gamma_3$ und $\gamma_2 = \gamma_4$
$\Rightarrow\ \gamma_3 = \gamma_4\ \Rightarrow\ \triangle BDC$ ist gleichschenklig
$\Rightarrow\ a = |\overline{BC}| = |\overline{CD}|\ \Rightarrow\ \dfrac{b}{a} = \dfrac{|\overline{AC}|}{|\overline{CD}|} = \dfrac{p}{q}$

Figur 1



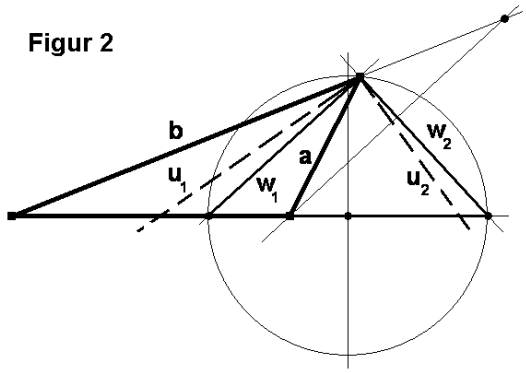
Satz: Die Winkelhalbierende $\overline{CT}$ schneidet c im Verhältnis der restlichen Seiten:

$$\frac{b}{a} = \frac{p}{q}$$

Weiter sei $\overline{CE}$ die Winkelhalbierende von $\angle BCD$ in der letzten Figur, d.h. $\delta_1 = \delta_2$.

Es gilt:
$\gamma_2 + \delta_1 = \gamma_3 + \delta_1 = \dfrac{1}{2}(\gamma_3 + \gamma_4 + \delta_1 + \delta_2)$
$= \dfrac{1}{2}\,180^o = 90^o\ \Rightarrow\ \angle TCE = \perp$

Figur 2



Lemma: C liegt auf dem Thaleskreis über $\overline{TE}$

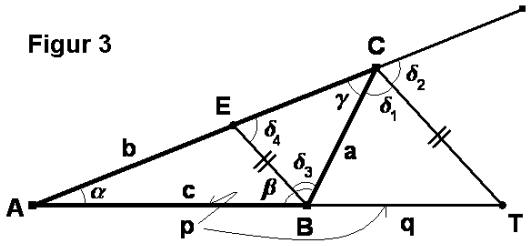
Satz über die Winkelhalbierenden im Dreieck II:

Vor.:

Sei $\delta_1 = \delta_2$ und danach $\overline{EB} \parallel \overline{CT}$

$\Rightarrow\ \delta_1 = \delta_3$ und $\delta_2 = \delta_4$
$\Rightarrow\ \delta_3 = \delta_4\ \Rightarrow\ \triangle BCE$ ist gleichschenklig
$\Rightarrow\ a = |\overline{BC}| = |\overline{CE}|\ \Rightarrow\ \dfrac{b}{a} = \dfrac{|\overline{AC}|}{|\overline{EC}|} = \dfrac{p}{q}$

Figur 3



Satz: Die Winkelhalbierende $\overline{CT}$ schneidet c im äusseren Teilpunkt T im Verhältnis der restlichen Seiten:

$$\frac{b}{a} = \frac{p}{q}$$

Wir betrachten nun die Figur 2.
Wird hier umgekehrt die Strecke $\overline{AB}$ durch den inneren Teilpunkt T (Figur 1) im Verhältnis $a : b$ geteilt und man hätte eine Gerade $\overline{CT_1}$ resp. u_1 mit $\gamma_1 \neq \gamma_2$, so könnte man daneben eine Gerade $\overline{CT_2}$ resp. w_1 mit $\gamma_1{}' = \gamma_2{}'$ konstruieren, und es würde aus dem Satz über die Winkelhalbierenden im Dreieck I folgn, dass $T_1 = T_2$ sein müsste.
Analog schliesst man für den in Figur 3 gezeigten Fall mit dem äusseren Teilpunkt. $\rightsquigarrow$ Folgerung

Satz:

1 Die Forderung $\gamma_1 = \gamma_2$ in Figur 1 ist äquivalent zur Forderung „Die Winkelhalbierende $\overline{CT}$ schneidet c im Verhältnis der restlichen Seiten:“

$$\frac{b}{a} = \frac{p}{q}$$

2 Die Forderung $\delta_1 = \delta_2$ in Figur 3 ist äquivalent zur Forderung „Die Winkelhalbierende $\overline{CT}$ schneidet c im Verhältnis der restlichen Seiten:“

$$\frac{b}{a} = \frac{p}{q}$$

Ende • Fin