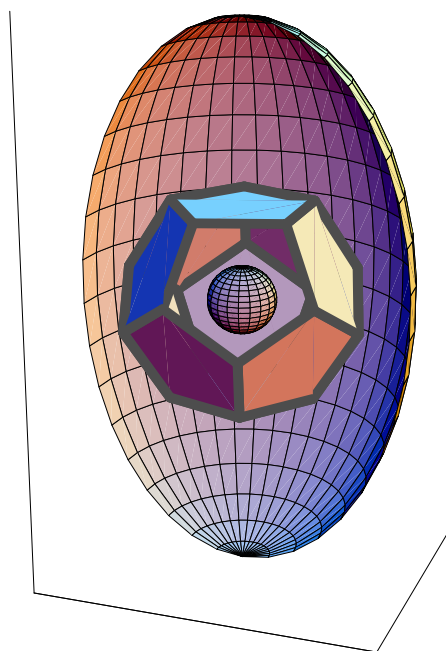


Script  $\diamond$  Math  $\diamond$  Ing  
 $\diamond$  Analysis  $\diamond$  Analyse  $\diamond$   
kurz & bündig  $\diamond$  concis



**Scripta bilingua**

von

Rolf Wirz

Berner Fachhochschule BFH  $\diamond$  HTI und HSB

V.2.14.25a / 2.12.44a d/f / 18. August 2012 **!Draft! Deutsche Version!**

Produziert mit LaTeX/PCTEX auf NeXT/ WIN98/ XP.

Einige Graphiken sind auch mit *Mathematica* entstanden.

**!Draft! Deutsche Version, Formatierung nicht kontrolliert! Gebrauch auf eigene Verantwortung!**

*Je mathematischer und wirkungsvoller eine Theorie ist, desto unanschaulicher ist sie. Die moderne Wissenschaft erkaufte sich ihre Möglichkeit die Welt zu verändern — oft durch Verzicht auf die Anschaulichkeit der Beschreibung. ...*

*Fleckenstein*

Aktuelle Adresse des Autors (2007):

Rolf W. Wirz-Depierre

Prof. für Math.

Berner Fachhochschule (BFH), Dep. AHB und TI

Pestalozzistrasse 20

Büro B112 CH-3400 Burgdorf/BE

Tel. ++41 (0)34 426 42 30 / intern 230

Mail: Siehe <http://rowicus.ch/Wir/indexTotalF.html> unter „Koordinaten von R.W.“

Alt: Ingenieurschule Biel (HTL), Ing'schule des Kt. Bern, Fachhochschule ab 1997) // BFH HTA Biel // BFH TI //

Die Urheberrechte für das verwendete graphische Material gehören dem Autor.

©1998 ... 2003/04/05/06/07/08/09/10/11/ 2012

# !Draft! Deutsche Version

**(Gebrauch auf eigene Verantwortung.)**

Dieses Script ist mit  $\text{\LaTeX}$  für den doppelsprachigen Unterricht programmiert worden. Dabei wurden alle französischsprachigen Textteile jeweils mit dem Aufruf einer Subroutine verbunden, um den Font Style *Italics* aufzurufen. Diese Subroutine ist hier modifiziert worden um den französischsprachigen Text zu unterdrücken. Titel, Inhaltsverzeichnis und deutschsprachiger Text können so nicht sofort behandelt werden. Es wäre hier auch bei jedem Textstück ein Unterprogramm-Aufruf notwendig, was nur durch eine grössere Arbeit zu erreichen ist. Dafür fehlt im Moment die Zeit.

Bei offensichtlich fehlenden kleinen Textteilen, unschönen oder missverständlichen Zeilenumbrüchen kann es sich um automatisch schwer auffindbare Programmierfehler handeln. In einem solchen Fall ist es ratsam, den doppelsprachigen Referenztext zu konsultieren. (Der Autor bittet in einem solchen Fall um eine Benachrichtigung und dankt dafür im voraus.)

Information erscheint nur in der deutschen Ausgabe.



# Inhaltsverzeichnis • Table des matières

<b>1 Organisatorisches — Quant à l'organisation</b>	<b>1</b>
<b>2 Reelle Funktionen — Fonctions réelles</b>	<b>3</b>
2.1 Grundlagen — Fondements	3
2.1.1 Einführung — Introduction	3
2.1.2 Anschaulicher Funktionsbegriff — Version simple de la notion de fonction	3
2.1.3 Zahlen — Nombres	4
2.1.4 Standardkoordinatensysteme — Systèmes de coordonnées standard	4
2.1.5 Einteilung reeller Fkt. — Distinction des fct. réelles	4
2.1.6 Definitions- und Wertebereiche — Domaines de définition et de valeur	5
2.1.7 Gleichheit von Funktionen — Egalité de fonctions	5
2.2 Einige Standardfunktionen — Quelques fonctions standard	6
2.2.1 Einige algebraische Typen — Quelques types algébriques	6
2.2.2 Einige Eigenschaften — Quelques qualités	11
2.2.3 Umkehrabbildungen — Applications inverses	20
2.2.4 Transzendente Funktionen — Fonctions transcendentes	21
2.3 Reelle Zahlen und Folgen — Nombres réels et suites	27
2.3.1 Darstellungsarten — Façons de représentation	27
2.3.2 Zahlenerweiterung — Elargir les ensembles de nombres	29
2.3.3 Das Problem der Mächtigkeiten — Le problème de la puissance	29
2.3.4 Weitere Resultate — D'autres résultats	32
2.3.5 Folgen — Suites	34
2.3.6 Nullfolgen — Suites vers zéro	35
2.3.7 Stetige Verzinsung — Continuellement rapporter des intérêts	46
2.4 Grenzwerte bei Funktionen — Valeurs limites de fonctions	47
2.4.1 Konvergenz bei Funktionen — Convergence de fonctions	47
2.4.2 Einseitige Limites — Limites unilatérales	49
2.4.3 Stetigkeit — Continuité	50
2.4.4 $L$ -Stetigkeit — "Continuité $L$ "	51
2.4.5 Eigenschaften stetiger Funktionen — Qualités de fonctions continues	52
2.4.6 Anwendung auf Graphen — Applications à des graphes	54
2.4.7 Schranken, Grenzen, Extrema — Bornes, limites, extréma	54
2.4.8 Gleichmässige Stetigkeit — Continuité uniforme	55
2.5 Simulation mit rekurs. Folgen — Simulation av. d. suites récurr.	58
2.5.1 Beispiel: Linearer Naturschutzes — Exemple: Protect. de la nature linéaire	58
2.6 Landau-Symbole und Fibonacci — Le symboles de Landau et Fibonacci	61
2.6.1 Landaus 'O'-Symbol — Le symbole 'O' de Landau	61
2.6.2 Benchmark, Fibonacci — Benchmark, Fibonacci	63

<b>3</b>	<b>Differentialrechnung — Calcul différentiel</b>	<b>69</b>
3.1	Problemstellung — Problématique	69
3.1.1	Vorbemerkung — Fondements	69
3.1.2	Das Problem der Tangentensteigung — Le problème de la pente de la tangente	69
3.1.3	Die Begriffe — Les notions	69
3.1.4	$L$ -Differenzierbarkeit — "Dérivable $L$ "	71
3.1.5	Einfache Beispiele — Exemples simples	72
3.1.6	Höhere Ableitungen — Dérivées supérieures	73
3.1.7	Diff'barkeit und Stetigkeit — Dérivabilité et continuité	74
3.1.8	Links- und rechtsseitige Diff'barkeit — Dérivabilité de gauche et de droite	75
3.2	Der Kalkül — Le calcul	76
3.2.1	Grundlagen, Potenzfunktion — Fondements, fonction puissance	76
3.2.2	Linearität — Linéarité	76
3.2.3	Wichtige Regeln — Des règles importantes	77
3.2.4	Ableitung wichtiger Funktionen — Dérivées de fonctions importantes	82
3.2.5	Tangenten und Normalen an Graphen — Tangentes et normales aux graphes	86
3.2.6	Der Mittelwertsatz — Le théorème des accroissements finis	87
3.3	Extremalprobleme — Problèmes d'extréma	88
3.3.1	Extrema — Extréma	88
3.3.2	Wendepunkte — Points d'inflexion	89
3.3.3	Kurvendiskussion — Discussion de graphes	92
3.4	Die Regel von Bernoulli — La règle de Bernoulli	93
3.4.1	Herleitung der Regel — Dédution de la règle	93
3.4.2	Ausdehnung der Regel — Extension de la règle	94
3.4.3	Wichtige Beispiele — Exemples importants	95
3.5	Anwendungen — Applications	97
3.5.1	Kurvenform bei der Eisenbahn — Forme du virage du chemin de fer	97
3.5.2	Weitere Beispiele — D'autres exemples	97
<b>4</b>	<b>Integralrechnung — Calcul intégral</b>	<b>99</b>
4.1	Inhalte krumml. begr. Flächen — Aires de surf. au bord courbe	99
4.1.1	Die Idee der Approximation — L'idée de l'approximation	99
4.1.2	Das Riemannsche Integral — L'intégrale de Riemann	103
4.2	Kriterien und Eigenschaften — Critères et Qualités	105
4.2.1	Integrationskriterien — Critères pour l'intégrabilité	105
4.2.2	Eigenschaften bestimmter Integrale — Qualités d'intégrales définies	107
4.3	Der Kalkül — Le calcul	112
4.3.1	Stammfunktionen — Fonctions antidérivées	112
4.3.2	Hauptsatz der Infinitesimalrechnung — Théorème principal du calcul infinitésimal	113
4.3.3	Uneigentliche Integrale — Intégrales impropres	117
4.3.4	Integrationsregeln — Règles d'intégration	118
4.3.5	Partielle Integration — Intégration partielle	119
4.3.6	Substitutionen — Substitutions	121
4.3.7	Partialbruchzerlegung — Décomposition en fractions partielles	123
4.4	Anwendungen, Beispiele — Applications, exemples	124
4.4.1	Rechenbeispiele — Exemples de calcul	124
4.4.2	Kurven in Polarkoordinaten — Courbes en coordonnées polaires	125
4.4.3	Kurvenlängen — Longueurs de courbes	126
4.4.4	Elementare Linienintegrale — Intégrales curvilignes élémentaires	129
4.4.5	Flächen unter Vektorkurven — Surfaces sous des courbes vectorielles	132
4.4.6	Rotationskörper — corps de révolution	133
4.4.7	Schwerpunkte und Guldin — Centres de gravité et Guldin	134
4.4.8	Trägheitsmoment — Moment d'inertie	135

4.4.9	Physikalische Anwendungen — Applications en physique	137
4.4.10	Die Bedeutung des $\operatorname{arsinh}$ — La signification de l' $\operatorname{arsinh}$	138
4.4.11	Die Gamma-Funktion — La fonction gamma	138
4.4.12	Die Irrationalität von $\pi$ — L'irrationalité de $\pi$	140
<b>5</b>	<b>Etwas Numerik — Un peu de mathématique numérique</b>	<b>143</b>
5.1	Algorithmen — Algorithmes	143
5.2	Iterative Lös. v. Gleich'syst. — Solution d. syst. d'équ. p. itér.	143
5.2.1	Beispiel aus der Algebra — Exemple de l'algèbre	143
5.3	Nullstellenapproximation — Approximation de zéros	144
5.3.1	Intervalleingrenzung — Emboîtement d'intervalle	144
5.3.2	Tangentenmethode — Méthode de la tangente	145
5.3.3	Eine Anwendung — Une application	146
5.3.4	Sekantenmethode — Méthode de la sécante	146
5.3.5	Fixpunktmethod — Méthode du point fixe	147
5.3.6	Korrigierte Fixpunktmethod — Méthode corrigée du point fixe	149
5.3.7	Fixpunktmethod für Systeme — Méthode du point fixe pour systèmes	151
5.4	Interpolationspolynome — Polynômes d'interpolation	152
5.4.1	Probleme — Problèmes	152
5.4.2	Begriff — Notion	152
5.4.3	Zum Hornerschema — Quant au schéma de Horner	152
5.4.4	Darstellung von Lagrange — Représentation de Lagrange	153
5.4.5	Abschätzung und Runge-Effekt — Estimation et effect de Runge	153
5.4.6	Darstellung von Newton — Représentation de Newton	155
5.4.7	Zum Aitken-Neville-Algorithmus — Quant à l'algorithme de Aitken-Neville	155
5.4.8	Hermite-Interpolation, Splines — Interpolation d'après Hermite, splines	157
5.4.9	Splines — Splines	158
5.4.10	Ausblick: Bezier-Kurven — Annexe: Courbes de Bézier	162
5.5	Numerische Differentiation — Différentiation numérique	164
5.5.1	Graphische Methode — Méthode graphique	164
5.5.2	Polynommethod — Méthode polynomiale	164
5.5.3	Methode der Binomialkoeffizienten, $f^{(n)}$ — Méthode des coefficients binomiaux, $f^{(n)}$	166
5.5.4	Methode der zentralen Differenzen — Méthode des différences centrales	167
5.6	Numerische Integratiion — Intégration numérique	169
5.6.1	Rechteckmethod — Méthode des rectangles	169
5.6.2	Trapezmethod — Méthode du trapèze	170
5.6.3	Polynommethod — Méthode de polynômes	171
5.6.4	Simpsonmethod — Méthode de Simpson	171
5.6.5	Der Rombergalgorithmus — L'algorithme de Romberg	172
5.6.6	Die Integrationsformel von Gauss — La formule d'intégration de Gauss	173
<b>6</b>	<b>Reihen — Séries</b>	<b>175</b>
6.1	Zahlenfolgen — Suites de nombres	175
6.1.1	Bekannte Begriffe — Notions connues	175
6.1.2	Spezielle Folgen — Suites spéciales	175
6.1.3	Konvergenzprobleme — Problèmes de convergence	179
6.2	Reihen, Zahlenreihen — Séries, séries de nombres	180
6.2.1	Gegenstand, Motivation — Sujet, motivation	180
6.2.2	Spezielle Reihen — Séries spéciales	181
6.2.3	Konvergenzkriterien — Critères de convergence	183
6.2.4	Arithmetik mit Reihen — Arithmétique de séries	189
6.2.5	Rechnen mit Reihen — Calculer avec des séries	190
6.2.6	Interessante Beispiele — Exemples intéressants	193

6.2.7	Weitere Kriterien — D'autres critères	194
6.3	Folgen und Reihen von Fkt. — Suites et séries de fonct.	195
6.4	Funktionenreihen — Séries de fonctions	195
6.5	Gleichmässige Konvergenz — Convergence uniforme	195
6.5.1	Problem und Definition — Problème et définition	195
6.5.2	Gleichm. Konvergenz v. Fkt'reihen — Conv. uniforme de séries de f'cts	197
6.5.3	Gleichmässige Konv. u. Vertauschungssätze — Conv. unif. et théorèmes d'échang.	199
6.6	Potenzreihen — Séries de puissances	202
6.6.1	Theorie: Begriffe, Sätze — Théorie: Notions, théorèmes	202
6.6.2	Praxis: Potenzreihenentwicklung — Pratique: Développement en séries de puiss.	206
<b>7</b>	<b>Diff'rechn. im 'R-n' — Calcul diff. dans le 'R-n'</b>	<b>215</b>
7.1	Funktionen m. mehreren Var. — Fonct. à plusieurs variables	215
7.1.1	Beispiele — Exemples	215
7.1.2	Definitionsbereiche — Domaines de définition	216
7.1.3	Funktionstypen — Types de fonctions	217
7.1.4	Aspekte der Darstellung — Aspects de la représentation	218
7.2	Stetigkeit — Continuité	220
7.2.1	Das neue Problem — Le problème nouveau	220
7.2.2	Stetigkeitsdefinition — Définition de la continuité	221
7.3	Partielle Ableitungen — Dérivées partielles	225
7.3.1	Ableitungsarten — Manières de définir une dérivée	225
7.3.2	Partielle Ableitungen — Dérivées partielles	225
7.3.3	Höhere partielle Ableitungen — Dérivées partielles supérieures	226
7.3.4	Eigenschaften partieller Ableitungen — Qualités de dérivées partielles	226
7.4	Differential — Différentielle	228
7.4.1	Situation b. F'kt. m. nur einer Variablen — Situation p.l. f'ct. à u. seule var.	228
7.4.2	Situation b. F'kt. m. zwei und mehr Var. — Situation p. l. f'ct. à deux et plus var.	230
7.4.3	Verallgemeinerung der Differenzierbarkeit — Généralisation de la dérivabilité	235
7.4.4	Zum Gradienten — Quant au gradient	236
7.4.5	Tangentialebenen, Potenzreihenentw. — Plans tangentiels, séries de puissances	239
7.4.6	Bemerkungen zum totalen Differential — Remarques quant à la différentielle totale	239
7.4.7	Die Kettenregel — La règle conjointe	241
7.5	Anwendungen — Applications	242
7.5.1	Verpflanzung von Differentialoperatoren — Transposition d'opérateurs différentiels	242
7.5.2	Totale Ableitung — Dérivée totale	244
7.5.3	Anwendung auf implizite Funktionen — Application aux fonctions implicites	244
7.5.4	Extremalprobleme — Problèmes d'extréma	245
7.5.5	Klassifikation von Kegelschnitten — Classifications des sections de cônes	247
7.5.6	Extremalprobl. m. Nebenbed. — Probl. d'extréma avec cond. séc.	248
7.5.7	Newton-Approximation b. mehreren Var. — Approx. d. Newton pour plusieurs var.	249
7.6	Fehlerrechnung (Abhängigkeit) — Calcul de l'erreur (dépendance)	250
7.6.1	Das Problem der Verpflanzung — Le problème de la dépendance	250
7.6.2	Verwendung des totalen Differentials — Appliquer la différentielle totale	251
7.6.3	Linearisierungen — Linéarisations	252
7.7	Regression — Régression	253
7.7.1	Der Begriff — La notion	253
7.7.2	Methode der kleinsten Quadrate — Méthode des carrés minimaux	254
7.7.3	Korrelation — Corrélation	257
7.7.4	Korrelationskoeff.: Bedeutung — Coeff. de corrélation: Signification	258



<b>8</b>	<b>Integrale im 'R-n' — Intégrales d.l. 'R-n'</b>	<b>261</b>
8.1	Integration von Integralen — Intégration d'intégrales	261
8.1.1	Gewöhnl. Integr. als F'kt. eines Param. — Intégr. simpl. comme f'ct. d'un param.	261
8.1.2	Übergang zu Doppelintegralen — Passage aux intégrales doubles	263
8.1.3	Vertauschbarkeit v. Integr. u. Diff. — Echang. de l'intégr. e.d.l. diff.	264
8.2	Mehrfachintegrale: Begriff. . . — Intégrales multiples: Notion	266
8.2.1	Konzept — Concept	266
8.2.2	Gebietszerlegungen — Partition d'une région	267
8.2.3	Verfeinerungen v. Gebietszerleg. — Raffinements d. partit. d. régions	267
8.2.4	Riem. Summen f. prob'lose Gebiete — Sommes d. Riem. p.d. rég. sans probl.	268
8.2.5	Riem. Summen bei vernünft. Gebieten — Sommes d. Riem. p.d. rég. raisonnabl.	270
8.2.6	n-dim. Volumenintegrale — Intégrales de volume à dim. n	271
8.2.7	Integrationsegeln — Règles pour l'intégration	271
8.3	Berechn. von Doppel-etc.-Integr. — Calc. des intégr. doubles	273
8.3.1	Gebietsintegrale, allgemeine Situation — Intégrales de région, situation générale	273
8.3.2	Anwendung auf Volumenberechnungen — application pour calculer des volumes	277
8.3.3	Uneigentliche Gebietsinteg., Anwend. — Intég. d. région impropr., applic.	278
8.3.4	Gebietsintegr. in Polarkoord. — Intégr. de rég. en coord. polaires	279
8.4	Oberflächenintegrale — Intégrales superficielles	281
8.4.1	Inhalte krummer Flächen — Mesures de surfaces courbes et tordues	281
8.4.2	Für beliebige Koord'syst. — P.d. syst. d. coord. quelc.	283
8.4.3	Anwendung Raumwinkel — Application angle solide	286
8.4.4	Für Funk. auf Oberfl. — Pour d. fonc. sur l. surf.	287
8.5	Mehrfachintegrale — Intégrales multiples	289
8.5.1	Allgemeines — Généralités	289
8.5.2	Beispiele in kartesischen Koordinaten — Exemples en coordonnées cartésiennes	290
8.5.3	Integrale in Zylinderkoord. — Intégrales en coord. cylindriques	291
8.5.4	Integrale in Kugelkoord. — Intégrales en coord. sphériques	293
8.6	Transf. v. Gebietsintegr. — Transf. d'intégr. de domaine	295
8.6.1	Der Fall mit zwei Variablen — Le cas avec deux variables	295
8.6.2	Verallgemeinerung — Généralisation	298
8.6.3	Beispiel — Exemple	299
<b>9</b>	<b>Kurven — Courbes</b>	<b>301</b>
9.1	Grundlagen — Bases	301
9.1.1	Kurvendefinitionen — Définitions de courbes	301
9.1.2	Gebiete — Régions	302
9.1.3	Tangentenvektor, Tangentialebene — Vecteur tangent, plan tangent	302
9.2	Krümmung von Kurven — Courbure de courbes	304
9.2.1	Definition der Krümmung — Définition de la courbure	304
9.2.2	Ebene Kurven — Des courbes planes	304
9.2.3	Krümmungsradius — Rayon de courbure	307
9.2.4	Kurven im Raum — Courbes dans l'espace	308
9.3	Das begleitende Dreibein — Le trièdre mobile	311
9.3.1	Das lokale Koordinatensystem — Le système de coordonnées locales	311
9.3.2	Fernet-Serret'sche Gleichungen — Equations de Fernet-Serret	312
9.3.3	Konstruktion eines Schlauches — Construction d'un tube	313
9.4	Evolute und Evolvente — Développée et développante	315
9.4.1	Einführung — Introduction	315
9.4.2	Beispiele — Exemples	316
9.4.3	Evolute (Vertiefung) — Développée (approfondissement)	317
9.4.4	Evolvente (Vertiefung) — Développante (approfondissement)	320

<b>10 A. 1 Komplexe Funktionen — Fonctions complexes</b>	<b>323</b>
10.1 Differenzierbarkeit, Wege — Dérivés, chemins	323
10.1.1 Grundlagen — Fondements	323
10.1.2 Differenzierbarkeit — Dérivabilité	325
10.1.3 Differenzierbarkeitsregeln — Règles pour dérivabilité	325
10.1.4 Wege in $\mathbf{C}$ — Chemins dans $\mathbf{C}$	327
10.1.5 Differenzierbare Wege — Chemins dérivables	327
10.2 Konforme Abbildungen — Applications conformes	329
10.3 Möbius-Transformationen — Transformations de Möbius	330
10.4 Definitionen — Définitions	330
10.4.1 Eigenschaften — Qualités	330
10.5 Cauchy-Riemann — Cauchy-Riemann	332
10.5.1 Herleitung — Dédution	332
10.5.2 Harmonische Funktionen — Fonctions harmoniques	333
10.6 Exp-, Log'-funktion — Fonct. exp., log.	333
10.7 Trig. Funkt. — Fonct. trig.	336
10.8 Anwendungen — Applications	337
10.8.1 Idee — Idée	337
10.8.2 Smith-Diagramm — Diagramme de Smith	337
10.8.3 Joukowski-Profil — Profil de Joukowski	338
10.8.4 Zeigerdiagramme — diagrammes-vecteurs	339
10.9 Darstellung komplexer Funktionen — Représentation de fonct. compl.	340
10.9.1 Beispiel einer Kurve — Exemple d'une courbe	340
10.9.2 Beispiel einer rationalen Funktion — Exemple: Fonction rationnelle	341
<b>11 A. 2 Komplexe Kurvenintegrale — Intégrales curvil. compl.</b>	<b>343</b>
11.1 Grundlagen aus der Funktionentheorie — Bases de la théorie de fonctions	343
11.1.1 Definition des Kurvenintegrals — Définition de l'intégrale curviligne	343
11.1.2 Sätze, Eigenschaften — Théorèmes, propriétés, qualités	344
11.1.3 Residuenrechnung — Méthode des résidus	345
11.2 Berechnung bestimmter Integrale — Calculer des intégrales définies	347
<b>12 Anhang 3 — Annexe 3</b>	<b>349</b>
12.1 Hinweise — Indications	349
12.1.1 Abkürzungen — Abréviations	349
12.1.2 Literatur — Littérature	349





# Kapitel • Chapitre 1

## Organisatorisches — Quant à l'organisation

### Kurze Übersicht

1. Organisation, Rahmen
2. Stoff
3. Ziel, Weg, Methoden, Feedback, Team
4. Übungen, Selbststudium
5. Lerntechnik, Arbeitstechnik, Selfmanagement
6. Rechte und Pflichten des Studenten und der Schule
7. Prinzipien, Grundsätze
8. Rechner, Computer, Mathematiksoftware
9. Semesterorganisation Mathematik (Anzahl Noten, Prüfungsreglement, Prüfungsplan, Prüfungsrahmen, erlaubte Unterlagen, formale Anforderungen, Benotungskriterien, Benotung der Übungen und Projekte, Arbeitsnachweismappe, Klassensprecher, Klassenbetreuer, Kopierchef, Sprechstunden)
10. Hilfsmittel (Bibliothek, Taschenrechner, Mathematiksoftware, Literatur)
11. Zeitplanung
12. Einführung: Über das Wesen der Mathematik
  - (a) Beispielhafte Beweise
  - (b) Wieso beweisen?
  - (c) Modell und Wirklichkeit
  - (d) Geschichtlicher Rahmen und Auftrag



## Kapitel • Chapitre 2

# Reelle Funktionen — Fonctions réelles

## 2.1 Grundlagen — Fondements

### 2.1.1 Einführung — Introduction

#### Literatur — Littérature

Kurze Liste: Vgl. Anhang.

Lit. fürs Selbststudium: Vgl. spezielle Literaturliste. : Voir liste de littérature spéciale.

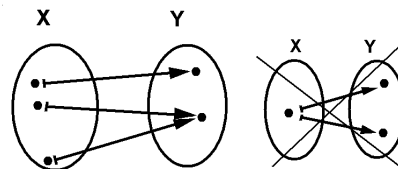
#### Vorausgesetzter Stoff — Matière dont on exige la connaissance

Funktionen und reelle Zahlen sind elementare Werkzeuge der Mathematik. In vereinfachter Version gehören sie zum Schulstoff, der vorausgesetzt wird. Es geht hier vor allem um eine kurze Repetition und dann um den Ausbau der Begriffe.

### 2.1.2 Anschaulicher Funktionsbegriff — Version simple de la notion de fonction

Wir gehen hier von einer anschaulichen Definition aus, die von der Schule bekannt sein sollte. Im Teil „Algebra“ wird im Zusammenhang mit Mengenlehre und Relationen eine allgemeinere Definition erarbeitet, auf die im Moment noch nicht zurückgegriffen werden muss. Zudem beschränken wir uns hier auf **reelle Funktionen**.

**Geg.:** Zwei Mengen  $X$ ,  $Y$ .



#### Definition:

(Anschaulich: )

Eine **Funktion**  $f$  ist gegeben durch eine Vorschrift, die jedem Element  $x \in X$  ( $X = D_f$ : **Definitionsbereich**) genau ein Element  $y \in Y$  ( $Y = W_f$ : **Wertebereich**) zuordnet.

**Reelle Funktionen** sind solche mit  $D_f \subseteq \mathbb{R}$  (reelle Zahlen).

**Problem:**

$$f : x \mapsto y = f(n) = \sin(n), \quad n \in D_f = \mathbb{N}, \quad y \in W_f = (0, 1), \quad B_f = \{y = \sin(n) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset W_f$$

$$|D_f| = |\mathbb{N}| = |B_f| < |W_f| = |(0, 1)|$$

(Später gezeigt...)

### 2.1.3 Zahlen — Nombres

Wir werden mit folgenden Zahlensystemen arbeiten:  $\mathbb{N}$  (natürliche Zahlen),  $\mathbb{Z}$  (ganze Zahlen),  $\mathbb{Q}$  (rationale Zahlen),  $\mathbb{R}$  (reelle Zahlen),  $\mathbb{C}$  (komplexe Zahlen). Diese Systeme werden wir später auch genauer behandeln. Für den Moment merken wir uns:  $\mathbb{Q}$  = Menge aller möglichen äquivalenten Klassen von Brüchen (z.B.  $\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$ ).  $\mathbb{R}$  = Menge aller möglichen Dezimalbrüche.

**Wichtige Eigenschaften von  $\mathbb{R}$ :**

- ⊗  $\mathbb{R}$  ist geordnet:  $\forall_{a,b \in \mathbb{R}} (a < b) \vee (a = b) \vee (a > b)$
- ⊗ ( $\mathbb{R}$  ist lückenlos.)  
 $\mathbb{Q}$  ist nicht lückenlos:  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \rightsquigarrow$  Lücke.
- ⊗  $\mathbb{R}$  ist dicht:  
 Zwischen zwei reellen Zahlen gibt es immer eine dritte.
- ⊗  $\mathbb{R}$  ist geordnet.  $\rightsquigarrow$   $\mathbb{R}$  lässt sich durch eine skalierte Gerade darstellen, die **Zahlengerade**.

### 2.1.4 Standardkoordinatensysteme — Systèmes de coordonnées standard

Wir werden vorerst vor allem mit einer unabhängigen Variablen  $x \in \mathbb{R}$  und einer davon abhängigen Variablen  $y = f(x) \in \mathbb{R}$  arbeiten. ( $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ) Wir brauchen somit zwei Dimensionen. Graphisch gehört dazu die Ebene  $\mathbb{R}^2$ .

Standardkoordinatensysteme sind demnach:

- ⊗ Kartesisches Koordinatensystem
- ⊗ Polarkoordinatensystem

Bekanntlich kann man mit Hilfe solcher Koordinatensysteme **Graphen** von Funktionen skizzieren, indem man sich **Wertetabellen** erstellt oder den Graphikrechner benutzt.

### 2.1.5 Einteilung der reellen Funktionen — Distinction des fonctions réelles

Folgende Einteilung ist üblich:

**Reelle Funktionen:**

- ⊗ Transzendente Funktionen
- ⊗ Algebraische Funktionen
  - Algebraisch irrationale Funktionen
  - Rationale Funktionen



- \* Gebrochen rationale Funktionen
- \* Ganzrationale Funktionen

Ganzrational bedeutet, dass die vorkommenden Ausdrücke Polynome sind, d.h. nur plus, minus und mal sowie Potenzierungen als Operationen auftreten.

Gebrochen rational bedeutet, dass die vorkommenden Ausdrücke Quotienten von Polynomen sind.

Algebraisch irrational bedeutet, dass in den vorkommenden Ausdrücken neben Quotienten von Polynomen auch Wurzeln vorhanden sind.

Transzendent bedeutet, dass in den vorkommenden Ausdrücken nicht algebraische Konstruktionen auftreten wie z.B. Sinus, Cosinus u.s.w..

### 2.1.6 Definitions- und Wertebereiche — Domaines de définition et de valeur

Bei reellen Funktionen hat man bekanntlich:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ definiert}\} \quad W_f = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in D_f : y = f(x)\}$$

$D_f$  und  $W_f$  sind häufig **Intervalle**  $I, \bar{I}, \dots$

Wir treffen folgende Intervalltypen:

- ⊗ **Abgeschlossenes** Intervall:  $[a, b] = \bar{I} = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- ⊗ **Offenes** Intervall:  $(a, b) = I = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- ⊗ **Halboffenes** Intervall:  $[a, b) = I = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$   
oder  $(a, b] = I = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
- ⊗  **$\delta$ -Umgebung**:  $U_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \mid x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$
- ⊗ **Punktierte** Umgebung:  
$$U_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \mid x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \wedge x \neq x_0\}$$
- ⊗ **Einseitig unendlich**:  $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$   
oder  $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$
- ⊗ **Beidseitig unendlich**:  $(-\infty, \infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

**Problem:** Oft sind die Wertemengen  $W_f$  nicht geometrisch klar erfassbar. Wir benutzen daher auch den Ausdruck **Bildbereich**  $B$  (mit  $W_f \subseteq B$ ) für eine Menge, die genauer fassbar ist.

**Bsp.:** Sei  $n \in \mathbb{N} \rightsquigarrow f(n) = \sin(n) \rightsquigarrow W_f = \{y = f(n) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset B = (0, 1) \subset \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow$  Struktur von  $W_f$ ? ...

### 2.1.7 Gleichheit von Funktionen — Egalité de fonctions

**Definition:** Zwei Funktionen  $f$  und  $g$  heißen **gleich** in  $I$ :  $\Leftrightarrow \forall x \in I \ f(x) = g(x)$

**Bemerkung:** In der Mathematik unterscheidet man diverse Arten von Gleichheit oder Gleichungen. Beispiele: Bestimmungsgleichungen wie  $3 + x = 4$ ,  $x = ?$ . Oder:  $f(x) = g(x)$ ,  $x = ?$ . Zuweisungen wie z.B.  $x = 7$ : Der Variablen  $x$  wird der Wert 7 zugewiesen („auf den Speicherplatz geschrieben“). Identitäten, z.B.  $\forall x \in I \ f(x) = g(x)$ . Syntaktische Identitäten, z.B. sogar gleiche Zeichenfolgen in zwei Ausdrücken. Z.B.  $(a + b)^2$  und  $a^2 + 2ab + b^2$  sind verschiedene Zeichenfolgen.

## 2.2 Einige reelle Standardfunktionen — Quelques fonctions standard réelles

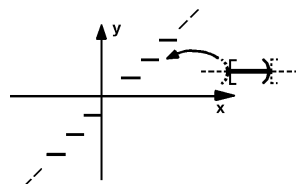
### 2.2.1 Einige algebraische Typen — Quelques types algébriques

#### Gauss-Klammer-Funktion — Fonction aux parenthèses de Gauss

$$f(x) = [x] := n, \quad x \in [n, n+1), \quad n \in \mathbb{Z}$$

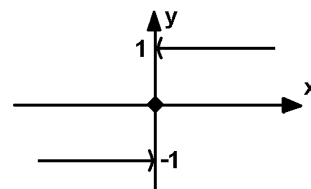
(Intervalle links abgeschlossen, rechts offen!)

$f(x)$  ist **stückweise** (auf  $[n, n+1)$ ) algebraisch definiert.



#### Signum-Funktion — Fonction signum

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



Man sieht sofort ein, indem man die verschiedenen Vorzeichenkombinationen durchgeht:

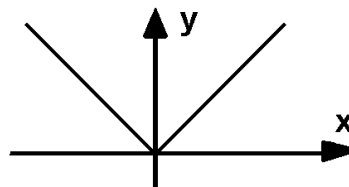
**Eigenschaft:**  $\operatorname{sgn}(x \cdot y) = \operatorname{sgn}(x) \cdot \operatorname{sgn}(y)$

#### Betrags-Funktion — Fonction de valeur absolue

**Definition:**  $f(x) = |x| := +\sqrt{x^2}$

**Satz:**

$$f(x) = |x| := x \cdot \operatorname{sgn}(x)$$



**Eigenschaften:** (Rechnen mit Beträgen:)

$$1. |x|^2 = (x \cdot \operatorname{sgn}(x))^2 = x^2, \quad (x \neq 0 \Rightarrow \operatorname{sgn}(x)^2 = 1, \quad x = 0 \Rightarrow \operatorname{sgn}(x)^2 = 0)$$

$$2. |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

**Beweis:**

$$|x \cdot y| = (x \cdot y) \cdot \operatorname{sgn}(x \cdot y) = x \cdot y \cdot \operatorname{sgn}(x) \cdot \operatorname{sgn}(y) = (x \cdot \operatorname{sgn}(x)) \cdot (y \cdot \operatorname{sgn}(y)) = |x| \cdot |y|$$

$$3. \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

(Ersetze im letzten Ausdruck  $y$  durch  $\frac{1}{y}$  )

$$4. |x \pm y| \leq |x| + |y|$$

(Auf der Zahlengeraden ablesbar. )

$$5. |x \pm y| \geq ||x| - |y||$$

(Auf der Zahlengeraden ablesbar. )

**Bemerkung:**

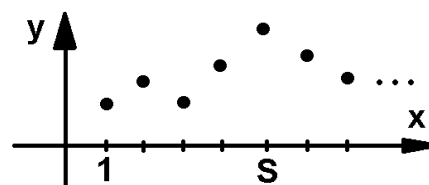
$$\operatorname{sgn}(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 0\sqrt{x^2}}}$$

### Zahlenfolgen — Suites de nombres

$f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}, f(n) = a_n$  heisst **Folge**

Folgen sind somit Funktionen  $f$  mit

$D_f = \mathbb{N}$ .



Für die Funktion als Punktmenge  $\{(n|f(n))\}$  schreiben wir abgekürzt:

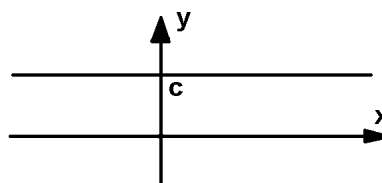
$$\{(n|f(n)) \mid f(n) = a_n\} = [a_1, a_2, a_3 \dots] = \langle a_n \rangle.$$

$a_n$  in  $\langle a_n \rangle$  nennen wir das **allgemeine Glied**.

Man unterscheidet zwischen induktiv und rekursiv definierten Folgen (vgl. Algebra-Kurs).

### Konstante Funktion — Fonction constante

$$f(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}$$



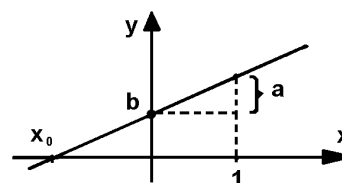
### Lineare Funktion — Fonction linéaire

$$f(x) = a \cdot x + b$$

**Steigung:**

$$\frac{\Delta(y)}{\Delta(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \tan(\alpha) = a \quad \forall x$$

Ähnliche Dreiecke  $\leadsto$  Gerade.



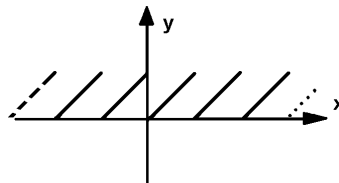
**y-Achsenabschnitt:**  $\leadsto b$

**x-Achsenabschnitt oder Nullstelle:**  $\leadsto x_0 = -\frac{b}{a}$

Graph: Gerade.

**Sägezahnfunktion — Fonction en forme de scie**

$$f(x) = x - [x]$$



→ Periodisch!

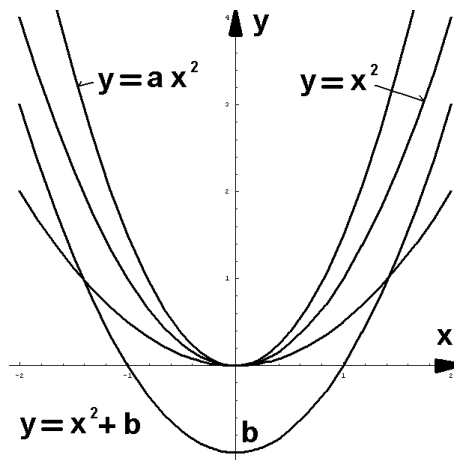
**Quadratische Funktion — Fonction quadratique**

▷  $f(x) = x^2$  **Parabel** (Normalparabel), Scheitel im Ursprung,  $f(x) = a \geq 0$  für  $x \neq 0$

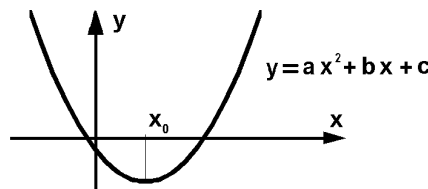
„,  $f(x) = a \geq 0$  für  $x \neq 0$

▷  $f(x) = a \cdot x^2$  Parabel, Scheitel wie vorhin (Nullstelle (NS oder NS)  $(0, 0)$ ), **Öffnung**  $a$

▷  $f(x) = a \cdot x^2 + c$  Parabel verschoben um  $c$  in  $y$ -Richtung, Scheitel in  $(0, c)$ , für  $a \cdot c < 0$  zwei NS  $x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$



▷  $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$  Parabel verschoben in  $x$ -Richtung und in  $y$ -Richtung, Symmetrieachse bei noch unbekanntem  $x_0$ ,  $y$ -Achsenabschnitt  $c$



**Bemerkung:**

$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$  heisst **Grundform**.

**Problem:** NS = ?

Sei  $x - x_0 = z$ ,  $x = z + x_0 \Rightarrow f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (z + x_0)^2 + b \cdot (z + x_0) + c = az^2 + 2azx_0 + ax_0^2 + bz + bx_0 + c = az^2 + (2ax_0 + b)z + (ax_0^2 + bx_0 + c) = h(z)$

Da die Symmetrieachse von  $f$  durch  $x_0$  geht, muss die Symmetrieachse von  $h$  durch  $z = x_0 - x_0 = 0$  gehen.  $\leadsto h(z) = h(-z) \Rightarrow (2ax_0 + b) = 0$  ( $z^2 = (-z)^2 \forall z$ ,  $z \neq -z \forall z$ )

$$\Rightarrow x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad x = z + x_0 = z - \frac{b}{2a}$$

$$\text{NS: } 0 = h(z) = az^2 + 0 \cdot z + (a(-\frac{b}{2a})^2 + b(-\frac{b}{2a}) + c) = a(z^2 + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a^2} + \frac{c}{a}) = a(z^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2})$$

$$\Rightarrow z^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2} = 0 \quad (a \neq 0) \Rightarrow z_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x_{1,2} = x_0 + z_{1,2}$$

$$= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Offensichtlich hängt es von  $\sqrt{b^2 - 4ac}$  ab, ob die **quadratische Gleichung**  $f(x) = 0$  Lösungen hat und wieviele es sind. Wir definieren daher:

**Definition:**  $D = b^2 - 4ac$  heisst **Diskriminante** der quadratischen Gleichung  $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$

**Satz:** **Vor.:**

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

**Beh.:**

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$D > 0 \rightsquigarrow$  zwei Lösungen

$D = 0 \rightsquigarrow$  eine Lösung

$D < 0 \rightsquigarrow$  keine Lösung

Nochmals zur **Bedeutung der Koeffizienten**  $a$ ,  $b$ ,  $c$ :

$$f(x) = a \cdot x^2 + c$$

$\rightsquigarrow a$ : Öffnung

$\rightsquigarrow c$ : Translation in Richtung der  $y$ -Achse

$\rightsquigarrow b$ :  $\rightsquigarrow$  ?

Wir wissen:

$$\text{Nullstellen: } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \rightsquigarrow x_m := \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b}{2a}$$

Es gilt:  $f(x_m + d) = f(x_m - d)$  (Symmetrie, nachrechnen)

$\rightsquigarrow$  Die Parabel hat in  $x_m$  ihr Maximum oder Minimum.

$\rightsquigarrow b$  beschreibt linear die Lage des Extremums  $x_m := \frac{-b}{2a}$  auf der  $x$ -Achse.

$$\rightsquigarrow y_m = f(x_m) = a x_m^2 + b x_m + c = a \left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b \left(\frac{-b}{2a}\right) + c = -\frac{b^2}{4a} + c$$

$$\rightsquigarrow (x_m, y_m) = \left(\frac{-b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c\right) \rightsquigarrow \text{Parabel, Variable } b$$

**Quadratisch ergänzen — Compléter de façon quadratique**

$$\begin{aligned} a x^2 + b x + c = 0 &\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a} x = -\frac{c}{a} \Rightarrow x^2 + 2 \frac{b}{2a} x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\ \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac} - b}{2a} \end{aligned}$$

**Scheitelpunktsform — Forme du point culminant**

$$\begin{aligned} \text{Sei } a \neq 0, f(x) &= a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a \left(x^2 + \frac{2}{2} \cdot \frac{b}{a} x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) = a \left(\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{:= -m} + \underbrace{\left(\frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)}_{:= n}\right) = a(x - m)^2 + n \rightsquigarrow \end{aligned}$$

**Formel:****Scheitelpunktsform**

$$f(x) = a(x - m)^2 + n = \frac{-D}{4a^2} \quad (= a \cdot x^2 + b \cdot x + c), \quad D = b^2 - 4ac$$

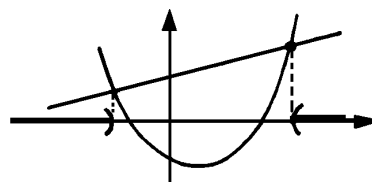
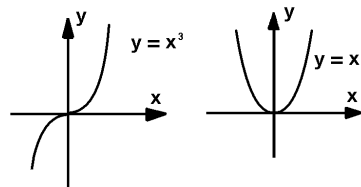
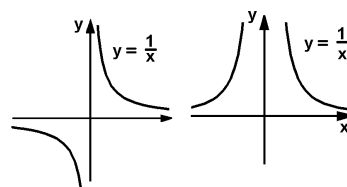
**Quadratische Ungleichungen — Inégalités quadratiques****Bsp.:**

$$4x^2 - 3x - 1 > 2x + 1$$

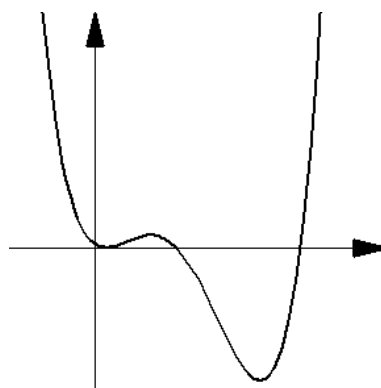
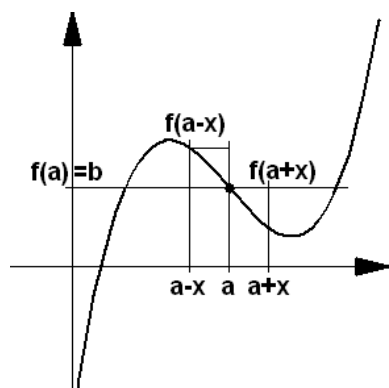
oder :

$$4x^2 - 5x - 2 > 0$$

Lösungsmenge vgl. Skizze

**Potenzfunktion — Fonction puissance****Definition:** $f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{Z}$  heisst **Potenzfunktion** $f(x) = x^3$ : Parabel 3-ter Ordnung $f(x) = x^4$ : Parabel 4-ter Ordnung $f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}$ : Parabel  $n$ -ter Ordnung $D_f = \mathbb{R}$  $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ : **Hyperbel** (1-ter Ordnung) $f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ : Hyperbel 2-ter Ordnung $f(x) = x^{-n}, \quad n \in \mathbb{N}$ : Hyperbel  $n$ -ter Ordnung $D_f = \mathbb{R}$ Eine Hyperbel besteht aus zwei **Ästen**, die durch einen **Pol** „getrennt“ sind.**Bemerkung:**

Polynome vom Grad 3 haben immer einen punktsymmetrischen Graphen, Polynome vom Grad höher als 3 jedoch nicht mehr, wie das Beispiel  $f(x) = x^4 - 12x^3 + 35x^2 - 24x$  unten rechts zeigt.



**Hinweis zur Symmetrie:**

Sei  $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$

$\leadsto$  Wendepunkt (siehe Differentialrechnung):

$$f''(x_0) = 6ax_0 + 2b = 0 \Rightarrow P(x_0, f(x_0)) = P\left(\frac{-b}{3a}, \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{cb}{3a} + d\right)$$

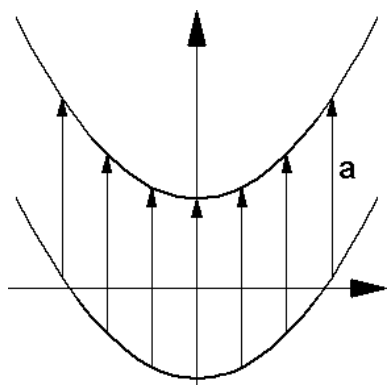
$$\text{Sei } x = \tilde{x} + x_0 \Rightarrow f_1(\tilde{x}) := f(x) - f(x_0) = f(\tilde{x} + x_0) - f(x_0) = a\tilde{x}^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)\tilde{x}$$

$f_1$  ist aus  $f$  durch Koordinatentransformation entstanden: Translation in  $y$ -Richtung  $f(x) - f(x_0)$ , Translation in  $x$ -Richtung  $\tilde{x} = x - x_0$ . Da  $f_1(\tilde{x})$  ungerade ist, ist die Symmetrie zum Ursprung nachgewiesen.

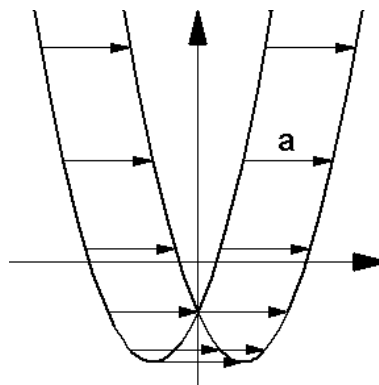
### 2.2.2 Einige Eigenschaften — Quelques qualités

**Transformationen und Geometrie — Transformations et géométrie**

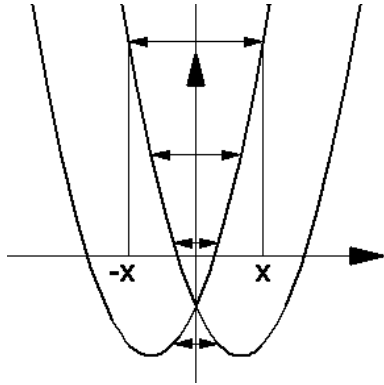
$$h(x) := f(x) + a$$



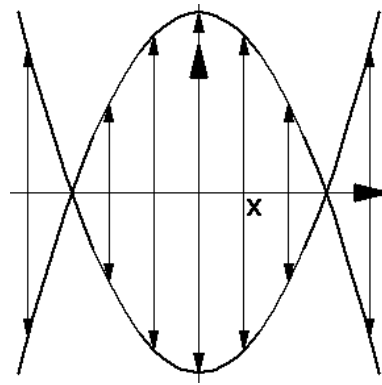
$$h(x) := f(x - a)$$



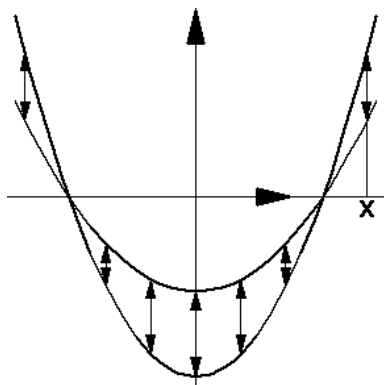
$$h(x) := f(-x)$$



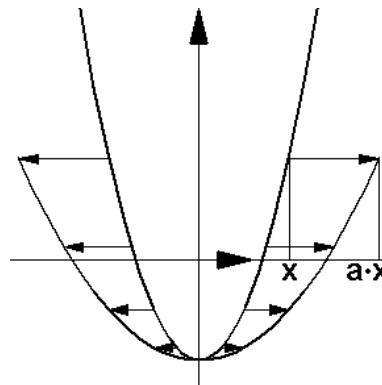
$$h(x) := -f(x)$$



$$h(x) := a \cdot f(x)$$



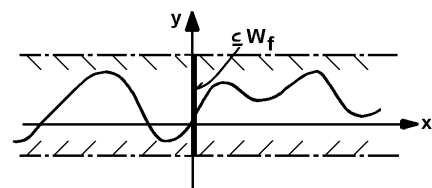
$$h(x) := -f(a \cdot x)$$



### Beschränkte Funktionen — Fonctions bornées

#### Beispiele:

- ▷  $f(x) = \sin(x), D_f = \mathbb{R}$
- ▷  $f(x) = x^2, D_f = [-1, 1]$
- ▷  $f(x) = e^{-x^2}, D_f = \mathbb{R}$



#### Definition:

$$f \text{ beschränkt} \Leftrightarrow \exists_{M \in \mathbb{R}^+} \forall_{x \in D_f} : |f(x)| \leq M$$

### Funktion mit Polen — Fonction avec des pôles

Wir betrachten die nachfolgende Skizze:

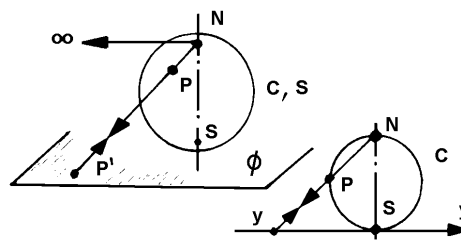


Sei  $C = \text{Kreis}$ ,

$N = \text{Nordpol}$

Die Abbildung  $y \mapsto P = C(y)$   
(resp.  $P \mapsto y$ ) ist **bijektiv** (eindeutig)

$\forall P \in C, P \neq N$



Daher benützen wir folgende Definition:

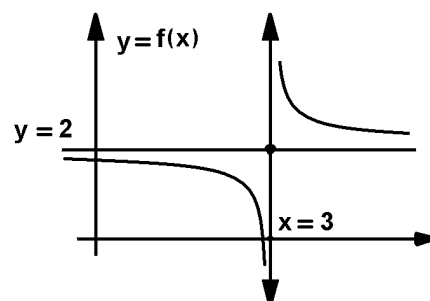
**Definition:**

$x_0$  heisst **Polstelle** von  $f$ , wenn sich  $y = f(x)$  gegen  $\pm\infty$  resp.  $P = C(y)$  gegen den Nordpol  $N$  bewegt, falls wir  $x$  gegen  $x_0$  bewegen.

**Bsp.:**

$$f(x) = \frac{1}{x-3} + 2$$

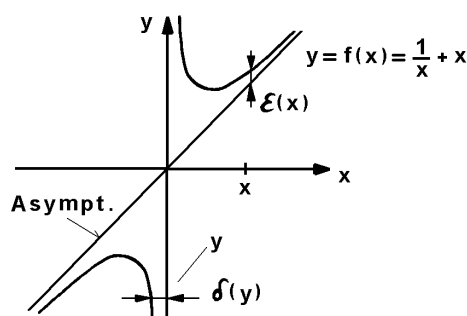
$\leadsto$  Polstelle  $x = 3$



### Funktionen mit Asymptoten — Fonctions avec asymptotes

Zeichnet man im Graphen von vornhin durch die Polstelle eine senkrechte Gerade, so stellt man fest, dass die Distanz zwischen der Funktionskurve und dieser Geraden immer kleiner wird, je grösser wir  $|y|$  werden lassen. Diese senkrechte Gerade hier ist somit eine „Schmiegegerade“ oder **Asymptote**.

Betrachtet man im Graphen von  $f(x) = \frac{1}{x-3} + 2$  die horizontale Gerade  $y = 2$ , so stellt man ebenfalls dieses Anschmiegeverhalten **asymptotisches Verhalten** fest. Man spricht hier von einer waagrechten Asymptote.



Im Graphen von  $f(x) = \frac{1}{x} + x$  dagegen tut dies die Gerade  $y = x$ .

Zu einer **exakten Definition** der Asymptote können wir erst gelangen, wenn wir den **Grenzwertbegriff** erarbeitet haben.

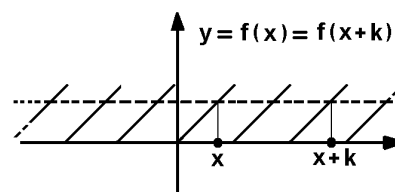
Für den Moment können wir uns aber schon merken, dass seine nicht vertikale Asymptote  $y = h(x)$  dann gegeben ist, wenn die Distanz  $|f(x) - h(x)|$  mit grösser werdendem  $x$  (oder  $-x$ ) immer kleiner wird, beliebig klein, falls man nur  $x$  (oder  $-x$ ) genügend gross macht.

Jedoch können wir schon heute Funktionen mit Hilfe von Graphikrechnern auf Hinweise auf Asymptoten untersuchen und Erfahrungen sammeln.

### Periodische Funktion — Fonction périodique

Wir kennen bereits die Sägezahnfunktion:

$$f(x) = x - [x]$$



Es gilt:  $\forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N} : f(x) = f(x+k)$ . Diese Funktion zeigt offensichtlich ein periodisches Verhalten.

Wir definieren allgemein:

**Definition:**

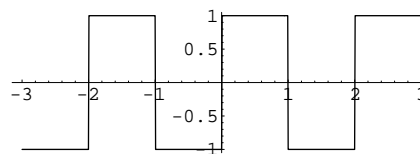
Eine Funktion heisst **periodisch** mit der Periode  $p$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N} : f(x) = f(x + kp)$$

**Bsp.:**  $f(x) = \sin(x)$ ,  $f(x) = \cos(x)$ ,  $f(x) = x - [x] \dots$

**Bsp.:**

$$f(x) = \operatorname{sgn}(\sin(\pi x))$$

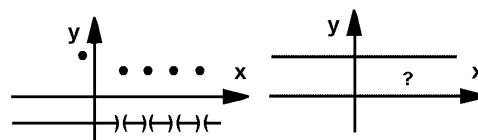


### Punktweise definierte Funktion — Fonction définie par points

**Beispiele:**

$$\triangleright \quad f(x) = \begin{cases} 5 & x \in \mathbb{N} \\ -2 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\triangleright \quad d(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$



Im letzten Beispiel ist der Funktionswert  $d(x)$  je nach Zahlentyp des Wertes von  $x$  anders definiert. Das führt hier zu einem **unendlich dichten Kamm**. Es ist prinzipiell unmöglich (auch für einen Graphik-Rechner!) den Graphen dieser Funktion sinnvoll zu zeichnen (auch für einen Graphik-Rechner!). Man sieht hier eindrucksvoll die Grenzen der Darstellbarkeit.

### Diskret definierte Funktion — Fonction définie de manière discrète

**Definition:**

Ein Punkt  $x \in M$  heisst **isoliert**, wenn zwischen  $x$  und dem nächstgelegenen Punkt  $y \in M$  ein positiver Abstand  $d > 0$  existiert. ( $x$  ist also vom Rest der Menge  $M$  durch einen gewissen Abstand getrennt.)

**Definition:**

$M = D_f$  heisst **diskret**, wenn diese Menge nur aus isolierten Punkten besteht.

**Beispiele für diskrete Mengen:**

$$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \{1, 2, 3, 4, 5\} \dots$$

**Definition:** **Diskrete Funktionen** sind Funktionen, deren Graph eine diskrete Menge bildet.

**Konsequenz:**

Ist  $D_f$  diskret, so ist  $f$  diskret.

Ein Beispiel für diskrete Funktionen sind die Zahlenfolgen:

**Definition:** **Zahlenfolgen** sind Funktionen mit  $D_f = \mathbb{N}$ .

**Bsp.:**

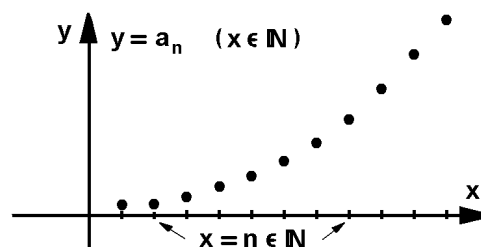
$$\begin{aligned} \triangleright f(x) &= f(n) = a_n = n^2, \quad x = n \in \mathbb{N} \\ \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{N}\} &= \{(n, a_n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \\ &= \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25), \dots\} \\ &:= [1, 4, 9, 16, 25, \dots] \end{aligned}$$

**Allgemeines Glied:**

$$\langle a_n \rangle = \langle n^2 \rangle$$

**Bsp.:**  $\langle a_n \rangle = \langle (-1)^n + \frac{1}{n} \rangle \leadsto$  funktional.

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \leadsto \text{rekursiv.}$$



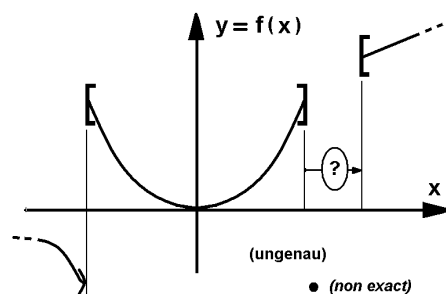
### Stückweise definierte Funktion — Fonction définie par morceaux

Man kann Funktionen auf verschiedenen disjunkten Teilintervallen einzeln definieren:

**Bsp.:**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x} + 1 & x < -2 \\ x^2 & -2 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2}x + 5 & 3 \leq x \end{cases}$$

Für  $2 \leq x < 3$  ist die Funktion nicht definiert.



### Verkettete Funktion — Fonction composées

**Bsp.:** (Vgl. Algebra!)

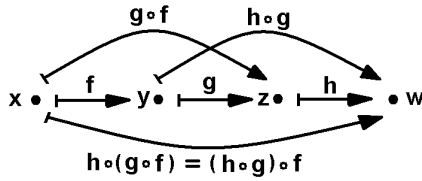
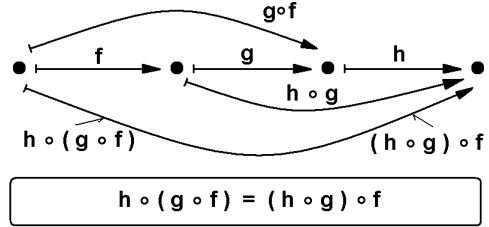
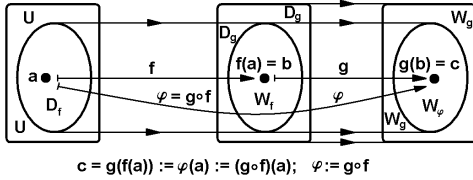
$$x \xrightarrow{f} y = f(x) \xrightarrow{g} z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) \xrightarrow{h} w = h(z) = h(g(f(x))) = (h \circ (g \circ f))(x)$$

Speziell:

$$\begin{aligned} x \xrightarrow{f} y = f(x) &= 2x + 3 \xrightarrow{g} z = g(y) = \sin(y) = g(f(x)) = \sin(2x + 3) = (g \circ f)(x) \xrightarrow{h} w \\ w &= h(z) = e^z = h(g(y)) = e^{\sin(y)} = h(g(f(x))) = e^{\sin(2x+3)} = h \circ (g \circ f)(x) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} x &\xrightarrow{f} y = f(x) = \frac{x}{2\pi} + \frac{1}{2} \xrightarrow{g} z = g(y) = y - [y] = g(f(x)) = \left(\frac{x}{2\pi} + \frac{1}{2}\right) - \left[\frac{x}{2\pi} + \frac{1}{2}\right] = (g \circ f)(x) \xrightarrow{h} w \\ w &= h(z) = 4z - 2 = h(g(y)) = 4([y]) - 2 = h(g(f(x))) = 4\left(\left(\frac{x}{2\pi} + \frac{1}{2}\right) - \left[\frac{x}{2\pi} + \frac{1}{2}\right]\right) - 2 = h \circ (g \circ f)(x) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} y &= f(x), \quad z = g(y) = g(f(x)) =: (g \circ f)(x) \\ w &= h(z) = h(g(y)) = (h \circ g)(y) \quad (*) \\ &= (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x) \\ (*) &= (h \circ g)(y) = h(g(y)) = h(g(f(x))) \\ &= h((g \circ f)(x)) = (h \circ (g \circ f))(x) \\ &\Rightarrow ((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (h \circ g) \circ f = (h \circ (g \circ f))$$

Wie man aus dem Beispiel erkennt, kann man mit Hilfe der Gauss-Klammer-Funktion und der Verkettung beliebige Sägezahnfunktionen aufbauen. Das wird wichtig, wenn man mit Computeralgebra-Programmen (z.B. mit *Mathematica*) solche Funktionen bearbeiten will.

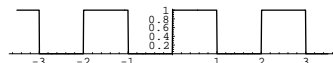
### Einige Beispiele — Quelques exemples

1. Es gilt:

$$\text{Max}(a, b) = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2} = \frac{1}{2} (a+b + (a-b) \cdot \text{sgn}(a-b))$$

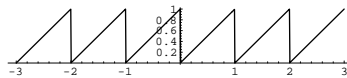
$$\text{Min}(a, b) = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2} = \frac{1}{2} (a+b - (a-b) \cdot \text{sgn}(a-b))$$

2.



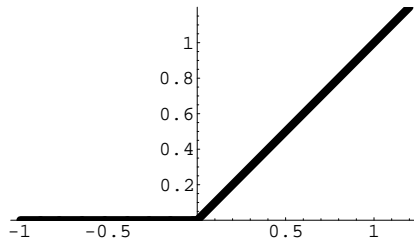
$$s_1(x) := \left[ \frac{\sin(\pi x)}{2} + 1 \right]$$

3.



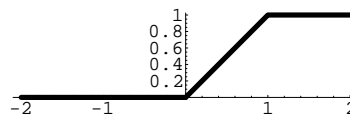
$$s_2(x) := x - [x]$$

4.



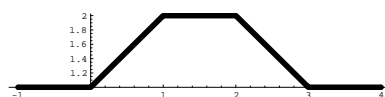
$$h(x) := \frac{|x| + x}{2}$$

5.



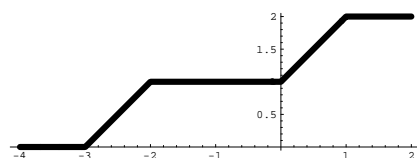
$$v(x) := h(x) - h(x-1)$$

6.



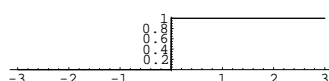
$$v_1(x) := v(x) + v(-x + 3)$$

7.



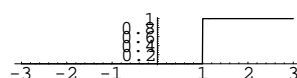
$$v_2(x) := v(x) + v(x + 3)$$

8.



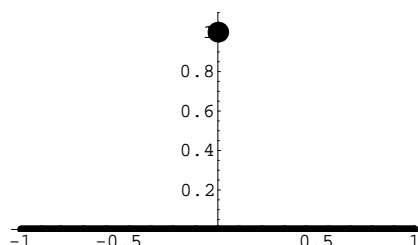
$$H(x) := \operatorname{sgn}\left(\frac{|x| + x}{2}\right)$$

9.



$$H_1(x) := H(x - 1)$$

10.



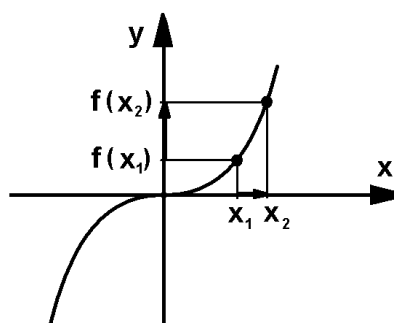
$$u(x) := 1 - \operatorname{sgn}^2(x)$$

### Monotone Funktionen — Fonctions monotones

Bsp.:

$$f(x) = x^3 \leadsto x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Falls  $x$  wächst, so wächst auch  $y = f(x)$ .



Solche Verhaltensweisen fassen wir in strengen Definitionen:

**Definition:** $f$  heißt:⊙ **monoton wachsend**

$$\Leftrightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

⊙ **strengmonoton wachsend**

$$\Leftrightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

⊙ **monoton fallend**

$$\Leftrightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

⊙ **strengmonoton fallend**

$$\Leftrightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Z.B.

▷  $f(x) = 7$  fällt und wächst monoton!

▷  $f(x) = x^3$  wächst streng monoton .

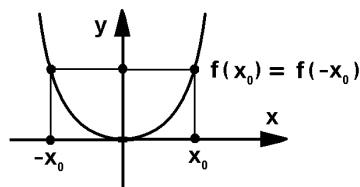
▷  $f(x) = x^2$  fällt streng monoton für  $x \leq 0$  und wächst streng monoton für  $x \geq 0$  .

### Gerade und ungerade Funktionen — Fonctions paires et impaires

Funktionen, deren Graph symmetrisch zur  $y$ -Achse ist, nennen wir **gerade**

Bsp.:

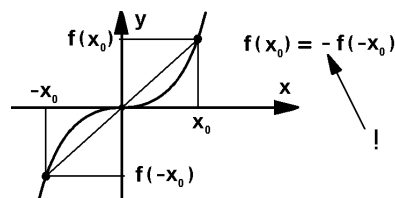
$$f(x) = x^2 = (-x)^2 = f(-x)$$



Funktionen, deren Graph symmetrisch zum Ursprung ist, nennen wir **ungerade**

Bsp.:

$$f(x) = x^3 = -(-x)^3 = -f(-x)$$



**Definition:**

$f$  heisst **gerade**

$$\Leftrightarrow \forall x \in D_f \quad f(x) = f(-x)$$

**Definition:**

$f$  heisst **ungerade**

$$\Leftrightarrow \forall x \in D_f \quad f(x) = -f(-x)$$

Es gilt:

1.  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $f, g$  gerade

$$\Rightarrow \alpha f + \beta g \text{ gerade}, f \cdot g \text{ gerade}, \frac{f}{g} (g(x) \neq 0) \text{ gerade}$$

2.  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $f, g$  ungerade

$$\Rightarrow \alpha f + \beta g \text{ ungerade}, f \cdot g \text{ ungerade}, \frac{f}{g} (g(x) \neq 0) \text{ ungerade}$$

### Ganzrationale Funktionen — Fonctions polynomiales

**Geg.:** Polynom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 x^0 = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

Es gilt :  $(\dots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \dots + a_1)x + a_0$

(**Horner**-Schema. Mit dieser Darstellung kommt man bei der Berechnung mit wesentlich weniger arithmetischen Operationen aus.)

$a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ : **Koeffizienten** des Polynoms .

$n$ : **Grad** des Polynoms ( $p_{\text{grad}}$ ) .

**Ganzrationale Funktionen** sind solche, die durch ein Polynom gegeben sind.

$$\leadsto f(x) = p(x), \quad D_f = \mathbb{R}.$$

Für Polynome gilt der **Hauptsatz der Algebra** (vgl. Teil Algebra). Obwohl die komplexen Zahlen hier nicht behandelt worden sind, ist dieser Satz nachstehend wiedergegeben. Er ist uns auch für reelle Funktionen nützlich.

**Satz:** (Hauptsatz der Algebra)

**Vor.:**

$p(x)$  = Polynom mit Grad  $n$ .

**Beh.:**

$p(x)$  hat in  $\mathbb{C}$   $n$  NS  $x_i$ .

$\leadsto p(x)$  hat in  $\mathbb{R}$   $m \leq n$  NS.

$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$  ( $\leadsto x_1, \dots, x_n$  NS)

$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \leadsto$  **Linearfaktorenzerlegung**

**Speziell:**

$n = 2$ :  $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 + a(-x_1 - x_2)x + ax_1x_2$   
 $\Rightarrow a_1 = b = -a(x_1 + x_2) = -a_0(x_1 + x_2), \quad a_0 = c = ax_1x_2 = a_2x_1x_2$  (Vieta!)

**Bsp.:**  $p(x) = x^2 + 3x - 4, \quad x_1, x_2 = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases} \quad (x - 1)(x + 4) = x^2 + 3x - 4$

### Gebrochen rationale Funktionen — Fonctions rationnelles fractionnaires

Seien  $p(x), q(x)$  Polynome.

**Definition:**  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  heisst **gebrochen rationale Funktion**

**Bsp.:**  $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x + 9}{x^2 - 8x - 3}$

Falls  $\text{pgrad}(p(x)) > \text{pgrad}(q(x))$  gilt, kann man  $p(x)$  durch  $q(x)$  dividieren, wobei ein Rest  $r(x)$  übrigbleiben kann mit  $\text{pgrad}(r(x)) < \text{pgrad}(q(x))$ .

$\leadsto f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = h(x) + \frac{r(x)}{q(x)}, \quad \text{pgrad}(r(x)) < \text{pgrad}(q(x))$

**Bsp.:**  $\frac{9 + 2x - 4x^2 + x^3}{-3 - 8x + x^2} = 4 + x + \frac{21 + 37x}{-3 - 8x + x^2} = 4 + x + R(x)$

$4 + x \leadsto$  Asymptote,  $R(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty)$

**Bemerkung:**

Da rationale Funktionen nur endlich viele Nullstellen haben (beschränkt durch den Grad des Zählerpolynoms), können periodische Funktionen nicht rational sein.

**Satz:** Eine periodische Funktion ist nicht rational.

### 2.2.3 Umkehrabbildungen — Applications inverses

#### Begriff — Notion

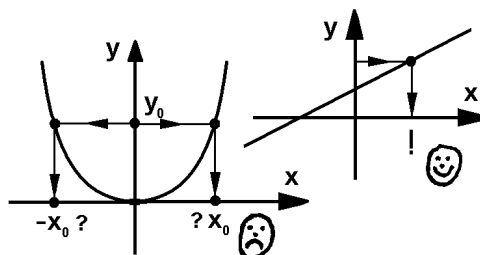
**Bsp.:**

$f(x) = f(-x) = x^2$  ist nicht bijektiv :

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & x^2 \\ -x & \xleftarrow{f} & \end{array}$$

$f(x) = y = ax + b$  hingegen ist bijektiv

$$x = \frac{y - b}{a}$$



Bei der Behandlung der Abbildungen (vgl. Teil Algebra) wird die Umkehrabbildung genau erklärt. Hier nur kurz: Wird eine Abbildung  $A \mapsto B$  durch die Menge  $\{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$  gegeben, so definiert die Menge  $\{(b, a) \mid a \in A \wedge b \in B\}$  die **Umkehrabbildung**.

Ist  $f$  bijektiv, so ist die Umkehrabbildung  $f^{-1}$  wieder Funktion mit  $D_{f^{-1}} = W_f$ .

$$\leadsto \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & y = f(x) \\ = f^{-1}(y) & \xleftarrow{f^{-1}} & \end{array} \quad \leadsto \begin{array}{l} x = f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) \\ y = f(x) = f(f^{-1}(y)) \end{array}$$

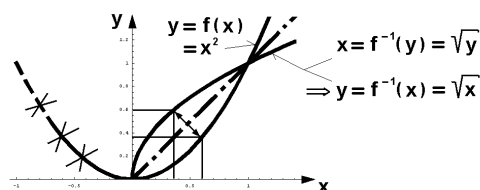
Manchmal wird  $f$  erst durch **Einschränkung** von  $D_f$  bijektiv.

**Bsp.:**  $f(x) = x^2$ ,  $D_f = \mathbb{R}_0^+$

#### Beispiel Quadratwurzel — Exemple racine carrée

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & y = x^2 \\ x = \sqrt{y} & \xleftarrow{f^{-1}} & y \end{array}$$

$$\leadsto f^{-1}(y) = x = +\sqrt{y}$$

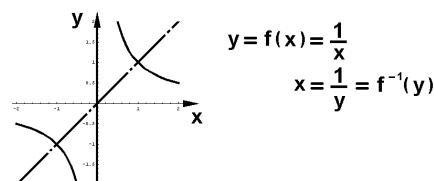
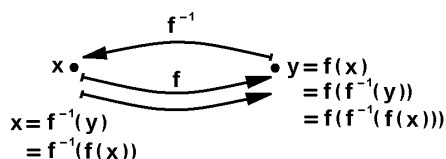


#### Darstellungsproblem, Variablenwechsel — Problème de représentation, changement de variable

**Problem:** Oben war  $x$  die unabhängige Variable von  $f$  und  $y$  die abhängige Variable  $y = f(x)$ . Jedoch war  $y$  die unabhängige Variable von  $f^{-1}$ . Sowas ist manchmal ungeschickt: Besonders dann, wenn zwecks Vergleich der Graph von  $f$  und derjenige von  $f^{-1}$  in einem Diagramm dargestellt werden sollen. Dann ist es erforderlich, auch bei  $f^{-1}$   $x$  als unabhängige Variable einzuführen, d.h. bei  $f^{-1}$  **die Variablen zu vertauschen**.

Vertauschen der Variablen bedeutet aber vertauschen der Axen, d.h. Spiegelung an der Geraden, die den ersten Quadranten halbiert.





$$\leadsto y = f(x) = f(f^{-1}(f(x))), \quad f = f \circ (f^{-1} \circ f) = f \circ f^{-1} \circ f, \quad f^{-1} = f^{-1} \circ f \circ f^{-1} \dots$$

(Abbildungen sind assoziativ, vgl. Algebra. )

**Speziell:**  $f(x) = \frac{1}{x} = y \Rightarrow x = \frac{1}{y}$   
 $\Rightarrow f(x) = f^{-1}(x)$  (nach Variablenwechsel ).

**Satz:** Bei einer streng monotonen Funktion ist die Umkehrabbildung wieder eine Funktion mit  $W_f = D_f$ .

**Beweis:** Bei strenger Monotonie ist die Injektivität offensichtlich.

## 2.2.4 Transzendente Funktionen — Fonctions transcendentes

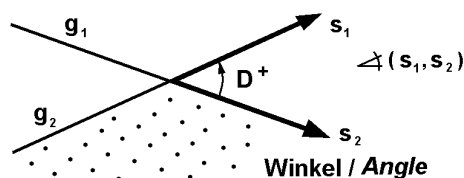
### Elementare Begriffe — Notions élémentaires

**Problem:** Nach langen Schuljahren stellen wir uns nun eine Frage: **Was ist ein Winkel** und was ist das **Mass eines Winkels**? Vergleichbar sind die Fragen: Was ist eine Fläche und was ist das Mass einer Fläche? — Flächen sind zum Beispiel ein Kreis, ein Quadrat oder ein Dreieck in der Ebene. Flächen haben also eine Form. Das Mass kann  $1 m^2$  sein. 1 ist eine Zahl. Wie ist das nun entsprechend beim Winkel und beim Winkelmass?

Hören wir dazu Euklid: Euklid sagt: Zwei nicht parallele Geraden zerschneiden eine Ebene in vier Winkel. — Ein **Winkel** ist demnach eines dieser vier von zwei Geraden ausgeschnittenen Ebenenstücke. Ob wir die Ränder dazu zählen oder nicht — das lassen wir vorerst einmal offen. Dass aber ein Winkel ein Teil einer Ebene ist, werden wir unverzichtbar gebrauchen, wenn es darum geht, dem Winkel einen Richtungsvektor zuzuordnen.

**Problem:**

Durch zwei von einem Punkt ausgehende Strahlen  $s_1$  und  $s_2$  werden zwei Winkel definiert:  $\angle(s_1, s_2)$  und  $\angle(s_2, s_1)$ .  
 $(\angle(s_1, s_2) \leadsto \text{Drehe } s_1 \text{ um den Schnittpunkt } S \text{ in } s_2.)$



**Orientierung:** Positiv in Richtung Gegenuhrzeigersinn.

### Messung des Winkels :

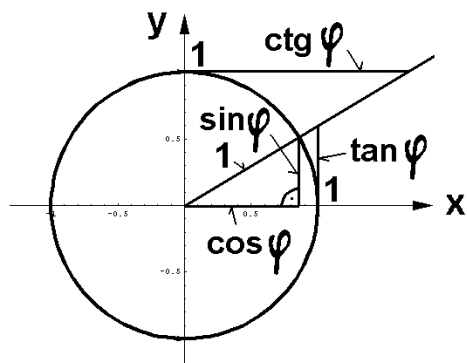
Idee: Unterteile den Winkel in kongruente Teile.

Altes Babylon: Ca. 360 Tage pro Jahr  $\leadsto 360^\circ$  (Altgrad) im Vollwinkel. (Der Sternhimmel verschiebt sich pro Tag um ca. ein Grad.) „Moderner“ Neugrad: 100 Teile statt 90 Teile im rechten Winkel.

Für die Mathematik ist das **Bogenmass** besser geeignet: Messe als Winkelgrösse die Länge des Bogens auf dem Einheitskreis. (In der Physik verwendet man dazu die überflüssige künstliche Einheit **Radian**.)

### Winkelfunktionen — Fonctions trigonométriques

Hier gehen wir von der Geometrie aus und definieren vorerst die Winkelfunktionen (trigonometrische Funktionen) geometrisch am Einheitskreis. Von der mathematischen Problematik der Winkel- und Längenmessung sehen wir vorerst einmal ab. (Messung  $\leadsto$  Physik.)



Siehe Skizze :

$\alpha \leadsto$  Standard: Bogenmass

**Sinus:**  $\sin(\alpha) = \frac{b}{c}$

**Cosinus:**  $\cos(\alpha) = \frac{a}{c}$   
 $\alpha$ : Bogen  $\leadsto$  arcus.

**Secans:**  $\sec(\alpha) := \frac{1}{\cos(\alpha)}$

**Cosecans:**  $\csc(\alpha) := \frac{1}{\sin(\alpha)}$

**Tangens:**  $\tan(\alpha) := \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

**Cotangens:**  $\cot(\alpha) = \operatorname{ctg}(\alpha) := \frac{1}{\tan(\alpha)}$

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \quad (\text{Pythagoras})$$

### Graphen:

$$\sin(\alpha), \cos(\alpha) \in [0, 1]$$

$$\text{NS: } \sin, \tan \leadsto \alpha = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos, \cot \leadsto \alpha = n\pi + \frac{\pi}{2}$$

Polstellen :

$$\tan \leadsto \alpha = n\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\cot \leadsto \alpha = n\pi$$

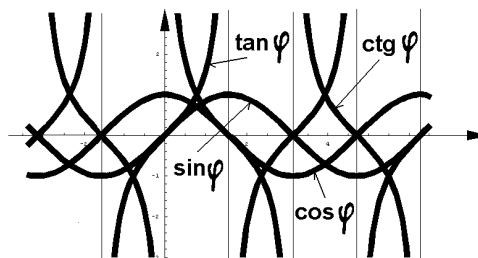
**Periodizität :**

$$\sin(\alpha) = \sin(\alpha + 2n\pi)$$

$$\cos(\alpha) = \cos(\alpha + 2n\pi)$$

$$\tan(\alpha) = \tan(\alpha + n\pi)$$

$$\cot(\alpha) = \cot(\alpha + n\pi)$$



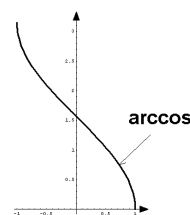
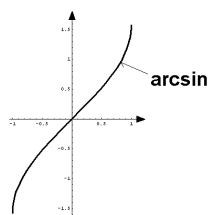
**Bemerkung:**

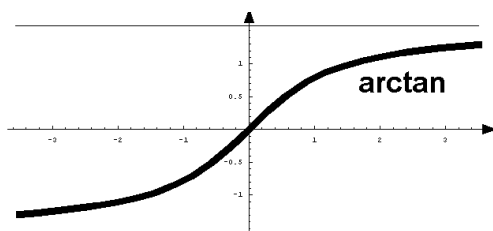
Trigonometrische Funktionen sind als periodische Funktionen nicht rational.

### Arcusfunktionen — Fonctions circulaires inverses

Auf gewissen eingeschränkten Bereichen sind die trigonometrischen Funktionen bijektiv und somit dort umkehrbar.

D.h.  $f^{-1}$  ist bereichsabhängig. Wir wählen als **Standardbereich** jeweils den Bereich um den Ursprung oder unmittelbar rechts davon.  
 $\leadsto$  **Arcusfunktionen.**

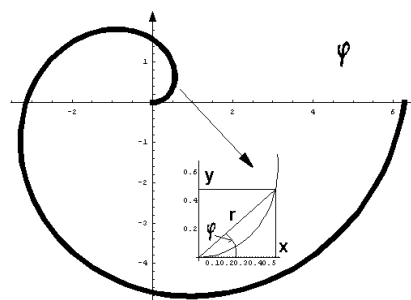




### Anwendung bei Polarkoordinatensystemen — Application pour les systèmes de coordonnées polaires

$$P = P(x, y) = P(r, \varphi) \rightsquigarrow$$

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\varphi) \\ y &= r \sin(\varphi) \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \cot(\alpha) &= \cot(\alpha + n\pi) \end{aligned}$$



Bsp.:

$$\begin{aligned} r : \varphi &\mapsto r(\varphi) = \varphi & (\sim \text{Spirale}) \\ r : \varphi &\mapsto r(\varphi) = \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) & (\sim \text{Cartinoide}) \end{aligned}$$

### Exponentialfunktion — Fonction exponentielle

Bsp.:  $f(n) = 2^n, \quad n \in \mathbb{Z}$

$\rightsquigarrow$  Wertetabelle:

$n$	-4	-2	0	1	2	4	
$f(n)$	$2^{-4} = \frac{1}{16}$	$2^{-2} = \frac{1}{4}$	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^4 = 16$	u.s.w. .

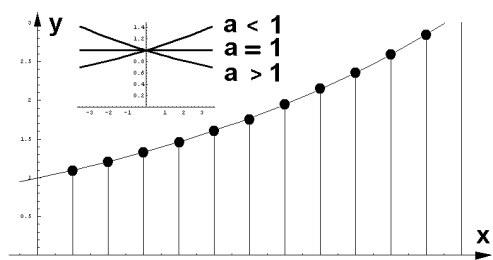
Wir definieren allgemeiner:

**Definition:**

$f(x) = a^x$  heisst **Exponentialfunktion**

$a \rightsquigarrow$  **Basis** ( $a > 0$ )

$x \rightsquigarrow$  **Exponent**



$a^x \rightsquigarrow$  definiert für  $x \in \mathbb{N}$

$x = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad m \in \mathbb{N}$

$\rightsquigarrow a^x = a^{\frac{n}{m}} := (a^n)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$  definiert

$x \notin \mathbb{Q} \rightsquigarrow x$  annähern durch  $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$

$\rightsquigarrow a^x$  annähern durch  $a^{\frac{n}{m}} \in \mathbb{Q}$

(Annäherungsprozesse vgl. Ausführungen über Folgen und Reihen. )

**Wichtig:**

### Eulersche Exponentialfunktion

$\leadsto f(x) = e^x$ ,  $e \approx 2.718281\dots$ ,  $e \notin \mathbb{Q}$ ,  $e \in \mathbb{R}$  (**Eulersche Zahl**)

Nachfolgend einige bekannte Regeln für das Rechnen mit Potenzen:

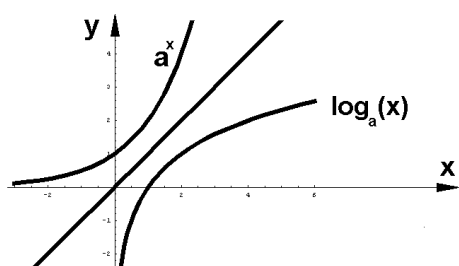
**Regeln:**

1.  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2.  $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
3.  $a^0 = 1$
4.  $a^1 = a$
5.  $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ ,  $a \neq 0$
6.  $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$
7.  $a > 1 \wedge x > 0 \Rightarrow a^x > 1$
8.  $a > 0 \Rightarrow \forall_x a^x > 0$

### Logarithmusfunktion — Fonction logarithme

Sei  $a > 1$ ,  $x < y$ ,  $x + d = y$ ,  $d > 0 \leadsto a^y = a^{x+d} = a^x \cdot a^d > a^x \Rightarrow a^x < a^y \leadsto a > 1 \Rightarrow a^x$  streng monoton wachsend.

Ebenso:  $0 < a < 1 \Rightarrow a^x$  streng monoton fallend.



**Konsequenz:**

- 1)  $f(x) = a^x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1 \Rightarrow f^{-1}(x)$  existiert für  $x > 0$ . Es ist:  $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}_0^+$
- 2)  $f(x) = a^x = y$  monoton wachsend  $\Rightarrow f^{-1}(y) = \log_a(x)$  ebenfalls monoton wachsend

**Definition:**

$$f(x) = a^x$$

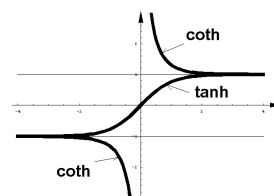
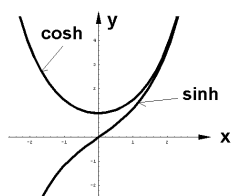
$$\leadsto f^{-1}(x) \text{ heisst } \mathbf{Logarithmusfunktion} \text{ zu Basis } a$$

**Speziell:**  $\log_e(x) := \ln(x)$  heisst **Logarithmus naturalis**.

Die folgenden Gesetze oder Regeln oder Eigenschaften beweist man durch Rückgriff auf die Exponentialfunktionen:

**Regeln:**

1.  $x = \log_a(a^x) = a^{\log_a(x)}$
2.  $\log_a(a) = 1$
3.  $\log_a(1) = 0$
4.  $\log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(x \cdot y)$  (log: bji.!) )
5.  $\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$  ( $\leadsto$  Basiswechsel! )  
 $x = b^{\log_b(x)}, x = b^{\log_b(x)} = a^{\log_a(x)} = (b^{\log_b(a)})^{\log_a(x)} \dots$   
 $= b^{\log_b(a) \cdot \log_a(x)} \Rightarrow \log_b(x) = \log_b(a) \cdot \log_a(x)$   
(Monotonie!)
6.  $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x)$   $\log_a(x \cdot x) = \log_a(x) + \log_a(x) \dots$

**Hyperbolische Funktionen — Fonction hyperboliques****Definition:****Sinus hyperbolicus:**

$$\sinh(x) = sh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

**Cosinus hyperbolicus:**

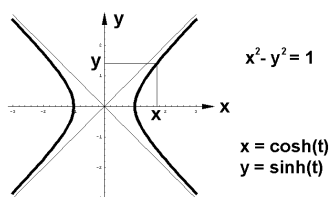
$$\cosh(x) = ch(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

**Tangens hyperbolicus:**

$$\tanh(x) = th(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

**Cotangens hyperbolicus:**

$$\coth(x) = cth(x) := \frac{1}{\tanh(x)}$$

**Bemerkung:**

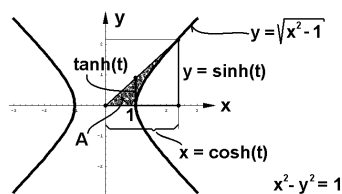
Vergleiche mit der Hyperbel  $x^2 - y^2 = 1$   
( Sei  $x = \cosh(t)$ ,  $y = \sinh(t)$ )

$$x = \cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad y = \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

$$x^2 - y^2 = \cosh^2(t) - \sinh^2(t)$$

$$= \left( \frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^2 - \left( \frac{e^t - e^{-t}}{2} \right)^2$$

$$= \frac{1}{4} (e^{2t} + 2e^t e^{-t} + e^{-2t} - e^{2t} + 2e^t e^{-t} - e^{-2t}) \Rightarrow x^2 - y^2 = \frac{1}{4} 4e^{t-t} = e^0 = 1$$



**Konsequenz:**  $\leadsto x^2 - y^2 = \cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$

Nach Definition gilt:  $\tanh(t) = \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)}$

$\leadsto \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)} = \tanh(t) = \frac{\tanh(t)}{1} \leadsto \tanh$  richtig in der Skizze.

$A = \frac{t}{2} = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arsinh}(y)$  Siehe Integralrechnung Seite 138.

Aus der Definition kann man ablesen:

**Folgerungen:**

1.  $f(x) = \sinh(x) \leadsto$  ungerade Funktion
2.  $f(x) = \cosh(x) \leadsto$  gerade Funktion
3.  $f(x) = \tanh(x) \leadsto$  ungerade Funktion
4.  $f(x) = \coth(x) \leadsto$  ungerade Funktion

5. **Zusammenhang:**

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$$

6. **Zusammenhang:**

$$\cosh^2(t) + \sinh^2(t) = \cosh^2(2t)$$

**Bemerkung:**

Anwendung: Funktionsgleichung für die Kettenlinie:

$$f(x) = y = \frac{1}{a} \cosh(a(x - x_0) + b)$$

Kurvenlänge:

$$L = \frac{\sinh(a(x_2 - x_0)) - \sinh(a(x_1 - x_0))}{a}$$

$$\begin{aligned} \text{Sei } u = e^x > 0 &\Rightarrow y = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{u - \frac{1}{u}}{2} \Rightarrow u^2 - 2yu - 1 = 0 \\ \Rightarrow u_{1,2} &= \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2}, \quad u = e^x > 0 \Rightarrow u = e^x = \frac{2y + \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y + \sqrt{y^2 + 1} \\ \Rightarrow x &= \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) = \sinh^{-1}(y) := \operatorname{arsinh}(y) \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise kann man weitere Formeln herleiten:  $\leadsto$

**Folgerungen:**

1.  $\sinh^{-1}(x) := \operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
2.  $\cosh^{-1}(x) := \operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1$
3.  $\tanh^{-1}(x) := \operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad |x| < 1$
4.  $\coth^{-1}(x) := \operatorname{arcoth}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad |x| > 1$

## 2.3 Reelle Zahlen und Folgen — Nombres réels et suites

### 2.3.1 Darstellungsarten — Façons de représentation

**Dezimalbrüche — Fractions décimales**

In 2.1.3 auf Seite 4 haben wir die reellen Zahlen bereits getroffen. Sie bilden unsere wichtigste Grundmenge für Definitions- und Wertebereiche.

Von früher wissen wir, dass die reellen Zahlen diejenigen Zahlen sind, die als **Dezimalbrüche** darstellbar oder vorstellbar sind. Z.B.  $\pi$  oder  $e$  (**Eulersche Zahl**):

$$\pi = 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164 \dots$$

$\pi$  ist nicht periodisch! Ebenso:

$$e = 2.718281828459045235360287471352662497757247093699959574966967627724077 \dots$$

Weiter sind bekanntlich die rationalen Zahlen genau diejenigen Zahlen, die sich auch als **periodische Dezimalbrüche** schreiben lassen und umgekehrt. Die Periode kann dabei auch 0 sein. Z.B.:

$$\frac{1}{4} = 0.25 = 0.250000000 \dots \quad \text{oder} \quad \frac{1}{7} = 0.142857142857142857 \dots$$

$\frac{a}{b} \rightsquigarrow$  Periodenlänge  $< b$  (Wiederholung der Ziffern bei der Division, Vorrat beschränkt!).

Oder:

$$\begin{aligned} x = 0.333 \dots &\Rightarrow 10x = 3.333 \dots \Rightarrow 10x - x = 9x = 3.333 \dots - 0.333 \dots = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \\ &\Rightarrow 3x = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1 = 3 \cdot 0.333 \dots = 0.999 \dots \Rightarrow 1 \stackrel{?}{=} 0.999 \dots ? \end{aligned}$$

Stimmt das:  $1 = 0.999 \dots$ ? — Das bedarf einer Erklärung. Wir müssen über die reellen Zahlen mehr in Erfahrung bringen!

Wir merken uns:

**Wichtig:**

$x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x$  darstellbar als unendlicher Dezimalbruch .

$x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x$  darstellbar als unendlicher periodischer Dezimalbruch .

**Bemerkung:**

Statt Dezimalbrüche (im Dezimalsystem, Basis 10) kann man auch **p-adische Brüche** (Basis  $p$ ) mit beliebigem  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p > 1$  verwenden.

**Kettenbrüche — Fractions continues**

Beispiel eines **Kettenbruchs**:

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}} := 1 + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \dots (= \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}})$$

$$\leadsto \text{Es gilt: } x = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Da sicher gilt  $x \geq 0$ , kommt nur die Lösung  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  in Frage.

Oder:

$$x = 1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \dots}}}} = 1 + \left\lfloor \frac{1}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{4} \right\rfloor + \dots \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$$

Interessanterweise gilt hier z.B.:

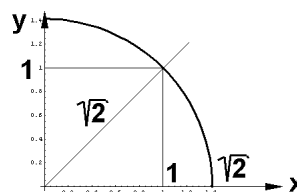
**Lemma:**  $\sqrt{2}, \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$

Indirekter Beweis für  $\sqrt{2}$ :

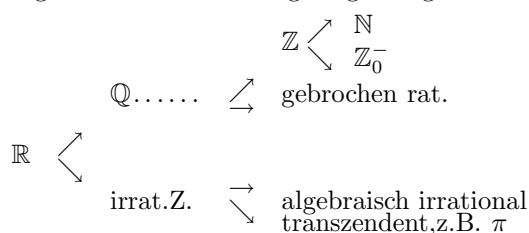
Annahme:  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ,  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$  gekürzter Bruch,  $p, q \in \mathbb{N}$  (teilerfremd).  $\Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow p$  gerade  $\Rightarrow p = 2k$ ,  $k \in \mathbb{N} \Rightarrow 2q^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow q$  gerade  $\Rightarrow p, q$  haben den gemeinsamen Teiler 2 ( $\text{ggT}(p, q) > 1$ )  $\Rightarrow$  Widerspruch!

$\leadsto$  Annahme  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$  falsch.

Bemerkenswert ist, dass sich einerseits  $\sqrt{2}$  resp.  $\sqrt{5}$  sofort als geometrische Strecke bestimmen lässt (Pythagoras:  $1^2 + 1^2 = \sqrt{2}^2 = 2$ ), dass  $\sqrt{2}$  resp.  $\sqrt{5}$  einfache Kettenbruchentwicklungen haben, dass sie jedoch wegen  $\sqrt{2}, \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$  keine periodische Dezimalbruchentwicklungen haben.



Folgende Zahleneinteilung ist geläufig:





Irrationale Zahlen als nichtperiodische Dezimalbrüche lassen sich sofort aufschreiben, z.B.:

$$x = 0.1011011101111011111011111011 \dots$$

Eine Möglichkeit, die reellen Zahlen mit Hilfe exakter mathematischer Grundlagen zu gewinnen, sind auch die **Dedekindschen Schnitte** (vgl. Lit.).

### 2.3.2 Zahlenerweiterung — Elargir les ensembles de nombres

Bekanntlich muss man die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  einführen, weil in den natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  Gleichungen wie  $2 + x = 1$  nicht lösbar sind.  $\mathbb{Q}$  führt man ein, weil in  $\mathbb{Z}$  Gleichungen wie  $2 \cdot x = 1$  nicht lösbar sind. Und die irrationalen Zahlen muss man einführen, weil in  $\mathbb{Q}$  Gleichungen wie  $x^2 = 2$  nicht lösbar sind. Die letzte Gleichung nennt man **algebraisch**, weil sie mit den Mitteln der Arithmetik formulierbar ist. So gelangt man zu reellen Zahlen. Dabei begegnet man aber sofort zwei neuen Problemen: Einmal hat eine Gleichung wie  $x^2 = -1$  in  $\mathbb{R}$  keine Lösung. Man kann die Lösbarkeit solcher Gleichungen wieder erzwingen, indem man  $\mathbb{R}$  zu den komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  erweitert. Andererseits lässt sich z.B. die Zahl  $\pi$  nicht durch einen endlichen arithmetischen Ausdruck beschreiben, ist also nicht algebraisch. (Der Beweis dieser Tatsache ist recht kompliziert und daher momentan hier nicht möglich). Es zeigt sich jedoch, dass man Zahlen wie  $\pi$  oder  $e$  (Eulersche Zahl) durch „Grenzprozesse“ gewinnen kann. Z.B. wenn man die Folge  $\langle a_n \rangle = \langle (1 + \frac{1}{n})^n \rangle$  studiert, so beobachtet man, dass sich  $a_n$  immer mehr  $e$  nähert (gegen  $e$  **konvergiert**), beliebig genau, wenn man  $n$  genügend gross wählt.

Wie wir später beim Studium der Folgen sehen werden, hat  $\mathbb{R}$  Eigenschaften, die in  $\mathbb{Q}$  nicht vorhanden sind. Zwar ist  $\mathbb{Q}$  **dicht** (d.h. zwischen zwei Zahlen  $a, b \in \mathbb{Q}$  gibt es immer eine dritte, z.B.  $c = \frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$ ,  $a < c < b$ ).  $\mathbb{Q}$  hat aber **Lücken**, z.B.  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$  oder  $\pi \notin \mathbb{Q}$ .  $\mathbb{R}$  hingegen ist nicht nur dicht, sondern auch **lückenlos**. Zwischen die reellen Zahlen kann man nichts Vernünftiges, nicht Reelles, von reellen Zahlen durch endliche Differenzen Verschiedenes mehr einpacken. Später zeigen wir:

**Satz:**

1. Jede monotone und beschränkte Folge konvergiert in  $\overline{\mathbb{R}}$ :  
 $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  ist „**abgeschlossen**“.
2. Jede nichtleere Teilmenge  $M \subseteq \mathbb{R}$ , die eine **untere Schranke** hat (Zahl  $s$  unterhalb allen Elementen von  $M$ ), hat auch eine maximale untere Schranke.

(Die Konvergenz wird später besprochen. Danach gilt z.B.:

$$\begin{aligned} x = 0.9\overline{9} \dots &\Rightarrow 10x = 9.9\overline{9} \dots \Rightarrow 9x = 9 \Rightarrow x = 1 \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{0 + 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + \dots + 10^{-n}}_{=0.999\dots 9} &= 1 \quad \text{d. h.} \quad 1 - \underbrace{0.999\dots 9}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

**Konsequenz:**

Reelle Zahlen sind daher Klassen von Dezimalbrüchen mit gleichem Grenzwert.

### 2.3.3 Das Problem der Mächtigkeiten unendlicher Mengen — Le problème de la puissance des ensembles infinis

Zwei endliche Mengen nennen wir bekanntlich **gleichmächtig**, wenn sie die gleiche Anzahl Elemente haben — oder, was dasselbe bedeutet, wenn sich die Elemente gleich durchnummerieren oder bijektiv aufeinander abbilden lassen. Wie ist das nun entsprechend bei sogenannten „unendlichen Mengen“ wie  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Q}$  oder  $\mathbb{R}$ ? Ersichtlicherweise hat es in  $\mathbb{Q}$  oder in  $\mathbb{R}$  Zahlen, die in  $\mathbb{N}$  fehlen: Es hat also in  $\mathbb{N}$  weniger Zahlen als etwa in  $\mathbb{R}$ . Es gilt ja  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ . Andererseits hat es in  $\mathbb{N}$  und in  $\mathbb{R}$  unendlich viele

Elemente. Ist daher etwa „weniger unendlich“ wie in  $\mathbb{N}$  das Gleiche wie „mehr unendlich“ wie in  $\mathbb{R}$  — oder ist es anders? Man merkt schon: Unendlich ist noch kein scharf gefasster Begriff. Er bedarf einer Untersuchung oder Präzisierung. Den Anstoß zu solchen Untersuchungen hat Kummer<sup>1</sup> gegeben mit seiner Mengenlehre oder „Theorie der transfiniten Kardinalzahlen“ (d.h. überendliche Mächtigkeiten).

Um die Mächtigkeit zweier unendlicher Mengen vergleichen zu können, definieren wir:

**Definition:**

$M$  gleichmächtig wie  $N$

$$(|M| = |N|) : \Leftrightarrow \exists \text{ Bijection } f : M \xrightarrow{f} N$$

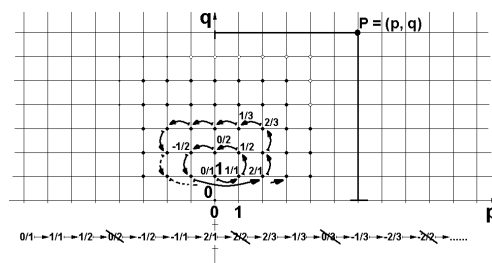
Falls alle  $f$  höchstens injektiv, nie aber surjektiv sind:

$$|M| < |N|$$

Wir wollen nun zeigen:  $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$ . ( $\Rightarrow |\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$ .)

Das gelingt, wenn wir jeder rationalen Zahl  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}$  eine Nummer (oder ein Index)  $n \in \mathbb{N}$  zuordnen können. Dann haben wir  $\mathbb{Q}$  abgezählt oder bijektiv auf  $\mathbb{N}$  abgebildet.

Trage dazu die Zahlen  $\frac{p}{q}$  in ein Koordinatensystem ein.  $\frac{p}{q}$  ist eindeutig einem Punkt  $P_{p,q} = (p, q)$  zugeordnet. Diese Punkte lassen sich wie folgt abzählen: Gehe die Punkte vom Ursprung aus einer Spirale folgend im Gegenurzeigersinn durch, einer nach dem anderen, und verteile jedem Punkt eine Nummer, falls er eine Zahl darstellt, die noch nicht vorgekommen ist. Auf diese Weise erhält jede rationale Zahl eine Nummer.  $\mathbb{Q}$  ist daher so abgezählt.



mit  $z_{ij} \in Z = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  (Ziffern)

Nun kann man aber sofort eine Zahl  $x = r \in [0, 1]$  konstruieren, die nicht in der Liste resp. Aufzählung vorkommt:

Sei  $r = 0.z_1z_2z_3z_4 \dots$ ,  $z_i \in Z = \{0, \dots, 9\}$ . Wähle für diese Konstruktion:  $z_1 \neq z_{11}$ ,  $z_2 \neq z_{22}$ ,  $z_3 \neq z_{33} \dots$ ,  $z_i \neq z_{ii}$ , . (Wegen  $z_i \neq z_{ii}$  stehen für  $z_i$  jeweils 9 Ziffern zur Auswahl!)

$\Rightarrow r \neq x_1$  (da  $z_1 \neq z_{11}$ ),  $r \neq x_2$ ,  $r \neq x_3 \dots r \neq x_i \dots \Rightarrow r$  fehlt in der Liste, die Nummerierung ist nicht vollständig.

$\leadsto$  **Problem:**

Lässt sich  $\mathbb{C}$  so wie  $\mathbb{R}$  ordnen?

Untersuchungen zeigen, dass man sehr einfach in  $\mathbb{C}$  eine strenge Ordnungsrelation definieren kann. Jedoch ist bis jetzt keine totale Ordnung bekannt, die elementargeometrisch Sinn macht. Der Preis für die Erweiterung von  $\mathbb{R}$  zu  $\mathbb{C}$  ist also der Verzicht auf eine geometrisch sinnvolle Ordnung.

**Bsp.:**

(Definition einer Ordnungsrelation in  $\mathbb{C}$ : )

Wir werden dabei zeigen:

**Lemma:**  $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^2| = |\mathbb{C}|$

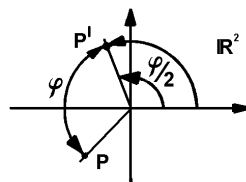
(In der Algebra wird gezeigt, dass man die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  als Punkte einer Ebene auffassen kann. )

Seien  $(x, y) \in \mathbb{R}_{y+}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$  ( $y \geq 0$ ).

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\text{bij.}} M_2$  mit  $\varphi \xrightarrow{\text{bij.}} \frac{\varphi}{2}$ ,

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\text{bij.}} M_4$  mit  $\varphi \xrightarrow{\text{bij.}} \frac{\varphi}{4}$ ,

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\text{bij.}} M_{3/4}$  mit  $\varphi \xrightarrow{\text{bij.}} \frac{3\varphi}{4}$



$\Rightarrow |M_4| = |M_2| = |M_{3/4}| = |\mathbb{R}^2|$  (Bij.)  $\wedge M_4 \subset M_2 \subset \mathbb{R}_{y+}^2 \subset M_{3/4} \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow |\mathbb{R}_{y+}^2| = |\mathbb{R}^2|$   
Trotz der Anschaulichkeit obiger Abbildung haben wir noch keine Bijektivität. Das kann man aber wie folgt erreichen:

Sei

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{1-x}\right) - 1 & x \in [0, 1) \\ -x + 1 & x \in [1, \infty) \end{cases}$$

$f$  bildet  $\mathbb{R}_0^+$  bijektiv auf  $\mathbb{R}$  ab.  $\leadsto h = f^{-1}$  bildet  $\mathbb{R}$  bijektiv auf  $\mathbb{R}_0^+$  ab.

$\leadsto$  Mit  $h$  können wir daher  $\mathbb{C}$  auf die obere komplexe Halbebene ( $\text{Im}(z) \geq 0$ ) abbilden.

$\leadsto$  Seien somit:  $z_1 = a_1 + i b_1$ ,  $z_2 = a_2 + i b_2$ ,  $a_k \in \mathbb{R}$ ,  $b_k \in \mathbb{R}_0^+$ .  $\leadsto \operatorname{Im}(z) \geq 0$

$\leadsto x = v_j v_{j-1} \dots v_2 v_1 \cdot x_1 x_2 x_3 \dots$ ,  $y = w_k w_{k-1} \dots w_2 w_1 \cdot y_1 y_2 y_3 \dots$ ,  $v_i, x_i, w_i, y_i \in Z = \{0, \dots, 9\}$   
Betrachte den Fall  $j \geq k$ . Fülle nun  $y$  vorne bis zur  $j$ -ten Stelle mit 0 auf.

$\leadsto y = 0_j 0_{j-1} \dots 0_{k+1} w_k w_{k-1} \dots w_2 w_1 \cdot y_1 y_2 y_3 \dots := w_j w_{j-1} \dots w_{k+1} w_k w_{k-1} \dots w_2 w_1 \cdot y_1 y_2 y_3 \dots$

Für die Abbildung  $(x, y) \in \mathbb{R}_{y \geq 0}^2 \mapsto z \in \mathbb{R}$  „mischen“ wir die Dezimalbrüche wie folgt:

$$(x, y) := (x/y) = (v_j v_{j-1} \dots v_2 v_1 \cdot x_1 x_2 x_3 \dots / w_j w_{j-1} \dots w_2 w_1 \cdot y_1 y_2 y_3 \dots) \mapsto z = \\ = v_j w_j v_{j-1} w_{j-1} \dots v_2 w_2 v_1 w_1 \cdot x_1 y_1 x_2 y_2 x_3 y_3 \dots$$

mit  $\operatorname{sgn}(z) := \operatorname{sgn}(x)$

(Für  $j \leq k$  argumentiert man ebenso.)

Ersichtlicherweise ist diese Abbildung „beinahe“ bijektiv, denn die „Entmischung“ bei der Rückabbildung geht stellenweise eindeutig und ist somit problemlos möglich.

Es besteht noch das Problem, dass einige reelle Zahlen nicht eindeutig darstellbar sind.

**Bsp.:**  $1.000\bar{0} \dots = 0.999\bar{9} \dots$

Das Problem besteht aber nur für abzählbar viele periodische Dezimalbrüche, d.h. für rationale Zahlen, für die gilt:

$$|\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|, \quad |\mathbb{Q}| + |\mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$$

$$\leadsto \exists_f \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \quad \odot$$

Als erste Konsequenz haben wir nun:

**Satz:**  $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^2| = |\mathbb{C}|$

**Konsequenz:** Es gibt somit verschiedene Typen von „unendlich“: Z.B.  $\infty$  vom Typ  $|\mathbb{N}|$  ( $\leadsto \infty_{\mathbb{N}}$ ) oder  $\infty$  vom Typ  $|\mathbb{R}|$  ( $\leadsto \infty_{\mathbb{R}}$ )

Wir werden weiter unten sehen, dass für immer grösser werdende  $n$  ( $n$  geht „gegen unendlich“) die Folgenglieder  $a_n = \frac{1}{n}$  von  $\langle a_n \rangle$  immer näher zu 0 rücken, was uns dann später zu Feststellungen wie „ $\frac{1}{0^+} = \infty$ “ führt. Daraus sieht man, dass zu verschiedenen Typen von  $\infty$  auch verschiedene Typen von 0 gehören müssen, eine Entdeckung, die sich in der „Non-Standard-Analysis“ ausbeuten lässt. Elemente aus diesem Bereich werden uns für die Anschaulichkeit und das Verständnis im Folgenden eine grosse Hilfe sein.

**Konsequenz:** Dimension  $\neq$  Mächtigkeit

### 2.3.4 Weitere Resultate — D’autres résultats

Siehe Seite 30:

$$((\overset{p}{\underset{q}{\triangle}} P_{p,q} = (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}) \wedge (|\mathbb{Z} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|)) \Rightarrow \mathbb{Q} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$$

$$\leadsto (|A_1| = |A_2| = |\mathbb{N}| \Rightarrow |A_1 \times A_2| = |\mathbb{N}|)$$

$$\leadsto (|A_1| = \dots = |A_k| = |\mathbb{N}| \Rightarrow |A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |\mathbb{N}|)$$

**Satz:**  $(|A_1| = \dots = |A_k| = |\mathbb{N}|) \Rightarrow |A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |\mathbb{N}|$

Analog sieht man (vgl. Seite 32):

**Satz:**  $(|A_1| = \dots = |A_k| = |\mathbb{R}|) \Rightarrow |A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |\mathbb{R}|$

Weiter gilt:

**Satz:**  $|A| < |\mathbb{N}| \Rightarrow |A| \in \mathbb{N}_0$

Zum Beweis: Sonst Widerspruch zum zornschen Lemma (Lit.).

**Satz:**  $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |[0, 1]| = |\mathbb{R}| < |\mathcal{P}(\mathbb{R})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))| < \dots$

**Zum Beweis:**

$$1. f : x \xrightarrow{bij.} f(x) = \frac{1}{x} \rightsquigarrow f : (0, 1] \xrightarrow{bij.} [1, \infty) \rightsquigarrow |[0, 1]| = |(0, 1]| = |[1, \infty)|$$

$$|[0, 1]| = |[1, \infty)| \wedge [0, 1] \cup [1, \infty) = \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow |[0, 1]| = |\mathbb{R}_0^+|$$

$$|\mathbb{R}_0^+| = |\mathbb{R}^-| \wedge \mathbb{R}_0^+ \cup \mathbb{R}^- = \mathbb{R} \Rightarrow |[0, 1]| = |\mathbb{R}_0^+| = |\mathbb{R}|$$

2. Sei  $z_k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  (Ziffern)  
 $\rightsquigarrow$  binär:  $z_k \hat{=} b_k \in \{0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001\}$ .

Entsprechend im 11-er System:

$$z_k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \hat{=} \{0_{(11)}, 1_{(11)}, 2_{(11)}, 3_{(11)}, 4_{(11)}, 5_{(11)}, 6_{(11)}, 7_{(11)}, 8_{(11)}, 9_{(11)}, A_{(11)}\}$$

$$\text{Sei } z = 0.z_1z_2z_3z_4 \dots \in [0, 1) \rightsquigarrow \exists_{f \text{ inj.}} : [0, 1) \xrightarrow{inj.} \mathcal{P}(\mathbb{N}) :$$

$$z = 0.z_1z_2z_3z_4 \dots \xrightarrow{inj.} M = \{z_1, z_{2,3}, z_{4,5,6}, z_{7,8,9,10}, \dots\}, \quad M \in \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

Dabei ist:

$$z_1 : \hat{=} A_{(11)}z_{(11);1} \in \mathbb{N}, \quad z_{2,3} : \hat{=} A_{(11)}z_{(11);2}z_{(11);3} \in \mathbb{N}, \quad z_{4,5,6} : \hat{=} A_{(11)}z_{(11);4}z_{(11);5}z_{(11);6} \in \mathbb{N} \dots$$

Wegen der Anzahl Ziffern gilt:  $z_1 < z_{2,3} < z_{4,5,6} < \dots$  Durch die vorgestellte  $A_{(11)}$  wird erreicht, dass die jeweils entstehende Zahl  $z_{\dots}$  nicht mit 0 beginnen kann und so die Ordnung nicht mehr stimmt.

$$\Rightarrow |[0, 1]| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$$

3. Sei  $M \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ,  $M = \{n_1, n_2, n_3, n_4, \dots\} \in \mathbb{N}$  mit  $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \dots$

$$\rightsquigarrow \exists_{f_1 \text{ inj.}} : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \xrightarrow{inj.} [0, 1), \quad \mathcal{P}(\mathbb{N}) \ni M = \{n_1, n_2, n_3, n_4, \dots\} \xrightarrow{inj.} z \in [0, 1)$$

Dabei ist:

$n_1 = b_1, n_2 = b_2, n_3 = b_3, \dots, b_k =$  Binärdarstellung von  $n_k$

und  $z := 0.b_12b_22b_32b_42\dots$

Durch die eingeschobene 2 wird jeweils die eindeutige Trennung der verwendeten Binärzahlen garantiert. Damit wird die Abbildung  $f_1$  injektiv.

$$\Rightarrow |\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |[0, 1)|$$

4.

$$(|[0, 1)| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|) \wedge (|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |[0, 1)|) \Rightarrow |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |[0, 1)| = |\mathbb{R}|$$

5. Sei  $|\mathbb{N}| \leq |M|$

Vor.:  $\exists_f \text{ bij.} : M \xrightarrow{\text{bij.}} \mathcal{P}(M) \rightsquigarrow \text{Frage: } |M| < |\mathcal{P}(M)| ?$

Sei  $T = \{m_j \mid m_j \notin f(m_j) \subset \mathcal{P}(M), j \in \{\text{Ind.}\}\},$

$\{\text{Ind.}\} = \text{Indexmenge}$

Es gilt:  $T \neq \{\}$

Ansonst:  $T = \{\} \rightsquigarrow \forall_{m_k} : \{m_k\} \in \mathcal{P}(M) \wedge f^{-1}(\{m_k\}) = m_k$

$\rightsquigarrow f$  nicht injektiv, alle Bilder haben Mächtigkeit 1.

$$\rightsquigarrow T \neq \{\}$$

$\rightsquigarrow \exists_f \text{ bij.}, x_0 : M \xrightarrow{\text{inj.}} \mathcal{P}(M) \wedge T = f(x_0) \in \mathcal{P}(M), x_0 = f^{-1}(T)$

Sei  $x_0 \notin T = f(x_0) \Rightarrow x_0 \in T$  (nach Def. von  $T$ )

Sei  $x_0 \in T = f(x_0) \Rightarrow x_0 \notin T$  (nach Def. von  $T$ )

$\Rightarrow (x_0 \in T \Leftrightarrow x_0 \notin T) \rightsquigarrow \text{Widerspruch!}$

$\rightsquigarrow \text{Voraussetzung falsch!} \rightsquigarrow \neg \exists_f \text{ bij.} : M \xrightarrow{\text{bij.}} \mathcal{P}(M)$

Es gilt:  $(|\mathbb{N}| \leq |M| \wedge M \subset \mathcal{P}(M)) \Rightarrow |\mathbb{N}| \leq |M| < |\mathcal{P}(M)|$

### 2.3.5 Folgen — Suites

#### Umgebungen — Voisinages

In 2.1.6 auf Seite 5 haben wir den **Umgebungsbegriff** kennengelernt. Wir werden ihn jetzt brauchen.

**Bsp.:**

$\delta$ -Umgebung  $\subseteq \mathbb{R}^n$ :  $\subseteq \mathbb{R}^n$ :

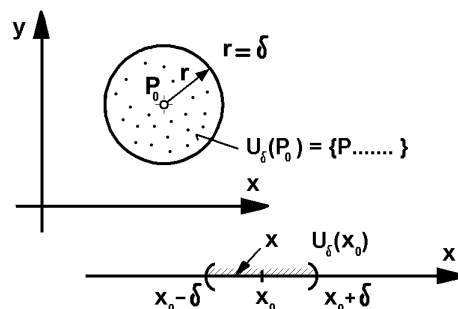
$U_\delta(P_0) = \{P \in \mathbb{R}^n \mid |P - P_0| < \delta\}$

$\delta$ -Umgebung  $\subseteq \mathbb{R}$ :  $\subseteq \mathbb{R}$ :  $U_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \delta\}$

$= \{x \in \mathbb{R} \mid x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$

$= \{x_0 - \delta, x_0 + \delta\}$

$\rightsquigarrow$  Offenes Intervall .

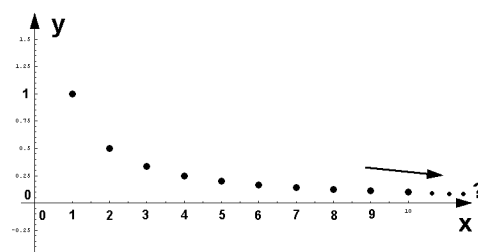


### 2.3.6 Nullfolgen — Suites vers zéro

Folgen sind uns bereits bekannt (vgl. 2.2.1, Seite 7  $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}(\mathbb{N})$ ). Folgen also sind spezielle Funktionen mit  $D_f = \mathbb{N}$ .)

**Nullfolgen** sind spezielle Folgen, bei denen sich  $a_n$  immer mehr an 0 annähert, je grösser  $n$  wird.

Wähle  $\varepsilon > 0$  beliebig  $\leadsto a_n < \varepsilon$ , sobald  $n$  genügend gross.



**Bsp.:**

$$\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle = \left[ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right], \quad \frac{1}{n} > 0$$

**Problem:**

Offensichtlich ist es schwierig, die Graphen der Folgen so zu gestalten, dass das Verhalten sichtbar wird.

### Die beiden Aspekte von unendlich — Les deux aspects de l'infini

Auf der einen Seite haben wir den Zugang zum Unendlichen als Prozess: Z.B. eine Nullfolge  $\langle a_n \rangle$  hat unendlich viele Glieder. Man kann eines nach dem andern berechnen. Aber wie viele man auch berechnet, immer sind es nur endlich viele, die man berechnet hat. Die noch nicht berechneten aber sind immer unendlich viele. Man kommt dem „Unendlichen“ so zwar näher, aber man hat immer praktisch nichts zu dem was noch bleibt. Und doch können wir uns vorstellen, dass die Nullfolge immer näher gegen 0 rückt, wenn wir  $n$  wachsen lassen. Bei  $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$  freilich wird man durch Rechnung die 0 nie erreichen. Das Unendliche ist hier nur erfahrbar durch den **Prozess des ständigen Weiterschreitens**, des nie enden Wollens. Man hat so den Zugang zum Unendlichen durch die Prozesshaftigkeit von unendlich im Sinne einer Abzählung mit Hilfe von  $\mathbb{N}$ . Bei Folgen haben wir diesen Zugang.

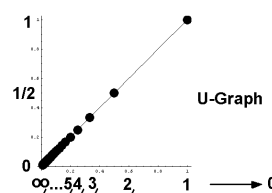
Ganz anders beim **aktualen Zugang**: Stellt man sich das Intervall  $[0, 1]$  als **geometrische Strecke** vor, so muss man feststellen, dass in dieser Strecke offensichtlich unendlich viele Punkte liegen, die sogar von grösserer Mächtigkeit sind als  $|\mathbb{N}|$ , die man jedoch mit einem Blick erfassen kann. Man hat hier das **aktual Unendliche**, unendlich auf einem Blick gefasst in einer überschaubaren Strecke. Welcher Gegensatz zum prozesshaften Zugang, wo man nur das Weiterschreiten überblickt, nie jedoch das Ende oder das Ziel. An diese beiden Zugängen wollen wir uns jeweils erinnern, wenn wir mit dem Unendlichen arbeiten.

### U-Graphen — Graphes inverses

Ein Problem bei der Darstellung von Folgen ist die Prozesshaftigkeit. Was man im Graphen links sieht, sind die ersten Glieder, die eigentlich nicht gross interessieren. Das was interessiert liegt soweit rechts, dass es in der Darstellung nicht erfassbar ist. **U-Graphen**<sup>2</sup> sind eine Darstellungsart für Folgen, die sich auf das aktual Unendliche stützen und den interessanten Teil ins Zentrum holen.

<sup>2</sup>Die Technik der U-Graphen ist vom Autor 1980 in Basel vorgestellt worden.

Im **U-Graphen** zur Darstellung von Folgen  $\langle a_n \rangle$  skalieren wir die  $x$ -Achse reziprok. Das bedeutet, dass wir den Wert  $n$  statt in der Distanz vom Ursprung  $x = n$  nun in der Distanz  $\frac{1}{n}$  rechts vom Achsenschnittpunkt eintragen. Der  $y$ -Wert resp.  $a_n$  behalten wir wie üblich bei.



**Bsp.:**  $\langle a_n \rangle = \langle \frac{1}{n} \rangle$  Wir haben das Problem, dass  $\infty$  gar keine Zahl ist. ( $\infty \notin \mathbb{N}$ )

**Schreibweise:** Um auszudrücken, dass  $n$  immer und immer grösser wird, schreiben wir:

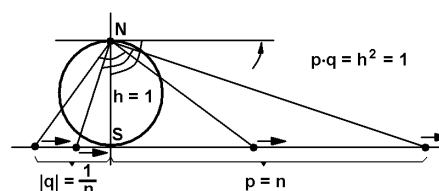
$$n \rightarrow \infty$$

**Problem:** Wie hängen nun  $n \rightarrow \infty$  und  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  zusammen? Ist die Schreibweise " $\frac{1}{\infty} = 0$ " zulässig?

Idee: Betrachte den Kreis über dem Ursprung mit Mittelpunkt  $M = (0, \frac{1}{2})$  und Radius  $r = 1$ .

Im rechtwinkligen Dreieck  $\triangle ABC$ ,

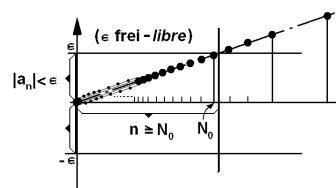
$C = N$  (Nordpol) gilt der Höhensatz:



$$h^2 = 1 = |p| \cdot |q| \leadsto |p| = \frac{1}{|q|}, \quad |p| = n \Rightarrow |q| = \frac{1}{n}.$$

Wenn nun  $|p| = n$  wächst und wächst (wenn „ $n$  gegen unendlich strebt“) so wird im Grenzfall das Dreieck entartet: Die Strecke  $\overline{AC}$  wird zu einer Parallelen zur  $x$ -Achse und die Strecke  $\overline{BC}$  wird zu  $\overline{OC} = \overline{SC}$ . Das bedeutet: Im Grenzfall " $n = \infty$ " wird  $\frac{1}{n}$  zu 0. Im Beispiel  $\langle a_n \rangle = \langle \frac{1}{n} \rangle$  liegen daher die Punkte auf einer Geraden durch den Achsenschnittpunkt. Dieser stellt nun hier den als Punkt sichtbar gewordenen **Grenzwert** oder Grenzpunkt  $(\infty, 0)$  dar.

Vergleiche mit der Skizze: Wie man auch eine Zahl  $\varepsilon > 0$  wählt, so gilt  $a_n < \varepsilon$  von einer gewissen Schranke oder Zahl  $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  an ( $n > N_0$ ).



Dieses Verhalten können wir als Grundlage einer abstrakten Definition der Nullfolge gebrauchen, wie sie heute gebräuchlich ist:

**Definition:**  $\langle a_n \rangle$  Nullfolge

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} \forall n > N_0 : |a_n| < \varepsilon$$

Diese Definition enthält drei Quantoren  $\forall, \exists, \forall$ , was in der Umgangssprache nicht vorkommt. Es braucht also eine grosse intellektuelle Anstrengung für den Lernenden und viel Geduld, um damit klar zu kommen.

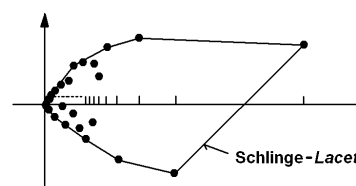
**Symbol:**  $\langle a_n \rangle \text{ NF} \leadsto a_n \rightarrow 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$\leadsto a_n$  **konvergiert** gegen 0 resp. 0 ist **Grenzwert** von  $a_n$ .



**Konvexe Schlingen — Lacets convexes**

Wir denken uns im U-Graphen in jedem Punkt der Folge einen unendlich dünnen Nagel eingeschlagen. Wenn man um alle Nägel einen Faden legt und diesen spannt, so entsteht eine konvexe Schlinge. Diese nennen wir die **konvexe Schlinge des U-Graphen**.



Wir sehen sofort, dass bei einer Nullfolge die konvexe Schlinge die  $y$ -Achse nur in einem Punkt berührt, in  $(\infty, 0)$  nämlich.

Wir sagen:

**Definition:**

Eine konvexe Schlinge heisst **einfach**, wenn sie mit der  $y$ -Achse genau einen Berührungspunkt hat. Einen solchen Berührungspunkt nennen wir **Kontakt**.

Man sieht unmittelbar:

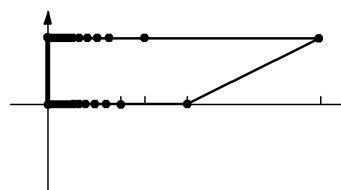
**Korollar:**

$\langle a_n \rangle$  NF  $\Rightarrow$  die konvexe Schlinge berührt links nur in  $(\infty, 0)$

**Bsp.:**

$$a_n = \begin{cases} 1 & n = 2m - 1, \quad m \in \mathbb{N} \\ 0 & n = 2m, \quad m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

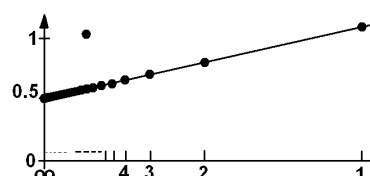
$\leadsto$  Schlinge nicht einfach.

**Bsp.:**

$$a_n = 0.5 + \frac{1}{n}$$

$\leadsto$  Schlinge einfach.

Kontakt in  $(\infty, 0.5) = (\infty, a)$



Das letzte Beispiel legt folgende Definition nahe:

**Definition:**

$\langle a_n \rangle$  konvergiert gegen  $a \Rightarrow \langle a_n - a \rangle$  NF  
 $(\Rightarrow$  einziger Kontakt in  $(\infty, a)$ )  
 $a$  heisst **Grenzwert** der Folge

**Symbol:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

$\langle a_n \rangle$  hat demnach einen Grenzwert, wenn die Folge eine konvexe Schlinge besitzt mit nur einem Kontakt.

**Definition:**

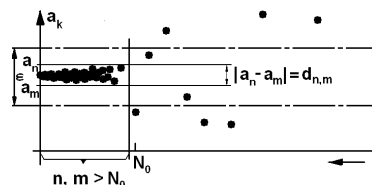
Eine Folge, die einen Grenzwert besitzt, nennen wir **konvergent** (*conv*).

Eine Folge, die nicht konvergiert, nennen wir **divergent**.

### Konvergenzkriterien — critères de convergence

Die Katze beißt sich nun in den Schwanz: Einerseits möchte man Grenzwerte von Folgen bestimmen, von denen man sich aber erst überzeugen muss, dass sie konvergieren, d.h. einen Grenzwert besitzen. Andererseits muss man den Grenzwert  $a$  schon kennen, um die verfügbare Konvergenzdefinition anwenden zu können.

Ein Instrument zur Beurteilung der Konvergenz ohne Kenntnis des Grenzwertes haben wir mit dem **Kriterium von Cauchy**<sup>3</sup>, das man am U-Graphen unmittelbar ablesen und nachvollziehen kann. Man nennt es auch **grenz-wertfreie Konvergenzdefinition**.



**Satz:**

**Cauchy**

$$\langle a_n \rangle \text{ konv.} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} \forall n, m > N_0, n, m \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

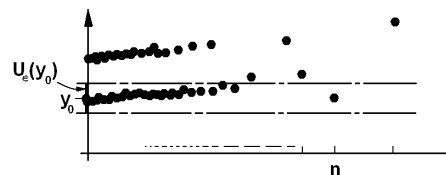
**Zum Beweis**

$\Rightarrow$  : Klar.

$\Leftarrow$  : Widerspruch, da sonst mehrere Berührungspunkte.

**Definition:**

$y_0$  **Häufungspunkt** ( *HP* ) von  $\langle a_n \rangle$  :  $\Leftrightarrow \forall U_\varepsilon(y_0) \exists \infty$  viele Folgenglieder in  $U_\varepsilon(y_0)$



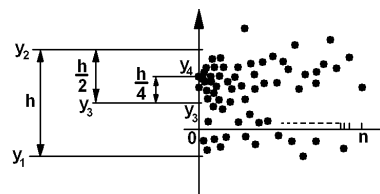
Man merkt gleich, dass Grenzwerte *HP* sind. Weiter ist ein *HP* in einem U-Graphen immer Kontaktpunkt.

Weiter gilt der erstaunliche Satz:

**Satz:**

Jede Folge besitzt mindestens einen *HP*, der auch  $\pm\infty$  sein kann.

Um diese Tatsache einzusehen, betrachten wir in einem U-Graphen die Kontaktpunkte. Falls  $\pm\infty$  *HP* ist, brauchen wir nichts zu zeigen. Sei also  $\pm\infty$  nicht *HP*. Die Kontaktpunkte und damit unendlich viele Folgenglieder liegen somit in einem endlichen Intervall  $I_0 = [y_1, y_2]$  der Länge  $h$ .



Teilen wir dieses Intervall durch  $y_3$  in der Mitte, so ergeben sich zwei neue Teilintervalle  $[y_1, y_3]$ ,  $[y_3, y_2]$  der Länge  $\frac{1}{2}h$ , von denen in mindestens einem wieder unendlich viele Folgenglieder liegen. Dieses eine Intervall nennen wir  $I_2$ . Mit  $I_2$  verfahren wir genauso und erhalten ein Intervall  $I_3$  der Länge  $(\frac{1}{2})^2 h$

<sup>3</sup>Cauchy: 1789-1857

mit unendlich vielen Folgengliedern und so fort. Nach  $n$  solchen Schritten haben wir ein Teilintervall  $I_{n+1}$  der Länge  $(\frac{1}{2})^{(n+1)}h$  mit unendlich vielen Folgengliedern. Daraus ersieht man, dass sich bei der Fortsetzung dieses Prozesses die Intervalllänge auf 0 zusammenzieht und so ein Kontaktpunkt entstehen muss. Dieser ist aus dem Prozess ersichtlich ein *HP*. (Nach Konstruktion existieren in jeder Umgebung Intervalle, die unendlich viele Punkte enthalten.)

**Bsp.:** Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n := \sin(n) \rightsquigarrow a_n \in (0, 1)$ ,  $a_n \neq 0$

1. Annahme:  $a_n = \sin(n) = \pm 1 \rightsquigarrow n = k \cdot \pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )  $\Rightarrow (\pi = \frac{n}{k} \in \mathbb{Q}) \vee (k = 0)$   
 $\Rightarrow$  Widerspruch!

2. Annahme:  $a_n = a_m \Rightarrow \sin(n) = \sin(m)$  ( $n, m \in \mathbb{N} \wedge n \neq m$ )  
 $\rightsquigarrow m = n + k \cdot 2\pi \vee m = \pi - n + k \cdot 2\pi \Rightarrow \pi = \frac{m - n}{2k} \in \mathbb{Q} \vee \pi = \frac{m + n}{2(k + 1)} \in \mathbb{Q}$ , ( $k \neq 0$ )  $\vee$  ( $k + 1 \neq 0$ )  
 $\Rightarrow$  Widerspruch!

**Konsequenz:**

$\{a_n \mid \langle a_n \rangle = \langle \sin(n) \rangle\} \subset (0, 1)$ ,  $|\{a_n = \sin(n) \mid n \in \mathbb{N}\}| = |\mathbb{N}| < |(0, 1)|$   
 $\rightsquigarrow \langle a_n \rangle$  ist in  $(0, 1)$  verteilt und es gibt mindestens einen Häufungspunkt. Doch ist es momentan überhaupt nicht vorstellbar, wo ein solcher in  $(0, 1)$  liegen könnte.

**Definition:**

$\langle b_n \rangle$  **Teilfolge** von  $\langle a_n \rangle$  :  $\Leftrightarrow$   
 $\langle b_n \rangle$  entsteht aus  $\langle a_n \rangle$  durch weglassen von Gliedern

**Symbol:**  $\langle b_n \rangle \subseteq \langle a_n \rangle$

Dabei kann man beliebig viele Glieder weglassen. Die Reihenfolge darf aber nicht geändert werden. Und die Nummerierung muss angepasst werden.

Es ist sofort einsichtig, dass gilt:

**Satz:** **Vor.:**  $\langle b_n \rangle \subseteq \langle a_n \rangle$ ,  $a_n \rightarrow a$

**Beh.:**  $b_n \rightarrow a$

**Satz:** **Vor.:**  $y_0$  *HP* von  $\langle a_n \rangle$

**Beh.:**  $\exists \langle b_n \rangle \subseteq \langle a_n \rangle : b_n \rightarrow y_0$

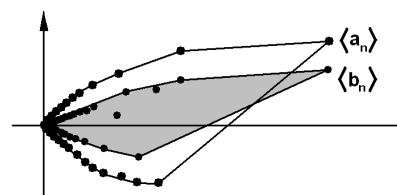
**Definition:**

$\langle a_n \rangle$  **Majorante** von  $\langle b_n \rangle$ :

$\Rightarrow \exists N_0 \in \mathbb{N} \forall n > N_0 : |a_n| \geq |b_n|$

$\rightsquigarrow \langle b_n \rangle$  **Minorante** von  $\langle a_n \rangle$

Mit Hilfe eines U-Graphen macht man sich leicht das folgende **Majorantenkriterium** klar:



**Satz:** Majorantenkriterium

Vor.:

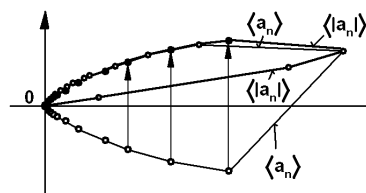
$\langle a_n \rangle$  NF und Majorante von

Beh.:

$\langle b_n \rangle$  NF

Vgl. U-Graph

$\langle a_n \rangle$  NF  $\Leftrightarrow \langle |a_n| \rangle$  NF



**Satz:**  $\langle a_n \rangle$  NF  $\Leftrightarrow \langle |a_n| \rangle$  NF

**Bsp.:** Es gilt:

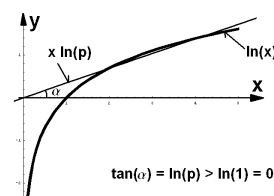
$n > 1, p > 1 \Rightarrow \ln(n) < \ln(p^n) = n \ln(p)$

$\Rightarrow n < p^n$  für  $n > N_0$ .

Das sieht man aus den Graphen von:  $f(x) =$

$\ln(x)$

und  $g(x) = x \ln(p) = x \cdot c$ . (Vgl. auch die Umkehrfunktionen.)



$\Rightarrow \frac{1}{p^n} = \left(\frac{1}{p}\right)^n = q^n < \frac{1}{n} \leadsto \langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$  NF,  $|q| < 1 \Rightarrow |q|^n < \frac{1}{n} \Rightarrow \langle b_n \rangle = \langle |q|^n \rangle$  NF.

**Beweis:**

$|q| < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{|q|} := 1 + d \Rightarrow \frac{1}{|q|^n} = (1 + d)^n = 1^n + \binom{n}{1} 1^{n-1} d + \binom{n}{2} 1^{n-2} d^2 + \dots + d^n >$   
 $1^n + \binom{n}{1} 1^{n-1} d + \binom{n}{2} 1^{n-2} d^2 = 1 + n d + \frac{n(n-1)}{2} d^2 = 1 + n d - \underbrace{\frac{n}{2} d^2 + \frac{n^2}{2} d^2}_{\sim n^2} > n$  für  $n > N_0$

$\leadsto n > N_0 \Rightarrow \frac{1}{n} > |q|^n, \lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = 0$



**Definition:**

Die Folge  $\langle b_n \rangle = \langle q^n \rangle$  heisst **geometrische Folge**.  
 (Allgemeiner:  $\langle b_n \rangle = c \cdot \langle q^n \rangle$ )

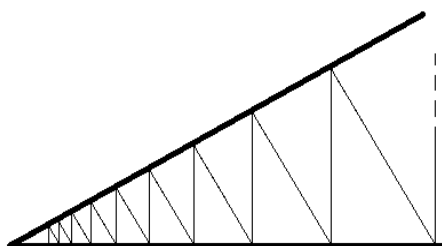
**Korollar:**

$|q| < 1 \Rightarrow \langle a_n \rangle = \langle |q|^n \rangle \Rightarrow \langle b_n \rangle = \langle q^n \rangle \rightarrow 0$  (NF)  
 $q = 1 \Rightarrow \langle a_n \rangle = \langle 1^n \rangle \rightarrow 1$   
 $q = -1 \Rightarrow \langle a_n \rangle = \langle (-1)^n \rangle \rightarrow \pm 1$  (2 HP)  
 $q > 1 \Rightarrow \langle a_n \rangle = \langle q^n \rangle \rightarrow \infty$  (Div.)  
 $q < -1 \Rightarrow \langle a_n \rangle = \langle q^n \rangle \rightarrow \pm \infty$  (Div.)

**Bemerkung:**

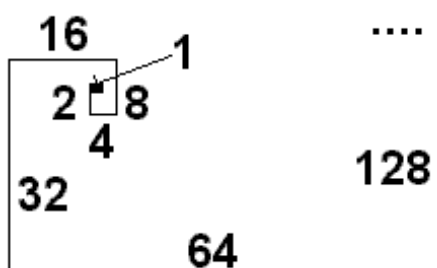
Geometrische Folgen sind keine polynomiale Folgen mehr wie z.B. die arithmetischen Folgen es sind ( $a_n = a_1 + (n-1)d$ ). Sie verhalten sich exponentiell, denn  $a_n = q^{n-1}$  ist ein Spezialfall der Funktion

$$f(x) = q^{x-1} = \frac{1}{q} \cdot q^x = c \cdot q^x, \text{ zum Beispiel } f(x) = c \cdot e^x$$



Nebenstehend ist eine Iteration einer Ähnlichkeitsabbildung gezeigt. Man prüft sofort nach, dass die Teilpunkte auf den Schenkeln je eine geometrische Folge bilden. Wir sind hier mitten in der Geometrie.  $\leadsto$  Geometrische Folge.

**Problem:**



**Bemerkung:**

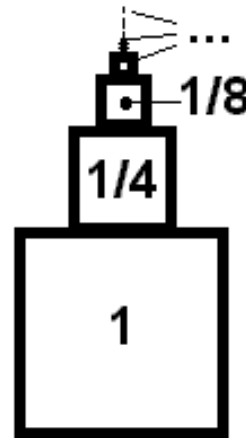
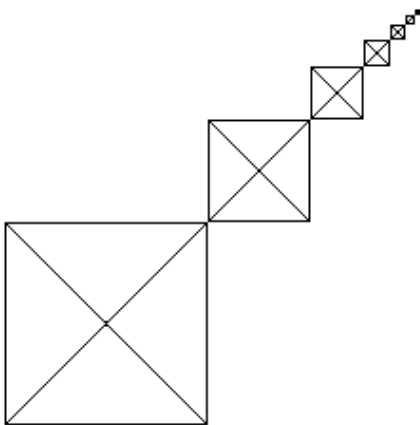
Falls man weiss, dass die Reihe konvergiert, kann man den Grenzwert auch wie folgt berechnen:

$$x = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots = 1 + q \cdot (1 + q + q^2 + q^3 + \dots) = 1 + q \cdot x \Rightarrow x \cdot (1 - q) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{1 - q}$$

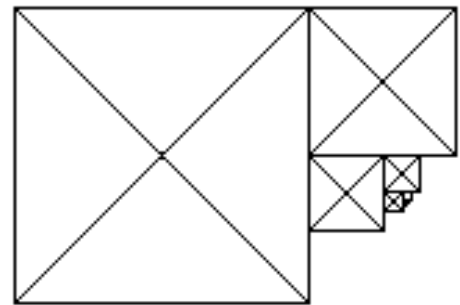
$$\leadsto \text{Konsequenz: } A_{tot} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Im nebenstehenden Bild ist ein unendlich hoher Turm mit quadratischem Grundriss gezeigt. Der Volumeninhalt ist:

$$\begin{aligned} V &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^3}\right)^2 + \dots = \\ &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \neq \infty \\ &(h = 1 + 1 + 1 + \dots \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

**Weitere Beispiele:**

$$\text{a) } A_{tot} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$



$$\text{b) } A_{tot} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

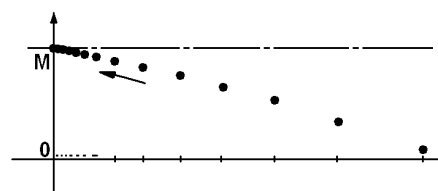
Weiter wissen wir, dass jede Folge mindestens einen HP hat. Was heisst das für Folgen, die monoton und beschränkt sind?

Vgl. U-Graph

Sei:  $\langle a_n \rangle$  monoton wachsende und beschränkte Folge .

Wegen der Monotonie kann die Folge im U-Graphen nur einen Kontakt haben, der beschränkt ( $\neq \pm\infty$ ) sein muss .

Ebenso für fallende Folgen



**Satz:**

**Vor.:**

$\langle a_n \rangle$  monoton und beschränkt

**Beh.:**

$\langle a_n \rangle$  konvergent

(Eselsbrücke: Denke an die konvergente Lektion: Sie ist monoton und beschränkt. )

**Bsp.:** Sei  $a_1 = 2, a_2 = 3, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(a_{n-1})^n}$

$$1. \frac{1}{(a_{n-1})^n} > 0 \Rightarrow a_n < a_n + \frac{1}{(a_{n-1})^n} = a_{n+1}$$

$\leadsto \langle a_n \rangle$  monoton wachsend

$$\begin{aligned} 2. a_{n+1} &= a_n + \frac{1}{(a_{n-1})^n} < a_n + \frac{1}{\min(a_n)^n} = a_n + \frac{1}{2^n} < a_{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} < a_{n-2} + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} < \\ &\dots < a_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \\ &= 1 + \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3 \leadsto \langle a_n \rangle \text{ beschränkt} \end{aligned}$$

3.  $\langle a_n \rangle$  monoton und beschränkt  $\leadsto \langle a_n \rangle$  konvergent

### Rechenregeln — Règles de calcul

Seien  $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$  Folgen mit  $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b, c \in \mathbb{R}$ .

Mit Hilfe von U-Graphen kann man die meisten der folgenden elementaren Regeln sofort ablesen:

**Regeln:**

$$1. a_n \pm b_n \rightarrow a \pm b$$

$$2. a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b$$

$$3. a_n \cdot c \rightarrow a \cdot c$$

$$4. b, b_n \neq 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$$

$$5. a_n^c, a^c \text{ definiert} \Rightarrow a_n^c \rightarrow a^c$$

$$6. c^{a_n}, c^a \text{ def.} \Rightarrow c^{a_n} \rightarrow c^a$$

$$7. c^{\frac{1}{n}} \rightarrow c^0 = 1$$

$$8. \sin(a_n) \rightarrow \sin(a)$$

$$9. \cos(a_n) \rightarrow \cos(a)$$

10. Mehr bei den stetigen Funktionen.

**Bsp.:**  $\frac{\frac{1}{n} + 1 + n}{1 + (-3n) + 2n^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow ?$

**Trick:** Bringe alle Potenzen in Zählern zum Verschwinden: Dividiere hier Zähler und Nenner durch  $n^2$ .  $\leadsto$

$$\frac{\frac{1}{n} + 1 + n}{1 + (-3n) + 2n^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + (-3)\frac{1}{n} + 2} \cdot \cos\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow \frac{0 + 0 + 0}{0 + (-3 \cdot 0) + 2} \cdot \cos(0) = \frac{0}{2} \cdot 1 = 0$$

### Die Eulersche Zahl als Grenzwert — Le nombre d'Euler comme valeur limite

In 2.3.1 auf Seite 27 wurde der Wert

$e = 2.718281828459045235360287471352662497757247093699959574966967627724077 \dots$   
genannt. Woher kommt dieser Wert?

$e$  ist eine Zahl, die man als Grenzwert einer Folge definieren kann:

**Definition:** (a)  $e := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , (b)  $e := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$

**Problem:** (a) Konvergiert diese Folge?

Konzept: Wir zeigen zwei Dinge. Erstens:  $\langle a_n \rangle$  ist beschränkt. Zweitens:  $\langle a_n \rangle$  ist streng monoton wachsend. Somit muss  $\langle a_n \rangle$  konvergent sein. Man kann den Rechner einsetzen, um zu numerischen Näherungen zu gelangen.

$$\begin{aligned} 1. \quad 1 < a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0} 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + \frac{n}{n} + \frac{n \cdot (n-1)}{2 \cdot n \cdot n} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{2 \cdot 3 \cdot n \cdot n \cdot n} + \dots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{3}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n^n} \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \dots = \\ &= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} + \frac{1}{42320} + \frac{1}{362880 (=r)} + \frac{1}{r \cdot 10} + \frac{1}{r \cdot 10 \cdot 11} + \dots := \\ &:= a + \frac{1}{362880 (=r)} + \frac{1}{r \cdot 10} + \frac{1}{r \cdot 10 \cdot 11} + \dots = a + r \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 10 \cdot 10} + \dots\right) = \\ &= a + r \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots\right) = a + r \cdot (1.1111\dots) := z \in \mathbb{R}, \\ a &= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} + \frac{1}{42320} \Rightarrow \forall_{n \in \mathbb{N}} 0 < a_n < z \Rightarrow \langle a_n \rangle \text{ beschränkt} \\ 2. \quad a_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{3}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n^n} < \\ &1 + 1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \left(1 - \frac{3}{n+1}\right) + \dots = a_{n+1} \\ &\leadsto \text{„} < \text{“ ist richtig.} \\ &\text{Denn wegen } \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \text{ folgt } \left(1 - \frac{1}{n}\right) < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right). \\ &\text{Zudem hat } a_{n+1} \text{ einen positiven Summanden mehr.} \\ &\leadsto a_n \text{ ist streng monoton wachsend.} \end{aligned}$$





**Satz:****Vor.:**

$$\langle a_n \rangle = \left\langle \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\rangle$$

**Beh.:**

$$\langle a_n \rangle \text{ conv (Grenzwert} = e \text{)}$$

**Bemerkung:**

Man kann zeigen, dass gilt:

$$1. \ e \notin \mathbb{Q}$$

$$2. \ e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \dots}}}}} =$$

$$2 + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \dots$$

$$3. \ e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

Vgl. Potenzreihen

$$\textbf{Konvergenz: } c_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$\leadsto \forall_n : c_{n+1} = c_n + \frac{1}{(n+1)!} > c_n,$$

$$2.7083\bar{3} < c_n = \underbrace{\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}}_{=2.7083\bar{3}} + \dots < 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3$$

$$\leadsto 2.7083\bar{3} = 2.70833333 \dots < c_{\infty} = e < 3$$

**Rekursionsformel für Kettenbrüche — Formule de récurrence pour le développement en fraction continue**

$$\textbf{Problem:} \quad \text{Wie findet man } e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \dots}}}}} =$$

$$2 + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \dots ?$$

Sei  $[x]$  die Gauss-Klammer-Funktion von  $x$ . Soit  $[x]$  la fonction aux parenthèses de Gauss de  $x$ .

$$\text{Sei } z := z_0 = z_1 + \frac{1}{z_2 + \frac{1}{z_3 + \frac{1}{z_4 + \frac{1}{z_5 + \frac{1}{z_6 + \dots}}}}}, \quad z = z_0 := x_0 \in \mathbb{R}, \quad z_k \in \mathbb{Z} \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$\begin{aligned} \text{Wir schreiben: } z := x_0 &= [x_0] + r_0 = [x_0] + \frac{1}{x_1} = [x_0] + \frac{1}{[x_1] + r_1} = [x_0] + \frac{1}{[x_1] + \frac{1}{x_2}} = \\ &= [x_0] + \frac{1}{[x_1] + \frac{1}{[x_2] + r_2}} = [x_0] + \frac{1}{[x_1] + \frac{1}{[x_2] + \frac{1}{x_3}}} = \dots, \quad r_k := \frac{1}{x_{k+1}} \in (-1, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \leadsto \quad z = x_0 \quad r_0 &= \frac{1}{x_1} = x_0 - [x_0] & \Rightarrow x_1 &= \frac{1}{x_0 - [x_0]} \\ r_1 &= \frac{1}{x_2} = x_1 - [x_1] & \Rightarrow x_2 &= \frac{1}{x_1 - [x_1]} \\ r_2 &= \frac{1}{x_3} = x_2 - [x_2] & \Rightarrow x_3 &= \frac{1}{x_2 - [x_2]} \\ &\vdots & &\vdots \\ r_k &= \frac{1}{x_{k+1}} = x_k - [x_k] & \Rightarrow x_{k+1} &= \frac{1}{x_k - [x_k]} \end{aligned}$$

**Formel:**  $z_0 := z = x_0, \quad z_1 = [z_0] = [x_0], \quad z_{k+1} = [x_k] = \left[ \frac{1}{x_{k-1} - [x_{k-1}]} \right], \quad k > 1$

**Hinweis:** Die Programmierung dieser Formeln z.B. mit *Mathematica* ist sehr einfach (vgl. *Mathematica*-Demo-File CM9).

### Die harmonische Reihe — La série harmonique

**Definition:**  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$   
heisst **harmonische Reihe**

Wir wollen etwas vorgehen. Mit Hilfe der Integralrechnung und des Minorantenkriteriums können wir später zeigen, dass die Harmonische Reihe divergiert.

Direkt kann man das wie folgt einsehen:

$$\underbrace{1}_{=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}_{\geq \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}}_{\geq \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} + \dots \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \rightarrow \infty$$

Nun zu einer Anwendung von Folgen aus der Finanzmathematik:

### 2.3.7 Stetige Verzinsung — Continuement rapporter des intérêts

Sei  $K_0$  = Anfangskapital,  $K_n$  = Kapital nach  $m$  Perioden,  $p$  = Zinsfuss,  $t = n$ -ter Teil des Jahres,  $Z_m$  = Zins nach  $m$  Perioden.

Für den Zins und das Kapital nach  $m$  Jahren gilt, wenn das Geld auf der Bank bleibt: Si on laisse l'argent à la banque, il vaut pour l'intérêt après  $m$  années:

$$\begin{aligned}\varepsilon &:= \frac{p}{100} \\ K_1 &= K_0 + Z_1 = K_0 + K_0 \cdot \frac{p}{100} = K_0 + K_0 \cdot \varepsilon = K_0 \cdot (1 + \varepsilon) \\ K_2 &= K_1 + Z_2 = K_1 + K_1 \cdot \varepsilon = K_1 \cdot (1 + \varepsilon) = K_0 \cdot (1 + \varepsilon)^2 \\ &\vdots \\ K_m &= K_{m-1} + Z_m = K_{m-1} + K_{m-1} \cdot \varepsilon = K_{m-1} \cdot (1 + \varepsilon) = K_0 \cdot (1 + \varepsilon)^m\end{aligned}$$

Für den Zins und das Kapital nach  $m$  Perioden eines Jahres mit  $h$  Perioden gilt, wenn das Geld auf der Bank bleibt:

$$\begin{aligned}h \cdot T &= 1 \text{ (Jahr)} \\ K_1 &= K_0 + Z_1 = K_0 + K_0 \cdot \frac{\varepsilon}{h} = K_0 \cdot (1 + \frac{\varepsilon}{h}) \\ K_2 &= K_1 + Z_2 = K_1 + K_1 \cdot \frac{\varepsilon}{h} = K_0 \cdot (1 + \frac{\varepsilon}{h})^2 \\ &\vdots \\ K_m &= K_{m-1} + Z_m = K_{m-1} + K_{m-1} \cdot \frac{\varepsilon}{h} = K_0 \cdot (1 + \frac{\varepsilon}{h})^m\end{aligned}$$

Für den Zins und das Kapital nach  $m = n \cdot h$  Perioden in  $n$  Jahren mit  $h$  Perioden pro Jahr gilt, wenn das Geld auf der Bank bleibt:

$$\begin{aligned}m &= n \cdot h, \quad \frac{\varepsilon}{h} = \frac{1}{h'}, \quad h' = \frac{h}{\varepsilon}, \quad h \cdot T = 1 \\ K_{n,T} &= K_0 \cdot (1 + \frac{\varepsilon}{h})^{n \cdot h} = K_0 \cdot (1 + \frac{1}{h'})^{n \cdot h' \cdot \varepsilon}\end{aligned}$$

Für  $T \rightarrow 0$  und gleichzeitig  $h \rightarrow \infty$ ,  $h' \rightarrow \infty$  gilt:

$$\lim_{T \rightarrow 0} K_{n,T} = K_{n,0} = K_0 \cdot \lim_{h' \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{h'})^{h' \cdot \varepsilon \cdot n} = K_0 \cdot (\lim_{h' \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{h'})^{h'})^{(\varepsilon \cdot n)} = K_0 \cdot e^{(\varepsilon \cdot n)}$$

Die erstaunliche Erkenntnis hier ist, dass das Kapital bei stetiger Verzinsung zwar exponentiell wächst und damit aber immer endlich bleibt.

**Korollar:**  $\varepsilon := \frac{p}{100} \Rightarrow K_{n,0} = K_0 \cdot e^{(\varepsilon \cdot n)}$

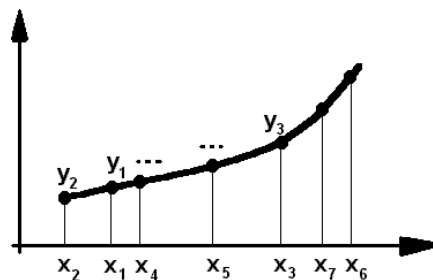
## 2.4 Grenzwerte bei Funktionen — Valeurs limites de fonctions

### 2.4.1 Konvergenz bei Funktionen — Convergence de fonctions

Betrachte:

$$\begin{array}{ccccc} & & \xrightarrow{g} & g(n) = a_n := x_n & \xrightarrow{f} \\ & \nearrow & & & \searrow \\ n & & & & f(x_n) = f(a_n) = f(g(n)) = y_n \\ & \searrow & & & \nearrow \\ & \xrightarrow{\quad} & \xrightarrow{\langle y_n \rangle} & \xrightarrow{\quad} & \end{array}$$

Durch Zusammensetzung von  $\langle a_n \rangle$  und  $f$  erhalten wir eine neue Folge  $\langle y_n \rangle$



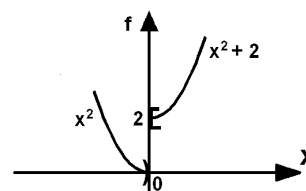
Sei  $a_n = x_n \rightarrow a_0 = x_0 \wedge y_n = f(x_n) = f(a_n) \rightarrow y_0$ .

D. h. :  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$

**Achtung:**  $y_n = f(x_n) = f(a_n) \rightarrow f(x_0) = f(a_0)$  wird nicht vorausgesetzt!

**Bsp.:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x^2 + 2 & x \geq 0 \end{cases}$$



Sei weiter:

$$x_n = \frac{1}{n}, x > 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + 2 = 2 = f(0) = f(x_0)$$

$$x_n = \frac{1}{-n}, x < 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(-n)^2} = \frac{1}{n^2} = 0$$

$\searrow$   
 $\nearrow \neq$

**Konsequenz:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$  ist ein Spezialfall !

Aus  $x_n \rightarrow x_0$  folgt nicht unbedingt auch  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

Daher definieren wir für den Spezialfall, in dem  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$  unabhängig von der gewählten Folge  $x_n$  immer gleich ist:

**Definition:**

$f$  hat für  $x \rightarrow x_0$  einen **Grenzwert** :

$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$  hängt nicht von der gewählten Folge ab

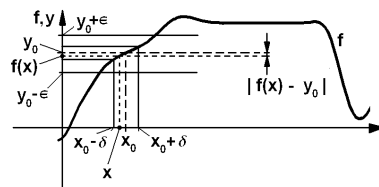
$\Leftrightarrow \exists y_0 \forall \langle x_n \rangle, x_n \rightarrow x_0 : \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_0$

Abstrakter formuliert:

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) : f(x) \in U_\varepsilon(y_0)$

Oder:  $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, |x - x_0| < \delta : |f(x) - y_0| < \varepsilon$



Die Definition der Konvergenz für Funktionen ist somit ein Spezialfall von Konvergenzverhalten von Folgen.

**Konsequenz:** Speziell für die Konvergenz der Folgen  $\langle y_n \rangle$  gelten die vorgängig erarbeiteten Konvergenzsätze für Folgen immer noch!

**Bsp.:**

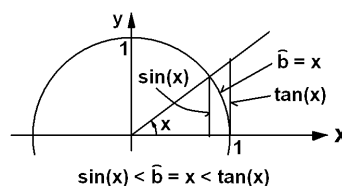
Aus der geometrischen Erfahrung weiss man:

$$x > 0 \Rightarrow \sin(x) < \widehat{b} = x < \tan(x)$$

$$\Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{\tan(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\cos(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : 1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \cos(x) \Rightarrow 1 = \lim_{x \rightarrow 0} 1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} \leq \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$$

$$\text{Ebenso zeigt man: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$



### 2.4.2 Einseitige Limes — Limites unilatéraux

Betrachte:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  mit  $f(x) = \sqrt{x}$ 

Man merkt sofort:

 $\lim_{x_n \rightarrow 0} \sqrt{x}$  ist für  $x_n = \frac{1}{-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  sinnlos

 $\leadsto \lim_{x_n \rightarrow 0} \sqrt{x}$  macht nur Sinn, wenn man den Definitionsbereich einschränkt auf  $\mathbb{R}_0^+$ .

 $\leadsto$  **Schreibweise:**  $\lim_{x \downarrow 0} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$ .
**Problem:** Diese Idee wollen wir allgemein fassen.Untersucht werden soll der Limes der Funktion  $f(x)$  an der Stelle  $x_0$ .**Definition:**Sei  $x < x_0$ ,  $D_f = (-\infty, x_0)$ .
 $\leadsto \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)|_{x < x_0} := \lim_{x \uparrow x_0} f(x)$  heisst
**Linksseitiger Limes****Definition:**Sei  $x > x_0$ ,  $D_f = (x_0, +\infty)$ .
 $\leadsto \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)|_{x > x_0} := \lim_{x \downarrow x_0} f(x)$  heisst
**Rechtsseitiger Limes****Konsequenz:**
 $\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x)$  ist eine besondere Forderung.

Aus der Logik wissen wir: Falls für  $x < x_0$  und für  $x > x_0$  eine bestimmte Beziehung gilt, so gilt sie auch für  $(x < x_0) \vee (x > x_0)$ .  $\leadsto$

**Satz:****Vor.:**

$$\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x)$$

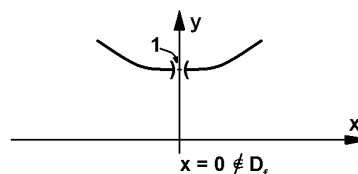
**Beh.:**
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existiert

$$\text{und } \lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

**Bsp.:**

$$f(x) = \frac{x}{\sin(x)} \Rightarrow x = 0 \notin D_f, \quad \lim_{x \uparrow 0} f(x) = 1, \quad \lim_{x \downarrow 0} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

Das Beispiel zeigt, dass im Falle  $x_0 \notin D_f$  (**Definitionslücke** in  $x_0$ ) der Limes  $\lim_{x \rightarrow x_0}$  trotzdem existieren kann. Durch die **Definition**  $f(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  lässt sich dann die Definitionslücke auf **natürliche Weise** „stopfen“.



**Bsp.:**  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ ,  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ . Für  $x \neq 1$  kann man jedoch kürzen:  $\leadsto$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \stackrel{|x \neq 1}{=} x + 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} x + 1 = 1$$

### 2.4.3 Stetigkeit — Continuité

Flugbahnkurven von Objekten der Makrophysik sind immer Kurven, die keine Lücken aufweisen. Das Objekt kann nicht augenblicklich seine Position wechseln, ohne dafür Zeit aufzuwenden: Es kann nicht „springen“, es muss sich stets bewegen. Bahnkurven nennt man daher **stetig**. Man kann sie mit einem Zeichenstift in einem Zuge skizzieren, ohne den Stift abheben zu müssen. Ist die Bahnkurve durch eine Funktionskurve dargestellt, so gilt in jedem Punkt  $(x_0, y_0 = f(x_0))$  daher:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = y_0$ . Gleiches gilt für den Rand begrenzter Flächen. Das motiviert uns zu der folgenden Definition:

**Definition:**

$$\begin{aligned} f(x) \text{ heisst } &\textbf{stetig} \text{ in } x_0 \\ &: \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), f(x_0) \text{ existieren und} \\ &\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \end{aligned}$$

(**Schreibweise:** „stetig“ für stetig)

**Bemerkung:** Eine in  $x_0$  stetige Funktion hat dort somit keinen Sprung, keine Definitionslücke und keinen Pol.

Diese Definition lässt sich sofort auf ganze Urbildmengen ausdehnen.  $f$  nennen wir stetig auf  $M$ , wenn  $f$  in jedem  $x_0$  aus  $M$  stetig ist:

**Definition:**

$$\begin{aligned} f &\textbf{ stetig auf } M \\ &: \Leftrightarrow \forall x_0 \in M \quad f(x_0) \text{ stetig} . \end{aligned}$$

Wir fassen es noch abstrakt, indem wir die schon erwähnten abstrakten Definitionen kombinieren:

**Definition:**

$$\begin{aligned} f &\textbf{ stetig auf } M \\ &: \\ &\Leftrightarrow \forall x_0 \in M \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \\ &\Leftrightarrow \forall x_0 \in M \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(x_0, \varepsilon) > 0 : \forall x, \quad |x - x_0| < \delta(x_0, \varepsilon) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall x_0 \in M \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(x_0, \varepsilon) > 0 : \forall x \in U_{\delta(x_0, \varepsilon)}(x_0) : f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0)) \end{aligned}$$

**Bemerkung:** Nach dieser Definition wählt man sich zuerst ein  $x_0 \in M$  aus ( $\forall x_0 \in M$ ). Dann wählt man sich ein  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  aus ( $\forall \varepsilon > 0$ ). Dann gilt es dazu ein  $\delta \in \mathbb{R}^+$  zu finden ( $\exists \delta > 0$ ). Dieses  $\delta$  muss demnach auf die vorher gewählten Parameter  $\varepsilon$  und  $x_0$  abgestimmt sein. Man muss ja ein geeignetes  $\delta$  finden, das bei den schon gewählten  $\varepsilon$  und  $x_0$  die dann folgenden Bedingungen erfüllt. Das heisst: Ein geeignetes  $\delta$  hängt demnach von  $\varepsilon$  und  $x_0$  ab:  $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$ .

**Konsequenz:** Für die Stetigkeit auf einer Menge  $M$  gilt:  $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$ .

Ist  $M$  speziell ein Intervall  $I$ , so bedeutet das, dass  $f$  in  $I$  keinen Sprung, keine Definitionslücke und keine Polstelle hat. Der Graph ist problemlos in einem Zug skizzierbar.

Am Ende eines abgeschlossenen Intervalls kann es jedoch Probleme geben, wenn die Funktion ausserhalb des Intervalls nicht mehr definiert ist. Daher benutzt man dort folgende Definitionen:

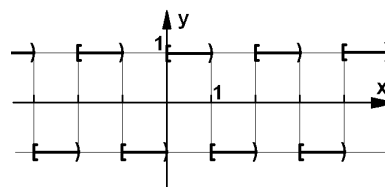
**Definition:**  $f$  heisst **linksseitig stetig** in  $x_0$   $x_0$  :  $\Leftrightarrow \lim_{x \uparrow x_0} f(x) = f(x_0)$

**Definition:**  $f$  heisst **rechtsseitig stetig** in  $x_0$   $x_0$  :  $\Leftrightarrow \lim_{x \downarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Bei Funktionen, die ab und zu einen Pol aufweisen, eignet sich die folgende Definition:

**Definition:**  $f$  heisst **stückweise stetig** in  $I$   $I$  :  $\Leftrightarrow f$  stetig in  $I$  ausser an isolierten Ausnahmestellen .

Isolierte Ausnahmestellen kann u.a. heissen, dass die Funktion an endlich vielen Stellen nicht stetig ist — oder auch dass  $f$  auf  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$  stetig ist.



#### 2.4.4 $L$ -Stetigkeit — "Continuité $L$ "

In den letzten Jahren hat man infolge Zeitknappheit begonnen, mit einem stärkeren, einschränkenderen Stetigkeits-Kriterium zu arbeiten. Die dabei verwendete Methode orientiert sich an der Lipschitzbedingung, welche im Zusammenhang mit der Eindeutigkeit von Lösungen von Differentialgleichungen eine Rolle spielt. Es ist üblich geworden, die dabei verwendete Konstante  $L$  auch bei der Stetigkeit „Lipschitz-Konstante  $L$ “ zu nennen. Daher werden wir hier kurz von „Lipschitz-Stetigkeit“ reden.

Für die Lipschitz-Stetigkeit verwenden wir folgende Definition:

**Definition:** **Lokale  $L$ -Stetigkeit**

Die Funktion  $f$  heisst  **$L$ -stetig** in  $x_0$

$$\Leftrightarrow \exists L, \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in U_\delta : |f(x) - f(x_0)| \leq L |x - x_0|$$

**Definition:****Globale  $L$ -Stetigkeit**

Die Funktion  $f$  heisst  $L$ -stetig in  $I$

$$\Leftrightarrow \forall x \in I: f \text{ ist } L\text{-stetig in } x_0$$

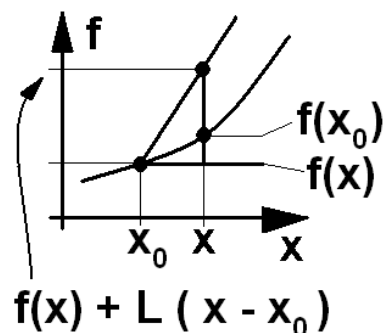
Für abgeschlossene Intervalle folgt sofort:

**Korollar:**

Die Funktion  $f$  ist  $L$ -stetig auf  $I = [a, b]$

$$\Leftrightarrow \exists L \in \mathbb{R}^+ \forall x, x_0 \in I: |f(x) - f(x_0)| \leq L |x - x_0|$$

Wählt man  $\delta = L \cdot \varepsilon$ , so sieht man sofort, dass aus  $L$ -stetig „gewöhnlich stetig“ folgt. Konsequenz:

**Satz:**

$f$   $L$ -stetig

$f$  stetig

### 2.4.5 Eigenschaften stetiger Funktionen — Qualités de fonctions continues

Stetige Funktionen auf einem abgeschlossenen Intervall sind **beschränkt**. Sonst müsste eine solche Funktion ja irgendwo auf  $I = [a, b]$  über alle Schranken wachsen, also einen Pol aufweisen. Das kann aber nicht sein, da für alle  $x_0 \in I$  gilt:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}, \neq \pm\infty$ .

**Schreibweise:**

$f \text{ stetig}(x_0) \rightsquigarrow f \text{ stetig in } x_0$

$f \text{ stetig}(I) \rightsquigarrow f \text{ stetig auf } I$

$\text{beschränkt}$  für  $\text{beschränkt}$

$\rightsquigarrow \text{beschränkt}(I)$  für  $\text{beschränkt auf } I$

**Satz:****Vor.:**

$f \text{ stetig}(I), I = [a, b]$

**Beh.:**

$f \text{ beschränkt}(I), I = [a, b]$

Aus der Definition der Stetigkeit folgt direkt:



**Satz:** **Vertauschung des Limes**

$$f \text{ stetig}(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right)$$

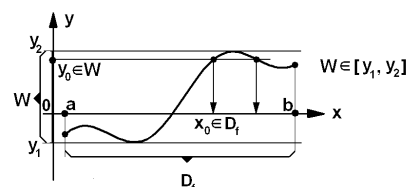
Stetige Funktionen zeigen die **Zwischenwerteigenschaft**:

Ist z.B. zu  $a < b$ ,  $f(a) \neq f(b)$ , z.B.  $f(a) < f(b)$  und  $y_0 \in [f(a), f(b)]$  so gibt es mindestens ein  $x_0 \in [a, b]$  mit  $f(x_0) = y_0$ .  $f(x)$  kann nicht an  $y_0$  „vorbeispringen“.

(Sonst könnte man das Intervall  $[a, b]$  in

zwei Teilmengen teilen, sodass auf der einen  $f(x_0) < y_0$  und auf der andern  $f(x_0) > y_0$  wäre. Es gäbe einen Grenzpunkt  $x_0$  zwischen diesen Teilmengen, bei dem man  $x$  von der einen in andere Teilmenge wandern lassen könnte. Z.B. wäre dann  $\lim_{x \uparrow x_0} < y_0$  nach Konstruktion der Teilmengen — und  $\lim_{x \downarrow x_0} > y_0$ ,

also  $\lim_{x \uparrow x_0} \neq \lim_{x \downarrow x_0}$ . Man hätte hier Unstetigkeit.)  $\leadsto$

**Satz:****Vor.:**

$$f \text{ stetig}(I), \quad I = [a, b], \quad a \neq b, \quad f(a) \neq f(b), \\ y_0 \in [f(a), f(b)] \quad (\text{oder } y_0 \in [f(b), f(a)])$$

**Beh.:**

$$\exists x_0 \in I : f(x_0) = y_0$$

Da die Stetigkeit mit Hilfe von Grenzwerten von Folgen definiert ist, kann man die Eigenschaften der Grenzwerte von Folgen auf die stetigen Funktionen übertragen. Dann folgt:

**Satz:****Vor.:**

$$f, g \text{ stetig}(x_0) \text{ resp. } f, g \text{ stetig}(x_0), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

**Beh.:**

1.  $\alpha f(x) \pm \beta g(x) \text{ stetig}(x_0) \text{ resp. } f, g \text{ stetig}(I)$
2.  $f(x) \cdot g(x) \text{ stetig}(x_0) \text{ resp. } \text{stetig}(I)$
3.  $g(x) \neq 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \text{ stetig}(I) \text{ resp. } \text{stetig}(I)$

**Korollar:****Vor.:**

$$p(x), q(x) \text{ Polynome}$$

**Beh.:**

$$p(x), q(x) \in \text{stetig}(\mathbb{R}) \\ q(x_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{p(x)}{q(x)} \in \text{stetig}(x_0)$$

**Bemerkung:**

$$f(x) = e^x, \ln(x), \sin(x), \cos(x), \dots \in \text{stetig}(D_f)$$

$\leadsto$  Vgl. auch Theorie der Potenzreihen!

**Bsp.:**  $f(x) = e^x \in \text{stetig}$ ? — Zeigen:  $x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow e^{x_n} \rightarrow e^{x_0}$ 

$$\leadsto e^{x_n} = e^{x_n - x_0 + x_0} = e^{(x_n - x_0) + x_0} = e^{x_n - x_0} \cdot e^{x_0} = e^{\varepsilon_n} \cdot e^{x_0}, \quad \varepsilon_n = x_n - x_0 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

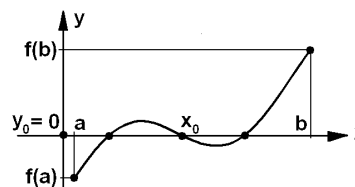
Wir betrachten den Fall  $\varepsilon_n \geq 0$ . Der Fall  $\varepsilon_n \leq 0$  wird dann genauso behandelt.Wir wissen, dass die Exponentialfunktionen monoton sind.  $\leadsto 1 \leq e^{\varepsilon_n} \leq 3^{\varepsilon_n} \leq 3^{\frac{1}{m}}, \quad 0 \leq \varepsilon_n \leq \frac{1}{m}$ Wegen  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  können wir  $\frac{1}{m} \rightarrow 0$  wählen.

$$\leadsto 1 \leq e^{\varepsilon_n} \leq 3^{\frac{1}{m}} \rightarrow 3^0 = 1 \Rightarrow e^{\varepsilon_n} \rightarrow 1 \Rightarrow e^{x_n} \rightarrow e^0 \cdot e^{x_0} = e^{x_0}$$



## 2.4.6 Anwendung auf Graphen — Applications à des graphes

Bei einer stetigen Funktion folgt unmittelbar aus Zwischenwerteigenschaft, dass der Graph nicht über die  $x$ -Achse „hüpfen“ kann, ohne einen Schnittpunkt oder eine Nullstelle zu erzeugen:

**Satz:****Vor.:** $f(x)$  stetig auf  $I = [a, b]$ ,  $f(a) \cdot f(b) < 0$ **Beh.:** $\exists x_0 \in I = (y, b) : f(x_0) = 0$ 

## 2.4.7 Schranken, Grenzen, Extrema — Bornes, limites, extréma

**Definitionen — Définitions**Im Folgenden sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein abgeschlossenes, halboffenes oder offenes Intervall.( Z.B.  $I = [\alpha, \beta], (\alpha, \beta], [\alpha, \beta), (\alpha, \beta).$  )

Wir sagen:

**Definition:** $\{a, b\} := \partial I$  heisst **Rand** von  $I$ 

Für Intervalle hat man in der Mathematik verschiedene wichtige Begrenzungsarten besonders bezeichnet:

**Definition:** $a$  heisst **untere Schranke** von  $I \Leftrightarrow \forall x \in I : a \leq x$ Entsprechend für eine **obere Schranke****Definition:**Die grösst mögliche untere Schranke von  $I$  heisst **Infimum** oder **untere Grenze**.Entsprechend **Supremum** oder **obere Grenze**

**Bsp.:**  $x \in (0, \pi] \Rightarrow 0 < f(x) = \frac{\sin x}{x} < 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = \text{Sup}_{x \rightarrow 0} f(x)$

Man sieht sofort:

**Lemma:** **Vor.:**  $\forall_{x \in D_f} M_1 < f(x) < M_2$   
**Beh.:**  $|f(x)| \leq \text{Max}(|M_1|, |M_2|)$

Bei abgeschlossenen Intervallen hat man besondere Verhältnisse:

**Definition:** Gehört ein Infimum  $a$  zu  $I$  ( $a \in I$ ), so heisst  $a$  **Minimum** von  $I$   
 Entsprechend für **Maximum**

### Anwendung bei Wertebereichen — Application pour des domaines de valeurs

Falls  $f(x_0)$  das Minimum des Wertebereichs von  $f$  ist, so sagen wir:

**Definition:**  $f$  hat in  $x_0$  ein **absolutes Minimum**  $\Leftrightarrow \forall_{x \in I} : f(x_0) \leq f(x)$   
 Entsprechend für **absolutes Maximum**

**Definition:**  $f$  hat in  $x_0$  ein **relatives** oder **lokales Minimum**  
 $\Leftrightarrow \exists_{U_\delta(x_0)} : f(x_0) = \text{absolutes Minimum in } U_\delta(x_0)$   
 Entsprechend **relatives** oder **lokales Maximum**

Sei  $x_0 \in \partial I$  :

**Definition:**  $f$  hat in  $x_0$  ein **Randminimum** (lokal oder absolut)  
 $\Leftrightarrow \exists_{\delta \in \mathbb{R}} : f$  hat in  $x_0$  ein absolutes Minimum bezüglich  $I \cap U_\delta(x_0)$   
 Entsprechend **Randmaximum**

Da jede stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall beschränkt ist, lässt sich durch Betrachtung von Grenzwerten von Folgen  $\langle x_n \rangle$ , deren Bilder  $y_n$  z.B. gegen ein Supremum der Wertemenge konvergieren, zeigen, dass auch das Supremum als Grenzwert ein Urbild  $x_0$  haben muss. Somit muss der folgende Satz richtig sein:

**Satz:** Jede auf einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion nimmt dort mindestens ein absolutes Maximum oder Minimum an.

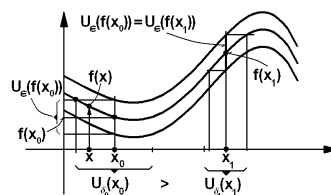
**Wichtig:** Jede auf einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion ist dort beschränkt, hat dort ein absolutes Maximum und Minimum und erfüllt den Zwischenwertsatz.

### 2.4.8 Gleichmässige Stetigkeit — Continuité uniforme

Wir erinnern uns an die Stetigkeitsdefinition für Funktionen auf einem Intervall:

$f$  **stetig** auf  $M$  :  $\Leftrightarrow \forall_{x_0 \in M} \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta(x_0, \varepsilon) > 0} : \forall_{x \in U_{\delta(x_0, \varepsilon)}(x_0)} : f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$

Bei einem gegebenen  $\varepsilon > 0$  und  $x_0$  hängt demnach das mögliche  $\delta$  von  $\varepsilon > 0$  und  $x_0$  ab.  $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$ . Skizziert man bei gegebenem  $\varepsilon$  zu jedem  $f(x_0)$  auch  $f(x_0) - \varepsilon$  und  $f(x_0) + \varepsilon$ , so erhält man den **fixen  $\varepsilon$ -Schlauch**.



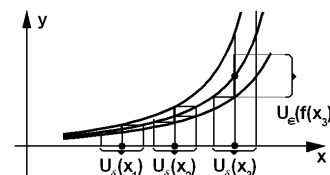
**Bsp.:** Sei  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Löse:  $f(x \pm \delta) = x \mp \varepsilon \Rightarrow \delta$

$x$	$f(x)$	$\varepsilon_{1,2}$	$\delta_{1,2}$	Bem.
0.1	10	+0.05	3.3333...	$\delta$ gross
0.1	10	-0.05	10	
10	0.1	+0.05	0.000497512...	$\delta$ klein
10	0.1	-0.05	0.000502513...	

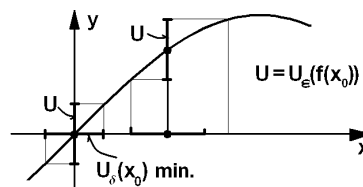
$\leadsto \delta$  hängt also von  $x$  ab.

Man kann die Sache aber auch umkehren:

Interessiert man sich in jedem Punkte  $x_0$  bei vorgegebenem  $\delta$  für das dazu mögliche  $\varepsilon$ , so erhält man den variablen  $\varepsilon(x_0, \delta)$ -**Schlauch**.



In Fällen wie  $f(x) = \sin(x)$ ,  $x \in [0, \pi]$  ergeben sich keine Probleme. Man findet bequeme Verhältnisse. Aus einer Graphik kann man ablesen, dass offensichtlich folgendes vermutet werden darf: Bei fix vorgegebenem  $\varepsilon$  gibt es irgendwo bei einem bestimmten  $x_0$  ein minimales  $\delta(x_0, \varepsilon)$ , das wegen der Minimalität für andere  $x_0$  auch verwendet werden kann.



Gegeben sei:  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ,  $x_0 \in I = \{x_0\}$  (Intervall),  $\delta < c = \text{const.}$

Allgemein kann man vermuten, dass hier das  $\delta(x_0, \varepsilon)$  wahrscheinlich eine stetige Funktion von  $x_0$  sein muss, denn es ist in  $I$  definiert, hat keinen Pol und kann nicht springen. (Sonst müsste  $f(x_0)$  springen,  $\varepsilon$  ist fix.)

Auf einem abgeschlossenen Intervall  $I = [a, b]$  hat eine stetige Funktion ein Maximum und Minimum.  $\delta(x_0, \varepsilon) > 0$  ist wegen der Stetigkeit von  $f$  überall auf  $I$  definiert, hat also z.B. in  $x_0 = c_0$  ein Minimum  $c_1 = \delta(c_0, \varepsilon) > 0$ .

(Falls trotzdem Zweifel an der Stetigkeit von  $\delta(x_0, \varepsilon)$  bei fixem  $\varepsilon$  bestehen, so bedenke man, dass  $\{\delta(x_0, \varepsilon) \mid x_0 \in I\}$  ein Infimum besitzen muss, gegen das eine Folge  $\langle \delta(x_{0,n}, \varepsilon) \rangle$  konvergieren muss. Da  $x_{0,n} \in I$  gilt, muss die Urbildfolge einen Häufungspunkt  $c_0$  haben, der aber in  $I$  liegen muss, da  $I$  abgeschlossen ist. Falls nun  $\delta(c_0, \varepsilon) = 0$  gelten würde, hätte man in  $c_0$  keine Stetigkeit, was nicht sein kann. Damit ist  $c_0 > 0$ .)  $\leadsto$

**Lemma:****Vor.:** $f$  stetig( $I$ ),  $I$  abgeschlossen**Beh.:** $\exists_{x_0=c_0 \in I} : \delta(c_0, \varepsilon) = c_1 \in \mathbb{R}^+$  minimal

**Problem:** Nun gibt es ersichtlicherweise äusserst ungünstige Fälle, bei denen bei gegebenem  $\varepsilon$  das zugehörige  $\delta$  bei bestimmten  $x_0$  sogar 0 werden kann, die Stetigkeitsdefinition ( $\delta > 0$ ) somit verletzt ist. (Umgekehrt kann bei fixem  $\delta$  dort  $\varepsilon = \infty$  werden.)

**Bsp.:**

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 \in U(0) \cap \mathbb{R}^+.$$

Seien :

$$f_1(x) = \frac{1}{x} + \varepsilon = \frac{1 + \varepsilon x}{x} := \frac{1}{x_1} = f(x_1)$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{x}{1 + \varepsilon x}$$

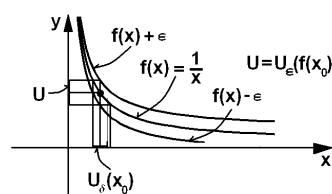
$$f_2(x) = \frac{1}{x} - \varepsilon = \frac{1 - \varepsilon x}{x} := \frac{1}{x_2} = f(x_2)$$

Betrachte z.B.

$$\varepsilon = \frac{1}{2}, \quad 0 < x_0 < 1, \quad \delta = x_0 - x_1 = x_0 - \frac{x_0}{1 + \varepsilon x_0} = x_0 \left(1 - \frac{1}{1 + \varepsilon x_0}\right), \quad 0 < \varepsilon x_0 < 1$$

Für  $x_0 \rightarrow 0$ 

$$\text{erhält man: } \delta = x_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + \varepsilon x_0}\right) \rightarrow 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + 0}\right) = 0$$



In der Mathematik zieht man sich in solchen Situationen immer durch einen besonderen Trick aus dem Sumpf: Man schränkt die Menge der Funktionen oder der Definitionsmengen so ein, dass dort das störende Problem nicht mehr auftritt. Man definiert eine ausgezeichnete Menge, in der alles rund läuft und untersucht dann, was diese Menge für Elemente hat.  $\leadsto$

In unserem Fall nennen wir eine Funktion **gleichmässig stetig**, wenn  $\delta$  unabhängig von  $x_0$  gewählt werden kann:  $\delta(x_0, \varepsilon) = \delta(\varepsilon)$ .

**Definition:** $f$  gleichmässig stetig auf  $M \rightarrow M$ 

$$: \Leftrightarrow \forall_{x_0 \in M} \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta(\varepsilon) > 0} : \forall_{x \in U_{\delta(\varepsilon)}(x_0)} : f(x) \in U_{\varepsilon}(f(x_0))$$

Obiges Lemma können wir jetzt wie folgt als Satz formulieren:

**Satz:****Vor.:** $f$  stetig( $I$ ),  $I$  abgeschlossen**Beh.:** $f$  gleichmässig stetig auf  $I \rightarrow I$

Andererseits wissen wir jetzt, dass bei Funktionen auf offenen Intervallen, die am Intervallende einen Pol besitzen, Probleme zu erwarten sind.

## 2.5 Eine Simulation mit rekursiven Folgen — Une simulation avec des suites récurrentes

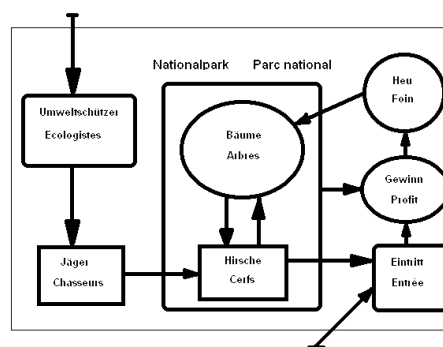
### 2.5.1 Ein Beispiel von linearem Naturschutzes — Un exemple de protection de la nature linéaire

Das folgende Beispiel hat sich angeblich um 1970 in einem abgegrenzten amerikanischen Nationalpark zugetragen: Alljährlich haben Jäger aus der Umgebung im Park eine Hirschjagd veranstaltet. Trotz der Jagd war die Population der Hirsche immer etwa konstant. Eines Tages haben Naturschützer von der Sache erfahren. Nach ihrer Meinung war das Treiben der Jäger nicht im Sinne des Naturschutzes. Schliesslich haben sie vor Gericht ein Jagdverbot erreicht. Danach ist es passiert.

Im Winter liegt bedeckt in dieser Gegend eine dicke Schneedecke längere Zeit den Boden. Die Hirsche überleben nur, da sie dann die Rinde von den Bäumen fressen. Diese sterben danach ab. Ohne Dezimierung durch die Jäger ist danach die Hirschpopulation rasch angestiegen. Die Menge der angefressenen Bäume hat schnell ein Ausmass erreicht, dass niemand erwartet hat: Nach wenigen Jahren waren alle Bäume des Waldes leergefressen und danach abgestorben. Im folgenden Winter sind alle Hirsche dann verhungert. . .

Dieses Geschehen wollen wir nun simulieren! Da es sich hier um ein vernetztes, rückgekoppeltes System von Zusammenhängen zwischen den einzelnen Variablen handelt, haben die nur linear denkenden Naturschützer die Hirschpopulation ausgerottet statt ihr Dasein zu verbessern. Ebenso für den Wald. Die gute, mit Unverstand realisierte Absicht hat zur maximal möglichen Katastrophe geführt. Das lehrt uns, dass man mit komplexen rückgekoppelten Systemen nicht naif verbesserisch umgehen darf. Die Katastrophe verhindern kann man durch Simulationen, jedoch nicht durch besserwisserische Hitzköpfigkeit.

Das nebenstehende Schema zeigt ein erstes einfaches Modell des Systems. Nun müssen wir die Wirkungszusammenhänge mit Hilfe von Funktionen modellieren. Wir untersuchen dann das System an diskreten Zeitpunkten, z.B. immer im Frühjahr. Das führt zu einem rückgekoppelten System von rekursiven Folgen.



Sei  $n$  die Variable für das Jahr. Wir führen folgende Funktionen von  $n$  ein, die bei diskreten Werten für  $n$  je eine Folge bilden:

$vE[n]$	=	Anzahl Eintritte
$vG[n]$	=	Gewinn
$vF[n]$	=	Fressen (Heu)
$vU[n]$	=	Anzahl Umweltschützer im Einsatz
$vJ[n]$	=	Anzahl Jäger
$vB[n]$	=	Anzahl Bäume
$vH[n]$	=	Anzahl Hirsche

Dazu kommen die folgenden Parameter. Die einen sind naturgegeben, die ändern kann der Mensch wählen.

<i>eintrittPreis</i>	=	Preis für einen Eintritt
<i>fixKosten</i>	=	Fixkosten Verwaltung
<i>factHeu</i>	=	Faktor für Aequivalent Gewinn — Heu statt Baum
<i>umweltjahr</i>	=	Jahr mit Beginn Umweltschutz
<i>pU</i>	=	Anzahl Umweltschützer
<i>vJTot</i>	=	Anzahl Jäger
<i>fressen</i>	=	Faktor für gefressene Bäume pro Hirsch
<i>faktorB</i>	=	Faktor für Vermehrung der Bäume
<i>faktorH</i>	=	Faktor für Vermehrung der Hirsche
<i>factorJschiesse</i>	=	Anzahl abgeschossene Hirsche pro Jäger
<i>umweltjahr</i>	=	Jahr mit Beginn Umweltschutz

Zur Zeit  $n = 0$  initialisieren wir alle Variablen mit 1, also z.B.  $vE[0] = 1$ . Damit verhindern wir später unbelegte Variablen.

Eigentlich müsste man die naturgegebenen Gesetze aus auf Beobachtungen basierende Statistiken gewinnen. Da uns das hier nicht möglich ist, schätzen wir sie fürs erste sehr grob wie folgt (*Mathematica*-Code):

#### Mathematica-Programm:

```
fPos[x_ /; x >= 0] := x;
fPos[x_ /; x < 0] := 0;
vE[n_] := Floor[vH[n - 1]/vH[1] * vE[n - 1] + vE[n - 1] * Random[]];
vG[n_] := fPos[eintrittPreis * vE[n] - fixKosten];
vF[n_] := vG[n]/factHeu;
vU[n_ /; n >= umweltjahr] = pU;
vU[n_ /; n < umweltjahr] = 0;
vJ[n_] := Ceiling[vJTot * E^(-vU[n])];
vB[n_] := fPos[Floor[vB[n - 1]* faktorB - vH[n - 1] * fressen ] ];
vH[n_] :=
  fPos[Floor[
    vH[n - 1]*faktorH *(vB[n] + vF[n])/(vB[n - 1] + 1) -
    factorJschiesse * vJ[n - 1]]];
```

*fPos* macht negative Werte zu 0. Damit werden negative Anzahlen unterdrückt. *Floor* wählt die nächstkeine ganze Zahl. *Random* gibt eine Pseudozufallszahl zwischen 0 und 1. *vU* gibt für  $n \geq \text{umweltjahr}$  den Wert  $pU$  und sonst den Wert 0. *Ceiling* gibt die nächstgrössere ganze Zahl. *E* ist die eulersche Zahl. Es sei dem Leser überlassen, diese Formeln in üblicher mathematischer Schreibweise zu schreiben und die gewählten Zusammenhänge zu erklären.

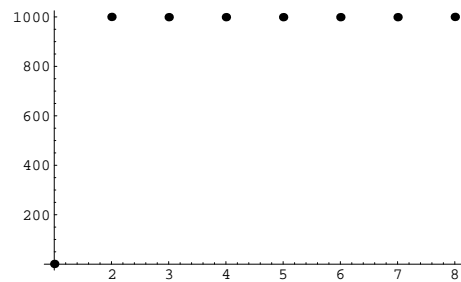
Mit dem folgenden Programm erzeugen wir eine Liste der Werte sowie zugehörige Diagramme für  $vH[n]$

**Mathematica-Programm:**

```
Print[MatrixForm
[N[Prepend[Table[{vE[n], vG[n], vF[n], vU[n], vJ[n], vB[n], vH[n]}, {n, 0,
7}], {"vE[n]", "vG[n]", "vF[n]", "vU[n]", "vJ[n]", "vB[n]",
"vH[n]"}]]]];
tabH = Flatten[Table[{vH[n]}, {n, 0, 7}]];
lP1 = ListPlot[tabH, PlotStyle -> PointSize[0.02]];
tabH = Flatten[Table[{vH[n]}, {n, 0, 7}]];
lP2 = ListPlot[tabH, PlotJoined -> True];
Show[lP1, lP2];
```

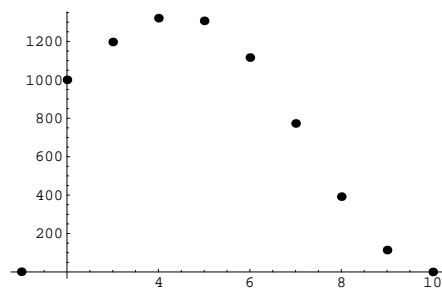
Die folgenden Startwerte und Parameterwerte (1'000 Hirsche, 10'000 Bäume) führen zum nebenstehenden Diagramm für die Hirschpopulation. Hier schießen die Jäger jährlich einige Hirsche ab. (10 Jäger je 20 Hirsche.)

$vE[1]$	=	10
$eintrittPreis$	=	5
$fixKosten$	=	500
$factHeu$	=	10
$pU$	=	5
$vJTot$	=	10
$vB[1]$	=	10000
$fressen$	=	4
$faktorB$	=	1.4
$vH[1]$	=	1000
$faktorH$	=	1.2
$factorJschieszen$	=	20
$umweltjahr$	=	100



Nun ändern wir die Situation: Ab Jahr 1 ist Jagdverbot. Es wird noch etwas gewildert. Wie man sieht, bricht die Hirschpopulation rasch auf 0 zusammen.

$vE[1]$	=	10
$eintrittPreis$	=	5
$fixKosten$	=	500
$factHeu$	=	10
$pU$	=	5
$vJTot$	=	10
$vB[1]$	=	10000
$fressen$	=	4
$faktorB$	=	1.4
$vH[1]$	=	1000
$faktorH$	=	1.2
$factorJschieszen$	=	2 !!!
$umweltjahr$	=	1 !!!



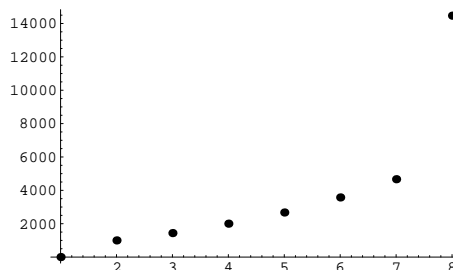


Die nachfolgende Tabelle zeigt den genauen Simulationsverlauf.

$n$	$vE[n]$	$vG[n]$	$vF[n]$	$vU[n]$	$vJ[n]$	$vB[n]$	$vH[n]$
1.	10.	0.	0.	5.	1.	10000.	1000.
2.	14.	0.	0.	5.	1.	10000.	1197.
3.	28.	0.	0.	5.	1.	9212.	1321.
4.	34.	0.	0.	5.	1.	7612.	1307.
5.	77.	0.	0.	5.	1.	5428.	1116.
6.	114.	0.	0.	5.	1.	3135.	773.
7.	249.	485.	75.	5.	1.	1305.	401.
8.	112.	180.	62.	5.	1.	214.	83.
9.	164.	420.	0.	5.	1.	0.	22.
10.	106.	0.	20.	5.	1.	56.	0.

Nun ändern wir die Situation nochmals: Es wird nicht mehr geschossen (Faktor 0). Die Hirsche benötigen weniger Rinde. Dazu bekommen sie mehr Heu. Wie man sieht, steigt die Hirschpopulation rasch an...

$vE[1]$	=	10
$eintrittPreis$	=	5
$fixKosten$	=	500
$factHeu$	=	1 !!!
$pU$	=	5
$vJTot$	=	10
$vB[1]$	=	10000
$fressen$	=	2 !!!
$faktorB$	=	1.4
$vH[1]$	=	1000
$faktorH$	=	1.2
$factorJschessen$	=	0 !!!
$umweltjahr$	=	100 !!!



Das *Mathematica*-Programm ist zu finden unter:

<http://www.hta-bi.bfh.ch/~wir/MathemDF/Mathem.html>  
 === > File CM10.nb

## 2.6 Landau-Symbole und Fibonacci — Le symboles de Landau et Fibonacci

### 2.6.1 Landaus 'O'-Symbol — Le symbole 'O' de Landau

**Definition — Définition**

**Symbole 'O' und 'o' von Landau:**

**Symbol:**  $3n^3 - 2n^2 + 4n - 5 = O[n^3], o[n^4]$

'O' steht dabei für „Ordnung“ ( $O[n^3]$ )  $\rightsquigarrow$  Potenzen der Ordnung (Polynomgrad) mindestens  $n$ .

Gegeben seien zwei Folgen  $\langle a_n \rangle$  und  $\langle b_n \rangle$ . Wir definieren ( $O[b_n]$ ,  $O(b_n)$ ,  $o[b_n]$ ,  $o(b_n)$ ):

**Definition:**

$$\langle a_n \rangle = O(b_n) \Leftrightarrow (\exists_{M \in \mathbb{R}^+} : |\frac{a_n}{b_n}| \leq M)$$

$$\langle a_n \rangle = o(b_n) \Leftrightarrow (\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0)$$

**Bsp.:**

1.  $\langle n^3 - 4n^2 + 5n + 9 \rangle = O(n^3)$
2.  $\langle n^3 - 4n^2 + 5n + 9 \rangle = O(n^k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad n \geq 3$
3.  $\langle n^3 - 4n^2 + 5n + 9 \rangle = o(n^4)$
4.  $\langle n^3 - 4n^2 + 5n + 9 \rangle = o(e^n)$

**Bemerkung:**

Statt  $a_n = O(b_n)$  schreiben wir kurz  $O(b_n) \rightsquigarrow$  z.B.  $c \cdot a_n = c \cdot O(b_n)$  u.s.w..

**Wichtig:**

Z.B. *Mathematica* verwendet auch dieses Symbol! Für die Rechnung mit Reihen muss es unterdrückt werden. Dafür existiert der Befehl „Normal“.

**Regeln — Règles**

Aus der Definition ist unmittelbar ersichtlich:

**Konsequenz:**

- $\oslash \quad a_n = O(a_n)$
- $\oslash \quad c = \text{const.} \in \mathbb{R} \Rightarrow c \cdot a_n = O(a_n) \quad - \spadesuit \heartsuit \spadesuit - \quad c \cdot o(a_n) = o(a_n)$
- $\oslash \quad c_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow c_1 \cdot O(a_n) + c_2 \cdot O(a_n) = O(a_n) \quad - \spadesuit \heartsuit \spadesuit - \quad c_1 \cdot o(a_n) + c_2 \cdot o(a_n) = o(a_n)$
- $\oslash \quad a_n = O(b_n), \quad b_n = O(c_n) \Rightarrow a_n = O(c_n) \quad - \spadesuit \heartsuit \spadesuit - \quad a_n = o(b_n), \quad b_n = o(c_n) \Rightarrow a_n = o(c_n)$
- $\oslash \quad O(O(a_n)) = O(a_n) \quad - \spadesuit \heartsuit \spadesuit - \quad o(o(a_n)) = o(a_n)$
- $\oslash \quad O(a_n) O(b_n) = O(a_n b_n) = a_n O(b_n) \quad - \spadesuit \heartsuit \spadesuit - \quad o(a_n) o(b_n) = o(a_n b_n) = a_n o(b_n)$

**Bemerkung:**

Die folgenden Folgen sind mit  $O$  und  $o$  nicht vergleichbar:

$$a_n = \begin{cases} n^2 & n \text{ gerade} \\ \sin(n) & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} \sin(n) & n \text{ ungerade} \\ n^2 & n \text{ gerade} \end{cases}$$

**Begriffe:**

$O$	Folge
$O(1)$	konstant
$O(n)$	linear
$O(n^2)$	quadratisch
$O(n^3)$	kubisch
$O(n^k)$	polynomial
$O(e^n)$	exponentiell
$O(\log_a n, a > 1)$	logarithmisch
$O(\dots)$	...

### 2.6.2 Benchmark, Fibonacci — Benchmark, Fibonacci

#### Problem — Problème

Computer werden oft nach Benchmarktests bewertet. Eine gängige Methode ist es, Fibonacci-Zahlen zu berechnen und dabei die Zeit zu messen. Wie weit die berechneten Glieder einer Folge den Speicher füllen hängt dabei von ihrem Wachstumsverhalten ab. Ähnliche Probleme begegnen einem bei Sortialgorithmen.

#### Fibonacci-Folgen, Definition — Suites de Fibonacci, définition

**Definition:**  $\langle a_n \rangle$  Fibonacci-Folge  $\Leftrightarrow$

1.  $a_1 \in \mathbb{R}_0^+$
2.  $a_2 \in \mathbb{R}^+$
3.  $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

#### Eigenschaften von Fibonacci-Folgen, Qualités des suites de Fibonacci

Sei  $q_n := \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow q_n = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{q_{n-1}}$

**Lemma:** **Vor.:**  $q_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}, a_1 \in \mathbb{R}_0^+, a_2 \in \mathbb{R}^+$

**Beh.:**  $q_n = 1 + \frac{1}{q_{n-1}}$

$a_1 \in \mathbb{R}_0^+, a_2 \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a_{n+1} = a_n + a_{n-1} > 0$   
 $\Rightarrow \forall_{n>1} q_n > 0 \leadsto \forall_{n>2} 1 < 1 + \frac{1}{q_{n-1}} = q_n \wedge \forall_{n>2} \frac{1}{q_{n-1}} < 1 \Rightarrow \forall_{n>2} 1 < q_n < 1 + 1 = 2$

**Lemma:** **Vor.:**  $q_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}, a_1 \in \mathbb{R}_0^+, a_2 \in \mathbb{R}^+$

**Beh.:**  $1 < q_n < 2$  (beschränkt)

Um die Konvergenz der  $q_n$  nachzuweisen, müssen wir die Monotonie untersuchen. Dazu habe ich entdeckt, dass Kettenbrüche weiterhelfen:



$$\leadsto d_{n-1} - d_{n+1} = (q_{n-1} - g) - (q_{n+1} + g) = q_{n-1} - q_{n+1} = q_{n-1} - \frac{2q_{n-1} + 1}{q_{n-1} + 1} = \frac{q_{n-1}^2 + q_{n-1} - 2q_{n-1} + 1}{q_{n-1} + 1}$$

**Lemma:** 
$$d_{n-1} - d_{n+1} = \frac{q_{n-1}^2 - q_{n-1} + 1}{q_{n-1} + 1}$$

Sei  $|d_k| < 1$ ,  $g \approx 1.61803$ ,  $q_{n-1} = g + d_{n-1}$

$$\Rightarrow \Delta d_{2,n-1} = d_{n-1} - d_{n+1} = \frac{(g + d_{n-1})^2 - (g + d_{n-1}) + 1}{g + d_{n-1} + 1} = \frac{g^2 + 2g d_{n-1} + d_{n-1}^2 - g - d_{n-1} + 1}{g + d_{n-1} + 1} =$$

$$\frac{g^2 + 2g d_{n-1} + d_{n-1}^2 - g - d_{n-1} + 1}{g + d_{n-1} + 1} = \frac{\overbrace{g^2 - g + 1}^{=0} + 2g d_{n-1} + d_{n-1}^2 - d_{n-1}}{g + d_{n-1} + 1} = \frac{2g d_{n-1} + d_{n-1}^2 - d_{n-1}}{g + d_{n-1} + 1}$$

$$\approx \frac{2g d_{n-1} - d_{n-1}}{g + d_{n-1} + 1} = \frac{(2g - 1) d_{n-1}}{g + d_{n-1} + 1} \approx \frac{(2g - 1) d_{n-1}}{g + 1} \approx \frac{2.23607 d_{n-1}}{2.61803} \approx 0.854102 d_{n-1}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sgn}(d_{2,n-1}) = \operatorname{sgn}(d_{n-1}), \quad d_{n-1} - d_{n+1} \approx 0.854102 d_{n-1} \Rightarrow d_{n+1} \approx 0.145898 d_{n-1} \Rightarrow |d_{n+1}| < |d_{n-1}|$$

**Lemma:**

1.  $|d_{n+1}| < |d_{n-1}|$
2.  $\operatorname{sgn}(d_{2,n-1}) = \operatorname{sgn}(d_{n-1})$

**Konsequenz:**  $\langle q_{2n} \rangle$  monoton fallend  
 $\langle q_{2n-1} \rangle$  monoton wachsend

$g$  ist einziger positiver Fixpunkt von  $q_n = 1 + \frac{1}{q_{n-1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{q_{n-2}}}$  für  $n = 2k$  und für  $n = 2k + 1$ .  
 Beide Folgen ( $n = 2k$ ,  $n = 2k + 1$ ) sind monoton und beschränkt. Da der Häufungspunkt Fixpunkt des Algorithmus sein muss, konvergieren die Folgen gegen  $g = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

**Satz:** **Vor.:**

1.  $a_1 \in \mathbb{R}_0^+$
2.  $a_2 \in \mathbb{R}^+$
3.  $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

**Beh.:**

1.  $q_n := \frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow g = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$
2.  $g = q_\infty = q_n = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}$
3.  $q_n = 1 + \frac{1}{q_{n-1}}$

**Wachstum von Fibonacci-Folgen — Manière de croître des suites de Fibonacci**

Wir wollen die Fibonacci-Folge mit  $c_n = b^n$ ,  $b > 1$  vergleichen.

Es gilt:  $b^n = b^{n-1} \cdot b$ ,  $b^{n+1} = b^n \cdot b = b^{n-1} \cdot b^2$

$$\Rightarrow c_{n+1} = b^{n+1} = b^{n-1} \cdot b^2$$

$$c_n + c_{n-1} = b^{n-1} \cdot b + b^{n-1} = b^{n-1} \cdot (b + 1)$$

**Problem:**  $c_{n+1} = c_n + c_{n-1} \Rightarrow b = ?$

$$\begin{aligned} \text{Sei } c_{n+1} = c_n + c_{n-1} &\Rightarrow b^{n-1} \cdot b^2 = b^{n-1} \cdot (b + 1) \Rightarrow b^2 = b + 1 \Rightarrow b^2 - b - 1 = 0 \\ &\Rightarrow b_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \wedge b > 0 \Rightarrow b_{1,2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = g \Rightarrow b_n = g^n \end{aligned}$$

**Satz:**

**Vor.:**

1.  $c_n = b^n$ ,  $b > 1$
2.  $c_{n+1} = c_n + c_{n-1}$

**Beh.:**  $b = g = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ,  $c_1 = g$ ,  $c_n = g^n$

**Korollar:**

**Vor.:**

1.  $c_{n+1} = c_n + c_{n-1}$
2.  $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ ,  $a_1 \geq 0$ ,  $a_2 > 0$
3.  $q_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

**Beh.:**

1.  $c_n = g^n \Rightarrow \frac{c_{n+1}}{c_n} \rightarrow g$
2.  $c_n = a_n \neq g^n \Rightarrow q_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow g$
3.  $a_n = O(g^n)$

Wir müssen noch  $a_n = O(g^{n+k})$  nachweisen.

1. Sei  $a_1 = 1 < c_1 = g$ ,  $a_2 < c_2 = g^2$ ,  $a_3 = 1 + 1 = 2 < g + g^2 = c_3 = c_1 + c_2$


Induktion:

$$\begin{aligned} a_n < c_n = g^n, \quad a_{n-1} < c_{n-1} = g^{n-1} &\Rightarrow a_{n+1} = a_n + a_{n-1} < c_n + c_{n-1} = c_{n+1} \\ \Rightarrow \exists_{M \in \mathbb{R}^+} \left| \frac{a_n}{c_n} \right| < M \end{aligned}$$

2. Sei  $a_1 \geq 0$ ,  $a_2 < 0$   
 $\Rightarrow \exists_{k, n_0} \forall_{n < n_0} a_n < g^{n+k} = c_{n+k} \Rightarrow a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

$$\Rightarrow \exists_{M \in \mathbb{R}^+} \forall_{N_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n > N_0} \left| \frac{a_n}{c_n} \right| < M$$

$$< c_{n+k} + c_{n-1_k} = c_{n+1+k} = g^{n+1+k} = c_{n+1} \cdot g^k$$







## Kapitel • Chapitre 3

# Differentialrechnung (Funktionen mit einer Variablen) — Calcul différentiel (fonctions avec une variable)

### 3.1 Problemstellung — Problématique

#### 3.1.1 Grundlagen — Fondements

Klassisch teilt man die **Infinitesimalrechnung** auf in **Differentialrechnung** und **Integralrechnung**. Die uns auferlegten Rahmenbedingungen erlauben es uns aus Gründen der Gewichtung jedoch nicht, dieser reinen Form der Aufteilung zu folgen. Trotzdem bildet sie aber eine untrennbare Einheit.

Historisch geht die Infinitesimalrechnung (nach Anfängen bei Pascal<sup>4</sup> und anderen) hauptsächlich auf Leibniz<sup>5</sup> und Newton<sup>6</sup> zurück. Weiter ausgearbeitet wurde sie dann zu einem grossen Teil in Basel durch die Bernoullis<sup>7</sup> und durch Euler<sup>8</sup>.

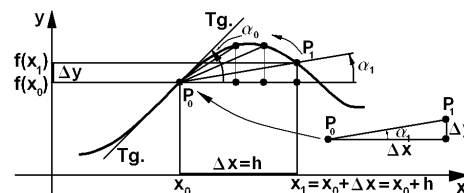
#### 3.1.2 Das Problem der Tangentensteigung — Le problème de la pente de la tangente

#### 3.1.3 Die Begriffe — Les notions

**Problem:** Die Geometrie und später die Physik hat zu folgender Fragestellung motiviert:

Gegeben sei eine Funktionskurve ( $\leadsto$  der Graph einer stetigen Funktion, die keine „Zacken“ aufweist).

Gesucht: Die Tangente („Schmiegegerade“) an die Kurve in einem Punkt  $P_0$ . Diese soll eindeutig sein.



<sup>4</sup>Blaise Pascal 1623–1662

<sup>5</sup>Gottfried Wilhelm Leibniz 1646–1716

<sup>6</sup>Isaac Newton 1642–1727

<sup>7</sup>Z.B. Jakob der ältere Bernoulli 1654–1705

<sup>8</sup>Leonard Euler 1707–1783

In der Physik trifft man diese Fragestellung, wenn es darum geht, z.B. die „Momentangeschwindigkeit“ eines Massepunktes zu bestimmen. Die durchschnittliche Geschwindigkeit eines Massepunktes im Weg–Zeit–Diagramm zwischen  $P_0 = (t_0, s(t_0)) = (t_0, s_0)$  und  $P_1 = (t_1, s(t_1)) = (t_1, s_1)$  berechnet sich nach Definition der Geschwindigkeit bekanntlich als das Verhältnis  $\frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0}$ . Das ist gerade die Steigung der Sehne zwischen den genannten Punkten:  $\frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = \tan \alpha_0$ .

**Idee:** Um von der Sehnensteigung (Sekantensteigung) zur „Tangentensteigung“ zu kommen, rücken wir den Punkt  $P_1$  immer näher zu  $P_0$ . Die Sekante geht so im Grenzfall in diejenige Gerade über, die wir offensichtlich für die Tangente halten und somit als Tangente definieren müssen – die Tangente ist ja in der Geometrie erst für Kurven wie Kreis, Ellipse u.s.w. durch eine Konstruktionsanleitung definiert, aber nicht für beliebige Kurven. Genauso verfahren wir bei Punkten  $P_0, P_1$  auf beliebigen Graphen von reellen Funktionen mit einer Variablen. Das könnte dann funktionieren in jedem Punkt  $P_0 = (x_0, f(x_0))$  eines Graphen, wo die Kurve „glatt“ ist, d.h. keine Spitze hat.  $\leadsto$

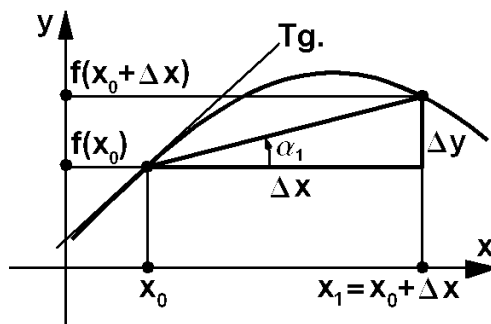
Um über das eben Gesagte besser reden zu können, fassen wir einige spezielle Sachverhalte in Begriffe, d.h. wir führen Namen ein:

**Definition:**

Die Sekantensteigung:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha_1) &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \\ \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &:= DQ(f, x_0, x_1) \end{aligned}$$

heisst **Differenzenquotient**.



**Definition:**

Der Limes des Differenzenquotienten

$$\begin{aligned} \tan(\alpha_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} DQ(f, x_0, x) \end{aligned}$$

heisst **Differentialquotient** oder **Ableitung** resp. **Tangentensteigung** der **Stammfunktion**  $f$  an der Stelle  $x_0$ .

**Schreibweise:**  $\tan(\alpha_0) := f'(x_0) = \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=x_0} := \frac{d}{dx} f(x) \Big|_{x=x_0}$

**Bemerkung:**

$f'(x_0)$  stammt von Newton,

$\frac{df(x)}{dx}$  hingegen von Leibniz.

Beide Schreibweisen sind gebräuchlich. Je nach Situation ist die eine oder die andere besser.

$dx$ ,  $dy$ ,  $df$  nennt man **differentielle** oder **infinitesimale** Grössen. Sie haben hier nur symbolischen Charakter.

Einen Sinn erhalten sie in der **Non-Standard-Analysis**. Wir können uns vorstellen, dass sie beim

Grenzübergang 0 werden, jedoch nicht von beliebig hoher Ordnung 0. Dass es verschiedene Ordnungen von 0 gibt, haben wir bei der Untersuchung der reellen Zahlen und von unendlich erfahren.

Wie wir wissen, braucht ein Limes nicht immer zu existieren. Hier existiert er nur, falls die Sekantensteigung  $a_{(x_0)}(x_1)$  sich in  $x_0$  stetig verhält (bei  $\lim_{x \rightarrow x_0}$ ). Falls das der Fall ist, so sagen wir:

**Definition:** Falls  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} DQ(f, x_0, x)$  existiert, so heisst  $f$  in  $x_0$  **differenzierbar**.

Wenn  $f'(x_0)$  in jedem  $x_0$  in einer gewählten Definitionsmenge  $D_f$  existiert, so ist dadurch in natürlicher Weise eine **Funktion**  $f' : x_0 \mapsto f'(x_0)$  definiert. Somit können wir definieren:

**Definition:**  $f' : x \mapsto f'(x)$  ( $x \in D_{f'}$ ) heisst Ableitungsfunktion (kurz: Ableitung)

Die Ableitung  $f'(x)$  ist demnach die Steigungsfunktion der Tangente.

**Definition:**  $f$  heisst **differenzierbar** auf  $I$   
 $\Leftrightarrow \forall x_0 \in I$   $f'(x_0)$  existiert .  
 $\leadsto$  kurz : *diff'bar*,  
 $\text{diff'bar}(\cdot)I \leadsto$  auf  $I$   
 $\mathcal{D}^{(1)}(I) := \{f \mid f \text{ diff'bar}(I)\}$

### 3.1.4 $L$ –Differenzierbarkeit — ”Dérivable

Analog zur  $L$ –Stetigkeit können wir auch die stärkere  $L$ –Differenzierbarkeit definieren:

**Definition:** **Lokale  $L$ –Differenzierbarkeit**  
 Die Funktion  $f$  heisst  **$L$ –differenzierbar** in  $x_0$

$$\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{R}^+ \forall x \in U_\delta :$$

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + R(x) \wedge |R(x)| \leq k \cdot (x - x_0)^2$$

$m$  heisst im Falle der  $L$ –Diff’barkeit **Ableitung** von  $f$  in  $x_0$ .

**Konsequenz:**

**Vor.:**

$$\forall x \in U_\delta : f \text{ } L\text{-differenzierbar}$$

**Beh.:**

$$\exists L \in \mathbb{R}^+ \forall x \in U_\delta : \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| = |m| + |k \cdot (x - x_0)| \leq L$$

**Interpretation:** Die Sekantensteigung ist demnach in  $U_\delta$  immer kleiner gleich  $L$ .

**Definition:****Globale  $L$ -Differenzierbarkeit**

Die Funktion  $f$  heisst  **$L$ -differenzierbar** in  $I$

$$\Leftrightarrow \forall_{x \in I}: f \text{ ist } L\text{-diff'bar in } x_0.$$

Für abgeschlossene Intervalle folgt sofort:

**Korollar:**

Die Funktion  $f$  ist  **$L$ -differenzierbar** auf  $I = [a, b]$

$$\Leftrightarrow \exists_{L \in \mathbb{R}^+} \forall_{x, x_0 \in I}: |f(x) - f(x_0)| \leq L |x - x_0|$$

Ähnlich wie bei der  $L$ -Stetigkeit sieht man sofort, dass aus  $L$ -differenzierbar „gewöhnlich differenzierbar“ folgt. Konsequenz:

**Satz:****Vor.:**

$f$   $L$ -differenzierbar

**Beh.:**

$f$  differenzierbar

Trivialerweise gilt der Satz:

**Satz:****Vor.:**

$f$   $L$ -differenzierbar

**Beh.:**

$f$   $L$ -stetig

**3.1.5 Einfache Beispiele — Exemples simples****1. Beispiel:** Gerade:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b \Rightarrow f(x_0) = ax_0 + b \\ \Rightarrow f'(x_0) &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{(ax_1 + b) - (ax_0 + b)}{x_1 - x_0} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{a(x_1 - x_0) + (b - b)}{(x_1 - x_0)} \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{a(x_1 - x_0)}{(x_1 - x_0)} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} a = a \Rightarrow f'(x) = a \end{aligned}$$

Die berechnete Steigung ist demnach die bekannte Geradensteigung.

**Speziell:**  $f(x) = b = \text{const.} \Rightarrow a = 0 \Rightarrow f'(x) \equiv 0$

**2. Beispiel:** Parabel:

$$\begin{aligned}
f(x) = a x^2 &\Rightarrow f(x_0) = a x_0^2 \Rightarrow \forall_{x_0 \in \mathbb{R}} DQ = DQ(a x^2, x_0, x_1) = \frac{a x_1^2 - a x_0^2}{x_1 - x_0} = \\
&= \frac{a(x_1 - x_0)(x_1 + x_0)}{(x_1 - x_0)} = a(x_1 + x_0)|_{x_1 \neq x_0} \Rightarrow \lim_{x_1 \rightarrow x_0} DQ = a \cdot 2 \cdot x_0 = f'(x_0) \Rightarrow \forall_{x \in \mathbb{R}} f'(x) = 2 a x
\end{aligned}$$

**3. Beispiel:** Wurzel:  $(\sqrt{x})' = ?$

$$\begin{aligned}
DQ &= \frac{(x_0 + h)^{\frac{1}{2}} - (x_0)^{\frac{1}{2}}}{h} = \frac{(x_0 + h)^{\frac{1}{2}} - (x_0)^{\frac{1}{2}}}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{(x_0 + h)^{\frac{1}{2}} - (x_0)^{\frac{1}{2}}}{((x_0 + h)^{\frac{1}{2}} + x_0^{\frac{1}{2}})((x_0 + h)^{\frac{1}{2}} - x_0^{\frac{1}{2}})} \\
&= \frac{1}{((x_0 + h)^{\frac{1}{2}} + x_0^{\frac{1}{2}})} \rightarrow \frac{1}{2 x_0^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2 \sqrt{x_0}} = (\sqrt{x})' \leadsto
\end{aligned}$$

**Formel:**  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2 \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2} x_0^{-\frac{1}{2}}$

**4. Beispiel:** Parabel höherer Ordnung:

$$\begin{aligned}
f(x) = x^n &\Rightarrow f(x_0) = x_0^n \Rightarrow \forall_{x_0 \in \mathbb{R}} DQ = DQ(x^n, x_0, x_1) = \frac{x_1^n - x_0^n}{x_1 - x_0} = \\
&= \frac{(x_1 - x_0)(x_1^{n-1} x_0^0 + x_1^{n-2} x_0^1 + x_1^{n-3} x_0^2 + \dots + x_1^0 x_0^{n-1})}{(x_1 - x_0)} = \\
&= (x_1^{n-1} x_0^0 + x_1^{n-2} x_0^1 + x_1^{n-3} x_0^2 + \dots + x_1^0 x_0^{n-1})|_{x_1 \neq x_0} \\
\Rightarrow \lim_{x_1 \rightarrow x_0} DQ &= n x_0^{n-1} = f'(x_0) \Rightarrow \forall_{x \in \mathbb{R}} f'(x) = n x^{n-1}
\end{aligned}$$

### 3.1.6 Höhere Ableitungen — Dérivées supérieures

Da  $f'(x)$  wieder eine Funktion ist, kann es sein, dass in den betrachteten Punkten wieder Tangenten an den Graphen von  $f'(x)$  existieren, dass also  $(f'(x))' = \lim_{x_1 \rightarrow x} DQ(f', x, x_1)$  wieder existiert für die betrachteten  $x$ . Dann ist  $(f'(x))'$  wieder eine Funktion. Entsprechend für  $((f'(x))')'$  und so fort. Wir reden hier von **höheren Ableitungen**.

**Definition:**

$$\begin{aligned}
f''(x) &:= (f'(x))' = \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} f \right) := \frac{d^2 f}{dx^2}: \\
&\quad \textbf{2-te Ableitung} \quad (f \in \mathcal{D}^{(2)}(I) \dots) \\
f'''(x) &:= (f''(x))' = \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} f' \right) := \frac{d^3 f}{dx^3}: \\
&\quad \textbf{3-te Ableitung} \quad (f \in \mathcal{D}^{(3)}(I) \dots) \\
f^{(n)}(x) &:= (f^{(n-1)}(x))' = \frac{d}{dx} \left( \frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} \right) := \frac{d^n f}{dx^n}: \\
&\quad \textbf{n-te Ableitung} \quad (f \in \mathcal{D}^{(n)}(I) \dots)
\end{aligned}$$

(Später sind diese Ableitungen wichtig bei Potenzreihen. )

**Bsp.:**

Ein Massepunkt bewegt sich nach der Gleichung

$$s(t) = c t^2.$$

$\leadsto$  Geschwindigkeit (Änderung des Weges pro Zeit) :  $v(t) = s'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = 2 c t$  (vgl. Bsp. 2 oben).

$\leadsto$  Beschleunigung: Änderung der Geschwindigkeit pro Zeit  $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t) = (s'(t))' = s''(t) =$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = 2c$$

(Es ist natürlich nicht notwendig, immer alle diversen Schreibweisen wiederzugeben.)

### 3.1.7 Diff'barkeit und Stetigkeit — Dérivabilité et continuité

Man sieht schon anschaulich ein, dass eine Funktion an ihren Unstetigkeitspunkten keine eindeutige Tangente besitzen kann. (Man denke an Polstellen, Definitionslücken, Sprünge.) Nicht stetig bedeutet also nicht differenzierbar. Jedoch kann es sehr wohl sein, dass eine Funktion in einem Punkt stetig ist, jedoch nicht differenzierbar. Man denke an eine Spitze im Graphen, wo keine eindeutige Tangente existiert. Es gilt jedoch: Falls in einem Punkt eine Tangente existiert (falls die Funktion differenzierbar ist), so ist sie dort stetig.

$$\begin{aligned} \text{Denn : } c = f'(x_0) &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \Rightarrow 0 = \left( \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right) - c \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right) - c = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0) - c(x_1 - x_0)}{x_1 - x_0} \\ \Rightarrow 0 &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0) - c(x_1 - x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} - \lim_{x_1 \rightarrow x_0} c(x_1 - x_0) \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} f(x_1) = f(x_0) \Rightarrow f \text{ stetig}(x_0). \end{aligned}$$

**Satz:**  $f \text{ diff'bar}(x_0) \Rightarrow f \text{ stetig}(x_0)$

**Kontraposition:**

$$\begin{aligned} &f \text{ nicht stetig in } x_0 \\ \Rightarrow &f \text{ nicht diff'bar in } x_0 \end{aligned}$$

**Wichtig:** Stetigkeit ist nur notwendig, aber nicht hinreichend für Differenzierbarkeit. Es gibt stetige, nicht differenzierbare Funktionen (z.B. fraktale Gebilde).

Es gibt sogar Funktionen, die überall definiert sind, jedoch nirgends stetig und somit nirgends diff'bar sind.

**Bsp.:**

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Eine Funktion, die überall stetig und nirgends differenzierbar ist, stammt von Weierstrass:

$$f(x) = f(x, \lambda, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(2-s)k} \cdot \sin(\lambda^k x), \quad \lambda \gg 1, \quad s \in (1, 2), \quad x \in D_f = [0, 1]$$

Eine Vorstellung vom Graphen erhalten wir durch folgende grobe Approximation:

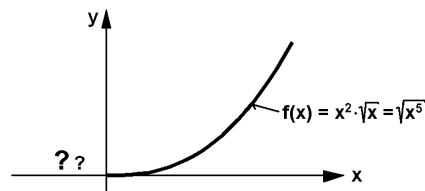
$$f_n(x) = f_n(x, \lambda, s) = f_5(x, 5, 1.5) = \sum_{k=1}^{n=5} 5^{(2-1.5)k} \cdot \sin(5^k x)$$



### 3.1.8 Links- und rechtsseitige Diff'barkeit — Dérivabilité de gauche et de droite

**Bsp.:**  $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x} = \sqrt{x^5}$

Betrachtet man den Graphen, so wird es offensichtlich, dass eine Tangente im Punkt  $(0,0)$  sinnvoll ist. Jedoch ist dort vorerst die Ableitung nicht definiert, da wegen dem Definitionsbereich kein zweiseitiger Limes existieren kann. Es existiert nur ein rechtsseitiger Limes:



$$\leadsto DQ = DQ(x^{\frac{5}{2}}, 0, x_1) = \frac{x_1^{\frac{5}{2}} - 0^{\frac{5}{2}}}{x_1 - 0} = \frac{x_1^{\frac{5}{2}}}{x_1} = x_1^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \lim_{x_1 \uparrow 0} DQ = \lim_{x_1 \downarrow 0} x_1^{\frac{3}{2}} = 0^{\frac{3}{2}} = 0$$

Daher ist es in Punkten wie im eben studierten Beispiel sinnvoll, eine links- und rechtsseitige Ableitung zu definieren:

**Definition:**

$$\lim_{x_1 \uparrow x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} := f'_\uparrow(x_0)$$

heißt **linksseitige Ableitung** von  $f$  in  $x_0$  (linksseitige Tangentensteigung)

$$\lim_{x_1 \downarrow x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} := f'_\downarrow(x_0)$$

heißt **rechtsseitige Ableitung** von  $f$  in  $x_0$  (rechtsseitige Tangentensteigung)

Damit gelingt es nun, auch den Knick mathematisch zu fassen. Wir Definieren:

**Definition:**

**Vor.:**  $\lim_{x \uparrow x_0} f(x), \lim_{x \downarrow x_0} f(x)$  existieren .

$\leadsto f$  hat in  $x_0$  einen **Sprung**  
 $\Leftrightarrow \lim_{x \uparrow x_0} f(x) \neq \lim_{x \downarrow x_0} f(x)$

**Definition:**

**Vor.:**

Sei  $f$  stetig( $x_0$ ),  
 $\lim_{x \uparrow x_0} f'(x), \lim_{x \downarrow x_0} f'(x)$  ex. .

$f$  hat in  $x_0$  einen **Knick**  
 $\Leftrightarrow \lim_{x \uparrow x_0} f'(x) \neq \lim_{x \downarrow x_0} f'(x)$

Das bedeutet also dass die linksseitige Steigung der Tangente ungleich der rechtsseitigen Steigung der Tangente ist.

## 3.2 Der Kalkül — Le calcul

### 3.2.1 Grundlagen, Potenzfunktion — Fondements, fonction puissance

Ein Kalkül ist eine Sammlung von Regeln, die uns die Sache besonders einfach machen, da man sich wiederholende Sachverhalte nicht immer neu herzuleiten braucht.

Eine Regel haben wir schon hergeleitet (vg. Bsp. 3, 3.1.5 Seite 72):

<b>Regel:</b>	<b>Potenzfunktion</b>
<u><b>Vor.:</b></u>	$f(x) = x^n$
<u><b>Beh.:</b></u>	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

**Bsp.:**  $f(x) = x^7 \Rightarrow f'(x) = 7x^6$

### 3.2.2 Linearität — Linéarité

#### Lineare Operatoren — Opérateurs linéaires

Bis jetzt haben wir Funktionen mit  $D_f \subseteq \mathbb{R}$ ,  $W_f \subseteq \mathbb{R}$  studiert. Auf der Grundlage des allgemeinen Funktionenbegriffs (vgl. Algebra) ist diese Einschränkung jedoch künstlich.  $D_f$  und  $W_f$  können irgend welche Mengen sein, z.B. auch Zahlen oder auch selbst Funktionen. Z.B.  $D_f = \{f(x) \mid f \text{ diff'bar}(I)\}$ ,  $W_f = \{h(x) \mid \exists_{f(x)} : h(x) = f'(x)\}$ . Wenn nun Definition- und Wertebereich aus Funktionen bestehen, so wollen wir von **Operatoren** sprechen.

Seien  $: M_D, M_W =$  speziell festgelegte Funktionenklassen .

**Definition:** **Operatoren** sind Funktionen mit  $D_{Op} \subseteq M_D, W_{Op} \subseteq M_W$ .

**Bsp.:**  $\frac{d}{dx} : f(x) \mapsto f'(x) = \frac{df}{dx}$  ist ein Operator

**Bemerkung:**

Da infolge  $\frac{d}{dx}$  differenziert wird, heisst dieser Operator speziell **Differentialoperator**.

**Definition:** Ein Operator  $\Phi : V \mapsto V'$  heisst **linear**, wenn er folgende Bedingungen erfüllt:

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} \forall_{f_1, f_2 \in V} \quad \Phi(f_1(x) + f_2(x)) = \Phi(f_1(x)) + \Phi(f_2(x)) \\ \forall_{f(x) \in V, \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})} \quad \Phi(\lambda f(x)) = \lambda \Phi(f(x)) \end{array}$$

**Konsequenz:**

Ein linearer Operator erfüllt:

$$\Phi(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) = \lambda_1 \Phi(f_1(x)) + \lambda_2 \Phi(f_2(x))$$



**Linearität des Differentialoperators — Linéarité de l'opérateur différentiel**

**Satz:**  $\frac{d}{dx}$  ist ein linearer Operator:  $\leadsto$

**Regel:** **Vor.:**  $f_1, f_2 \in \{f \mid f \text{ diff'bar}(I)\}, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

**Beh.:**

1.  $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in \{f \mid f \text{ diff'bar}(I)\}$
2.  $(\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x))' = \alpha_1 f_1'(x) + \alpha_2 f_2'(x)$

**Beweis:**

$$\begin{aligned}
 DQ &= DQ(\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x), x_0, x_1) \\
 &= \frac{(\alpha_1 f_1(x_1) + \alpha_2 f_2(x_1)) - (\alpha_1 f_1(x_0) + \alpha_2 f_2(x_0))}{x_1 - x_0} = \\
 &= \frac{\alpha_1(f_1(x_1) - f_1(x_0)) + \alpha_2(f_2(x_1) - f_2(x_0))}{x_1 - x_0} = \alpha_1 \frac{f_1(x_1) - f_1(x_0)}{x_1 - x_0} + \alpha_2 \frac{f_2(x_1) - f_2(x_0)}{x_1 - x_0} \\
 \Rightarrow \lim_{x_1 \rightarrow x_0} DQ &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \alpha_1 \frac{f_1(x_1) - f_1(x_0)}{x_1 - x_0} + \alpha_2 \frac{f_2(x_1) - f_2(x_0)}{x_1 - x_0} = \alpha_1 f_1'(x_0) + \alpha_2 f_2'(x_0) \\
 &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{(\alpha_1 f_1(x_1) + \alpha_2 f_2(x_1)) - (\alpha_1 f_1(x_0) + \alpha_2 f_2(x_0))}{x_1 - x_0} = (\alpha_1 f_1(x_0) + \alpha_2 f_2(x_0))'
 \end{aligned}$$

**Bsp.:**  $f(x) = 3x^6 - 4x^5 + 8x^2 - 9 \Rightarrow f'(x) = 18x^5 - 20x^4 + 16x + 0$

**Konsequenz:**

Polynome sind diff'bar auf  $\mathbb{R}$ .

**Korollar:**

**Vor.:**

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

**Beh.:**

1.  $p'(x) = a_n \cdot n \cdot x^{n-1} + a_{n-1} \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} + \dots + a_1$
2.  $p^{(n)}(x) = a_n \cdot n! = \text{const.}$
3.  $p^{(n+1)}(x) = 0$

**3.2.3 Wichtige Regeln — Règles importantes****Differenzenquotient und Restfunktion — Quotient différentiel et fonction de reste**

Seien

$$\triangleright DQ = DQ(f(x), x_0, x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} := R_f(x) \text{ für } x_0 \in \mathbb{R} \text{ fix.}$$

$$\triangleright f \in \mathcal{D}^{(1)}(x_0) (\leadsto f'(x_0) \text{ existiert})$$

$$\triangleright \exists_{\delta \in \mathbb{R}^+} : \frac{1}{x - x_0} \text{ stetig}(\dot{U}_\delta(x_0)).$$

Dann gilt:

$$\triangleright R_f(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ stetig}(x_0) \quad \left( \lim_{x \rightarrow x_0} R_f(x) = f'(x_0), \text{ fortsetzbar} \right)$$

$$\begin{aligned} \triangleright f(x) &= \frac{f(x_0)(x - x_0) + f(x)(x - x_0) - f(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = \\ &= f(x_0) + R_f(x)(x - x_0) \end{aligned}$$

**Lemma:**

**Restfunktionslemma**

**Vor.:**

$$R_f(x) = DQ(f(x), x_0, x) \wedge f \in \mathcal{D}^{(1)}(x_0)$$

**Beh.:**

$$f(x) = f(x_0) + R_f(x)(x - x_0), \quad D_{R_f} = D_f, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} R_f(x) = f'(x_0)$$

Mit dem Restfunktionslemma gelingt es, verschiedene Regeln herzuleiten. À l'aide du lemme de la fonction du reste on peut déduire certaines règles.

### Ableitung des Sinus — Dérivée du sinus

Verwende das Additionstheorem:

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \quad \text{sowie:} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\begin{aligned} \leadsto DQ &= R_{\sin}(x) = \frac{\sin(x_1) - \sin(x)}{x_1 - x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} = \\ &= 2 \sin\left(\frac{x + \Delta x - x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x + \Delta x + x}{2}\right) \cdot \frac{1}{\Delta x} = 2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{1}{\Delta x} \cdot \cos\left(\frac{2x + \Delta x}{2}\right) \\ \Rightarrow \sin'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{1}{\Delta x} \cdot \cos\left(\frac{2x + \Delta x}{2}\right) = 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x^*)}{2\Delta x^*} \Big|_{x^* = \frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{2x + \Delta x}{2}\right) \\ &= 2 \lim_{\Delta x^* \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x^*)}{\Delta x^*} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(x) = 1 \cdot \cos(x) = \cos(x) \end{aligned}$$

**Regel:**

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sin'(x) = \cos(x)$$

### Produkten- und Quotientenregel — Règle du produit et du quotient

Seien  $f, g \in \mathcal{D}^{(1)}(x_0)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) \cdot g(x) &= (f(x_0) + R_f(x)(x - x_0)) \cdot (g(x_0) + R_g(x)(x - x_0)) = \\ &= f(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot R_g(x)(x - x_0) + g(x_0) \cdot R_f(x)(x - x_0) + R_f(x) \cdot R_g(x) \cdot (x - x_0)^2 \\ \Rightarrow DQ &= \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{f(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot R_g(x)(x - x_0) + g(x_0) \cdot R_f(x)(x - x_0) + R_f(x) \cdot R_g(x) \cdot (x - x_0)^2 - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f(x_0) \cdot R_g(x) + g(x_0) \cdot R_f(x) + R_f(x) \cdot R_g(x) \cdot (x - x_0) \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} DQ = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) \cdot R_g(x) + g(x_0) \cdot R_f(x) + R_f(x) \cdot R_g(x) \cdot (x - x_0) = \\ &= f(x_0) \cdot g'(x_0) + g(x_0) \cdot f'(x_0) \end{aligned}$$

**Kurz:**

$$\frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x_0) + f(x) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$f(x) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow f(x_0) \cdot f'(x_0) + g(x_0) \cdot g'(x_0)$$

Falls  $f, g \in \mathcal{D}^{(1)}(I)$  gilt, ist diese Betrachtung für alle  $x_0 \in I$  gültig. Man erhält somit die Regel:

**Regel:**

**Produktenregel**

**Vor.:**

$$f, g \in \mathcal{D}^{(1)}(I)$$

**Beh.:**

$$(f(x) \cdot g(x))' = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x) \quad \text{in } I$$

**1. Beispiel:**

$$(x \cdot \sin(x))' = (x)' \cdot \sin(x) + x \cdot (\sin'(x)) = 1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x) = \sin(x) + x \cdot \cos(x)$$

**2. Beispiel:**

$$1 = (x)' = (\sqrt{x} \cdot \sqrt{x})' = 2 \cdot \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x})' \Rightarrow (\sqrt{x})' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

**3. Beispiel:**

$$f(x) = \sin^2(x), \quad f'(x) = (\sin(x) \cdot \sin(x))' = \cos(x) \cdot \sin(x) + \sin(x) \cdot \cos(x) = 2 \sin(x) \cdot \cos(x)$$

**4. Beispiel:**

Mit Hilfe vollständiger Induktion und der Produktenregel beweist man sofort:

**Regel:**

**Leibniz-Formel**

**Vor.:**

$$f, g \in \mathcal{D}^{(n)}(I)$$

**Beh.:**

$$(f(x) \cdot g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x) \quad \text{in } I$$

Eine etwas andere Schreibweise der Produktenregel ist die Quotientenregel:

$$\text{Sei } f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}, \quad f, g, h \in \mathcal{D}^{(1)}(I), \quad h(x) \neq 0 \quad (\forall x \in I) \Rightarrow f(x) \cdot h(x) = g(x)$$

$$\Rightarrow g'(x) = (f(x) \cdot h(x))' = f'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot h'(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{h(x)} \cdot (g'(x) - f(x) \cdot h'(x))$$

$$= \frac{1}{h^2(x)} \cdot (g'(x) \cdot h(x) - \frac{g(x)}{h(x)} \cdot h'(x) \cdot h(x)) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h^2(x)}$$

**Regel:** **Quotientenregel**

**Vor.:**  $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}, \quad f, g, h \in \mathcal{D}^{(1)}(I), \quad \forall x \in I : h(x) \neq 0$

**Beh.:**

$$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h^2(x)} \quad \text{in } I$$

Spezialfall:  $f(x) = \frac{1}{h(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{(1)' \cdot h(x) - 1 \cdot h'(x)}{h^2(x)} = \frac{-h'(x)}{h^2(x)}$

**Korollar:** **Vor.:**

$$f(x) = \frac{1}{h(x)}, \quad h \in \mathcal{D}^{(1)}(I), \quad \forall x \in I : h(x) \neq 0$$

**Beh.:**

$$f'(x) = -\frac{h'(x)}{h^2(x)} \quad \text{in } I$$

**Bsp.:**  $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \Rightarrow (x^{-n})' = -\frac{(x^n)'}{x^{2n}} = -\frac{(n \cdot x^{n-1})'}{x^{2n}} = (-n) \cdot x^{-(n+1)}$

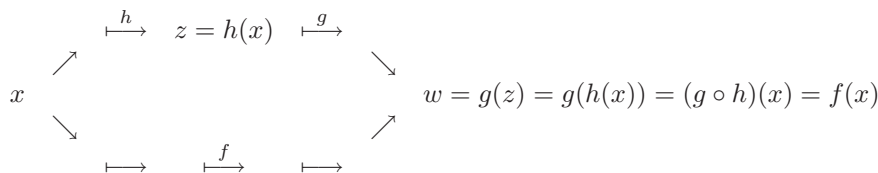
**Bemerkung:** Es ist somit:  $(x^{-n})' = (-n) \cdot x^{-n-1}$

**1. Beispiel:** Mit Hilfe der Quotientenregel können wir nun auch den Tangens (u.s.w.) differenzieren:

$$\begin{aligned} (\tan(x))' &= \left( \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)' = \frac{(\sin(x))' \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (\cos(x))'}{\cos^2(x)} = \\ &= \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} \end{aligned}$$

### Kettenregel — Règle conjointe

Studiere:



Es gilt:  $DQ = \frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}, \quad x \rightarrow x_0 \Rightarrow z \rightarrow z_0$

$$\Rightarrow \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \left( \frac{dg}{dz} \Big|_{z=z_0=h(x_0)} \right) \cdot \frac{dh}{dx} \Big|_{x=x_0}$$

**Regel:** Kettenregel**Vor.:**

$$f(x) = g(h(x)), \quad f, h \in \mathcal{D}^{(1)}(I), \quad g \in \mathcal{D}^{(1)}(h(I))$$

**Beh.:**

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dg(h(x))}{dx} = \left( \frac{dg(z)}{dz} \right)_{|z=h(x)} \cdot \frac{dh(x)}{dx}$$

**Definition:**  $g(x)$  heisst hier **äussere Funktion**,  $h(x)$  hingegen **innere Funktion**. Entsprechend heisst  $g'(x)$  **äussere Ableitung** und  $h'(x)$  **innere Ableitung**.

**1. Beispiel:**  $f(x) = \sin^2(x) = h(x)^2 = z^2$  ( $h(x) = \sin(x)$ ,  $g(z) = z^2$ )

Wir wissen von oben:  $f'(x) = (\sin^2(x))' = 2 \sin(x) \cdot \cos(x)$

Nun können wir auch anders rechnen:  $f'(x) = \left( \frac{dz^2}{dz} \right)_{|z=\sin(x)} \cdot \frac{d \sin(x)}{dx} = 2z \cdot \cos(x) = 2 \sin(x) \cdot \cos(x)$

Andererseits ist aber hier:  $f(x) = \sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$

$$\Rightarrow 2 \sin(x) \cdot \cos(x) = f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = (1)' - (\cos^2(x))' = -(\cos^2(x))' = -\frac{dz^2}{dz} \cdot \frac{d \cos(x)}{dx} \Big|_{z=\cos(x)}$$

$$= -2z \Big|_{z=\cos(x)} \cdot \frac{d \cos(x)}{dx} = -2 \cos(x) \cdot \frac{d \cos(x)}{dx}$$

$$\Rightarrow 2 \sin(x) \cdot \cos(x) = -2 \cos(x) \cdot \frac{d \cos(x)}{dx} \Rightarrow \frac{d \cos(x)}{dx} = -\sin(x)$$

**2. Beispiel:**  $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) = \sin(z)$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{df(z)}{dz} \cdot \frac{dz(x)}{dx} = \frac{d \sin(z)}{dz} \cdot \frac{d \omega x + \varphi}{dx} = \cos(z) \cdot \omega = \omega \cdot \cos(\omega x + \varphi)$$

**Korollar:**  $(\cos(x))' = -\sin(x) \quad (\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$

### Ableitung der Umkehrfunktion — Dérivée de la fonction inverse

Mit Hilfe der Kettenregel ist es jetzt einfach, Umkehrfunktionen abzuleiten. Betrachte:

$$z = f^{-1}(x), \quad f^{-1}(f(z)) = (f^{-1} \circ f)(z) = Id(z) = z, \quad z \xrightleftharpoons[f^{-1}]{f} x$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 = \frac{df^{-1}(f(z))}{dz} = \frac{df^{-1}(x)}{dx} \Big|_{x=f(z)} \cdot \frac{d(f(z))}{dz} \Big|_{z=f^{-1}(x)} \Rightarrow \frac{df(x)^{-1}}{dx} = \frac{1}{\frac{d(f(z))}{dz} \Big|_{z=f^{-1}(x)}}$$

**Regel:** 
$$\frac{df(x)^{-1}}{dx} = \frac{1}{\frac{d(f(z))}{dz} \Big|_{z=f^{-1}(x)}}$$

Mit dieser Regel können wir jetzt z.B. Wurzelfunktionen differenzieren:

**Bsp.:** Sei  $x = f(z) = z^n$ ,  $z = f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d(x^{\frac{1}{n}})}{dx} &= \frac{1}{\frac{dz^n}{dz}|_{z=x^{\frac{1}{n}}}} = \frac{1}{n \cdot z^{n-1}|_{z=x^{\frac{1}{n}}}} = \frac{1}{n \cdot (x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot (x^{-\frac{1}{n}})^{n-1} = \frac{1}{n} \cdot x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} \\ \Rightarrow (x^{\frac{1}{n}})' &= \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} \end{aligned}$$

**Der Witz des Tages:**  $\frac{f'}{f} = \frac{\cdot'}{\cdot}$

(Gefunden anlässlich der Korrektur einer Arbeit.)

Mit der Kettenregel finden wir jetzt allgemeiner:

$$\begin{aligned} f(x) = \sqrt[q]{x^p} = x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}} &\Rightarrow (\sqrt[q]{x^p})' = ((x^p)^{\frac{1}{q}})' = \frac{dz^{\frac{1}{q}}}{dz}|_{z=x^p} \cdot \frac{dx^p}{dx} = \frac{1}{q} \cdot (x^p)^{\frac{1}{q}-1} \cdot p \cdot x^{p-1} \\ &= \frac{p}{q} \cdot x^{p(\frac{1}{q}-1)+(p-1)} = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1} \Rightarrow (x^{\frac{p}{q}})' = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1} \end{aligned}$$

**Korollar:**

**Vor.:**

Sei  $\sqrt[q]{x^q} = x^{\frac{p}{q}}$  definiert

**Beh.:**

$$(x^{\frac{p}{q}})' = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1}$$

**Konsequenz:** In allen betrachteten Fällen haben wir bis jetzt die folgende Regel gefunden:  
 $f(x) = x^\alpha \Rightarrow f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$

**Problem:**

Gilt diese Regel auch für  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ ?

Die Frage ist zu bejahen. Anschaulich kann man sich der Sache durch das Argument nähern, dass wir eine irrationale Zahl  $r = \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $r \notin \mathbb{Q}$  durch rationale Zahlen  $r_n = \alpha_n$  beliebig genau annähern können.  $f'_n(x) = r_n x^{r_n-1}$  nähert sich dann beliebig genau an  $r x^{r-1}$  an. Da sich die betrachteten Kurven mitsamt der Tangenten aus Erfahrung bei diesem Prozess stetig verhalten, ist stark zu vermuten, dass  $r x^{r-1} = (x^r)'$  gilt. Um den Rahmen zu wahren, lassen wir hier den exakten Beweis weg.

### 3.2.4 Ableitung wichtiger Funktionen — Dérivées de fonctions importantes

**Plausibilitätsbetrachtung — Dédution de façon plausible**

Sei  $n \cdot x = y$ ,  $x = \text{const.}$ ,  $n \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow \infty \rightsquigarrow n = \frac{y}{x}$

$$\text{Bekannt:} \quad e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n \Rightarrow e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} ((1 + \frac{1}{n})^n)^x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^{n \cdot x} = \lim_{y \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{y})^y$$

Angenommen, man könnte die Limesbildung bei der Zahl  $e$  mit der Limesbildung bei der Ableitung vertauschen, so müsste gelten:

$$(e^x)' = \left( \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{y}\right)^y \right)' = \lim_{y \rightarrow \infty} \left( \left(1 + \frac{x}{y}\right)^y \right)' = \lim_{y \rightarrow \infty} y \cdot \left(1 + \frac{x}{y}\right)^{y-1} \cdot \left(1 + \frac{x}{y}\right)' = \lim_{y \rightarrow \infty} y \cdot \left(1 + \frac{x}{y}\right)^{y-1} \cdot \frac{1}{y} =$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{y}\right)^{y-1} \cdot \frac{1 + \frac{x}{y}}{1 + \frac{x}{y}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{y}\right)^y \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{y}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{y}\right)^y \cdot \frac{1}{1 + 0} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{y}\right)^y = e^x \Rightarrow (e^x)' = e^x$$

**Vermutung:**  $(e^x)' = e^x$

### Ableitung des natürlichen Logarithmus — Dérivée du logarithme naturel

Sei  $f(x) = y = \ln(x)$ ,  $x_0 > 0$ ,  $\frac{\Delta x}{x_0} = \gamma$ ,  $\frac{1}{\gamma} = \alpha$

$$\text{Es gilt: } DQ = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln(x) - \ln(x_0)}{x - x_0} = \frac{\ln(\frac{x}{x_0})}{x - x_0} = \frac{\ln(\frac{x_0 + \Delta x}{x_0})}{\Delta x} = \frac{\ln(1 + \frac{\Delta x}{x_0})}{x_0 \cdot \frac{\Delta x}{x_0}} =$$

$$= \frac{1}{x_0} \cdot \frac{\ln(1 + \frac{\Delta x}{x_0})}{\frac{\Delta x}{x_0}} \Big|_{\frac{\Delta x}{x_0} = \gamma} = \frac{1}{x_0} \cdot \frac{\ln(1 + \gamma)}{\gamma} = \frac{1}{x_0} \cdot \ln((1 + \gamma)^{\frac{1}{\gamma}}) = \frac{1}{x_0} \cdot \ln((1 + \frac{1}{\alpha})^{\alpha})$$

Betrachte den Fall  $\alpha > 0$ , z.B.  $\alpha = n \in \mathbb{N}$ :

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} DQ = \lim_{\gamma \rightarrow 0} DQ = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} DQ = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{x_0} \cdot \ln((1 + \frac{1}{\alpha})^{\alpha}) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_0} \cdot \ln((1 + \frac{1}{n})^n) \Big|_{\ln \text{ stetig}} = \frac{1}{x_0} \cdot \ln(\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n) = \frac{1}{x_0} \cdot \ln(e) = \frac{1}{x_0} \cdot 1 = \frac{1}{x_0}$$

Für  $\alpha < 0$  erhält man denselben Grenzwert durch die folgende Substitution:

$$(1 + \frac{1}{\alpha})^{\alpha} \Big|_{\alpha = -\beta} = (1 + \frac{1}{-\beta})^{(-\beta)} = (1 - \frac{1}{\beta})^{(-\beta)} = (\frac{\beta - 1}{\beta})^{(-\beta)} = (\frac{\beta}{\beta - 1})^{(\beta)} = (\frac{\beta - 1 + 1}{\beta - 1})^{(\beta)}$$

$$= (1 + \frac{1}{\beta - 1})^{(\beta)} \Big|_{\beta = \rho + 1} = (1 + \frac{1}{\rho})^{(\rho + 1)} = (1 + \frac{1}{\rho})^{(\rho)} \cdot (1 + \frac{1}{\rho}) \rightarrow e \cdot 1 = e,$$

$$\alpha \rightarrow -\infty \Rightarrow \beta \rightarrow +\infty \Rightarrow \rho \rightarrow +\infty$$

**Bsp.:**  $(\ln(|x|))' = (\ln(x \cdot \text{sgn}(x)))' = \frac{1}{x \cdot \text{sgn}(x)} \cdot (x \cdot \text{sgn}(x))' = \frac{1}{|x|} \cdot (x \cdot \text{sgn}(x))' =$

$$= \frac{1}{|x|} \cdot (1 \cdot \text{sgn}(x) + x \cdot (\text{sgn}(x))') = \frac{1}{|x|} \cdot (1 \cdot \text{sgn}(x) + 0) = \frac{1}{|x|} \cdot \text{sgn}(x) = \frac{1}{|x| \cdot \text{sgn}(x)} = \frac{1}{x}$$

(Für  $x = 0$  ist  $\ln(|x|)$  nicht definiert. Für  $x \neq 0$  ist  $\text{sgn}(x) = \text{const.}$ , d.h.  $(\text{sgn}(x))' = 0$ .)

**Regel:**  $(\ln(|x|))' = \frac{1}{x}$

### Ableitung der Exponentialfunktion — Dérivée de la fonction exponentielle

Sei  $f(x) = \ln(x) \Rightarrow f^{-1}(x) = e^x \Rightarrow \frac{d e^x}{d x} = \frac{1}{\frac{\ln(z)}{z}} \Big|_{z=e^x} = \frac{1}{\frac{1}{z}} \Big|_{z=e^x} = z \Big|_{z=e^x} = e^x$

**Regel:**  $(e^x)' = e^x$

#### 1. Beispiel:

$$(x^2 e^{\sin(x)})' = (x^2)' e^{\sin(x)} + x^2 (e^{\sin(x)})' = 2x e^{\sin(x)} + x^2 \frac{d e^z}{d z} \Big|_{z=\sin(x)} \cdot \frac{d \sin(x)}{d x} =$$

$$= 2x e^{\sin(x)} + x^2 e^{\sin(x)} \cos(x)$$

**2. Beispiel:**  $f(x) = x^x$ ,  $f'(x) = ?$

Idee:  $x = e^{\ln(x)} \Rightarrow x^x = (e^{\ln(x)})^x = e^{x \cdot \ln(x)}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{d e^{x \cdot \ln(x)}}{d x} = \frac{d e^y}{d y} \cdot \frac{d x \cdot \ln(x)}{d x} = e^y \cdot (1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}) = x^x \cdot \underbrace{(1 + \ln(x))}_{\rightarrow \infty}$$

$\leadsto f'$  wächst stärker als  $f$ : **Überexponentielles Wachstum.**

### Ableitung bei Basiswechsel — Dérivée après échange de base

**Exponentialfunktion :**

Sei  $f(x) = a^x$ ,  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $f'(x) = ?$

Benütze:  $a^x = (e^{\ln(a)})^x = e^{x \cdot \ln(a)} = e^z$  mit  $z = x \cdot \ln(a)$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{d e^z}{d z} \cdot \frac{d x \cdot \ln(a)}{d x} = e^z \cdot \ln(a) = a^x \cdot \ln(a)$$

**Logarithmusfunktion :**

Sei  $f(x) = \log_a(x)$ ,  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $f'(x) = ?$

Benütze:  $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \ln(x)$  ( $a = e \Rightarrow \ln(a) = 1$ )

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$$

### Trigonometrische Funktionen, Arcus-Funktionen — Fonctions trigonométriques, fonctions circulaires réciproques

Die trigonometrische Funktionen wurden in 2.2.4 auf Seite 22 besprochen. .

Analog zu den hyperbolischen Funktionen gilt der Satz:

**Satz:**  $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

Wir wissen bereits:

**Regeln:**

$$\begin{aligned} \sin'(t) &= \cos(t), & \cos'(t) &= -\sin(t), \\ \tan'(t) &= \frac{1}{\cos^2(t)}, & \cot'(t) &= -\frac{1}{\sin^2(t)} \end{aligned}$$

Über die Monotoniebereiche der trigonometrischen Funktionen wissen wir wegen ihrer geometrischen Bedeutung Bescheid. (Z.B. wenn in einem rechtwinkligen Dreieck der Winkel an einer fixgehaltenen Kathete monoton wächst, so wächst damit die gegenüberliegende Kathete und damit der Sinus u.s.w.). In den bekannten Monotoniebereichen lassen sich somit die Umkehrfunktionen definieren. Üblicherweise wählt man als Standardbereich nach Möglichkeit das Intervall, in dem der Ursprung liegt oder jenes Intervall, in dem der Ursprung am Anfang liegt.

**Definition:** Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen heißen **Arcusfunktionen.**

$\leadsto \arcsin(t), \arccos(t), \arctan(t), \operatorname{arccot}(t)$



Der Name „arc“ kommt von „Arcus“ (lat. Bogen).

Die Ableitungen der Umkehrfunktionen errechnet man mit der Regel für die Umkehrfunktion:

**Regeln:**

$$\begin{aligned} \arcsin'(t) &= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, & \arccos'(t) &= -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \\ \arctan'(t) &= \frac{1}{1+t^2}, & \operatorname{arccot}'(t) &= -\frac{1}{1+t^2} \end{aligned}$$

### Hyperbolische Funktionen, Area-Funktionen — Fonctions hyperboliques, aréa-fonction

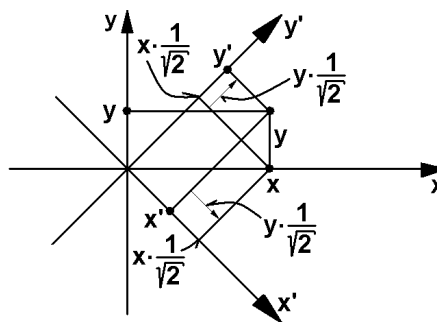
Von 2.2.4 auf Seite 25 wissen wir: :

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \quad \coth(x) := \frac{1}{\tanh(x)}$$

Substituiere:

$$x' = (x - y) \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y' = (x + y) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Aus der Skizze erkennt man, dass die  $(x', y')$  die Koordinaten von  $P(x, y)$  in einem um  $-\frac{\pi}{4}$  gedrehten Koordinatensystem sind.



$$\begin{aligned} \text{Sei } \cosh(t) &= \frac{e^t + e^{-t}}{2} := x, \quad \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} := y \Rightarrow x^2 - y^2 = \cosh^2(t) - \sinh^2(t) \\ &= \frac{e^{2t} + 2e^t e^{-t} + e^{-2t}}{4} - \frac{e^{2t} - 2e^t e^{-t} + e^{-2t}}{4} = \frac{2e^t e^{-t} + 2e^t e^{-t}}{4} = \frac{2+2}{4} = 1. \end{aligned}$$

Andererseits findet man mit  $x^* =: \sqrt{2}x'$ ,  $y^* =: \sqrt{2}y'$ :

$$\begin{aligned} x' \cdot y' &= \frac{1}{2} (x + y) \cdot (x - y) = \frac{1}{2} \left( \frac{e^t + e^{-t}}{2} + \frac{e^t - e^{-t}}{2} \right) \cdot \left( \frac{e^t + e^{-t}}{2} - \frac{e^t - e^{-t}}{2} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{2e^t}{2} \right) \cdot \left( \frac{2e^{-t}}{2} \right) = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow y' &= \frac{1}{2} \frac{1}{x'}, \quad y^* = \frac{1}{x^*} \leadsto \text{Normalhyperbel im gedrehten Koordinatensystem.} \end{aligned}$$

**Satz:**

**Vor.:**

$$x = \cosh(t), \quad y = \sinh(t), \quad x^* = x + y, \quad y^* = x - y$$

**Beh.:**

$$\begin{aligned} \triangleright \quad x^2 - y^2 &= \cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1 \\ \triangleright \quad y^* &= \frac{1}{x^*} \end{aligned}$$

Für die Ableitungen errechnet man:

**Regeln:**

$$\begin{aligned}\sinh'(t) &= \cosh(t), & \cosh'(t) &= \sinh(t), \\ \tanh'(t) &= \frac{1}{\cosh^2(t)}, & \coth'(t) &= -\frac{1}{\sinh^2(t)}\end{aligned}$$

Durch Zurückführen auf die  $e$ -Funktion gelingt es, die Monotonie der hyperbolischen Funktionen zu klären.

Man findet

**Satz:**

$\sinh(t)$  ist in  $\mathbb{R}$  streng monoton wachsend.  
 $\cosh(t)$  ist in  $\mathbb{R}_0^+$  streng monoton wachsend. Der Graph ist symmetrisch zur  $y$ -Achse.

Somit existieren in den Monotoniebereichen die Umkehrfunktionen.

**Definition:**

Die Umkehrfunktionen der hyperbolischen Funktionen heissen  
**Areafunktionen**  
 $\leadsto \operatorname{arsinh}(t), \operatorname{arcosh}(t) \dots$

Der Name kommt von einer Beziehung im Zusammenhang mit einer durch die Hyperbel definierte Fläche.

Die Ableitungen der Umkehrfunktionen errechnet man auch hier mit der Regel für die Umkehrfunktion (vgl Lit.).

### 3.2.5 Tangenten und Normalen an Graphen — Tangentes et normales aux graphes

**Geg.:**

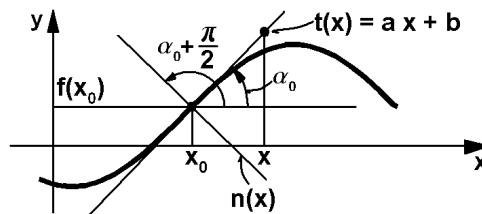
Graph von  $f(x)$ .

**Ges.:**

Tangente, Normale  $t(x), n(x), t(x) = ax + b$

$$\begin{aligned}\tan(\alpha_0) &= f'(x_0) = a = \\ &= \frac{t(x) - t(x_0)}{x - x_0} = \frac{t(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ \Rightarrow t(x) &= f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan(\alpha_0 + \frac{\pi}{2}) &= -\cot(\alpha_0) = -\frac{1}{\tan(\alpha_0)} = -\frac{1}{f'(x_0)} = \frac{n(x) - n(x_0)}{x - x_0} = \frac{n(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ \Rightarrow n(x) &= -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0) \quad (f'(x_0) \neq 0)\end{aligned}$$

**Satz:****Vor.:**

$$f \in \mathcal{D}^{(1)} x_0$$

**Beh.:**

Tangente in  $x_0$ :  $t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Normale in  $x_0$ :  $n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$

### 3.2.6 Der Mittelwertsatz — Le théorème des accroissements finis

$$\text{Sei } f(x) = \begin{cases} x^3 & x \in \mathbb{R}_0^+ \\ x^2 & x \in \mathbb{R}^- \end{cases} \quad \text{stetig}(\mathbb{R}) \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \in \mathbb{R}_0^+ \\ 2x & x \in \mathbb{R}^- \end{cases} \quad \text{stetig}(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow f''(x) = \begin{cases} 6x & x \in \mathbb{R}_0^+ \\ 2 & x \in \mathbb{R}^- \end{cases} \rightsquigarrow \text{unstetig in } 0. \quad (\lim_{x \uparrow 0} = 0 \neq 2 = \lim_{x \downarrow 0})$$

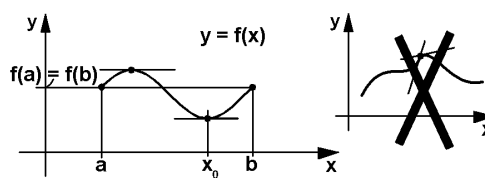
Daher ist die folgende Abkürzung sinnvoll:

**Definition:**  $f(x)$   $n$  mal stetig differenzierbar in  $x_0$  resp.  $I$ :  
 $\Leftrightarrow$   
 $f^{(n)}(x)$  existiert dort und  $f^{(n)}(x)$  ist stetig.

**Schreibweise:**

$$f \in \mathcal{C}^{(n)}(x_0), f \in \mathcal{C}^{(n)}(I) \quad (\text{analog zu diff'bar: } f \in \mathcal{D}^{(n)}(x_0), \mathcal{D}^{(n)}(I))$$

Stetig diff'bar im Intervall  $I$  bedeutet, dass die Tangente nicht schlagartig die Richtung ändert. Der Satz von Rolle sagt aus, dass eine in einem Intervall stetig diff'bare Funktion dort mindestens in einem Punkt eine horizontale Tangente besitzt, wenn an den Intervallenden die Funktionswerte auf gleicher Höhe liegen.



**Satz:**

**Satz von Rolle**

**Vor.:**

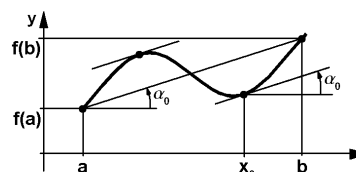
$$I = (a, b), \quad f \in \mathcal{C}^{(1)}(I), \quad f \in \mathcal{C}^{(0)}(\bar{I}), \quad f(a) = f(b)$$

**Beh.:**

$$\exists_{x_0 \in I} : f'(x_0) = 0$$

Im Falle  $f(x) = \text{const.}$  (d.h.  $f'(x) \equiv 0$ ) gibt es nichts zu beweisen. Im andern Fall ( $f'(x) \not\equiv 0$ ,  $f(x) \neq \text{const.}$ ) führt man den Beweis indirekt. Sei z.B.  $f'(x) > 0$  in einem Punkt rechts von  $a$ . Da  $f'(x) = 0$  ausgeschlossen ist und  $f'(x)$  stetig ist, muss auf ganz  $I$  gelten:  $f'(x) > 0$  (Zwischenwerteigenschaft stetiger Funktionen, 2.4.5 Seite 53). Dann aber müsste  $f(x)$  in  $I$  streng monoton wachsen,  $f(b)$  müsste grösser sein als  $f(a)$ : Widerspruch.

Der **Mittelwertsatz der Differentialrechnung** ist eine Verallgemeinerung dieses Sachverhaltes.



**Satz:** **Mittelwertsatz**

**Vor.:**

$$I = (a, b), \quad f \in \mathcal{C}^{(1)}(I) \wedge f \in \mathcal{C}^{(0)}(\bar{I}), \quad \alpha_0 = \arctan\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)$$

**Beh.:**

$$\exists_{x_0 \in I} : f'(x_0) = \tan(\alpha_0)$$

Er sagt aus, dass im Graphen einer stetig diff'baren Funktion irgendwo im Intervall  $I$  ein Punkt  $x_0$  existiert, in dem die Tangentensteigung gleich der Steigung der Sehne zwischen den Endpunkten des Graphen ist.

Die Sehne ist durch die folgende Funktion gegeben:  $s(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x + (f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot a)$

$\leadsto f(x)$  und  $s(x)$  haben in  $a$  und  $b$  gleiche Funktionswerte.

$\leadsto$  Die Differenzfunktion  $f(x) - s(x)$  erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Rolle:

$$\exists_{x_0 \in I} : f'(x_0) - s'(x_0) = 0. \quad \leadsto \quad \text{In } x_0 \text{ gilt: } f'(x_0) = s'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

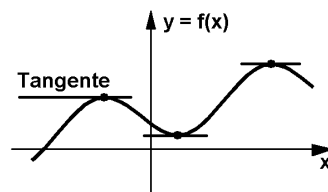
### 3.3 Extremalprobleme — Problèmes d'extréma

#### 3.3.1 Extrema — Extréma

**Begriffe:** In 2.4.7 auf Seite 55 haben wir die Begriffe **lokales** und **globales Minimum** und **Maximum** sowie **Randminimum** und **Randmaximum** besprochen. Man spricht auch von lokalen beziehungsweise globalen **Extrema** u.s.w.  $\leadsto$  *Extr'loc*, *Extr'glob*.

Sei  $f \in \mathcal{C}^{(1)}(I)$ .

Man sieht sofort, dass in einer lokalen oder globalen Extremwertstelle  $x_0 \in (a, b) = I$  die Tangente an den Graphen horizontal sein muss:  $f'(x_0) = 0$ .



Da globale immer auch lokale Extremwertstellen sind, können wir formulieren:

**Satz:**

**Vor.:**

$$f \in \mathcal{C}^{(1)}(I), \quad \text{Extr'loc}(x_0), \quad x_0 \in I$$

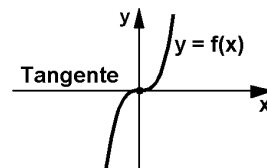
**Beh.:**

$$f'(x_0) = 0$$

Die Umkehrung des Satzes gilt nicht immer.

**Bsp.:**  $f(x) = x^3$ ,  $f'(0) = 0$

Tangente horizontal, kein Extremum (**Terrassenpunkt**).



Sei :  $f \in \mathcal{C}^{(2)}(I)$ ,  $f'(x_0) = 0$ ,  $x_0 \in I$ .

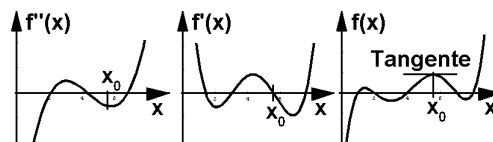
$f''(x_0) < 0 \Rightarrow$

$f'(x)$  fällt in  $U_\delta(x_0) \Rightarrow f'(x) > 0$  links von  $x_0$ ,

$f'(x) < 0$  rechts von  $x_0 \Rightarrow$

$f(x)$  steigt links von, fällt rechts von  $x_0$   $x_0$

$\leadsto$  lokales Maximum.



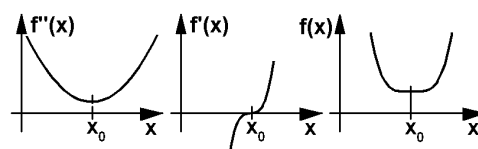
$f''(x_0) > 0 \Rightarrow$

$f'(x)$  wächst in  $U_\delta(x_0) \Rightarrow f'(x) < 0$  links von  $x_0$ ,

$f'(x) > 0$  rechts von  $x_0 \Rightarrow$

$f(x)$  fällt links von, wächst rechts von  $x_0$   $x_0$

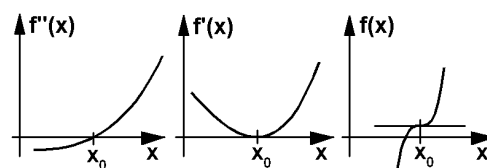
$\leadsto$  lokales Minimum



$f''(x_0) = 0$ ,  $f''(x)$  wächst (fällt) in  $U_\delta(x_0) \Rightarrow f'(x)$  hat Minimum (Maximum) in  $x_0$

$\Rightarrow f$  hat in  $x_0$  horizontale Tangente

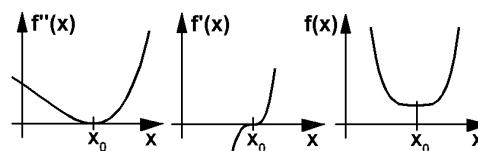
$f$  hat in  $x_0$  einen Terrassenpunkt



Analog findet man:

$f''(x_0) = 0$ ,  $f''(x) \geq (\leq) 0$  ( $U_\delta(x_0)$ )

$\Rightarrow f(x)$  hat Minimum (Maximum) in  $x_0$



**Regel:**

**Vor.:**

$f \in \mathcal{C}^{(2)}(I)$ ,  $f'(x_0) = 0$ ,  $x_0 \in I$

**Beh.:**

$\triangleright f''(x_0) < 0 \leadsto$  lokales Maximum

$\triangleright f''(x_0) > 0 \leadsto$  lokales Minimum

$\triangleright f''(x_0) = 0 \leadsto$  Weitere Untersuchung notwendig: Terrassenpunkt, lokales Minimum oder Maximum

**Bemerkung:**

Extremwerte haben grosse praktische Bedeutung. Man trifft die Problematik überall: Maximale Kosten, Energieverbrauch, Gewicht, Belastung u.s.w..

### 3.3.2 Wendepunkte — Points d'inflexion

Terrassenpunkte sind sogenannte **Wendepunkte** mit horizontaler **Wendetangente**. Dort wendet die **Steigungstendenz**, d.h. die Ableitung  $f'$  wechselt das Steigungsverhalten.

**Definition:**

$f$  hat einen **Wendepunkt** ( WP) in  $x_0$   
 $: \Leftrightarrow f'$  hat ein Extremum in  $x_0$

(Spezialfall: WP mit  $f'(x_0) = 0$ : Terrassenpunkt. )

Aus unseren bisherigen Kenntnissen ergibt sich sofort die notwendige Bedingung für einen WP:

**Satz:**

**Vor.:**

$f$  hat WP in  $x_0$  **Beh.:**

$$f''(x_0) = 0$$

Wir orientieren uns jetzt für die nachstehenden Definitionen an den folgenden Graphiken:



**Definition:**

Der Graph  $C$  der Funktion  $f$  heisst **streng konkav** oder streng konkav **von oben** (resp. **streng konvex** oder streng konvex **von unten**) genau dann wenn der Steigungswinkel  $\alpha(x)$  mit  $x$  wächst (resp. fällt).

**Bemerkung:**

Es gibt Autoren, die die Begriffe „konkav“ und „konvex“ in vertauschter Form verwenden. In diesem System ist  $f$  konvex resp. **konvex von oben** für  $f''(x) > 0$  und konkav resp. **konkav von unten** für  $f''(x) < 0$ . Wenn man aber die Begriffe konsequent immer gleich verwendet, kann nichts passieren.

Es gilt z.B.:

$$[C \text{ streng konkav in } x_0] \Leftrightarrow [\alpha(x) \text{ wächst in } x_0] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\tan(\alpha(x)) \text{ wächst in } x_0] \Leftrightarrow f''(x_0) > 0.$$

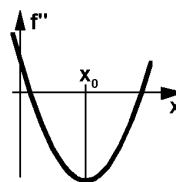
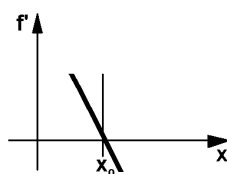
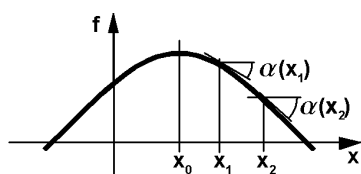
Ebenso für konvex.

**Konsequenz:** Bei einem WP geht im Graph ein streng konvexes Verhalten in ein streng konkaves über (oder ein streng konkaves in ein streng konvexes).

Aus den nachfolgenden Graphiken ist der Zusammenhang zwischen dem Verhalten von  $f$ ,  $f'$  und  $f''$  ersichtlich:

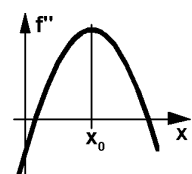
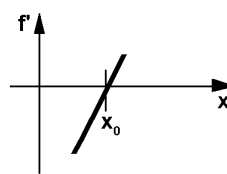
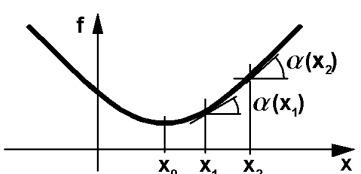
A.

 $\alpha(x)$  fällt:  $C$  konvex ,  
lokales Max.

 $f'(x)$  fällt  
 $f'(x_0) = 0$ 
 $f''(x) < 0$ 
 $\leadsto$ 


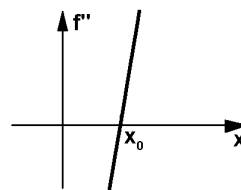
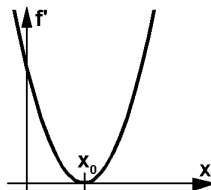
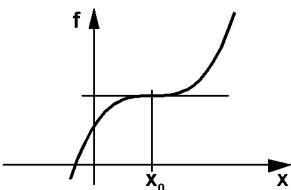
B.

 $\alpha(x)$  wächst:  $C$  konkav ,  
lokales Min.

 $f'(x)$  wächst  
 $f'(x_0) = 0$ 
 $f''(x) > 0$ 
 $\leadsto$ 


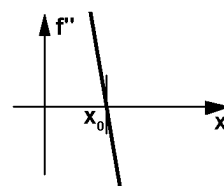
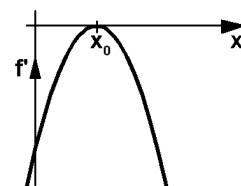
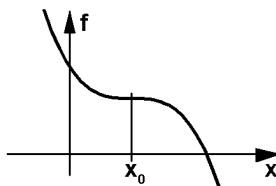
C.

 $C$  konvex  $\leadsto$  konkav ,  
Terrassenpunkt

 $f'(x) \geq 0, f'(x_0) = 0$ 
 $f''(x) < 0 \leadsto f''(x_0) = 0$   
 $\leadsto f''(x) > 0$ 
 $\leadsto$ 


D.

 $C$  konkav  $\leadsto$  konvex ,  
Terrassenpunkt

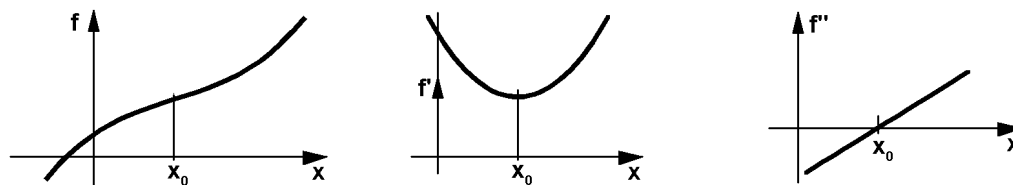
 $f'(x) \leq 0, f'(x_0) = 0$ 
 $f''(x) > 0 \leadsto f''(x_0) = 0$   
 $\leadsto f''(x) < 0$ 
 $\leadsto$ 


E.

 $C$  konvex  $\leadsto$  konkav ,  
WP

$$f'(x) > 0$$

$$f''(x) < 0 \leadsto f''(x_0) = 0 \\ \leadsto f''(x) > 0$$

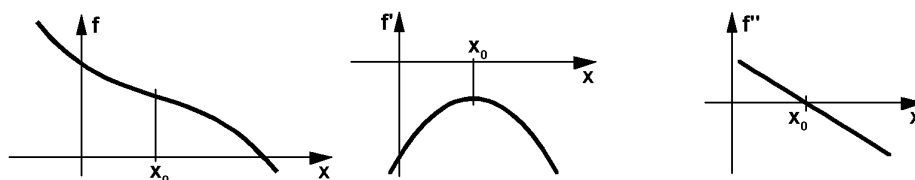
 $\leadsto$ 

F.

 $C$  konkav  $\leadsto$  konvex ,  
WP

$$f'(x) < 0$$

$$f''(x) > 0 \leadsto f''(x_0) = 0 \\ \leadsto f''(x) < 0$$

 $\leadsto$ 

### 3.3.3 Kurvendiskussion — Discussion de graphes

Mit den nun zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln gelingt es, zu einem relativ guten Überblick über die wichtigsten charakteristischen Eigenschaften eines Graphen zu kommen. Folgende Besonderheiten verdienen dabei spezielle Erwähnung:

- |                       |                        |
|-----------------------|------------------------|
| ▷ Def'bereich         | ▷ Nullstellen          |
| ▷ Wertesbereich       | ▷ $y$ -Achse'schnittp. |
| ▷ Stetigkeit          | ▷ Extremw'stellen      |
| ▷ Periodizität        | ▷ Extremwerte          |
| ▷ Symmetrien          | ▷ Terrassenpunkte      |
| ▷ Monotonie           | ▷ Wendepunkte          |
| ▷ Differenzierbarkeit | ▷ Polstellen           |
| ▷ Sprünge             | ▷ Beschränktheit       |
| ▷ Isolierte Punkte    | ▷ Asymptoten           |
| ▷ Knicks              | ▷ $ x $ gross, $y$ ?   |

Auf ein besonderes Beispiel, das alle genannten Eigenschaften zeigt, sei an dieser Stelle verzichtet, da die meisten der genannten Besonderheiten schon früher an speziellen Beispielen erläutert worden sind oder sonst noch werden.

#### Bemerkung:

$$1. \ x_0 \text{ Polstelle von } f \leadsto \lim_{x \uparrow x_0} |f(x)| = \infty \vee \lim_{x \downarrow x_0} |f(x)| = \infty$$

$$2. \ h(x) \text{ Asymptote von } f \leadsto \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x) - h(x)| = 0$$



**1. Beispiel:**

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1,$$

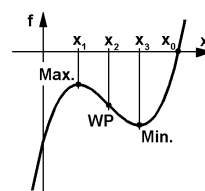
$$\text{NS: } x_0 \simeq 1.75488$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = 1$$

$$f''(x) = 6x - 4 = 0, \quad x_3 = \frac{2}{3} \leadsto \text{WP}$$

$$f(x_1) < 0 \leadsto \text{Max'loc},$$

$$f(x_2) > 0 \leadsto \text{Min'loc}.$$



$$\mathbf{2. Beispiel:} \quad f(x) = (2x - 3) + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$$

$$\leadsto \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x) - (2x - 3)| = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left| \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right| = 0 - 0 = 0 \leadsto g(x) = 2x - 3 \text{ Asympt}$$

### 3.4 Die Regel von Bernoulli — La règle de Bernoulli

#### 3.4.1 Herleitung der Regel — Dédution de la règle

**Bemerkung:** Früher hiess die Regel, um die es hier geht, auch **Regel von de l'Hospital**. Kürzlich hat man jedoch endgültig herausgefunden, dass die Regel von Bernoulli stammt, der sie an de l'Hospital verkauft hat. Dieser hat sie dann unter seinem Namen publiziert. Man staune, für was Menschen schon Geld ausgegeben haben!

$$\mathbf{Bsp.:} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(e^x - 1)}{\sin(x)} = ?$$

Hier hat man es mit folgendem allgemeinerem Problemtyp zu tun:

$$\mathbf{Geg.:} \quad f(x), g(x): \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

$$\mathbf{Problem:} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = ?$$

**Idee:** Seien  $f, g \in \mathcal{C}^{(1)}(U_\epsilon(x_0))$ ,  $f(x_0) = g(x_0) = 0$

Benütze das Restfunktionslemma aus 3.2.3 auf Seite 77:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)R_f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} R_f(x) = f'(x_0), \quad f(x_0) = 0 \Rightarrow f(x) = (x - x_0)R_f(x)$$

$$g(x) = g(x_0) + (x - x_0)R_g(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} R_g(x) = g'(x_0), \quad g(x_0) = 0 \Rightarrow g(x) = (x - x_0)R_g(x)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x - x_0)R_f(x)}{(x - x_0)R_g(x)} \stackrel{|x \neq x_0}{=} \frac{R_f(x)}{R_g(x)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_f(x)}{R_g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Es kann sein, dass wieder gilt:  $f'(x_0) \neq 0 \wedge g'(x_0) \neq 0$ .

$$\text{Seien } f, g \in \mathcal{C}^{(2)}(U_\epsilon(x_0)) \leadsto \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)} \text{ u.s.w}$$

**Regel:****Regel v. Bernoulli****Vor.:**

$$\begin{aligned} f, g &\in \mathcal{C}^{(n)}(U_\epsilon(x_0)), \\ f(x_0) &= f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \\ g(x_0) &= g'(x_0) = \dots = g^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{aligned}$$

**Beh.:**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

**Bsp.:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^x - 1}{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3e^x - 1)'}{(\sin(x))'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^x}{\cos(x)} = \frac{3e^0}{\cos(0)} = \frac{3}{1} = 3$

### 3.4.2 Ausdehnung der Regel — Extension de la règle

Oben haben wir folgenden Problemtyp studiert:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} ='' \frac{0''}{0} = ?$  Manchmal treten an Stelle dieses Problems verwandte Probleme auf:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} ='' \frac{\infty''}{\infty} = ? \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) ='' \infty \cdot 0'' = ? \quad \dots$$

**Bsp.:**  $\lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln(x)}{\cot(x)} = ?$

Hier hat man es mit folgendem allgemeinerem Problemtyp zu tun:

**Geg.:**  $f(x), g(x): \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$

Nachfolgend begnügen wir uns mit einer formalen Herleitung. Es sei immer vorausgesetzt, dass die vorkommenden Limites existieren.

Seien  $\frac{1}{f}, \frac{1}{g} \in \mathcal{C}^{(1)}(U_\epsilon(x_0))$ ,  $\frac{1}{f(x_0)} = \frac{1}{g(x_0)} = 0$

$\leadsto \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$  ist mit obiger Regel behandelbar.

$$\leadsto \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}}{\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\frac{1}{g(x)})'}{(\frac{1}{f(x)})'} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-\frac{g'(x)}{g(x)^2}}{-\frac{f'(x)}{f(x)^2}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{g'(x)}{f'(x)} \right) \cdot \left( \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} \right)^2$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot \left( \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} \right)^2$$

$$\Rightarrow 1 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot \left( \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} \right) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}}{\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**Korollar:****Vor.:**

$$\frac{1}{f}, \frac{1}{g} \in \mathcal{C}^{(n)}(U_\epsilon(x_0)), \quad f(x_0) = \pm\infty, \quad g(x_0) = \pm\infty$$

**Beh.:**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\begin{aligned} \text{Bsp.:} \quad \lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln(x)}{\cot(x)} &= \lim_{x \downarrow 0} \frac{(\ln(x))'}{(\cot(x))'} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\left(-\frac{1}{\sin^2(x)}\right)} = \lim_{x \downarrow 0} -\frac{\sin^2(x)}{x} \\ &= -\lim_{x \downarrow 0} \frac{(\sin^2(x))'}{(x)'} = -\lim_{x \downarrow 0} \frac{(\sin^2(x))'}{(x)'} = -\lim_{x \downarrow 0} \frac{(\sin(x)) \cdot 2 \cdot \cos(x)}{1} = 0 \end{aligned}$$

### 3.4.3 Wichtige Beispiele — Exemples importants

Im Falle ‘ $\lim_{x \rightarrow \infty}$ ’ resp. ‘ $\lim_{x \rightarrow -\infty}$ ’ können wir die Regel mit Hilfe einer Substitution auf den Fall ‘ $\lim_{x \rightarrow 0}$ ’ zurückführen:

$$\text{1. Beispiel:} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = ?$$

Benütze die Substitution:  $x = \frac{1}{t}$ ,  $t \geq 0$

$$\leadsto \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(\frac{1}{t})}{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\ln(\frac{1}{t}))'}{(\frac{1}{t})'} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{t} \cdot (\frac{1}{t})'}{(\frac{1}{t})'} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} t = 0$$

Dieses Beispiel lässt sich leicht ausdehnen:

$$\text{Sei } k > 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^k} = ?$$

$$k := 1 + r, \quad r > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^k} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x \cdot x^r} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^r} = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\text{Sei } 1 > k > 0, \quad r \cdot k = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^k} = ?$$

$$u := x^k \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^k} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\ln(u^{\frac{1}{k}})}{u} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k} \cdot \ln(u)}{u} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{\ln(u)}{u} = \frac{1}{k} \cdot 0 = 0$$

$$\text{Andere Methode:} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\text{2. Beispiel:} \quad \text{Sei } k > 0, \quad \lim_{x \downarrow 0} \frac{x^k}{\ln(x)} = ?$$

Dieser Fall ist trivial:

$$\lim_{x \downarrow 0} \left| \frac{x^k}{\ln(x)} \right| = \lim_{x \downarrow 0} |x^k| \cdot \lim_{x \downarrow 0} \left| \frac{1}{\ln(x)} \right| = 0 \cdot \frac{1}{\lim_{x \downarrow 0} |\ln(x)|} = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\text{3. Beispiel:} \quad \text{Sei } k > 0, \quad \lim_{x \downarrow 0} x^k \cdot \ln(x) = ?$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \downarrow 0} x^k \cdot \ln(x) &= \lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln(x)}{x^{-k}} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{(\ln(x))'}{(x^{-k})'} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{x^{-1}}{(-k) x^{-k-1}} = \lim_{x \downarrow 0} x^{-1} \cdot x^{k+1} \frac{1}{(-k)} = \\ &= \lim_{x \downarrow 0} x^k \frac{1}{(-k)} = 0 \end{aligned}$$

**4. Beispiel:** Sei  $x := \ln(t)$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{e^x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\ln(t))^k}{e^{\ln(t)}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\ln(t))^k}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(t)}{t^{\frac{1}{k}}} \right)^k = 0^k = 0$$

**Folgerung:**

**Vor.:**

$$k > 0$$

**Beh.:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^k} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{x^k}{\ln(x)} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{e^x} = 0$$

**Konsequenz:** Die  $e$ -Funktion wächst stärker als jede Potenz von  $x$ . Jede Potenz  $x^k$ ,  $k > 0$  wächst stärker als die Logarithmusfunktion.

**6. Beispiel:**  $\lim_{x \downarrow 0} x^x = ?$

$$\lim_{x \downarrow 0} x^x = \lim_{x \downarrow 0} (e^{\ln(x)})^x = \lim_{x \downarrow 0} e^{\ln(x) \cdot x} = e^{\lim_{x \downarrow 0} \ln(x) \cdot x} = e^0 = 1$$

**Bemerkung:**

$$\text{Sei } k > 0 \Rightarrow \lim_{x \downarrow 0} k^x = k^0 = 1, \quad \lim_{x \downarrow 0} 0^x = \lim_{x \downarrow 0} 0 = 0$$

Damit haben wir jetzt ein altes Problem gelöst:

**Folgerung:**

$$1 = \lim_{x \downarrow 0} x^0 = \lim_{x \downarrow 0} x^x \neq \lim_{x \downarrow 0} 0^x = 0$$

Wegen  $\lim_{x \downarrow 0} x^x = 1$  definiert man:

**Definition:**

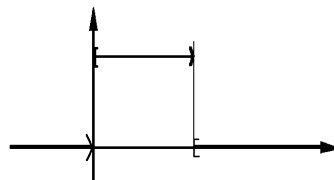
$$0^0 := 1$$

$\leadsto f(x) = 0^{|x|}$  hat einen **isolierten Punkt** (Sprung) bei  $x = 0$ .  
 $f(x) = 0^{|x|}$  a un **point isolé** (saut) à  $x = 0$ .

**Problem:**

$$f(x) = 0^{|x|} ?$$

$\leadsto$

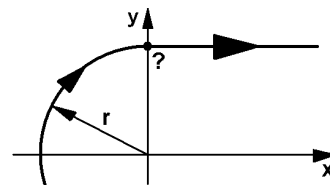


## 3.5 Anwendungen — Applications

### 3.5.1 Kurvenform bei der Eisenbahn — Forme du virage du chemin de fer

Bis zu einem Punkt  $P_0$  sei die Kurve kreisförmig. Durch welche möglichen Funktionen, ist der Schienenweg bei  $P_0$  fortsetzbar?

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} -r \cos(t) \\ r \sin(t) \end{pmatrix}$$



**Problem:** Sei  $\vec{a} = \ddot{\vec{s}} = \frac{d^2 \vec{s}}{dt^2}$  die Beschleunigung.

$\leadsto$  Bei  $P_0$  darf  $\vec{a}$  nicht plötzlich ändern, sonst tritt schlagartig eine Kraft  $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$  auf, d. h. ein Schlag tritt auf!

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m \cdot \vec{a}|_{t=\frac{\pi}{2}} = m \cdot \frac{d^2 \vec{s}}{dt^2} \Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = m \cdot \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} -r \cos(t) \\ r \sin(t) \end{pmatrix} \Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = m \cdot \begin{pmatrix} r \cos(t) \\ -r \sin(t) \end{pmatrix} \Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = m \cdot \begin{pmatrix} r \cdot 0 \\ -r \cdot 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \vec{F} &= m \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -r \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Gesucht ist demnach eine Fortsetzungskurve  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  mit  $\vec{a} = \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -r \end{pmatrix}$ . Da bei einer Geraden die zweiten Ableitungen von  $x(t)$  und  $y(t)$  gleich sein müssen, sieht man sofort, dass da eine Gerade unmöglich ist! Hingegen würde z.B. eine Parabel  $\vec{v}(t) = \frac{r}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ -t^2 + 2 \end{pmatrix}$  gehen.

Vergleich: Im betrachteten Punkt hat man auch eine schlagartige Veränderung der Zentrifugalkraft...

### 3.5.2 Weitere Beispiele — D'autres exemples

Siehe Vordiplom- und Modulprüfungsserien.



## Kapitel • Chapitre 4

# Integralrechnung — Calcul intégral

### 4.1 Inhalte krummlinig begrenzter Flächen — Aires de surfaces au bord courbe

#### 4.1.1 Die Idee der Approximation — L'idée de l'approximation

Ober- und Untersummen — Aire des polygones rectangulaires circonscrits et inscrits

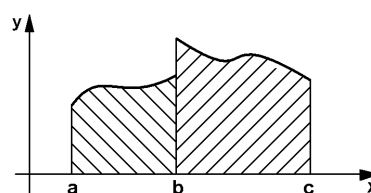
Geg.:

$f$  stetig, beschränkt

$f : x \mapsto f(x), x \in I = [a, b]$

$\leadsto$  Fläche:  $G$ ,

$G = \{(x, y) \mid x \in I \wedge y \in [0, f(x)]\}$



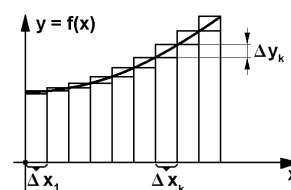
**Problem:** Inhalt (Mass)  $A = m(G) = ?$

$\leadsto$  Ausser bei gewissen Figuren, die mit dem Kreis zusammenhängen, ist der Inhalt krummlinig begrenzter Flächen elementargeometrisch nicht definiert. Von der Physik her ist es aber offensichtlich, dass ein Inhalt eindeutig definierbar sein muss. Man denke nur an Figuren aus Blech. Der Begriff „Inhalt“ existiert daher bereits in seiner physikalischen Erscheinung in unserer Vorstellung.  $\leadsto A_{phys}$ .

Bsp.:

$f(x) = x^2 + 1, x \in I = [0, 1]$

**Idee:** Approximation, grenze den Inhalt  $A_{phys}$  ein durch Summen von Rechteckinhalten.



Wir verwenden hier die folgenden Schreibweisen<sup>11</sup>:

**Schreibweise:**

$R_i^{Gr} :=$  Inhalt des grösseren, umschriebenen Rechtecks mit der Nummer  $i$ .

<sup>11</sup>In der einsprachigen deutschen oder französischen Literatur werden meistens andere, sprachgebundene Symbole verwendet.

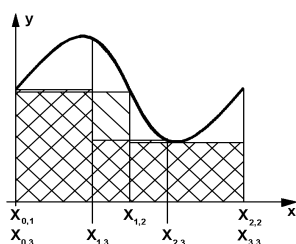
$R_i^{in}$  := Inhalt des innern, kleineren, eingeschriebenen Rechtecks mit der Nummer  $i$ .

$$S_n^{Gr} = \sum_{i=1}^n R_i^{Gr} := n\text{-te } \mathbf{Obersumme}$$

$$S_n^{in} = \sum_{i=1}^n R_i^{in} := n\text{-te } \mathbf{Untersumme}$$

### Intervallteilungen — Partitions d'intervalles

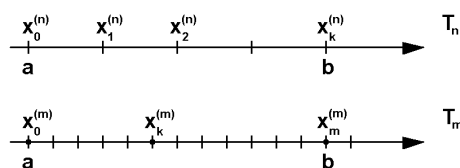
Um  $S_n^{Gr}$  und  $S_n^{in}$  zu bilden, verwenden wir **Intervallteilungen**  $T_n$ . Eine Intervallteilung entsteht durch Teilung von  $I = [a, b]$  in  $n$  Teilintervalle.



Eine Intervallteilung heisst **regelmässig**, wenn alle Teilintervalle gleich lang sind:

$$\leadsto \Delta x_n^{(i)} = x_i - x_{i-1} = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{b - a}{n}$$

Das nebenstehende Bild zeigt, dass eine grössere Intervallzahl nicht immer zu einer besseren Approximation des Flächeninhalts führt. Wenn ein Intervall in neue Intervalle unterteilt wird, kann aber die Approximation nicht schlechter werden. Zudem sind verschieden lange Teilintervalle nicht komfortabel beim Arbeiten.



$T_m$  heisst **Verfeinerung** von  $T_n$ , wenn  $T_m$  aus  $T_n$  durch Einfügen neuer Teilpunkte entsteht.

**Bsp.:**  $T_{2n}$  ist eine Verfeinerung von  $T_n$ ,  $T_{n+1}$  hingegen ist keine solche.

Das folgende Lemma ist unmittelbar einsichtig:

**Lemma:**

**Vor.:**

$T_m$  Verfeinerung von  $T_n$   
 $x \in I \Rightarrow f(x) \geq 0$

**Beh.:**

$$S_m^{Gr} - S_m^{in} \leq S_n^{Gr} - S_n^{in} \quad \text{oder} \\ S_n^{in} \leq S_m^{in} \leq S_m^{Gr} \leq S_n^{Gr}$$

$\leadsto$  Bei einer Verfeinerung der Intervallteilung wird eine Approximation von  $A_{phys}$  durch Ober- und Untersummen höchstens genauer.

### Genauigkeit der Approximation — Exactitude de l'approximation

Sei  $I$  ein gegebenes Intervall.

$\leadsto I = [a, b], (a, b], [a, b), (a, b), a, b \in \mathbb{R}$



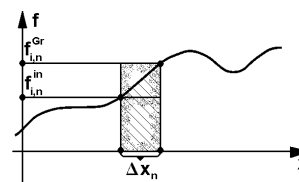
Sei  $T_n$  regelmässige Intervallteilung ,  
 $I = \bigcup_{i=1}^n I_i$ ,  $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ ,  $l(I_i) = \Delta x_n$  (Länge )

**Absicht:**  $T_n$  so verfeinern, dass  $\Delta x_{k,n} \rightarrow 0$  erreicht wird für  $n \rightarrow \infty$ .

Sei  $f$  eine auf  $I$  beschränkte Funktion ( $\leadsto f$  hat auf jedem  $I_i$  ein Infimum und ein Supremum.)

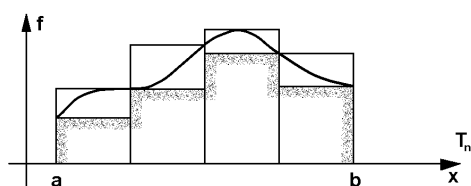
Sei

$$\begin{aligned} f_i^{Gr} &= f_{i,n}^{Gr} = \sup_{x \in I_i} f(x), \\ f_i^{in} &= f_{i,n}^{in} = \inf_{x \in I_i} f(x) \Rightarrow \forall x \in I_i : \\ f_i^{in} \cdot \Delta x_n &\leq f(x)_{x \in I_i} \cdot \Delta x_n \leq f_i^{Gr} \cdot \Delta x_n \end{aligned}$$



Damit können wir exakter definieren:

**Definition:**



$$\begin{aligned} S_n^{Gr} &:= \sum_{i=1}^n f_i^{Gr} \cdot \Delta x_n: \text{ Zu } T_n \text{ gehörige } \mathbf{Ober-} \\ &\mathbf{summe} \\ S_n^{in} &:= \sum_{i=1}^n f_i^{in} \cdot \Delta x_n: \text{ Zu } T_n \text{ gehörige } \mathbf{Unter-} \\ &\mathbf{summe} \end{aligned}$$

$\leadsto S_n^{Gr}, S_n^{in}$  sind Flächeninhalte .

Für diese gilt nach Konstruktion:  $S_n^{in} \leq A_{phys} \leq S_n^{Gr}$ .

Wünschenswert wäre nun, dass gelten würde:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{(\Delta x_n \rightarrow 0)} S_n^{in} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{(\Delta x_n \rightarrow 0)} S_n^{Gr} (= S)$$

Dann könnten wir  $A_{phys}$  wie folgt exakt definieren:  $A := S$

Falls  $A$  so definierbar ist, gilt trivialerweise das folgende Lemma:

**Lemma:**  $f(x) \geq 0$  in  $I \Rightarrow A \geq 0$

Seien  $S_k^{Gr}, S_k^{in}$  die Summen bei einer beliebigen neuen Intervallteilung .

$$\text{Sei } \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{(\Delta x_n \rightarrow 0)} S_n^{in} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{(\Delta x_n \rightarrow 0)} S_n^{Gr} = S$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{(\Delta x_n \rightarrow 0)} S_n^{in} = S \leq S_k^{Gr}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{(\Delta x_n \rightarrow 0)} S_n^{Gr} = S \geq S_k^{in} \Rightarrow S_k^{in} \leq S \leq S_k^{Gr}$$

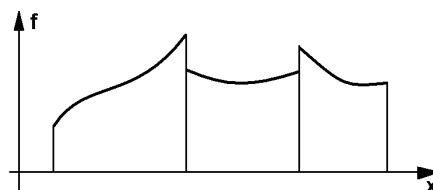
Diese Beziehung wird auch nicht gestört, wenn man mit unregelmässigen Intervallteilungen arbeitet, für die gilt:

$$\Delta x_n := \max_i (\Delta x_{n,i}) = \max_i (x_{i,n} - x_{i-1,n}) \rightarrow 0$$

**Konsequenz:** Eine beliebige andere Intervallteilung kann nicht zu einem von  $S$  verschiedenen anderen Flächeninhalt führen. Es ist somit egal, mit welcher Intervallteilung man arbeitet!

## Beispiele — Exemples

Im Folgenden schränken wir uns ein auf **stückweise stetige Funktionen** über einem endlichen Intervall  $I$ .



## 1. Beispiel:

Das Beispiel eines „unendlich dichten Kammes“ über  $[0, 1]$  zeigt, dass diese Einschränkung sinnvoll ist:

▷

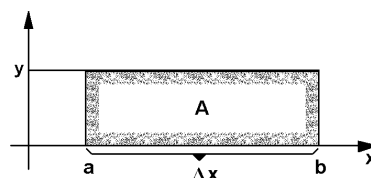
$$\leadsto S_n^{in} = 0 \cdot 1 = 0 < S_n^{Gr} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

## 2. Beispiel:

Rechteck  $0 \leq a < b, y > 0$

$$S_n^{Gr} = S_n^{in} = S = A = (b - a) \cdot y = \Delta x \cdot y$$



**Problem:**  $S < 0$ :  $f^*(x) := -f(x) > 0 \Rightarrow S^*, S = -S^*$

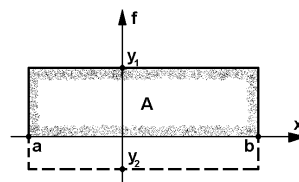
## 3. Beispiel:

Rechteck  $a < 0 < b, y < 0$

$$\leadsto b - a = b - (-|a|) = b + |a| = |b| + |a| > 0$$

$$A = (b - a) \cdot y = (|b| + |a|) \cdot y < 0$$

$y$  kann negativ sein!  $\leadsto$  Negative Flächeninhalte treten auf!



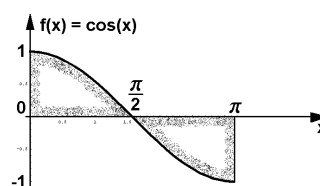
## 4. Beispiel:

$$f(x) = \cos(x), I = [0, \pi]$$

Symmetriezentrum  $(\frac{\pi}{2}, 0) \leadsto$

Falls gilt:  $S_n^{Gr} = S_n^{in} = S = A$  so muss sein

$$A = 0$$

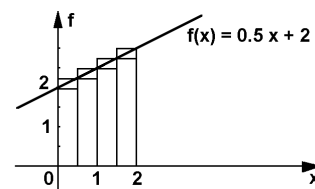


## 5. Beispiel:

Lineare Funktion  $f(x) = 0.5x + 2, I = [0, 2]$

$$\text{Sei } \Delta x_n = \frac{2}{n}, x_k = k \cdot \frac{2}{n}$$

$$\text{Bekannt: } A = 2 \cdot 2.5 = 5$$



Berechnung mit Ober- und Untersummen:

$$\begin{aligned} S_n^{in} &= \sum_{k=1}^n (0.5 \cdot x_{k-1} + 2) \cdot \frac{2}{n} = \sum_{k=1}^n (0.5 \cdot (k-1) \cdot \frac{2}{n} + 2) \cdot \frac{2}{n} = \frac{2}{n} \cdot \sum_{k=1}^n (0.5 \cdot (k-1) \cdot \frac{2}{n} + 2) \\ &= \frac{2}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (0.5 \cdot k \cdot \frac{2}{n} + 2) = \frac{2}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (\frac{k}{n} + 2) = \frac{2}{n} \cdot (\frac{1}{n} \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} + n \cdot 2) = \frac{2}{n} \cdot (\frac{n-1}{2} + n \cdot 2) \end{aligned}$$

$$= \frac{2 \cdot n}{n \cdot 2} - \frac{2 \cdot 1}{n \cdot 2} + \frac{2 \cdot 2 \cdot n}{n} = 1 - \frac{1}{n} + 4 = 5 - \frac{1}{n} \rightarrow 5$$

$$\begin{aligned} S_n^{Gr} &= \sum_{k=1}^n (0.5 \cdot x_k + 2) \cdot \frac{2}{n} = \sum_{k=1}^n (0.5 \cdot k \cdot \frac{2}{n} + 2) \cdot \frac{2}{n} = \frac{2}{n} \cdot \sum_{k=1}^n (0.5 \cdot k \cdot \frac{2}{n} + 2) = \frac{2}{n} \cdot \sum_{k=1}^n (\frac{k}{n} + 2) \\ &= \frac{2}{n} \cdot \left( \frac{1}{n} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n \cdot 2 \right) = \frac{2}{n} \cdot \left( \frac{n+1}{2} + n \cdot 2 \right) = \frac{2 \cdot n}{n \cdot 2} + \frac{2 \cdot 1}{n \cdot 2} + \frac{2 \cdot 2 \cdot n}{n} = 1 + \frac{1}{n} + 4 = 5 + \frac{1}{n} \rightarrow 5 \end{aligned}$$

$$\leadsto S_n^{Gr} - S_n^{in} = \frac{2}{n} \rightarrow 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{(\Delta x_n \rightarrow 0)} S_n^{in} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{(\Delta x_n \rightarrow 0)} S_n^{Gr} = 5 := A$$

### 4.1.2 Das Riemannsche Integral — L'intégrale de Riemann

#### Positive Funktionen — Fonctions positives

Sei  $\forall x \in I = (a, b) \quad f(x) \geq 0$ ,  $f$  beschränkt( $I$ )

Weiter sei eine Intervallteilung gegeben mit:

$$\Delta x_n := \max(\Delta x_{n,i}) = \max(x_{i,n} - x_{i-1,n}) \rightarrow 0$$

$$\text{Sei } \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{(\Delta x_n \rightarrow 0)} S_n^{in} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{(\Delta x_n \rightarrow 0)} S_n^{Gr} = S := A$$

$S_n^{in} = \sum_{i=1}^n f_i^{in} \cdot \Delta x_n$ ,  $S_n^{Gr} = \sum_{i=1}^n f_i^{Gr} \cdot \Delta x_n$  sind Summen von Produkten, deren Faktoren positiv sind.

Man hat hier also die altbekannte Situation der elementargeometrisch definierbaren Rechtecksflächeninhalten.

#### Definition:

Falls  $A$  existiert, so heisst  $f$  **integrierbar**.  $f$  heisst dann **Integrand**.

$A$  heisst **Riemannsches Integral** oder auch **bestimmtes Integral** von  $f$  über  $I$ .

(Später werden wir auch das „unbestimmte Integral“ definieren. .)

$$\text{Symbol:} \quad A := \int_I f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

#### Schreibweise:

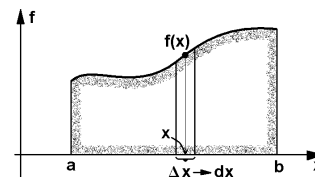
Falls  $f$  über  $I$  integrierbar ist, schreiben wir kurz:  $f \in \mathcal{INT}(I)$ .

$\int$  steht für Summe ,

$a, b \leadsto$  Grenzen ,

$dx$  entstand aus  $\Delta x_n$

$\leadsto$  („infinitesimales Element“ ).



#### Bemerkung:

Da wir nachfolgend häufig den Begriff „existiert“ verwenden müssen, werden wir diesen kürzer als ex. schreiben.

$\leadsto$  **Symbol:** ex.  $\leadsto$  existiert

**Folgerung:** **Vor.:**  $\int_I f(x) dx$  ex.

**Beh.:**

Für jede Intervallteilung gilt:  $S_n^{in} \leq \int_I f(x) dx \leq S_n^{Gr}$

Da in den Summen  $S_n^{in}$ ,  $S_n^{Gr}$  keine negativen Terme vorkommen, kann auch der Limes  $\int_a^b f(x) dx$  nicht negativ werden.

**Lemma:** **Vor.:**  $f \in \mathcal{INT}(I_i)$ ,  $f(x) \geq 0$

**Beh.:**  $\int_I f(x) dx \geq 0$

### Negative Funktionen — Fonctions négatives

Sei  $\forall_{x \in I=(a,b)} f(x) \leq 0$ ,  $f$  beschränkt( $I$ )

Sei  $f^-(x) := -f(x) = |f(x)| \Rightarrow \forall_{x \in I} f^-(x) = |f(x)| \geq 0$

Sei für  $f^-$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\Delta x_n \rightarrow 0) S_n^{in} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\Delta x_n \rightarrow 0) S_n^{Gr} = S := A$

$\leadsto \int_I f^-(x) dx$  ist ein definierter positiver Flächeninhalt .

**Definition:**  $\int_I f(x) dx := - \int_I f^-(x) dx = - \int_I |f(x)| dx$

**Konsequenz:** Diese Definition hat zur Folge, dass bei negativen Funktionen die Fläche zwischen der  $x$ -Achse und dem Graphen einen negativen Inhalt bekommt.

### Funktionen mit wechselndem Vorzeichen — Fonctions au signe alternant

Sei  $f$  beschränkt( $I$ ),  $I = \bigcup_{i=1}^n I_i$ ,  $\forall_i \operatorname{sgn}(f(x)) = \operatorname{const.}$  in  $I_i$

Sei  $\forall_i : f \in \mathcal{INT}(I_i) \leadsto \int_{I_i} f(x) dx$  ex. .

Nun können wir  $\int_I f(x) dx$  einfach definieren:

**Definition:**  $\int_I f(x) dx = \sum_{i=1}^n (\int_{I_i} f(x) dx)$

Diese Definition lässt sich leicht ausdehnen für die Fälle, wo  $f$  das Vorzeichen in  $I$  abzählbar unendlich oft wechselt:  $\leadsto I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$

**Definition:**

$$\int_I f(x) dx = \sum_{i=1}^{\infty} \left( \int_{I_i} f(x) dx \right)$$

**Bemerkung:**

Wir sind von stückweise stetigen und beschränkten Funktionen ausgegangen. Solche Funktionen, bei denen das Vorzeichen in  $I$  höchstens abzählbar unendlich oft wechselt, wollen wir kurz als **vernünftige Funktionen** bezeichnen.

Damit haben wir in vielen Fällen eine brauchbare Definition für den Flächeninhalt unter der Funktionskurve. Ein grosses Problem ist aber noch geblieben. Für welche Klasse von Funktionen ist denn dieser Flächeninhalt resp. dieses Integral denn definiert? — Wir haben ja eingangs gesehen, dass z.B. schon für einen unendlich dichten Kamm dieser Inhalt nach Riemann nicht definierbar ist! Wir müssen somit zuerst Integrationskriterien suchen.

## 4.2 Kriterien und Eigenschaften — Critères et Qualités

Bevor wir Beispiele lösen können, müssen wir erst den Integralbegriff besser kennenlernen.

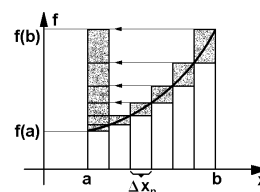
### 4.2.1 Integrationskriterien — Critères pour l'intégrabilité

Sei  $f \in \text{beschränkt}(I)$ ,  $f$  monoton wachsend in  $I = [a, b]$  und vernünftig.

Nach dem vorhergehenden Abschnitt genügt es, positive Funktionen zu betrachten.

Die nebenstehende Skizze zeigt, dass gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\leq S_n^{Gr} - S_n^{in} \leq (f(b) - f(a)) \cdot \Delta x_n \\ \Rightarrow 0 &\leq \lim_{\Delta x_n \rightarrow 0} S_n^{Gr} - S_n^{in} = \lim_{\Delta x_n \rightarrow 0} \Delta S_n \\ &\leq \lim_{\Delta x_n \rightarrow 0} (f(b) - f(a)) \cdot \Delta x_n = 0 \\ \leadsto f &\in \mathcal{INT}(I) \end{aligned}$$



Entsprechendes können wir für negative Funktionen folgern. Zerfällt demnach  $I$  in endlich viele Teilintervalle, auf denen  $f$  monoton ist, so ist  $f$  über  $I$  integrierbar.

**Bemerkung:**

Solche Funktionen wollen wir **endlich oszillierend** nennen. Es ist unmittelbar klar, dass diese Funktionen vernünftig sind.

**Satz:****Vor.:**

$f \in \text{beschränkt}(I)$ ,  $f \in \text{stetig}$   
 $f$  endlich oszillierend

**Beh.:**

$f \in \mathcal{INT}(I)$

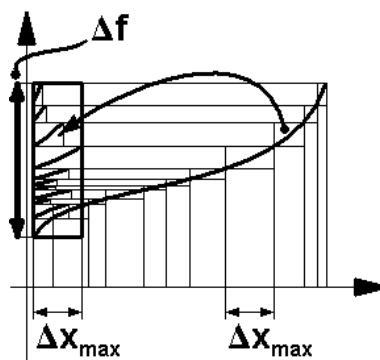
**Problem:**

Ist die Integrierbarkeit nun auch wirklich unabhängig von der Regelmässigkeit der Intervallteilung?

Sei  $f$  monoton, stetig, beschränkt auf  $I = (a, b)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_n^{Gr} - S_n^{in} &= \Delta A_{max} \\ &\leq |(\Delta x_{k,n})_{max}| \cdot |f(x_{0,n} - f(x_{n,n}))| \\ &= |(\Delta x_{k,n})_{max}| \cdot |\Delta f| \rightarrow 0 \\ &\text{für } n \rightarrow \infty, |(\Delta x_{k,n})_{max}| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$\leadsto f \in \mathcal{INT}(I), I = (a, b)$



### Ausdehnung:

Der Definitionsbereich  $I = (a, b)$  einer auf endlich vielen Teilintervallen monotonen (endlich oszillierenden) und stückweise stetigen beschränkten Funktion kann man aus endlich vielen Teilintervallen  $I_k = (a_k, b_k)$  zusammensetzen mit  $f \in \mathcal{INT}(I_k) \Rightarrow f \in \mathcal{INT}(I)$ .

Sei nun  $f$  stetig in  $I = [a, b, ]$ . . . (  $\Rightarrow f \in \text{beschränkt}(I)$ .)

Wir betrachten Verfeinerungen einer regelmässigen Intervallteilung.

$$\leadsto \lim_{\Delta x_n \rightarrow 0} \Delta S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (f_{i,n}^{Gr} - f_{i,n}^{in}) \cdot \Delta x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (\Delta f_{i,n}) \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b-a}{n}\right) \cdot \sum_{i=1}^n (\Delta f_{i,n})$$

Da  $f$  auf dem beschränkten, abgeschlossenen Intervall  $I = [a, b, ]$  stetig ist, folgt dass  $f$  auf  $I$  gleichmässig stetig sein muss.

$\leadsto \Leftrightarrow \forall x_0 \in I \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in U_{\delta(\varepsilon)}(x_0) : f(x) \in U_{\varepsilon}(f(x_0))$  (Definition!)

Sei  $\varepsilon$  gegeben. Dazu existiert dann ein  $\delta(\varepsilon) > 0$ .

Wähle  $n$  jetzt so gross, dass gilt:  $2\Delta x_n = \frac{2(b-a)}{n} < \delta(\varepsilon)$ .

Dann folgt:  $|f_{i,n}^{Gr} - f_{i,n}^{in}| < |\Delta f_{i,n}| < \varepsilon$

$$\begin{aligned} \leadsto \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : |\Delta f_{i,n}| < \varepsilon &\Rightarrow \lim_{\Delta x_n \rightarrow 0} \Delta S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b-a}{n}\right) \cdot \sum_{i=1}^n (\Delta f_{i,n}) \\ &< \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b-a}{n}\right) \cdot \sum_{i=1}^n \varepsilon = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b-a}{n}\right) \cdot n \cdot \varepsilon = \lim_{n \rightarrow \infty} (b-a) \cdot \varepsilon = 0 \end{aligned}$$

**Satz:**

**Vor.:**

$I = [a, b], f \in \text{stetig}(I)$

**Beh.:**

$f \in \mathcal{INT}(I) \leadsto \int_I f(x) dx \text{ exist.}$

### 4.2.2 Eigenschaften bestimmter Integrale — Qualités d'intégrales définies

#### Zur Limesbildung — Quant à la valeur limite

Wir setzen voraus, dass das Integral  $\int_I f(x) dx$  existiere.

Sei  $f(x) \geq 0$  in  $I$ .  $\leadsto$  Dann gilt:

$$\begin{aligned} S_n^{in} &= \sum_{i=1}^n R_{i,n}^{in} = \sum_{i=1}^n f_{i,n}^{in} \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^n \inf_{x \in I_i} f(x) \cdot \Delta x_n \leq \sum_{i=1}^n f(x)|_{x \in I_i} \cdot \Delta x_n \\ &:= S_n^x \leq \sum_{i=1}^n \sup_{x \in I_i} f(x) \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f_{i,n}^{Gr} \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^n R_{i,n}^{Gr} = S_n^{Gr} \leadsto S_n^{in} \leq S_n^x \leq S_n^{Gr}. \end{aligned}$$

In  $S_n^x$  ist jeweils  $x \in I_i$  beliebig gewählt.

Nun gilt:

$$\int_I f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{(\Delta x_n \rightarrow 0)} S_n^{in} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{(\Delta x_n \rightarrow 0)} S_n^{Gr} \Rightarrow \int_I f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{(\Delta x_n \rightarrow 0)} S_n^x$$

**Lemma:**

**Vor.:**

$$\int_I f(x) dx \text{ ex.}$$

$$S_n^x = \sum_{i=1}^n f(x)|_{x \in I_i} \cdot \Delta x_n, \quad x \in I_i \text{ beliebig}$$

**Beh.:**

$$\int_I f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{(\Delta x_n \rightarrow 0)} S_n^x$$

**Bemerkung:**

Summen  $S_n^x$  nennen wir auch **Riemannsche Summen**. (Solche Summen von Produkten kann man immer auch als Skalarprodukte verstehen.)

#### Linearität — Linéarité

Wie wir schon beim Differentialoperator gesehen haben, finden wir auch hier, dass es sich beim Integral ebenfalls um einen linearen Operator handelt.

$$\begin{aligned} \text{Sei } \int_I f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{(\Delta x_n \rightarrow 0)} S_n^{x,f} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{(\Delta x_n \rightarrow 0)} \sum_{i=1}^n f(x) \cdot \Delta x_n, \\ \int_I g(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{(\Delta x_n \rightarrow 0)} S_n^{x,g} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{(\Delta x_n \rightarrow 0)} \sum_{i=1}^n g(x) \cdot \Delta x_n \text{ ex. } , \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \alpha \cdot \int_I f(x) dx + \beta \cdot \int_I g(x) dx &= \alpha \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{(\Delta x_n \rightarrow 0)} \sum_{i=1}^n f(x) \cdot \Delta x_n + \beta \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{(\Delta x_n \rightarrow 0)} \sum_{i=1}^n g(x) \cdot \Delta x_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{(\Delta x_n \rightarrow 0)} \alpha \cdot \sum_{i=1}^n f(x) \cdot \Delta x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{(\Delta x_n \rightarrow 0)} \beta \cdot \sum_{i=1}^n g(x) \cdot \Delta x_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{(\Delta x_n \rightarrow 0)} \sum_{i=1}^n (\alpha \cdot f(x) \cdot \Delta x_n) + \sum_{i=1}^n (\beta \cdot g(x) \cdot \Delta x_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{(\Delta x_n \rightarrow 0)} \sum_{i=1}^n (\alpha \cdot f(x) \cdot \Delta x_n + \beta \cdot g(x) \cdot \Delta x_n) = \int_I (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)) dx \end{aligned}$$

**Satz:****Vor.:**

$$\int_I f(x) dx, \int_I g(x) dx \text{ ex.}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

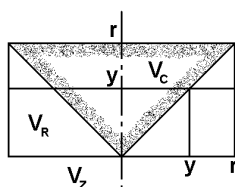
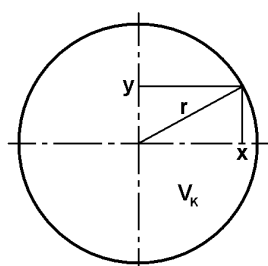
**Beh.:**

$$\begin{aligned} & \int_I (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)) dx \text{ ex.} \quad \wedge \\ & \int_I (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)) dx = \alpha \cdot \int_I f(x) dx + \beta \cdot \int_I g(x) dx \end{aligned}$$

**Ausblick: Das Prinzip von Cavalieri — Application: Le principe de Cavalieri**

$$\text{Es gilt:} \quad f(x) = g(x) - h(x) \Rightarrow \int_I f(x) dx = \int_I g(x) dx - \int_I h(x) dx$$

Einmal berechnen wir hier die den Inhalt der Fläche zwischen der  $x$ -Achse und der Kurve  $y_1 = f(x)$ . Dieser Inhalt ist gleich dem Inhalt der Fläche zwischen den Kurven  $y_2 = h(x)$  und  $y_3 = g(x)$ . Es spielt daher für den Inhalt keine Rolle, ob wir die „infinitesimal dünnen Balken mit dem Inhalt  $f(x) dx$ “ beliebig in  $y$ -Richtung verschieben. Dieses Prinzip ist bekannt als das **Prinzip von Cavalieri**.



Links: Kugel.  
Rechts: Zylinder,  
darin Kegel.

$$\begin{aligned} \text{Kugel (K):} \quad & \leadsto x^2 + y^2 = r^2 \quad \leadsto \text{Querschnitt: } A_K = x^2 \cdot \pi \\ \text{Zylinder(Z) mit Kegel(C): Kreisring(R)} \\ & \leadsto A_R = r^2 \cdot \pi - y^2 \cdot \pi = (r^2 - y^2) \cdot \pi = x^2 \cdot \pi \Rightarrow A_K = A_R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cavalieri:} \quad & A_K dx = A_R dx \leadsto V_a = \frac{1}{2} \cdot V_K \\ \leadsto V_K = 2 V_a = 2 (V_Z - V_C) &= 2 (r^2 \pi \cdot r - r^2 \pi \cdot r \cdot \frac{1}{3}) = 2 r^3 \pi \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \cdot r^3 \pi \leadsto V_K = \frac{4}{3} \cdot r^3 \pi \end{aligned}$$

**Intervalle und Vereinigungen — Intervalles et réunions**

Seien  $I_A = (a, b)$ ,  $I_B = [a, b)$ ,  $I_C = (a, b]$ ,  $I_D = [a, b]$

Sei  $\int_{I_A} f(x) dx$  ex.

Es gilt:

$$\int_{I_A} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty (\Delta x_n \rightarrow 0)} S_n^{x,f} = \int_{I_A} f(x) dx, = \int_{I_B} f(x) dx, = \int_{I_C} f(x) dx, = \int_{I_D} f(x) dx \leadsto$$

**Lemma:**

$$\int_{I_A} f(x) dx = \int_{I_B} f(x) dx = \int_{I_C} f(x) dx = \int_{I_D} f(x) dx$$

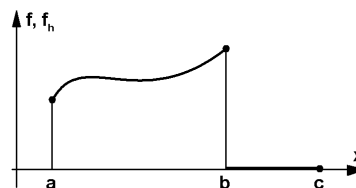


Seien

$$I_a = (a, b], \quad I_b = (b, c), \quad I = (a, c)$$

Sei  $\int_a^b f(x) dx$  ex. .

Wir dehnen nun  $f$  aus auf ganz  $I$  wie folgt:



$$f_h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in I_a = (a, b] \\ 0 & x \in I_b = (b, c) \end{cases}$$

$$\text{Dann gilt: } \int_I f_h(x) dx = \int_a^c f_h(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f_h(x) \cdot (x_{i,n} - x_{i-1,n})$$

Nach Definition von  $f_h$  ist  $f_h(x)$  von einem gewissen Index  $i = k(n)$  an 0, liefert also keinen Beitrag mehr zur Summe.  $\leadsto$

Wähle nun die Intervallteilung so, dass gilt:  $x_{i=k(n),n} = b$

$$\int_I f_h(x) dx = \int_a^c f_h(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k(n)} f_h(x) \cdot (x_{i,n} - x_{i-1,n})$$

Wegen  $\Delta x_n := \max \Delta x_{n,i} = \max(x_{i,n} - x_{i-1,n}) \rightarrow 0$  geht mit  $n$  auch  $k(n)$  gegen  $\infty$ .  $\leadsto$

$$\begin{aligned} \int_I f_h(x) dx &= \int_a^c f_h(x) dx = \lim_{k(n) \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k(n)} f_h(x) \cdot (x_{i,n} - x_{i-1,n}) = \\ &= \lim_{k(n) \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k(n)} f(x) \cdot \Delta x_{i,n} = \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

Nach dem gleichen Muster kann man diese Aussage auf den Fall  $(a, b) \subseteq (c, d)$  verallgemeinern.  $\leadsto$

**Lemma:**

**Vor.:**

$$\int_a^b f(x) dx \text{ ex. .}$$

$$f_h(x) = f(x) \text{ für } x \in (a, b), \quad f_h(x) = 0 \text{ für } x \notin (a, b)$$

$$(a, b) \subset [a, c]$$

**Beh.:**

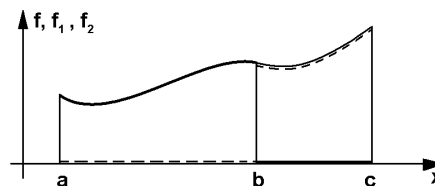
$$\int_a^c f_h(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Seien

$$I_a = (a, b], \quad I_b = (b, c), \quad I = (a, c)$$

Sei  $\int_a^c f(x) dx$  ex. .

Wir zerlegen nun  $f$  auf  $I$  wie folgt:



$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (a, b] \\ 0 & x \notin (a, b] \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (b, c) \\ 0 & x \notin (b, c) \end{cases} \quad \leadsto \quad f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

Wegen der Linearität des Integraloperators und des Lemmas gilt nun:

$$\begin{aligned} \int_a^c f(x) dx &= \int_a^c (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int_a^c f_1(x) dx + \int_a^c f_2(x) dx \\ &= \int_a^b f_1(x) dx + \int_b^c f_2(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx \end{aligned}$$

**Satz:** **Vor.:**  $\int_a^c f(x) dx$  ex.

**Beh.:**

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Ein Integral lässt sich somit beliebig in Teilintegrale aufteilen. Diesen Sachverhalt hätte man anders auch nicht erwartet.

### Intervallumkehrung — Intégrale à l'inverse

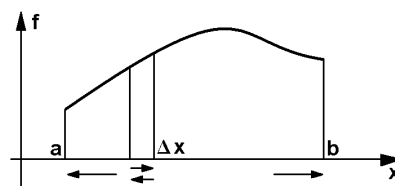
$$\begin{aligned} \text{Sei} \quad \int_I f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x_n \text{ ex. } \leadsto \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot (x_{i,n} - x_{i-1,n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n}^1 f(x_i) \cdot (-(x_{i-1,n} - x_{i,n})) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n}^1 f(x_i) \cdot (\Delta x_n^-) := - \int_{-I} f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \end{aligned}$$

**Satz:**

**Vor.:**  $\int_a^b f(x) dx$  ex.

**Beh.:**

$$\leadsto \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$



Nach dem Satz im letzten Abschnitt gilt nun:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^a f(x) dx + \int_a^b f(x) dx \\ \Rightarrow \int_a^a f(x) dx &= \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f(x) dx (= \int_a^b f(x) dx + (- \int_b^a f(x) dx)) \end{aligned}$$

**Korollar:**  $\int_a^a f(x) dx = 0$

**Ungleichungen — Inégalités**

Im folgenden setzen wir voraus, dass die verwendeten Funktionen integrierbar sind.

Wir wissen schon:  $f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_I f(x) dx \geq 0$

Sei  $f(x) \geq g(x)$  in  $I \rightsquigarrow f(x) - g(x) \geq 0$   
 $\Rightarrow \int_I (f(x) - g(x)) dx = \int_I f(x) dx - \int_I g(x) dx \geq 0 \Rightarrow \int_I f(x) dx \geq \int_I g(x) dx$

**Satz:****Vor.:**

$$f(x) \geq g(x) \text{ in } I, (f, g \in \mathcal{INT}(I))$$

**Beh.:**

$$\int_I f(x) dx \geq \int_I g(x) dx$$

Wegen  $|f(x)| \geq \pm f(x)$  gilt speziell:

**Korollar:**

$$\int_I |f(x)| dx \geq \left| \int_I f(x) dx \right| \geq \pm \int_I f(x) dx$$

Weiter gilt die **Ungleichung von Schwarz:**

**Satz:**

$$\left( \int_I f(x) \cdot g(x) dx \right)^2 \leq \int_I (f(x))^2 dx \cdot \int_I (g(x))^2 dx$$

**Zur Herleitung:**

$\rightsquigarrow$  für  $f(x) \equiv 0 \vee g(x) \equiv 0$  ist nichts zu beweisen.

Sei also:  $f(x) \not\equiv 0 \wedge g(x) \not\equiv 0$ .

Seien  $\alpha = \left( \int_I (f(x))^2 dx \right)^{-\frac{1}{2}}$ ,  $\beta = \left( \int_I (g(x))^2 dx \right)^{-\frac{1}{2}}$

Setzen wir  $\alpha$  und  $\beta$  in den folgenden Ausdruck ein und formen wir um, so erhalten wir die Schwarzsche Ungleichung:

$$\begin{aligned} A &= \alpha^2 \int_I (f(x))^2 dx - 2\alpha\beta \int_I f(x) \cdot g(x) dx + \beta^2 \int_I (g(x))^2 dx = \\ &= \int_I (\alpha^2 f(x)^2 - 2\alpha\beta f(x) \cdot g(x) + \beta^2 g(x)^2) dx = \int_I (\alpha f(x) - \beta g(x))^2 dx \geq 0 \\ &\Rightarrow \frac{\int_I f^2}{\int_I g^2} + \frac{\int_I g^2}{\int_I f^2} \geq 2 \frac{1}{\int_I f^2} \cdot \frac{1}{\int_I g^2} \cdot \int_I f \cdot g \Rightarrow 1 \geq \frac{\int_I f \cdot g}{\int_I f^2 \cdot \int_I g^2} \end{aligned}$$

da  $(\alpha f(x) - \beta g(x))^2 \geq 0$

**Mittelwertsatz der Integralrechnung — Théorème de la moyenne du calcul intégral**

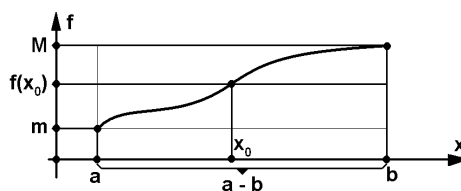
Sei  $f$  stetig( $I$ ),  $I = [a, b]$

Jede auf einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion nimmt dort mindestens ein absolutes Maximum  $M$  oder Minimum  $m$  an  $\Rightarrow \exists_{m, M \in \mathbb{R}} \forall_{x \in I} : x \leq f(x) \leq M$

$f(x)$  durchläuft demnach das Intervall  $[m, M] \rightsquigarrow (b-a) \cdot m = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx = (b-a) \cdot M$

Da  $f(x)$  alle Werte aus  $[m, M]$  annimmt, gilt somit:

$$\begin{aligned} \exists_{x_0 \in I} : f(x_0) \in [m, M] \wedge (b-a) \cdot f(x_0) &= \\ &= \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$



D.h. das Integral  $\int_a^b f(x) dx$  ist gleich dem Inhalt eines Rechtecks, das zwischen den Rechtecken mit den Inhalten  $(b-a) \cdot m$  und  $(b-a) \cdot M$  liegt.

**Satz:** **Mittelwertsatz der Integralrechnung**

**Vor.:**

$$f \text{ stetig}(I), \quad I = [a, b]$$

**Beh.:**

$$\exists_{x_0 \in I} : (b-a) \cdot f(x_0) = \int_a^b f(x) dx$$

**Wie weiter? — Comment continuer?**

Bis jetzt haben wir eine Menge von Sätzen hergeleitet, damit aber noch überhaupt kein einziges interessantes Beispiel rechnen können. Wozu denn all diese Arbeit eigentlich? — Das wird sich noch zeigen. Der ganze Trick der Integralrechnung beruht auf dem sogenannten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Infinitesimalrechnung, von Leibniz und Newton), der einen Zusammenhang zwischen dem Differenzieren und dem Integrieren klarlegt. Und dieser Zusammenhang erlaubt es, einen Kalkül aufzubauen. Wir werden damit schlagartig mit den Kenntnissen der Differentialrechnungen bequem Integrale berechnen können.

## 4.3 Der Kalkül — Le calcul

### 4.3.1 Stammfunktionen — Fonctions antidérivées

Um beim Integrieren weiterzukommen ist es notwendig, uns erst wieder ein wenig mit der Differentialrechnung zu beschäftigen.

Sei  $f$  definiert über  $I$ .

**Definition:**

$F : x \mapsto F(x)$  heisst **Stammfunktion** von  $f$  über  $I$

$$\Leftrightarrow \frac{dF}{dx} = F'(x) = f(x) \quad \text{in } I$$

**1. Beispiel:**

$f(x) = e^x \Rightarrow F_c(x) = e^x + c$  ist Stammfunktion zu  $f(x)$ .

**2. Beispiel:**

$f(x) = k \Rightarrow F_c(c) = k \cdot x + c$  ist Stammfunktion zu  $f(x)$ .

### 3. Beispiel:

$f(x) = \frac{1}{2}x \Rightarrow F_c(c) = x^2 + c$  ist Stammfunktion zu  $f(x)$ .

### 4. Beispiel:

$f(x) = \frac{1}{3}x^2 \Rightarrow F_c(c) = x^3 + c$  ist Stammfunktion zu  $f(x)$ .

Die Beispiele zeigen:  $[F(x) + c]' = [F(x)] \Rightarrow$  mit  $F(x)$  ist auch  $F(x) + c$  Stammfunktion

$\leadsto$  **Problem:** Sei  $\mathcal{F} = \{F(x) + c\}$  — Ist  $\mathcal{F}$  die Menge aller Stammfunktionen zu  $f(x)$ , oder gibt es noch weitere? Wir wollen uns das überlegen:

Seien

$F_1(x), F_2(x)$  zwei Stammfunktionen zu  $f(x)$  über  $I$ .

Sei  $F_1(x) - F_2(x) = \Phi(x) \neq \text{const.} \Rightarrow \Phi'(x) \neq 0$  (keine nur horizontale Tangente)

$\Rightarrow [F_1(x) - F_2(x)]' \equiv F_1'(x) - F_2'(x) \equiv f(x) - f(x) \equiv 0$

$\Rightarrow \Phi'(x) = \text{const.} \leadsto$  Widerspruch!  $\leadsto$

**Satz:**

**Vor.:**

$F_1(x), F_2(x) \leadsto$  Stammfunktionen zu  $f(x)$  über  $I$

**Beh.:**

$F_1(x) - F_2(x) \equiv \text{const.}$

$\{F_1(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\} =$  Menge aller Stammf'kt. zu  $f(x)$  über  $I$ .

**Konsequenz:** Kennt man eine Stammfunktion, so kennt man demnach alle.

## 4.3.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung — Théorème principal du calcul différentiel et intégral

### Herleitung — Dédution

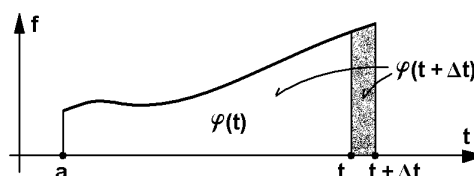
Zur Herleitung des Hauptsatzes können wir die aufgestellte Theorie der bestimmten Integrale fruchtbar anwenden.

Sei  $\varphi(t) = \int_a^t f(x) dx$  ex.

( $a \in I, t \in I$  variabel)

$\leadsto \varphi(t)$  ist ein bestimmtes Integral als Funktion der oberen Grenze.

$\leadsto \varphi'(t) = ?$



Sei  $t + \Delta t \in I$

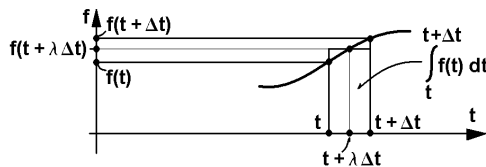
$$\varphi'(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_a^{t+\Delta t} f(x) dx - \int_a^t f(x) dx}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_t^{t+\Delta t} f(x) dx}{\Delta t} \stackrel{\text{Mittelwertsatz}}{=}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_m) \cdot \Delta t}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} f(t + \lambda \cdot \Delta t) = f(t), \quad \lambda \in [0, 1]$$

$\leadsto$

**Satz:****Vor.:**

$$\int_a^t f(x) dx \text{ ex. für } t \in I, a \in I$$

**Beh.:**

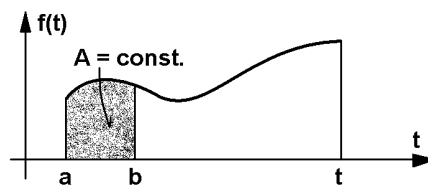
$$\frac{d}{dt} \int_a^t f(x) dx = f(t)$$

**Konsequenz:**  $\int_a^t f(x) dx$  ist Stammfunktion von  $f(x)$ .

Anders formuliert: Die Ableitung des Integrals als Funktion der oberen Grenze ergibt den Integranden.

Stammfunktionen sind nur bis auf eine additive Konstante bestimmt.

Wählt man  $a$  anders, so erhält man eine andere Stammfunktion (vgl. Skizze).



$$F_1(t) = \int_a^t f(x) dx, \quad F_2(t) = \int_b^t f(x) dx$$

$$\Rightarrow F_1(t) = \int_a^t f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^t f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + F_2(t),$$

$$\int_a^b f(x) dx = F_1(t) - F_2(t) = \text{const.}$$

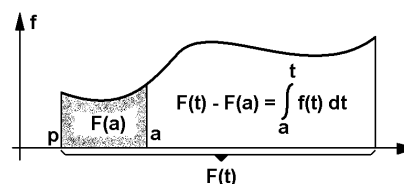
**Bemerkung:**

$$\int_a^t f(x) dx = F(t) \text{ ist Stammfunktion } \leadsto \int_a^a f(x) dx = 0 = F(a)$$

Für die anschliessende Überlegung ist es zweckmässig, die Grenzen anders zu benennen:

$$\text{Sei } F(t) = \int_p^t f(x) dx \text{ eine Stammfunktion zu } f(x)$$

$$\begin{aligned}
 \leadsto F(t) &= \int_p^t f(x) dx = \\
 \int_p^a f(x) dx + \int_a^t f(x) dx &= F(a) + \int_a^t f(x) dx \\
 \Rightarrow F(t) &= \int_a^t f(x) dx + F(a)
 \end{aligned}$$



$$\text{Wähle nun } t = b \Rightarrow F(b) = \int_a^b f(x) dx + F(a) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

**Satz:****Vor.:**Sei  $F(x)$  beliebige Stammfunktion von  $f(x)$  über  $I = [a, b]$ **Beh.:**

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

**Konsequenz:** Die Berechnung bestimmter Integrale ist somit reduziert auf die Berechnung von Stammfunktionen.

Dabei ist die folgende Bezeichnung üblich:

**Definition:**Eine Stammfunktion heisst **unbestimmtes Integral**.Man schreibt:  $\int f(x) dx := F(x) + C$  $C$  heisst **Integrationskonstante**.**Bemerkung:**

Eine andere Auffassung geht vom Mengenbegriff aus:

$$\int f(x) dx := \{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$$

**Beispiele:**

1.  $\int 1 dx = x + C$
2.  $\int x dx = \frac{1}{2} x^2 + C$
3.  $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$
4.  $\int_1^3 \frac{1}{x} dx = (\ln(3) + C) - (\ln(1) + C) = \ln(3) - \ln(1)$
5.  $\int_0^1 x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{t^2} \Big|_{t=0}^{t=1} = e^1 - e^0 = e - 1$   
 Man schreibt oft einfach:  $\frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_{x=0}^{x=1} = \dots = e - 1$
6.  $\int_r^s x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \Big|_{x=r}^{x=s} = s^{\alpha+1} - r^{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1)$

**Achtung:** Viele elementare Funktionen besitzen keine elementare Stammfunktionen!

$$\text{Z.B. } f(x) = e^{x^2} \quad \text{oder} \quad f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

In einigen Fällen hilft man sich dann damit, dass man den unbekannten Stammfunktionen einen Namen gibt und sie tabelliert. Z.B.:

**Definition:**

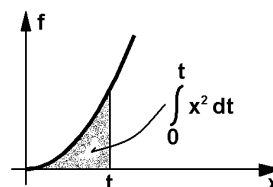
$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2} dx := \text{Erf}(t) \leadsto \underline{\text{Error function}}$$

$$\int_0^t \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx := \leadsto \text{Fresnelintegral}$$

### Elementare Beispiele — Exemples élémentaires

**1. Beispiel:**

$$\int_0^t x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_{x=0}^{x=t} = \frac{1}{3} (t^3 - 0) = \frac{1}{3} t^3$$

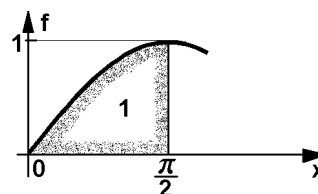


**Bemerkung:**

Das durch den Ursprung und den Punkt  $(t, t^2)$  gegebene Quadrat hat den Inhalt  $t^3$ . Die Parabel drittelt dieses Quadrat!

**2. Beispiel:**

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx &= -\cos(x) \Big|_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos(0)) = 0 - (-1) = 1 \end{aligned}$$



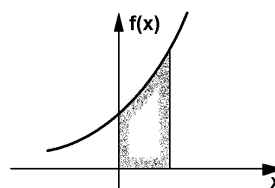
**Bemerkung:**

Eine transzendente Funktion über einem Intervall mit einer transzendenten Länge begrenzt hier eine Fläche mit einem ganzzahligen Inhalt!

Eine transzendente Funktion über einem Intervall mit einer transzendenten Länge begrenzt hier eine Fläche mit einem ganzzahligen Inhalt!

**3. Beispiel:**

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^x dx &= e^x \Big|_{x=0}^{x=1} = e^1 - e^0 = e - 1 \\ \int_0^1 (e^x + 1) dx &= e^x + x \Big|_{x=0}^{x=1} = \\ &= (e^1 + 1) - (e^0 + 0) = e + 1 - 1 = e \end{aligned}$$



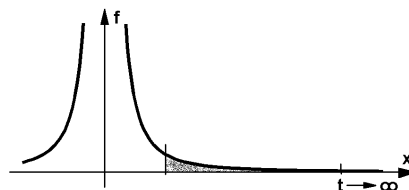


### 4.3.3 Uneigentliche Integrale — Intégrales impropres

#### Unendliche Intervalllängen — Longueurs infinies d'intervalles

Bsp.:

$$\begin{aligned}\int_1^t \frac{1}{x^2} dx &= \int_1^t x^{-2} dx = \frac{1}{-1} x^{-1} \Big|_{x=1}^{x=t} = \\ &= (-t^{-1}) - (-1^{-1}) = -\frac{1}{t} + 1\end{aligned}$$



Wenn man  $t$  immer weiter nach rechts rückt, (d.h.  $t \rightarrow \infty$ ), existiert der Limes des Integrals. Es gilt:

$$\int_1^t \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{t} + 1 \rightarrow 0 + 1 = 1 := \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

**Bemerkung:**

Wir haben hier die höchst erstaunliche Tatsache vor uns, dass es offenbar Flächen mit endlichen Inhalten unter unendlich langen Kurven gibt! Ohne exakte Mathematik wäre das wohl nicht glaubhaft!

Solche Integrale über unendlichen Intervallen nennen wir **uneigentliche Integrale**.

Bsp.:

$$\int_1^t \frac{1}{x} dx = \ln(x) \Big|_{x=1}^{x=t} = \ln(t) - \ln(1) = \ln(t) - 0 = \ln(t) \rightarrow \infty \text{ für } t \rightarrow \infty.$$

Hier hat die Situation gewechselt: Der Inhalt ist unendlich geworden!

Bsp.: Sei  $t < 0$ .  $\int_t^0 e^x dx = e^x \Big|_{x=t}^{x=0} =$   
 $e^0 - e^t = 1 - e^{-|t|}$   
 $= 1 - \frac{1}{e^{|t|}} \rightarrow 1 - 0 = 1$   
für  $t \rightarrow -\infty$ .



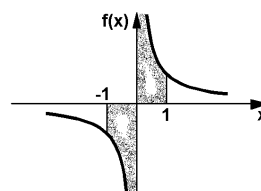
#### Integrale und Pole — Intégrales et pôles

Eine vergleichbare Situation hat man bei Polen.

1. Beispiel:  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = ?$

$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$  hat bei  $x = 0$  einen Pol

Andererseits muss aus Symmetriegründen der Inhalt der Fläche unter der Kurve 0 sein (Skizze!).



Rechnerisch kann man zu diesem Resultat gelangen, wenn man erst eine symmetrische Umgebung von 0 ( $U_\varepsilon(0)$ ) weglässt, integriert und dann  $\varepsilon$  gegen 0 gehen lässt.

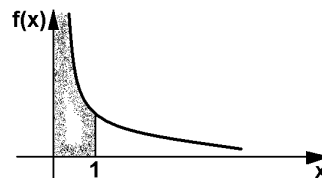
$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( (\ln(|x|) \Big|_{x=-1}^{x=-\varepsilon}) + (\ln(|x|) \Big|_{x=\varepsilon}^{x=1}) \right) =$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} ((\ln(|-\varepsilon|) - \ln(|-1|)) + ((\ln(|1|) - \ln(|\varepsilon|))) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln(\varepsilon) - \ln(1) + \ln(1) - \ln(\varepsilon)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 0 = 0$$

**2. Beispiel:**

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} \Big|_{x=0}^{x=1} =$$

$$2\sqrt{x} \Big|_{x=0}^{x=1} = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{0} = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 2$$



Obwohl  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  bei 0 einen Pol hat, ist das Integral endlich!

**4.3.4 Integrationsregeln — Règles d'intégration**

Da integrieren jetzt das Auffinden einer Stammfunktion bedeutet, hat man es hier mit der Umkehrop-  
eration des Differenzierens zu tun. Wenn man daher die Differentiationsregeln rückwärts liest, erhält  
man Integrationsregeln. Z.B. gilt daher die Linearitätsregel, woraus man sieht, dass Polynome termweise  
integrierbar sind. Auch sind die Regeln für einige trigonometrische Funktionen, u.s.w. direkt ablesbar,  
bei andern lässt sich die Stammfunktion schnell konstruieren. Nachfolgend sind einige einfachen Stamm-  
funktionen aufgelistet. Weiter sei auf die Integrationstabellen in der Standardliteratur verwiesen oder auf  
Computeralgebraprogramme. Später werden wir noch z.B. die Produktenregel oder die Kettenregel für  
die Integration umschreiben und entsprechende Regeln erhalten.

**Regeln:**

1.  $\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx + C$
2.  $\int x^k dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1} + C$
3.  $\int a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 dx = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \dots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x + C$
4.  $\int e^x dx = e^x + C$
5.  $\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + C$
6.  $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$
7.  $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$
8.  $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{-\ln(1-x)}{2} + \frac{\ln(1+x)}{2} + C$
9.  $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arsinh}(x) + C$
10.  $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C$
11.  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \ln(x + \sqrt{-1+x^2}) + C$
12.  $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$
13.  $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$
14.  $\int \tan(x) dx = -\ln(|\cos(x)|) + C$
15.  $\int \cot(x) dx = \ln(|\sin(x)|) + C$
16.  $\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + C$
17.  $\int -\frac{1}{\sin^2(x)} dx = \cot(x) + C$
18.  $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{|a|}\right) + C$
19.  $\int \arcsin(x) dx = x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$
20.  $\int \arccos(x) dx = x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + C$
21.  $\int \arctan(x) dx = x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$
22.  $\int \operatorname{arccot}(x) dx = x \cdot \operatorname{arccot}(x) + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$
23.  $\int \sinh(x) dx = \cosh(x) + C$
24.  $\int \cosh(x) dx = \sinh(x) + C$
25.  $\int \tanh(x) dx = \ln(\cosh(x)) + C$
26.  $\int \coth(x) dx = \ln(|\sinh(x)|) + C$

**4.3.5 Partielle Integration — Intégration partielle**

Wir wollen die Produktregel der Differentialrechnung für die Integration nutzbar machen.

$$\begin{aligned}
 (F(x) \cdot G(x))' &= F'(x) \cdot G(x) + F(x) \cdot G'(x) = f(x) \cdot G(x) + F(x) \cdot g(x) \\
 \Rightarrow \int_a^b (F(x) \cdot G(x))' dx &= (F(x) \cdot G(x)) \Big|_{x=a}^{x=b} = \int_a^b f(x) \cdot G(x) dx + \int_a^b F(x) \cdot g(x) dx \\
 \Rightarrow \int_a^b f(x) \cdot G(x) dx &= (F(x) \cdot G(x)) \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b F(x) \cdot g(x) dx
 \end{aligned}$$

**Regel:****Vor.:**

$$F'(x) = f(x), \quad G'(x) = g(x)$$

**Beh.:**

$$\int_a^b f(x) \cdot G(x) dx = (F(x) \cdot G(x)) \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b F(x) \cdot g(x) dx$$

**1. Beispiel:**

$$\begin{aligned} \int_a^b \sin(x) \cdot x dx &= (-\cos(x) \cdot G(x)) \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b -\cos(x) \cdot 1 dx = (-\cos(b) \cdot b) - (-\cos(a) \cdot a) + \int_a^b \cos(x) dx \\ &= \cos(a) \cdot a - \cos(b) \cdot b + \sin(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = a \cdot \cos(a) - b \cdot \cos(b) + \sin(b) - \sin(a) \end{aligned}$$

Hier haben wir ausgenutzt, dass der Faktor  $G(x) = x$  beim Ableiten verschwindet.

$$\mathbf{2. Beispiel:} \quad \int_0^\pi e^x \cdot \sin(x) dx = (e^x \cdot \sin(x)) \Big|_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi e^x \cdot \cos(x) dx =$$

$$= (e^\pi \cdot \sin(\pi)) - (e^0 \cdot \sin(0)) - (e^x \cdot \cos(x)) \Big|_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi e^x \cdot (-\sin(x)) dx =$$

$$= 0 - 0 - (e^\pi \cdot \cos(\pi) - e^0 \cdot \cos(0)) + \int_0^\pi e^x \cdot \sin(x) dx = -e^\pi \cdot (-1) + 1 \cdot 1 - \int_0^\pi e^x \cdot \sin(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi e^x \cdot \sin(x) dx = -e^\pi \cdot (-1) + 1 - \int_0^\pi e^x \cdot \sin(x) dx \Rightarrow 2 \int_0^\pi e^x \cdot \sin(x) dx = 1 + e^\pi$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi e^x \cdot \sin(x) dx = \frac{1 + e^\pi}{2}$$

Hier gelang es uns, für das unbekannte Integral eine algebraische Gleichung herzuleiten, die wir lösen konnten.

Diese Methode funktioniert aber nicht immer:

$$\mathbf{3. Beispiel:} \quad \int_0^\pi \sin^2(x) dx = \int_0^\pi \sin(x) \cdot \sin(x) dx$$

$$= -\cos(x) \cdot \sin(x) \Big|_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi -\cos(x) \cdot \cos(x) dx$$

$$= -\cos(\pi) \cdot \sin(\pi) - (-\cos(0) \cdot \sin(0)) + \int_0^\pi \cos(x) \cdot \cos(x) dx =$$

$$0 + 0 + \sin(x) \cdot \cos(x) \Big|_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi \sin(x) \cdot (-\sin(x)) dx = 0 + 0 + \int_0^\pi \sin(x) \cdot \sin(x) dx = \int_0^\pi \sin^2(x) dx$$

$\leadsto$  Damit ist nichts gewonnen. Es entsteht hier keine algebraische Gleichung, aus der man das unbekannte Integral berechnen könnte!

Die Sache ist aber nicht verloren: ein Trick hilft hier weiter:

$$\int_0^\pi \sin^2(x) dx = \int_0^\pi \cos(x) \cdot \cos(x) dx = \int_0^\pi \cos^2(x) dx$$

Aus Gründen der Symmetrie wissen wir:

$$\int_0^\pi \sin^2(x) dx = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) dx = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \sin^2(x) dx = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx - 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx$$

$$\Rightarrow 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx \Rightarrow \int_0^{\pi} \sin^2(x) dx = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = x \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

### 4.3.6 Substitutionen — Substitutions

#### Eine Regel — Une règle

Sei  $\varphi : t \mapsto x = \varphi(t)$  bijektiv.

Betrachte:

$$\begin{array}{ccccc} t = \varphi^{-1}(x) & \xrightarrow{\text{bij}} & x = \varphi(t) & \mapsto & F(x) = F(\varphi(t)) \\ \downarrow & & & & \uparrow \\ & \mapsto & \mapsto & \xrightarrow{F \circ \varphi} & \mapsto \end{array}$$

Sei

$$\begin{aligned} \frac{dF(x)}{dx} &= F'(x) = f(x), \\ \frac{dF(\varphi(t))}{dt} &= \frac{dF(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \Big|_{x=\varphi(t)} = f(x) \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt} = f(\varphi(t)) \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt} = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \end{aligned}$$

$\leadsto f(x)$  hat bezüglich  $x$  die Stammfunktion  $F(x)$  und  $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$  hat bezüglich  $t$  die Stammfunktion  $F(\varphi(t))$  mit  $F(x) = F(\varphi(t))$ .

$$F(x) = F(\varphi(t)) \leadsto \int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi(a)^{-1}}^{\varphi(b)^{-1}} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \leadsto$$

**Regel:** **Substitutionsregel**

**Vor.:**

$\varphi : t \mapsto x = \varphi(t)$  bij.

**Beh.:**

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{\varphi(a)^{-1}}^{\varphi(b)^{-1}} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \\ \int f(x) dx &= F(x) + C \Rightarrow \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C \end{aligned}$$

**Bemerkung:** Formal:

$$f(x) dx = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = f(\varphi(t)) \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt} dt = f(\varphi(t)) \cdot \frac{dx}{dt} dt \leadsto dx = \frac{dx}{dt} dt$$

$$\begin{aligned} \text{Bsp.:} \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin(x) + C \\ \Rightarrow \int \frac{x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} dx &= \int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{1}{2} \cdot \arcsin(x^2) + C \end{aligned}$$

#### Praxis — Pratique

Einige Anwendungen:

$$[F(\alpha \cdot x + \beta)]' = f(\alpha \cdot x + \beta) \cdot (\alpha \cdot x + \beta)' = \alpha \cdot f(\alpha \cdot x + \beta) \Rightarrow \int f(\alpha \cdot x + \beta) dx = \frac{1}{\alpha} \cdot F(\alpha \cdot x + \beta) + C$$

**Korollar:****Vor.:**

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

**Beh.:**

$$\int f(\alpha \cdot x + \beta) dx = \frac{1}{\alpha} \cdot F(\alpha \cdot x + \beta) + C$$

**Folgerungen**

**1. Beispiel:**  $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$   
 $\Rightarrow \int (\alpha \cdot x + \beta)^n dx = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot (\alpha \cdot x + \beta)^{n+1} + C$

**2. Beispiel:**  $\int e^x dx = e^x + C \Rightarrow \int e^{\alpha \cdot x + \beta} dx = \frac{1}{\alpha} \cdot e^{\alpha \cdot x + \beta} + C$

**3. Beispiel:**  $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$   
 $\Rightarrow \int \cos(\alpha \cdot x + \beta) dx = \frac{1}{\alpha} \cdot \sin(\alpha \cdot x + \beta) + C$

**4. Beispiel:**  $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + C \Rightarrow \int \frac{1}{\alpha \cdot x + \beta} dx = \frac{1}{\alpha} \cdot \ln(\alpha \cdot x + \beta) + C$

Das Problem bei der Anwendung der Substitutionsregel liegt bei der Auffindung einer geeigneten Substitution, die zum Erfolg führt. Die Möglichkeiten sind hier aber oft beinahe unbegrenzt. Was also tun? — Viele Werke der mathematischen Standardliteratur bieten hier Hilfen (z.B. Stöcker, Papula), indem sie eine Trickliste anbieten.

**Trickliste:**

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[n]{ax+b} \\ f(x) &= \sqrt[n]{ax^2+bx+c} \\ f(x) &= \sqrt[n]{-ax^2+bx+c} \\ f(x) &= (\ln(x))^n \\ f(x) &= h(\sin(x), \cos(x)) \text{ration.} \\ f(x) &= \sqrt{a^2-x^2} \\ f(x) &= \sqrt{a^2+x^2} \\ f(x) &= \sqrt{-a^2+x^2} \\ \dots\dots \end{aligned}$$

**Wähle:**

$$\begin{aligned} t &= \sqrt[n]{ax+b} \\ t &= x \cdot \sqrt[n]{ax^2+bx+c} \\ t &= -\sqrt[n]{-ax^2+bx+c} \\ t &= \ln(x) \\ \frac{2t}{1+t^2} &= \sin(x), \quad \frac{t^2}{1+t^2} = \cos(x) \\ x &= a \cdot \cos(t) \vee x = a \cdot \sin(t) \\ \text{Z.B. } a \cdot \cos(t) &= \sqrt{a^2-x^2} \\ x &= a \cdot \cosh(t) = \sqrt{a^2+x^2} \\ x &= a \cdot \sinh(t) = \sqrt{-a^2+x^2} \\ \dots\dots \end{aligned}$$

### 4.3.7 Partialbruchzerlegung — Décomposition en fractions partielles

#### Das Problem — Le problème

**Geg.:** Polynome  $P(x), Q(x)$

**Problem:**  $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = ?$

**Bsp.:**

$$\begin{aligned} & \int \frac{27x^5 + 144x^4 - 36x^3 + 378x^2 + 162x - 81}{3x^3 - 4x^2 - 5x + 2} dx = \\ & \int 9x^2 + 60x + 83 + \frac{992x^2 + 457x - 247}{3x^3 - 4x^2 - 5x + 2} dx = \int 9x^2 + 60x + 83 + \frac{309}{x-2} + \frac{24}{x+1} + \frac{7}{3x-1} dx \\ & = \int 9x^2 dx + \int 60x dx + \int 83 dx + \int \frac{309}{x-2} dx + \int \frac{24}{x+1} dx + \int \frac{7}{3x-1} dx = \dots \rightsquigarrow \end{aligned}$$

**Idee:** Vereinfache den Bruch derart, dass nur elementare übrigbleiben.

#### 1.Schritt:

Dividiere  $P(x)$  durch  $Q(x)$ , bis  $\text{pgrad}(\text{Zähler}) < \text{pgrad}(\text{Nenner})$  ist.

**Bsp.:**

$$\frac{27x^5 + 144x^4 - 36x^3 + 378x^2 + 162x - 81}{3x^3 - 4x^2 - 5x + 2} = 9x^2 + 60x + 83 + \frac{992x^2 + 457x - 247}{3x^3 - 4x^2 - 5x + 2}$$

#### 1.Schritt:

Versuche den verbleibenden Bruch in elementarere Teilbrüche zu zerlegen.

$$\text{Bsp.: } \frac{992x^2 + 457x - 247}{3x^3 - 4x^2 - 5x + 2} = \frac{309}{x-2} + \frac{24}{x+1} - \frac{7}{3x-1}$$

Bei Zahlenbrüchen ist dieser Vorgang die Umkehrung zum Gleichnamigmachen.

$$\text{Beispiel mit Zahlen: } \frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

**Beispiel mit Polynomen:**

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x-1) \cdot (x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}, \quad A, B = ?$$

$$A \text{ berechnen: Mult. mit } (x-1) \Rightarrow \frac{(x-1)}{(x-1) \cdot (x+1)} = \frac{A(x-1)}{x-1} + \frac{B(x-1)}{x+1} \Rightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{A}{1} + \frac{B(x-1)}{x+1} \quad \text{für } x \neq 1$$

$$\text{Bilde lim: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{A}{1} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{B(x-1)}{x+1} \Rightarrow \frac{1}{2} = A + \frac{B \cdot 0}{2} = A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

Entsprechend für  $B$

$$(\text{mult. mit } (x+1), \lim_{x \rightarrow -1} \rightsquigarrow A = -\frac{1}{2})$$

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{B}{2(x+1)} \rightsquigarrow \text{Partialbrüche } \frac{1}{2(x-1)}, \frac{B}{2(x+1)}$$

$$\leadsto \int \frac{1}{x^2-1} dx = \int \frac{1}{2(x-1)} dx + \int \frac{B}{2(x+1)} dx = \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + C = \dots$$

### Hinweis zur Partialbruchzerlegung:

Die Theorie der Partialbruchzerlegung sollte in einem Kapitel der Algebra geboten werden, wo es sachlogisch hingehört. Hier sei nur eine kurze Bemerkung angebracht: Voraussetzung zur erfolgreichen Zerlegung ist die Faktorisierung des Nennerpolynoms, die auf dem Hauptsatz der Algebra beruht. (Jedes Polynom mit nur reellen Koeffizienten lässt sich reell in lineare oder quadratische Faktoren resp. in Potenzen von solchen zerlegen.). Das Problem: Es existiert keine Methode zur allgemeinen Auffindung der Zerlegung.

$\leadsto$  Faktoren  $(x-x_i)^n$ ,  $(x^2+b_ix+d_i)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$

### Häufige Integrale — Intégrales fréquentes

$$\text{Sei } \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{A}{x-x_1} + \frac{Bx+D}{x^2+bx+d} dx$$

$$\leadsto \int \frac{A}{x-x_1} dx = A \cdot \ln|x-x_1| + C, \quad \int \frac{Bx+D}{x^2+bx+d} dx = ? \quad \text{Sei } B \neq 0$$

$$\begin{aligned} \int \frac{Bx+D}{x^2+bx+d} dx &= \frac{B}{2} \cdot \int \frac{2x+2\frac{D}{B}+b-b}{x^2+bx+d} dx = \frac{B}{2} \cdot \int \frac{2x+b}{x^2+bx+d} dx + \frac{B}{2} \cdot \int \frac{2\frac{D}{B}-b}{x^2+bx+d} dx = \\ &= \ln|x^2+bx+d| + C + \frac{B}{2} \cdot (2\frac{D}{B}-b) \int \frac{1}{x^2+bx+d} dx, \quad \int \frac{1}{x^2+bx+d} dx = ? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = t - \frac{b}{2} \Rightarrow \int \frac{1}{x^2+bx+d} dx &= \int \frac{1}{(t-\frac{b}{2})^2+b(t-\frac{b}{2})+d} dt = \\ &= \int \frac{1}{t^2-2t\frac{b}{2}+\frac{b^2}{4}+bt-\frac{b^2}{2}+d} dt = \int \frac{1}{t^2-\frac{b^2}{4}+d} dt := \int \frac{1}{t^2 \pm \alpha^2} dt \end{aligned}$$

$$\text{Fall } "+": \int \frac{1}{t^2+\alpha^2} dt = \frac{1}{\alpha} \cdot \arctan\left(\frac{t}{\alpha}\right) + C_1$$

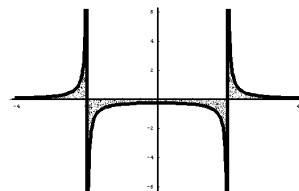
$$\begin{aligned} \text{Fall } "-": \int \frac{1}{t^2-\alpha^2} dt &= \int \frac{1}{(t-\alpha)(t+\alpha)} dt = \int \frac{1}{2(t-\alpha)} - \frac{1}{2(t+\alpha)} dt = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\ln|t-\alpha| - \ln|t+\alpha|) + C_2 = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{|t-\alpha|}{|t+\alpha|}\right) + C_2 \end{aligned}$$

## 4.4 Anwendungen, Beispiele — Applications, exemples

### 4.4.1 Rechenbeispiele — Exemples de calcul

#### Beispiel mit Polen — Exemple avec des pôles

$$\begin{aligned} &\int_{-10}^{10} \frac{1}{x^2-1} dx = \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_{-10}^{10} \frac{1}{x-1} dx - \int_{-10}^{10} \frac{1}{x+1} dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_{-11}^9 \frac{1}{t} dt - \int_{-9}^{11} \frac{1}{t} dt \right) = \frac{1}{2} \left( \int_{-11}^{-9} \frac{1}{t} dt + \right. \\ &\quad \left. \int_{-9}^{-1} \frac{1}{t} dt - \int_{-1}^1 \frac{1}{t} dt - \int_1^{11} \frac{1}{t} dt \right) = \end{aligned}$$





$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left( \int_{-11}^{-9} \frac{1}{t} dt - \int_9^{11} \frac{1}{t} dt \right) = \frac{1}{2} (\ln |t| \big|_{t=-11}^{t=-9} - \ln |t| \big|_{t=9}^{t=11}) = \frac{1}{2} (\ln(9) - \ln(11) - \ln(11) + \ln(9)) = \\
&= \ln(9) - \ln(11) = \ln\left(\frac{9}{11}\right)
\end{aligned}$$

### Stückweise stetige Funktionen — Fonctions continues par morceaux

Bei stückweise stetigen Funktionen integriert man erst einzeln über die Stetigkeitsbereiche. Anschliessend summiert man. (Vgl. 2.4.3 Seite 51.)

**Bsp.:**

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x + \pi) & x \in [-2\pi, -\pi) \\ \sin(x) & x \in [-\pi, 0) \\ x^{-\frac{1}{2}} & x \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

$$\leadsto \int_{-2\pi}^{2\pi} f(x) dx = \int_{-2\pi}^{-\pi} \sin(x + \pi) dx + \int_{-\pi}^0 \sin(x) dx + \int_0^{2\pi} x^{-\frac{1}{2}} dx = -2 + (-2) + 2\sqrt{2\pi} = 2\sqrt{2\pi} - 4$$

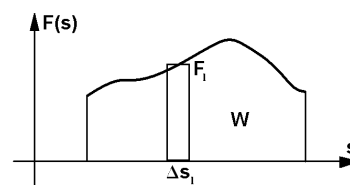
### Potentielle Energie — Energie potentielle

Sei  $F$  = Kraft,  $s$  = Weg,  $W$  = Arbeit.

$$F = \text{const.} \leadsto W = F \cdot s$$

Sonst:

$$W \simeq \sum_i F_i \cdot \Delta s_i \rightarrow \int_{s_1}^{s_2} F(s) ds$$

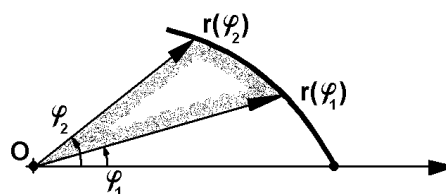


$$s = r, \quad F(r) = c \cdot \frac{q \cdot Q}{r^2}$$

$$\Rightarrow W = \int_{r_1}^{r_2} c \cdot \frac{q \cdot Q}{r^2} dr = c \cdot q \cdot Q \cdot \int_{r_1}^{r_2} r^{-2} dr = c \cdot q \cdot Q \cdot (-1) \cdot r^{-1} \Big|_{r=r_1}^{r=r_2} = c \cdot q \cdot Q \cdot (-1) \cdot \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

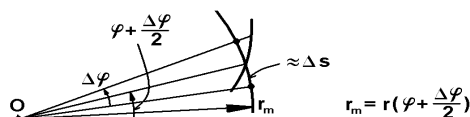
### 4.4.2 Kurven in Polarkoordinaten — Courbes en coordonnées polaires

**Problem:** Was ist der Inhalt der Fläche zwischen der Kurve und zwei vom Ursprung ausgehenden Strahlen?



$$\Delta A \simeq \text{Dreieck}, \quad \Delta s = \Delta \varphi \cdot r_m$$

$$\begin{aligned}
\leadsto \Delta A &\simeq \frac{1}{2} r_m \left( \varphi + \frac{\Delta \varphi}{2} \right) \cdot \Delta s = \\
&= \frac{1}{2} r_m \left( \varphi + \frac{\Delta \varphi}{2} \right)^2 \cdot \Delta \varphi
\end{aligned}$$



$$\leadsto A \simeq \sum_{\dots} \Delta A = \sum_{\dots} \frac{1}{2} r_m \left( \varphi + \frac{\Delta \varphi}{2} \right)^2 \cdot \Delta \varphi \rightarrow \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{2} r(\varphi + 0)^2 d\varphi$$

**Satz:****Vor.:** $r = r(\varphi)$  (Polarkoord. ) $r(\varphi)$  stückweise stetig $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ **Beh.:**

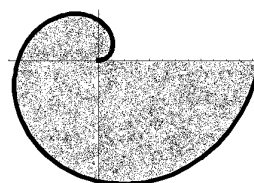
$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{2} r(\varphi)^2 d\varphi$$

**Bsp.:**

Archimedische Spirale:

 $r = r(\varphi) = \varphi, \quad I = [0, 2\pi]$ 

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \varphi^2 d\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \varphi^3 \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{6} \cdot (2\pi)^3 \Big|_0^{2\pi} = \frac{4\pi^3}{3}$$



Damit ist es möglich, Inhalte von Flächen zu berechnen, die z.B. von lemniskatenartigen Kurven, kardioidenartigen Kurven etc. begrenzt werden. ( Z.B.  $r(\varphi) = (\cos(2\varphi))^{\frac{1}{2}}$ ,  $r(\varphi) = 2(1 - \cos(\varphi))$  u.s.w )

### 4.4.3 Kurvenlängen — Longueurs de courbes

**Kartesische Koordinaten — Coordonnées cartésiennes**

Sei  $f : x \mapsto f(x) \in \mathcal{D}(I)$ ,  $I = [x_1, x_2]$

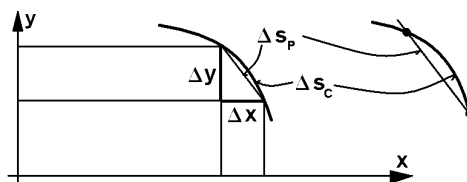
**Problem:** Ausser für den Kreisumfang sind Längen von krummen Kurven bis jetzt nicht definiert.

**Idee:** Ersetze die Kurve  $C(I)$  resp.  $C$  durch einen Polygonzug  $P$ .

$\leadsto$  Längen

$\Delta s_C := \Delta l, \Delta s_P := \Delta s$

bezüglich  $\Delta x$



$$\leadsto \Delta s_C \simeq \Delta s_P = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x$$

$$\leadsto \sum_{\dots} \Delta s_C \simeq \sum_{\dots} \Delta s_P \rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

Der so gewonnene Ausdruck kann benutzt werden, um die Länge einer Kurve über dem Intervall  $[x_1, x_2]$  zu definieren.

**Definition:**

$$\text{Länge } l(C(I)) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

Eine Nachprüfung für Streckenlängen und Kreisumfang ergibt, dass diese Definition mit der bisherigen Längenmessung verträglich ist.

**Gerade:**  $y = f(x) = ax + b, \quad x \in [x_1, x_1]$

Klassisch:

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + ((ax_2 + b) - (ax_1 + b))^2} = \\ = |x_2 - x_1| \cdot \sqrt{1 + a^2} = (x_2 - x_1) \cdot \sqrt{1 + a^2}$$

Neu:

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (a)^2} dx = \sqrt{1 + (a)^2} \cdot x \Big|_{x_1}^{x_2} = (x_2 - x_1) \cdot \sqrt{1 + a^2}$$

**Viertelskreis:**

$$y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad y' = \frac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad x \in [0, r],$$

$$\text{Klassisch: } l = \frac{2r\pi}{4} = \frac{r\pi}{2}$$

Neu:

$$l = \int_0^r \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \int_0^r \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2} dx = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{(\frac{x}{r})^2}{1 - (\frac{x}{r})^2}} dx$$

$$\text{Subst.: } x = r \cos(t), \quad \frac{dx}{dt} = -r \sin(t), \quad dx = -r \sin(t) dt$$

$$\leadsto l = \int_{t=\arccos(1)}^{t=\arccos(0)} \sqrt{1 + \frac{\cos^2(t)}{1 - \cos^2(t)}} \cdot (-r \sin(t)) dt = -r \int_{t=\frac{\pi}{2}}^{t=0} \sqrt{\frac{1 - \cos^2(t) + \cos^2(t)}{1 - \cos^2(t)}} \cdot \sin(t) dt = \\ = -r \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{\frac{1}{\sin^2(t)}} \cdot \sin(t) dt = -r \int_{\frac{\pi}{2}}^0 1 dt = -r t \Big|_{\frac{\pi}{2}}^0 = -r \cdot (0 - \frac{\pi}{2}) = \frac{r \cdot \pi}{2}$$

**Konsequenz:** Diese Längendefinition ergibt in den klassischen Fällen die gleichen Werte.

**Bsp.:** Parabellänge:

Die Parabel  $f(x) = x^2$  ist nach der Geraden die einfachste Kurve.

Sei  $I = [0, t] \leadsto$

$$l = \int_0^t \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \int_0^t \sqrt{1 + x^2} dx = \frac{\operatorname{arsinh}(x)}{2} + \frac{x \cdot \sqrt{1 + x^2}}{2} \Big|_0^t = \frac{\operatorname{arsinh}(t)}{2} + \frac{t \cdot \sqrt{1 + t^2}}{2}$$

**Bemerkung:**

Da der Integrand  $= \sqrt{1 + (y'(x))^2}$  ist, kann man im allgemeinen nicht erwarten, dass eine einfache Stammfunktion gefunden werden kann.

### Polarkoordinaten — Coordonnées polaires

Skizze:  $\Delta l \simeq \Delta s$ ,  $(\Delta s)^2 \simeq$

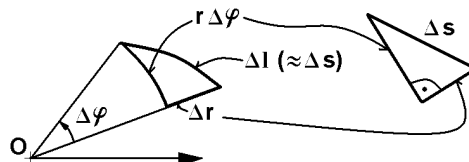
$$(r \cdot \Delta \varphi)^2 + (\Delta r)^2 = (\Delta \varphi)^2 \cdot (r^2 + (\frac{\Delta r}{\Delta \varphi})^2)$$

$$\leadsto \Delta s = \sqrt{r^2 + (\frac{\Delta r}{\Delta \varphi})^2} \cdot \Delta \varphi$$

$$\leadsto l = \sum \dots \Delta l \simeq \sum \dots \Delta s =$$

$$\sum \dots \sqrt{r^2 + (\frac{\Delta r}{\Delta \varphi})^2} \cdot \Delta \varphi$$

$$\rightarrow \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\varphi})^2} d\varphi$$



Damit haben wir vereinfacht eine Formel für die Kurvenlänge bei Polarkoordinaten hergeleitet. Es sei dem Leser überlassen, diese Formel mittels Substitution auf die Situation in kartesischen Koordinaten zurückzuführen.

**Satz:**

**Vor.:**

$r : \varphi \mapsto r(\varphi)$  Kurve in Polarkoord. ,  $I = [\varphi_1, \varphi_2]$

**Beh.:**

$$\text{Kurvenlänge} \\ l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2(\varphi) + \left(\frac{\Delta r(\varphi)}{\Delta \varphi}\right)^2} d\varphi$$

**Bsp.:**

Länge der Archimedischen Spirale  $r(\varphi) = \varphi$ :

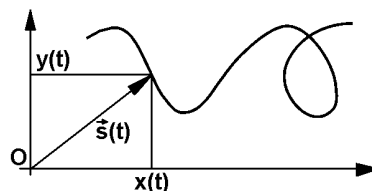
$$\begin{aligned} \text{Sei } I = [0, t] \rightsquigarrow l &= \int_0^t \sqrt{r^2(\varphi) + \left(\frac{dr(\varphi)}{d\varphi}\right)^2} d\varphi = \int_0^t \sqrt{\varphi^2 + \left(\frac{d\varphi}{d\varphi}\right)^2} d\varphi = \\ &= \int_0^t \sqrt{\varphi^2 + 1} d\varphi = \frac{\operatorname{arsinh}(t)}{2} + \frac{t \cdot \sqrt{1+t^2}}{2} = \text{Parabellänge!} \end{aligned}$$

## Vektorfunktionen — Fonctions vectorielles

**Geg.:**

$$\text{Kurve } \vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{resp. } \vec{s}(t) = \begin{pmatrix} s_1(t) \\ \vdots \\ s_n(t) \end{pmatrix}$$



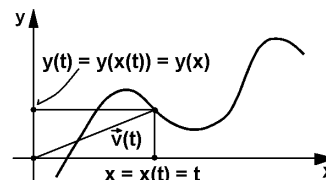
$$\text{Bsp.: Kreis: } \vec{s}(t) = \begin{pmatrix} r \cos(t) \\ r \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{oder Spirale: } \vec{s}(t) = \begin{pmatrix} r \cdot t \cdot \cos(t) \\ r \cdot t \cdot \sin(t) \end{pmatrix} \text{ u.s.w.}$$

**Speziell:**

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t \\ y(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow f : x \mapsto f(x) = y(x)$$



$$\begin{aligned} \Delta l \simeq \Delta s &= \sqrt{(\Delta s_1(t))^2 + \dots + (\Delta s_n(t))^2}, \quad \frac{\Delta s}{\Delta t} = \sqrt{\left(\frac{\Delta s_1(t)}{\Delta t}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\Delta s_n(t)}{\Delta t}\right)^2}, \\ \Delta s &= \sqrt{\left(\frac{\Delta s_1(t)}{\Delta t}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\Delta s_n(t)}{\Delta t}\right)^2} \cdot \Delta t = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \Delta t \rightarrow ds = \frac{ds}{dt} dt = \sqrt{\left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2 + \dots + \left(\frac{ds_n}{dt}\right)^2} \cdot dt \end{aligned}$$

$$l = \sum_{\dots} \Delta l = \sum_{\dots} \Delta s = \sum_{\dots} \sqrt{\left(\frac{\Delta s_1(t)}{\Delta t}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\Delta s_n(t)}{\Delta t}\right)^2} \cdot \Delta t \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2 + \dots + \left(\frac{ds_n}{dt}\right)^2} dt$$

Wie bei den Polarkoordinaten können wir auf Grund dieser vereinfachten Herleitung einen Satz notieren:

**Satz:**

**Vor.:**

$\vec{s}: t \mapsto \vec{s}(t)$  Vektorkurve,   
 $I = [t_1, t_2]$

**Beh.:**

Kurvenlänge

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2 + \dots + \left(\frac{ds_n}{dt}\right)^2} dt$$

**Bsp.:** (Kreis: )

$$\begin{aligned} \vec{s}(t) &= \begin{pmatrix} r \cos(t) \\ r \sin(t) \end{pmatrix} \rightsquigarrow l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{d(r \cos(t))}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d(r \sin(t))}{dt}\right)^2} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(-\sin(t))^2 + r^2(\cos(t))^2} dt = \int_0^{2\pi} r \sqrt{1} dt = r t \Big|_0^{2\pi} = r 2\pi \end{aligned}$$

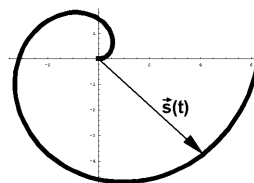
#### 4.4.4 Elementare Linienintegrale — Intégrales curvilignes élémentaires

**Skalare Funktionen — Fonctions scalaires**

**Geg.:** Kurve  $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} s_1(t) \\ \vdots \\ s_n(t) \end{pmatrix}$  in Param-

eterform .

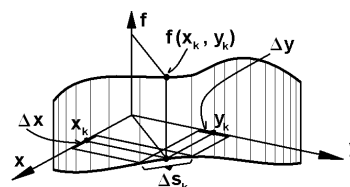
(Üblich ist  $n = 2$  und  $n = 3$ .)



**Bsp.:** Spirale:  $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} r \cdot t \cdot \cos(t) \\ r \cdot t \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$

**Problem:** In der Praxis geht es oft darum, z.B. Ausdrücke nachfolgender Form zu bestimmen:

$$G = \lim_{|\Delta s_k \rightarrow 0|} \sum_k f(x_k, y_k) \cdot \Delta s_k$$



$f(x_k, y_k)$  sei z.B. die Veränderung des Tankinhalts pro Wegstück  $\Delta s_k$ ,  $G$  sei der gesamte Treibstoffverbrauch. Oder  $f(x_k, y_k)$  sei eine Kraft,  $G = W$  eine Arbeit u.s.w..

Normalerweise ist eine Kurve in einer beliebigen Parametrisierung gegeben.

Sei  $n = 2$ ,  $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}$ ,  $t \in [a, b] \Rightarrow f(x, y) = f(\varphi(t), \psi(t)) = h(t)$

(Allgemein.  $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$ )

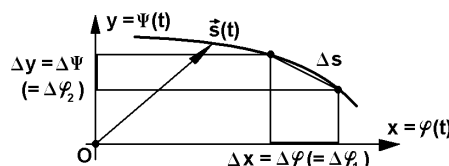
Sei  $s = s(t) =$  Weglänge .

$s$  steckt z.B. in  $\sum_k f(x_k, y_k) \cdot \Delta s_k$  im Term  $\Delta s_k$ ,  $t$  jedoch nicht.

$\leadsto$

Eine Umparametrisierung ist notwendig!

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta \varphi_1(t))^2 + \dots + (\Delta \varphi_n(t))^2},$$



$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \Delta t = \sqrt{\left(\frac{\Delta \varphi_1(t)}{\Delta t}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\Delta \varphi_n(t)}{\Delta t}\right)^2} \cdot \Delta t \rightarrow ds = \frac{ds}{dt} dt = \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + \dots + (\varphi_n'(t))^2} \cdot dt$$

**Definition:**

$$\int_C f(x_1, \dots, x_n) ds := \lim_{|\Delta s_k| \rightarrow 0, m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m f(x_{1,k}, \dots, x_{n,k}) \Delta s_k$$

heißt **Linienintegral** von  $f$  längs  $C$

Es gilt:

$$\sum_{k=1}^n f(x_{1,k}, \dots, x_{n,k}) \Delta s_k = \sum_{k=1}^n f(x_{1,k}, \dots, x_{n,k}) \frac{\Delta s_k}{\Delta t_k} \cdot \Delta t_k \rightarrow \int_{t_1=a}^{t_2=b} f(x_1, \dots, x_n) \frac{ds}{dt} dt,$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + \dots + (\varphi_n'(t))^2}$$

**Satz:**

**Vor.:**

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} s_1(t) \\ \vdots \\ s_n(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(I) \leadsto C \text{ über } I = [a, b]$$

**Beh.:**

$$\int_C f(x_1, \dots, x_n) ds = \int_{t_1=a}^{t_2=b} f(x_1, \dots, x_n) \frac{ds}{dt} dt,$$

$$\frac{ds}{dt} dt = \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + \dots + (\varphi_n'(t))^2} dt$$

**Speziell:**  $s = x(t)$  oder  $s = y(t)$

$$\begin{aligned} \leadsto \int_C f(x, y) dx &= \int_{t_1=a}^{t_2=b} f(x(t), y(t)) \frac{dx(t)}{dt} dt = \int_{t_1=a}^{t_2=b} f(x(t), y(t)) x'(t) dt, \\ \int_C f(x, y) dy &= \int_{t_1=a}^{t_2=b} f(x(t), y(t)) \frac{dy(t)}{dt} dt = \int_{t_1=a}^{t_2=b} f(x(t), y(t)) y'(t) dt \end{aligned}$$

**Bsp.:**

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + y^2, \quad \vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi) \\ \Rightarrow s(t) &= x^2 + y^2 = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1, \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{-\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1 \\ \Rightarrow \int_C f(x_1, x_2) ds &= \int_0^{2\pi} 1 \cdot 1 dt = 2\pi \end{aligned}$$

### Vektorfunktionen — Fonctions vectorielles

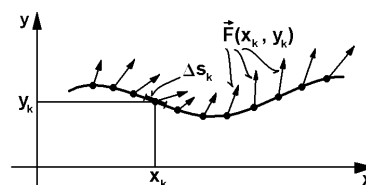
**Geg.:** Kurve  $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} s_1(t) \\ \vdots \\ s_n(t) \end{pmatrix}$  (Parameterform)

(Z.B.  $n = 2, n = 3$ .)

**Problem:**

Bestimme Ausdrücke der Form:

$$W = \lim_{|\Delta s_k \rightarrow 0|} \sum_k \vec{F}(x_{1,k}, \dots, x_{n,k}) \cdot \Delta \vec{s}_k$$



$$\text{Bsp.: Arbeit } W = \lim_{|\Delta s_k \rightarrow 0|} \sum_{k=1}^m \Delta W_k = \lim_{|\Delta s_k \rightarrow 0|} \sum_{k=1}^m \langle \vec{F}(x_k, y_k, z_k), \Delta \vec{s}_k \rangle$$

Im  $\mathbb{R}^3$  gilt dann:  $\Delta W_k = \langle \vec{F}(x_k, y_k, z_k), \Delta \vec{s}_k \rangle =$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} F_1(x_k, y_k, z_k) \\ F_2(x_k, y_k, z_k) \\ F_3(x_k, y_k, z_k) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Delta x_k \\ \Delta y_k \\ \Delta z_k \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{mit } x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t), \quad z = \varphi_3(t)$$

$$\leadsto \frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot \Delta t = \frac{\Delta \varphi_1}{\Delta t} \cdot \Delta t \rightarrow \frac{d\varphi_1}{dt} dt, \quad \frac{\Delta \varphi_i}{\Delta t} \cdot \Delta t \rightarrow \frac{d\varphi_i}{dt} dt \leadsto dx_i = \frac{d\varphi_i}{dt} dt$$

$$W \approx \sum_{k=1}^m \Delta W_k, \quad \Delta W_k = \sum_{i=1}^n F_i(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \cdot \frac{\Delta \varphi_i}{\Delta t} \cdot \Delta t =$$

$$\begin{aligned} &F_1(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \cdot \frac{\Delta \varphi_1}{\Delta t} \cdot \Delta t + \dots + F_n(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \cdot \frac{\Delta \varphi_n}{\Delta t} \cdot \Delta t = \\ &= (F_1(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \cdot \frac{\Delta \varphi_1}{\Delta t} + \dots + F_n(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \cdot \frac{\Delta \varphi_n}{\Delta t}) \cdot \Delta t \\ &\rightarrow \int_{t=a}^{t=b} (F_1(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} + \dots + F_n(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \cdot \frac{d\varphi_n}{dt}) dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t=a}^{t=b} \left\langle \begin{pmatrix} F_1(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \\ \vdots \\ F_n(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{d\varphi_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d\varphi_n}{dt} \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_{t=a}^{t=b} \left\langle \vec{F}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)), \frac{d\vec{s}}{dt} \right\rangle dt = \\
&= \int_{t=a}^{t=b} \langle \vec{F}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)), \vec{s}'(t) \rangle dt
\end{aligned}$$

$\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{s}'(t)$  ist dabei der **Tangentenvektor**.

**Definition:**  $\int_C \vec{F} d\vec{s} = \int_{t=a}^{t=b} \langle \vec{F}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)), \vec{s}'(t) \rangle dt$  heisst Linienintegral von  $\vec{F}$  längs  $C$

**Schreibweise:** Falls  $C$  eine geschlossene Kurve ist, schreiben wir:

$$\oint_C \vec{F} d\vec{s}$$

Weiter zu Linienintegralen vgl. Vektoranalysis.

**Bsp.:**  $\vec{s} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 - t \\ \frac{1}{2}t^2 + t \end{pmatrix}, \quad \vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x-y \\ x^2+y \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]$

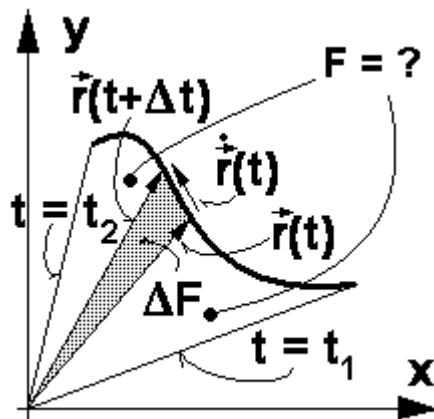
$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_C \vec{F} d\vec{s} &= \int_{t=0}^{t=1} \left\langle \begin{pmatrix} x-y \\ x^2+y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t^2-t \\ \frac{1}{2}t^2+t \end{pmatrix}' \right\rangle dt = \int_{t=0}^{t=1} \left\langle \begin{pmatrix} t^2-t - (\frac{1}{2}t^2+t) \\ (t^2-t)^2 + (\frac{1}{2}t^2+t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2t-1 \\ t \end{pmatrix} \right\rangle dt = \\
&= \int_{t=0}^{t=1} \left( \frac{1}{2}t^2 - 2t \right) \cdot (2t-1) + (t^4 - 2t^3 + \frac{3}{2}t^2 + t) \cdot (t+1) dt = \frac{t^6}{6} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{8} - \frac{2t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} \Big|_{t=0}^{t=1} = 0.925
\end{aligned}$$

#### 4.4.5 Flächen unter Vektorkurven — Surfaces sous des courbes vectorielles

**Problem:**

Flächeninhalt  $F = ?$

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) \in \mathbb{R}^3 &\Rightarrow \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta F = \\
\frac{1}{2} \left( \left( \vec{r}(t) \times \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right)_3 \right) &= \frac{1}{2} (x y_t' - x_t' y) \\
\Rightarrow F &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (x y_t' - x_t' y) dt
\end{aligned}$$





**Satz:****Vor.:**

$\vec{r}(t)$ : Kurve (stetig)  
 $t \in I = [t_1, t_2]$

**Beh.:**

$$F_{t_1, t_2} = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (x y_t' - x_t' y) dt$$

**Bsp.:**

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cos(t) \\ b \sin(t) \end{pmatrix}, \quad I = [t_1, t_2] = [0, 2\pi] \rightsquigarrow \text{Ellipse}$$

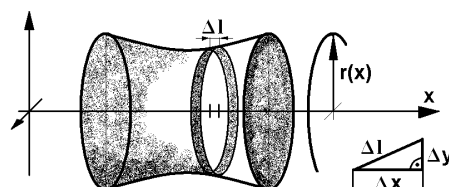
$$\begin{aligned} \rightsquigarrow F_{t_1, t_2} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x y_t' - x_t' y) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos(t) b \cos(t) - (-a \sin(t)) b \sin(t)) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a b \underbrace{(\cos^2(t) + \sin^2(t))}_{=1} dt = \frac{1}{2} a b \int_0^{2\pi} dt = \frac{2\pi a b}{2} = \pi a b \end{aligned}$$

#### 4.4.6 Rotationskörper — corps de révolution

##### Mantelflächen von Rotationskörper — Périphérie de corps de révolution

Rotationsstreifeninhalt  $y = r(x)$

$$\Delta a \simeq 2\pi r(x) \Delta l \rightarrow da = 2\pi r(x) dl$$



$$\Delta l \simeq \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x \rightarrow dl = \sqrt{1^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1^2 + (y'(x))^2} dx$$

$$\rightsquigarrow \text{Oberfläche } A = \int_0^L da = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y(x) \sqrt{1^2 + (y'(x))^2} dx$$

**Formel:**

$$A = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

**Bsp.:**  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $I = [0, 1]$ 

$$\Rightarrow A = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} dx = \pi \sqrt{\frac{1+4x}{x}} \left( \frac{\sqrt{x}}{6} + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \right) \simeq 5.33041$$

### Volumen von Rotationskörpern — Volume de corps de révolution

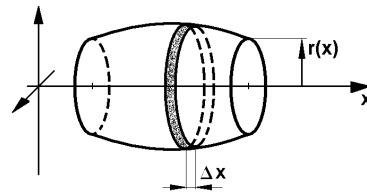
Rotationsscheibeneinhalt

$$\Delta V_i \simeq A_i \Delta x = r(x_i)^2 \pi \Delta x$$

$$= y(x_i)^2 \pi \Delta x \rightarrow dV = y(x_i)^2 \pi dx$$

$$V = \int_0^V dV = \int_{x_1}^{x_2} y(x)^2 \pi dx$$

$$= \pi \int_{x_1}^{x_2} y(x)^2 dx$$



**Formel:**

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} y(x)^2 dx$$

### 4.4.7 Schwerpunkte und Guldin

#### Flächenschwerpunkte — Centres de gravité de surfaces

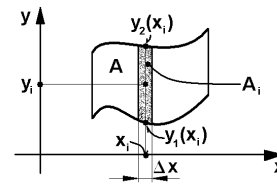
Sei  $y_s :=$  Flächenschwerpunkt in  $y$ -Richtung

Flächenschwerpunkt eines senkrechten Streifens:

$$\text{Sei } A_i = (y_2(x_i) - y_1(x_i)) \Delta x,$$

$$y_i = \frac{y_2(x_i) + y_1(x_i)}{2}$$

$$\text{Gleichgewichtsbedingung: } \sum_i y_i \cdot A_i \simeq y_s \cdot A$$



$$\Rightarrow y_s \simeq \frac{1}{A} \cdot \sum_i y_i \cdot A_i = \frac{1}{A} \cdot \sum_i \left( \frac{y_2(x_i) + y_1(x_i)}{2} \right) \cdot (y_2(x_i) - y_1(x_i)) \Delta x =$$

$$\frac{1}{2A} \cdot \sum_i (y_2(x_i)^2 - y_1(x_i)^2) \Delta x = \frac{1}{2 \int_{x_1}^{x_2} (y_2(x) - y_1(x)) dx} \cdot \sum_i (y_2(x_i)^2 - y_1(x_i)^2) \Delta x$$

$$\rightarrow \frac{\int_{x_1}^{x_2} (y_2(x)^2 - y_1(x)^2) dx}{2 \int_{x_1}^{x_2} (y_2(x) - y_1(x)) dx}$$

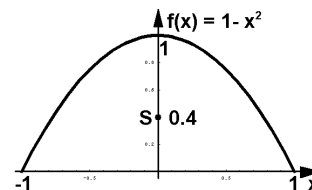
**Formel:**

$$y_s = \frac{\int_{x_1}^{x_2} (y_2(x)^2 - y_1(x)^2) dx}{2 \int_{x_1}^{x_2} (y_2(x) - y_1(x)) dx}$$

**Bsp.:** Parabel

$$f(x) = 1 - x^2, \quad I = [x_1, x_2] = [-1, 1]$$

$$y_s = \frac{\int_{-1}^1 ((1 - x^2)^2 - 0^2) dx}{2 \int_{-1}^1 ((1 - x^2) - 0) dx} = \frac{2}{5} = 0.4$$



**Die Regeln von Guldin**

1. Sei  $O$  die Oberfläche eines Rotationskörpers bezüglich der  $x$ -Achse und  $M_x$  ein betrachtetes Moment bezüglich dieser Achse.  $y_S$  sei der Schwerpunktsabstand in  $y$ -Richtung.  $b$  sei die Länge einer Kurve (Bogen).

$$\leadsto \quad b = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \Rightarrow O = 2\pi \underbrace{\int_a^b \underbrace{f(x)}_{=r} \underbrace{\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}_{=dm}}_{M_x} = 2\pi \cdot y_S \cdot b \Rightarrow O = 2\pi \cdot y_S \cdot b$$

2. Sei weiter  $V$  das Volumen eines Rotationskörpers und  $A$  die erzeugende Fläche.

$$\leadsto \quad 2\pi \cdot A \cdot y_S = 2\pi \cdot \left( \int_a^b f(x) dx \right) \cdot \frac{\int_a^b \frac{f(x)}{2} \cdot f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} = \pi \cdot \int_a^b \underbrace{f(x)^2}_{=r^2} dx = V \Rightarrow V = \pi \cdot A \cdot y_S$$

**Satz:** (Guldin)

**Geg.:** Rotationskörper

**Beh.:**

1.  $O = 2\pi \cdot b \cdot y_S$
2.  $V = \pi \cdot A \cdot y_S$

**4.4.8 Trägheitsmoment — Moment d'inertie**

**Der Begriff — La notion**

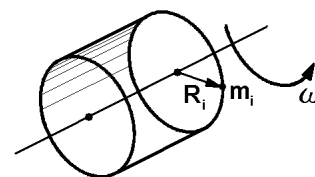
Sei  $v = \omega \cdot R$ ,

$\omega$  = Winkelgeschwind.

$\leadsto$  Drehbewegung.

$$E_{kin}(m_i) = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i \omega^2 R_i^2,$$

$$m = \sum_i \Delta m_i,$$



$$E_{kin} = \sum_i E_{kin}(m_i) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \omega^2 R_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i R_i^2 m_i \rightarrow \frac{1}{2} \omega^2 \int_{m_1}^{m_2} R(m)^2 dm := \frac{1}{2} \omega^2 I$$

**Definition:**

$$I = \int_{m_1}^{m_2} R(m)^2 dm \text{ heisst } \mathbf{Trägheitsmoment}$$

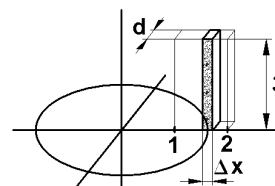
Es gilt:  $\frac{dm}{dV} := \rho(V) \Rightarrow dm = \rho(V) dV \Rightarrow I = \int_{V_1}^{V_2} R(m(V))^2 \rho(V) dV$

**Bsp.:** Profil:

$$dV = d \cdot f(x) \cdot dx, \quad f(x) = 3,$$

$$x \in [1, 2], \quad \rho = \text{const.}, \quad R = x$$

$$\Rightarrow I = \rho \cdot d \int_1^2 3x^2 dx = \rho d (8 - 1) = 7 d \rho$$



**Bemerkung:**

Impuls:  $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

Drehimpuls:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m \cdot \vec{v}) = m \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) = m \cdot (\vec{r} \times (\dot{\vec{\varphi}} \times \vec{r}))$$

$$= \rho \cdot V \cdot (\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})), \quad \omega \perp \vec{r} \Rightarrow |\vec{L}| = m \cdot |\vec{r}|^2 \cdot |\vec{\omega}|$$

$$|\vec{\omega}| = \omega = \text{const.} \Rightarrow |\vec{L}| = L = \underbrace{m \cdot r^2}_I \cdot \omega := I \cdot \omega$$

### Trägheitsmoment und Achsen

1. Sei die  $y$ -Achse die Drehachse einer flächenartigen Masse  $M$  der Dicke  $d$ , welche als Funktionsfläche von  $f(x)$  über  $I_x = [a, b]$  beschreibbar ist.

$$\Rightarrow I_y = \int_M x^2 dm = \int_a^b x^2 \cdot f(x) \cdot d \cdot \rho(x) dx \Rightarrow I_y = d \cdot \int_a^b x^2 \cdot f(x) \cdot \rho(x) dx$$

2. Sei die  $x$ -Achse die Drehachse einer flächenartigen Masse  $M$  der Dicke  $d$ , welche als Funktionsfläche von  $f(x)$  über  $I_x = [a, b]$  beschreibbar ist.

$$\Rightarrow dI_x = \int_M y^2 dm = \int_a^b y^2 \cdot d \cdot \rho(x) dx dy \Rightarrow I_x = \frac{d}{3} \cdot \int_a^b y^3 \cdot \rho(x) dx = \frac{d}{3} \cdot \int_a^b f(x)^3 \cdot \rho(x) dx$$

3. Sei die  $z$ -Achse die Drehachse einer Masse  $M$ .  $r(m)$  sei der Abstand von  $dm$  zur  $z$ -Achse.

$$\Rightarrow r(m)^2 := r^2 = x^2 + y^2, \quad I_z = \int_M r(m) dm = \int_M (x^2 + y^2) dm = \int_M x^2 dm + \int_M y^2 dm = I_x + I_y$$

**Definition:**

$I_x$  und  $I_y$  heissen auch **axiale Trägheitsmomente**.

$I_z$  heisst **polares Trägheitsmoment**.

**Satz:**

Voraussetzungen wie oben.

$$I_y = d \cdot \int_a^b x^2 \cdot f(x) \cdot \rho(x) dx, \quad I_x = \frac{d}{3} \cdot \int_a^b f(x)^3 \cdot \rho(x) dx, \quad I_z = I_x + I_y$$

### Der Satz von Steiner

Wir betrachten den Fall: 
$$I_y = d \cdot \int_a^b x^2 \cdot f(x) \cdot \rho(x) dx.$$

Sei  $x_S$  der Schwerpunktabstand der Masse  $M$  von der  $y$ -Achse.

Sei

$$x = u + x_S \Rightarrow f(x) = f(u + x_S) = f_1(u), \quad f_1(u) = f_1(x - x_S), \quad \rho(x) = \rho(u + x_S) = \rho_1(u) := \rho = \text{const.}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I_y &= d \cdot \rho \cdot \int_a^b x^2 \cdot f(x) dx = d \cdot \rho \cdot \int_{x=a}^{x=b} (u + x_S)^2 \cdot f(u + x_S) d(u + x_S) = d \cdot \rho \cdot \int_{a-x_S}^{b-x_S} (u + x_S)^2 \cdot f_1(u) du \\ &= d \cdot \rho \cdot \int_{u_a}^{u_b} (u^2 + 2u x_S + x_S^2) \cdot f_1(u) du = d \cdot \rho \cdot \int_{u_a}^{u_b} u^2 \cdot f_1(u) du + 2d x_S \cdot \rho \cdot \int_{u_a}^{u_b} u \cdot f_1(u) du + d \cdot x_S^2 \cdot \rho \cdot \int_{u_a}^{u_b} f_1(u) du \end{aligned}$$

Nun ist aber  $u \cdot f_1(u) = Mt(u) = \text{Moment bezüglich } x_S$ . Und  $\int_{u_a}^{u_b} u \cdot f_1(u) du = 0$  ist der Grenzwert der Momentensumme, welche wegen der Definition des Schwerpunktes (Gleichgewicht) null sein muss.

$$\Rightarrow I_y = d \cdot \rho \cdot \underbrace{\int_{u_a}^{u_b} u^2 \cdot f_1(u) du}_{=I_{yx_S}} + d \cdot x_S^2 \cdot \rho \cdot \underbrace{\int_{u_a}^{u_b} f_1(u) du}_{=A}$$

**Satz:** (von **Steiner**)  $I_y = I_{yx_S} + d \cdot x_S^2 \cdot \rho \cdot A$

Dieser Satz gilt auch für die  $x$  und die  $z$ -Achse. Der Beweis sei dem Leser überlassen.

#### 4.4.9 Physikalische Anwendungen — Applications en physique

**Ausdehnungsarbeit bei Gasen — Travail d'extension concernant les gazes**

$$\begin{aligned} \Delta W &= F \cdot \Delta s = \frac{F \cdot A \cdot \Delta s}{A} = p \cdot \Delta V \\ W &= \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{c}{V} dV = c \cdot \ln(V) \Big|_{V_1}^{V_2} = c \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \end{aligned}$$

**Elektrische Leistung — Puissance électrique**

$$\text{Es gilt: } P = \frac{dW}{dt} = U(t) \cdot I(t) \Rightarrow W = \int_{t_1}^{t_2} U(t) \cdot I(t) dt$$

$$\begin{aligned} \text{Bsp.: } U(t) &= U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t), \quad I(t) = I_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) \\ \Rightarrow W &= \frac{U_0 I_0 (2\omega t \cos(\varphi) + \sin(2\omega t + \varphi))}{4\omega} + C \end{aligned}$$

**Energie im Gravitationsfeld — Energie dans le champs de gravitation**

$$\begin{aligned} F(r) &= \gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}, \quad \Delta W = F \Delta r = \gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \Delta r \\ \Rightarrow W &= \int_{r_1}^{r_2} \gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} dr = \gamma \cdot M \cdot m \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = -\gamma M m \frac{1}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} = \gamma M m \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \end{aligned}$$

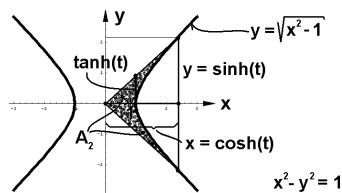
#### 4.4.10 Die Bedeutung des $\operatorname{arsinh}$

**Bemerkung:**  $\operatorname{arsinh}$  heisst **area sinus hyperbolicus**.

Es gilt:

$$x^2 - y^2 = \cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$$

$$x(y) = \sqrt{1 + y^2}$$



$$\Rightarrow A_2 = 2 \left( \int_0^{y_0} \sqrt{1 + y^2} dy - \frac{x_0 y_0}{2} \right) = \operatorname{arsinh}(y) = \operatorname{arsinh}(\sinh(t)) = t = \operatorname{arsinh}(y)$$

**Konsequenz:**  $A_2 = t = \operatorname{arsinh}(y)$

$\operatorname{arsinh}(y)$  ist also ein Flächeninhalt (Area) an der Hyperbel.

#### 4.4.11 Die Gamma-Funktion — La fonction gamma

Die **Eulersche Gamma-Funktion**  $\Gamma(x)$  bringt uns eine sinnvolle Verallgemeinerung der Fakultäten für  $x \in \mathbb{R}^+$ . Sie wird wie folgt definiert:

**Definition:**  $\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0$

**Problem:** Existiert dieses uneigentliche Integral überhaupt?

Nach Definition muss gelten:  $t \in (0, \infty), \quad x > 0$

$$\text{Sei } t > 1 \vee x \geq 1 \rightsquigarrow e^{-t} t^{x-1} = \frac{t^{x+1}}{e^t \cdot t^2} < \frac{1}{t^2}$$

$$\Rightarrow \Gamma(x) := \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt + \int_1^k e^{-t} t^{x-1} dt + \int_k^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

$$\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt \rightsquigarrow t \in (0, 1). \text{ Problem nur für } x \geq 1, \quad x - 1 > 0$$

$$\int_1^k e^{-t} t^{x-1} dt \rightsquigarrow \text{Problemlos.}$$

$$0 < \int_k^\infty e^{-t} t^{x-1} dt < \int_k^\infty \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t} \Big|_k^\infty = \frac{1}{k} \rightsquigarrow \text{existiert } (k > 1, \quad t \in (k, \infty))$$

$$\rightsquigarrow \text{Es bleibt der Fall } t \in (0, 1], \quad x \in (0, 1)$$

$$\rightsquigarrow t \in (0, 1] \Rightarrow e^{-t} = \frac{1}{e^t} < \frac{1}{e^0} = 1 \Rightarrow e^{-t} t^{x-1} < t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}} := \frac{1}{t^p}, \quad p \in (0, 1)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt &< \int_0^1 t^{x-1} dt = \int_0^1 \frac{1}{t^p} dt = \int_0^1 t^{-p} dt = \frac{1}{1-p} t^{1-p} \Big|_0^1 = \frac{1}{1-(1-x)} t^{1-(1-x)} \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{x} t^x \Big|_0^1 = \frac{1}{x} \rightsquigarrow \Gamma(x) \text{ existiert für } x > 0. \end{aligned}$$



#### 4.4.12 Die Irrationalität von $\pi$ <sup>12</sup> — L'irrationalité de $\pi$ <sup>12</sup>

Annahme:  $\pi = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}, \quad a, b \in \mathbb{N}$

Definition:  $f(x) := \frac{x^n \cdot (a - bx)^n}{n!} \rightsquigarrow$  Polynom vom Grade  $2n$ , alle Terme vom Grade  $\geq n$ .

$$F(x) := f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) - \dots + (-1)^n f^{(2n)}(x) \quad (f^{(k)}(x): k\text{-te Ableitung})$$

$$\rightsquigarrow F''(x) = -(F(x) - f(x))$$

$$\text{Betrachte: } f(\pi) = f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n (a - b \frac{a}{b})^n}{n!} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n (a - a)^n}{n!} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n 0}{n!} = 0$$

$$f(0) = \frac{0^n \cdot (a - b \cdot 0)^n}{n!} = \frac{0 \cdot (a)^n}{n!} = 0$$

▷ (a)  $f^k(x)$  enthält Terme der Form  $x^s \cdot (a - bx)^r$ ,  
 $s + r + k = 2 \cdot n$  falls  $s + r = 2n - k > 0, \quad 2n > k$  (Produktregel).

$$\triangleright \text{ (b) } 2n = k \rightsquigarrow f^k(x) = \text{const.} = \frac{n! n!}{n!} \cdot c \in \mathbb{Z}$$

$$\triangleright \text{ (c) } 2n < k \rightsquigarrow f^k(x) = 0 \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \triangleright \text{ (a) } \rightsquigarrow f^k(\pi) &= f^k\left(\frac{a}{b}\right) = \sum \text{const.} \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^s \cdot (a - b \left(\frac{a}{b}\right))^r}{n!} = \sum \text{const.} \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^s \cdot (a - a)^r}{n!} = \\ &= \sum \text{const.} \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^s \cdot 0}{n!} = 0 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$  In allen Fällen:

$$f^k(\pi) \in \mathbb{Z} \Rightarrow F(\pi) = f(\pi) - f''(\pi) + f^{(4)}(\pi) - \dots + (-1)^n f^{(2n)}(\pi) \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \text{Ebenso: } f^k(0) &= \sum \text{const.} \frac{(0)^s \cdot (a - b(0))^r}{n!} = \sum \text{const.} \frac{0}{n!} = 0 \text{ in allen Fällen} \Rightarrow F(0) = \\ f(0) - f''(0) + f^{(4)}(0) - \dots + (-1)^n f^{(2n)}(0) &\in \mathbb{Z} \rightsquigarrow \end{aligned}$$

$$\text{Wichtig:} \quad (\text{I}) \quad F(\pi) \in \mathbb{Z}, \quad F(0) \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \text{Betrachte: } & \frac{d}{dx}(F'(x) \sin(x) - F(x) \cos(x)) \\ &= F''(x) \sin(x) + F'(x) \cos(x) - F'(x) \cos(x) + F(x) \sin(x) \\ &= -(F(x) - f(x)) \sin(x) + F(x) \sin(x) = f(x) \sin(x) \\ \Rightarrow \int_0^\pi f(x) \sin(x) dx &= \int_0^\pi \frac{d}{dx}(F'(x) \sin(x) - F(x) \cos(x)) dx = (F'(x) \sin(x) - F(x) \cos(x)) \Big|_0^\pi \\ &= (F'(\pi) \sin(\pi) - F(\pi) \cos(\pi)) - (F'(0) \sin(0) - F(0) \cos(0)) = \\ &= (F'(\pi) \cdot 0 - F(\pi) \cdot (-1)) - (F'(0) \cdot 0 - F(0) \cdot 1) = F(\pi) + F(0) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \int_0^\pi f(x) \sin(x) dx \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

---

<sup>12</sup>Nach Lindemann, 1852 – 1939



Andererseits:  $x \in (0, \pi) \Rightarrow$

$$f(x) = \frac{x^n \cdot (a - bx)^n}{n!} = \frac{x^n \cdot \left(\frac{a}{b} - x\right)^n \cdot b^n}{n!} = \frac{x^n \cdot (\pi - x)^n \cdot b^n}{n!} > 0$$

(da alle Faktoren  $> 0$ )

$$\leadsto 0 < \sin(x) \cdot f(x) \leq f(x) = \frac{x^n \cdot (a - bx)^n}{n!} < \frac{\pi^n \cdot (a - bx)^n}{n!} < \frac{\pi^n \cdot a^n}{n!}$$

$n!$  wächst stärker als  $a^n$  und  $\pi^n$

$$\Rightarrow 0 < \sin(x) \cdot f(x) < \frac{\pi^n \cdot a^n}{n!} < \varepsilon \quad \text{für } n > N_0$$

$$\leadsto \text{(II)} \quad 0 < \int_0^\pi \sin(x) \cdot f(x) dx < \int_0^\pi \varepsilon dx = \varepsilon \cdot \pi < 1 \quad \text{für } n > N_0$$

$$\text{Zusammen: (I) } F(\pi) \in \mathbb{Z}, \quad F(0) \in \mathbb{Z}, \quad \text{(II)} \quad 0 < \int_0^\pi \sin(x) \cdot f(x) dx < 1$$

für  $n > N_0 \leadsto$  Widerspruch!

$\leadsto$  Annahme:  $\pi = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}, \quad a, b \in \mathbb{N}$  muss falsch sein .

$\leadsto \pi \notin \mathbb{Q}$

**Satz:**  $\pi \notin \mathbb{Q}$

**Bemerkung:**

Angeblich sind folgende Näherungen von  $\pi$  verwendet worden:

1. Babylon:  $\pi \approx 3 + \frac{1}{8}$
2. Zeit von Platon:  $\pi \approx \sqrt{2} + \sqrt{3}$
3. Archimedes:  $\pi \approx \frac{22}{7}$
4. Altes Indien:  $\pi \approx 3.1416$
5. Altes China:  $\pi \approx \frac{355}{113}$
6. Jahr 1865:  $\pi \approx \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} \approx 3.14153$

**Korollar:**

Die Strecke  $\pi$  ist nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar. Der Kreis mit dem Radius 1 ist daher nicht mit Zirkel und Lineal in ein flächengleiches Quadrat verwandelbar. Die **Quadratur des Kreises** ist damit nicht möglich.

**Zum Beweis:**

Eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal kann man mit Hilfe von Sätzen wie jenem von Pythagoras nachrechnen. Wenn die Strecke  $\pi$  mit Zirkel und Lineal konstruierbar wäre, so könnte man die Strecke  $\pi$  aus der Strecke 1 mit Hilfe von Wurzelausdrücken berechnen. Dann wäre  $\pi$  nicht transzendent.



## Kapitel • Chapitre 5

# Etwas Numerik — Un peu de mathématique numérique

### 5.1 Algorithmen — Algorithmes

**Begriff:** Unter einem **Algorithmus** verstehen wir heute eine Rechenvorschrift in folgendem Sinne: Ein Algorithmus ist eine endliche Beschreibung eines endlichen Verfahrens zur Ermittlung gesuchter aus gegebenen Werten.

Der Begriff **Algorithmus** hat arabische Wurzeln. Es ist die lateinisierte Form des Namens „Alchwārizimi“ resp. nach einer anderen Quelle „Abu’Abdallah Muhammad ibn Nusa al-Huwarisimi al Magusi“, ca. 780–850, Bibliothekar des Kalifen Almamun. Eines seiner Werke handelt über quadratische Gleichungen. Es trägt den Titel „Hisālgabr walmukābala“. Daraus ist das Wort **Algebra** entstanden.

### 5.2 Iterative Lösung von Gleichungssystemem — Solution de systèmes d’équation par itération

#### 5.2.1 Ein Beispiel aus der Algebra: Das Verfahren von Gauss–Seidel — Un exemple de l’algèbre: La méthode de Gauss–Seidel

**Problem:** Ein lineares Gleichungssystem soll rasch näherungsweise gelöst werden. Idee: Versuche eine Iteration.

**Bsp.:**

$$\begin{array}{rcl} 6.25 \boxed{x_1} + 2.08x_2 - 1.44x_3 & = & 2.59 \\ 1.78x_1 - 4.61 \boxed{x_2} + 0.44x_3 & = & 5.22 \\ -1.36x_1 + 0.95x_2 + 3.75 \boxed{x_3} & = & 3.61 \end{array} \quad \leadsto \quad A \cdot \vec{x} + \vec{b}$$

Die Koeffizienten in der Diagonalen sind hier dominant. (Matrizen, die nur in der Hauptdiagonalen oder den Nebendiagonalen nichtverschwindende Koeffizienten haben, nennt man **Bandmatrizen**.)

**Idee:** Berechne  $x_1, x_2, x_3$  in der Hauptdiagonalen und konstruiere damit eine Iteration:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{6.25}(2.59 - 2.08x_2 + 1.44x_3) & x_{1,k+1} &= \frac{1}{6.25}(2.59 - 2.08x_{2,k} + 1.44x_{3,k}) \\
x_2 &= \frac{1}{4.16}(5.22 - 1.78x_1 - 0.44x_3) \rightsquigarrow & x_{2,k+1} &= \frac{1}{4.16}(5.22 - 1.78x_{1,k+1} - 0.44x_{3,k}) \\
x_3 &= \frac{1}{3.75}(4.61 + 1.36x_1 - 0.95x_2) & x_{3,k+1} &= \frac{1}{3.75}(4.61 + 1.36x_{1,k+1} - 0.95x_{2,k+1})
\end{aligned}$$

Bei der Iteration wird durch die grossen Zahlen der Hauptdiagonalen dividiert, was dafür sorgt, dass das Resultat nicht ‘explodiert’.

Start: Setze z.B.:  $x_{2,0} = 0$ ,  $x_{3,0} = 0$ .

Nach 12 Schritten hat man hier das Resultat auf 6 Stellen genau:

$$x_{1,12} \simeq 0.336807, \quad x_{2,12} \simeq 0.994393, \quad x_{3,12} \simeq 1.09957$$

Es sei dem Leser überlassen, das Verfahren allgemein in die Matrixsprache zu übersetzen und die Konvergenzbedingungen zu studieren. (In der Praxis zeigt meist die Rechnung und eine Überprüfung des Resultates sehr schnell, ob Konvergenz vorliegt.)

## 5.3 Nullstellenapproximation — Approximation de zéros

### 5.3.1 Intervalleingrenzung (Intervallschachtelung, Gabelverfahren) — Emboîtement d’intervalles

**Problem:** Nullstellen von Funktionen lassen sich nicht immer direkt berechnen. Man muss sich dann mit **Approximationsmethoden** begnügen.

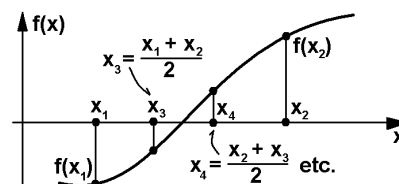
**Bsp.:**  $f(x) = \sin(x \ln(x) + 1) - x \ln(x) = 0$ ,  $x = ?$

Ohne viel Mathematik kann man die folgende Methode probieren:

**Algorithmus:**

Wähle vernünftig

$x_1, x_2$  mit  $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$



Test :  $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$  o.k.  $\rightsquigarrow x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} \rightsquigarrow f(x_3) = \dots$

Test :  $f(x_1) \cdot f(x_3) < 0$  o.k.  $\rightsquigarrow x_4 = \frac{x_1 + x_3}{2} \rightsquigarrow f(x_4) = \dots$

$f(x_3) \cdot f(x_2) < 0$  o.k.  $\rightsquigarrow x_4 = \frac{x_3 + x_2}{2} \rightsquigarrow f(x_4) = \dots$  u.s.w.

$\rightsquigarrow$  Die Intervalle halbieren sich, die Nullstelle wird eingeschachtelt. (Nicht sehr effizient, da man immer testen muss.)

**Fehlerabschätzung:**

**Formel:**

Sei  $f(x_0) = 0$ ,  $f(x_k) < 0$ ,  $f(x_{k+1}) > 0$ ,  $m_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \Rightarrow |x_0 - m_k| < |x_k - x_{k+1}|$

### 5.3.2 Tangentenmethode (Newton–Raphson–Verfahren) — Méthode de la tangente (Méthode de Newton–Raphson)

Sei  $f \in \mathcal{D}^1(I)$ ,  $x_0, x_n, x_{n+1} \in I$

**Idee:** Berechne in  $x_n$  die Tangente an die Kurve  $\leadsto x_{n+1} = t_n \cap a_x$  näher bei Nullstelle  $x_0$  als  $x_n$ . Starte mit  $n = 1$ ,  $x_1$  vernünftig gewählt.

$$t_n(x) = a_n \cdot x + b_n = f'(x_n) \cdot x + b_n, \quad t_n(x_n) = f(x_n)$$

$$\Rightarrow f(x_n) = f'(x_n) \cdot x_n + b_n \Rightarrow b_n = f(x_n) - f'(x_n) \cdot x_n \Rightarrow t_n(x) = f'(x_n) \cdot x + f(x_n) - f'(x_n) \cdot x_n = f'(x_n) \cdot (x - x_n) + f(x_n)$$

$$NS \ x_{n+1} : t_n(x_{n+1}) = 0 = f'(x_n) \cdot (x_{n+1} - x_n) + f(x_n) \Rightarrow x_{n+1} = \frac{f'(x_n) \cdot x_n - f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Damit lässt sich eine Iteration<sup>9</sup> machen. Damit auf dem Rechner das Verfahren einmal abbricht, braucht es eine **Abbruchbedingung**, z.B.  $|x_n - x_{n+1}| < 10^{-k}$ ,  $k$  fix.

**Algorithmus:** Start: Wähle  $x_1$

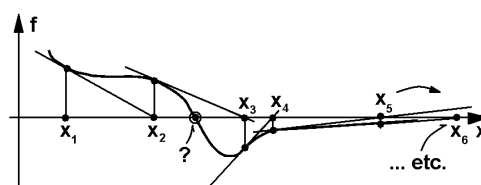
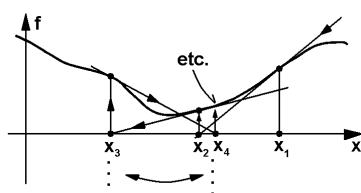
**Formel:**

Iteration

$$\leadsto x_{n+1} = \frac{f'(x_n) \cdot x_n - f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Abbruchbedingung  $\leadsto$  wählen

**Achtung:** Die Methode funktioniert nicht immer (Bedingungen vgl. Skizzen). Es kann passieren, dass  $x_n$  mit  $n$  von der Nullstelle  $x_0$  wegläuft. Es kann aber auch sein, dass eine Abbruchbedingung erfüllt ist, obwohl nur beinahe, aber nicht wirklich eine Nullstelle existiert.



**Bemerkung:**

Zur Newton–Approximation mit mehreren Variablen vgl. Seite 249.

**Fehlerabschätzung:**

**Formel:**

Sei

$$f(x_0) = 0, \quad x_1 := a, \quad b := a - \frac{2f(a)}{f'(a)}, \quad a, b \in I, \quad f \in D^{(2)}([a, b]), \quad m := \max_{x \in [a, b]} |f''(x)| \leq \left| \frac{f(a)}{(b-a)} \right|$$

$$\Rightarrow |x_{k+1} - x_0| \leq \frac{m}{2} \cdot \frac{|x_k - x_{k-1}|^2}{|f'(x_k)|} \quad (k = 2, 3, 4, \dots)$$

<sup>9</sup> „Iteration“, v.lat. Wiederholung im Gegensatz zu „Rekursion“, v.lat. zurückgehend (bis zu bekannten Werten.)

### 5.3.3 Eine Anwendung — Une application

Approximation des Divisionsresultats nur mit Addition, Subtraktion und Multiplikation:

Sei :  $x = \frac{1}{q} \rightsquigarrow q = \frac{1}{x}$ ,  $q - \frac{1}{x} = 0 \rightsquigarrow x = NS$  von  $f(x) = q - \frac{1}{x}$

Start :  $x_1$  wählen  $x_1$ .

Iteration :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{q - \frac{1}{x}}{\left(q - \frac{1}{x}\right)' \big|_{x=x_n}} = x_n - \frac{q - \frac{1}{x}}{x^{-2}} = 2x_n - q \cdot x^2 = x_n(2 - q \cdot x)$$

### 5.3.4 Sekantenmethode (Regula falsi, Sehnenverfahren) — Méthode de la sécante (lat. regula falsi, méthode de la corde)

Bei dieser Methode wird keine Differentialrechnung verwendet.  $f$  muss nur stetig sein, differenzierbar wird nicht gebraucht.

#### Algorithmus:

Wähle vernünftig:

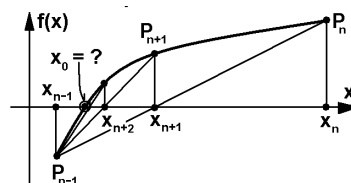
$$I_1 = [x_1, x_2] := [x_{1,1}, x_{2,1}]$$

mit  $x_0 \in [x_1, x_2]$ ,

$$f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$$

$$\rightsquigarrow P_1 = (x_1, f(x_1)), P_2 = (x_2, f(x_2))$$

Sekante  $\overline{P_1 P_2}$ ,  $x_3 = \overline{P_1 P_2} \cap a_x$



Test :  $x_0 \in [x_1, x_3]$  ( $f(x_1) \cdot f(x_3) < 0$ )  $\rightsquigarrow$  o.k.

Test :  $x_0 \in [x_1, x_3]$  ( $f(x_1) \cdot f(x_3) < 0$ )  $\rightsquigarrow$  o.k.,  $I_2 = [x_1, x_3] := [x_{1,2}, x_{2,2}]$  sonst :  
 $x_0 \in [x_3, x_2]$  ( $f(x_3) \cdot f(x_2) < 0$ )  $\rightsquigarrow$  o.k.,  $I_2 = [x_3, x_2] := [x_{1,2}, x_{2,2}]$

Verfahre mit  $I_2$  genauso

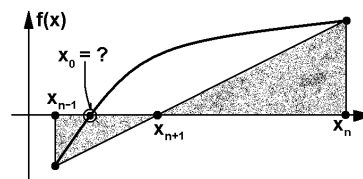
$\rightsquigarrow x_4$  u.s.w.  $\rightsquigarrow x_{n+1} \in I_n := [x_{1,n}, x_{2,n}]$

$\rightsquigarrow$  Ähnliche Dreiecke, z.B.:

$$\triangle(x_{n-1}, 0), (x_{n-1}, f(x_{n-1})), (x_{n+1}, 0)$$

$$\sim \triangle(x_n, 0), (x_n, f(x_n)), (x_{n+1}, 0)$$

$$\Rightarrow \frac{x_n - x_{n+1}}{f(x_n)} = \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{-f(x_{n-1})}$$



$$\rightsquigarrow f(x_{n-1}) \cdot x_n - f(x_{n-1}) \cdot x_{n+1} = f(x_n) \cdot x_{n-1} - f(x_n) \cdot x_{n+1}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} \cdot (f(x_n) - f(x_{n-1})) = f(x_n) \cdot x_{n-1} - f(x_{n-1}) \cdot x_n$$

**Formel:**

$$x_{n+1} = \frac{f(x_n) \cdot x_{n-1} - f(x_{n-1}) \cdot x_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

**Fehlerabschätzung:**

**Formel:**

Sei

$$f(x_0) = 0, \quad I_k = [x_{k-1}, x_k], \quad f \in D^{(2)}(I_k), \quad \xi \in I_k \rightsquigarrow (f'(\xi) \neq 0, \quad \xi \in I_k)$$

$$\Rightarrow |x_{k+1} - x_0| = \frac{f(x_{k-1}) \cdot f(x_k) \cdot f''(\xi)}{2(f'(\xi))^3}$$

### 5.3.5 Fixpunktmethode — Méthode du point fixe

#### Zur Theorie — Quant à la théorie

Betrachte  $f$  über  $I$ .

**Problem:**  $f(x) = 0, \quad x = ?$  Sei  $\varphi(x) := f(x) + x$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) := f(x) + x = x \rightsquigarrow \text{Löse: } \varphi(x) = x$$

**Idee:** Oft ist es möglich, sich längs einer Spirale (vgl. Skizze) dem Schnittpunkt der Geraden  $g(x) = x$  und des Graphen von  $\varphi(x)$  zu nähern..

**Definition:** „ $\varphi(x) = x$ “ heisst **Fixpunktgleichung**.  $x_0$  heisst **Fixpunkt**, wenn  $x_0$  die Fixpunktgleichung erfüllt.

**Algorithmus:**

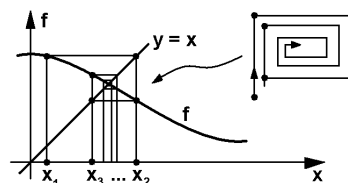
Start:

Wähle  $x_1 \in I$

Iteration:  $x_2 = \varphi(x_1)$

$\rightsquigarrow x_3 = \varphi(x_2) = \varphi(\varphi(x_1)) \rightsquigarrow x_4 = \varphi(x_3)$

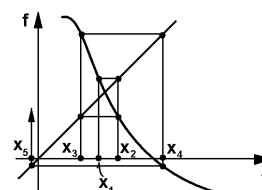
$= \varphi(\varphi(\varphi(x_1)))$  u.s.w.



**Achtung:** Man sieht sofort (Skizze), dass das Verfahren nur konvergiert, wenn in  $I$  gilt:  $|\varphi'(x)| < 1$ .

Bei Divergenz kann man die Sache oft retten, indem man  $\varphi^{-1}$  benutzt. Es gilt dann:

$$\left| \frac{d\varphi(x)^{-1}}{dx} \right| = \left| \frac{1}{\frac{d\varphi(z)}{dz}} \right|_{z=\varphi^{-1}(x)} > 1$$



**Bsp.:**  $\varphi(x) = \frac{\cos(x)}{3}$ ,  $x_1 = 0.5$ ,  $x_2 = \varphi(x_1)$ , ...

Nach 6 Schritten hat man  $x \simeq 0.316751$  (6 Stellen exakt).

**Fehlerabschätzung:**

**Formel:**

Sei

$f(x_0) = 0$ ,  $\varphi(x_0) = x_0$ ,  $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ ,  $L \in (0, 1)$ ,  $|\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)| \leq L \cdot |x_{k+1} - x_k|$ ,  $x_{k+1}, x_k \in I$  ( $\leadsto |\varphi(x_k)| \leq L$ )

$$\Rightarrow |x_{k+1} - x_0| \leq \frac{L}{1-L} |x_{k+1} - x_k| \leq \frac{L^k}{1-L} |x_2 - x_1|, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

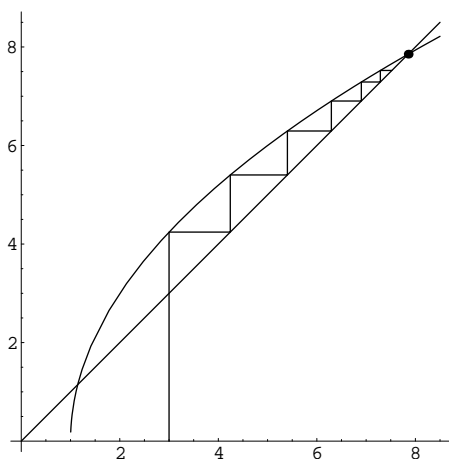
**Spezialfall** (speziell für  $|f'(x)| \leq q < 1$ ):

$\leadsto$  **Banachscher Fixpunktsatz:**

Sei  $x_{n+1} = f(x_n) \wedge |x_{n+1} - x_{m+1}| = |f(x_n) - f(x_m)| \leq q \cdot |x_n - x_m|$   
 $\Rightarrow |x_{n+k} - x_{m+k}| \leq q^k \cdot |x_n - x_m| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty$

**Anwendung auf Folgen — Application pour des suites**

**Bsp.:**



$$f(x) = 3\sqrt{x-1}$$

0	3.
1	4.242640687119286
2	5.402200124400574
3	6.294426194626891
4	6.902886045100413
5	7.288756711943657
6	7.52321808852388
7	7.662177418770393
8	7.743358235864691
9	7.790393066000085
10	7.817514796532257
11	7.833111333869212
12	7.842066182124639
13	7.847203045615791
14	7.850148241309977
15	7.851836356661401
16	7.852803780176391
17	7.853358136592748
18	7.853675778215875
19	7.85385777843875
20	7.853962057837354
21	7.854021805453318
22	7.854056038065927
23	7.854075651697871
24	7.854086889338623
25	7.854093327943564
26	7.854097016939126
27	7.854099130546554
28	7.854100341536196

**Bsp.:**

Wir studieren das Problem der Berechnung der Quadratwurzel:



$$\sqrt{a} = x = ? \rightsquigarrow a = x^2$$

$$\rightsquigarrow 2x^2 = x^2 + x^2 = x^2 + a \rightsquigarrow 2x = x + \frac{a}{x} \quad (x \neq 0) \rightsquigarrow x = \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{a}{x}\right)$$

$\rightsquigarrow$  Gleichung mit Fixpunkt  $x$ .

Falls also der Fixpunkt ein „Attraktionspunkt“ für das folgende Verfahren ist, können wir auf der Gleichung eine Iteration aufbauen. Dass das Verfahren konvergiert, muss dabei erst noch bewiesen werden (Übung, Euler).

$$x_1 = \text{Startwert}, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

**Bsp.:**  $\sqrt{2} = ? \quad x_1 = 1.5$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1.5 \\ 2 & 1.41667 \\ 3 & 1.41422 \\ 4 & 1.41421 \\ 5 & 1.41421 \end{pmatrix}$$

### 5.3.6 Korrigierte Fixpunktmethode — Méthode corrigée du point fixe

**Methode — Méthode**

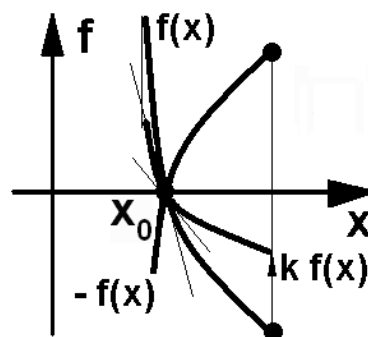
Sei  $f(x_0) = 0$ . Dann gilt:

$$f(x_0) = -f(x_0) = k \cdot f(x_0)$$

Sei  $k \cdot f(x) = h(x)$ . Dann gilt:

$$h'(x) = (k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$$

$$\rightsquigarrow h'(x_0) = k \cdot f'(x_0)$$



**Konsequenz:** Multipliziert man die Funktion  $f$  mit einer geeigneter Konstante  $k$ , so kann man es erreichen, dass die Ableitung in der Nullstelle  $x_0$  negativ und betragsmässig kleiner als 1 wird. Unter dieser Voraussetzung funktioniert die Fixpunktmethode<sup>24</sup>.

**Bsp.:**  $\sqrt{2} = x = ? \rightsquigarrow$  Es ist:  $x^2 = 2$

$$\Rightarrow x^2 - 2 = 0 \Rightarrow k \cdot (x^2 - 2) = 0 \Rightarrow f(x) = k \cdot (x^2 - 2) + x = x$$

**Resultate der Iterationen:**

<sup>24</sup>Der Autor konnte bisher nicht erfahren, ob die hier dargestellte Methode in der Literatur bereits unter einem speziellen Namen bekannt ist. Das hier verwendete Konzept ist so für die Vorlesung konstruiert worden.

$$x_0 = 2, \quad k = -0.5$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1.19279 \times 10^{20743} \\ 2 & 1.42275 \times 10^{41486} \\ 3 & 2.02424 \times 10^{82972} \\ 4 & 4.09756 \times 10^{165944} \\ 5 & 1.67900 \times 10^{331889} \\ 6 & 2.81905 \times 10^{663778} \\ 7 & 7.94709 \times 10^{1327556} \\ 8 & 6.31563 \times 10^{2655113} \\ 9 & 3.98872 \times 10^{5310227} \\ 10 & 1.59099 \times 10^{10620455} \\ 11 & 2.53125 \times 10^{21240910} \\ 12 & 6.40725 \times 10^{42481820} \\ 13 & 4.10528 \times 10^{84963641} \\ 14 & 1.68533 \times 10^{169927283} \\ 15 & 2.84036 \times 10^{339854566} \\ 16 & \text{Overflow} \end{pmatrix}$$

$$x_0 = 2, \quad k = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1.0 \\ 3 & 1.5 \\ 4 & 1.375 \\ 5 & 1.4296875 \\ 6 & 1.407684326171875 \\ 7 & 1.4168967450968921 \\ 8 & 1.4130985519638084 \\ 9 & 1.4146747931827024 \\ 10 & 1.4140224079494415 \\ 11 & 1.4142927228578732 \\ 12 & 1.4141807698935047 \\ 13 & 1.4142271449252117 \\ 14 & 1.4142079362035538 \\ 15 & 1.4142158927929964 \\ 16 & 1.4142125970788504 \end{pmatrix}$$

$$x_0 = 2, \quad k = -0.353607$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1.41421 \\ 2 & 1.41421 \\ 3 & 1.41421 \\ 4 & 1.41421 \\ 5 & 1.41421 \\ 6 & 1.41421 \\ 7 & 1.41421 \\ 8 & 1.41421 \\ 9 & 1.41421 \\ 10 & 1.41421 \\ 11 & 1.41421 \\ 12 & 1.41421 \\ 13 & 1.41421 \\ 14 & 1.41421 \\ 15 & 1.41421 \\ 16 & 1.41421 \end{pmatrix}$$

### Beispiel — Exemple

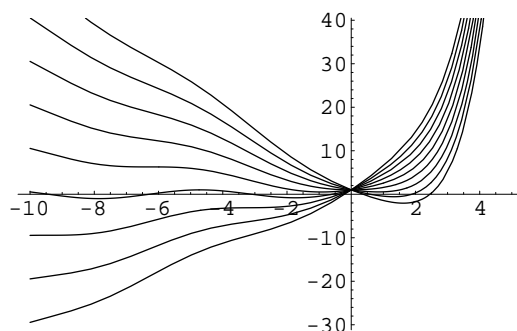
**Geg.:**

Funktionenschar

$$f(x, a) = \sin(x) - ax + e^x$$

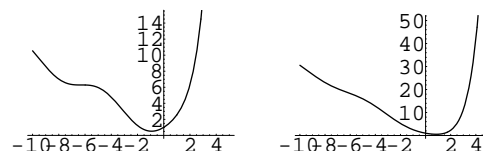
**Ges.:**

Funktion aus der Schar, welche die positive  $x$ -Achse berührt.



**Bsp.:**

$$a = 1 \quad \text{und} \quad a = 3:$$



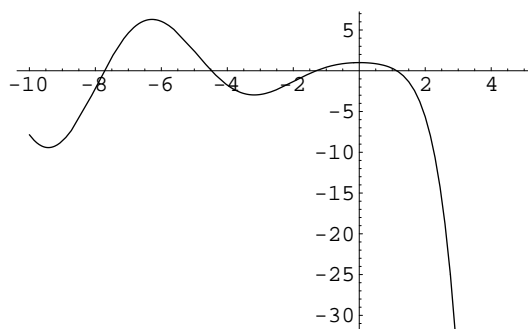
**Bedingung:** Bei der gesuchten Funktion muss im Berührungspunkt  $x_0$   $f(x_0, a) = 0$  und  $f'_x(x_0, a) = 0$  gelten.

$$\begin{aligned} &\leadsto \sin(x) - ax + e^x = 0 \wedge \cos(x) - a + e^x = 0 \\ &\Rightarrow h(x) = \sin(x) - (\cos(x) + e^x)x + e^x = 0 \end{aligned}$$

Wir suchen die Nullstelle dieser Funktion.

Schätzung:

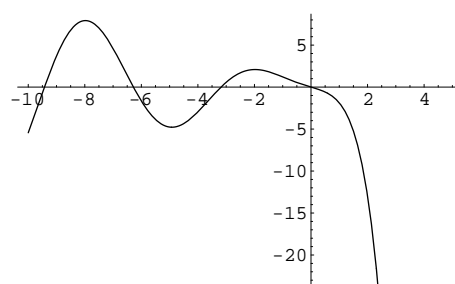
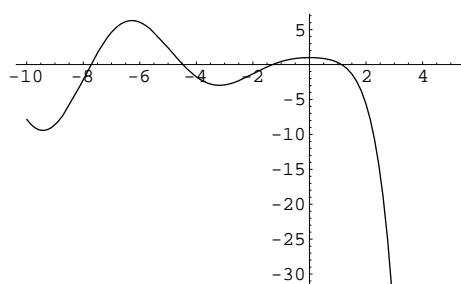
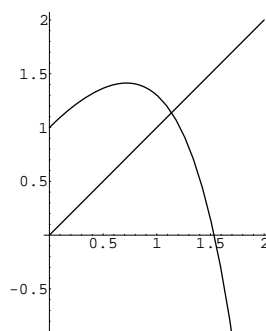
$$x_0 \approx 1.2$$



$$\varphi(x) := h(x) + x$$

$$\leadsto \varphi'(1.2) \approx -1.86569$$

Nachstehend sehen wir die Graphen von  $\varphi(x)$  und  $\varphi'(x)$ .



Es sollte sein:

$$h_k(x) = k \cdot (\sin(x) - (\cos(x) + e^x)x + e^x) = 0 \Rightarrow \varphi_k(x) = h_k(x) + x = k \cdot (\sin(x) - (\cos(x) + e^x)x + e^x) + x = x$$

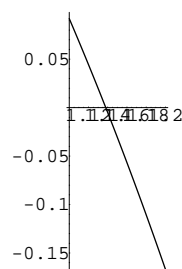
$$\leadsto (\varphi_k)'_x(x) = (k \cdot (\sin(x) - (\cos(x) + e^x)x + e^x) + x)' = 0 \Rightarrow 1 - k \cdot x(e^x - \sin(x)) = 0,$$

$$x_0 \approx 1.2 \Rightarrow k \approx 0.348956 \Rightarrow \varphi_{k_0}(x) = 0.348956 \cdot (\sin(x) - (\cos(x) + e^x)x + e^x) + x$$

Iteration:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1.2 \\ 2 & 1.141789 \\ 3 & 1.138402 \\ 4 & 1.138005 \\ 5 & 1.137956 \\ 6 & 1.137951 \\ 7 & 1.137950 \\ 8 & 1.137950 \end{pmatrix}$$

(Korrigierte Fixpunktmethod)



### 5.3.7 Fixpunktmethod für Systeme — Méthode du point fixe pour systèmes

Die Fixpunktmethod ist äusserst einfach programmierbar. Dazu kann man sie auch auf Systeme ausdehnen.

$$\begin{array}{ll}
 x = f(x, y) & (x, y) \in D, \\
 y = g(x, y) & |f'_x| < 1, |f'_y| < 1, |g'_x| < 1, \\
 & |g'_y| < 1 \text{ in } D
 \end{array}
 \quad \leadsto \quad \text{Bsp.:} \quad
 \begin{array}{ll}
 x = \sin(x + y) \\
 y = \cos(x - y)
 \end{array}$$

$$(x_1, x_2) = (0, 0) \Rightarrow \dots \Rightarrow (x_7, x_7) \simeq (0.935, 0.998) \text{ exakte Stellen}$$

## 5.4 Interpolationspolynome — Polynômes d'interpolation

### 5.4.1 Probleme — Problèmes

Wir können grob folgende Problemstellungen unterscheiden:

1. Modellierung von Kurven durch gegebene Punkte, z.B. bei Computergraphik.  $\leadsto$  **Interpolation** in  $[x_0, x_n]$ .
2. Extrapolation (Fortsetzung von Kurven ausserhalb von  $[x_0, x_n]$ ).
3. Kurve durch einen Punkt bei gegebenen Ableitungen.

### 5.4.2 Begriff — Notion

**Geg.:**

Messpunktkurve,  $n + 1$  Messpunkte oder  $n + 1$  gewählte Stützpunkte auf einem Graphen.

Wähle Polynom vom Grade  $n$ :

$$p_n(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$\leadsto$   $n + 1$  unbekannte Koeffizienten  $a_i$ ,  $n + 1$  Gleichungen  $p(x_i) = y_i$  (zu Punkt  $(x_i, y_i)$ )

$\leadsto$  System: :

$$\begin{array}{rcl}
 a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 & = & y_0 \\
 & \vdots & \\
 a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \dots + a_1 x_n + a_0 & = & y_n
 \end{array}$$

Das System ist für die Koeffizienten eindeutig lösbar  $\Leftrightarrow$  Determinante  $\neq 0$  :

$$D = \begin{vmatrix} x_0^n & \dots & x_0^0 = 1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^n & \dots & x_n^0 = 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$D$  ist eine **Vandermond**-Determinante. Da für  $x_i \neq x_j$  ( $i \neq j$ ) alle Spalten linear unabhängig sind, ist eine solche Determinante  $\neq 0$ .

**Konsequenz:** Durch  $n + 1$  verschiedene Stützpunkte lässt sich genau eine Polynomkurve vom Grade  $\leq n$  legen.  $\leadsto$  **Interpolationspolynom**

### 5.4.3 Zum Hornerschema — Quant au schéma de Horner

**Problem:** Finde eine Funktion  $f$  durch einen gegebenen Punkt bei gegebenen Ableitungen.

**Idee:** Verwende einen Potenzreihenansatz. Falls  $f$  ein Polynom vom Grade  $n$  ist, so bricht die Potenzreihe ab. Die Lösung ist ebenfalls ein Polynom vom Grade  $n$ , darstellbar nach „Horner“. Die gesuchten Koeffizienten lassen sich mit dem uralten „Vonhandrechner“(!) mit Hilfe der Verwendung einer Tabellenschreibweise nach Horner bestimmen (vgl. mathematische Literatur, Formeln und Tafeln.)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!} \cdot (x - x_0)^0 + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)^1 + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \dots \\
p_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k = \frac{p^{(0)}(x_0)}{0!} \cdot (x - x_0)^0 + \frac{p^{(1)}(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)^1 + \frac{p^{(2)}(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \dots \\
&\quad + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n \\
&= ((\dots((\frac{p^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0) + \frac{p^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} \cdot (x - x_0) + \dots) + \frac{p^{(1)}(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{p^{(0)}(x_0)}{0!}
\end{aligned}$$

#### 5.4.4 Darstellung von Lagrange — Représentation de Lagrange

Idee von Lagrange<sup>10</sup>:

Geg.:

$n + 1$  freie Stützstellen  $(x_i/y_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $x_i \neq x_j$  ( $i \neq j$ ).

Bilde damit :

$$L_i := \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdot (x_i - x_1) \cdot \dots \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i - x_n)} \rightsquigarrow \text{pgrad}(L_i) = n$$

$$x_i \neq x_j \Rightarrow \begin{array}{l} L_i(x_j) = 0 \\ L_i(x_i) = 1 \end{array} \Rightarrow y_i \cdot L_i(x) = \begin{cases} 0 & x=x_j \\ y_i & x=x_i \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$  **Symbol:** (Kronecker)  $L_i(x_j) = \delta_{i,j} \Leftrightarrow L_i(x_j) = 0, L_i(x_i) = 1$

$\rightsquigarrow P_{n,L}(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot L_i(x)$  erfüllt  $P_{n,L}(x_i) = y_i$  und besitzt  $PGrad = n$ .

**Formel:**

Interpolationspolynom

$$P_{n,L}(x) := \sum_{i=0}^n y_i \cdot L_i(x), \quad L_i(x_j) = \delta_{i,j}, \quad \text{pgrad}(L_i = n)$$

$\rightsquigarrow$  eindeutig

#### 5.4.5 Abschätzung und Runge-Effekt — Estimation et effect de Runge

Sei  $f \in D^{(n+1)}[a, b]$ ,

$p(x)$  Lagrange-Polynom:  $f(x_i) = y_i$ ,  $a = x_0, \dots, b = x_n$

$$\rightsquigarrow \forall_{x \in [a,b]} \exists_{\xi \in [a,b]} : h(x) := f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \quad \text{Begründung:}$$

$$\odot x = x_i \Rightarrow f(x_i) = y_i = p(x_i), \quad x - x_i = 0 \Rightarrow h(x_i) = 0 \rightsquigarrow \odot$$

$$\odot h(x_i) = f(x_i) - p(x_i) = y_i - y_i = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow h(x_i) \text{ hat mindestens } n \text{ Nullstellen}$$

$$\rightsquigarrow h(x) = (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \cdot g(x)$$

$$\odot x \neq x_i : \text{ Sei } x' \text{ fix}$$

$$\text{Sei } F(x) := f(x) - p(x) - g(x') \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

$$\rightsquigarrow F(x_i) = f(x_i) - p(x_i) - g(x_i) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x_i - x_i) = 0 - 0 - g(x') \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n 0 =$$

<sup>10</sup>Lagrange 1736 – 1813

0,  $F(x') = f(x') - p(x') - g(x') \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x' - x_i) = f(x') - h(x') = 0 \leadsto F(x)$  hat mindestens  $n+2$  Nullstellen

$\leadsto$  Rolle:  $\exists \xi \in (a, b) : F^{(n+1)}(\xi) = 0 \wedge p^{(n+1)}(x) = 0$  (Polynom)

Es gilt:  $F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - g(x') \cdot (n+1)!$

$$\Rightarrow F^{(n+1)}(\xi) = 0 = f^{(n+1)}(\xi) - g(x') \cdot (n+1)! \Rightarrow g(x') = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$



**Satz:**

**Vor.:**

$f \in D^{(n+1)}[a, b]$ ,

$p(x)$  Lagrange-Polynom:

$f(x_i) = y_i, \quad a = x_0, \quad \dots, \quad b = x_n$

**Beh.:**

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{\max_{\xi \in [a, b]} |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|$$

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

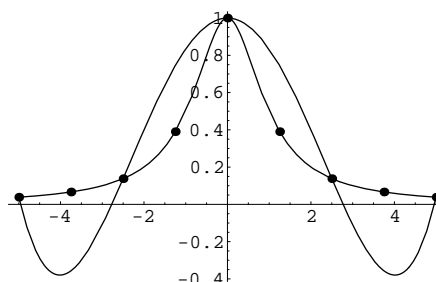
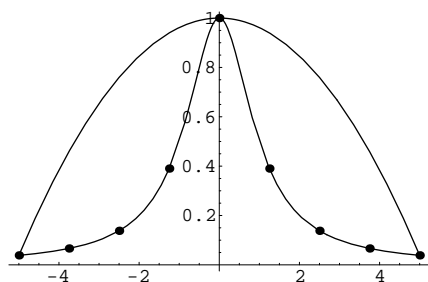
**Problem:**

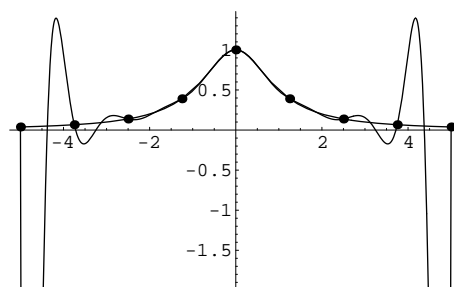
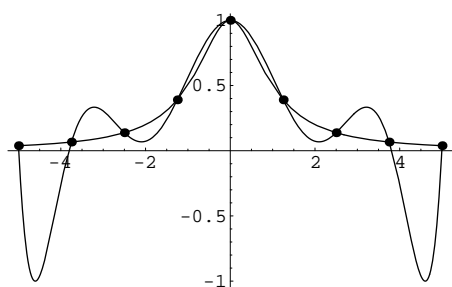
Der Teil  $q(x) := \prod_{i=0}^n (x - x_i)$  ist ein Polynom, dessen Graph oszillieren kann.  $|q(x)|$  kann mit grossen  $x$  sehr gross werden!

**Bsp.:** Runge, 1901

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-5, 5], \quad x_i = -5 + \frac{10}{n} \cdot i, \quad 0 \leq i \leq n$$

$\leadsto$  Gewählte Punkte auf dem Graphen von  $f$  mit Graphen der Interpolationspolynome vom Grade 2, 4, 8, 16.





### 5.4.6 Darstellung von Newton — Représentation de Newton

**Ansatz:**

$$P_{n,N}(x) := c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + c_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

$P_{n,N}(x_i) = y_i \rightsquigarrow$  Unbekannte Koeffizienten  $c_k$  berechnenbar  $\dots \rightsquigarrow$

**Berechnung der  $c_i$ :**

$$y_0 = P_{n,N}(x_0) = c_0 \Rightarrow c_0 = y_0$$

( $x_0$  steckt in jedem Faktor. .)

$$y_1 = P_{n,N}(x_1) = c_0 + c_1(x_1 - x_0) = y_0 + c_1(x_1 - x_0) \Rightarrow c_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$y_2 = P_{n,N}(x_2) = c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \text{ u.s.w}$$

$\rightsquigarrow$  Bessere Methode, wenn mal neue Punkte dazukommen!

**Fehlerabschätzung** bei Approximation einer gegebenen Funktion  $f$  durch ein Interpolationspolynom  $p$ :

**Formel:**

$$\text{Sei } f \in D^{n+1}(I), \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset I, y_i = f(x_i) \ (i = 0 \dots, n), x \in I \Rightarrow f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \cdot f^{n+1}(\xi), \xi = \xi(x), \xi \in [\text{Min}(x_0, x), \text{Max}(x_0, x)]$$

### 5.4.7 Zum Aitken–Neville–Algorithmus — Quant à l’algorithme de Aitken–Neville

Für algorithmische Berechnungen kann man mit den folgenden  $Q$ -Termen arbeiten:

**Definition:**

$$Q_k(x) := c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + c_k \prod_{0 \leq i \leq k} (x - x_i)$$

**Konsequenz:**

$$1. \ Q_{k+1}(x) = Q_k(x) + c_{k+1} \prod_{0 \leq i \leq k+1} (x - x_i)$$

$$2. Q_{n-1}(x) = P_{n,N}(x)$$

$$3. Q_{k-1}(x_k) = P_{n,N}(x_k) = y_k$$

Nachfolgend ist eine darstellerische Idee zur Berechnung der  $c_k$  angegeben.

**Notation:**  $c_k := f[x_0, x_1, \dots, x_k]$   
 $x_k$  heisst  $k$ -te **dividierende Differenz**.

$$\begin{array}{rcl}
 x_0 & y_0 = c_0 & \\
 & \searrow & \\
 & \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = c_1 & \\
 & \nearrow & \\
 x_1 & y_1 & \\
 & \searrow & \\
 & \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} & \\
 & \nearrow & \\
 x_2 & y_2 & \\
 \vdots & \vdots & \\
 & \searrow &
 \end{array}
 \quad
 c_2 = \frac{y_2 - y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{\frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1}$$

**Bemerkung:**

$$c_2 = \frac{y_2 - y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{y_2 - c_0 - c_1 \cdot (x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

**Schreibweise nach Horner:**

$$p(x) = c_0 + (x - x_0)(c_1 + (x - x_1)(c_2 + \dots))$$

Die Methode zur Berechnung der  $c_k$  kann auch zur Berechnung des Interpolationspolynoms verwendet werden (Aitken-Neville, Anwendung für Extrapolationen!). Hier eine Beispiel-Skizze:

$$\begin{array}{rcl}
 x_0 = 0 & P_0 = y_0 = 1 & \\
 & \searrow & \\
 & P_{01} & \\
 x_1 = 1 & P_1 = y_1 = 0 & \\
 & \nearrow & \searrow \\
 & P_{12} & P_{012} \\
 & \nearrow & \\
 x_2 = 2 & P_2 = y_2 = 3 &
 \end{array}$$

$$\text{Dabei ist: } P_{01} = \frac{(x - x_0) \cdot P_1 - (x - x_1) \cdot P_0}{x_1 - x_0} = \frac{(x - 0) \cdot 0 - (x - 1) \cdot 1}{1 - 0} = -x + 1$$

$$P_{12} = \frac{(x - x_1) \cdot P_2 - (x - x_2) \cdot P_1}{x_2 - x_1} = \frac{(x - 1) \cdot 3 - (x - 2) \cdot 1}{2 - 1} = 3x - 3$$

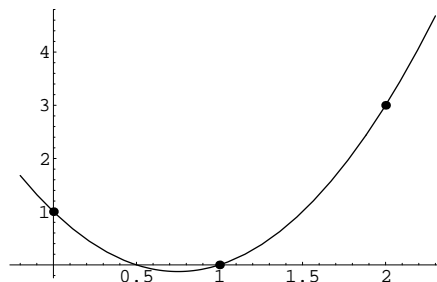
$$\begin{aligned}
 P_{012} &= \frac{(x - x_0) \cdot P_{12} - (x - x_2) \cdot P_{01}}{x_2 - x_0} = \frac{(x - 0) \cdot (3x - 3) - (x - 2) \cdot (-x + 1)}{2 - 0} = \\
 &= \frac{3x^2 - 3x + x^2 - 3x + 2}{2} = \frac{4x^2 - 6x + 2}{2} = 2x^2 - 3x + 1
 \end{aligned}$$



**Achtung:**

$$P'_{012}(x) = 4x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{4} \neq 1 \leadsto \text{Minimum}$$



Allgemeine Formel (vgl. Lit.):

**Formel:**

Sei  $S = \{i_0, i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$

(Indexmenge, paarweise verschieden)

$k + 1$  Stützstellen:  $(x_i, y_i), i \in S$

$\leadsto I_k^* = y_k, k = 0, 1, \dots, n$

$\leadsto I_{i_0, i_1, \dots, i_k}^*(x) = \text{Interpolationspolynom zu den } k + 1 \text{ Stützstellen}$

$\leadsto$  Rekursionsformel:

$$I_{i_0, i_1, \dots, i_k}^*(x) = \frac{(x - x_{i_0}) I_{i_1, i_2, \dots, i_k}^*(x) - (x - x_{i_k}) I_{i_0, i_1, \dots, i_{k-1}}^*(x)}{x_{i_k} - x_{i_0}}$$

### 5.4.8 Hermite–Interpolation, Splines — Interpolation d’après Hermite, splines

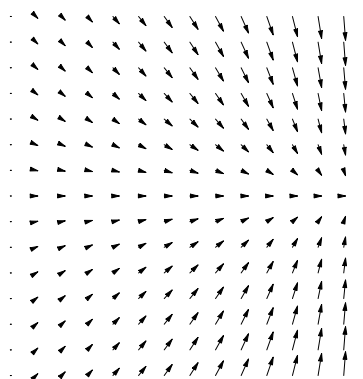
**Problem — Problème**

**Problem:**

**Geg.:** Stützunkte und Richtung der Kurve in den Punkten (Linienelement)  $(x_k, y_k, y'_k)$ .

**Ges.:** Kurve(n)

Beispiel solcher Linienelemente (hier Darstellung mit Pfeilen)



### Hermite–Polynome — Polynôme de Hermite

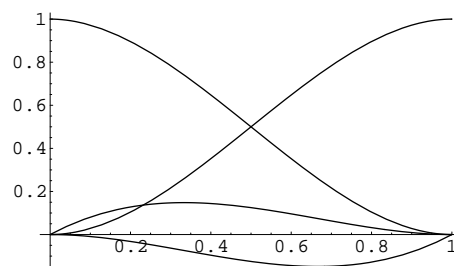
Wir studieren hier nur einen Spezialfall für das Intervall  $I = [0, 1]$  und zwei gegebenen Linienelementen an den Intervallenden.

↪ Gesucht ist daher ein Polynom  $p(x)$  mit:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = p(0), \quad m_0 = p'(0) \quad \text{und} \quad x_1 = 1, \quad y_1 = p(1), \quad m_1 = p'(1)$$

Für die Lösung des Problems benutzen wir folgende 4 Polynome  $H_i(x)$ :

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 2x^3 - 3x^2 + 1 \\ H_1(x) &= x^3 - 2x^2 + x \\ H_2(x) &= x^3 - x^2 \\ H_3(x) &= 1 - H_0(x) \end{aligned}$$



**Definition:**

$H_0^3(x) := H_0(x)$ ,  $H_1^3(x) := H_1(x)$ ,  $H_2^3(x) := H_2(x)$ ,  $H_3^3(x) := H_3(x)$ ,  
heissen **Hermite-Polynome**

Man rechnet sofort nach, dass diese Polynome die folgenden Binde-Eigenschaften besitzen:

**Satz:** 
$$\begin{pmatrix} H_0(0) & H'_0(0) & H'_0(1) & H_0(1) \\ H_1(0) & H'_1(0) & H'_1(1) & H_1(1) \\ H_2(0) & H'_2(0) & H'_2(1) & H_2(1) \\ H_3(0) & H'_3(0) & H'_3(1) & H_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

**Konsequenz:** Mit  $H_0(x), \dots, H_3(x)$  lässt sich auf  $I = [0, 1]$  ein Interpolationspolynom konstruieren, dessen Graph die beiden Linienelemente an den Intervallenden berührt. Mit den Binde-Eigenschaften rechnet man sofort nach:

**Formel:** 
$$p_H(x) = y_0 \cdot H_0(x) + m_0 \cdot H_1(x) + m_1 \cdot H_2(x) + y_1 \cdot H_3(x)$$
  

$$\Rightarrow p_H(0) = y_0, \quad p'_H(0) = m_0, \quad p'_H(1) = m_1, \quad p_H(1) = y_1$$

**Bemerkung:**  $p_H(x)$  ist eine Linearkombination von Hermite-Polynomen.

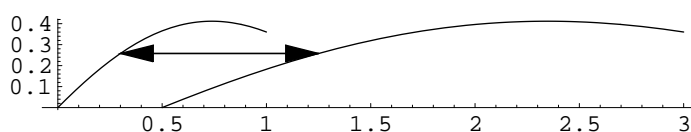
### 5.4.9 Splines — Splines

Spline engl., längliches, dünnes Stück Holz

#### Splines mit Hermite-Polynomen — Splines à l'aide de polynômes de Hermite

**Idee:**

Verbinden wir zwei Linienelemente durch Interpolationskurven  $p_H(x)$ , so können wir den Runge-Effekt vermeiden. Da die Tangenten an den Stützstellen oder **Knoten** beidseitig übereinstimmen, sind solche Funktionen mindestens einmal differenzierbar.

**Catmull–Rom–Splines — Splines de Catmull–Rom****Geg.:**  $n$  Knoten  $\rightsquigarrow$ **Definition:**Eine **allgemeine Splinkurve** ist gegeben durch eine zusammengesetzte stetige Funktion wie folgt:
$$S : [x_0, x_n] \mapsto \mathbb{R} \quad \text{mit} : \\ S \text{ ist auf } [x_i, x_{i+1}] \text{ durch ein kubisches Polynom } S_i \text{ gegeben.}$$
 $\rightsquigarrow$   $x$ : globale Koordinate auf  $[x_0, x_n]$   
 $x$ : lokale Koordinate auf  $[x_i, x_{i+1}]$ 
Da  $p_H$  nur auf dem Intervall  $[0, 1]$  sinnvoll ist, müssen wir diese Funktion für den Gebrauch geeignet transformieren, um  $S_i$  zu erhalten. Naheliegender ist eine lineare Transformation:**Idee:** Sei  $t \Rightarrow x$ ,  $x = x(t) = t(b-a) + a$ ,  $t = t(x) = \frac{x-a}{b-a} \Rightarrow x(0) = a$ ,  $x(1) = b$ Dabei sei für den Moment:  $x_i = a$ ,  $x_{i+1} = b$ 
 $\rightsquigarrow t := \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \in [0, 1]$ 
Diese lineare Transformation verschiebt den Graphen einer Funktion in Richtung der  $x$ -Achse und streckt ihn dazu noch.Weiter sei:  $S(x) := S(x(t)) := p_H(t)$ ,  $[0, 1] \ni t \mapsto x(t) \in [a, b]$   
(Für den Moment schreiben wir kurz  $S(x)$  statt  $S_i(x)$ .)Dann gilt:  $p_H(0) = S(x(0)) = S(a)$ ,  $p_H(1) = S(x(1)) = S(b)$ 

Es gilt aber nicht ohne weiteres:

$$p_H'(0) = S'_x(x(0)) = S'_x(a), \quad p_H'(1) = S'_x(x(1)) = S'_x(b)$$

Denn bei der Transformation kann die Tangentensteigung ändern.

$$\begin{aligned} \text{Es gilt (Kettenregel):} \quad S(x) &= S(x(t)) = p_H(t) = p_H(t(x)) \\ \Rightarrow \frac{dS(x)}{dx} &= \frac{dp_H(t(x))}{dx} = \frac{dp_H(t)}{dt} \cdot \frac{dt(x)}{dx} = \frac{dp_H(t)}{dt} \cdot \frac{1}{b-a} \Rightarrow \frac{dp_H(t)}{dt} = \frac{dS(x)}{dx} \cdot (b-a) \end{aligned}$$

**Konsequenz:**

$$\begin{aligned} y_0 &= p_H(0) = S(a), \quad m_{0,H} = p_H'(0) = (b-a) \cdot S'(a) = m_{a,S} \\ m_{1,H} &= p_H'(1) = (b-a) \cdot S'(b) = m_{b,S}, \quad y_1 = p_H(1) = S(b) \end{aligned}$$

**Formel:**

$$\Rightarrow S(x) = y_0 \cdot H\left(\frac{x-a}{b-a}\right) + m_{a,S} \cdot H_1\left(\frac{x-a}{b-a}\right) + m_{b,S} \cdot H_2\left(\frac{x-a}{b-a}\right) + y_1 \cdot H_3\left(\frac{x-a}{b-a}\right), \quad S = S_i, \quad [a, b] = [x_i, x_{i+1}]$$

**Bsp.:**  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $y_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $y_2 = 0$

Möglichkeit:  $S_0(t) = t^3$ ,  $S_1(t) = 1 - t^3$

$\leadsto$  Stetig, in  $x_1 = 1$  nicht diff'bar.  $\leadsto$

**Problem:** Wie die Kurve in  $x_1 = 1$  glatt machen?  $\leadsto$  Problem in Knoten!

**Methoden:**

1. Schätzung der Ableitung in  $x_i$  (FMILL) oder:
2. Ersetze die Tangentensteigung in  $x_i$  durch die Sehnensteigung in  $((x_{i-1}, y_{i-1}), (x_{i+1}, y_{i+1}))$ . (FMILL)
3. Danach Hermite-Polynome verwenden:  

$$S(x) = y_i H_0(t(x)) + m_i (x_{i+1} - x_i) H_1(t(x)) + m_{i+1} (x_{i+1} - x_i) H_2(t(x)) + y_{i+1} H_3(t(x))$$
 $\leadsto$  **Catmull-Rom-Splines**

Schreibe kurz:  $\Delta_i := (x_{i+1} - x_i)$

**Formel:**

$\leadsto S(x) = y_i H_0(t(x)) + m_i \Delta_i H_1(t(x)) + m_{i+1} \Delta_i H_2(t(x)) + y_{i+1} H_3(t(x))$

### Bessel-Tangenten — Tangentes de Bessel

**Problem:** An den Endpunkten  $x_0, x_n$  versagt die Methode mit den Sehnen durch benachbarte Punkte. Eine Möglichkeit zur Rettung der Situation ist die Konstruktion der **Bessel-Tangenten**.

**Konstruktion:** Wir legen durch die Punkte  $(x_{i-1}, y_{i-1})$ ,  $(x_i, y_i)$ ,  $(x_{i+1}, y_{i+1})$  ein quadratisches Polynom  $q_i(x)$ . Als Steigung in  $x_i$  verwenden wir die erste Ableitung von  $q_i$ . An den Endpunkten  $x_0$  und  $x_n$  verwenden wir die Ableitungen in den Endpunkten von  $q_1$  und  $q_{n-1}$ .

**Konsequenz:** Man kann durch Nachrechnung zeigen, dass solche Splines in den Knoten sogar zweimal differenzierbar sind.

### Natürliche Splines — Des splines naturels

**Idee:** Willkürlich setzen wir:  $m_0 = m_n = 0$

Das Problem der Bestimmung der Zwischenwerte  $m_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  lösen wir folgendermassen:

Es ist:

$$S_i(x) = y_i H_0(t) + m_i \Delta_i H_1(t) + m_{i+1} \Delta_i H_2(t) + y_{i+1} H_3(t), \quad t = t(x) = \frac{x - x_i}{\Delta_i}, \quad x = t \Delta_i + x_i$$

$$\leadsto S_i(t(x)) = (t - 2t^2 + t^3) \Delta_i m_i + (-t^2 + t^3) \Delta_i m_{i+1} + (1 - 3t^2 + 2t^3) y_i + (3t^2 - 2t^3) y_{i+1}$$

Wir können nun fordern, dass zwei aneinanderstossende Splines auch in der 2. Ableitung übereinstimmen. Denn wenn wir die Polynome 3. Grades  $S_i(x)$  zweimal nach  $x$  differenzieren, führt das zu linearen Gleichungen.

$$\leadsto \frac{d^2 S_{i-1}(x)}{dx^2} \Big|_{t=1, \ x=x_i} = \frac{d^2 S_i(x)}{dx^2} \Big|_{t=0, \ x=x_i}$$

Berechnet man diese Ableitungen, so erhält man nach einer algebraischen Vereinfachung:

$$0 = -3 \Delta_{i-1}^2 (m_{i-1} + m_i) + \Delta_{i-1} (\Delta_i (m_{i-1} + 2m_i) - 6y_{i-1} + 6y_i) + \Delta_i (\Delta_i (2m_i + m_{i+1}) + 3(y_{i-1} - y_{i+1}))$$

Damit erhalten wir mit  $m_0 = 0$  und  $m_n = 0$  nun  $n + 1$  lineare Gleichungen für die  $n + 1$  Variablen  $m_{i-1}$ ,  $m_i$  und  $m_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ . Die Lösung dieses Gleichungssystems ist ein bekanntes Problem der linearen Algebra.

### Weitere Ansätze — D'autres méthodes

1. Statt mit Hermite-Polynomen zu arbeiten, kann man auf den Teilintervallen einen direkten Ansatz verwenden:

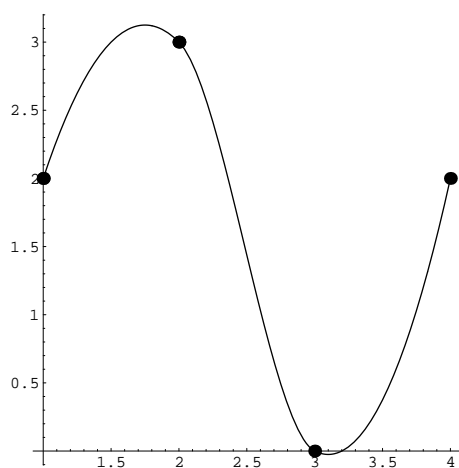
$$p_i(x) = a_{3,i} x^3 + a_{2,i} x^2 + a_{1,i} x + a_{0,i}$$

2. Bei Vektorfunktionen, z.B. bei  $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$  hat man es hier üblicherweise mit zwei Funktionen  $v_1(t)$  und  $v_2(t)$  zu tun, die man nach obigem Muster behandeln kann.

3. Mit Hilfe einer Basis von **Bernstein-Polynomen** kann man sogenannte **Bézier-Kurven** finden. Dabei erreicht man, dass die Koeffizienten eine nützliche geometrische Bedeutung besitzen. Eine Behandlung würde unseren Rahmen sprengen. Genauereres vgl. Literatur.

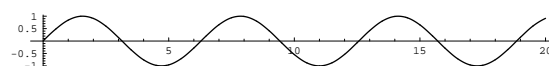
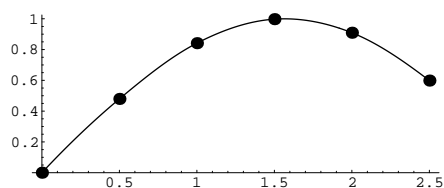
### Beispiele und Probleme — Exemples et problèmes

Die folgenden Graphen sind mit *Mathematica* und der Methode der Hermite-Polynome, Bessel-Tangenten und FMILL (Sehnensteigung als Tangentensteigung) erzeugt worden. Die Resultate belegen was passieren kann, wenn die Anzahl der Teilpunkte nicht angepasst ist.



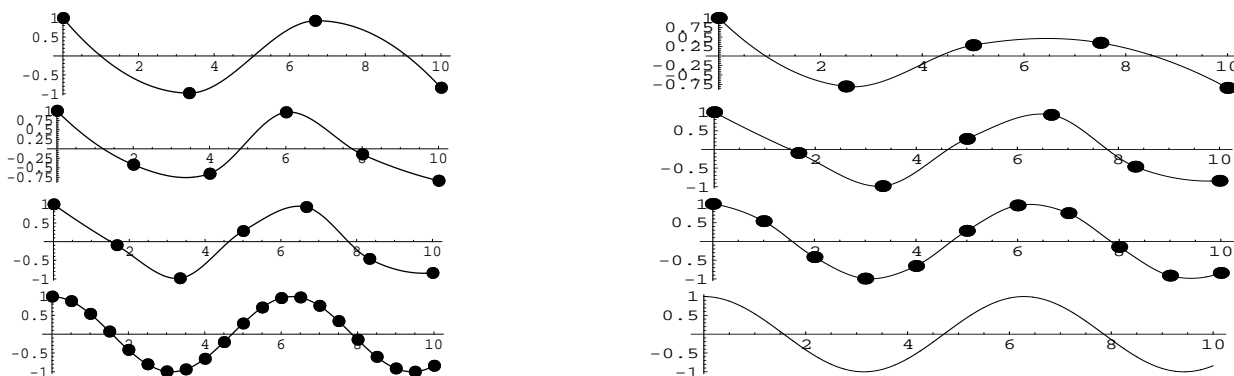
$$P_1 = (1; 2); P_2 = (2; 3); \\ P_3 = (3; 0); P_4 = (4; 2)$$

Unten:  
 $f(x) = \sin(x)$ ,  $x_1 = 0, x_2 = 20$ ,  $n = 40$



Nachfolgend ist  $f(x) = \cos(x)$  gezeigt mit  $x_1 = 0, x_2 = 10$  mit der Anzahl Teilintervalle  $k$ :

$$k \in \{n = 3, 4, 5, 6, 7, 10, 20, 40, \dots\}$$



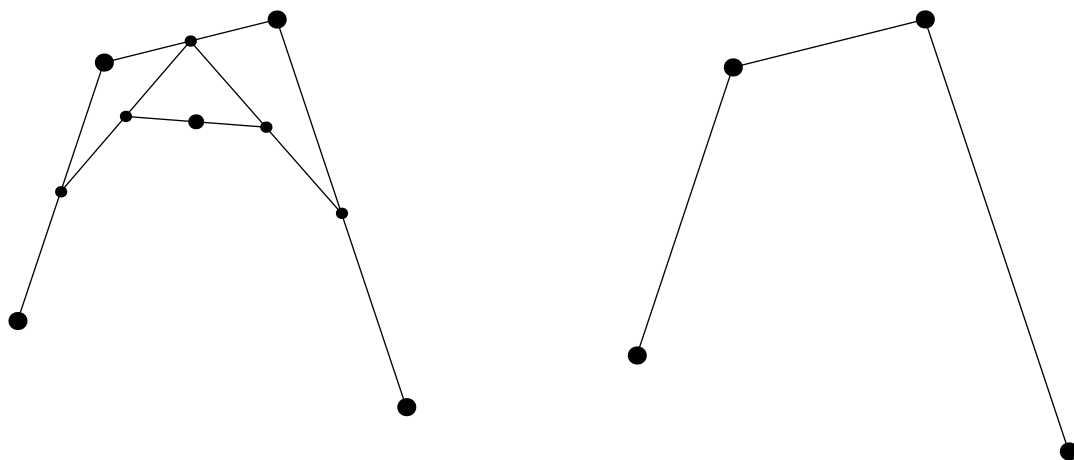
#### 5.4.10 Ausblick: Bezier-Kurven — Annexe: Courbes de Bézier

Bezier-Kurven markieren eine wichtige Präsenz der Mathematik in der Computergraphik. Die Idee dieser Kurven stammt von Casteljau (Citroen, 1959) und Bézier (Renault, 1962). Bei diesen Kurven geht man von einem Stützpolygon mit den Eckpunkten  $Q_i$  aus. Die Anzahl Seiten des Polygons entspricht dem Grad der Kurven als polynomiale Vektorkurve.

Nachfolgend ist ein Stützpolygon gezeigt. Teilt man die Seiten dieses Polygon in einem Verhältnis  $t : (1 - t)$  (unten gezeigt ist  $t = 1$ ), so entstehen neue Zwischenpunkte.

**Bsp.:**

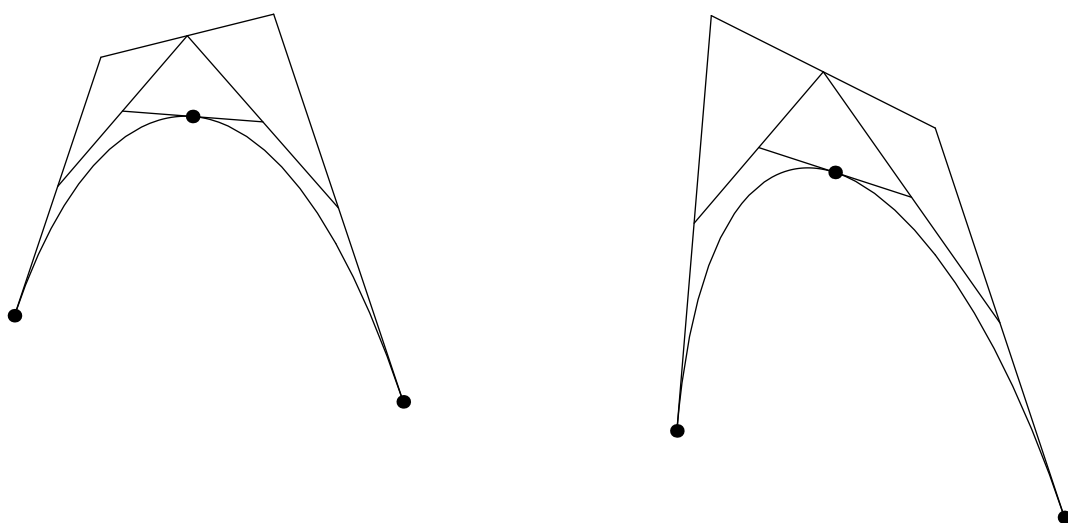
Wir suchen eine Polynom-Vektorkurve mit minimalem Grad, die durch  $Q_1$  und  $Q_4$  geht und in  $Q_1$  die Gerade  $\overline{Q_1 Q_2}$  als Tangente sowie in  $Q_4$  die Gerade  $\overline{Q_3 Q_4}$  als Tangente hat. Dabei sei  $Q_{k,k+1}$  der Mittelpunkt von  $\overline{Q_k Q_{k+1}}$ ,  $Q_{k-1,k,k+1}$  der Mittelpunkt von  $\overline{Q_{k-1,k} Q_{k,k+1}}$  und  $Q_{1,2,3,4}$  der Mittelpunkt von  $\overline{Q_{1,2,3} Q_{2,3,4}}$ . Wir konstruieren die Kurve so, dass sie durch  $Q_{1,2,3,4}$  geht und dort  $\overline{Q_{1,2,3} Q_{2,3,4}}$  Tangente ist.

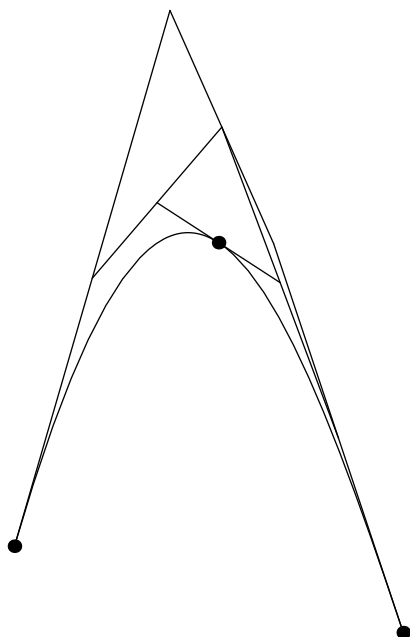


Löse:

$$\begin{aligned}
\vec{v}(t) &= \vec{a}_0 + \vec{a}_1 \cdot t + \vec{a}_2 \cdot t^2 + \vec{a}_3 \cdot t^3 \\
\vec{v}(0) &= \overrightarrow{OQ_1} \\
\vec{v}(t_m) &= \overrightarrow{OQ_{1,2,3,4}} \\
\vec{v}(1) &= \overrightarrow{OQ_4} \\
\left. \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \right|_{t=0} &= \alpha \overrightarrow{Q_1Q_2} \\
\left. \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \right|_{t=t_m} &= \beta \overrightarrow{Q_{1,2,3}Q_{2,3,4}} \\
\left. \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \right|_{t=1} &= \gamma \overrightarrow{Q_3Q_4}
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Vorhanden sind 6 Vektorgleichungen, d.h. 12 Gleichungen. Unbekannt sind  $\vec{a}_0, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  (8 Komponenten) sowie  $t_m, \alpha, \beta, \gamma$ , also total 12 Parameter. Diese lassen sich daher berechnen. On a 6 équations vectorielles à disposition, c.v.d. 12 équations.  $\vec{a}_0, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  (8 composants) ainsi que  $t_m, \alpha, \beta, \gamma$  sont inconnus, donc en tout 12 parameters. Ceux-là peuvent donc être calculés.



**Bemerkung:**

Der Grad der Kurve ändert nicht, wenn man einen Punkt  $Q_i$  verschiebt (lineare Abbildung!).

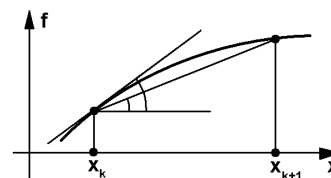
Die Idee dieser Kurven lässt sich auch auf Flächen übertragen.

## 5.5 Numerische Differentiation — Différentiation numérique

### 5.5.1 Graphische Methode — Méthode graphique

**Geg.:** Messpunktkurve,  $n + 1$  Messpunkte oder  $n + 1$  gewählte Stützpunkte auf einem Graphen  $\leadsto n$  Sehnen zwischen benachbarten Punkten.

**Idee:** Sehr grobe Methode: Nehme Sehnen- resp. Sekantensteigungen als Tangentensteigungen.



### 5.5.2 Polynommethode — Méthode polynomiale

#### Ableitung des Interpolationspolynom — Dérivée du polynôme d'interpolation

Es scheint jetzt naheliegend, die unbekannte Ableitung von  $f$  durch diejenige des Interpolationspolynoms  $p$  zu ersetzen. Doch die Erfahrung zeigt, dass das Interpolationspolynom bei den äusseren Punkten oft stark zu oszillieren beginnt, auch wenn  $f$  nicht oszilliert. Dem kann man versuchen abzuwehren, indem man noch weiter aussen künstlich weitere Punkte hinzunimmt und so zu einem Interpolationspolynom höheren Grades gelangt, das sich im innern, wichtigen Bereich anständig verhält. Allgemein interessiert aber doch die Frage nach der Fehlerabschätzung.

Für  $f(x) \approx p_n(x)$  und  $f'(x) \approx p'_n(x)$  gilt dann nach dem Mittelwertsatz:

$$f'(x) \approx \frac{p_n(x_{i+k}) - p_n(x_i)}{x_{i+k} - x_i}$$



**Fehlerabschätzung — Estimation de l'erreur****Satz:****Vor.:**

$f \in \mathcal{C}^{n+1}(I), \quad x_0, x_1, \dots, x_n \in I,$   
 $p(x)$  Näherungspolynom  
 $\omega = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$

**Beh.:**

$$\forall_{x \in I} \exists_{\xi(x) \in I} : f(x) - p_n(x) = \omega(x) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

**Korollar:**

$$|f(x) - p_n(x)| \leq R \leq \max_{\xi \in I} \left| \omega(x) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \right|$$

Für interessierte Leser die Beweisidee:

**Beweis:**

Sei  $\varphi(x) = f(x) - p_n(x) \Rightarrow \varphi(x_i) = 0, \quad i = 0, \dots, n \Rightarrow \varphi(x_i) = 0$   
 Ebenso:  $\omega(x_i) = 0, \quad i = 0, \dots, n$  (nach Konstruktion)

Sei  $x_s \in I, \quad x_s \neq x_i, \quad i = 0, \dots, n \Rightarrow \omega(x_s) \neq 0$ 

Studiere:

$$F(x) := \varphi(x) - k \cdot \omega(x) = f(x) - p_n(x) - k \cdot \omega(x) \Leftrightarrow f(x) = F(x) + p_n(x) + k \cdot \omega(x)$$

$$\text{Sei } k = \frac{f(x_s) - p_n(x_s)}{\omega(x_s)} \Rightarrow F(x_s) = f(x_s) - p_n(x_s) - k \cdot \omega(x_s) = 0$$

$\leadsto$  Zusammen:  $\varphi(x_i) = 0, \quad i = 0, \dots, n, \quad \varphi(x_s) = 0 \quad (x_s \neq x_i) \Rightarrow F(x)$  hat mindestens  $n+2$  Nullstellen in  $I$

$$f \in \mathcal{C}^{n+1}(I) \Rightarrow F \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$$

Satz von Rolle:

 $\leadsto \Rightarrow F'(x)$  hat mindestens  $n+1$  Nullstellen in  $I$  $\leadsto \Rightarrow F''(x)$  hat mindestens  $n$  Nullstellen in  $I$  $\dots$  $\leadsto \Rightarrow F^{(n+1)}(x)$  hat mindestens 1 Nullstelle in  $I$  $\leadsto \exists_{\xi \in I} F^{(n+1)}(\xi) = 0$ 

Zudem:

$$\text{pgrad}(p_n(x)) = n \Rightarrow p^{n+1}(x) \equiv 0, \quad \text{pgrad}(\omega(x)) = n+1 \Rightarrow (k \cdot \omega(x))^{n+1} \equiv k \cdot (n+1)!$$

$$\Rightarrow F^{(n+1)}(\xi) = 0 = f^{(n+1)}(\xi) - 0 - k \cdot (n+1)! \Rightarrow k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

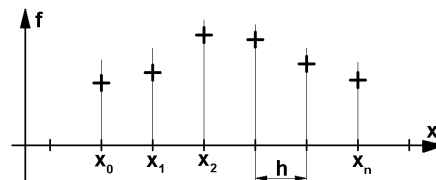
$$\Rightarrow \forall_{x_s \in I} \exists_{\xi(x_s) \in I} : f(x_s) - p_n(x_s) = F(x_s) + \omega(x_s) \cdot k = 0 + \omega(x_s) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow \forall_{x \in I} \exists_{\xi(x) \in I} : f(x) - p_n(x) = \omega(x) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

### 5.5.3 Methode der Binomialkoeffizienten, $f^{(n)}$ — Méthode des coefficients binomiaux, $f^{(n)}$

**Geg.:**  $n + 1$  äquidistante Stützstellen mit Äquidistanz  $h$ .

$\leadsto x_{i+1} = x_i + h$



Untersuchung des Falles von quadratischen Funktionen:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c, \quad f'(x) = 2ax + b, \quad f'(x_i + \frac{h}{2}) = 2a(x_i + \frac{h}{2}) + b = 2ax_i + ah + b \\ &= \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} = \frac{(ax_i^2 + 2ax_ih + ah^2 + bx_i + bh + c) - (ax_i^2 + bx_i + c)}{h} = 2ax_i + ah + b \\ &= f'(x_i + \frac{h}{2}) \end{aligned}$$

**Lemma:**

**Vor.:**

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

**Beh.:**

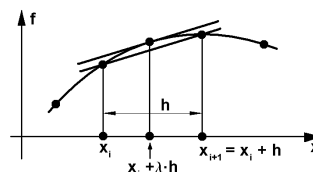
$$f'(x_i + \frac{h}{2}) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}$$

**Idee:** Verwende diese Eigenschaft von quadratischen Funktionen auch bei anderen Funktionen ( $\leadsto$  Fehler!):

Mittelwertsatz:

$$\begin{aligned} f'(x_i + \lambda \cdot h) &\approx f'(x_i + \frac{h}{2}) \approx \\ &\approx \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}, \quad \lambda \in (0, 1) \end{aligned}$$

Fehler:  $\lambda$  wird als  $\approx \frac{1}{2}$  gesetzt.



$\leadsto$  Höhere Ableitungen:

Ersetze  $f$  durch  $f'$  und  $f'$  durch  $f''$ :

$$\begin{aligned} f''(x_{i+1}) &\approx \frac{f'(x_{i+1} + \frac{h}{2}) - f'(x_i + \frac{h}{2})}{h} \approx \frac{\frac{f(x_{i+2}) - f(x_{i+1})}{h} - \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}}{h} = \\ &= \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x_i + \frac{h}{2}) &\approx \frac{f''(x_{i+1}) - f''(x_i)}{h} \approx \frac{\frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} - \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2}}{h} = \\ &= \frac{f(x_{i+2}) - 3f(x_{i+1}) + 3f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h^3} \end{aligned}$$

Allgemein erhält man so:

**Formel:**

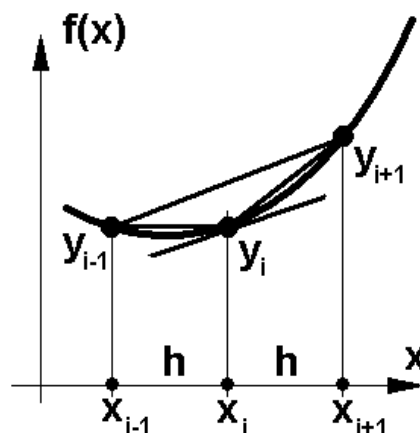
$$n = 2m + 1 \in \mathbb{N} \quad f^{(n)}\left(x_i + \frac{h}{2}\right) \approx \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(x_{i+m+1-j}) \cdot \frac{1}{h^n}$$

$$n = 2m \in \mathbb{N} \quad f^{(n)}\left(x_i + \frac{h}{2}\right) \approx \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(x_{i+m-j}) \cdot \frac{1}{h^n}$$

### 5.5.4 Methode der zentralen Differenzen — Méth. d. différences centrales

Sei  $f(x)$  in  $I$  genügend oft differenzierbar,  
 $x_i \in I$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Die nebenstehende Skizze zeigt, dass die  
 Näherung  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$   
 für  $f'(x_i)$  besser ist als  $\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$  oder  
 $\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$ .



**Definition:**

1.  $y_k' := \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{x_{k+1} - x_{k-1}} = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}$   
 heisst **zentraler Differenzenquotient** in  $x_k = x_0 + k \cdot h$ .
2.  $(y_k')_{fw} := \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{y_{k+1} - y_k}{h}$   
 heisst **Vorwärtsdifferenzenquotient** in  $x_k = x_0 + k \cdot h$ .
3.  $(y_k')_{bw} := \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} = \frac{y_k - y_{k-1}}{h}$   
 heisst **Rückwärtsdifferenzenquotient** in  $x_k = x_0 + k \cdot h$ .

Mit Hilfe der Taylorreihe resp. der Taylorpolynome von  $f$  erhalten wir:

$$f(x_k + h) = f(x_k) + f'(x_k)h + \frac{1}{2}f''(x_k)h^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(x_k)h^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(x_k)h^4 + O(h^5)$$

$$f(x_k - h) = f(x_k) - f'(x_k)h + \frac{1}{2}f''(x_k)h^2 - \frac{1}{6}f^{(3)}(x_k)h^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(x_k)h^4 + O(h^5)$$

Speziell:

$$f(x_k + h) = f(x_k) + f'(x_k)h + \frac{f''(x_k)}{2}h^2 + O(h^3), \quad f(x_k - h) = f(x_k) - f'(x_k)h + \frac{f''(x_k)}{2}h^2 + O(h^3). \\ \Rightarrow f(x_k + h) - f(x_k - h) = 2f'(x_k)h + O(h^3)$$

$$y_k' = f'(x_k) = \frac{f(x_k + h) - f(x_k - h)}{2h} + O(h) = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + O(h^2)$$

Speziell:

$$\begin{aligned}
f(x_k + h) &= f(x_k) + f'(x_k)h + \frac{1}{2}f''(x_k)h^2 + \frac{1}{6}f'''(x_k)h^3 + O(h^4), \\
f(x_k - h) &= f(x_k) - f'(x_k)h + \frac{1}{2}f''(x_k)h^2 + \frac{1}{6}f'''(x_k)h^3 + O(h^4). \\
\Rightarrow f(x_k + h) + f(x_k - h) &= 2f(x_k) + 2\frac{1}{2}f''(x_k)h^2 + O(h^4)
\end{aligned}$$

$$y_k'' = f''(x_k) = \frac{f(x_k + h) - 2f(x_k) + f(x_k - h)}{h^2} + O(h^2) = \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + O(h^2)$$

Anderseits erhält man mit Hilfe eines Zwischenschritts  $\frac{h}{2}$ :

$$y_k'' \approx \frac{y'_{k+\frac{1}{2}} - y'_{k-\frac{1}{2}}}{2\frac{h}{2}} = \frac{y'_{k+\frac{1}{2}} - y'_{k-\frac{1}{2}}}{h} \approx \frac{\frac{y_{k+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} - y_{k+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}}{h} - \frac{y_{k+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} - y_{k-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}}{h}}{h} \approx \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2}$$

Dieses Resultat stimmt mit dem vorher erhaltenen überein.

Weiter kann man in dieser Art auch  $y_k'''$ ,  $y_k''''$  u.s.w. berechnen:

$$\begin{aligned}
y_k''' &= (y_k'')' \approx \left( \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} \right)' = \frac{y_{k+1}' - 2y_k' + y_{k-1}'}{h^2} = \frac{\frac{y_{k+2} - y_k}{2h} - 2\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + \frac{y_k - y_{k-2}}{2h}}{h^2} \\
&= \frac{y_{k+2} - y_k - 2(y_{k+1} - y_{k-1}) + y_k - y_{k-2}}{2h^3} = \frac{y_{k+2} - 2y_{k+1} + 2y_{k-1} - y_{k-2}}{2h^3} \\
y_k^{(4)} &= (y_k'')'' \approx \left( \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} \right)'' = \frac{y_{k+1}'' - 2y_k'' + y_{k-1}''}{h^2} \\
&= \frac{\frac{y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k}{2h} - 2\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{2h} + \frac{y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}}{2h}}{h^2} \\
&= \frac{y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k - 2(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}) + y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}}{h^4} \\
&= \frac{y_{k+2} - 4y_{k+1} + 6y_k - 4y_{k-1} + y_{k-2}}{2h^3}
\end{aligned}$$

(Für den Fehlernachweis muss des gegenenen Rahmens wegen auf die Literatur verwiesen werden<sup>3</sup>.)

$$y_k' = f'(x_k) = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + O(h^2), \quad y_k'' = f''(x_k) = \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + O(h^2)$$

$$y_k''' = \frac{y_{k+2} - 2y_{k+1} + 2y_{k-1} - y_{k-2}}{2h^3} + O[h^2], \quad y_k^{(4)} = \frac{y_{k+2} - 4y_{k+1} + 6y_k - 4y_{k-1} + y_{k-2}}{2h^3} + O[h^2]$$

Mit dem oben benutzten Einsetzungsverfahren findet man auch für partielle Ableitungen:

Sei  $x_k = x_0 + k \cdot h_x$ ,  $y_j = y_0 + j \cdot h_y$ ,  $f(x, y) := w(x, y)$

$$\frac{\partial f(x_k, y_j)}{\partial x} = w'_{x|k,j} \approx \frac{w_{k+1,j} - w_{k-1,j}}{2h_x}, \quad \frac{\partial f(x_k, y_j)}{\partial y} = w'_{y|k,j} \approx \frac{w_{k,j+1} - w_{k,j-1}}{2h_y}$$

$$\frac{\partial^2 f(x_k, y_j)}{\partial x \partial y} = w''_{xy|k,j} \approx \frac{w_{k+1,j+1} - w_{k+1,j-1} - w_{k-1,j+1} + w_{k-1,j-1}}{4h_x h_y}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 f(x_k, y_j)}{\partial x^2 \partial y^2} &= w^{(4)}_{xxyy|k,j} \approx \\
&\frac{w_{k+1,j+1} + w_{k+1,j-1} + w_{k-1,j+1} + w_{k-1,j-1} - 2w_{k+1,j} - 2w_{k,j+1} - 2w_{k,j-1} - 2w_{k-1,j} + 4w_{k,j}}{h_x^2 h_y^2} \text{ u.s.w.}
\end{aligned}$$

<sup>3</sup>Siehe z.B. Becker Dreyer Haacke Nabert, numerische Mathematik

Der Fehler ist jeweils von der Ordnung  $h_x^2$ ,  $h_y^2$  oder  $\text{Max}(h_x^2, h_y^2)$ .

**Satz:**

**Vor.:**

Sei  $f(x)$ ,  $f(x, y)$  in  $I$  genügend oft differenzierbar,  
 $x_k = x_0 + k h_x \in I$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ ,  $h = h_x$   
 $y_j = y_0 + j h_y \in I$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$   
 $f(x) := y$  oder  $f(x, y) := w(x, y)$

**Beh.:**

$$\begin{aligned}
 1. \quad y_k' &= f'(x_k) = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + O[h^2] \\
 2. \quad y_k'' &= f''(x_k) = \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + O[h^2] \\
 3. \quad y_k''' &= \frac{y_{k+2} - 2y_{k+1} + 2y_{k-1} - y_{k-2}}{2h^3} + O[h^2] \\
 4. \quad y_k^{(4)} &= \frac{y_{k+2} - 4y_{k+1} + 6y_k - 4y_{k-1} + y_{k-2}}{2h^3} + O[h^2] \\
 5. \quad \frac{\partial f(x_k, y_j)}{\partial x} &= w'_{x|k,j} \approx \frac{w_{k+1,j} - w_{k-1,j}}{2h_x} + O[h - x^2] \\
 6. \quad \frac{\partial f(x_k, y_j)}{\partial y} &= w'_{y|k,j} \approx \frac{w_{k,j+1} - w_{k,j-1}}{2h_y} + O[h_y^2] \\
 7. \quad \frac{\partial^2 f(x_k, y_j)}{\partial x \partial y} &= w''_{xy|k,j} \approx \frac{w_{k+1,j+1} - w_{k+1,j-1} - w_{k-1,j+1} + w_{k-1,j-1}}{4h_x h_y} \\
 &\quad + O[\text{Max}(h_x^2, h_y^2)] \\
 8. \quad \frac{\partial^4 f(x_k, y_j)}{\partial x^2 \partial y^2} &= w_{xxyy|k,j}^{(4)} \approx O[\text{Max}(h_x^2, h_y^2)] + \\
 &\quad \frac{w_{k+1,j+1} + w_{k+1,j-1} + w_{k-1,j+1} + w_{k-1,j-1} - 2w_{k,j+1} - 2w_{k,j-1} - 2w_{k-1,j} + 4w_{k,j}}{h_x^2 h_y^2}
 \end{aligned}$$

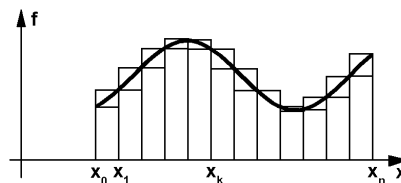
Wichtige Anwendungen: Siehe Differentialgleichungen, Randwertprobleme oder partielle Differentialgleichungen.

## 5.6 Numerische Integration — Intégration numérique

### 5.6.1 Rechteckmethode — Méthode des rectangles

**Geg.:** Messpunktkurve,  $n + 1$  Messpunkte (äquidistante  $x$ -Werte) oder  $n + 1$  gewählte Stützpunkte auf einem Graphen.

Gegeben sei eine äquidistante Intervalleinteilung. Arbeite mit „linken“ oder „rechten“ Rechtecken. Bei genügend feiner Intervalleinteilung bekommt man brauchbare Resultate.



**Formel:**

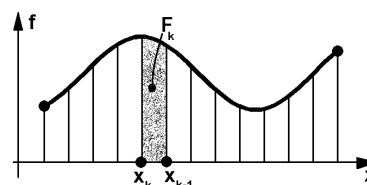
$$\begin{aligned} \int_{x_0=a}^{x_n=b} f(x) dx &\approx \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \cdot h = h \cdot \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) := F_a \\ &\approx \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot h = h \cdot \sum_{k=1}^n f(x_k) := F_b \end{aligned}$$

### 5.6.2 Trapezmethode — Méthode du trapèze

**Geg.:** Situation wie oben bei der Rechteckmethode. Wähle Trapeze statt Rechtecke.

Trapezfläche:

$$F_k = \frac{f(x_k) + f(x_{k-1})}{2} \cdot h$$



$$\leadsto \int_{x_0=a}^{x_n=b} f(x) dx \approx \frac{h}{2} \left( \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) + f(x_k) \right) = \frac{h}{2} \left( \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \right) + \frac{h}{2} \left( \sum_{k=1}^n f(x_k) \right) = \frac{h}{2} (F_a + F_b)$$

**Regel:**

**Trapezregel**

$$\begin{aligned} F_a &:= h \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}), \quad F_b := h \sum_{k=1}^n f(x_k) \\ \Rightarrow \int_{x_0=a}^{x_n=b} f(x) dx &\approx \frac{h}{2} (F_a + F_b) \end{aligned}$$

$$\leadsto \int_{x_0=a}^{x_n=b} f(x) dx := T_n \approx h \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{h}{2} \cdot (f(x_0) + f(x_n))$$

**Fehlerabschätzung:**

**Formel:**

Sei  $\xi \in I = [a, b]$ ,  $|f''(\xi)| = \max_{x \in I} |f''(x)|$

$$R(h) := \left| \int_{x_0=a}^{x_n=b} f(x) dx - T_n \right| \leq \left| \frac{b-a}{12} \cdot h^2 \cdot f''(\xi) \right|$$

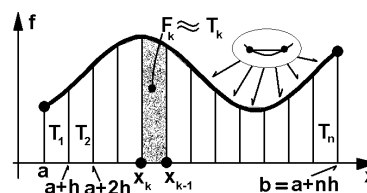
Sei  $h = \frac{b-a}{n}$

$$T_k = \frac{f(a + (k-1)h) + f(a + kh)}{2} \cdot h$$

$$T(h) = \sum_{k=1}^n T_k = \frac{1}{2} \cdot f(a) \cdot h + f(a+h) \cdot h + \dots + \frac{1}{2} \cdot f(b) \cdot h$$

$$T\left(\frac{h}{2}\right) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{f(a + (k-1)\frac{h}{2}) + f(a + k\frac{h}{2})}{2} \cdot \frac{h}{2} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \cdot f(a) \cdot \frac{h}{2} + f(a + \frac{h}{2}) \cdot \frac{h}{2} + f(a + 2\frac{h}{2}) \cdot \frac{h}{2} + \dots + \frac{1}{2} \cdot f(b) \cdot \frac{h}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot T(h) + \underbrace{f(a + \frac{h}{2}) \cdot \frac{h}{2} + f(a + \frac{3h}{2}) \cdot \frac{h}{2} + \dots + f(a + \frac{(2n-1)h}{2}) \cdot \frac{h}{2}}_{:= \frac{1}{2} M(h)} \end{aligned}$$



**Folgerung:**

$$T\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2} (T(h) + M(h))$$

Diese Formel kann man bei numerischen Berechnungen zur Effizienzsteigerung einsetzen.

### 5.6.3 Polynommethode — Méthode de polynômes

**Geg.:** Situation wie oben bei der Rechteck- und Trapezmethode.

**Idee:** Lege durch die Stützpunkte eine Polynomkurve (Interpolationspolynom) und berechne den Flächeninhalt unter der Polynomkurve.

**Problem:** Das Interpolationspolynom vom Grade  $n$  zeigt oft an den Intervallenden ein unerwünschtes Oszillieren.

**Trick:** Man kann das Oszillieren mindern indem man durch die Einführung neuer Punkte ausserhalb des Intervalls Polynome höheren Grades erzeugt und so das Oszillieren nach aussen treibt. Man kann z.B. dazu die inneren Punkte am jeweils äussersten Punkt spiegeln.

### 5.6.4 Simpsonmethode — Méthode de Simpson

**Geg.:** Messpunktkurve,  $n+1$  Messpunkte (äquidistante  $x$ -Werte) oder  $n+1$  gewählte Stützpunkte auf einem Graphen. Wähle  $n = 2m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Bilde damit  $m = \frac{n}{2}$  Paare benachbarter Intervalle.  $\leadsto$  Flächeninhalte  $F_1, F_2, \dots, F_m$ .  $F_i$  entsteht, wenn die Kurve (Graph) über zwei Teilintervallen durch einen Parabelbogen ersetzt wird.

$\leadsto$  Parabelbogen zu  $F_i$ :  $p_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$

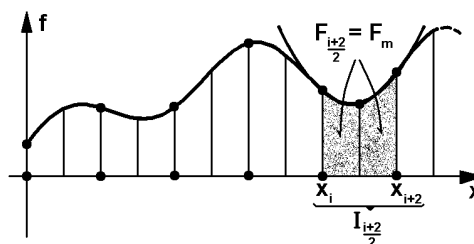
Betrachte:

$$A := F_m = F_{\frac{i+2}{2}},$$

$$I := I_{\frac{i+1}{2}} = [x_i, x_{i+2} = x_{i+2h}], \quad x_{i+1} \in I$$

$$p(x) = a x^2 + b x + c := p_{\frac{i+1}{2}}(x)$$

$$\Rightarrow A = \int_{x_i}^{x_{i+2}} p(x) dx$$



$$\begin{aligned}
\leadsto A &= \int_{x_i}^{x_i+2h} (ax^2 + bx + c) dx = \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx \Big|_{x_i}^{x_i+2h} \\
&= \frac{1}{3}a((x_i+2h)^3 - x_i^3) + \frac{1}{2}b((x_i+2h)^2 - x_i^2) + c((x_i+2h) - x_i) \\
&= \frac{1}{3}a(3 \cdot 2 \cdot x_i^2 h + 3 \cdot 4x_i h^2 + 8h^3) + \frac{1}{2}b(2 \cdot 2x_i h + 4h^2) + c \cdot 2 \cdot h \\
&= h(a(2x_i^2 + 4x_i h + \frac{8}{3}h^2) + 2b(x_i + h) + 2c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Verwende: } y_{i+2} &= p(x_i + 2h) = a(x_i^2 + 4x_i h + 4h^2) + b(x_i + 2h) + c \\
y_{i+1} &= p(x_i + h) = a(x_i^2 + 2x_i h + h^2) + b(x_i + h) + c \\
y_i &= p(x_i) = ax_i^2 + bx_i + c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\leadsto \frac{h}{3}(y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2}) &= \frac{h}{3}(a(6x_i^2 + 12x_i h + 8h^2) + b(6x_i + 6h) + 6c) \\
\Rightarrow \frac{h}{3}(y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2}) &= h(a(2x_i^2 + 4x_i h + \frac{8}{3}h^2) + 2b(x_i + h) + 2c) = A = F_{\frac{i+2}{2}}
\end{aligned}$$

Diesen Flächeninhalt unter dem Parabelbogen verwenden wir jetzt als Näherung.  $\leadsto$

**Formel:**

$$F_{total} \approx \sum_{m=\frac{i+2}{2}=1}^{\frac{n}{2}} F_{\frac{i+2}{2}} = \sum_{m=1}^{\frac{n}{2}} F_m = h \cdot \sum_{m=\frac{i+2}{2}=1}^{\frac{n}{2}} \frac{y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2}}{3}$$

### 5.6.5 Der Rombergalgorithmus — L’algorithme de Romberg

Der Rombergalgorithmus beruht auf dem Trapezverfahren:

$$\text{Sei } I = [a, b], \quad h := \frac{b-a}{n}, \quad Ts_0 := f(a) + f(b), \quad Ts_1 := \sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh), \quad T(h) := \frac{h}{2} \cdot (Ts_0 + 2Ts_1)$$

$$\begin{aligned}
\text{Setze: } T_{0,0} &:= T(h), \\
T_{j,0} &:= T(\frac{h}{2^j}) = \frac{1}{2}T_{j-1,0} + \frac{h}{2^j} \sum_{0 < k=2^{m+1} < 2^j} f(a + k\frac{h}{2^j}) \quad (j = 1, 2, 3 \dots) \\
T_{j,s} &:= T_{j,s-1} + \frac{T_{j,s-1} - T_{j-1,s-1}}{4^s - 1} \quad (s = 1, 2, 3 \dots, \min(j, m)) \\
&\text{Benutze Matrixschema, } j = \text{Zeilenzahl, } s = \text{Spaltenzahl.}
\end{aligned}$$

$$\textbf{Satz:} \quad \forall_s \lim_{j \rightarrow \infty} T_{j,s} = \int_{x_0=a}^{x_n=b} f(x) dx$$

(Exakter Beweis vgl. Lit..)

**Fehlerabschätzung:**

$$\text{Sei } \xi_{j,s} \in I = [a, b], \quad f \in D^{(2s+2)}(I)$$

$B_n := n$ -te **Bernoulli-Zahl**, rekursiv definiert wie folgt:

$$B_0 = 1, \quad 0 = \sum_{\nu=1}^{n-1} \binom{n}{\nu} B_\nu, \quad \nu \geq 2$$



**Formel:**

$$\int_{x_0=a}^{x_n=b} f(x) dx - T_{j,s} = (-1)^{j+s} \cdot \frac{B_{2s+2}}{(2s+2)!} \frac{h^{2s+1}}{2^{(s+1)(2j-s)}} f^{(2s+2)}(\xi_{j,s})$$

**Bemerkung:**

Als Spezialfall erscheint hier die **Keplersche Fassregel**:

**Formel:** 
$$\int_{x_0=a}^{x_n=b} f(x) dx \approx T_{1,1} = \frac{b-a}{6} \cdot (f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$$

**Beweis:**

Vgl. Lit..

### 5.6.6 Die Integrationsformel von Gauss — La formule d'intégration de Gauss

Wir definieren die **Legendre-Polynome** durch die folgende Rekursionsformel:

$$P_0(x) = 1, \quad P_m(x) = \frac{1}{2^m \cdot m!} \cdot \frac{d^m (x^2 - 1)^m}{dx^m}$$

Seien  $x_1, \dots, x_n$  die  $n$  Nullstellen des Legendre-Polynoms vom Grade  $n$ .

**Formel:** 
$$\exists_{\xi \in [a,b]} : \int_{x_0=a}^{x_n=b} f(x) dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n w_i \cdot f\left(\frac{a+b+(b-a) \cdot x_i}{2}\right) + R_n,$$

$R_n := c_n \cdot (b-a)^{2n+1} \cdot f^{(2n)}(\xi)$   
 $w_i, c_i$  vgl. Lit., z.B. Formeln und Tafeln der DMK

**Beweis:**

Vgl. Lit..



# Kapitel • Chapitre 6

## Reihen — Séries

### 6.1 Zahlenfolgen — Suites de nombres

#### 6.1.1 Bekannte Begriffe — Notions connues

Wir wollen uns die bereits behandelten nachstehenden Begriffe in Erinnerung rufen, damit wir darauf aufbauen können:

**Folgen** sind spezielle Funktionen mit dem Definitionsbereich  $\mathbb{N}$  (vgl. Seiten 7, 15).

Zugehörige Begriffe: **Allgemeines Glied** (Seite 15), **Teilfolgen** (Seite 39).

Bei Teilfolgen gibt es zu  $f : n \mapsto a_n$  eine injektive und ordnungstreu Indexfunktion  $g : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$  auf  $\mathbb{N}$  mit  $g : m \mapsto n = g(m)$ .

$$\leadsto \{(g(m)/a_{g(m)})\} \subset \{(n, a_n)\}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{m \mapsto n=g(m)} & \mathbb{N} & & \xrightarrow{n \mapsto a_n} & \mathbb{R}, \mathbb{C} \\ \downarrow & & & & & \uparrow \\ & \xrightarrow{\quad} & \xrightarrow{m \mapsto b_m} & \xrightarrow{\quad} & & \end{array}$$

Folgen können **monoton wachsend**, **streng monoton wachsend**, **monoton fallend**, **streng monoton fallend**, **beschränkt**, **nach oben beschränkt**, **nach unten beschränkt** sein (vgl. Seiten 43, 43).

**Beispiele:**

$$\langle a_n \rangle \text{ monoton wachsend} \Leftrightarrow \forall_n a_{n+1} \geq a_n$$

$$\langle a_n \rangle \text{ streng monoton wachsend} \Leftrightarrow \forall_n a_{n+1} > a_n$$

$$\langle a_n \rangle \text{ nach oben beschränkt} \Leftrightarrow \exists_{M \in \mathbb{R}^+} \forall_n a_n \leq M$$

$$\langle a_n \rangle \text{ beschränkt} \Leftrightarrow \exists_{M \in \mathbb{R}^+} \forall_n |a_n| \leq M$$

#### 6.1.2 Spezielle Folgen — Suites spéciales

##### Polynomiale Folgen — Suites polynomiales

Die folgenden Begriffe sind selbsterklärend und brauchen nicht speziell définiert zu werden:

**Konstante Folge:**  $\forall_n a_n = c = \text{const.}$

**Lineare Folge:**  $\forall_n a_n = a \cdot n + b$

**Quadratische Folge:**  $\forall_n a_n = a \cdot n^2 + b n + c$

**Polynomiale Folge vom Grad  $n$ :**

$$\forall_n p_n = a_m \cdot n^m + a_{m-1} \cdot n^{m-1} + \dots + a_1 \cdot n + a_0$$

### Arithmetische Folgen — Suites arithmétiques

Lineare Folgen heissen auch **arithmetische Folgen**.

Es gilt:

$$[a_1, a_2, a_3, a_4 \dots] = [a \cdot 1 + b, a \cdot 2 + b, a \cdot 3 + b, a \cdot 4 + b \dots] = [a_1, a_1 + a, a_1 + 2a, a_1 + 3a \dots],$$

$$a_{n+1} - a_n = a := d \text{ (Differenz) } a_n = a_1 + (n - 1) d$$

Man definiert daher:

**Definition:**  $\langle a_n \rangle$  **arithmetisch**

$$\Leftrightarrow \exists_d \forall_n : a_{n+1} - a_n = d$$

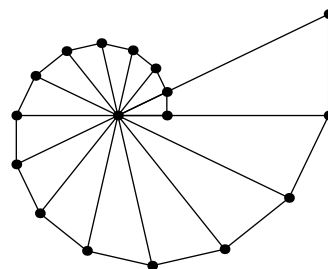
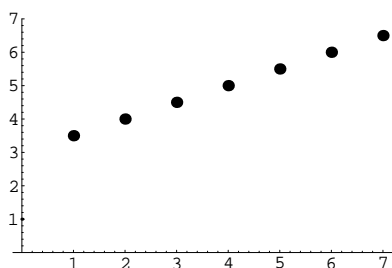
**Formel:**

**Vor.:**

$\langle a_n \rangle$  arithmetisch

**Beh.:**

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$$



### Geometrische Folgen — Suites géométriques

Geometrische Folgen haben wir schon auf Seite 40 getroffen.

Allgemein definiert man:

**Definition:**

$$\langle a_n \rangle \text{ geometrisch } \Leftrightarrow \exists_q \forall_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

( $q$ : Quotient .)

$$\leadsto a_{n+1} = q \cdot a_n, \quad a_n = q \cdot a_{n-1} \Rightarrow a_{n+1} \cdot a_{n-1} = a_n^2 \Rightarrow a_n = \pm \sqrt{a_{n+1} \cdot a_{n-1}}, \quad a_{n-1} = q \cdot a_{n-2} \Rightarrow \\ a_{n+1} = q^2 \cdot a_{n-1} = q^3 \cdot a_{n-2} = \dots = q^{(n-1)+1} \cdot a_{n-(n-1)} = q^n \cdot a_1 \Rightarrow a_n = q^{n-1} \cdot a_1$$

**Formel:****Vor.:** $\langle a_n \rangle$  geometrische**Beh.:**

$$a_n = q^{n-1} \cdot a_1, \quad a_n = \pm \sqrt{a_{n+1} \cdot a_{n-1}}$$

**p-Folgen — Suites "p"****p-Folgen** sind Potenzfolgen:

Man definiert:

**Definition:**

$$\langle a_n \rangle \text{ p-Folge} \Leftrightarrow \exists_p \forall_n : a_n = a_0 \cdot n^p$$

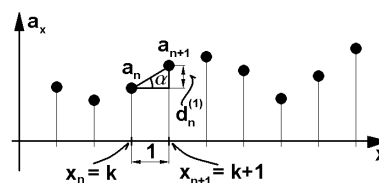
**Induktiv definierte Folgen — Suites définies par induction**Verankerung:  $a_1$  gegebenVererbung:  $a_{n+1} = \varphi(a_n)$ ( $\varphi$ : Vererbungsfunktion)

$$\text{Bsp.:} \quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \varphi(a_n) = a_n + n^2 \Rightarrow \langle a_n \rangle = [1, 2, 6, 15, 31, \dots]$$

**Differenzen- und Summenfolgen — Suites de différences et de sommes****Geg.:** Folge  $\langle a_n \rangle$ Für  $\Delta x = (n+1) - n = 1$  wird der Differenzenquotient:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a_{n+1} - a_n}{1} = a_{n+1} - a_n := d_n^{(1)}$$

Wir definieren daher:

**Definition:** $\langle d_n^{(1)} \rangle := \langle a_{n+1} - a_n \rangle$  heisst **1. Differenzenfolge** von  $\langle a_n \rangle$  $\langle d_n^{(2)} \rangle := \langle d_{n+1}^{(1)} - d_n^{(1)} \rangle$  heisst **2. Differenzenfolge** von  $\langle a_n \rangle$  $\langle d_n^{(k)} \rangle := \langle d_{n+1}^{(k-1)} - d_n^{(k-1)} \rangle$  heisst **k. Differenzenfolge** von  $\langle a_n \rangle$ 

Umgekehrt:

**Definition:**

$\langle s_n^{(1)} \rangle := \langle \sum_{k=1}^n a_k = \langle a_1 + a_2 + \dots + a_n \rangle \rangle$  heisst **1. Summenfolge** von  $\langle a_n \rangle$   
 $\langle s_n^{(2)} \rangle := \langle \sum_{k=1}^n s_k^{(1)} \rangle = \langle s_1^{(1)} + s_2^{(1)} + \dots + s_n^{(1)} \rangle$  heisst **2. Summenfolge** von  $\langle a_n \rangle$   
 $\langle s_n^{(m)} \rangle := \langle \sum_{k=1}^n s_k^{(m-1)} \rangle = \langle s_1^{(m-1)} + s_2^{(m-1)} + \dots + s_n^{(m-1)} \rangle$  heisst **m. Summenfolge** von  $\langle a_n \rangle$

Man sieht sofort:

$$\langle a_n \rangle = \langle a \cdot n + b \rangle \text{ (linear) } \Rightarrow a_{n+1} - a_n = (a \cdot (n+1) + b) - (a \cdot n + b) = a = \text{const.}$$

$$\langle a_n \rangle = c = \text{const. (konstant) } \Rightarrow s_n^{(1)} = c + c + \dots + c = n \cdot c \text{ (linear) }$$

$$\langle a_n \rangle = \langle a \cdot n^2 + b \cdot n + c \rangle \text{ (quadratisch) } \Rightarrow a_{n+1} - a_n = (a \cdot (n+1)^2 + b \cdot (n+1) + c) - (a \cdot n^2 + b \cdot n + c) = (a \cdot (n^2 + 2n + 1) + b \cdot (n+1) + c) - (a \cdot n^2 + b \cdot n + c) = 2na + a + b \text{ (linear) }$$

$$\langle a_n \rangle = \langle a \cdot n + b \rangle \text{ (linear) } \Rightarrow s_n^{(1)} = a \cdot 1 + a \cdot 2 + b + a \cdot 3 + b + \dots + a \cdot n + b = a \cdot (1 + 2 + \dots + n) + n \cdot b = a \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n \cdot b = \frac{a \cdot n^2 + (a+2b) \cdot n}{2} \text{ (quadratisch) }$$

Allgemein können wir vermuten, dass Partialsummenbildung und Differenzenfolgenbildung in irgend einer Art zueinander inverse Operationen sind.

Seien  $\langle s_n^{(1)} \rangle = \langle b_n \rangle$  Partialsummenfolge von  $\langle a_n \rangle$

$$\leadsto \text{Differenzenfolge von } \langle b_n \rangle: d_{b,n}^{(1)} = b_{n+1} - b_n = s_{n+1}^{(1)} - s_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^n a_k = a_{n+1} \leadsto \text{Ursprüngliche Folge mit verschobenem Index}$$

Umgekehrt berechnen wir die Summenfolge der Differenzenfolge:

**Geg.:**

$$\begin{aligned} \langle a_n \rangle &\leadsto d_n^{(1)} = a_{n+1} - a_n, \quad d_1^{(1)} = a_2 - a_1, \quad d_2^{(1)} = a_3 - a_2, \quad d_3^{(1)} = a_4 - a_3, \quad \dots \\ \Rightarrow s_{d,n}^{(1)} &= \sum_{k=1}^n d_k^{(1)} = d_1^{(1)} + d_2^{(1)} + \dots + d_n^{(1)} = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \dots + \\ &+ (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1 \Rightarrow \langle s_{d,n}^{(1)} \rangle = \langle a_{n+1} - a_1 \rangle \\ &\leadsto \text{Um } a_1 \text{ verschobene ursprüngliche Folge mit verschobenem Index} \end{aligned}$$

Weiter vermuten wir, dass die Differenzenfolge einer polynomialen Folge  $n$ -ten Grades eine solche vom Grad  $n - 1$  ist.

$$\begin{aligned} p_n &= a_m \cdot n^m + a_{m-1} \cdot n^{m-1} + \dots + a_1 \cdot n + a_0 \Rightarrow p_{n+1} - p_n = \\ &= (a_m \cdot (n+1)^m + a_{m-1} \cdot (n+1)^{m-1} + \dots + a_1 \cdot (n+1) + a_0) - (a_m \cdot n^m + a_{m-1} \cdot n^{m-1} + \dots + a_1 \cdot n + a_0) \\ &= a_m \cdot ((n+1)^m - n^m) + a_{m-1} \cdot ((n+1)^{m-1} - n^{m-1}) + \dots + a_1 \cdot ((n+1) - n) + a_0 - a_0 \\ &= a_m \cdot (n^m - \binom{m}{1} n^{m-1} + \binom{m}{2} n^{m-2} + \dots + n^0 - n^m) + a_{m-1} \cdot (n^{m-1} - \binom{m-1}{1} n^{m-2} + \binom{m-1}{2} n^{m-3} + \dots \\ &+ n^0 - n^{m-1}) + \dots + a_1 = a_m \cdot \binom{m}{1} n^{m-1} + (\dots \cdot n^{m-2}) + \dots + a_1 \leadsto \text{Grad} = m - 1 \end{aligned}$$

**Satz:** Die Differenzenfolge einer polynomialen Folge vom Grad  $n$  hat den Grad  $n - 1$   
 Die Differenzenfolge der Summenfolge von  $\langle a_n \rangle$  ist  $\langle a_{n+1} \rangle$   
 Die Summenfolge der Differenzenfolge von  $\langle a_n \rangle$  ist  $\langle a_{n+1} - a_1 \rangle$

Dieser Satz ermöglicht uns die Berechnung erstaunlicher Summenfolgen:

**Bsp.:**  $s_n^1 = \sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 = ? \leadsto$  Summenfolge einer quadratischen Folge muss Grad 3 haben!

$$\leadsto s_n^1 = a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + c \cdot n + d$$

Dazu ist:  $d_{s,n} = s_{n+1}^1 - s_n^1 = a_{n+1} \Rightarrow a_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 =$   
 $(a \cdot (n+1)^3 + b \cdot (n+1)^2 + c \cdot (n+1) + d) - a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + c \cdot n + d = 3an^2 + (2b+3a)n + a+b+c$   
 $\Rightarrow 3a = 1, 3a+2b = 2, a+b+c = 1$  (Koeffizientenvergleich).

$$\leadsto a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{6}, d = ?$$

$$s_1^1 = \sum_{k=1}^1 k^2 = 1 = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + d \Rightarrow d = 0 \Rightarrow s_n^1 = \frac{1}{3} \cdot n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} \cdot n$$

**Formel:** 
$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3} \cdot n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} \cdot n$$

**Bsp.:** 
$$\sum_{k=1}^{50} k^2 = \frac{1}{3} \cdot 50^3 + \frac{1}{2} 50^2 + \frac{1}{6} \cdot 50 = 42925 \text{ u.s.w.}$$

Es ist dem Leser überlassen, auf diese Weise eine Formel zu finden für:  $\sum_{k=1}^n k^3, \sum_{k=1}^n k^4$  u.s.w.

### 6.1.3 Konvergenzprobleme — Problèmes de convergence

#### Die Problematik — La problématique

Euler<sup>13</sup> hat zur Berechnung der Quadratwurzel den folgenden Algorithmus gefunden:

$$\sqrt{k} = ? \text{ Sei } k > 0, x := \sqrt{k}$$

$$\Rightarrow x^2 = k, 2x^2 = x^2 + x^2 = k + x^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2x}(x^2 + k) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{k}{x}\right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{k}{x}\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{k}{\frac{1}{2}\left(x + \frac{k}{x}\right)}\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{k}{\frac{1}{2}\left(x + \frac{k}{\frac{1}{2}\left(x + \frac{k}{x}\right)}\right)}\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{k}{\frac{1}{2}\left(x + \frac{k}{\frac{1}{2}\left(x + \frac{k}{\ddots}\right)}\right)}\right)$$

$$\leadsto \text{Versuche Iteration: } x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{k}{x_n}\right)$$

Im Falle der Konvergenz muss dann gelten:

$$x = x_\infty = \frac{1}{2}\left(x_\infty + \frac{k}{x_\infty}\right)$$

$$\Rightarrow \dots x_\infty = \sqrt{k} \text{ (Rechnung von oben rückwärts.)}$$

**Problem:** Konvergiert die Folge  $\langle x_n \rangle$ ? Jede Rechnung mit einer Maschine muss einmal abbrechen. Damit kann man keine Konvergenz beweisen.

---

<sup>13</sup>1707 – 1783

## Begriffe — Notions

Nachfolgend spielen schon früher definierte Begriffe eine Rolle:

Wir erwähnen sie kurz:

**Nullfolge** (vgl. Seite 35, für ein beliebiges  $\varepsilon > 0$  liegen fast alle Folgenglieder  $a_n$  in einer Epsilon-Umgebung von 0, nur endlich viele nicht.)

**Grenzwert** (vgl. Seite 37)

**Konvergenz** (vgl. Seite 37)

**Häufungspunkt** ( *HP*, vgl. Seite 38)

Grenzwertfreie Konvergenzdefinition (**Kriterium von Cauchy**)(vgl. Seite 38) .

Falls der Leser Lücken entdeckt, ist eine Repetition empfohlen!

## Sätze über Grenzwerte — Théorèmes sur les valeurs limites

Wir wollen uns rasch noch einige wichtige Grenzwertsätze in Erinnerung rufen.

- ⊙ Jede Folge besitzt mindestens einen *HP*, der auch  $\pm\infty$  sein kann. (vgl. Seite 38).
- ⊙ Konvergenz einer Folge  $\langle a_n \rangle$  bedeutet, dass der Grenzwert eindeutig ist.  
(Sonst gäbe es mindestens zwei *HP*, dazwischen eine Distanz  $d > 0$ , was dem Kriterium von Cauchy widerspricht. )
- ⊙  $a_n \rightarrow a \neq \pm\infty \Rightarrow \langle |a_n| \rangle$  beschränkt.  
(Sonst wäre  $\infty$  *HP* von  $\langle |a_n| \rangle$ ,  $a_n$  ist immer definiert. )
- ⊙  $a_n \rightarrow a \Rightarrow \langle b_n \rangle \rightarrow a$  für jede Teilfolge  $\langle b_n \rangle$   
(Denn der Grenzwert ist eindeutig .)
- ⊙  $\langle a_n \rangle$  monoton und beschränkt  $\Rightarrow \langle a_n \rangle$  konvergent . (vgl. Seite 43)
- ⊙ Was das Rechnen mit Grenzwerten betrifft, sei auf Seite 43 verwiesen.

## 6.2 Reihen, Zahlenreihen — Séries, séries de nombres

### 6.2.1 Gegenstand, Motivation — Sujet, motivation

Wir betrachten eine Folge  $\langle a_n \rangle$ .

**Definition:**

Ein Glied  $s_n$  der Partialsummenfolge  $\langle s_n \rangle = \sum_{k=1}^n a_k$  heisst **endliche Reihe**.

Der formale Ausdruck  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty}$  heisst unendliche Reihe oder kurz **Reihe**, die aufsummierten Glieder der Folge  $\langle a_n \rangle$  heissen **Reihenglieder**.

Falls der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  existiert, so heisst die Reihe **konvergent**.  
Andernfalls heisst sie **divergent**.

Dass eine Reihe konvergiert bedeutet also, dass ihre Partialsummenfolge konvergiert. Man hat es demnach mit speziellen konvergenten Folgen zu tun.



**Schreibweise:**

$$s := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergiert} \Rightarrow s \in \mathcal{CONV}, \text{ divergiert} \Rightarrow s \in \mathcal{DIV}$$

Falls die Reihenglieder nicht Zahlen, sondern Funktionen sind, hat man es mit **Funktionenreihen** zu tun. Solche Reihen spielen in der Praxis bei der Approximation von transzendenten Funktionen (z.B.  $f(x) = e^x$ ) durch Polynome oder von periodischen Funktionen durch trigonometrische Ausdrücke eine grosse Rolle (vgl. Potenzreihen und Fourierreihen).

## 6.2.2 Spezielle Reihen — Séries spéciales

### 1. Beispiel:

Aus einer arithmetischen Folge erhalten wir durch Summation eine **arithmetische Reihe**:

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (a_1 + (k-1)d) = \sum_{k=1}^n a_1 + d \sum_{k=0}^{n-1} k = n a_1 + d \frac{(n-1)n}{2} \leadsto$$

**Formel:**

**Vor.:**

$\langle a_n \rangle$  arithmetische Folge

**Beh.:**

$$s_n = n a_1 + d \frac{(n-1)n}{2}$$

**Hinweis:**

**Geg.:** Arithmetische Folge  $a_k = a_1 + (k-1)d$

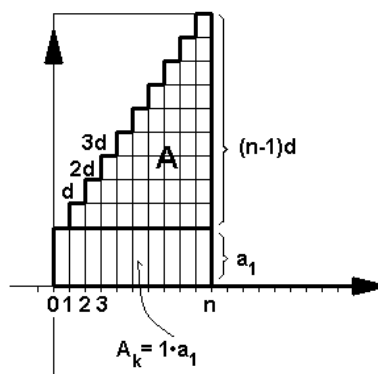
Summe:

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = ?$$

$$A = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 1 + \dots + a_n \cdot 1 = n \cdot a_1 + A_{1/2}$$

$$A_{tot} = n \cdot a_1 + n \cdot (n-1) \cdot d = n \cdot a_1 + 2 \cdot A_{1/2}$$

$$\Rightarrow A = n \cdot a_1 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot d}{2}$$



### 2. Beispiel:

Aus einer geometrischen Folge erhalten wir durch Summation eine **geometrischen Reihe**:

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n q^k = \sum_{k=1}^n q^{k-1} \cdot q = \sum_{k=1}^n (q^{k-1} \cdot a_1) = a_1 \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1})$$

Es gilt:  $(q \neq 1)$

$$(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) \cdot (1 - q) = (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) - (q + q^2 + q^3 + \dots + q^n) = 1 - q^n$$

$$\Rightarrow 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad q \neq 1$$

**Formel:****Vor.:** $\langle a_n \rangle = \langle q^n \rangle$  geometrischen Folge**Beh.:**

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

 $|q| < 1 \Rightarrow$  Reihe konvergent $|q| \geq 1 \Rightarrow$  Reihe divergent**Bemerkung:**

Arithmetische und geometrische Reihen spielen in der Finanzmathematik eine Rolle.

**3. Beispiel:****Numerische Reihe** (Dezimalbruch):

$$N_n = \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{10^k}$$

Da unendliche Dezimalbrüche eine reelle Zahl darstellen, ist damit zu rechnen, dass numerische Reihen konvergieren. Für den exakten Beweis müssen wir uns die theoretischen Grundlagen aber erst erarbeiten.

**4. Beispiel: Alternierende Reihe:**

$$A_n = \pm \sum_{k=1}^n (-1)^k |a_k|$$

 $\leadsto$  **Problem:** Konvergenz?**5. Beispiel: p-Reihe:**

$$P_n = a_1 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p}, \quad p \in \mathbb{Z}$$

 $\leadsto$  **Problem:** Konvergenz? (S. p. 46)**6. Beispiel: Harmonische Reihe:**

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

 $\leadsto$  **Problem:** Konvergenz?

**Konsequenz:** Um die Konvergenz beurteilen zu können, müssen wir uns erst **Konvergenzkriterien** erarbeiten.

### 6.2.3 Konvergenzkriterien — Critères de convergence

#### Nullfolgekriterium — Critères de suite convergeant vers zéro

**Satz:** **Vor.:**  $\sum_{k=1}^n a_k \in \mathcal{CONV}$

**Beh.:**

$\langle a_n \rangle$  Nullfolge ( NF)

Idee zum Beweis: Falls  $\langle a_n \rangle$  keine Nullfolge wäre, müssten die Werte von  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$  mit  $n$  ständig wesentlich ändern, was bei einer Konvergenz nicht sein kann.

**Achtung:** Die Umkehrung (Konversion) des Nullfolgenkriteriums gilt nicht!

Das sieht man z.B. an der harmonischen Reihe  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . Später werden wir beweisen, dass diese Reihe divergiert. Trotzdem bildet die Folge der Glieder  $\langle a_n \rangle = \frac{1}{k}$  eine Nullfolge.

#### Abänderung von Reihengliedern — Changement de termes d'une série

Wenn man bei einer konvergenten Reihe endlich viele Glieder verändert, so ändert man die Summe endlich viele Male um jedesmal einen Wert. Das ergibt dann einen neuen, wieder exakt definierten Wert oder Grenzwert der Reihe: Die Reihe bleibt konvergent. Genauso bei divergenten Reihen und bei Folgen. Das was das Konvergenzverhalten der Reihe wirklich bestimmt, ist somit ihr „Schwanz“ und nicht der Anfang. Weiter: Die Grenzwertsätze für Folgen gelten auch speziell für Summenfolgen oder Reihen. Falls z.B.  $s_n$  konvergiert, so konvergiert auch jede Teilfolge von  $s_n$  gegen denselben Grenzwert.

**Satz:** Verändert man endlich viele Glieder einer Folge oder Reihe, so ändert sich die Konvergenz nicht.

Die Grenzwertsätze für Folgen gelten auch speziell für Reihen. Z.B. konvergiert mit  $s_n$  auch jede Teilfolge von  $s_n$  gegen denselben Grenzwert.

#### Majorantenkriterium — Règle de comparaison

Die Begriffe **Majorante** (kurz: *Major* ) und **Minorante** (kurz: *Minor* ) haben wir schon auf Seite 39 getroffen.

Zur Erinnerung:  $\forall n > N_0 \quad |a_n| \leq c_n \rightsquigarrow \sum_{k=1}^{\infty} c_k \text{ Major zu } \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$   
und  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ Minor zu } \sum_{k=1}^{\infty} c_k$

**Satz:**

1. Jede nicht negative Minorante einer konvergenten Reihe ist absolut konvergent.
2. Jede Majorante einer divergenten Reihe mit nicht negativen Gliedern ist divergent.

Zum Beweis:

(1) Eine Majorante einer nicht negativen Reihe muss lauter Glieder  $\geq 0$  haben, die Majorante muss also monoton wachsen. Da sie konvergent ist, muss sie beschränkt sein. Somit muss auch die nicht negative Minorante beschränkt sein. Da diese keine negativen Glieder hat, muss sie monoton wachsen. Daraus folgt die Konvergenz.

(2) Offensichtlich wächst die Minorante hier über alle Grenzen. Dieses Verhalten überträgt sich auch auf die Majorante.

**Bsp.:**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{0.9^{n+1}}{n+1} \in \mathcal{CONV}$ , denn die konvergente geometrische Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} 0.9^n$  ist Majorante.

**Bemerkung:**

Mit Hilfe des Majorantenkriteriums lassen sich später weitere Kriterien gewinnen. (Quotientenkriterium (von d'Alembert<sup>14</sup>), Integralkriterium u.s.w.) .

**Konsequenz:**

$$\begin{aligned} \text{Sei } a_n &\in \{0, 1, 2, \dots, 8, 9\} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 9 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 9 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 9 \cdot \frac{9}{10} = 10 \Rightarrow \text{Major!} \end{aligned}$$

### Absolute Konvergenz — Convergence absolue

**Definition:**  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  heisst **absolut konvergent**  $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  konvergent.

**Schreibweise:**  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathcal{ABSCONV}$

**Satz:** **Vor.:**  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathcal{ABSCONV}$

**Beh.:**  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathcal{CONV}$

**Achtung:** Die Umkehrung (Konversion) gilt nicht! Das werden wir später z.B. wieder an der harmonischen Reihe  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  sehen.

Zum Beweis: Sei  $\langle s_{a,n} \rangle := \sum_{k=1}^n |a_k|$ ,  $\langle s_n \rangle := \sum_{k=1}^n a_k$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathcal{ABSCONV} \Rightarrow \langle s_{a,n} \rangle$  monoton wachsend ( $|a_k| \geq 0$ ) und beschränkt .

$\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| \Rightarrow \sum_{k=1}^n a_k$  beschränkt .

Wäre  $\langle s_n \rangle := \sum_{k=1}^n a_k \notin \mathcal{CONV}$ , so existierten mindestens 2 HP  $a$  und  $b$ ,  $a \neq b$ .

$\leadsto \exists$  Teilfolgen  $s_m, s_j, s_n \in U_\epsilon(a), s_j \in U_\epsilon(b)$ ,  
 $|s_{a,m} - s_{a,j}| > |s_m - s_j| > |a - b| - 2\epsilon > M > 0$  für  $\epsilon$  genügend klein .

Andererseits gilt wegen dem Cauchy-Kriterium infolge der absoluten Konvergenz:

---

<sup>14</sup>d'Alembert, 1717 – 1783

$$|s_{a,m} - s_{a,j}| \rightarrow 0 \Rightarrow \text{Widerspruch!}$$

**Bsp.:**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-0.9)^{n+1}}{n+1} \in \mathcal{ABSCONV} \text{ nach dem letzten Beispiel.}$$

**Leibnizkriterium — Critère de Leibniz**

Das Leibnizkriterium gilt für alternierende Reihen:

**Satz:****Vor.:**

$$s_n = \pm \sum_{k=1}^n (-1)^k |a_k|, \quad \langle |a_k| \rangle \text{ streng monoton fallende Nullfolge}$$

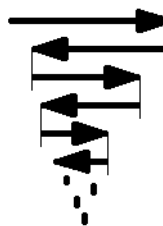
**Beh.:**

$$\langle s_n \rangle \in \mathcal{CONV}$$

Zum Beweis:

$$\text{Sei } |a_k| = a_k \geq 0,$$

$$s_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \dots \pm a_n$$

Programm: Zeige

- ⊙ (1.) Zeigen:  $\langle s_n \rangle$  beschränkt.
- ⊙ (2.) Zeigen:  $\langle s_{2n} \rangle$  streng monoton.
- $\rightsquigarrow$  1., 2.  $\Rightarrow \langle s_{2n} \rangle \in \mathcal{CONV}$ .
- ⊙ (3.) Zeigen:  $s_{2n+1} - s_{2n} \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n}$
- $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} \in \mathcal{Conv} \rightsquigarrow \text{☺}$

Die Beweisarbeit:

- ⊙ (2)  $\langle |a_k| \rangle$  streng mon. fallend
- $\Rightarrow s_{2n} = \underbrace{a_1 - a_2}_{b_1 > 0} + \underbrace{a_3 - a_4}_{b_2 > 0} + \dots = b_1 + b_2 + \dots > 0 \rightsquigarrow$  streng monoton wachsend
- ⊙ (1.)  $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1} > s_{2n} > 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ s_n > 0$
- $s_{2n+1} = a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{c_1 > 0} - \underbrace{(a_4 - a_5)}_{c_2 > 0} - \dots < a_1$
- $s_{2n+2} = s_{2n+1} - a_{2n+2} < s_{2n+1} < a_1$
- $s_{2n+1} < a_1, \ s_{2n+2} < a_1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ s_n < a_1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ 0 < s_n < a_1 \Rightarrow \langle s_n \rangle$  beschränkt
- ⊙ (3.)  $s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \rightarrow 0$  weil  $\langle a_n \rangle$  Nullfolge nach Voraussetzung

 $\rightsquigarrow \text{☺}$ 

$$\text{Bsp.: } \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots \in \mathcal{CONV}$$

### Quotientenkriterium — Critères de d'Alembert

**Satz:**

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q < 1 \quad \text{für } k \geq k_0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathcal{ABSCONV}$$

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \geq q > 1 \quad \text{für } k \geq k_0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathcal{DIV}$$

Zum Beweis:

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q \Rightarrow |a_{k+1}| \leq |a_k| q \Rightarrow |a_{k+2}| \leq |a_{k+1}| q \leq |a_k| q^2 \Rightarrow \dots \Rightarrow |a_{k+n}| \leq |a_k| q^n$$

$\Rightarrow$  geometrische Reihe ist Majorante .

Analog im Falle der Divergenz.

Für das spätere Studium der Potenzreihen ist folgendes Beispiel wichtig:

**Bsp.:**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^k}{k!} \stackrel{?}{\in} \mathcal{CONV}$  ?

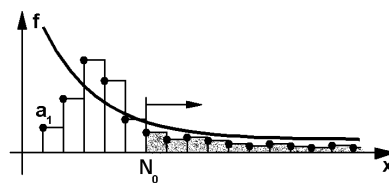
$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{c^{k+1}}{(k+1)!} \right| \cdot \left| \frac{k!}{c^k} \right| = \left| \frac{c^k}{(k!)} \right| \cdot \left| \frac{c}{(k+1)!} \right| \cdot \left| \frac{k!}{c^k} \right| = \left| \frac{c}{(k+1)} \right| \rightarrow 0 \Rightarrow \forall_{c \in \mathbb{R}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^k}{k!} \in \mathcal{CONV}$$

### Integralkriterium — Critère de l'intégrale

**Problem:**

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \stackrel{?}{\in} \mathcal{CONV}$$

Betrachte die Situation:



$$|a_k| \leq f(x) \quad \text{für } x \in [k, k+1), k \in \mathbb{N}, k \geq N_0, \quad \int_{N_0}^{\infty} f(x) dx \text{ ex. .}$$

$$\leadsto \sum_{k=1}^n |a_k| \text{ monoton wachsend}$$

$$\sum_{k=1}^n |a_k| = \sum_{k=1}^n |a_k| \cdot 1 \leq \sum_{k=1}^{N_0-1} 1 + \sum_{k=N_0}^n \int_k^{k+1} f(x) dx = \sum_{k=1}^{N_0-1} 1 + \int_{N_0}^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{N_0-1} 1 + \int_{N_0}^{\infty} f(x) dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ beschränkt} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathcal{ABSCONV} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathcal{CONV}$$

Analog:

$$|a_k| \geq f(x) \quad \text{für } x \in [k, k+1), k \in \mathbb{N}, k \geq N_0, \quad \int_{N_0}^{\infty} f(x) dx = \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \infty$$

**Satz:****Vor.:**

$$\begin{aligned} \exists_{f(x)} : |a_k| &\leq f(x) \quad \text{für } x \in [k, k+1), \\ k &\geq N_0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \int_{N_0}^{\infty} f(x) dx \text{ ex.} \quad . \end{aligned}$$

**Beh.:**

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathcal{ABSCONV}$$

**Vor.:**

$$\begin{aligned} \exists_{f(x)} : |a_k| &\geq f(x) \quad \text{für } x \in [k, k+1), \\ k &\geq N_0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \int_1^{\infty} f(x) dx = \infty \end{aligned}$$

**Beh.:**

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \infty$$

**1. Beispiel: p-Reihen**

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^p} &= (k^{-p})|_{p \geq 1} \leq (x-1)^{-p} \quad \text{für } x \in [k, k+1), \quad k \geq 2, \quad \int_2^{\infty} (x-1)^{-p} dx = \int_1^{\infty} (x)^{-p} dx \\ &= \frac{1}{-p+1} (x)^{-p+1}|_1^{\infty} = \frac{1}{(1-p)x^{p-1}}|_1^{\infty} = \frac{1}{(1-p)(\infty)^{p-1}} - \frac{1}{(1-p)(1)^{p-1}} = \frac{1}{p-1}|_{p \geq 1} \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \in \mathcal{ABSCONV} \quad \text{für } p \geq 1 \end{aligned}$$

**Korollar:****Vor.:**

$$p > 1$$

**Beh.:**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \in \mathcal{ABSCONV}$$

**2. Beispiel: Harmonische Reihe**

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^p} &= \left(\frac{1}{k}\right)^p \geq \left(\frac{1}{k}\right)|_{0 < p \leq 1} \geq \frac{1}{x} \quad \text{für } x \in [k, k+1), \quad k \geq 1, \\ \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx &= \ln(x)|_1^{\infty} = \ln(\infty) - \ln(1) = \ln(\infty) = \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}|_{0 < p \leq 1} = \infty \end{aligned}$$

$$\text{Spezialfall: } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

↪ Die harmonische Reihe ist divergent!

**Korollar:****Vor.:**

$$0 < p \leq 1$$

**Beh.:**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \in \mathcal{D}\mathcal{I}\mathcal{V}$$

Speziell: Die harmonische Reihe ist divergent!

**Bemerkung:**

$$p = \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < p \leq 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \in \mathcal{D}\mathcal{I}\mathcal{V}$$

**3. Beispiel:** Sei  $a_k \cdot k^p \rightarrow c \in \mathbb{R} \Rightarrow c - \varepsilon \leq a_k \cdot k^p \leq c + \varepsilon$ 

$$\Rightarrow \frac{c - \varepsilon}{k^p} \leq a_k \leq \frac{c + \varepsilon}{k^p} \Rightarrow (c - \varepsilon) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq (c + \varepsilon) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

Wegen den Korollaren gilt daher

$$p > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{N}\mathcal{V}, \quad p \in (0, 1] \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathcal{D}\mathcal{I}\mathcal{V}$$

**Korollar:****Vor.:**

$$a_k \cdot k^p \rightarrow c \in \mathbb{R}$$

**Beh.:**

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{N}\mathcal{V} \quad \text{für } p > 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathcal{D}\mathcal{I}\mathcal{V} \quad \text{für } p \in (0, 1]$$

**4. Beispiel:** Sei  $a_k = 2k^{-3} + 5k^{-3.5} - 6k^{-4.3}$ 

$$\Rightarrow k^3 \cdot a_k = 2k^0 + 5k^{-0.5} - 6k^{-1.3} = 2 + 5\frac{1}{k^{0.5}} - 6\frac{1}{k^{1.3}} \rightarrow 2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{N}\mathcal{V}$$

**Allgemeiner:** Seien

$$P_r(k) = b_r k^r + b_{r-1} k^{r-1} + \dots + b_1 k^1 + b_0 \rightsquigarrow \text{Polynom } p_{\text{grad}} = r$$

$$Q_s(k) = d_s k^s + d_{s-1} k^{s-1} + \dots + d_1 k^1 + d_0 \rightsquigarrow \text{Polynom } p_{\text{grad}} = s$$

**Problem:**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_r(k)}{Q_s(k)} \stackrel{?}{\in} \mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{N}\mathcal{V} ?$ 

$$\text{Sei } p > 1. \quad a_k \cdot k^p = k^p \cdot \frac{Q_s(k)}{Q_s(k)} = \frac{b_r k^{r+p} + b_{r-1} k^{r-1+p} + \dots + b_1 k^{1+p} + b_0 k^p}{d_s k^s + d_{s-1} k^{s-1} + \dots + d_1 k^1 + d_0} \rightarrow c$$

$$\text{für } r+1 < r+p \leq s \ (\rightsquigarrow \rightarrow \frac{b_r}{d_s} \text{ für } r+p = s, \rightarrow 0 \text{ für } r+1 < r+p < s)$$

$$\rightsquigarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_r k^{r+p} + b_{r-1} k^{r-1+p} + \dots + b_1 k^{1+p} + b_0 k^p}{d_s k^s + d_{s-1} k^{s-1} + \dots + d_1 k^1 + d_0} \in \mathcal{C}\mathcal{O}\mathcal{N}\mathcal{V} \quad \text{für } r+1 < s$$



**Korollar:** Vor.:  $r + 1 < s$

Beh.:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_r k^r + b_{r-1} k^{r-1} + \dots + b_1 k^1 + b_0}{d_s k^s + d_{s-1} k^{s-1} + \dots + d_1 k^1 + d_0} \in \mathcal{CONV}$$

**5. Beispiel:**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{18 k^6 - 11 k^5 + 7 k^4 + 9 k^3 + 10 k^1 + -14}{11 k^4 + 12 k^3 - 8 k^1 + 2} \notin \mathcal{CONV}$

**Wurzelkriterium<sup>15</sup> — Critères de Cauchy<sup>15</sup>**

**Satz:** Vor.:  $\sqrt[k]{|a_k|} \rightarrow b \in \mathbb{R}$

Beh.:

$$b < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \in \mathcal{CONV}$$

$$b > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \in \mathcal{DIV}$$

Zum Beweis:

Sei  $b < 1$ ,  $k \geq N_0 \Rightarrow \sqrt[k]{|a_k|} \leq b + \varepsilon < q < 1 \Rightarrow |a_k| < q^k \leadsto$  Konvergenz, denn eine konvergente geometrische Reihe ist Majorante .

Sei  $b > 1$ ,  $k \geq N_0 \Rightarrow \sqrt[k]{|a_k|} \leq b - \varepsilon > q > 1 \Rightarrow |a_k| > q^k \leadsto$  Divergenz, denn eine Divergente geometrische Reihe ist Minorante .

**1. Beispiel:**  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^2}{3k^2 - 2}\right)^k \in \mathcal{CONV}$ ,  $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{k^2}{3k^2 - 2} = \frac{1}{3 - \frac{2}{k^2}} \rightarrow \frac{1}{3} < 1$

**2. Beispiel:**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{k-1}} \in \mathcal{CONV}$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{k-1}} = + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+2}$

## 6.2.4 Arithmetik mit Reihen und bedingte Konvergenz — Arithmétique de séries et convergence conditionnée

**Bedingte Konvergenz — Convergence conditionnée**

**Definition:**  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  **bedingt konvergent**  
 $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathcal{CONV} \wedge \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \in \mathcal{DIV}$

<sup>15</sup>Cauchy, 1789 – 1857

<sup>16</sup>franz. emi-convergence ou convergence conditionnée

**Bsp.:**

$$\text{„Leibnizreihe“ } S := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad S_a := \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

 $\leadsto S \in \mathcal{CONV}$  nach dem Leibnizkriterium für alternierende Reihen

 $S = \ln(2)$  (Potenzreihen!)

 $S_a \in \mathcal{DIV}$  (harmonische Reihe)
**Bsp.:**

$$\text{„Leibnizreihe“ } S := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^k - 1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$$

 $\leadsto S \in \mathcal{CONV}$  nach dem Leibnizkriterium für alternierende Reihen

 $S = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$  ( $\pi$  berechnen, Potenzreihen!)

**Achtung:** Beim gedankenlosen Rechnen mit bedingt konvergenten Reihen können eklatante Widersprüche produziert werden!

$$\begin{aligned} \text{Bsp.: } S &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \dots = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} \dots \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots\right) = \frac{1}{2} S \Rightarrow S = \frac{1}{2} S \Rightarrow S = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Andererseits: } S = 1 - \underbrace{\frac{1}{2}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}}_{>0} + \dots \Rightarrow S > 0 \Rightarrow 0 > 0$$

 $\leadsto$  Widerspruch!

Wo liegt das Problem? Waren nicht alle ausgeführten Schritte richtig? Oder gilt etwa doch  $0 > 0$ ? — Eine genaue Analyse zeigt, dass doch ein Problem existiert: Wir haben hier Gesetze der Arithmetik auf unendliche Summen angewandt. Wir haben das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz unendlich oft gebraucht. Bewiesen resp. die Beweise angedeutet haben wir früher die Gesetze nur für endlich oft-malige Anwendungen!

**Konsequenz:** Die Gesetze der Arithmetik sind nur für endliche Terme bewiesen worden. Bei bedingt konvergenten unendlichen Reihen dürfen wir sie nicht mehr beliebig und bedenkenlos anwenden!

### 6.2.5 Rechnen mit Reihen — Calculer avec des séries

**Regeln:** (Umformung von Reihen)

1. Setzt man in einer konvergenten Reihe  $S$  irgendwie Klammern, so nennen wir die entstehende Reihe  $S_{(*)}$ . Dann konvergiert  $S_{(*)}$  gegen dieselbe Summe wie  $S$ .

Zum Beweis:

Konvergiert  $S$ , so konvergiert auch  $S_{(*)}$  nach dem Cauchy-Kriterium für konvergente Folgen.

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = S_n + R_n, \quad R_n \rightarrow 0$$

Analog:

$$S_{(*)} = S_{(),n} + R_{(),n}, \quad R_{(),n} \rightarrow 0 \Rightarrow S_n = S_{(),n} \rightarrow S, \quad S_n = S_{(),n} \rightarrow S_{(*)} \Rightarrow S = S_{(*)}$$

2. Eine Reihe, die man durch Setzen von Klammern aus einer divergenten Reihe mit positiven Gliedern erhält, divergiert.

Zum Beweis:

Divergiert  $S$  gegen  $\infty$ , so ist die Partialsummenfolge  $\langle S_n \rangle = \langle S_{(),n} \rangle$  unbeschränkt. Daher divergiert auch  $S_{(*)}$  gegen  $\infty$ .

3. Eine Reihe, die sich durch Setzen von Klammern aus einer divergenten Reihe mit gemischten Gliedern ergibt, kann konvergieren oder divergieren.

$$\begin{aligned} \text{Bsp.: } S &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{2k+1}{k} \Rightarrow \\ a_k &= (-1)^{k-1} \cdot \frac{2k+1}{k} = (-1)^{k-1} \left(2 + \frac{1}{k}\right) \rightarrow \pm 2 \leadsto 2 \text{ HP} \Rightarrow \text{Divergenz.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Klammern: } S &= \left(3 - \frac{5}{2}\right) + \left(\frac{7}{3} - \frac{9}{4}\right) + \dots + \left(\frac{4m-1}{2m-1} - \frac{4m+1}{2m}\right) + \dots, \\ \frac{4m-1}{2m-1} - \frac{4m+1}{2m} &= \frac{(4m-1)2m - (4m+1)(2m-1)}{(2m-1)(2m)} = \frac{1}{4m^2 - 2m} \\ 4m^2 > 4m^2 - 2m &\geq 4m^2 - 2m^2 = 2m^2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{4m^2} < \frac{1}{4m^2 - 2m} < \frac{1}{2m^2} \\ &\leadsto \text{Positive Klammern, Reihe beschränkt durch konvergente Majorante (p-Reihe, } p=2) \\ S &\in \mathcal{CONV} \end{aligned}$$

4. **Geg.:** Absolut konvergente Reihe  $S$ . Daraus erhalte man eine neue Reihe  $S^*$  durch beliebige Umordnung der Glieder (ev. unendlich oft Kommutativgesetz anwenden).

**Beh.:**

$S^*$  konvergiert absolut gegen  $S$ .

Anschaulich zum Beweis:

Absolute Konvergenz: Man stelle sich einen Kartonstapel, bestehend aus unendlich vielen Scheiben der jeweiligen positiven Höhe  $|a_k|$  vor, dessen Gesamthöhe  $S$  beträgt. Man kann diesen Stapel beliebig neu ordnen, indem man in irgend einer Reihenfolge Scheiben herauszieht und zu einem neuen Stapel aufschichtet. Der neue Stapel kann so nicht höher werden, denn er ist während dem Umordnungsvorgang tiefer als der alte. Ordnet man dann den neuen wieder zum alten um, so gilt das gleiche Argument. Daher müssen beide Stapel gleich hoch sein.

Zur gewöhnlichen Konvergenz: Man färbe die „negativen Scheiben“ grün, die positiven rot. Bei der absoluten Konvergenz ist die Gesamthöhe der grünen und roten endlich, bei der gewöhnlichen Konvergenz hat man vermutlich die Höhe der roten minus die der grünen. Die Stapelhöhe messen wir in einem Koordinatensystem, dessen Ursprung z.B. auf einer Tischoberfläche liegt, wobei die grünen für sich nach unten zu liegen kommen (unter die Tischoberfläche). Wenn wir nun den Ursprung verschieben auf das untere Niveau des grünen Stapels für sich, so haben wir bezüglich Umordnung die Situation wie bei der absoluten Konvergenz.

5. Man kann die Glieder einer bedingt konvergenten Reihe so umordnen, dass eine divergente oder eine konvergente Reihe mit beliebiger Summe entsteht.

Dass solche „unglaublichen“ Dinge passieren können, haben wir oben bei der Umordnung der Leibnizreihe gesehen.

**Regeln:**

(Für Addition, Subtraktion und Multiplikation von Reihen. )

Seien  $A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ,  $B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

Damit lassen sich neue Reihen bilden:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} u_k &= \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k), \quad \sum_{k=1}^{\infty} v_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k), \\ \sum_{k=1}^{\infty} w_k &= (a_1 b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \dots \end{aligned}$$

$$1. \quad A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathcal{CONV}, \quad B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \in \mathcal{CONV} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = A \pm B \in \mathcal{CONV}$$

Zum Beweis:

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{CONV} &\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = S_{a,n} + R_{a,n}, \quad R_{a,n} \rightarrow 0 \\ B \in \mathcal{CONV} &\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^n b_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k = S_{b,n} + R_{b,n}, \quad R_{b,n} \rightarrow 0 \Rightarrow \\ A \pm B &= S_{a,n} + R_{a,n} \pm (S_{b,n} + R_{b,n}) = \sum_{k=1}^n a_k \pm \sum_{k=1}^n b_k + R_{a,n} \pm R_{b,n} = \sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k) + R_{a,n} \pm R_{b,n} \\ &\text{mit } (R_{a,n} \pm R_{b,n}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad A &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathcal{ABSCONV}, \quad B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \in \mathcal{ABSCONV} \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = A \pm B \in \mathcal{ABSCONV} \end{aligned}$$

Zum Beweis:

Man wähle in der letzten Regel alle Terme positiv.

$$\begin{aligned} 3. \quad A &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathcal{ABSCONV}, \quad B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \in \mathcal{ABSCONV} \Rightarrow \\ \sum_{k=1}^{\infty} w_k &= (a_1 b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \dots = A \cdot B \in \mathcal{ABSCONV} \end{aligned}$$

Anschaulich zum Beweis:

Man stelle sich  $A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$  als endliche Länge vor, die in unendlich viele positive Teillängen  $a_k$  unterteilt ist.  $A \cdot B$  kann als endlichen Flächeninhalt eines Rechtecks gedeutet werden, das aus unendlich vielen Teilrechtecken besteht mit dem Inhalt  $a_i \cdot b_j$ . Summiert man diese auf, so erhält man den gesamten Flächeninhalt. Dabei kann man die Reihenfolge der  $w_k$  wählen.

$$4. A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathcal{ABSCONV}, B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \in \mathcal{CONV}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} w_k = (a_1 b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \dots = A \cdot B \in \mathcal{CONV}$$

Hinweis zum Beweis:

$$S_n = \sum_{k=1}^n w_k = (a_1 b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \dots + (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1) =$$

$$a_1 (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n) + a_2 (b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}) + \dots + a_n (b_1)$$

Die Glieder von  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  werden somit mit Partialsummen von  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  multipliziert.

Sei  $Max_{B,part}$  = Maximum der Partialsummen von  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  (ex. wegen Konvergenz),

$Min_{B,part}$  = entspr. Minimum

$$\leadsto Min_{B,part} \cdot A \leq Min_{B,part} \cdot \sum_{k=1}^n a_k \leq S_n \leq Max_{B,part} \cdot \sum_{k=1}^n a_k \leq Max_{B,part} \cdot A$$

$$\leadsto S_n \text{ beschränkt}$$

Die Konvergenz kann man sehen, wenn man im Rechteck  $(A \cdot B)$  die Restfläche geschickt aufteilt in einen Teil, dessen Inhalt mit  $R_{A,n} = A - \sum_{k=1}^n a_k$  gegen 0 geht und einen Teil, wo der Inhalt entsprechend mit  $R_{B,n}$  gegen 0 geht.

$$5. A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathcal{CONV}, B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \in \mathcal{CONV} \Rightarrow \left( \sum_{k=1}^{\infty} w_k \in \mathcal{CONV} \vee \sum_{k=1}^{\infty} w_k \in \mathcal{DIV} \right)$$

Diese Aussage ist eine Tautologie.

## 6.2.6 Interessante Beispiele — Exemples intéressants

### 1. Beispiel: Eine Teleskopreihe:

Man benutze Partialbruchzerlegung!

$$S = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1) \cdot (2m+1)} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m+1} \right) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \dots \right) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

### 2. Beispiel: Die Eulersche Konstante $C$ :

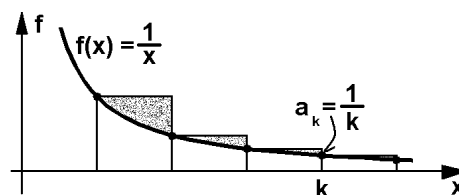
**Definition:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) := C$  heisst **Eulersche Konstante**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \in \mathcal{DIV}$$

Jedoch:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) = C \simeq 0.577215665$$

$$\ln(n) = \ln(x) \Big|_{x_0}^{x=n} = \int_{x_0}^n \frac{1}{x} dx$$



$$\leadsto \frac{1}{2} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \cdot 1 - \int_{x_0}^{x=n} \frac{1}{x} dx < 1 \text{ (Flächeninhalt vgl. Skizze )}$$

**Konsequenz:** Die harmonische Reihe divergiert gleich stark wie der  $\ln$ .

### 6.2.7 Weitere Kriterien — D’autres critères

Im Quotientenkriterium ist für den Fall  $|q| = 1$  nichts ausgesagt. In diese Lücke springen zwei Kriterien, die hier ohne Beweis aufgeführt sind:

Gegeben sei:  $\sum_{k=1}^n a_k$

**Satz:**

**Kriterium von Raabe**

**Vor.:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(1 - \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) = k$$

**Beh.:**

$$\begin{aligned} k > 1 &\Rightarrow \sum_{k=1}^n a_k \in \mathcal{ABSCONV} \\ k < 1 &\Rightarrow \sum_{k=1}^n a_k \in \mathcal{DIV} \text{ oder konvergiert bedingt} \end{aligned}$$

**Satz:**

**Kriterium von Gauss**<sup>17</sup>

**Vor.:**

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{k}{n} + \frac{c_n}{n^2}\right) \wedge (\exists_{k_1} \forall_{n > N_0} : |c_n| < k_1)$$

**Beh.:**

$$\begin{aligned} k > 1 &\Rightarrow \sum_{k=1}^n a_k \in \mathcal{ABSCONV} \\ k \leq 1 &\Rightarrow \sum_{k=1}^n a_k \in \mathcal{DIV} \text{ oder konvergiert bedingt} \end{aligned}$$

**Bemerkung:**

Beim Gauss-Kriterium ist die Trennung für  $k = 1$  scharf.

---

<sup>17</sup>Gauss, 1777 – 1855

## 6.3 Folgen und Reihen von Funktionen — Suites et séries de fonctions

## 6.4 Funktionenreihen — Séries de fonctions

Betrachte eine **Funktionenfolge**:

$$\langle \varphi_n(x) \rangle, \quad D_{\varphi_n(x)} = I = [a, b] \quad \text{oder} \quad I = (a, b)$$

▷ Wenn gilt:  $x = x_0 = \text{fix}$ , so hat man eine gewöhnliche Zahlenfolge.

▷ Wenn gilt:  $x = \text{variabel}$ , so hängt das Konvergenzverhalten vom Wert von  $x$  ab.

Man hat es hier mit einer **Funktionenreihe** zu tun.

## 6.5 Gleichmässige Konvergenz — Convergence uniforme

### 6.5.1 Problem und Definition — Problème et définition

Wir definieren:

**Definition:**

$$\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x) \quad \text{auf } I \Leftrightarrow \forall x_0 \in I \quad \varphi_n(x_0) \rightarrow \varphi(x_0)$$

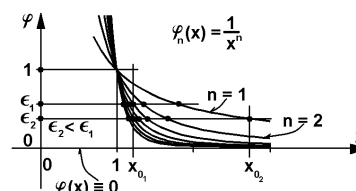
$$\leadsto \varphi(x) \text{ konvergiert gegen } \varphi(x)$$

„Epsilontisch“:

$$\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x) \Leftrightarrow \forall x_0 \in I \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(x_0, \varepsilon) \quad \forall n > N(x_0, \varepsilon) : |\varphi_n(x_0) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$$

**Problem:**

$N(x_0, \varepsilon)$  hängt von  $x_0$  ab.  $\leadsto N(x_0, \varepsilon)$  ist Funktion von  $x_0$ .



Daher ist vermutlich nicht garantiert, dass z.B.  $N(x_0, \varepsilon)$  in  $I = (a, b)$  beschränkt ist.

Z.B.  $\lim_{x_0 \rightarrow a} N(x_0, \varepsilon) = \infty$  ist möglich.

**Bsp.:**  $\langle \varphi_n(x) \rangle = \langle \frac{1}{x^n} \rangle, \quad x \in (1, 2] = I$

$x \in I \Rightarrow \varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x) = 0$  mit  $n \rightarrow \infty$  (Denn  $\varphi_n(x) - \varphi(x) = \frac{1}{x^n} < \varepsilon$  für  $n \geq N_0$ )  $\leadsto$  d. h.

$$\frac{1}{\varepsilon} < x^n \Rightarrow 1 < \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}} < \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}} < x$$

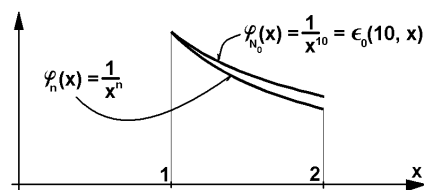
$\Rightarrow$  Bei gegebenem sehr kleinem  $\varepsilon$  muss  $N_0$  sehr gross gewählt werden, um  $x$  nahe zu 1 rücken zu können.  $N_0$  wächst so über alle Grenzen.

Genauer:

**Bsp.:**Sei  $N_0 = 10$  fix ,

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{x^n}, \quad x \in [1, 2]. \quad |\varphi_n(x)| \leq$$

$$\leq |\varphi_{N_0}(x)| = \frac{1}{x^{10}} = \varepsilon_0(N_0, x) = \varepsilon_0(10, x)$$



$\leadsto$   $\varepsilon$ -Schlauch zu ,  $N_0 = 10$ ,  $\varphi_n(x) = \frac{1}{x^{10}}$

Umgekehrt: :

$$\text{Sei } N_0 = 10, \varepsilon_0 \text{ fix, } \frac{1}{x^{N_0}} \leq \varepsilon_0, \quad x \in [1, 2] \Rightarrow x^{N_0} \geq \frac{1}{\varepsilon_0} \Rightarrow e^{n_0 \cdot \ln(x)} \geq e^{\ln(\frac{1}{\varepsilon_0})}$$

$$\Rightarrow N_0 \cdot \ln(x) \geq \ln\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\right)$$

$$x \in [1, 2], \quad x \neq 1, \quad \varepsilon \ll 1 \Rightarrow \ln(x) > 0, \quad \ln\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\right) > 0$$

$$\Rightarrow N_0 \geq \frac{\ln(\frac{1}{\varepsilon_0})}{\ln(x)} \rightarrow \infty \quad \text{für } x \downarrow 0, \quad \varepsilon \ll 1 \text{ fix}$$

**Konsequenz:** Es ist nicht garantiert, dass  $N(x, \varepsilon)$  in  $I = (a, b)$  beschränkt ist.

$\leadsto \lim_{x_0 \rightarrow a} N(x_0, \varepsilon) = \infty$  ist möglich !

Für die Lösung dieses Problems verwenden die Mathematiker ein vielerprobtes wissenschaftliches Konzept: Sie klassifizieren die Funktionen über  $I$  und bilden zwei disjunkte Klassen: die Klasse der Funktionen, die problematisch sind und diejenigen, die nicht problematisch sind. Jede Klasse wird dann für sich untersucht. Zudem braucht es Kriterien, die über die Klassenzugehörigkeit entscheiden.

Den unproblematischen Funktionen geben wir einen Namen:

**Definition:**

$$\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x) \text{ gleichmässig über } I$$

$$\Leftrightarrow N_0(\varepsilon, x) = N_0(\varepsilon) \text{ unabhängig von } x \text{ (global) wählbar}$$

**Begriff:**

Statt „gleichmässig“ sagen wir auch **uniform**.

**Schreibweise:**

$$\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x) \in \mathcal{UNIFCONV}(I) \text{ (gleichmässig konv. über } I \text{)}$$

$$\text{Bsp.: } \langle \varphi_n(x) \rangle = \left\langle \frac{1}{x^n} \right\rangle, \quad x \in [2, 3] = I, \quad \varepsilon \ll 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^{N_0}} \leq \varepsilon_0 \Rightarrow N_0 \cdot \ln(x) \geq \ln\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\right) \Rightarrow N_0 \geq \frac{\ln(\frac{1}{\varepsilon_0})}{\ln(x)}$$

Das ist erfüllt für .

Bei der gleichmässigen Konvergenz ist die spezielle Wahl von  $x \in I$  ohne Einfluss auf das Konvergenzverhalten.

**Konsequenz:** Bei gleichmässig konvergenten Funktionenfolgen sind die Definitionen und Aussagen von den Zahlenfolgen übertragbar.



### 6.5.2 Gleichmässige Konvergenz von Funktionenreihen — Convergence uniforme de séries de fonctions

#### Definition und Bedeutung der gleichmässigen Konvergenz — Définition et importance de la convergence uniforme

Reihen sind spezielle Folgen.

**Konsequenz:** Speziell sind gleichmässig konvergente Funktionenreihen wie gewöhnliche Zahlenreihen behandelbar.

**Definition:**

„Epsilontisch“ für Reihen :

Sei  $R_n(x) := S_n(x) - S(x)$

$S_n(x) \rightarrow S(x)$  **gleichmässig** über  $I$

$\Leftrightarrow \forall_{x \in I} \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq N_0(\varepsilon)} |R_n(x)| < \varepsilon$

Die gleichmässige Konvergenz ist bei Operationen mit Reihen von grosser Wichtigkeit. Während man zwei absolut konvergente Reihen gliedweise addieren darf, kann man gleichmässig konvergente Reihen gliedweise integrieren und in einem gewissen Rahmen auch gliedweise differenzieren. Diese Konvergenz spielt später eine grosse Rolle bei Potenzreihen und bei Fourierreihen.

#### Sätze über gleichmässig konvergente Funktionenreihen — Théorèmes sur des séries de fonctions convergentes de façon uniforme

**Satz:**

**Majorantenkriterium von Weierstrass**<sup>18</sup>

**Vor.:**

$$\exists M, \langle M_k \rangle \sum_{k=1}^{\infty} M_k \rightarrow M \in \mathbb{R}, \quad \forall_{k \in \mathbb{N}, x \in I} |\varphi_k(x)| \leq M_k$$

**Beh.:**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \text{ konv. absolut und gleichmässig in } I$$

Zum Beweis:  $\leadsto$  Folgerung aus dem gewöhnlichen Majorantenkriterium .

**Bsp.:** Sei  $g : (x, k) \mapsto y = g(x, k), g : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$

$$0 < \frac{\cos^2(g(x, k))}{k^2} < \frac{1}{k^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2(g(x, k))}{k^2} \text{ konv. absolut und gleichmässig in } \mathbb{R}$$

---

<sup>18</sup>Weierstrass, 1815 – 1897

**Satz:** **Dirichlet–Kriterium**<sup>19</sup>

**Vor.:**

$$\begin{aligned} \langle a_k \rangle & \text{ NF,} \\ \langle |a_k| \rangle & \text{ monoton fallend} \\ \forall_{n \in \mathbb{N}, x \in I} : |S_n(x)| &= \left| \sum_{k=1}^n \varphi_k(x) \right| \text{ beschränkt} \end{aligned}$$

**Beh.:**

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \cdot \varphi_k(x) \in \mathcal{UNIFCONV}(I)$$

$$\forall_{n \in \mathbb{N}, x \in I} |S_n| = \left| \sum_{k=1}^n \varphi_k(x) \right| \text{ beschränkt} \rightsquigarrow \exists_{m \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{N}, x \in I} |S_n| = \left| \sum_{k=1}^n \varphi_k(x) \right| < m$$

Zum Beweis:  $\rightsquigarrow$  Verallgemeinerung des Leibnizkriterium .

**Bsp.:** Sei  $\varphi_k(x) = \sin(x + k\pi)$ ,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n \sin(x + k\pi) \right| &= |\sin(x) + \sin(x + \pi) + \sin(x + 2\pi) + \dots + \sin(x + n\pi)| = \\ &= |\sin(x) - \sin(x) + \sin(x) - \dots \pm \sin(x)| = \left| \frac{1}{2} (1 - (-1)^n) \cdot \sin(x) \right| \leq 1 \\ a_k = \frac{1}{\sqrt{k}} (-1)^k &\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \sin(x + k\pi) \in \mathcal{UNIFCONV}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

**Satz:** **Kriterium von Abel**<sup>20</sup>

**Vor.:**

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) &\in \mathcal{UNIFCONV}(I), \\ \langle a_n \rangle &\text{ monoton und beschränkt,} \\ [a, b] &\subseteq I \end{aligned}$$

**Beh.:**

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \varphi_k(x) \in \mathcal{UNIFCONV}([a, b])$$

Zum Beweis:  $\langle a_n \rangle$  monoton und beschränkt

$\Rightarrow \exists_a : a_n \rightarrow a \Rightarrow \langle a_n - a \rangle = \langle b_n \rangle$  NF und monoton .

Betrachte:  $\sum_{k=1}^{\infty} a \cdot \varphi_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} b_n \cdot \varphi_k(x)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a \cdot \varphi_k(x) = a \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \in \text{Unifconv}(I) \text{ (Vor.)!}$$

---

<sup>19</sup>Dirichlet, 1805 – 1859

<sup>20</sup>Abel, 1802 – 1829

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} b_n \cdot \varphi_k(x) \text{ erfüllt die Voraussetzungen des Dirichlet-Kriteriums} &\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_n \cdot \varphi_k(x) \in \mathcal{UNIFCONV}(I) \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a \cdot \varphi_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} b_n \cdot \varphi_k(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} (a + b_n) \cdot \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_n) \cdot \varphi_k(x) \in \mathcal{UNIFCONV}(I) \end{aligned}$$

**Bsp.:**  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \in \mathcal{UNIFCONV}([a, b] \subset \mathbb{R})$

(Quotientenkriterium, vgl. Seite 186)

$$a_k = \sum_{j=1}^k \frac{1}{2^j} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^k \frac{1}{2^j} \right) \cdot \frac{x^k}{k!} \in \mathcal{UNIFCONV}([a, b])$$

Weitere Kriterien, z.B. für Doppelreihen, vgl. Literatur.

### 6.5.3 Gleichmässige Konvergenz und Vertauschungssätze — Convergence uniforme et théorèmes d'échange

Limesvertauschung, Stetigkeit — Echange des limites, continuité

**Satz:**

**Vor.:**

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \in \mathcal{UNIFCONV}(I) \\ \forall_{k \in \mathbb{N}} \varphi_k(x) &\in \text{stetig}(I) \quad (\text{d. h. } \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi_k(x) = \varphi_k(x_0)) \end{aligned}$$

**Beh.:**

$$S(x) \in \text{stetig}(I)$$

**Konsequenz:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=1}^n \varphi_k(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi_k(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \varphi_k(x) \right)$$

Zum Beweis:

Ansonst:  $\exists_{\langle x_i \rangle} : x_i \rightarrow x_0, |S(x_i) - S(x_0)| \geq a > 0$  für  $x_i \neq x_0$

$$\Rightarrow |S(x_i) - S(x_0)| = |S_n(x_i) + R_n(x_i) - (S_n(x_0) + R_n(x_0))|$$

$$= |(S_n(x_i) - S_n(x_0)) + (R_n(x_i) - R_n(x_0))| \geq a \text{ für } x_i \neq x_0$$

Nach Vor. gilt aber:

$$S_n(x_i) \rightarrow S_n(x_0) \wedge |R_n(x_i)| < \varepsilon_1, |R_n(x_0)| < \varepsilon_2 \text{ für } n \geq N_0$$

$$\Rightarrow (R_n(x_i) - R_n(x_0)) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty \text{ Gleichmässige Konvergenz}$$

$$\leadsto N_0 \text{ unabh. von } x_0$$

$$\Rightarrow |S(x_i) - S(x_0)| = |(S_n(x_i) - S_n(x_0)) + (R_n(x_i) - R_n(x_0))|_{n \geq N_0} \not\geq a > 0$$

für  $x_i - x_0$  genügend klein.

**Bsp.:**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \in \mathcal{UNIFCONV}([a, b] \subset \mathbb{R}), \quad \forall_{k \in \mathbb{N}} \frac{x^k}{k!} \in \text{stetig}(I) \leadsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \in \text{stetig}(I)$$

Mit diesem Satz werden wir später die Stetigkeit von Potenzreihen untersuchen können.

# Vertauschung von Summation und Integration — Echangeement de somme infinie et intégrale

**Satz:**

**Vor.:**

Seien  $\varphi_n(x), \varphi(x) \in \mathcal{INT}$   
 $\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x) \in \mathcal{UNIFCONV}(I), I = [a, b]$

**Beh.:**

$$\int_I \varphi_n(x) dx \rightarrow \int_I \varphi(x) dx$$

Zum Beweis:  $|\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$  für  $n \geq N_0(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| \int_I \varphi_n(x) dx - \int_I \varphi(x) dx \right| &= \left| \int_I (\varphi_n(x) - \varphi(x)) dx \right| \leq \int_I |\varphi_n(x) - \varphi(x)| dx \leq \int_a^b \varepsilon(N_0) dx \\ &= \varepsilon(b-a) \rightarrow 0 \text{ für } \varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \int_I \varphi_n(x) dx \rightarrow \int_I \varphi(x) dx \end{aligned}$$

**Bsp.:**

Sei  $\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n \psi_k(x) \rightarrow \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) \in \mathcal{UNIFCONV}(I), I = [a, b]$

$$\Rightarrow \int_I \varphi_n(x) dx = \int_I \sum_{k=1}^n \psi_k(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_I \psi_k(x) dx \rightarrow \int_I \varphi(x) dx = \int_I \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) dx$$

Andererseits gilt aus formalen Gründen:  $\int_I \varphi_n(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_I \psi_k(x) dx \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \int_I \psi_k(x) dx$

(Für die Zweifler an der Existenz der unendlichen Summe etwas genauer: )

$$\sum_{k=1}^n \psi_k(x) \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^n \psi_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) \right| < \varepsilon$$

(gleichmässig  $\leadsto$  unabh. von  $x$ )

$$\Rightarrow \left| \int_I \left( \sum_{k=1}^n \psi_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) \right) dx \right| \leq \int_I \left| \sum_{k=1}^n \psi_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) \right| dx < \int_a^b \varepsilon dx = \varepsilon(b-a) \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \int_I \sum_{k=1}^n \psi_k(x) dx \rightarrow \int_I \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) dx \Rightarrow \int_I \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_I \psi_k(x) dx$$

**Satz:**

**Vor.:**

$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n \psi_k(x) \rightarrow \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) \in \mathcal{UNIFCONV}(I),$   
 $I = [a, b], \varphi_n, \psi_k(x) \in \mathcal{INT}$

**Beh.:**

$$\int_I \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_I \psi_k(x) dx$$

Die Integration ist also gliedweise möglich.

## 1. Beispiel:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \in \mathcal{UNIFCONV}([a, b] \subset \mathbb{R})$$

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b \frac{x^k}{k!} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \frac{x^{k+1}}{k!} \Big|_a^b = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^{k+1}}{(k+1)!} - \frac{a^{k+1}}{(k+1)!}$$

**2. Beispiel:**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} \in \mathcal{UNIFCONV}([0, 2\pi] \subset \mathbb{R})$$

$$\int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(kx)}{k^2} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-\sin(kx)}{k^3} \Big|_0^{2\pi} = \sum_{k=1}^{\infty} 0 - 0 = 0$$

### Vertauschung von Ableitung und Summation — Echangeement de somme infinie et dérivée

**Satz:**

**Vor.:**

$$\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x) \in \mathcal{UNIFCONV}(I), I = [a, b]$$

$$\varphi_n(x), \varphi(x) \in \mathcal{D}(I) \text{ (diff'bar)}$$

**Beh.:**

$$\frac{d\varphi_n(x)}{dx} \rightarrow \frac{d\varphi(x)}{dx}$$

Zum Beweis:

$$\begin{aligned} & \varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x) \in \mathcal{UNIFCONV}(I) \\ \Rightarrow & \frac{d\varphi_n(x)}{dx} - \frac{d\varphi(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi_n(x + \Delta x) - \varphi_n(x)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} & \frac{\varphi_n(x + \Delta x) - \varphi_n(x) - (\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\varphi_n(x + \Delta x) - \varphi(x + \Delta x)) + (\varphi(x) - \varphi_n(x))}{\Delta x} \end{aligned}$$

Wegen der gleichmässigen Konvergenz kann unabhängig von  $x$  dann  $|\varphi_n(x + \Delta x) - \varphi(x + \Delta x)| < \varepsilon$  und  $|\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$  gewählt werden für  $n > N_0$  (bei gegebenem  $\varepsilon$ ).

Wir wählen speziell:  $\varepsilon = (\Delta x^2)$

$$\begin{aligned} & \leadsto \left| \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\varphi_n(x + \Delta x) - \varphi(x + \Delta x)) + (\varphi(x) - \varphi_n(x))}{\Delta x} \right| \leq \\ & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\varphi_n(x + \Delta x) - \varphi(x + \Delta x)| + |\varphi(x) - \varphi_n(x)|}{|\Delta x|} \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon + \varepsilon}{|\Delta x|} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x^2) + (\Delta x^2)}{|\Delta x|} \\ & = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2|\Delta x| = 0 \Rightarrow \frac{d\varphi_n(x)}{dx} \rightarrow \frac{d\varphi(x)}{dx} \end{aligned}$$

**Satz:**

**Vor.:**

$$\varphi_n(x), \varphi(x) \in \mathcal{D}(I) \text{ (diff'bar)}, I = [a, b]$$

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n \psi_k(x), \quad \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) \in \mathcal{D} \text{ (diff'bar)}$$

$$\varphi_n(x) \in \mathcal{UNIFCONV}(I)$$

**Beh.:**

$$\frac{d}{dx} \varphi(x) = \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d\psi_k(x)}{dx}$$

Zum Beweis: Nach dem letzten Satz gilt:  $\frac{d\varphi_n(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^n \psi_k(x) = \sum_{k=1}^n \frac{d\psi_k(x)}{dx} \rightarrow \frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x)$

Andererseits gilt aus formalen Gründen:  $\sum_{k=1}^n \frac{d\psi_k(x)}{dx} \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d\psi_k(x)}{dx} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d\psi_k(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x)$

### 1. Beispiel:

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \in \text{UNIFCONV}([a, b] \subset \mathbb{R})$$

$$\frac{dS(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{x^k}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = S(x)$$

$$\Rightarrow \frac{dS(x)}{dx} = S(x)$$

Andererseits gilt:  $\frac{d}{dx} e^{x+c} = e^{x+c}$

$\leadsto$  **Vermutung:**

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \stackrel{?}{=} e^{x+c} \leadsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = 0^0 = 1 = e^0 = e^{0+c} = e^c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \stackrel{?}{=} e^x$$

**2. Beispiel:** (Dieses Beispiel zeigt, wie man einen Ausdruck in verschiedenen Varianten darstellen kann.)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(kx)}{2^k} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{\ln(kx)}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(kx) 2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x 2^k} = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{x} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \\ &= \frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2 - \frac{2}{2}} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\leadsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(kx)}{2^k} = \int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + C, \quad C = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \quad (x=0 \leadsto C)$$

$$\Rightarrow \ln(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(kx) - \ln(k)}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln\left(\frac{kx}{k}\right)}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(x)}{2^k} = \ln(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \ln(x)$$

### 3. Beispiel:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \quad x = -1 \leadsto \text{Konvergiert (Leibniz).}$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot x^{(k-1)}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} x^{(k-1)}, \quad x = -1 \leadsto \text{Konvergiert nicht.}$$

## 6.6 Potenzreihen — Séries de puissances

### 6.6.1 Theorie: Begriffe, Sätze — Théorie: Notions, théorèmes

#### Der Begriff — La notion

Wir wollen im Moment unter **Potenztermen** Terme der Form  $a_n x^n$  oder bei Koordinatenverschiebung  $a_n (x - c)^n$  verstehen,  $a_n \in \mathbb{R}$ .

#### Definition:

Eine Funktionenreihe, deren Glieder alle Potenzterme sind, nennen wir **Potenzreihe**.

**Bsp.:**  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$ ,  $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - c)^n$

### Konvergenzbereich — domaine de convergence

**Satz:** von Abel

Vor.:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - c)^n \in \mathcal{CONV} \text{ für } x = x_0, |c - x_0| = d$$

$$I = (c - d, c + d)$$

Beh.:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - c)^n \in \mathcal{UNIFCONV}(I)$$

Zum Beweis:

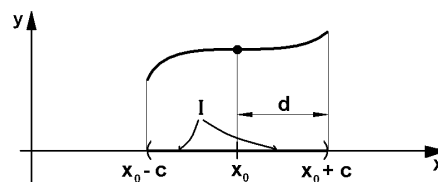
Wende das Dirichlet-Kriterium an auf

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x_0 - c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(x_0)$$

$$a_n = \left(\frac{x - c}{x_0 - c}\right)^n, |a_n| = \left|\left(\frac{x - c}{x_0 - c}\right)^n\right| \rightarrow 0 \text{ für } x \in I$$

(Dirichlet: Seite 198)

Alternative: Wurzelkriterium.



Mit der nachfolgenden Definition können wir jetzt ein denkwürdiges Korollar formulieren:

**Definition:** **Konvergenzbereich** einer Funktionenreihe  $S(x)$ :  
 $\{x \in \mathbb{R} \mid S(x)\} \in \mathcal{CONV}$

**Korollar:** Der Konvergenzbereich einer Potenzreihe ist ein Intervall.

**Symbol:**

$$[(a, b)] := [a, b] \text{ oder } = (a, b] \text{ oder } = [a, b) \text{ oder } = (a, b)$$

**Definition:** Sei  $[(a, b)] =$  Konvergenzintervall einer Potenzreihe ,  
 $a = c - d$ ,  $b = c + d$   
 $\leadsto r = |d|$  heisst **Konvergenzradius**

### Berechnung des Konvergenzradius — Calculer le rayon de convergence

Sei  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - c)^n := S$

Quotientenkriterium:

$$\begin{aligned}
q_\infty &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}(x-c)^{n+1}}{b_n(x-c)^n} \right| = |x-c| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| < 1 \Rightarrow S \in \mathcal{CONV}, \quad q_\infty > 1 \\
&\Rightarrow S \in \mathcal{DIV}, \quad q_\infty = 1 \Rightarrow |x-c| := r = \text{Konvergenzradius} \\
&\Rightarrow r \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = 1, \quad r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right|
\end{aligned}$$

**Satz:****Vor.:** $r = \text{Konvergenzradius von}$ 

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-c)^n$$

**Beh.:**

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right|$$

**1. Beispiel:**  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$

**2. Beispiel:**  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x-c)^n \Rightarrow r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$

**3. Beispiel:**

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{(2x)^n}{n} \Rightarrow r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^n}{n}}{\frac{2^{n+1}}{(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

**Sätze über Potenzreihen — Théorèmes sur les séries de puissances****Satz:****Vor.:****Geg.:**

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n, \quad H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-c)^n$$

Konvergenzintervalle

$$I_S, I_H, \quad I = I_S \cap I_H$$

**Beh.:**Dann gelten die folgenden **wichtigen** Aussagen:**1. Wichtig:**

$$[a, b] \subset I_S \Rightarrow S(x) \in \mathcal{ABSCONV}([a, b]) \wedge S(x) \in \mathcal{UNIFCONV}([a, b]).$$

Ebenso für  $H(x)$ 

(Bew.: Direkte Folgerung aus dem Quotientenkriterium.)

**2. Grenzwertsatz von Abel:**

Eine Potenzreihe ist im Konvergenzintervall stetig:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \cdot (x-c)^k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lim_{x \rightarrow x_0} a_k \cdot (x-c)^k \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \cdot (x_0-c)^k = f(x_0)
\end{aligned}$$



(Bew.: Direkte Folgerung aus Satz über die Limesvertauschung und Stetigkeit von Funktionenreihen, denn  $\varphi_k(x) = a_k \cdot (x - c)^k \in \text{stetig}$  (vgl. Seite 199). .)

### 3. Differenzierbarkeit:

Eine Potenzreihe ist im Konvergenzintervall gliedweise differenzierbar:

Stellt eine Potenzreihe eine differenzierbare Funktion dar, so ist sie im Konvergenzintervall gliedweise differenzierbar:

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} a_n \cdot (x - c)^n = \sum_{k=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (x - c)^{n-1}$$

(Bew.: Der Differenzenquotient z.B. von  $S(x)$  ist für  $x \neq c$  stetig. ( $S(x)$  in  $I_S$  stetig!) Summation und Differenzenquotientbildung kann hier somit vertauscht werden, was eine Reihe der Ableitungen der Terme ergibt. Man rechnet sofort nach, dass diese den Konvergenzradius beibehält. Daher lässt sich jetzt der Limes des Differenzenquotienten auch für  $S(x)$  bilden. (Vgl. auch Seite 201). .)

### 4. Gliedweise Integrierbarkeit:

Eine Potenzreihe ist im Konvergenzintervall gliedweise integrierbar:

$$\int_I \sum_{k=1}^{\infty} a_n \cdot (x - c)^n dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{n+1} \cdot (x - c)^{n+1} |_I$$

(Bew.: Potenzreihen sind im Konvergenzintervall stetig.  $\leadsto$  Direkte Folgerung aus entsprechendem Satz für Funktionenreihen (vgl. Seite 200). .)

### 5. Gliedweise Addition:

$$S(x) \pm H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_n \cdot (x - c)^n \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_n \cdot (x - c)^n = \sum_{k=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) \cdot (x - c)^n$$

in  $I = I_S \cap I_H$

(Bew.: Direkte Folgerung aus entsprechendem Satz für Funktionenreihen (vgl. Seite 192). .)

### 6. Multiplikation nach dem Distributivgesetz:

$$S(x) \cdot H(x) = \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_n \cdot (x - c)^n \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^{\infty} b_n \cdot (x - c)^n \right) = \sum_{k=1}^{\infty} g_n \cdot (x - c)^n, \quad g_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$$

in  $I = I_S \cap I_H$

(Bew.: Direkte Folgerung aus entsprechendem Satz für Funktionenreihen (vgl. Seite 193). .)

### 7. Division:

$$H(c) \neq 0 \Rightarrow G(x) = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} a_n \cdot (x - c)^n}{\sum_{k=1}^{\infty} b_n \cdot (x - c)^n} \text{ wieder Potenzreihe, jedoch in der Regel mit eingeschränktem Konvergenzintervall}$$

(Bew.:  $S(x), H(x) \in \mathcal{D}^\infty \Rightarrow \frac{S(x)}{H(x)} \in \mathcal{D}^\infty$  ( $\mathcal{D}^\infty$ : unendlich oft diff'bar))

$\leadsto$  Koeffizienten der Potenzreihe, vgl. später Satz über die Berechnung der Koeffizienten einer Potenzreihe.)

### 8. Umkehrfunktion:

$S(x) = f(x)$  lokal bijektiv in  $U_\varepsilon(c) \Rightarrow f^{-1}(x)$  wieder als Potenzreihe schreibbar

(Bew.: Wegen:  $\frac{df(x)^{-1}}{dx} = \frac{1}{\frac{d(f(z))}{dz} \big|_{z=f^{-1}(x)}}$ , späterer Satz über die Berechnung der Koeffizienten

einer Potenzreihe.)

Damit wissen wir einiges über den Umgang mit Potenzreihen. Wie man aber zu sinnvollen Potenzreihen kommt und wie ihr Graph verläuft, ist nach wie vor unklar. Noch interessanter aber ist folgende Frage: Lässt sich eine klassische, einfache transzendente Funktion wie z.B.  $f(x) = \ln(x)$  auch als Potenzreihe schreiben?

## 6.6.2 Praxis: Potenzreihenentwicklung — Pratique: Développement en séries de puissances

### Problem:

**Geg.:**  $f: x \mapsto f(x)$

**Ges.:**  $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_n \cdot (x-c)^n$ ,  $I$  mit  $f(x) = S(x)$  in  $I$

### Potenzreihenentwicklung des Logarithmus — Développement du logarithme en séries de puissances

Sei  $f(x) = \ln(x)$

Bekannt:  $|\tau| < 1 \Rightarrow \frac{1}{1-\tau} = 1 + \tau + \tau^2 + \dots + \tau^{n-1} + \tau^n + r_n$ ,

$$r_n = \tau^{n+1} + \tau^{n+2} + \dots = \tau^{n+1}(1 + \tau + \tau^2 + \dots) = \tau^{n+1} \left( \frac{1}{1-\tau} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\tau} = 1 + \tau + \tau^2 + \dots + \tau^{n-1} + \tau^n + \tau^n \left( \frac{1}{1-\tau} \right)$$

$$\Rightarrow \int_1^{x+1} \frac{1}{t} dt = \ln(t) \Big|_1^{x+1} = \ln(x+1) - \ln(1) = \ln(x+1) \wedge \int_1^{x+1} \frac{1}{t} dt = \int_0^x \frac{1}{t^*+1} dt^*$$

$$= \int_{t^*=-\tau}^0 \frac{1}{-\tau+1} (-1) d\tau = - \int_{-\tau}^0 \frac{1}{-\tau+1} (-1) d\tau = \int_{-\tau}^0 \frac{1}{1-\tau} d\tau = \ln(x+1)$$

$$\Rightarrow \ln(x+1) = \int_{-\tau}^0 \frac{1}{1-\tau} d\tau = \int_{-\tau}^0 1 + \tau + \tau^2 + \dots + \tau^{n-1} + \tau^n + r_n d\tau =$$

$$\tau + \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^3}{3} + \dots + \frac{\tau^n}{n} \Big|_{-\tau}^0 + \int_{-\tau}^0 r_n d\tau = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n,$$

$$R_n = \int_{-\tau}^0 r_n d\tau = \int_{-\tau}^0 \frac{\tau^n}{1-\tau} d\tau = \int_x^0 \frac{(-t)^n}{1+t} (-1) dt = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt$$

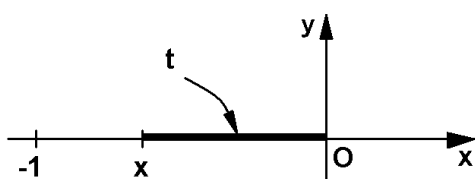
$$\Rightarrow \ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n, \quad R_n = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt$$

$\leadsto$  Potenzreihe, falls Restglied  $R_n \rightarrow 0$ .

$\leadsto$  Restglied untersuchen!

$$1. \ x \in [0, 1) \quad |R_n| = \left| \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \right| \leq \int_0^x t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} \Big|_0^x = \frac{x^{n+1}}{n+1} < \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \Rightarrow R_n \rightarrow 0$$

$$2. \ x \in (-1, 0] \quad |R_n| = \left| \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \right| \leq \left| \int_0^x \left| \frac{t^n}{1+t} \right| dt \right| \leq \left| \int_0^x \left| \frac{t^n}{1+x} \right| dt \right| \leq$$



$$\begin{aligned} &\leq \left| \frac{1}{1+x} \right| \left| \int_0^x |t^n| dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{1+x} \right| \left| \frac{t^{n+1}}{n+1} \right|_0^x \\ &= \left| \frac{1}{1+x} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow R_n \rightarrow 0 \text{ für } x \in (-1, 1)$$

**Satz:**

**Vor.:**

$$x \in (-1, 1)$$

**Beh.:**

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n \text{ mit}$$

$$x \in [0, 1) \Rightarrow |R_n| \leq \frac{1}{n+1}$$

$$x \in (-1, 0] \Rightarrow |R_n| \leq \left| \frac{1}{1+x} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right|$$

Konvergenzradius:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$

$\leadsto x \in (-1, 1)$  wie vorausgesetzt.

### Potenzreihenentwicklung von Polynomen — Développement des polynômes en séries de puissances

Um eine allgemeine Entwicklungsformel zu gewinnen, mit der sich die erwähnten Funktionen als Potenzreihe schreiben lassen, ist es ratsam, die Sachlage erst für die einfache Klasse der Polynome zu studieren.

**Geg.:** Polynom  $p(x)$

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

$$p'(x) = a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1}$$

$$p''(x) = 2 a_2 + 3 \cdot 2 a_3 x + 4 \cdot 3 a_4 x^2 + \dots + n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2}$$

$$p^{(3)}(x) = 3 \cdot 2 a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 a_4 x + \dots + n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot a_n \cdot x^{n-3}$$

$\vdots$

$\dots$

$$p(0) = a_0$$

$$p'(0) = a_1 = 1 a_1$$

$$p''(0) = 2 a_2$$

$$p^{(3)}(0) = 3 \cdot 2 \cdot a_3 = 3! \cdot a_3$$

$\vdots$

$$p^{(n)}(0) = n! \cdot a_n$$

**Lemma:**

**Vor.:**

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

**Beh.:**

$$a_n = \frac{p^{(n)}(0)}{n!}$$

$$\Rightarrow p(x) = \frac{p^{(0)}(0)}{0!} + \frac{p^{(1)}(0)}{1!} x + \frac{p^{(2)}(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{p^{(n)}(0)}{(n)!} x^n$$

### Ausdehnung auf andere Funktionen — Généralisation pour autres fonctions

Nun wollen wir den Versuch wagen, dieses Lemma auch auf andere Funktionen auszudehnen.

Gegeben sei:  $f \in \mathcal{D}^{(n+1)}(I)$ ,  $x_0 \in I$ ,  $x = x_0 + h \in I$

**Ansatz:**

$$f(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots + a_{n-1} (x - x_0)^{n-1} + a_n (x - x_0)^n + R_n(x, x_0) =$$

$$\underbrace{\frac{f^{(0)}(x_0)}{0!} + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n)!} (x - x_0)^n}_{T_n(x, x_0)} + R_n(x, x_0)$$

Dieser Ansatz ist eigentlich bloß eine Definition von  $R_n(x, x_0) := f(x) - T_n(x, x_0)$  und somit immer richtig.

**Definition:**

$R_n(x, x_0) := f(x) - T_n(x, x_0)$  heißt **Taylorpolynom** oder „**Schmiegeparabel**“  $n$ -ter Ordnung.

$\leadsto$  **Problem:** Abschätzung des Restgliedes  $R_n(x, x_0)$ .  $\leadsto R_n(x, x_0) \stackrel{?}{\rightarrow} 0$  für  $n \rightarrow \infty$

**Trick:** Sei  $R_n(x, x_0) = f(x) - T_n(x, x_0)$ . Halte  $x$  als Parameter fest, verändere jedoch  $x_0 := t$ .

- $\triangleright$   $x = x_0 := t$ :  $R_n(x, t) = f(t) - T_n(t, t) = f(t) - f(t) = 0$   
 $x \in U_\delta(t)$ ,  $x \rightarrow t = x_0 \leadsto f(x), T_n(t, t)$  stetig  $\Rightarrow R_n(x, t)$  stetig  
 $\Rightarrow R_n(x, t) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow t$
- $\triangleright$   $R_n(x, t)$

$$f(x) - (f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(t)}{(n)!}(x-t)^n)$$

(Produktenregel)

$$\begin{aligned} \leadsto \frac{d}{dt} R_n(x, t) &= 0 - f'(t) + f'(t) - f''(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2!} \cdot 2 \cdot (x-t) - \frac{f^{(3)}(t)}{2!} \cdot (x-t)^2 + \dots \\ &\dots + \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!} \cdot (n-1) \cdot (x-t)^{n-2} - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} (x-t)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(t)}{(n)!} \cdot n \cdot (x-t)^{n-1} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n)!} (x-t)^n \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} R_n(x, t) &= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n)!} (x-t)^n, \quad \int_x^{x_0} \frac{d}{dt} R_n(x, t) dt = R_n(x, t) \Big|_{t=x}^{t=x_0} = R_n(x, x_0) - \underbrace{R_n(x, x)}_{=0} \\ \Rightarrow R_n(x, x_0) &= \int_x^{x_0} \frac{d}{dt} R_n(x, t) dt = - \int_x^{x_0} \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n)!} (x-t)^n dt \end{aligned}$$

**Lemma:**

$$R_n(x, x_0) = \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n)!} (x-t)^n dt$$

Sei  $x = x_0 + h$ ,  $t \in [x_0, x_0 + h]$ ,  $t = x_0 + v$ 

$$\begin{aligned} \Rightarrow R_n(x, x_0) &= \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n)!} (x_0 + h - t)^n dt = \\ &= \int_{x_0+v=x_0}^{x_0+v=x_0+h} \frac{f^{(n+1)}(x_0+v)}{(n)!} (x_0 + h - (x_0 + v))^n dv = \int_0^h \frac{f^{(n+1)}(x_0+v)}{(n)!} (h-v)^n dv \end{aligned}$$

Mittelwertsatz:

$$\exists_{\lambda \in [0,1]} : R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \lambda h)}{(n)!} (h - \lambda h)^n h = \frac{(1 - \lambda \cdot 1)^n h^{n+1} f^{(n+1)}(x_0 + \lambda h)}{(n)!}$$

 $\leadsto$  Abschätzung von CauchyEine andere Abschätzung hat Lagrange gegeben.  $\leadsto$ **Satz:****Vor.:**

$$f \in \mathcal{D}^{(n+1)}(I), \quad x_0 \in I, \quad x = x_0 + h \in I$$

$$R_n(x, x_0) = f(x) - T_n(x, x_0)$$

**Beh.:**

$$\exists_{\lambda \in [0,1]} : R_n(x, x_0) = \frac{(1 - \lambda)^n h^{n+1} f^{(n+1)}(x_0 + \lambda h)}{(n)!} \quad (\text{Cauchy})$$

$$\exists_{\mu \in [0,1]} : R_n(x, x_0) = \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(x_0 + \mu h)}{(n+1)!} \quad (\text{Lagrange})$$

**Konsequenz:** Will man  $f(x)$  durch Taylorpolynome  $T_n(x, x_0)$  approximieren, so ist der Fehler von der Größenordnung  $C(x_0, h) \cdot \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$ . Bekanntlich gilt:  $\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Ist  $|f^{(n+1)}(x_0 + \mu h)| < M$  in  $I$ , so gilt auch  $R_n(x, x_0) \rightarrow 0$  mit  $x \rightarrow x_0$ .

**1. Beispiel:**  $(\sin(x))^{(n)} = \pm \sin(x)$  oder  $= \pm \cos(x)$ 

$$\Rightarrow \forall_{n \in \mathbb{N}} |(\sin(x))^{(n)}| \leq 1 \Rightarrow \forall_{x \in \mathbb{R}} \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots (\in \mathcal{CONV})$$

**2. Beispiel:** Sei  $M \in \mathbb{R}^+$  beliebig  $(e^x)^{(n)} = e^x \in (0, M)$

für  $x < \ln(M) \Rightarrow \forall_{n \in \mathbb{N}} |(e^x)^{(n)}| \leq M \Rightarrow \forall_{x \in \mathbb{R}} e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots (\in \mathcal{CONV})$

### Analytische Funktionen — Fonctions analytiques

Sei  $f$  eine reelle Funktion .

**Definition:**

$f(x)$  heisst **analytisch** (*analyt* ,  
 $f \in \text{analyt}$ )  $\Rightarrow \exists_{\delta \in \mathbb{R}^+} : R_n(x, x_0) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ ,  
 $x \in U_\delta(x_0)$

**Konsequenz:** Analytische Funktionen besitzen in  $U_\delta(x_0)$  eine konvergente Potenzreihendarstellung:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

**Definition:**

Die Potenzreihe einer analytischen Funktion heisst auch **Taylor-**

**reihe**  $\leadsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$

Für  $x_0 = 0$  redet man auch von einer **Mac Laurin-Reihe**.

**Problem:** Konvergenzintervall = ? D.h. wo ist  $R_n(x, x_0) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ ?

### Beispiele analytischer Funktionen — Exemples de fonctions analytiques

**1. Beispiel:**  $f(x) = p(x) = x^2$ ,  $x_0 = 1$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 = p(1) + \frac{p'(1)}{1!} (x - 1) + \frac{p''(1)}{2!} (x - 1)^2 + 0 = 1 + 2(x - 1) + \frac{2}{2} (x - 1)^2$$

**2. Beispiel:**  $f(x) = e^x$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x = h \Rightarrow f(x) = e^0 + \frac{e^0}{1!} x + \frac{e^0}{2!} x^2 + \frac{e^0}{3!} x^3 + \dots + \frac{e^0}{n!} x^n +$

$$R_n(x, 0), |R_n(x, 0)| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\mu \cdot x} \right|_{\mu \in [0,1]} \leq \left| \frac{x^{n+1} \cdot e^x}{(n+1)!} \right| \leq \left| \frac{x^{n+1} \cdot c(x)}{(n+1)!} \right| \rightarrow 0$$

für  $n \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow f(x) = 1 + \frac{1}{1!} x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

**3. Beispiel:**  $f(x) = e^x$ ,  $x_0 = 0$

$$\Rightarrow f(x) = 1 + \frac{1}{1!} x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} e^x = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{1}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!} x^{k-1} = 0_{|k=0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} x^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = e^x \Rightarrow (e^x)' = e^x$$

**4. Beispiel:**  $f(x) = e^x$ ,  $x_0 = 0$

$$\Rightarrow f(x) = 1 + \frac{1}{1!} x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^x e^t dt &= \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x \frac{1}{k!} t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \cdot (k+1)} x^{k+1} \Big|_0^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = -1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = e^x - 1 = e^x - e^0 \Rightarrow \int_0^x e^t dt = e^x - e^0 \end{aligned}$$

**5. Beispiel:**

$$f(x) = \sin(x)$$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^n \cdot \cos(x) & n = 2k+1, \quad k \in \mathbb{N} \\ (-1)^n \cdot \sin(x) & n = 2k \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_0 = 0 &\Rightarrow \sin(x_0) = 0, \quad \cos(x_0) = 1 \Rightarrow f(x) = 0 + \frac{1}{1!}x - \frac{0}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots = \\ &= \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \dots, \quad |f^{(n)}(x)| \leq 1 \quad (\sin, \cos) \Rightarrow |R_n(x, 0)| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow f(x) &= \sin(x) = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{6. Beispiel:} \quad f(x) &= \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-x)^k \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k + (-x)^k}{k!} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1 + (-1)^k) \cdot x^k}{k!} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2) \cdot x^{2k}}{(2k)!} \Rightarrow \cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \end{aligned}$$

**7. Beispiel: Binomische Reihe**

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^r, \quad r \in \mathbb{R}, \quad x_0 = 0, \quad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} = ? \\ \leadsto f^{(k)}(x_0) &= r \cdot (r-1) \cdot (r-2) \cdot \dots \cdot (r-k+1) \cdot (1+x)^{r-k} = r \cdot (r-1) \cdot (r-2) \cdot \dots \cdot (r-k+1), \\ \binom{n}{k} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! (n-k)!} \\ \Rightarrow \text{Def.: } \binom{r}{k} &:= \frac{r \cdot (r-1) \cdot (r-2) \cdot \dots \cdot (r-k+1)}{k!} \Rightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} = \binom{r}{k} \\ \Rightarrow f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} \cdot x^k \\ x \in (0, 1) &\Rightarrow |R_n(x, 0)| = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot r \cdot (r-1) \cdot (r-2) \cdot \dots \cdot (r-n) \cdot (1+\mu x)^{r-n-1} = \\ &= (1+\mu x)^r \cdot x^{n+1} \cdot \frac{r \cdot (r-1) \cdot (r-2) \cdot \dots \cdot (r-n)}{(n+1)! \cdot (1+\mu x)^{n+1}} \leq c(x) \cdot x^{n+1} \quad \text{für } n > r \Rightarrow |R_n(x, 0)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{8. Beispiel:} \quad f(x) &= \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^x \frac{1}{t} \cdot \left( t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}t^7 + \frac{1}{9!}t^9 - \dots \right) dt = \\ &= \int_0^x \left( 1 - \frac{1}{3!}t^2 + \frac{1}{5!}t^4 - \frac{1}{7!}t^6 + \frac{1}{9!}t^8 - \dots \right) dt = t - \frac{1}{3 \cdot 3!}t^3 + \frac{1}{5 \cdot 5!}t^5 - \frac{1}{7 \cdot 7!}t^7 + \frac{1}{9 \cdot 9!}t^9 - \dots \Big|_0^x \\ \Rightarrow \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt &= x - \frac{1}{3 \cdot 3!}x^3 + \frac{1}{5 \cdot 5!}x^5 - \frac{1}{7 \cdot 7!}x^7 + \frac{1}{9 \cdot 9!}x^9 - \dots \end{aligned}$$

**9. Beispiel:**  $\frac{\pi}{4} = \arctan(1)$ , Rechnung

$$\leadsto \arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad (\text{für } |x| \leq 1)$$

$$\leadsto \pi = 4 \cdot \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right)$$

**10. Beispiel:**  $\int_0^x e^{-t^2} dt = ?$

(keine elementare Stammfunktion)

$$\begin{aligned} \leadsto \int_0^x e^{-t^2} dt &= \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-t^2)^k dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-1)^k t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x \frac{1}{k!} (-1)^k t^{2k} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \cdot (2k+1)} (-1)^k t^{2k+1} \Big|_0^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \cdot (2k+1)} (-1)^k x^{2k+1} \\ \Rightarrow \int_0^x e^{-t^2} dt &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \cdot (2k+1)} (-1)^k x^{2k+1} \end{aligned}$$

**11. Beispiel:** Ein Problemfall:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$$

$$f''(x) = \frac{4e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^6} - \frac{6e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = 0$$

$$f'''(x) = \frac{24e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^5} - \frac{36e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^7} + \frac{8e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^9}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f'''(x) = 0$$

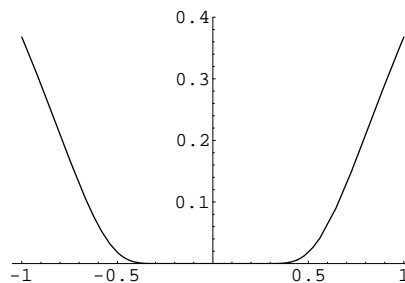
$$f^{(4)}(x) = -\frac{120e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^6} + \frac{300e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^8} - \frac{144e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{10}} + \frac{16e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{12}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f^{(4)}(x) = 0$$

$$f^{(n)}(x) = \dots, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) = 0$$

$$\leadsto f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0}{n!} x^n \equiv 0 \leadsto \text{Widerspruch!}$$

$$\text{Grund } R_n(x, \xi) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \gg 1, \quad |\xi| \in (0, x), \quad x < 1$$

$\leadsto$  Potenzreihe konvergiert nicht!



## Anwendungen — Applications

Potenzreihen sind zweifellos wichtig zur approximativen Berechnung numerischer Funktionswerte irrationaler und transzendenter Funktionen.

$$\text{Bsp.: } \sin(0.5) = \frac{1}{1!} 0.5 - \frac{1}{3!} 0.5^3 + \frac{1}{5!} 0.5^5 - \frac{1}{7!} 0.5^7 + \frac{1}{9!} 0.5^9 - \dots \approx 0.479426$$

$$\text{Eine andere Anwendung ist die } \mathbf{Linearisation}: \quad x \in U_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \approx \frac{f(x_0)}{0!} \cdot (x - x_0)^0 + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)^1 = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Allgemein versucht man also, eine Funktion durch die Anfangsterme ihrer Potenzreihe zu ersetzen. Die Genauigkeit nimmt dann in der Regel ab mit  $|x - x_0|$ .



**Bsp.:**  $|x| < 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \approx 1 + x, \quad \frac{1}{1-0.0001} = \frac{1}{0.9999} \approx 1 + 0.0001 = 1.0001$$

Hier ist eine Potenzreihenentwicklung allerdings nicht notwendig, da es sich um eine geometrische Reihe handelt.

**Bsp.:**  $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-q} \in \mathcal{CONV}, \quad |q| = |x| < 1$

Sei  $a \neq 0$ ,  $\frac{1}{1+x} = \frac{a}{a(1+x)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-a+1}{a}}, \quad \frac{1}{1+\frac{x-a+1}{a}} \in \mathcal{CONV},$   
 $|q| = \left|\frac{x-a+1}{a}\right| < 1, \quad |x-a+1| < a, \quad x \in (-1, 2a-1)$

**Bsp.:**  $\int_0^x t^3 \sin t^2 dt = ?$

**Aufgabe:** Berechne 8 zählende Glieder der Potenzreihenentwicklung.

$$\begin{aligned} \sin t &\approx -\frac{t^{15}}{1307674368000} + \frac{t^{13}}{6227020800} - \frac{t^{11}}{39916800} + \frac{t^9}{362880} - \frac{t^7}{5040} + \frac{t^5}{120} - \frac{t^3}{6} + t \\ &\rightsquigarrow t^3 \sin t^2 \approx -\frac{t^{33}}{1307674368000} + \frac{t^{29}}{6227020800} - \frac{t^{25}}{39916800} + \frac{t^{21}}{362880} - \frac{t^{17}}{5040} + \frac{t^{13}}{120} - \frac{t^9}{6} + t^5 \\ &\rightsquigarrow \int_0^x t^3 \sin t^2 dt \approx -\frac{x^{34}}{44460928512000} + \frac{x^{30}}{186810624000} - \frac{x^{26}}{1037836800} + \frac{x^{22}}{7983360} - \frac{x^{18}}{90720} + \frac{x^{14}}{1680} - \frac{x^{10}}{60} + \frac{x^6}{6} \end{aligned}$$

### Landaus 'O'-Symbol — Le symbole 'O' de Landau

In der Praxis setzt man zur Berechnung von Werten transzendenter Funktionen mittels Potenzreihen üblicherweise Computer ein. Dabei ist es notwendig, die unendlichen Reihen durch endliche Reihen (Taylorpolynome) zu ersetzen. Für den Verweis auf die weggelassenen Terme verwendet man in der Literatur üblicherweise das **Symbol 'O'** von **Landau**:

$$\begin{aligned} \text{Symbol:} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + R_n(x, x_0) := \\ &\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + O[x-x_0]^{n+1}, \quad R_n(x, x_0) := O[x-x_0]^{n+1} \end{aligned}$$

'O' steht dabei für „Ordnung“ ( $O[x-x_0]^{n+1} \rightsquigarrow$  Potenzen der Ordnung (Polynom vom Grad!) mindestens  $n+1$ ).

Gegeben seien zwei Folgen  $\langle a_n \rangle$  und  $\langle b_n \rangle$ . Allgemeiner definieren wir:

$$\begin{aligned} \text{Definition:} \quad \langle a_n \rangle &= O(\langle b_n \rangle) \Leftrightarrow (\exists_{M \in \mathbb{R}^+} : \left| \frac{a_n}{b_n} \right| \leq M) \\ \langle a_n \rangle &= o(\langle b_n \rangle) \Leftrightarrow \left( \frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0 \right) \end{aligned}$$

**Bsp.:**

1.  $\langle n^3 - 4n^2 + 5n + 9 \rangle = O(n^3)$
2.  $\langle n^3 - 4n^2 + 5n + 9 \rangle = o(e^n)$

**Wichtig:**

Z.B. *Mathematica* verwendet auch dieses Symbol! Für die Rechnung mit Reihen muss es unterdrückt werden. Dafür existiert der Befehl „Normal“ .

## Kapitel • Chapitre 7

# Differentialrechnung im n-dimensionalen Raum — Calcul différentiel dans l'espace à dimens. n

### 7.1 Funktionen mit mehreren Veränderlichen — Fonctions à plusieurs variables

#### 7.1.1 Beispiele — Exemples

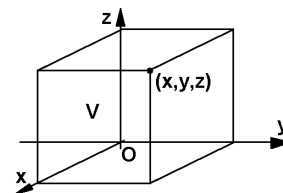
Funktionen mit mehreren Variablen sind uns schon öfters begegnet. Eine Belegung der Variablen mit Werten entspricht hier einem Punkt  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ .

1. Beispiel:  $E_{\text{pot}}(m, h) = g \cdot m \cdot h$

2. Beispiel:

Volumen:

$$V(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$$

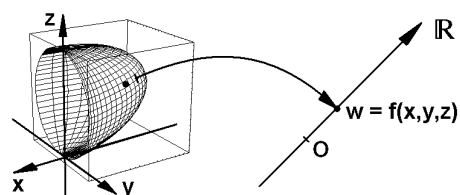


3. Beispiel: Lokale Temperatur beim Erwärmen eines Körpers:  $T = T(x, y, z, t, \rho)$

4. Beispiel: 
$$f(x, y, z, w) = \frac{x e^y + (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 + w^2)^{\frac{1}{2}} \cdot x y^{\frac{y+z}{|x+w|}}}$$

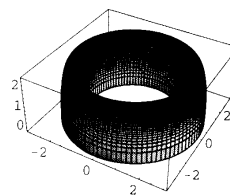
5. Beispiel:

$$w = f(x, y, z) = \sqrt{\sin(e^{x+y^2} - z)} \cdot \cos(z - x)$$



**6. Beispiel:**

$$f(x, y) = z = \sqrt{(9 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)}$$



Offensichtlich ist im letzten Beispiel  $f(x, y) \in \mathbb{R}$ , wenn  $r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 3 \wedge r = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 2$ , d.h.  $r \in [2, 3]$ . Der Definitionsbereich ist somit ein Kreisring um den Ursprung. Man kann nachrechnen, dass das Intervall  $[0, 2.5]$  der Wertebereich ist. Bei Standardfunktionen mit nur einer Variablen hatten wir normalerweise Intervalle als Definitionsbereich. Diese einfache Situation ist hier nicht mehr gegeben.

Bei den Wertebereichen hingegen ist die Situation nicht anders als bei Funktionen mit nur einer Variablen. Wir treffen hier wieder Teilmengen  $\subseteq \mathbb{R}$ .

**7.1.2 Definitionsbereiche — Domaines de définition**

Normalerweise wollen wir Funktionen betrachten, deren Definitionsbereich Gebiete  $\subseteq \mathbb{R}^n$  oder Vereinigungen von solchen sind. Den recht anschauliche Begriff „Gebiete“ schränken wir wie folgt ein:

**Definition:**

Eine Menge  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  heisst **offen**, wenn es zu jedem Punkt  $P \in G$  eine ganze Umgebung gibt, die ebenfalls ganz in  $G$  drin liegt.

Zur Erinnerung:  $n$ -dimensionale Umgebungen sind  $n$ -dimensionale Kugeln ohne Rand (offene Kugeln):

$$U_r(P_0) = \{P(x, y, \dots) \in \mathbb{R}^n \mid |\overline{PP_0}| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \dots} < r\}$$

**Definition:**

Eine Menge  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  heisst **zusammenhängend**, wenn sich zwei verschiedene Punkte  $\in G$  immer durch eine Kurve verbinden lassen, die ganz innerhalb von  $G$  verläuft.

**Definition:**

Eine offene und zusammenhängende Teilmenge  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  heisst **Gebiet**. Der Einfachheit halber wollen wir hier für  $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $n > 2$  ebenfalls „Gebiet“ sagen.

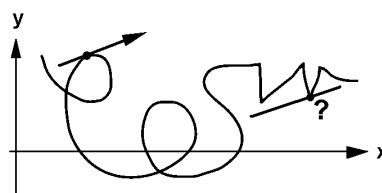
Ein Gebiet heisst **endlich**, falls es ganz in einer  $n$ -dimensionalen Kugel mit Radius  $r \in \mathbb{R}$  Platz hat. Andernfalls heisst es **unendlich**.

Für das weitere Verständnis der Sache betrachten wir endliche Gebiete  $G \subseteq \mathbb{R}^2$ . „endlich“ bedeutet, dass ein solches Gebiet berandet sein muss. Wegen der Offenheit kann aber der **Rand**  $\partial G$  nicht zu  $G$  gehören. Der Rand wird uns nun Probleme bereiten, falls wir keine Einschränkungen machen. Man denke z.B. an den Fall, dass ein Stück des Randes aus einem „unendlich dichten Kamm“ besteht, d.h. eine Funktion, die in den rationalen Punkten 0 und in den irrationalen 1 ist. Sowas ist sehr unbequem beim Arbeiten. Wir betrachten daher immer nur Gebiete mit „vernünftigem Rand“, d.h. Randkurven, die sich durch vernünftige Vektorfunktionen beschreiben lassen. Daher sagen wir hier:

**Definition:**

Eine Kurve heisst **glatt**, wenn die zugehörige Vektorfunktion differenzierbar ist und gilt:  $\vec{v}'(t) \neq \vec{0}$ .

Eine Kurve heisst somit glatt, wenn der Tangentenvektor existiert und nicht abrupt die Richtung ändert. Das Profil eines Igels wäre demnach nicht glatt.

**Definition:**

Wir nennen hier ein Gebiet endliches  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  „vernünftig“, wenn die Randkurve stückweise glatt ist.

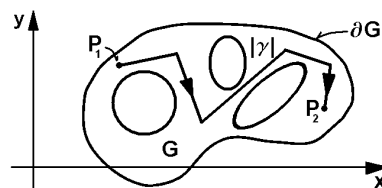
Wir wollen fortan hier in unserem Rahmen unter „Gebieten“ immer vernünftige Gebiete verstehen, wenn wir das nicht ausdrücklich sagen.

Analog gehen wir vor im  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 2$  oder wenn sich das Gebiet in irgend einer Weise zum Teil ins Unendliche ausdehnt. Im  $\mathbb{R}^3$  z.B sind dann die Ränder im endlichen „vernünftigen“ Fall geschlossene Flächen.

**Definition:**

Falls man in einem Gebiet  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  zu zwei Punkten alle Verbindungskurven ineinander deformieren kann, ohne das Gebiet zu verlassen, so nennen wir das Gebiet **einfach zusammenhängend**. Andernfalls heisst es **mehrfach zusammenhängend**. Analog für  $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $n > 2$

Im mehrfach zusammenhängenden Fall gibt es Löcher im Gebiet!



### 7.1.3 Funktionstypen — Types de fonctions

Bei den Funktionen mit nur einer Variablen sind die Funktionstypen ausführlich beschrieben worden. Wir wollen hier dieselben Bezeichnungen verwenden. Da kaum Missverständnisse möglich sind, wollen wir darauf verzichten, die Klassen explizit zu definieren. Zur Erklärung der Klassen lassen wir Beispiele wirken:

#### 1. Lineare Funktionen im $\mathbb{R}^n$ :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n + \alpha_0$$

Speziell im  $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= Ax + By + Cz + D \\ f(x, y, z) &= Ax + By + Cz + D = \text{const.} \leadsto \text{Ebene !} \end{aligned}$$

#### 2. Quadratische Funktionen im $\mathbb{R}^n$ :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2 + \beta_1 x_1 x_2 + \dots + \beta_j x_{n-1} x_n + \gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_n x_n + \delta_0$$

Speziell im  $\mathbb{R}^2$ :

$$f(x, y) = A x^2 + B x y + C y^2 + D x + E y + F$$

### 3. Polynome mit mehreren Variablen:

Z.B. ein Polynom mit zwei Variablen vom Grad  $n$ :

$$f(x, y) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} y + \dots + \alpha_0 y^n + \beta_{n-1} x^{n-1} + \beta_{n-2} x^{n-2} y + \dots + \beta_0 y^{n-1} + \dots + \mu_1 x + \mu_2 y + \nu$$

Kürzer geschrieben mit Doppelindices:

$$f(x, y) = \sum_{\substack{i,k=0 \\ i+k \leq n}}^n \alpha_{i,k} x^i y^k$$

Allgemeiner:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_j) = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_j=0 \\ k_1 + \dots + k_j \leq n}}^n \alpha_{k_1, \dots, k_j} \cdot x_1^{k_1} \cdot \dots \cdot x_j^{k_j}$$

### 4. Gebrochen rationale Funktionen im $\mathbb{R}^n$ :

Z.B. mit zwei Variablen:

$$f(x, y) = \frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{\delta x + \varepsilon y + \zeta}$$

### 5. Beliebige zusammengesetzte Funktionen im $\mathbb{R}^n$ :

Z.B. mit zwei Variablen:

$$f(x, y) = \sin(x \cdot y) - \ln(\sin(x^2) - y^2 \cdot \cos(\frac{x+y+1}{x-y+2}))$$

## 7.1.4 Aspekte der Darstellung — Aspects de la représentation

### „Vernünftige Funktionen“ mit zwei Variablen — „Fonctions raisonnables“ à deux variables

Sei  $f : (x, y) \mapsto z = f(x, y)$  „vernünftige Funktion“

$\leadsto$  Definitionsbereich: vernünftiges Gebiet. Keine Sprünge, keine Pole, keine Definitionslücken, glatt, wie es schon von Funktionen mit eindimensionalen Definitionsbereichen bekannt ist (für  $n$ -dimensionale angepasste exakte Definitionen vgl. später).

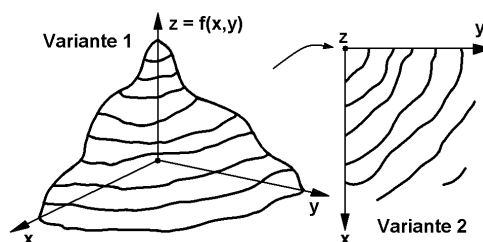
$n = 2$

$\leadsto$  Das Bild des Graphen ist eine Fläche im  $\mathbb{R}^3$ .

**Begriffe:**

Allfällige durch  $z = f(x, y) = \text{const.}$  definierte Linien heissen **Höhenlinien** oder **Niveaulinien**

Entsprechend reden wir bei  $f(x, y, z)$  von **Niveauflächen** und bei  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  von **Niveauhyperebenen**.



**Schreibweise:**

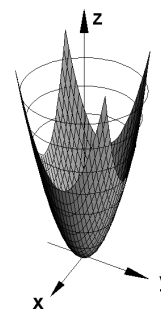
$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) := f(P), \quad P = P(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D_f \subseteq \mathbb{R}^n$$

Die Projektion der Höhenlinien auf die  $xy$ -Ebene ergibt die **Höhenlinienkarte** (Contour-Plot).

### Beispiele — Exemples

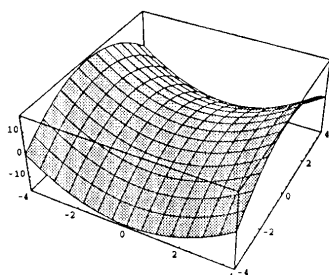
⊙ **1. Beispiel:**  $f(x, y) = 4x - 2y + 6 = z = \text{const.} = c$   
 $\Rightarrow y = \frac{4x + 6 - c}{2} = 2x + (3 - \frac{c}{2}) \leadsto$  Geraden

⊙ **2. Beispiel:**  
 $z = f(x, y) = x^2 + y^2$   
Höhenlinien: Kreise  
 $x = c = \text{const.} \Rightarrow z = c + y^2$   
 $\leadsto$  Parabel

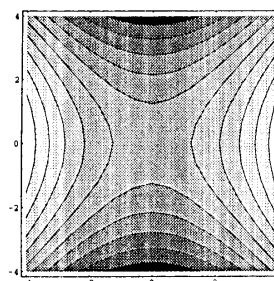


⊙ **3. Beispiel:**  $z = f(x, y) = x^2 - y^2$

`Plot3D[x^2-y^2, {x, -4, 4}, {y, -4, 4}];`



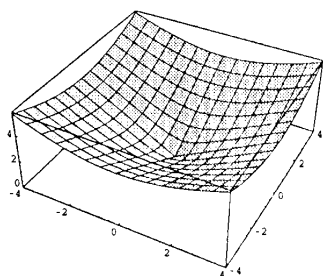
`ContourPlot[x^2-y^2, {x, -4, 4}, {y, -4, 4}];`



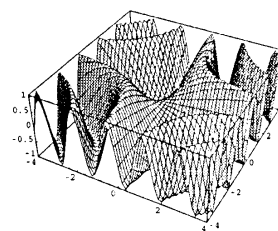
⊙ **4. Beispiel:**  
 $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

**5. Beispiel:**  
 $f(x, y) = \sin(xy)$

```
Plot3D[Sqrt[x^2+y^2], {x, -4, 4}, {y, -4, 4}];
```



```
Plot3D[Sin[x y], {x, -4, 4}, {y, -4, 4}, PlotPoints->50];
```



- ⊙ **6. Beispiel:**  $z = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = \text{const.} \leadsto$  Die Hyperflächen sind konzentrische Kugeln.

## 7.2 Stetigkeit — Continuité

### 7.2.1 Das neue Problem — Le problème nouveau

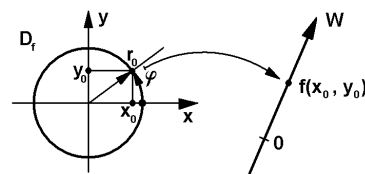
Bsp.:

Sei  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

Es ist:

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{x}{r} \cdot \frac{y}{r} = \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot \sin(2\varphi) \leadsto \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \cdot \sin(2\varphi) := g(\varphi)$$



Sei  $x = x_0 \neq 0 \Rightarrow f(x_0, y) = f_1(y) = y \cdot \frac{x_0}{x_0^2 + y^2} \rightarrow 0$  für  $y \rightarrow 0$

Sei  $y = y_0 \neq 0 \Rightarrow f(x, y_0) = f_2(x) = y \cdot \frac{y_0}{x^2 + y_0^2} \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow 0$

Sei  $x = x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0, y) = g(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \sin(\pi) \rightarrow 0$  für  $y \rightarrow 0$

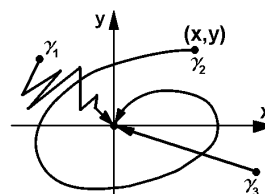
Sei  $y = y_0 = 0 \Rightarrow f(x, y_0) = g(0) = \frac{1}{2} \cdot \sin(0) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow 0$

Jedoch:

Sei  $x = y \Rightarrow f(x, y) = g(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0$  für  $x = y \rightarrow 0$

**Konsequenz:**

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)}$  hängt vom Weg ab, auf dem  $(x, y)$  gegen  $(0, 0)$  geht .



Entsprechend im  $\mathbb{R}^n$  für

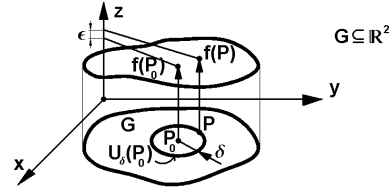
$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow P_0(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0})$$



### 7.2.2 Stetigkeitsdefinition — Définition de la continuité

#### In einem Punkt — Dans un point

Daher wollen wir eine Funktion mit  $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$  **stetig** nennen, wenn  $\lim_{P \rightarrow P_0}$  existiert und nicht vom Weg  $\gamma$  abhängt, auf dem  $P$  gegen  $P_0$  strebt.



**Definition:**  $f(P)$  stetig in  $P_0$

$$\Leftrightarrow \forall_{\gamma(P, P_0)} : \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$$

„Epsilonontisch“:  $\dots \Leftrightarrow \forall_{\epsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{P \in U_\delta(P_0)} : f(P) \in U_\epsilon(f(P_0))$   
 oder  $|f(P) - f(P_0)| < \epsilon$

**Bemerkung:** Falls nur  $\lim_{P \rightarrow P_0}$  existiert, jedoch  $f(P) \neq f(P_0)$ , so ist  $f$  nicht stetig, obwohl der Grenzwert für  $P \rightarrow P_0$  existiert.

**Schreibweise:**  $f \in \text{stetig}(P_0), f \in \mathcal{C}(P_0)$

#### In einem Gebiet — Dans une région

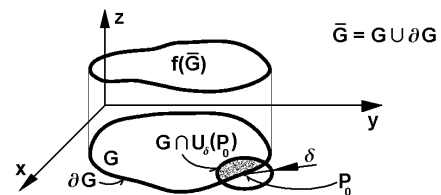
**Definition:**  $f$  stetig in  $G \subseteq \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \forall_{P_0 \in G} f \in \mathcal{C}(P_0)$

**Bemerkung:** (Zu abgeschlossenen Gebieten )

Sei  $\bar{G} = G \cup \partial G$

$f$  stetig auf  $\bar{G}$

$\Leftrightarrow$  **stetig in**  $G \wedge f$  stetig auf  $\partial G$



$$\text{d. h. } P_0 \in \partial G \Rightarrow \lim_{\substack{P \rightarrow P_0 \\ P \in U_{P_0} \cap \bar{G}}} f(P) = f(P_0)$$

**Bsp.:**  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} = \sqrt{1 - r^2}$

$$\Rightarrow D_f = \text{Kreis } K_{r=1}((0,0)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Formal hat sich hier gegenüber der Stetigkeitsdefinition von Funktionen mit nur einer Variablen nichts geändert. Nur die Bedeutung von  $P$  sowie die Abstandsdefinition ( $\overline{PP_0}$ ) ist jetzt eine andere ( $P \in \mathbb{R}^n$ ). Daher lassen sich die Stetigkeitssätze von Funktionen mit einer Variablen formal übertragen. Bei den Beweisen ändert sich nur die Art der Distanzbestimmung sowie die Umgebungen, die jetzt  $n$ -dimensionale Kugeln statt Intervalle sind.

**Satz:****Vor.:**

$$f(P), g(P) \in \mathcal{C}(P) \text{ resp. } \in \mathcal{C}(G)$$

**Beh.:**

$$1. f(P) \pm g(P) \in \mathcal{C}(P) \text{ resp. } \in \mathcal{C}(G)$$

$$2. f(P) \cdot g(P) \in \mathcal{C}(P) \text{ resp. } \in \mathcal{C}(G)$$

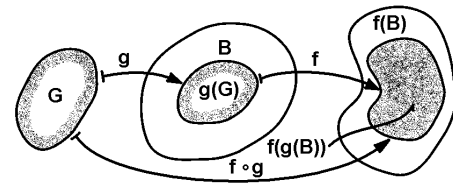
**3. Speziell:**

$$f(P) \cdot \lambda \in \mathcal{C}(G), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$4. g(P_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{f(P)}{g(P)} \in \mathcal{C}(P_0) \text{ resp. } \in \mathcal{C}(G)$$

Sei

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{g} & H = g(G) \hookrightarrow R = f(H) = f(g(G)) \\ P & \xrightarrow{g} & Q = g(P) \hookrightarrow S = f(Q) = f(g(P)) \\ \downarrow & & \uparrow \\ & \xrightarrow{f \circ g} & \end{array}$$

**Satz:****Vor.:**

$$g \in \mathcal{C}(P_0) \text{ resp. } \in \mathcal{C}(G), \\ f \in \mathcal{C}(Q_0), \quad Q_0 = g(P_0), \quad g \in \mathcal{C}(H), \quad H = g(G)$$

**Beh.:**

$$f \circ g \in \mathcal{C}(P_0) \text{ resp. } \in \mathcal{C}(G)$$

Seien  $g(x) = p_1(x)$ ,  $h(x) = p_2(x)$  Polynome mit einer VariablenBekannt:  $g(x), h(x) \in \mathcal{C}$  $\leadsto$  Wegen obigem Satz:  $g(x) \pm h(x), g(x) \cdot h(x) \in \mathcal{C}$ .Weiter:  $h(y_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{g(x)}{h(x)} \in \mathcal{C}, \quad y = y_0, \quad x \in \mathbb{R}$ 

Als Konsequenz ergibt sich dann das folgende Korollar:

**Korollar:****Vor.:**

$p(x_1, x_2, \dots, x_n), q(x_1, x_2, \dots, x_n)$  Polynome  
 $q(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$  in  $G$

**Beh.:**

$\triangleright p(x_1, x_2, \dots, x_n), q(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{C}(G)$   
 $\triangleright F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{p(x_1, x_2, \dots, x_n)}{q(x_1, x_2, \dots, x_n)} \in \mathcal{C}(G)$

**Beispiele:** Unstetigkeiten entstehen oft durch Definitionslücken, wie die folgenden Beispiele zeigen. Wie bei Funktionen mit nur einer Variablen sind diese Unstetigkeiten manchmal **hebbar**, manchmal aber sind sie es nicht (Pole oder Funktionswerte unbestimmt):

1. **1. Beispiel:**  $f_1(x, y) = \frac{1}{x+y} \notin \mathcal{C}$  für  $x = -y$
2. **2. Beispiel:**  $f_2(x, y) = \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \notin \mathcal{C}(0, 0)$  ( für  $x = y = 0$  )
3. **3. Beispiel:**  $f_3(x, y) = \sin\left(\frac{x+y}{x^4+y^4}\right) \notin \mathcal{C}(0, 0)$
4. **4. Beispiel:**  $f_4(x, y) = \frac{1}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}} \notin \mathcal{C}(0, 0)$

**Beispiel** einer stetigen Fortsetzbarkeit:

$f_5(x, y) = \frac{\sin(x \cdot y)}{x \cdot y}$  ist nicht definiert für  $x \cdot y = 0$ .

Die Substitution  $z := x \cdot y$  zeigt aber die stetige Fortsetzbarkeit für  $z := x \cdot y \rightarrow 0$ :

$f_5(x, y) = \frac{\sin(x \cdot y)}{x \cdot y} := g(z) = \frac{\sin(z)}{z} \rightarrow 1$  für  $z \rightarrow 0$  (Funktion mit nur einer Variablen. )

Dabei spielt es keine Rolle, auf welchem Weg  $x \cdot y$  gegen 0 geht.

**Konsequenz:** Seien :

$p(P) = p(x_1, x_2, \dots, x_n), q(P) = q(x_1, x_2, \dots, x_n)$  Polynome  
 $p(P) = p_1(P) \cdot h(P), q(P) = q_1(P) \cdot h(P), p_1(P), h(P), q(P)$  Polynome mit  $p_1(P_0) \neq 0, q_1(P_0) \neq 0, h(P_0) = 0$

Dann gilt:  $f(P) = \frac{p(P)}{q(P)} = \frac{p_1(P) \cdot h(P)}{q_1(P) \cdot h(P)} = \frac{p_1(P)}{q_1(P)} \Big|_{P \neq P_0}$

$\Rightarrow \lim_{P \rightarrow P_0} = \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{p_1(P)}{q_1(P)} = \frac{p_1(P_0)}{q_1(P_0)}$  existiert

$\leadsto f(P)$  in  $P_0$  stetig fortsetzbar

Falls also gebrochen rationale Funktionen in Zähler und Nenner eine Nullstelle in  $P_0$  derselben Vielfachheit haben, so ist die Unstetigkeit dort hebbar.

**Bsp.:**  $f(x, y) = \frac{x^2 y^2 - x y^3 + x y^2}{x^2 y^2 + 2x y^2} \notin \mathcal{C}((0, 0))$

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2 - x y^3 + x y^2}{x^2 y^2 + 2x y^2} = \frac{x y^2 (x - y + 1)}{x y^2 (x + 2)} = \frac{x - y + 1}{x + 2}, \quad \frac{x - y + 1}{x + 2} \in \mathcal{C}((0, 0)) \rightsquigarrow f(x, y) \text{ stetig in } (0, 0) \text{ fortsetzbar.}$$

### Stetigkeit in den Koordinaten — Continuité dans les coordonnées

Dass eine in  $P_0$  stetige Funktion mit  $D_f \in \mathbb{R}^n$  insbesondere stetig ist, wenn man auf den speziellen Wegen parallel zu den Koordinatenachsen gegen  $P_0$  geht, ist unumstritten. Man mag sich aber fragen, ob auch umgekehrt eine in den einzelnen Koordinaten für sich stetige Funktion dann auch generell stetig ist. Dazu gilt der folgende Satz:

**Satz:**

**Vor.:**

$$\bar{G} \subset D_f \subset \mathbb{R}^n$$

$$P_0 = (x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0}) \in \bar{G} \text{ beliebig}$$

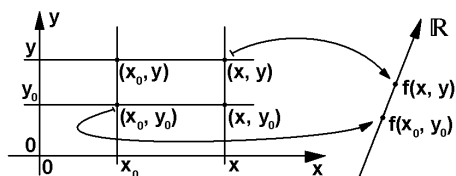
$$f_1(x_1) := f(x_1, x_{2_0}, \dots, x_{n_0}), \dots, f_n(x_n) := f(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_n)$$

**Beh.:**

$$f \in \mathcal{C}(P_0) \Leftrightarrow \forall_{k=1}^n : f_k(x_k) \in \mathcal{C}(x_{k_0})$$

Zum Beweis:  $\Rightarrow$  : nichts zu beweisen .

$\Leftarrow$ : Sei  $n = 2$ ,  $P_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$   
Seien  $|x - x_0| < \delta_1$ ,  $|y - y_0| < \delta_2$   
Da  $\bar{G}$  betrachtet wird, sind  $x$  und  $y$  Variablen über abgeschlossenen Intervallen  $\bar{I}_x, \bar{I}_y$ .



$$\rightsquigarrow f_1(x) := f(x, y_0), \quad f_2(y) := f(x_0, y) \in \mathcal{UNIFCONV}$$

$$\rightsquigarrow |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow \forall_{x_0 \in \bar{I}_x} |f(x, y) - f(x_0, y)| < \varepsilon_1(y),$$

$$\rightsquigarrow |y - y_0| < \delta_2 \Rightarrow \forall_{y_0 \in \bar{I}_y} |f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon_2(x)$$

$$\Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |f(x, y) - f(x, y_0) + f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| \\ \leq |f(x, y) - f(x, y_0)| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon_2(x) + \varepsilon_1(y) \rightarrow 0 \text{ für } (x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$$

Entsprechend für mehr als zwei Variablen.

**Konsequenz:** Um die Stetigkeit zu untersuchen, genügt es somit, die Stetigkeit nur in den einzelnen Koordinaten zu untersuchen.

**Bsp.:**  $\sin(x \cdot y) \in \mathcal{C}$  denn  $\sin(x_0 \cdot y) \in \mathcal{C} \wedge \sin(x \cdot y_0) \in \mathcal{C}$

## 7.3 Partielle Ableitungen — Dérivées partielles

### 7.3.1 Ableitungsarten — Manières de définir une dérivée

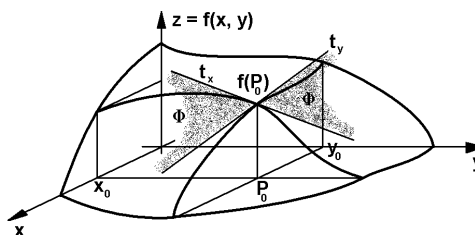
**Problem:**

Wir betrachten die Funktion  $f(x, y) = x^3 - x \cdot y^2 + y$ .

Sei  $P_0 = (x_0, y_0) = (2, 4)$ ,  $f_1(x) = f(x, y_0) = x^3 - x \cdot 16 + 4$ ,  $f_2(y) = f(x_0, y) = 8 - 2 \cdot y^2 + y$

$f'_1(x) = 3x^2 - 16$  ist dann die Steigung auf der Funktionsfläche in  $x$ -Richtung mit  $y = 4$

$f'_2(y) = -4x + 1$  ist entsprechend die Steigung auf der Funktionsfläche in  $y$ -Richtung mit  $x = 2$ .



Dieses Beispiel zeigt die allgemeine Situation bei differenzierbaren Funktionen.

Sei  $\gamma: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \sin(x) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow f_\gamma(x) = x^3 - x \cdot \sin^2(x) + \sin(x) \Rightarrow f'_\gamma(x) = 3x^2 - \sin^2(x) - x \cdot 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) + \cos(x)$$

Das ist die  $z$ -Komponente der Ableitung des Vektors ( $\leadsto$  Tangentenvektor!):  $\begin{pmatrix} x \\ \sin(x) \\ f'_\gamma(x) \end{pmatrix}$

$\leadsto$  Kein einfacher Vektor mehr.

**Konsequenz:** Bei Funktionen mit mehreren Variablen können Ableitungen nach einer fixen Variablen auf verschiedene Arten gebildet werden. Die Bedeutung einer solchen Ableitung hängt von der Art ab, wie sie definiert worden ist.

### 7.3.2 Partielle Ableitungen — Dérivées partielles

**Geg.:**  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $P_0 = (x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0}) = (c_1, c_2, \dots, c_n)$

$\leadsto f_1(x_1) := f(x_1, x_{2_0}, \dots, x_{n_0}) = f(x_1, c_2, \dots, c_n), \dots$

$\dots, f_n(x_n) := f(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_n) = f(c_1, c_2, \dots, x_n)$  sind Funktionen mit nur einer Variablen.

$\leadsto (f_k(x_k))'_{x_k} = \frac{d}{dx_k} f_k(x_k)$  ist die Steigung der Tangente an den Graphen von  $f_k$  als Funktion von  $x_k$ .

Ebenso ist es die Steigung der Tangente an die Funktionshyperfläche von  $f$  als Funktion von  $x_k$ ,  $x_i = c_i$  fix für  $i \neq k$ .

**Definition:**

$$(f_k(x_k))'_{x_k} = \frac{d}{dx_k} f_k(x_k) := \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

heißt **partielle Ableitung** von  $f$  nach  $x_k$ .

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  heißt **partiell differenzierbar** nach  $x_k$  (für  $x_k = x_{k_0} \dots$ )

**Bemerkung:**

Man spricht hier auch von der 1. partiellen Ableitung.

**1. Beispiel:**  $f(x, y) = \sin(x \cdot y) + x^3 - x e^y - y$

$$\begin{aligned}
(f(x, y_0))'_x &= \frac{d}{dx} f(x, y_0) := \frac{\partial f(x, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial(\sin(x \cdot y_0) + x^3 - x e^{y_0} - y_0)}{\partial x} \\
&= \cos(x \cdot y_0) \cdot y_0 + 3x^2 - 1 e^{y_0} - 0 \\
(f(x_0, y))'_y &= \frac{d}{dy} f(x_0, y) := \frac{\partial f(x_0, y)}{\partial y} = \frac{\partial(\sin(x_0 \cdot y) + x_0^3 - x_0 e^y - y)}{\partial y} \\
&= \cos(x_0 \cdot y) \cdot x_0 + 0 - x_0 e^y - 1
\end{aligned}$$

**2. Beispiel:**  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 5xy + 3y + 4$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 5y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 5x + 3, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z$$

### 7.3.3 Höhere partielle Ableitungen — Dérivées partielles supérieures

Sei  $\frac{\partial}{\partial f} x_k := g(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$  wieder eine nach  $x_k$  differenzierbare Funktion  $\leadsto \frac{\partial}{\partial g} x_i$  ist bildbar.

**Definition:**  $\frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial}{\partial x_k} f \right) = (f'_{x_k})'_{x_i} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} := f''_{x_k x_i} := D^2_{x_k x_i} f$   
 heisst **partielle Ableitung 2-ter Ordnung** von  $f$  nach  $x_k$  und  $x_i$ .

Entsprechend bildet man partielle Ableitungen  $n$ -ter Ordnung.

**Speziell:**  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_k} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$  u.s.w

**Bsp.:**  $f(x, y) = \sin(x^2 y)$

$$\begin{aligned}
f'_x(x, y) &= \cos(x^2 y) \cdot 2xy, & f'_y(x, y) &= \cos(x^2 y) \\
f''_{xx}(x, y) &= -\sin(x^2 y) \cdot 4x^2 y^2 + \cos(x^2 y) \cdot 2y \\
f''_{xy}(x, y) &= -\sin(x^2 y) \cdot 2x^3 y + \cos(x^2 y) \cdot 2x \\
f''_{yx}(x, y) &= -\sin(x^2 y) \cdot 2x^3 y + \cos(x^2 y) \cdot 2x \\
f''_{yy}(x, y) &= -\sin(x^2 y) \cdot x^4 y + \cos(x^2 y) \cdot 0 = -\sin(x^2 y) \cdot x^4 y
\end{aligned}$$

### 7.3.4 Eigenschaften partieller Ableitungen — Qualités de dérivées partielles

Die folgenden Sätze formulieren wir für Funktionen mit zwei Variablen. Sie gelten entsprechend auch für Funktionen mit mehreren Variablen.

**Satz:** Vor.:

$$D_f = G \subset \mathbb{R}^2, \quad f'_x, f'_y \in \text{beschränkt}(G)$$

Beh.:  $f(x, y) \in \mathcal{C}(G)$

Zum Beweis:

Sei  $P_0 = (x_0, y_0) \in \bar{G}_k \subset G \Rightarrow f(x, y_0) \in \mathcal{C}(x_0), f(x_0, y) \in \mathcal{C}(y_0)$ . Differenzierbare Funktionen mit einer Variablen sind stetig.

$\Rightarrow \forall_{(x_0, y_0) = P_0 \in \bar{G}_k} f(x, y) \in \mathcal{C}(x_0, y_0)$   
 (Stetigkeit in den Koordinaten bedeutet Stetigkeit gemeinhin)  
 $\leadsto \forall_{\bar{G}_k \in G} f \in \mathcal{C}(\bar{G}_k) \Rightarrow f \in \mathcal{C}(G)$

**Satz:****Vor.:**

$\bar{G} \subseteq D_f \subset \mathbb{R}^2$ ,  $f'_x, f'_y$  existieren in  $\bar{G}$

**Beh.:**

$f(x, y) \in \text{beschränkt}(\bar{G})$

Zum Beweis:

Konsequenz aus dem entsprechenden Satz über Funktionen mit nur einer Variablen.

**Satz:****Vertauschbarkeitssatz der partiellen Ableitungen****Vor.:**

$f \in \mathcal{C}(\bar{G})$ ,  $f''_{xy}, f''_{yx} \in \mathcal{C}(G)$

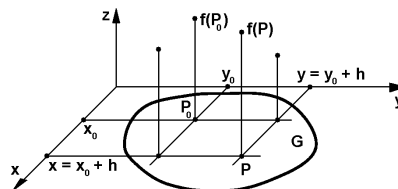
**Beh.:**

$f''_{xy} = f''_{yx}$

Zum Beweis:

Sei

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= f(x, y) - f(x, y_0) \\ &= f(x, y_0 + k) - f(x, y_0) \\ \psi(y) &= f(x, y) - f(x_0, y) \\ &= f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)\end{aligned}$$

Sei  $A := f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$ 

$\triangleright$  (1)  $A = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x) =_{|(*)} h \cdot \varphi'(x_0 + \lambda_1 h)$ ,  $\lambda_1 \in [0, 1] \wedge \varphi'(x) = f'_x(x, y_0 + k) - f'_x(x, y_0)$   
 (\*)  $\leadsto$  Mittelwertsatz

$$\begin{aligned}\Rightarrow A &= h \cdot (f'_x(x_0 + \lambda h, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \lambda h, y_0)) \\ &=_{|(*)} k \cdot (h \cdot f''_{xy}(x_0 + \lambda_1 h, y_0 + \mu_1 k)), \quad \mu_1 \in [0, 1], \quad h \neq 0\end{aligned}$$

$\triangleright$  (2)  $A = \psi(y_0 + k) - \psi(y_0) =_{|(*)} k \cdot \psi'(y_0 + \mu_2 k)$ ,  $\mu_2 \in [0, 1]$ ,  $\psi'(y) = f'_y(x_0 + h, y) - f'_y(x_0, y)$   
 $\Rightarrow A = k \cdot (f'_y(x_0 + h, y_0 + \mu_2 k) - f'_y(x_0, y_0 + \mu_2 k))$   
 $=_{|(*)} k \cdot (h \cdot f''_{yx}(x_0 + \lambda_2 h, y_0 + \mu_2 k)), \quad \lambda_2 \in [0, 1], \quad k \neq 0$

$\triangleright$  (3)  $\Rightarrow A =_{|(\lambda)} h \cdot k \cdot f''_{xy}(x_0 + \lambda_1 h, y_0 + \mu_1 k) =_{|(\lambda)} k \cdot h \cdot f''_{yx}(x_0 + \lambda_2 h, y_0 + \mu_2 k)$ ,  $h, k \neq 0$   
 $\Rightarrow f''_{xy}(x_0 + \lambda_1 h, y_0 + \mu_1 k) = f''_{yx}(x_0 + \lambda_2 h, y_0 + \mu_2 k)$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in [0, 1]$

Nach Voraussetzung sind:  $f''_{xy}, f''_{yx} \in \mathcal{C}$

Für  $h, k \rightarrow 0$  folgt daher:  $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$



Falls die gemachten Stetigkeitsvoraussetzungen zutreffen, so folgt jetzt:

Ableitungen 0-ter Ordnung:	$\leadsto f(x, y)$	$\leadsto$	1
Ableitungen 1-ter Ordnung:	$\leadsto f'_x, f'_y$	$\leadsto$	2
Ableitungen 2-ter Ordnung:	$\leadsto f''_{xx}, f''_{xy} = f''_{yx}, f''_{yy}$	$\leadsto$	3
Ableitungen 3-ter Ordnung:	$\leadsto f'''_{xxx}, f'''_{xyx} = f'''_{yxx}, f'''_{xyy} = f'''_{yxy} = f'''_{yyx}, f'''_{yyy}$	$\leadsto$	4
$\vdots$			
Ableitungen $n$ -ter Ordnung:	$\leadsto \dots$	$\leadsto$	$n + 1$

**Konsequenz:**  $f(x, y)$  hat unter den Voraussetzungen des Vertauschungssatzes  $n + 1$  Ableitungen  $n$ -ter Ordnung.

## 7.4 Differential — Différentielle

### 7.4.1 Situation bei Funktionen mit nur einer Variablen — Situation pour les fonctions à une seule variable

Ein grosser Teil der komplexen Situation im Zusammenhang mit dem Begriff des Differentials lässt sich schon bei Funktionen mit nur einer Variablen verstehen. Daher studieren wir zuerst diese Situation.

Sei gegeben:

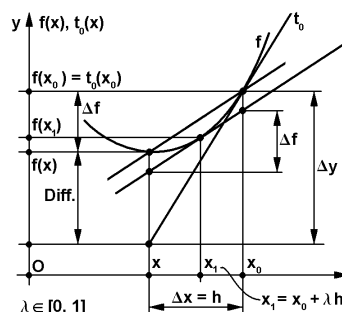
$x_0 \in I \subseteq \mathbb{R}, f: I \rightarrow \mathbb{R}, U_\delta(x_0) \subseteq I$

Sei  $f'$  existiert in  $I$ ,  $f' \in \mathcal{C} \Rightarrow$  die Tangentenrichtung ändert sich stetig.

Tangente in  $x_0$ :

$$t_0(x) = t_0(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0) = f(x_0) + \Delta x \cdot f'(x_0)$$

$$\Rightarrow \Delta y := t_0(x) - t_0(x_0) = \Delta x \cdot f'(x_0)$$



$\leadsto f(x)$  lässt sich in  $U_\delta(x_0)$  durch  $t_0(x)$  annähern.

Die Differenz resp. der Fehler ist

$$D = D(\Delta x) := \Delta f - \Delta y = f(x) - t_0(x) = f(x) - (f(x_0) + \Delta x \cdot f'(x_0)) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - \Delta x \cdot f'(x_0)$$

Wegen der Stetigkeit von  $f$  gilt:

$$\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow D(\Delta x) \rightarrow 0$$

$$D \text{ anders geschrieben: } D = \underbrace{(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0))}_{\Delta f} - \underbrace{\Delta x \cdot f'(x_0)}_{\Delta y}$$

Mittelwertsatz:

$$\Rightarrow f(x) - t_0(x) = D = \Delta f - \Delta y = \Delta x \cdot f'(x_0 + \lambda \Delta x) - \Delta x \cdot f'(x_0) = \Delta x \cdot (f'(x_0 + \lambda \Delta x) - f'(x_0)) = \Delta x \cdot \Delta f'$$

Man sieht unmittelbar:  $\Delta y = \Delta x \cdot f'(x_0)$  ist der lineare Anteil des Fehlers  $D$ .

Denn:  $\Delta f = \Delta x \cdot f'(x_0 + \lambda \Delta x)$  ist allgemein nicht linear in  $\Delta x$ .



Falls  $f''$  in  $I$  existiert, gilt nach dem Mittelwertsatz:

$$\begin{aligned} f(x) - t_0(x) &= \Delta x \cdot \Delta f' = \Delta x \cdot (f'(x_0 + \lambda \Delta x) - f'(x_0)) = \Delta x \cdot (\lambda \Delta x) \cdot f''(x_0 + \mu \cdot (\lambda \Delta x)) \\ &= (\Delta x)^2 \cdot \lambda \cdot f''(x_0 + \mu \cdot (\lambda \Delta x)), \quad \lambda, \mu \in [0, 1] \end{aligned}$$

Sei

$$\begin{aligned} |\lambda \cdot f''(x_0 + \mu \cdot (\lambda \Delta x))| &= |\lambda \cdot f''(x)| := |\varphi(x)| < M, \quad x \in U_\delta(x_0) \\ \Rightarrow |D| &= (\Delta x)^2 \cdot |\lambda \cdot f''(x_0 + \mu \cdot (\lambda \Delta x))| = (\Delta x)^2 \cdot \varphi(x) < (\Delta x)^2 \cdot M, \quad x \in U_\delta(x_0) \end{aligned}$$

Wenn  $f''(x)$  existiert in  $(\bar{U}_\delta(x_0))$

so existiert ein  $M$  mit  $|f''(x)| < M$

(Differenzierbar bedeutet stetig. Stetig auf einem abgeschlossenen Gebiet bedeutet beschränkt. )

### Konsequenz:

- ⊙ Bei der Annäherung von  $f$  durch die Tangente ist der Fehler:

$$D = f(x) - t_0(x) = \Delta x \cdot \Delta f'$$

- ⊙  $\Delta y = \Delta x \cdot f'(x_0)$  ist der lineare Anteil des Fehlers  $D$

- ⊙ Falls  $f''$  in  $\bar{U}_\delta$  existiert und stetig ist, gilt:

$$\exists_{M \in \mathbb{R}^+} |D| = (\Delta x)^2 \cdot |\varphi(x)| < (\Delta x)^2 \cdot M, \quad x \in U_\delta(x_0)$$

### Wichtig:

Der Fehler  $|D|$  geht mit  $(\Delta x)^2$  gegen 0.

- ⊙ Wenn  $f''$  beschränkt in  $U_\delta((x_0))$ :

$$\Delta y = \underbrace{\Delta x \cdot f'(x_0)}_{\text{lin. in } \Delta x} = \Delta f - \underbrace{D}_{\text{quadr. in } \Delta x}$$

Der lineare Anteil von  $\Delta f$  ist daher durch denjenigen von  $\Delta y$  gegeben.

$$\odot \Delta f = f(x) - f(x_0) = \Delta y + D = \Delta x \cdot f'(x_0) + \underbrace{\Delta x^2 \varphi(x)}_{\Delta y} \Rightarrow f(x) = f(x_0) + \underbrace{\Delta x \cdot f'(x_0)}_{\Delta y} + \underbrace{(\Delta x)^2 \cdot \varphi(x)}_D$$

$\varphi(x)$  beschränkt, falls  $f(x)$  beschränkt .

$\Delta y$  ist der lineare und somit für kleine  $\Delta x$  der wesentliche Teil des Zuwachses von  $f(x)$ .

Daher benennen wir  $\Delta y$  speziell:

### Begriff:

$\Delta y = \Delta x \cdot f'(x_0)$  heisst **Differential** von  $f$  in  $x = x_0$  (Genauer: „Endlich kleines“ Differential, im Gegensatz zum infinitesimalen Differential.)

Klassisch, d.h. im Sinne der modernen Standard–Analysis, sind infinitesimale Ausdrücke nur als Symbole verstehbar. Im Umfeld der Nicht–Standard–Analysis jedoch sind solche Ausdrücke sinnvolle Grössen. In diesem Sinne können wir daher definieren:

**Definition:**  $dy = dx \cdot f'(x_0)$  heisst **Differential** von  $f$  in  $x = x_0$ .

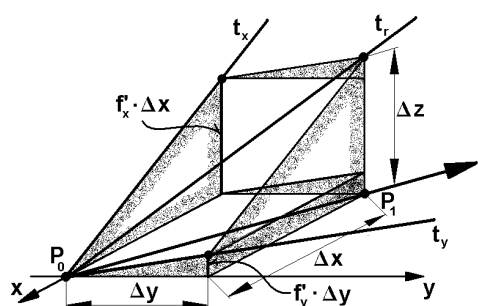
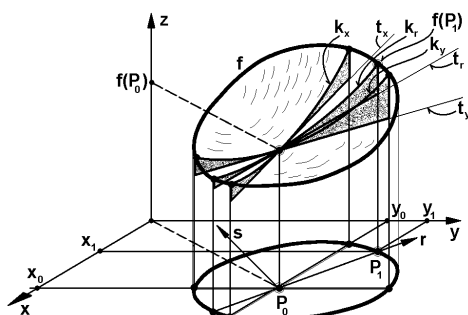
**Bemerkung:** Sei  $f$  analytisch

$\leadsto$  In  $U_\delta(x_0)$  ist  $f$  in eine Potenzreihe entwickelbar:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 + \dots \\ &= f(x_0) + \underbrace{\frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)}_{\Delta y = \Delta x \cdot f'(x_0)} + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 + \dots}_{(x-x_0)^2 \cdot \left( \frac{f''(x_0)}{2!} + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x-x_0) + \dots \right) = (\Delta x)^2 \cdot \varphi(x)} \\ &= f(x_0) + \Delta x \cdot f'(x_0) + \Delta x^2 \cdot \varphi(x) \end{aligned}$$

## 7.4.2 Situation bei Funktionen mit zwei und mehr Variablen — Situation pour les fonctions à deux et plus variables

Richtungsableitung, Differenzierbarkeit — Dérivée suivant une direction, dérivabilité



- ▷ Betrachte:  $f(x, y)$  in  $P_0 = (x_0, y_0)$ ,  $D_f \in \mathbb{R}^2$ ,  $P_0 \in D_f$
- ▷ Sei  $f \in \mathcal{D}(U_\delta(x_0, y_0)) \leadsto f'_x, f'_y \in \mathcal{C}(U_\delta(x_0, y_0))$  (stetig)
- ▷ Seien  $t_x, t_y$  Tangenten an die Funktionsfläche in  $(x_0, y_0)$   
 $t_x \leadsto \text{Steigung} = f'_x(x_0, y_0)$ ,  $t_y \leadsto \text{Steigung} = f'_y(x_0, y_0)$   
 Steigung von  $t_r$ :  $\Delta t_r = \Delta x \cdot f'_x + \Delta y \cdot f'_y$  (vgl. Skizze),  $\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \Rightarrow \text{Steigung} \approx \frac{\Delta t}{\Delta r}$
- ▷ Sei  $P_1 = (x_1, y_1) \in U_\delta(x_0, y_0) \in D_f$
- ▷ Sei  $t_r =$  Tangente in  $P_0$  an die Funktionsfläche mit der Projektion  $\overline{P_0 P_1}$  in der Grundebene  $xy$ .

Durch  $P_0, f(P_0), t_x, t_y$  ist im  $\mathbb{R}^3$  eine Ebene  $\Phi$  durch  $P_0^* = (x_0, y_0, f(P_0))$  bestimmt.

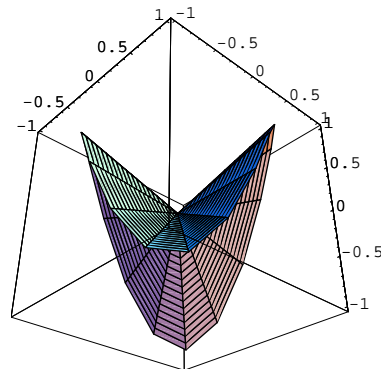
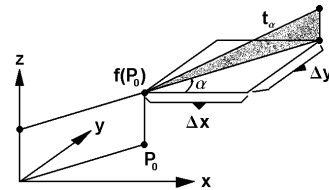
Wenn nun  $\Phi$  eine Tangentialebene im geometrischen Sinne an die Funktionsfläche ist, existiert in  $P_0^*$  in jeder  $xy$ -Richtung die Tangente an die Funktionsfläche. Dass das nicht unbedingt bei allen Funktionen immer so schön sein muss, zeigen einfache Beispiele. (Man braucht nur die Funktionsfläche von  $f(x, y) = x^2 + y^2$  entlang der Geraden  $y = x$  einzuknicken, so dass sie für  $t > 0$  die Gerade  $(x(t), y(t), z(t))^T = (t, t, t)^T$  berührt, für  $t < 0$  aber die Gerade  $(x(t), y(t), z(t))^T = -(t, t, t)^T$ , so hat man schon einen derart üblen Fall, wenn wir die Fläche noch entlang der Koordinatenachsen beibehalten.)

**Bsp.:**

Man betrachte die durch die folgende Parameterdarstellung gegebene Fläche:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ r \sin(2\varphi) \end{pmatrix},$$

$$r \in [0, 1], \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad P_0 = (0, 0, 0)$$



Es sei dem Leser überlassen, diese Funktion in der Form  $z = f(x, y)$  zu schreiben. ( $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\varphi = \arctan(\frac{y}{x}) \dots$ )

Die Darstellung zeigt, dass die Tangenten in  $P_0$  alle Mantellinien sind, mit  $\varphi$  die Richtung stetig ändern, jedoch keinesfalls in einer Ebene liegen. Ebenso sieht man anschaulich geometrisch, dass hier  $f'_x$  und  $f'_y$  in  $U_\delta(0, 0)$  nicht stetig sein können.

Wir nehmen an, dass in  $P_0$  die Tangente in allen Richtungen existiert.

$$\leadsto f_1(r, \alpha) := f(r \cos(\alpha), r \sin(\alpha)) \leadsto \frac{\partial f_1}{\partial r} \text{ bestimmt.}$$

Wir definieren:

**Definition:**

Die Steigung der Tangente in  $P_0$  in irgend eine Richtung  $\vec{r}$  der  $xy$ -Ebene nennen wir Ableitung in Richtung  $\vec{r}$  oder **Richtungsableitung**.

**Formel:**

$$D_{\vec{e}_{\vec{r}}}(f) = D^\alpha(f) := \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta r \cos(\alpha), y + \Delta r \sin(\alpha)) - f(x, y)}{\Delta r}, \quad \vec{r} = r \cdot \vec{e}_{\vec{r}} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

**Definition:**

$f$  heisst **differenzierbar** in  $P_0$ , wenn in  $P_0$  die Richtungsableitungen zu allen Richtungen existieren.

Um die Richtungsableitung nicht auf schwierige Weise mit obigem Limes berechnen zu müssen, suchen wir nun einen anderen Weg.

$\leadsto$  Siehe Seite 234

### Berechnung der Richtungsableitung — Calculer la dérivée suivant une direction

Die Berechnung der Tangentensteigung ist ein Problem, das sich auf Funktionen mit nur einer Variablen zurückführen lässt, wie die folgende Betrachtung zeigt:

**Trick:** Verwende ein neues Koordinatensystem, das durch Verschiebung und Drehung entsteht.

Neuer Ursprung  $P_0$ .

$r$ -Achse in Richtung  $\overrightarrow{P_0 P_1}$ .

$s$ -Achse entstanden aus der  $r$ -Achse durch positive Drehung um  $P_0$ , senkrecht auf der  $r$ -Achse.

Dadurch geht  $f(x, y)$  über in eine neue Funktion  $\Psi(r, s)$ :

$\leadsto$  Es gilt:

$$f(x_0, y_0) = f(P_0) = \Psi(0, 0), \quad f(x_1, y_1) = f(P_1) = \Psi(r_1, 0),$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} r_1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = D_\alpha \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \\ \leadsto \Psi(r_1, 0) &= \Psi^*\left(\begin{pmatrix} r_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \Psi^*\left(D_\alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix}\right) = f^*\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) = f^*\left(D_\alpha^{-1} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Damit sind alle Substitutionen als lineare Transformationen erkannt, durch die sich  $f(x_1, y_1)$  und  $\Psi(r_1, 0) := h(r_1)$  ineinander umrechnen lassen.

### Tangentialebenen — Plans tangents

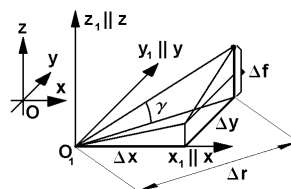
Oben (beim Differential) haben wir vorausgesetzt, dass  $f'_x(x, y) = f'_x(P)$ ,  $f'_y(x, y) = f'_y(P)$  in ganz  $U_\delta(x_0, y_0)$  stetig sein sollen. ( $\leadsto$  Steigungen der Tangenten  $t_x, t_y$  an die Funktionsfläche in  $(x_0, y_0)$ .)  $\leadsto f'_x(P)$ ,  $f'_y(P)$  stetig in  $U_\delta(P_0)$ .

$\leadsto f'_x(P)$ ,  $f'_y(P)$  continues dans  $U_\delta(P_0)$ .

Würden nun die Tangenten in  $P_0$  keine Tangentialebene bilden, so gäbe es eine Tangente, die nicht in der von  $t_x, t_y$  aufgespannten Ebene liegt und diese in einem Winkel  $\gamma$  schneidet. Daher müssten  $f'_x(x, y)$  oder  $f'_y(x, y)$  irgendwo in einem Punkt  $P_i = (x_i, y_i)$  beliebig nahe bei  $P_0 = (x_0, y_0)$  den Wert mit  $x$  oder  $y$  markant ändern, was im Widerspruch zur Stetigkeit von  $f'_x$  und  $f'_y$  steht. (Um dies anschaulich einzusehen, genügt es,  $f(x_i, y)$  und  $f(x, y_i)$  zu skizzieren.)

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x \cdot f'_x(x_i, y_i) + \Delta y \cdot f'_y(x_i, y_i)}{\Delta r} &= \\ \frac{\Delta r \cdot f'_r(x_i, y_i)}{\Delta r} &= \tan(\gamma) \neq \\ \frac{\Delta x f'_x(x_0, y_0) + \Delta y f'_y(x_0, y_0)}{\Delta r} &= \\ \approx \cos(\alpha) f'_x(x_0, y_0) + \sin(\alpha) f'_y(x_0, y_0) & \end{aligned}$$

Widerspruch!



**Konsequenz:** Die Stetigkeit von  $f'_x$  und  $f'_y$  in ganz  $U_\delta(x_0, y_0)$  bedeutet, dass in  $P_0$  eine Tangentialebene im anschaulich-geometrischen Sinne existiert, in der alle Tangenten in  $P_0$  liegen. Daher existieren alle Richtungsableitungen in  $P_0$ .  $f$  ist somit in  $P_0$  differenzierbar.

<b>Lemma:</b>	<b><u>Vor.:</u></b>	$f'_x, f'_y \in \mathcal{C}(U_\delta(P_0))$
	<b><u>Beh.:</u></b>	$f \in \mathcal{D}(P_0)$

Daher gilt nun (vgl. Differential von Funktionen mit einer Variablen):

$$\Delta f = f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = \Psi(r_1, 0) - \Psi(0, 0) = \Delta \Psi = \Delta r \cdot \Psi'_r(0, 0) + (\Delta r)^2 \cdot R(r), \quad |R(r)| < M$$

in  $U_\delta((P_0))$

Aus der Skizze der Tangentialebenen auf Seite 230 lesen wir ab:

$$\Delta z := \Delta r \cdot \Psi'_r(0, 0) = \Delta x \cdot f'_x(x_0, y_0) + \Delta y \cdot f'_y(x_0, y_0) = \left\langle \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f'_x(x_0, y_0) \\ f'_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \right\rangle =: \langle \Delta \vec{x}, \text{grad} f \rangle$$

### Gradient und totales Differential — Gradient et différentielle totale

$\begin{pmatrix} f'_x(x_0, y_0) \\ f'_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$  hängt nur von  $x_0, y_0$  und nicht von  $\Delta x, \Delta y$  ab.

Daher benennen wir diesen Vektor:

**Definition:**  $\begin{pmatrix} f'_x(x_0, y_0) \\ f'_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} := \text{grad}(f)|_{x=x_0, y=y_0}$  heisst **Gradient** von  $f$  in  $(x_0, y_0)$

Allgemeiner:

**Definition:**  $\begin{pmatrix} f'_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f'_{x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} := \text{grad}(f)$  heisst **Gradient** von  $f$

Bekannt:  $(\Delta r)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$

Wir setzen:  $R(r) = R(r(x, y)) := \varphi(x, y)$  ( $|R(r)| = |\varphi(x, y)| < M$  in  $U_\delta((P_0))$ )

$$\leadsto \Delta f = f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = \langle \Delta \vec{x}, \text{grad} f \rangle|_{\vec{x}=\vec{x}_0} + ((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2) \cdot \varphi(x, y) \quad (|\varphi(x, y)| < M \text{ in } U_\delta((P_0)))$$

**Satz:** **Vor.:**

$$\begin{aligned} f'_x, f'_y &\in \mathcal{C}(U_\delta(P_0)) \\ (x, y) &\in U_\delta(P_0) \end{aligned}$$

**Beh.:**

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \langle \Delta \vec{x}, \text{grad} f \rangle|_{\vec{x}=\vec{x}_0} + \\ &+ ((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2) \cdot \varphi(x, y) \quad (|\varphi(x, y)| < M \text{ in } U_\delta((P_0))) \end{aligned}$$

Vergleich mit der Tangente:

$$t_r(x, y) = f(x_0, y_0) + \langle \Delta \vec{x}, \text{grad} f \rangle|_{\vec{x}=\vec{x}_0}, \quad \Delta \vec{x} = \vec{x} - \vec{x}_0$$

**Konsequenz:**

1.  $\langle \Delta \vec{x}, \text{grad} f \rangle|_{\vec{x}=\vec{x}_0}$  ist der lineare Anteil des Zuwachses  $f(x, y) - f(x_0, y_0)$  in  $U_\delta(P_0)$
2. Die Tangentialebene ist somit durch die folgende Formel gegeben:  $t(x, y) = f(x_0, y_0) + \langle \Delta \vec{x}, \text{grad} f \rangle|_{\vec{x}=\vec{x}_0}$   

$$= f(x_0, y_0) + (x - x_0) f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0) f'_y(x_0, y_0)$$
3. Im Falle  $\Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0) = \langle \Delta \vec{x}, \text{grad} f \rangle|_{\vec{x}=\vec{x}_0} + (\Delta \vec{x})^2 \cdot \varphi(x, y)$   

$$:= \Delta z + |\Delta \vec{x}|^2 \cdot \varphi(x, y), \quad |\varphi(x, y)| < M \quad \text{in } U_\delta((P_0))$$
  
 existiert die Richtungsableitung in alle Richtungen:  $f$  ist differenzierbar in  $U_\delta((P_0))$ .
4. Der Fehler bei der Annäherung von  $f$  durch die Tangentialebene ist  

$$f(x, y) - t_r(x, y) = ((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2) \cdot \varphi(x, y), \quad |\varphi(x, y)| < M \quad \text{in } U_\delta((P_0))$$

Analog zu den Funktionen mit nur einer Variablen nennen wir den linearen Zuwachs  $\langle \Delta \vec{x}, \text{grad} f \rangle$  auch bei  $n$  Variablen „endlich kleines totales Differential“, total, weil für alle Richtungen gültig. Damit definieren wir:

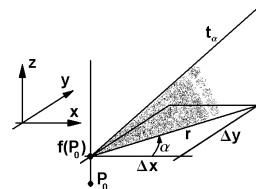
**Definition:**

$df = \langle d\vec{x}, \text{grad} f \rangle$  heisst **totales Differential**.

**Formel für die Richtungsableitung — formule pour la dérivée suivant une direction****Schreibweise:**

Sei  $D^\alpha f(x, y) =$  Steigung der Tangente in Richtung  $\alpha$ .

$\leadsto$  **Richtungsableitung**



Seien

$$\Delta x = \Delta r \cdot \cos(\alpha), \quad \Delta y = \Delta r \cdot \sin(\alpha)$$

$$\begin{aligned} \leadsto D^\alpha f(x, y)|_{(x,y)=(x_0,y_0)} &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta r} \\ &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta x \cdot f'_x(x_0, y_0) + \Delta y \cdot f'_y(x_0, y_0) + ((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2) \cdot \varphi(x, y)}{\Delta r} \\ &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta r \cdot \cos(\alpha) \cdot f'_x(x_0, y_0) + \Delta r \cdot \sin(\alpha) \cdot f'_y(x_0, y_0) + (\Delta r)^2 \cdot \varphi(x, y)}{\Delta r} \\ &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \cos(\alpha) \cdot f'_x(x_0, y_0) + \sin(\alpha) \cdot f'_y(x_0, y_0) + \Delta r \cdot \varphi(x, y) = \cos(\alpha) \cdot f'_x(x_0, y_0) + \sin(\alpha) \cdot f'_y(x_0, y_0) \\ &(|\varphi(x, y)| < M \quad \text{in } U_\delta((P_0))) \end{aligned}$$

**Satz:**

**Vor.:**

$$f'_x, f'_y \in \mathcal{C}(U_\delta(x_0, y_0))$$

**Beh.:**

$$\begin{aligned} D^\alpha f(x, y)|_{(x,y)=(x_0,y_0)} &= \cos(\alpha) \cdot f'_x(x_0, y_0) + \sin(\alpha) \cdot f'_y(x_0, y_0) \\ &= \langle \vec{e}_\alpha, \text{grad} f \rangle|_{(x,y)=(x_0,y_0)} \end{aligned}$$

**Bsp.:**

$f(x, y) = x^2 + \sin(x \cdot y) + x y^2$ ,  $P_0 = (1, 3)$  Steigung in Richtung  $\alpha = \frac{\pi}{6} = ?$

$$\begin{aligned} D^{\frac{\pi}{6}} f(x, y)|_{(x, y) = (1, 3)} &= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot (2x + \cos(xy) \cdot y + y^2) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot (\cos(xy) \cdot x + 2xy)|_{(x, y) = (1, 3)} \\ &= \frac{6 + \cos(3)}{2} + \frac{\sqrt{3} (11 + 3 \cos(3))}{2} \approx 9.45921 \end{aligned}$$

Weiter folgt aus dem vorhin Gesagten:

Weiter folgt aus der Herleitung der Formel für die Richtungsableitung:

**Konsequenz:**

▷ Sei  $\Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0) = \langle \Delta \vec{x}, \text{grad} f \rangle + (\Delta \vec{x})^2 \cdot \varphi(x, y)|_{\vec{x} = \vec{x}_0}$   
 $:= \Delta z + |\Delta \vec{x}|^2 \cdot \varphi(x, y)$ ,  $|\varphi(x, y)| < M$  in  $U_\delta((P_0))$   
 $\leadsto$  Die Richtungsableitung existiert in alle Richtungen:  $f$  ist differenzierbar in  $U_\delta((P_0))$ .

### 7.4.3 Verallgemeinerung der Differenzierbarkeit — Généralisation de la dérivabilité

Für  $G \subseteq D_f \subseteq \mathbb{R}^n$  dehnen wir nun die Differenzierbarkeitsdefinition wie folgt aus:

Sei  $P_0 = (x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0})$ ,  $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

**Definition:**

$f(P)$  differenzierbar in  $G$   
 $\Leftrightarrow \forall P_0 \in G :$   
 $f(P) = f(P_0) + \langle \Delta \vec{x}, \text{grad} f \rangle + (\Delta \vec{x})^2 \cdot \varphi_{P_0}(P)|_{\vec{x} = \vec{x}_0 = \overrightarrow{OP_0}}$ ,  
 $|\varphi_{P_0}(P)| < M$  in  $U_\delta((P_0))$

Der lineare Anteil der Zunahme von  $f(P)$  ist somit:

$$\langle \Delta \vec{x}, \text{grad} f \rangle|_{\vec{x} = \vec{x}_0} = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k_0}) f'_{x_k}(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0})$$

Statt von einer Tangentialebene sprechen wir jetzt von einer **Tangentialhyperebene**. Sie ist gegeben durch die folgende Formel:

**Formel:**

**Tangentialhyperebene**

$$\begin{aligned} t(P) &= f(P_0) + \langle \Delta \vec{x}, \text{grad} f \rangle|_{\vec{x}} \\ t(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \end{aligned}$$

$$f(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0}) + \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k_0}) f'_{x_k}(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0})$$

**1. Beispiel:**

$f(x, y) = 2x^2 + xy - 3x + 2$  Tangentialebene in  $(2, 1)$ ?

$$t(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0) f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0) f'_y(x_0, y_0) =$$

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) + (x - x_0)(4x + y - 3) + (y - y_0)x &= 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 2 + (x - 2)(4 \cdot 2 + 1 - 3) + (y - 1)2 \\ &= 6 + (x - 2)6 + (y - 1)2 = 6x + 2y - 8 \end{aligned}$$

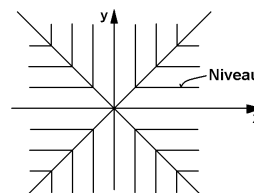
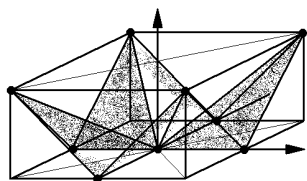
**2. Beispiel:**

$\Psi \rightsquigarrow$  Spanflächen  $\rightsquigarrow$

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & x = 0 \vee y = 0 \\ |x| & |x| = |y| \\ \Psi & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt:  $\frac{\partial}{\partial x} f(x, 0) = 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial y} f(0, y) = 0 \Rightarrow$  Tangente existiert längs der Achsen.

Jedoch:  $f'_x(x, y), f'_y(x, y) \notin \mathcal{C}(0, 0)$  (vgl. Skizze)

**7.4.4 Zum Gradienten — Quant au gradient****Nablaoperator — Opérateur nabla**

Die Gradientenbildung kann als Operation auf einer Funktionenmenge aufgefasst werden, denn man hat hier die folgende Zuordnung:

$$f \mapsto \text{grad } f = \begin{pmatrix} f'_{x_1} \\ \vdots \\ f'_{x_n} \end{pmatrix}$$

Einer **skalaren Funktion** wird also hier eine **Vektorfunktion** zugeordnet.

Mit Hilfe des Operators  $\nabla := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$  können wir schreiben:

$$\text{Symbol: } \text{grad } f = \begin{pmatrix} f'_{x_1} \\ \vdots \\ f'_{x_n} \end{pmatrix} := \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Manchmal sieht man auch Schreibweisen wie:

$$\text{grad } f := \partial_{\vec{v}} f \rightsquigarrow f \xrightarrow{\nabla} \nabla f = \text{grad } f$$

**Bedeutung des Gradienten — Signification du gradient**

Wir führen hier die Betrachtung anhand von Funktionen mit zwei Variablen. Bei Funktionen mit mehr als zwei Variablen trifft man analoge Verhältnisse.

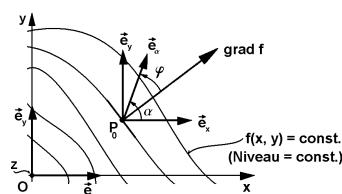
Sei  $f(x, y) = z$ ,

$\mathcal{A}(\vec{e}_\alpha, \text{grad } f) := \varphi$

$\rightsquigarrow D^\alpha f(x, y) = \langle \vec{e}_\alpha, \text{grad } f \rangle =$

$|\vec{e}_\alpha| \cdot |\text{grad } f| \cdot \cos(\varphi) =$

$1 \cdot |\text{grad } f| \cdot \cos(\varphi) = \cos(\varphi) \cdot |\text{grad } f|$





Dabei ist  $\vec{e}_\alpha$  von  $\alpha$  abhängig,  $\text{grad}f$  jedoch nicht.  
Allgemein gilt:

**Lemma:**

**Vor.:**

$$\chi(\vec{e}_\alpha, \text{grad}f) := \varphi$$

**Beh.:**

$$\begin{aligned} D^\alpha f(x, y) &= \langle \vec{e}_\alpha, \text{grad}f \rangle = |\text{grad}f| \cdot \cos(\varphi) \\ |D^\alpha f(x, y)| &\leq |\text{grad}f| \\ |\text{grad}f| &= \text{Max}_\alpha |D^\alpha f| \end{aligned}$$

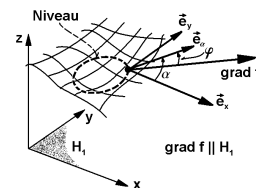
Wir studieren die Situation für einzelne, spezielle  $\varphi$ :

- (1) Sei  $\varphi = 0 \vee \varphi = \pi \vee \varphi = 2\pi \vee \dots \Rightarrow |\cos(\varphi)| = 1 \Rightarrow D^\alpha f(x, y) = \pm 1 \cdot |\text{grad}f|$   
 (2) Sei  $\varphi = \frac{\pi}{2} \vee \varphi = \frac{3\pi}{2} \vee \dots \Rightarrow \cos(\varphi) = 0 \Rightarrow D^\alpha f(x, y) = 0$

**Interpretation:**

$\Rightarrow D^\alpha f(x, y) = 0$  bedeutet:

Die Tangente an die Funktionsfläche in Richtung  $\alpha$  ist horizontal, sie steigt nicht und fällt auch nicht. Die Tangente im betrachteten Punkt ist also parallel zur Höhenkurve.



$\Rightarrow D^\alpha f(x, y) = |\text{grad}f|$  bedeutet:

Der Betrag der Richtungsableitung in dieser Richtung  $\alpha$  ist maximal. Hier ist der Betrag der Steigung maximal.

Im ersten Fall war  $\Rightarrow D^{\alpha_1} f(x, y) = |\text{grad}f|$ .  $\alpha_1$  ist somit gerade die Richtung von  $\pm \text{grad}f$ . Dazu gehört  $\varphi = n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .  $\varphi$  ist der Winkel zur fixen Richtung von  $\text{grad}f$ . Im zweiten Fall war  $\Rightarrow D^{\alpha_2} f(x, y) = 0$ .  $\alpha_2$  ist somit gerade die Richtung der Höhenkurve. Dazu gehört  $\varphi = n\pi + \frac{\pi}{2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Daraus folgt:  $|\alpha_1 - \alpha_2| = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . D.h. der  $\text{grad}f$  steht senkrecht zur Höhenkurve. Und in Richtung  $\text{grad}f$  ist der Betrag der Steigung maximal. Die Komponenten von  $\text{grad}f$  sind die Steigungen in den Koordinatenrichtungen. Sind sie z.B. positiv, so steigt mit den Tangenten auch die Fläche in den positiven Koordinatenrichtungen. Daraus folgt, dass der Gradient „hangaufwärts“ zeigt.

**Bsp.:**  $f(x, y) = x^2 + y^2 \rightsquigarrow$  Minimum in  $(0, 0)$

$\text{grad}f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ ,  $P_0 = (1, 1) \Rightarrow \text{grad}f_{(x,y)=(1,1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$  „hangaufwärts“.

$\rightsquigarrow$  Im Punkte  $(1, 1)$  nimmt die Steigung in Richtung  $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  maximal zu.

**Verallgemeinerung — Généralisation**

Sei  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightsquigarrow$  Hyperfläche im  $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\leadsto \operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} f'_{x_1} \\ \vdots \\ f'_{x_n} \end{pmatrix}. \quad \text{Sei } \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \text{ Kurve } C \text{ in } D_f$$

$$\begin{aligned} \text{Betrachte: } \frac{df}{dt}(x_1(t), \dots, x_n(t)) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x_1} \cdot \frac{\Delta x_1}{\Delta t} + \dots + \frac{\Delta f}{\Delta x_n} \cdot \frac{\Delta x_n}{\Delta t} &= f'_{x_1} \cdot x'_{1t} + \dots + f'_{x_n} \cdot x'_{nt} = \langle \operatorname{grad} f, \vec{r}'_t \rangle \end{aligned}$$

Auf einer Niveauhyperebene muss die Höhenzunahme 0 sein, d.h. es gilt:

$$\frac{df}{dt}(x_1(t), \dots, x_n(t)) = 0 \Rightarrow \langle \operatorname{grad} f, \vec{r}'_t \rangle = 0$$

Falls gilt  $\operatorname{grad} f \neq \vec{0}$  (d.h. die Tangentialhyperebene steigt an) und  $\vec{r}'_t \neq \vec{0}$  (die Kurve  $C$  besitzt einen Tangentialvektor  $\neq \vec{0}$ ), so folgt:  $\langle \operatorname{grad} f, \vec{r}'_t \rangle = 0 \Rightarrow \operatorname{grad} f \perp \vec{r}'_t \parallel \text{Niveauhyperebene}$ .

$$\text{Weiter sehen wir: } \Rightarrow \frac{df}{dt}(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \langle \operatorname{grad} f, \vec{r}'_t \rangle = |\operatorname{grad} f| \cdot |\vec{r}'_t| \cdot \cos(\varphi)$$

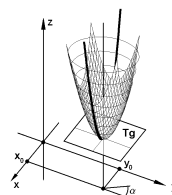
Parametrisiere  $C$  so dass gilt:  $|\vec{r}'_t| = 1$

$\leadsto$  Wähle dazu die Kurvenlänge  $\lambda$  als Parameter:

$$|\vec{r}'_\lambda| = \lim_{\Delta \lambda \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta \lambda} \right| = \lim_{\Delta \lambda \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{|\Delta \lambda|} = \lim_{\Delta \lambda \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k(\lambda + \Delta \lambda) - x_k(\lambda))^2}}{|\Delta \lambda|} = \lim_{\Delta \lambda \rightarrow 0} \frac{|\Delta \lambda|}{|\Delta \lambda|} = 1$$

Es gilt:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k(\lambda + \Delta \lambda) - x_k(\lambda))^2} \approx \Delta \lambda$$



$$\Rightarrow \frac{df}{dt}(x_1(t), \dots, x_n(t)) = |\operatorname{grad} f| \cdot \cos(\varphi) \leadsto \frac{df}{dt}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \text{ maximal für } \varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$$

**Satz:**

**Vor.:**

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{C}^{(1)}(D_f), \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

$\leadsto$  Kurve  $C$  mit Kurvenlänge als Parameter

**Beh.:**

1.  $\operatorname{grad} f \perp \text{Niveauhyperebene}$
2.  $|\operatorname{grad} f| =$  maximaler Wert des Betrags der Steigung  $\frac{df}{dt}$  der Kurve auf der Hyperebene über  $C$ .
3.  $\operatorname{grad} f =$  Richtung der maximalen zunehmenden Steigung.

### 7.4.5 Bemerkungen zu Tangentialebenen und Potenzreihenentwicklung — Remarques quant aux plans tangentiels et au développement en séries de puissances

1. Die **Tangentialhyperebene** wird:

$$t(\vec{x}) = t(\vec{x}_0 + \Delta\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \langle \Delta\vec{x}, \nabla f \rangle = f(\vec{x}_0) + \Delta\vec{x} \cdot \text{grad}f$$

**Bsp.:**  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow t(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \Delta\vec{x} \cdot \text{grad}f = 1^2 + 2^2 + \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \end{pmatrix} = 5 + \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = -5 + 2x + 4y \Rightarrow z = 2x + 4y - 5$

2. **Taylorentwicklung** von Funktionen mit mehreren Variablen:

Beispiel mit  $n = 2$ :

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} \cdot \frac{1}{(k-j)!} \left( \frac{\partial^k}{\partial x^j \partial y^{k-j}} f \right)(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^j \cdot (y - y_0)^{k-j}$$

**Trick:** Erst Potenzreihe z.B. nach  $x$  bilden,  $y$  als Parameter beibehalten. Anschliessend Potenzreihen in den entstandenen Gliedern nach  $y$  bilden...

**Bsp.:**

$$\sin(x^2 + y^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + \left(1 - \frac{x^4}{2}\right) y^2 + \left(\frac{-x^2}{2} + \frac{x^6}{12}\right) y^4 + \left(-\frac{1}{6} + \frac{x^4}{12}\right) y^6 + \dots = x^2 - \frac{x^6}{6} + y^2 - \frac{x^4 y^2}{2} \pm \dots$$

### 7.4.6 Weitere Bemerkungen zum totalen Differential, Verallgemeinerung — Autres remarques quant à la différentielle totale, généralisation

**Schreibweisen — Façons d'écrire**

1. Sei  $f \in \mathcal{D}(G)$ ,  $p, p_0 \in G$ ,  $P = P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ,  
 $f(P) := f(x_1, \dots, x_n) := f(\vec{x})$

**Schreibweise:** (Gradient: )  $\text{grad}f = \nabla f := \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}$

Für  $\Delta f \rightarrow df$  ist es üblich, wie folgt zu schreiben:

**Schreibweise:**  $df = d\vec{x} \cdot \text{grad}f = \langle d\vec{x}, \text{grad}f \rangle$

(Glieder höherer Ordnung werden vernachlässigt. )

2. Mit dem totalen Differential  $\Delta f$  von  $f$  kann man schreiben:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta t} &= \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} \cdot \text{grad} f + \frac{(\Delta \vec{x})^2}{\Delta t} \cdot \varphi(\vec{x}) \\ \Rightarrow \frac{df}{dt} &= \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \text{grad} f + \frac{d\vec{x} \cdot d\vec{x}}{dt} \cdot \varphi(\vec{x}) = \left\langle \frac{d\vec{x}}{dt}, \text{grad} f \right\rangle + \underbrace{\left\langle \frac{d\vec{x}}{dt}, d\vec{x} \right\rangle}_{\rightarrow 0} \cdot \varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x}'_t, \nabla f \rangle\end{aligned}$$

3. Die folgende, etwas weniger exakte Schreibweise führt kaum zu Missverständnissen:

$$\begin{aligned}f(\vec{x}) &= f(\vec{x}_0 + \Delta \vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \Delta \vec{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + (\Delta \vec{x})^2 \cdot \varphi(\vec{x}) \quad \text{oder} \\ \Delta f &= f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) = \Delta \vec{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + (\Delta \vec{x})^2 \cdot \varphi(\vec{x}) \\ \Delta \vec{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} &\text{ ist hier der lineare Zuwachs}\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$  **totales Differential**

$$(\Delta \vec{x})^2 \cdot \varphi(\vec{x}) \rightsquigarrow \text{höhere Glieder}.$$

$$\rightsquigarrow \Delta f \rightarrow df = d\vec{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \underbrace{(d\vec{x})^2 \cdot \varphi(\vec{x})}_*$$

\*  $\rightsquigarrow$  in erster Ordnung vernachlässigbar.

$\rightsquigarrow$  Definition des totalen Differentials auf dieser Grundlage:

**Definition:**  $df = d\vec{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} = dx_1 \cdot f'_{x_1} + \dots + dx_n \cdot f'_{x_n}$  heisst **totales Differential**.

**Bsp.:**  $f(x, y, z) = x \cdot y + x^2 + y \sin(z)$ ,  $f'_x = y + 2x$ ,  $f'_y = x + \sin(z)$ ,  $f'_z = y \cdot \cos(z)$   
 $\Rightarrow df = dx(y + 2x) + dy(x + \sin(z)) + dz(y \cdot \cos(z))$

## Verallgemeinerungen — Généralisations

Totale Differentiale **höherer Ordnung** definieren wir wie folgt:

**Definition:** 
$$d^2 f := d(df) := \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \right) dx_1 + \dots$$

$$\dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \right) dx_n$$

**Spezialfall**  $n = 2$ :

$$d^2 f = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) dy = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (dy)^2$$

Verallgemeinerung der Ordnung für  $n = 2$ :

$$d^m f = \frac{\partial^m f}{\partial x^m} (dx)^m + \binom{m}{1} \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-1} \partial y} (dx)^{m-1} dy + \dots + \frac{\partial^m f}{\partial y^m} (dy)^m$$

**Schreibweise:**  $d^m f = \left( \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right)^{(m)}$

Verallgemeinerung der Dimension  $n$  bei der Ordnung  $m$ :

**Schreibweise:**  $d^m f = (\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n)^{(m)}$

### Regeln — Règles

Mit Hilfe der Regeln für partielle Ableitungen gewinnt man sofort die folgenden Regeln:

**Regeln:**

**Vor.:**

$$f, g \in \mathcal{D} \dots, \quad k \in \mathbb{R}$$

**Beh.:**

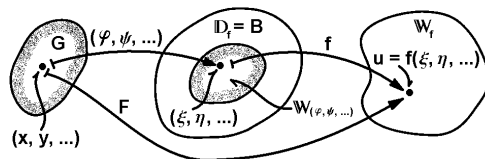
1.  $d(k \cdot f) = k \cdot df$
2.  $d(f \pm g) = df \pm dg$
3.  $d(f \cdot g) = f \cdot dg + df \cdot g$
4. Kettenregel  
 $\leadsto$  Wird weiter unten speziell besprochen .

**Bsp.:**  $d(\sin(x \cdot y) \cdot \cos(x + y)) =$   
 $\sin(x \cdot y) \cdot (-\sin(x + y) dx - \sin(x + y) dy) + \cos(x + y) \cdot (\cos(x \cdot y) \cdot y dx + \cos(x \cdot y) \cdot x dy) =$   
 $(-\sin(x \cdot y) \cdot \sin(x + y) + \cos(x + y) \cdot \cos(x \cdot y) \cdot y) dx + (-\sin(x \cdot y) \cdot \sin(x + y)$   
 $+ \cos(x + y) \cdot \cos(x \cdot y) \cdot x) dy$

### 7.4.7 Die Kettenregel — La règle conjointe

Um die Situation, auf die sich die Kettenregel bezieht, einigermaßen zu begreifen, ist es notwendig, die Herleitung der Regel etwas zu verfolgen.

Sei  $u = f(\xi, \eta, \dots)$ ,  
 $\xi = \varphi(x, y, \dots), \eta = \psi(x, y, \dots), \dots$   
 Sei  $D_f = B$ ,  $W_{\varphi, \psi, \dots} \subseteq B = D_f$   
 Sei  $(\xi, \eta, \dots) \in W_{\varphi, \psi, \dots}$



$$\Rightarrow u = f(\xi, \eta, \dots) = f(\varphi(x, y, \dots), \psi(x, y, \dots), \dots) := F(x, y, \dots), \quad D_F = G$$

Seien  $f, \varphi, \psi, \dots \in \mathcal{D}$  über den jeweiligen Definitionsbereichen .

**Problem:**  $\leadsto F \in \mathcal{D}$  ?

$\leadsto$  Untersuche die Existenz von  $dF = F'_x dx + F'_y dy + \dots$

Was passiert mit dem Rest  $(d\vec{x})^2 \cdot R(\vec{x})$  ?

Studiere dazu:

$$\begin{aligned}
& (f'_\xi \cdot \varphi'_x + f'_\eta \cdot \psi'_x + \dots) dx + (f'_\xi \cdot \varphi'_y + f'_\eta \cdot \psi'_y + \dots) dy + \dots = \\
& f'_\xi \cdot (\varphi'_x dx + \varphi'_y dy + \dots) + f'_\eta \cdot (\psi'_x dx + \psi'_y dy + \dots) + \dots = \\
& f'_\xi \cdot d\varphi + f'_\eta \cdot d\psi + \dots = f'_\xi \cdot d\xi + f'_\eta \cdot d\eta + \dots = df
\end{aligned}$$

$df, d\varphi, d\psi, \dots$  können wegen der vorausgesetzten Differenzierbarkeit gebildet werden, die verbleibenden Reste sind “quadratischer Natur”,  
 ( $\leadsto$  Form “ $d\vec{x} \cdot R(\vec{x})$ ”)

Damit kann man  $df$  von  $B$  nach  $G$  verpflanzen. Wegen der Verpflanzung muss man somit das totale Differential  $dF$  der verpflanzten Funktion  $F$  erhalten:

$$\underbrace{df}_{D_f=B} = \underbrace{(f'_\xi \cdot \varphi'_x + f'_\eta \cdot \psi'_x + \dots) dx + (f'_\xi \cdot \varphi'_y + f'_\eta \cdot \psi'_y + \dots) dy + \dots}_{D_{\dots=G}} = dF$$

Wegen  $dF = F'_x dx + f'_y dy + \dots$  muss gelten:

$$F'_x = f'_\xi \cdot \varphi'_x + f'_\eta \cdot \psi'_x + \dots, \quad F'_y = f'_\xi \cdot \varphi'_y + f'_\eta \cdot \psi'_y + \dots, \quad \dots$$

**Satz:**

**Kettenregel**

**Vor.:**

$$\begin{aligned}
& \varphi, \psi, \dots \in \mathcal{D}(G), \quad f \in \mathcal{D}(B) \\
& D_f = B, \quad W_{\varphi, \psi, \dots} \subseteq B = D_f \\
& \xi = \varphi(x, y, \dots), \eta = \psi(x, y, \dots), \dots, \quad (\xi, \eta, \dots) \in W_{(\varphi, \psi, \dots)} \\
& u = f(\xi, \eta, \dots) = f(\varphi(x, y, \dots), \psi(x, y, \dots), \dots) = F(x, y, \dots)
\end{aligned}$$

**Beh.:**

$$\begin{aligned}
& F \in CD(G) \\
& dF = F'_x dx + f'_y dy + \dots = \\
& = (f'_\xi \cdot \varphi'_x + f'_\eta \cdot \psi'_x + \dots) dx + (f'_\xi \cdot \varphi'_y + f'_\eta \cdot \psi'_y + \dots) dy + \dots = \\
& = f'_\xi \cdot d\xi + f'_\eta \cdot d\eta + \dots = df \\
& F'_x = f'_\xi \cdot \varphi'_x + f'_\eta \cdot \psi'_x + \dots, \quad F'_y = f'_\xi \cdot \varphi'_y + f'_\eta \cdot \psi'_y + \dots, \quad \dots
\end{aligned}$$

**Bemerkung:**

$$\text{Sei } f(x, y) = x^2 y^3 \Rightarrow \frac{df(x, y)}{dt} = 2xy^2 \frac{dx}{dt} + 3x^2 y^2 \frac{dy}{dt}$$

**Definition:**

$$\frac{df(x, y)}{dt} \text{ heisst } \mathbf{totale \ Ableitung} \text{ von } f(x, y) \text{ nach } t.$$

## 7.5 Anwendungen — Applications

### 7.5.1 Verpflanzung von Differentialoperatoren in andere Koordinatensysteme — Transposition d'opérateurs différentiels en d'autres systèmes de coordonnées

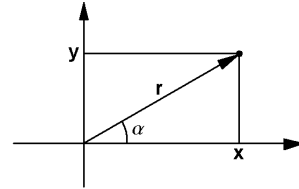
**Bsp.:** Sei  $u = f(x, y)$ ,

$$|\text{grad} f|^2 = \langle \text{grad} f, \text{grad} f \rangle = \text{grad} f \cdot \text{grad} f = \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \end{pmatrix} = (f'_x)^2 + (f'_y)^2$$

$\leadsto$  Kartesische Koordinaten!

**Problem:** Schreibe  $|\text{grad}f|^2$  in Polarkoordinaten! (Grösste Steigung im Quadrat)

$$\begin{aligned}x &= r \cdot \cos(\alpha) \\y &= r \cdot \sin(\alpha) \\r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\\alpha &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\end{aligned}$$



Vergleich zum letzten Satz:

$$(x, y) \mapsto (r, \alpha), \quad (\xi, \eta) \mapsto (x, y)$$

Damit bekommen wir:

$$r'_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos(\alpha), \quad r'_y = \frac{1}{2} \cdot \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r} = \sin(\alpha)$$

$$\text{Sei } w = \frac{y}{x} \Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan(w) = \arctan(\tan(\alpha))$$

Kettenregel

$$\leadsto \frac{d\alpha}{d\alpha} = 1 = (\arctan(\tan(\alpha)))'_\alpha = (\arctan(w))'_w \cdot (\tan(\alpha))'_\alpha,$$

$$(\tan(\alpha))'_\alpha = \left(\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right)'_\alpha = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$$

$$\Rightarrow 1 = (\arctan(w))'_w \cdot \frac{1}{\cos^2(\alpha)} \Rightarrow (\arctan(w))'_w = \cos^2(\alpha)$$

Zudem gilt:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right) = \arctan(w)'_w \cdot \frac{-y}{x^2} = \cos^2(\alpha) \cdot \frac{-y}{x^2} = -\frac{x^2}{r^2} \cdot \frac{y}{x^2} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{1}{r} \cdot \sin(\alpha)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right) = \arctan(w)'_w \cdot \frac{1}{x} = \cos^2(\alpha) \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^2}{r^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{r^2} = \frac{1}{r} \cdot \cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow u'_x = u'_r \cdot r'_x + u'_\alpha \cdot \alpha'_x = u'_r \cdot \cos(\alpha) + u'_\alpha \cdot \frac{-\sin(\alpha)}{r}$$

$$u'_y = u'_r \cdot r'_y + u'_\alpha \cdot \alpha'_y = u'_r \cdot \sin(\alpha) + u'_\alpha \cdot \frac{\cos(\alpha)}{r}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow |\text{grad}f|^2 &= (u'_x)^2 + (u'_y)^2 = (u'_r \cdot \cos(\alpha) + u'_\alpha \cdot \frac{-\sin(\alpha)}{r})^2 + (u'_r \cdot \sin(\alpha) + u'_\alpha \cdot \frac{\cos(\alpha)}{r})^2 \\&= (u'_r)^2 \cdot \cos^2(\alpha) + 2 u'_r \cdot \cos(\alpha) \cdot u'_\alpha \cdot \frac{-\sin(\alpha)}{r} + (u'_\alpha)^2 \cdot \left(\frac{-\sin(\alpha)}{r}\right)^2 + \\&\quad (u'_r)^2 \cdot \sin^2(\alpha) + 2 u'_r \cdot \sin(\alpha) \cdot u'_\alpha \cdot \frac{\cos(\alpha)}{r} + (u'_\alpha)^2 \cdot \left(\frac{\cos(\alpha)}{r}\right)^2 \\&= (u'_r)^2 \cdot \cos^2(\alpha) + (u'_\alpha)^2 \cdot \frac{\sin^2(\alpha)}{r^2} + (u'_r)^2 \cdot \sin^2(\alpha) + (u'_\alpha)^2 \cdot \frac{\cos^2(\alpha)}{r^2} \\&= (u'_r)^2 \cdot (\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)) + (u'_\alpha)^2 \cdot \frac{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)}{r^2} \\&= (u'_r)^2 \cdot 1 + (u'_\alpha)^2 \cdot \frac{1}{r^2} = (u'_r)^2 + \frac{1}{r^2} \cdot (u'_\alpha)^2\end{aligned}$$

### 7.5.2 Totale Ableitung — Dérivée totale

Wir wollen hier an einem Beispiel zeigen, wie das totale Differential direkt zur Steigungsberechnung eingesetzt werden kann.

Sei z.B. gegeben eine Funktion  $f(x, y) = z = \cos(xy) + x + y^2$   
sowie eine Kurve  $C : \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ \ln(t) \end{pmatrix}$

**Problem:** Was ist die Steigung der Tangente an die Kurve auf der Funktionsfläche über  $C$  in  $P_0 = (E^1, \ln(1)) = (e, 0)$ ,  $t = 1$ ?

**Lösung:** Totales Differential: différentielle totale:

$$\begin{aligned} df &= f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy = -\sin(xy) \cdot (y dx + x dy) + dx + 2y dy \\ &= (-\sin(xy) \cdot y + 1) dx + (-\sin(xy) \cdot x + 2y) dy \end{aligned}$$

Daraus die Ableitung:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} \Big|_{t=1} &= (-\sin(xy) \cdot y + 1) \frac{dx}{dt} + (-\sin(xy) \cdot x + 2y) \frac{dy}{dt} \Big|_{t=1} \\ &= (-\sin(e^t \ln(t)) \cdot \ln(t) + 1) \frac{de^t}{dt} + (-\sin(e^t \ln(t)) \cdot e^t + 2 \ln(t)) \frac{d \ln(t)}{dt} \Big|_{t=1} \\ &= (-\sin(e \cdot 0) \cdot 0 + 1) e + (-\sin(e \cdot 0) \cdot e + 2 \cdot 0) \frac{d1}{d1} = e \end{aligned}$$

### 7.5.3 Anwendung auf implizite Funktionen — Application aux fonctions implicites

Sei  $f(x, y) = f(x, y(x)) = 0$ ,  $y = y(x)$  Funktion.

$\leadsto$  Kettenregel:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = f'_x + f'_y \cdot y'_x = \frac{d0}{dx} = 0 \Rightarrow f'_x + f'_y \cdot y'_x = 0 \Rightarrow y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

**Satz:**

**Vor.:**

$y = y(x)$  sei implizit gegeben:

$$f(x, y) = f(x, y(x)) = 0, \quad f, y \in \mathcal{D}$$

**Beh.:**

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

**Bsp.:**

$$\text{Sei } f(x, \lambda) = x^3 + 2x(1 + \lambda^2) + 2\sqrt{6}\lambda \Rightarrow f'_x(x, \lambda) = 3x^2 + 2(1 + \lambda^2) > 0 \quad (\forall x)$$

$\leadsto f(x, \lambda)$  streng monoton wachsend.  $f(x, \lambda)$  besitzt somit genau eine Nullstelle  $x_0(\lambda) \in \mathbb{R}$ .

**Ges.:**  $\lambda$  so dass  $x_0(\lambda) \in \mathbb{R}$  maximal wird!



Es gilt:  $f(x_0(\lambda), \lambda) = 0$

$$\leadsto \text{Maximum: } 0 = (x_0)'_{\lambda} = -\frac{f'_{\lambda}}{f'_{x_0}} \Rightarrow f'_{\lambda} = 0 = 4x_0\lambda + 2\sqrt{6} \Rightarrow \lambda_m = \frac{-2\sqrt{6}}{4x_0}$$

$$\Rightarrow f(x, \lambda_m) = x^3 + 2x \left( 1 + \left( \frac{-2\sqrt{6}}{4x_0} \right)^2 \right) + 2\sqrt{6} \frac{-2\sqrt{6}}{4x_0} = 0$$

$$\Rightarrow \text{Lösungen: } x_{01,2,3,4} = 1, -1, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3} \Rightarrow x_{0max} = 1 \in \mathbb{R}$$

### 7.5.4 Extremalprobleme — Problèmes d'extréma

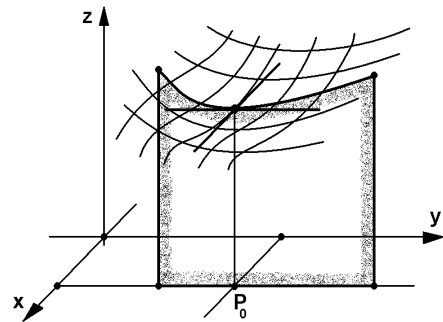
#### Notwendige Bedingung für Extrema — Condition nécessaire pour l'extrémum

Sei  $f \in \mathcal{D}(P_0)$ ,  $f'_{x_k} \in \mathcal{C}(P_0)$ ,

Wir nehmen an, dass  $f$  in  $P_0$  ein lokales Extremum besitze.

Sei  $P_0 \in \mathbb{R}^2$ .

In  $P_0$  muss die Schnittkurve der Funktionsfläche mit einer erstprojizierenden Ebene eine horizontale Tangente besitzen:



Wir verwenden nun die folgende Schreibweise:

**Schreibweise:**  $f \in \mathcal{D}(x_k, P_0) \leadsto f$  stetig differenzierbar nach  $x_k$  in  $P_0$

**Satz:** **Vor.:**

$\forall_{k=1}^n f \in \mathcal{D}(x_k, P_0)$   
 $f$  besitze in  $P_0$  ein lokales Extremum

**Beh.:**

$$\forall_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(P_0) = 0 \leadsto \text{grad} f = \vec{0}$$

**Bsp.:**  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x = 0$

$$\Rightarrow x = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow P_0 = (0, 0)$$

(Bekannt:  $x^2 + y^2 \geq 0$ ,  $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ )

**Bemerkung:** Die Umkehrung des Satzes gilt schon für  $n = 1$  nicht.

#### Hinreichende Bedingung für Extrema — Condition suffisante pour des extréma

Sei  $n = 2$ ,  $f''_{yx} = f''_{xy}$

Wir definieren:

**Definition:**

$$H(f) := D = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2$$

heisst Determinante der **Hess-Matrix** (Diskriminante)

Man stellt unmittelbar fest:

**Lemma:**

$$H(f) = [(\text{grad} f)'_x, (\text{grad} f)'_y] \text{ (Flächenprodukt) }$$

$$\leadsto [(\text{grad} f)'_x, (\text{grad} f)'_y] = \left| \begin{pmatrix} f''_{xx} \\ f''_{xy} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f''_{xy} \\ f''_{yy} \\ 0 \end{pmatrix} \right| = |(\text{grad} f)'_x| \cdot |(\text{grad} f)'_y| \cdot \sin(\varphi),$$

$$\varphi = \angle((\text{grad} f)'_x, (\text{grad} f)'_y)$$

Es gilt der folgende Satz:

**Satz:**

**Vor.:**

$$f \in \mathcal{D}(x, P_0) \wedge f \in \mathcal{D}(y, P_0)$$

$$f'_x(P_0) = f'_y(P_0) = 0$$

**Beh.:**

$$D = H(f) > 0 \Rightarrow f \text{ hat in } P_0 \text{ ein relatives Extremum}$$

$$f''_{xx} > 0 : \text{Minimum}$$

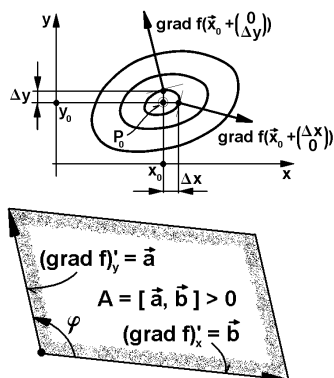
$$f''_{xx} < 0 : \text{Maximum}$$

$$D = H(f) < 0 \Rightarrow f \text{ hat in } P_0 \text{ einen Sattelpunkt}$$

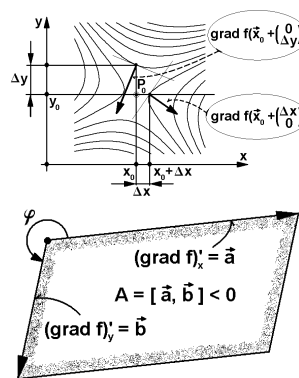
$$D = H(f) = 0 \Rightarrow \text{so nicht entscheidbar}$$

Anschauliche Begründung:

$P_0 \leadsto$  Z.B. Minimum



$P_0 \leadsto$  Sattelpunkt (Beispiel)



$$\begin{aligned}
(\nabla f)'_x(x_0 + \Delta x, y_0) &\uparrow (\nabla f)(x_0 + \Delta x, y_0) \\
(\nabla f)'_y(x_0, y_0 + \Delta y) &\uparrow (\nabla f)(x_0, y_0 + \Delta y) \\
\Rightarrow A = |\nabla f'_x| \cdot |\nabla f'_y| \cdot \sin(\varphi) &> 0 \\
(\nabla f = \text{grad} f)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla f)'_x(x_0 + \Delta x, y_0) &\uparrow (\nabla f)(x_0 + \Delta x, y_0) \\
(\nabla f)'_y(x_0, y_0 + \Delta y) &\downarrow (\nabla f)(x_0, y_0 + \Delta y) \\
\Rightarrow A = |\nabla f'_x| \cdot |\nabla f'_y| \cdot \sin(\varphi) &< 0
\end{aligned}$$

**1. Beispiel:**  $f(x, y) = x \cdot y$ ,  $f'_x = y$ ,  $f'_y = x$ ,  $P_0 = (0, 0)$   
 $\Rightarrow f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ ,  $f''_{xx} = 0$ ,  $f''_{yy} = 0$ ,  $f''_{xy} = f''_{yx} = 1 \Rightarrow D = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 < 0$   
 $\Rightarrow$  Sattelpunkt in  $P_0$ .

**2. Beispiel:**  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $f'_x = 2x$ ,  $f'_y = 2y$ ,  $P_0 = (0, 0)$   
 $\Rightarrow f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ ,  $f''_{xx} = f''_{yy} = 2 > 0$ ,  $f''_{xy} = f''_{yx} = 0 \Rightarrow D = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 4 > 0$   
 $\Rightarrow$  Minimum in  $P_0$ .

### 7.5.5 Anwendung auf die Klassifikation von Kegelschnitten — Application pour la classifications des sections de cônes

Im Rahmen der Vektoralgebra werden die Kegelschnitte besprochen. In der Ebene handelt es sich dabei um algebraische Kurven, die durch eine Polynomgleichung in zwei Variablen vom Grade 2 von folgender Form gegeben sind:

$$f(x, y) = a x^2 + b x y + c y^2 + d x + e y + f = 0$$

Andererseits ist durch  $f(x, y) = z$  im  $\mathbb{R}^3$  eine Fläche  $\Phi$  definiert.

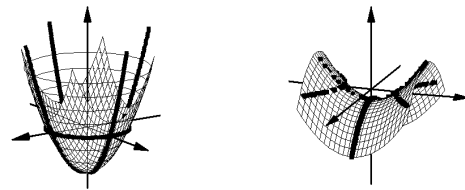
$$\begin{aligned}
f'_x(x_0, y_0) = 2 a x_0 + b y_0 + d = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 2 c y_0 + b x_0 + e = 0 \\
\Rightarrow x_0 = \frac{2 c d - b e}{b^2 - 4 a c}, \quad y_0 = -\frac{b d - 2 a e}{b^2 - 4 a c}, \quad D = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 4 a c - b^2
\end{aligned}$$

Sei  $D \neq 0 \Rightarrow$  Auf  $\Phi$  gibt es genau ein Extremum oder Sattelpunkt (in  $(x_0, y_0)$ ).

Geometrisch sieht man unmittelbar ein:

Im Falle der Ellipse muss  $\Phi$  ein „korbartiges Gebilde“ sein und irgendwo ein Extremum haben.

Im Falle der Hyperbel muss  $\Phi$  ein „sattelartiges Gebilde“, d.h. irgendwo einen Sattelpunkt haben.



#### Bemerkung:

Ein Kegelschnitt entsteht allerdings nur, wenn  $\Phi$  die  $xy$ -Ebene ( $= H_{xy}$ ) schneidet. Die Bedingung  $f(x_0, y) = 0$  ist eine quadratische Gleichung in  $x_0(y)$ . Die Bedingung, dass die Diskriminante  $\geq 0$  sein muss, führt auf eine quadratische Ungleichung in  $y$ , die lösbar ist.

**Konsequenz:** Die Frage, ob  $\Phi \cap H_{xy} \neq \{\}$  gilt, ist elementar algebraisch entscheidbar.

**Satz:****Vor.:**

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \quad \Phi \cap H_{xy} \neq \{\}$$

**Beh.:**

$$D = 4ac - b^2 > 0 \Rightarrow \text{Ellipse}$$

$$D = 4ac - b^2 < 0 \Rightarrow \text{Hyperbel}$$

$$\text{Parabel} \Rightarrow D = 0$$

$$\text{Bsp.: } f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 4y^2 - x + y - 1 = 0$$

$$f(0, 0) = -1, \quad f(0, 1) = 4 \Rightarrow \Phi \cap H_{xy} \neq \{\}$$

$$D = 4 \cdot 2 \cdot 4 - (-3)^2 = 32 - 9 = 23 > 0 \Rightarrow \text{Ellipse}.$$

### 7.5.6 Extremalprobleme mit Nebenbedingungen — Problèmes d'extréma avec conditions secondaires

**Einsetzungsmethode — Méthode par substitution**

$$\text{1. Beispiel: } \text{Sei } f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 4y^2 - x + y - 1$$

**Problem:** Extremum von  $f(x, y)$  unter der Nebenbedingung  $x - y = 1$ ?

$$x - y = 1 \Rightarrow y = x - 1 \Rightarrow f(x, y) = f(x, x - 1) = 3x^2 - 5x + 1 = g(x),$$

$$g'_x(x) = 6x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{6}, \quad y = -\frac{1}{6}, \quad g''_{xx}(x) = 6 > 0 \Rightarrow \text{Minimum}.$$

**Konsequenz:** Solche einfache Extremalprobleme mit Nebenbedingungen lassen sich durch Einsetzen der Nebenbedingung in die zu betrachtende Funktion lösen.

#### 2. Beispiel:

$$\text{Sei } f(x, y) = x \cdot y, \text{ Nebenbedingung } g(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4 = 0$$

$\leadsto$  Extremum?

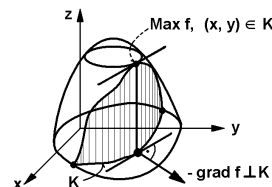
Hier hat man es mit der Einsetzungsmethode nicht mehr so leicht. Besser zu handhaben ist hier die nachfolgend gezeigte **Methode der Multiplikatoren von Lagrange**. Sie ist oft erfolgreich bei implizit gegebenen Kurven  $g(x, y) = 0$ .

**Methode der Multiplikatoren von Lagrange — Méthode des multiplicateurs de Lagrange**

Seien  $f(x, y), g(x, y) \in \mathcal{D}(G)$ ,

$f, g \in C^1(G)$  Ableitungen stetig

$f$  hat in  $P_0$  ein Extremum mit der Nebenbedingung  $g(x, y) = 0$



Durch  $g(x, y) = 0$  sei eine Kurve  $C$  definiert:

$$C : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{Sei } h(t) := f(x(t), y(t))|_{(x(t), y(t)) \in C} := f(\vec{r}(t))$$

Extremum für  $t = t_0$ :

$$\Rightarrow h'_t(t) = f'_x(x, y) \cdot x'_t + f'_y(x, y) \cdot y'_t = \text{grad} f \cdot \vec{r}'_t(t)|_{t=t_0} \Rightarrow \text{grad} f \perp \vec{r}'_t(t)|_{t=t_0}$$

In  $P_0$  ( $t = t_0$ ) ist somit:

$$\text{grad} f \perp (\text{Tangente}) \parallel \vec{r}'_t(t)|_{t=t_0}$$

Weil  $C$  selbst eine Höhenkurve von  $g$  ist, gilt in  $P_0$ :  $\text{grad} g \perp \text{Tangente} \parallel \vec{r}'_t(t)|_{t=t_0}$

$$\text{Sei } \text{grad} g \neq \vec{0} \Rightarrow \text{grad} f \parallel \text{grad} g \text{ in } P_0 \Rightarrow \exists_{\lambda \in \mathbb{R}} : \text{grad} f = \lambda \cdot \text{grad} g$$

**Satz:**

**Vor.:**

$$f(x, y), g(x, y) \in \mathcal{D}(G), \in \mathcal{C}^1(G)$$

$$\text{grad} g \neq \vec{0}$$

$f$  hat in  $P_0$  ein Extremum mit der Nebenbedingung  $g(x, y) = 0$

**Beh.:**

$$\exists_{\lambda \in \mathbb{R}} : \text{grad} f = \lambda \cdot \text{grad} g$$

**Definition:**

$\lambda$  heisst **Multiplikator von Lagrange**

**Bemerkung:**

Analog argumentiert man bei Funktionen mit mehr als 2 Variablen.

**Bsp.:** Sei  $f(x, y) = x \cdot y$ , Nebenbedingung  $g(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4 = 0 \rightsquigarrow$  Extremum?

$$\text{grad} f = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \lambda \cdot \text{grad} g = \lambda \cdot \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 8x \\ 2y \end{pmatrix} \Rightarrow y = \lambda \cdot 8x, x = \lambda \cdot 2y, 4x^2 + y^2 - 4 = 0$$

Mit der Nebenbedingung erhält man somit ein System von 3 Gleichungen mit den Unbekannten  $x, y, \lambda$ .

$$\rightsquigarrow x = \lambda \cdot 2 \cdot (\lambda \cdot 8x) = 16x \cdot \lambda^2 \Rightarrow x = 0 \vee \lambda = \pm \frac{1}{4}$$

$$y = \lambda \cdot 8 \cdot (\lambda \cdot 2y) = 16y \cdot \lambda^2 \Rightarrow y = 0 \vee \lambda = \pm \frac{1}{4}$$

$$(0, 0) \notin C \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{4}, y = \lambda \cdot 8x = \frac{1}{4} \cdot 8x = 2x \Rightarrow$$

$$4x^2 + y^2 - 4 = 4x^2 + (2x)^2 - 4 = 8x^2 - 4 = 0, x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \lambda \cdot 8x = \frac{1}{4} \cdot 8 \left( \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \pm \frac{2}{\sqrt{2}}$$

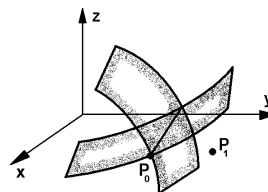
$$\rightsquigarrow \text{Extremumwerte nur in } \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{2}{\sqrt{2}}$$

Es ist dem Leser überlassen zu untersuchen, welche Extremwerttypen wo vorliegen.

### 7.5.7 Newton-Approximation bei mehreren Variablen — Approximation de Newton pour plusieurs variables

Wir studieren das Verfahren für den Fall von zwei Funktionen mit zwei Variablen:

Zu lösen:



Sei  $P_1$  nahe  $P_0$ :

$$\leadsto \begin{aligned} \Delta f_1 &:= f(x_0, y_0) - f(x_1, y_1) = 0 - f(x_1, y_1) \approx \Delta x_1 f'_x + \Delta y_1 f'_y |_{P=P_1} \\ \Delta g_1 &:= g(x_0, y_0) - g(x_1, y_1) = 0 - g(x_1, y_1) \approx \Delta x_1 g'_x + \Delta y_1 g'_y |_{P=P_1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -f(x_1, y_1) \\ -g(x_1, y_1) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} f'_x(x_1, y_1) & f'_y(x_1, y_1) \\ g'_x(x_1, y_1) & g'_y(x_1, y_1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \end{pmatrix} := A(P_1) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \end{pmatrix}$$

Sei  $A(P_1)$  regulär

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_0 - x_1 \\ x_0 - y_1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = -A(P_1)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f(x_1, y_1) \\ g(x_1, y_1) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow P_2 = (x_2, y_2) &\hat{=} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = -A(P_1)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f(x_1, y_1) \\ g(x_1, y_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wenn wir Glück haben, liegt  $P_2$  näher bei  $P_0$  als  $P_1$ . Dann lässt sich auf diesem Vorgehen eine Iteration aufbauen. Durch den Verlauf der Rechnung und eine Überprüfung des Resultates lässt sich beurteilen, ob das Verfahren gegen brauchbare Werte konvergiert oder nicht. ( $f(x_n, y_n)$  und  $g(x_n, y_n)$  müssen mit  $n$  immer kleiner werden. Theoretische Konvergenzkriterien wollen wir hier nicht behandeln.)

$$\text{Bsp.: } \begin{array}{l|l} x^2 + y^2 - 1 & = 0 \\ y - \sin(x) & = 0 \end{array} \quad \text{Start: } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

In 4 Schritten erhalten wir:  $x_5 = 0.73908513$ ,  
 $y_5 = 0.67361203$ ,  $f(x_5, y_5) = 0.00000000 \dots$ ,  $g(x_5, y_5) = 0.00000000 \dots$

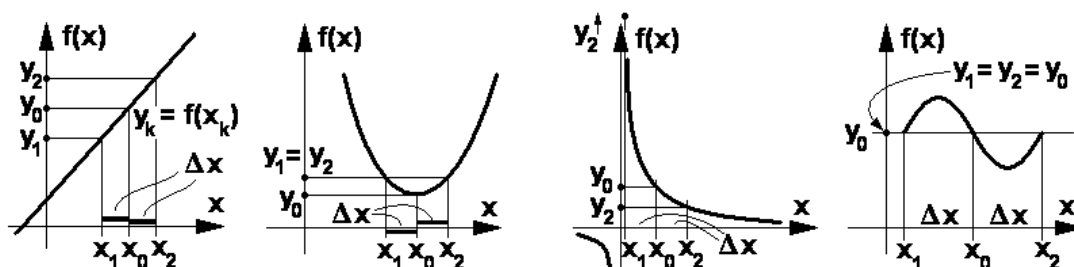
## 7.6 Fehlerrechnung (Abhängigkeit) — Calcul de l'erreur (dépendance)

Unter dem Begriff „Fehlerrechnung“ werden in der Literatur zwei verschiedene Problemtypen behandelt: Erstens das Problem der Verpflanzung von Messfehlern bei der Anwendung von Funktionen auf fehlerbehaftete Messgrößen. Und zweitens das Problem der Fehler von statistischen Kenngrößen (z.B. Mittelwert), welche meistens von einer grossen Datenmenge abhängen. Hier wollen wir den ersten Fehler-typ behandeln. Der zweite wird im getrennt herausgegebenen Anhang zu diesem Skript besprochen.

### 7.6.1 Das Problem der Verpflanzung — Le problème de la dépendance

**Situation:** (a):  $y = f(x)$

Gemessen wird  $x \pm \Delta x \leadsto y \pm \Delta y = ?$



$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2), \quad \Delta y_1 = |y_1 - y_0| = ?, \quad \Delta y_2 = |y_2 - y_0| = ?$$

**Situation:** (b):  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Gemessen werden die Werte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  der Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Bei kontinuierlichen Messwerten gibt es immer Ableseungenauigkeiten, die aber abschätzbar sind. Diese zugehörigen „Messfehler“ betragen  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ . Die „exakten Werte“  $x_k^*$ ,  $k = 1, \dots, n$  liegen daher in den Intervallen  $[x_k - \Delta x_k, x_k + \Delta x_k]$ . Zudem sei eine Funktion  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  gegeben, mit deren Hilfe eine weitere Grösse berechnet werden muss.

**Problem:** In welchem Intervall liegt der „wahre“ Wert  $f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ ?

### 7.6.2 Verwendung des totalen Differentials — Appliquer la différentielle totale

Sei  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ,  $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{1_0} \\ \vdots \\ x_{n_0} \end{pmatrix}$ ,  $f(\vec{x}) := f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $D_k \geq |\Delta x_k|$  ( $D_k$  ist eine bezifferbare Schranke.)

Aus der Theorie des **totalen Differentials** weiss man:

$$\Delta f = f(\vec{x}_0 + \Delta \vec{x}) - f(\vec{x}_0) = \Delta x_1 f'_{x_1}(\vec{x}_0) + \dots + \Delta x_n f'_{x_n}(\vec{x}_0) + O[2]$$

( $O$ : Glieder höherer Ordnung)

$$\leadsto \Delta f \approx \Delta x_1 f'_{x_1}(\vec{x}_0) + \dots + \Delta x_n f'_{x_n}(\vec{x}_0)$$

$$\leadsto |\Delta f| \leq |\Delta x_1| |f'_{x_1}(\vec{x}_0)| + \dots + |\Delta x_n| |f'_{x_n}(\vec{x}_0)| \leq D_1 |f'_{x_1}(\vec{x}_0)| + \dots + D_n |f'_{x_n}(\vec{x}_0)| := \Delta f_{\max}$$

**Satz:**

**Vor.:**

Messsituation wie oben beschrieben ,  
 $f \in \mathcal{D}^{(1)}$

**Beh.:**

$$|\Delta f| \leq D_1 |f'_{x_1}(\vec{x}_0)| + \dots + D_n |f'_{x_n}(\vec{x}_0)| := \Delta f_{\max}$$

**Konsequenz:**

$$f(\vec{x}^*) = f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in [f(\vec{x}_0) - \Delta f_{\max}, f(\vec{x}_0) + \Delta f_{\max}]$$

**Definition:**

$|\Delta f|$  heisst **absoluter Fehler** ,  
 $\left| \frac{\Delta f}{f(\vec{x}_0)} \right|$  heisst **relativer Fehler** .

**1. Beispiel:**  $f(x, y) = x \pm y \Rightarrow \Delta f_{\max} = D_x |1| + D_y |\pm 1| = D_x + D_y$

**2. Beispiel:**  $f(x, y) = x \cdot y \Rightarrow \Delta f_{\max} = D_x |y_0| + D_y |x_0|$

**3. Beispiel:**  $f(x, y) = \frac{x}{y} \Rightarrow \Delta f_{\max} = D_x \left| \frac{1}{y_0} \right| + D_y \left| \frac{x_0}{y_0^2} \right|$

**4. Beispiel:**  $f(x, y) = x^y \Rightarrow \Delta f_{\max} = D_x |y_0 \cdot x_0^{y_0-1}| + D_y |x_0^{y_0} \ln(x_0)|$

**5. Beispiel:**

$$f(x) = x^2 - 2x + 4 - \sin(x) + \ln(x) \Rightarrow \Delta f_{\max} = D_x \left| 2x_0 - 2 - \cos(x_0) + \frac{1}{x} \right|$$

**Bemerkung:**

Diese Beispiele zeigen, dass die oft geäusserte Meinung, es genüge mit den extremen Werten zu rechnen, wohl äusserst falsch sein muss.

**6. Beispiel:**

Messwerte:

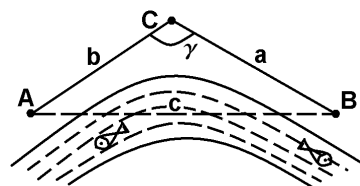
$$a = 364.76 \pm 0.05m$$

$$b = 402.35 \pm 0.05m$$

$$\gamma \hat{=} 68^\circ 14' \pm 4'$$

$$\leadsto \gamma \approx 1.1909 \pm 0.002$$

$$c = ?$$



$$\leadsto c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)} \approx 431.38$$

$$\Rightarrow \Delta c_{\max} = D_a \cdot \left| \frac{\partial c}{\partial a} \right| + D_b \cdot \left| \frac{\partial c}{\partial b} \right| + D_\gamma \cdot \left| \frac{\partial c}{\partial \gamma} \right| =$$

$$= 0.05 \cdot \left| \frac{2a - 2b \cos(\gamma)}{2\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)}} \right| + 0.05 \cdot \left| \frac{2b - 2a \cos(\gamma)}{2\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)}} \right| + 0.002 \cdot \left| \frac{2ab \sin(\gamma)}{2\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)}} \right|$$

$$\approx 0.02498 + 0.03096 + \underbrace{0.36762}_{!!!} \approx 0.424 \Rightarrow c \pm \Delta c_{\max} = 431.38 \pm 0.424$$

**Achtung:**  $\gamma \approx 1.1909 \pm 0.002 \underline{\underline{=}} \Rightarrow c \pm \Delta c_{\max} = 431.38 \pm 0.424 \quad \text{!!!!!!}$

### 7.6.3 Linearisierungen — Linéarisations

**Idee:**  $\Delta f = f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) = f(\vec{x}_0 + \Delta \vec{x}) - f(\vec{x}_0) \approx \Delta x_1 f'_{x_1}(\vec{x}_0) + \dots + \Delta x_n f'_{x_n}(\vec{x}_0)$   
 $\Rightarrow f(\vec{x}) \approx f(\vec{x}_0) + \Delta x_1 f'_{x_1}(\vec{x}_0) + \dots + \Delta x_n f'_{x_n}(\vec{x}_0)$

**Lemma:****Vor.:**

$$f \in \mathcal{D}^1$$

**Beh.:**

$$f(\vec{x}) \approx f(\vec{x}_0) + \Delta x_1 f'_{x_1}(\vec{x}_0) + \dots + \Delta x_n f'_{x_n}(\vec{x}_0)$$



**1. Beispiel:**

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f(\varepsilon) = \frac{1}{1+\varepsilon} \approx f(0) + f'(0) \cdot \varepsilon = 1 + \frac{-1}{(1+\varepsilon)^2} \Big|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon = 1 - \varepsilon$$

$$\text{Z.B. } \frac{1}{1.000'000'37} \approx 1 - 0..000'000'37 = 0.999'999'63$$

**2. Beispiel:**

$$f(x) = (1+x)^n \Rightarrow f(\varepsilon) = (1+\varepsilon)^n \approx f(0) + f'(0) \cdot \varepsilon = 1 + n \cdot (1+\varepsilon)^{n-1} \Big|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon = 1 + n \cdot \varepsilon$$

$$\text{Z.B. } (1.000'000'000'1)^{54} \approx 1 - 0..000'000'054$$

## 7.7 Regression — Régression

### 7.7.1 Der Begriff — La notion

**Geg.:**

Stichprobe von Beobachtungen  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$

$x_k$  z.B. Maschineneinstellung ,

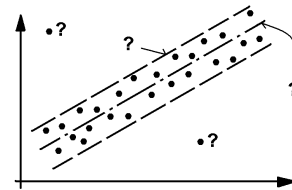
$y_k = f(x_k)$  Messung .

**Problem:** Interpretation des Verhaltens der Messwerte (Gesetz)?

Z.B. Vermutung: Die Messwerte liegen auf einer passenden Geraden oder sonstigen Kurve.

**Problem:**

Wie findet man die „beste“ Gerade (resp. Kurve)?

**→ Probleme:**

1. Berechnung der Parameter der hypothetischen Kurve.
2. Beurteilung der Zuverlässigkeit der getroffenen Wahl.

Die so gefundene Kurve trägt den etwas unverständlichen Namen **Regressionskurve**.

Wieso dieser Name? Der Name stammt aus einer Beschreibung von Beobachtungen von F. Galton <sup>21</sup> zum Größenwachstum von Menschen. Galton hat festgestellt:

- 1 Grössere Väter haben grössere Söhne.
- 2 Jedoch beobachtet man die Tendenz, dass grosse Väter grosse Söhne haben, die aber im Mittel kleiner sind als die genannten Väter selbst. Es ist also ein **Rückschritt**  $\rightsquigarrow$  **Regress** vorhanden.

Sei  $x$  = Grösse der Väter ,  
 $y$  = Grösse der Söhne .  
 $y(x) = a x + b$  Gerade  
 $\rightsquigarrow$  „**Regressionsgerade**“

Der Begriff *Regressionsgerade* ist also historisch verankert, hat aber inhaltlich nichts mit der Mathematik zu tun.

<sup>21</sup>Engl. Naturforscher , 1822 – 1911

### 7.7.2 Methode der kleinsten Quadrate — Méthode des carrés minimaux

#### Das Problem — Le problème

**Problem:** Welche Kurve ist die „beste“ Kurve? – Wie ist das Kriterium „beste“ definitorisch am vernünftigsten zu fassen?

Da wir Menschen selbst entscheiden müssen, was unsere „Vernunft“ sein soll, können wir hier „vernünftig“ mit „ökonomisch“ und daher mit „pragmatisch“ und „einfach“ gleichsetzen. Wir wählen daher hier ein pragmatisches Vorgehen. (In der Literatur ist eine etwas fundiertere Begründung üblich, auf der Grundlage des „Maximum-likelihood-Prinzips“.)

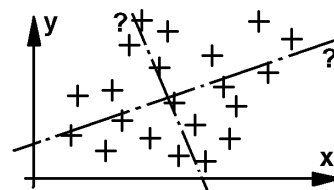
**Wichtig:** Dass die gesuchte Kurve eine Gerade oder sonst irgend eine Kurve ist, lässt sich theoretisch nicht exakt entscheiden. Man kann nur zu Aussagen kommen wie „die eine Kurve ist wahrscheinlicher als die andere“. Denn dass die gefundenen Messwerte überhaupt auf einer stetigen Kurve liegen, beruht auf einer Arbeitshypothese, die wir nach Descartes mit dem Argument der Erfahrung und der Arbeitsökonomie begründen.

#### Die Begründung der Methode — La déduction de la méthode

**Problem:** Durch eine „Punktwolke“ von Messwerten soll eine „beste“ Gerade gelegt werden. Wie ist vorzugehen?

##### Idee 1:

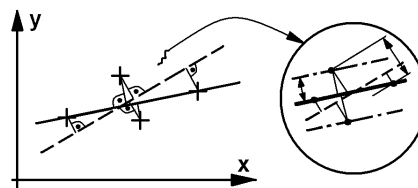
Versuche  $g$  so festzulegen, dass die Summe der Abstände zu  $g$  gleich 0 wird.



**Problem:** Diese Methode funktioniert nicht, da offensichtlich (Skizze) mehrere passende „beste“ Geraden möglich sind.

##### Idee 2:

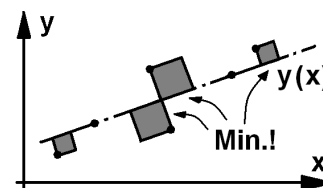
Lege die Gerade so, dass die Summe der Beträge der Abstände minimal wird.



**Problem:** Diese Methode funktioniert praktisch schlecht, da beim Berechnen der Abstände im  $\mathbb{R}^2$  Wurzeln vorkommen, was die Rechnung sehr kompliziert.

##### Idee 3:

Nimm statt der Summe der Beträge der Abstände die Summe der Quadrate der Abstände zu  $g$ . Dadurch fallen bei der Rechnung die Quadratwurzeln weg.

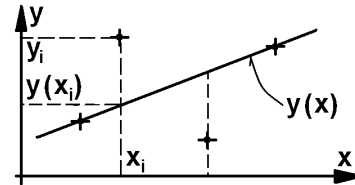


**Problem:** Praktisch ist zu einem gegebenen Wert  $x_i$  der Messwert  $y_i$  gegeben  $\leadsto P_i$ . Die Gerade soll so bestimmt werden, dass für die nächstgelegenen Punkte  $P_i^* \in g$  die Summe der Distanzquadrate

$|\overline{P_i P_i^*}|$  minimal ist. Man hat das Problem der Minimalisierung unter der Bedingung, dass  $\overline{P_i P_i^*} \perp g$  gilt, was die Rechnung wieder sehr kompliziert. Einfacher wird es, hier einen Fehler in Kauf zu nehmen und  $x_i^* = x_i$  zu setzen.

**Idee 4:**

Nimm statt Summe der Quadrate der Abstände zu  $g$  nur die Summe der  $\Delta y_i$ .



**Problem:** Unter der Hypothese, dass die Kurve eine Gerade  $y = g(x) = a \cdot x + b$  ist, gilt es nun,  $a$  und  $b$  zu berechnen. Analog geht man bei andern Kurven vor, z.B.  $y = h(x) = a \sin(bx + c)$ .

**Lösung:**

$$(1) \sum_{i=1}^n (\Delta y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - g(x))^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax + b))^2 := f(a, b) \rightarrow \text{Min}$$

$$(2) \sum_{i=1}^n (\Delta y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - h(x))^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - (a \sin(bx + c)))^2 := f(a, b) \rightarrow \text{Min}$$

Bedingung:  $\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial b} = 0 \quad \leadsto$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial a} &= \sum_{i=1}^n 2(y_i - ax_i - b) \cdot (-x_i) = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) \cdot x_i = -2 \sum_{i=1}^n y_i \cdot x_i - a \sum_{i=1}^n x_i^2 - b \sum_{i=1}^n x_i \\ &= -2 \sum_{i=1}^n y_i \cdot x_i - a \sum_{i=1}^n x_i^2 - b \sum_{i=1}^n x_i = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial b} &= \sum_{i=1}^n 2(y_i - ax_i - b) \cdot (-1) = -2 \sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i - b \sum_{i=1}^n 1 = 0 \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n ax_i - \sum_{i=1}^n b &= \sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i - nb = 0 \end{aligned}$$

Sei  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  (Mittelwert der  $x_i$ ),  $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i y_i &= a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b n \bar{x} \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i y_i &= a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b n \bar{x} \Rightarrow y(\bar{x}) = a \bar{x} + b = \bar{y} \end{aligned}$$

$b = \bar{y} - a \bar{x}$  einsetzen:  $(\Rightarrow \bar{y} = a \bar{x} + b)$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = a \sum_{i=1}^n x_i^2 + (\bar{y} - a \bar{x}) n \bar{x} = a \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2 \right) + n \bar{x} \bar{y}$$

**Hinweis:**

$$\begin{aligned} \text{Sei } \vec{d}_e &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} := \vec{1}, \quad \vec{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i y_i &= \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle, \quad \sum_{i=1}^n x_i = \langle \vec{x}, \vec{d}_1 \rangle, \quad \sum_{i=1}^n y_i = \langle \vec{y}, \vec{d}_1 \rangle \quad \leadsto \end{aligned}$$

**Formel:****Vor.:**

Sei

 $y = a \cdot x + b$  Regressionsgerade  $g$ **Beh.:**

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle - n \bar{x} \bar{y}}{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle - n \bar{x}^2}$$

$$b = \bar{y} - \bar{x} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} = \bar{y} - \bar{x} \cdot \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle - n \bar{x} \bar{y}}{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle - n \bar{x}^2}$$

$$y(\bar{x}) = a \bar{x} + b = \bar{y} \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \in g$$

**Schreibweise mit Varianz und Kovarianz — Façon d'écrire à l'aide de la variance et de la covariance**

Betrachtung:

$$s_x^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i \bar{x} + \bar{x}^2) \right) = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \bar{x}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} n \bar{x} + n \bar{x}^2 \right) = \frac{1}{n-1} \left( \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - n \bar{x}^2 \right) = \frac{1}{n-1} \left( \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right)$$

$$= \frac{1}{n-1} (\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle - n \bar{x}^2)$$

In der mathematischen Statistik ist es üblich, die **Varianzen**  $s_x^2$ ,  $s_y^2$  und die **Kovarianz**  $s_{xy}$  wie folgt zu definieren:**Definition:**

$$s_x^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) = \frac{1}{n-1} (\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle - n \bar{x}^2)$$

$$s_y^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right) = \frac{1}{n-1} (\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle - n \bar{y}^2)$$

$$s_{xy} := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n-1} \left( \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) - n \bar{x} \bar{y} \right)$$

$$= \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i \right) \right) = \frac{1}{n-1} (\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle - n \bar{x} \bar{y})$$

Es gilt:  $\bar{x} = \frac{1}{n} \langle \vec{x}, \vec{1} \rangle$ ,  $\bar{y} = \frac{1}{n} \langle \vec{y}, \vec{1} \rangle$ .

Mit Hilfe der Varianz und der Kovarianz lässt sich die Regressionsgerade einfacher schreiben. Dabei benutzen wir:

**Lemma:**

$$a = \frac{s_{xy}}{s_x^2}, \quad b = \bar{y} - \bar{x} \cdot \frac{s_{xy}}{s_x^2}$$

(Durch ausmultiplizieren verifiziert man leicht:  $s_{xy} = s_x^2 \cdot a$  )

**Korollar:**

**Vor.:**

Sei

$y = a \cdot x + b$  Regressionsgerade

**Beh.:**

$$y = \frac{s_{xy}}{s_x^2} \cdot x + \bar{y} - \bar{x} \cdot \frac{s_{xy}}{s_x^2}$$

**Bemerkung:**

Für die Summe der quadratischen Abstände gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\Delta y_i)^2 &= \sum_{i=1}^n (y_i - a x_i - b)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y} - a(x_i - \bar{x}))^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 - 2a \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) + a^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\ &= (n-1) \cdot (s_y^2 - 2a s_{xy} + a^2 s_x^2) = (n-1) \cdot (s_y^2 - 2a s_x^2 + a^2 s_x^2) = (n-1) \cdot (s_y^2 - a^2 s_x^2) \end{aligned}$$

$$\leadsto \sum_{i=1}^n (\Delta y_i)^2 = 0 \Leftrightarrow s_y^2 = a^2 s_x^2 = \left(\frac{s_{xy}}{s_x^2}\right)^2 s_x^2 = \frac{s_{xy}^2}{s_x^2} \Leftrightarrow (s_x \cdot s_y)^2 = s_{xy}^2$$

**Satz:**

$$\sum_{i=1}^n (\Delta y_i)^2 = 0 \Leftrightarrow (s_x \cdot s_y)^2 = s_{xy}^2$$

### 7.7.3 Korrelation — Corrélation

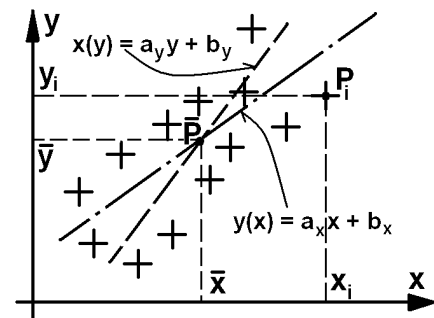
Vorhin haben wir die Gerade  $g_x : y(x) = a \cdot x + b$  untersucht.

Da  $y$  die abhängige und  $x$  die unabhängige Variable war, schreiben wir präziser:

$$y(x) = a_x \cdot x + b_x,$$

$$a_x = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Wir vertauschen nun alle Wertepaare  $(x_i, y_i)$ .  
D.h. wir betrachten  $y$  als die abhängige und  $x$  als die unabhängige Variable. Dann lässt sich mit der Methode der kleinsten Quadrate wieder die „beste“ Gerade  $g_y : x(y) = a_y \cdot y + b_y$  durch die Messpunkte finden.



$a_y$  und  $b_y$  erhält man aus  $a_x$  und  $b_x$  durch Rollenvertauschung der  $x_i, \bar{x}$  und  $y_i, \bar{y}$ :

$$a_y = \frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i - n \bar{y} \bar{x}}{\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2} = \frac{s_{yx}}{s_y^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}) \cdot (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2},$$

$$b_y = \bar{x} - \bar{y} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i - n \bar{y} \bar{x}}{\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2}$$

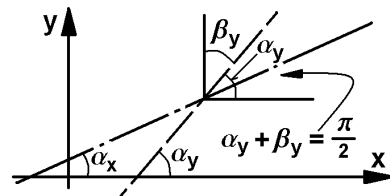
Wenn man  $g_x$  und  $g_y$  in dasselbe Koordinatensystem einzeichnet, ist zu erwarten, dass zwei verschiedene Geraden entstehen.

Ideal wäre allerdings, wenn  $g_x$  und  $g_y$  zusammenfallen würden. Dann hätte man:

$$a_x = \tan(\alpha_x),$$

$$a_y = \tan(\beta_y) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_x\right) = \frac{1}{\tan(\alpha_x)}$$

$$\Rightarrow a_x \cdot a_y = \tan(\alpha_x) \cdot \frac{1}{\tan(\alpha_x)} = 1$$

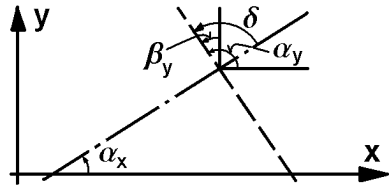


Andernfalls ist:

$$a_x \cdot a_y = \tan(\alpha_x) \cdot \tan(\beta_y)$$

$$= \frac{\tan(\alpha_x)}{\tan(\frac{\pi}{2} - \beta_y)} = \frac{\tan(\alpha_x)}{\tan(\alpha_y)}$$

$$= \frac{\tan(\alpha_x)}{\tan(\alpha_x + \delta)} \neq 1$$



$a_x \cdot a_y = \frac{\tan(\alpha_x)}{\tan(\alpha_x + \delta)}$  ist umso verschiedener von 1, je verschiedener  $\delta$  von 0 ist.  $\leadsto$

$a_x \cdot a_y$  ist ein Mass für den Zusammenhang der beiden Geraden, d.h. für die **Korrelation**.

Es gilt:  $(s_x, s_y \geq 0)$

$$a_x \cdot a_y = \frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i - n \bar{y} \bar{x}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2} = \frac{(\sum_{i=1}^n y_i x_i - n \bar{y} \bar{x})^2}{(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2) \cdot (\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2)},$$

$$\sqrt{a_x \cdot a_y \cdot \text{sgn}(a_x \cdot a_y)} = \frac{\left| \sum_{i=1}^n y_i x_i - n \bar{y} \bar{x} \right|}{\sqrt{(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2) \cdot (\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2)}} = \frac{|s_{xy}|}{\sqrt{s_x^2 \cdot s_y^2}} := |r_{xy}|$$

**Definition:**

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_x^2 \cdot s_y^2}} \text{ heisst } \mathbf{Korrelationskoeffizient}$$

#### 7.7.4 Korrelationskoeff.: Bedeutung — Coeff. de corrélation: Signification

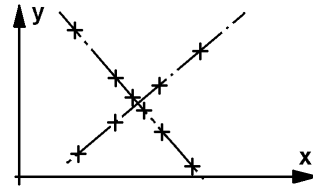
Untersuchung:

$$\begin{aligned} \leadsto \quad r_{xy} = 0 &\Leftrightarrow 0 = s_{xy} := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\Delta x_i) \cdot (\Delta y_i) = \\ &= \frac{1}{n-1} \left( \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) - n \bar{x} \bar{y} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i = \overline{\vec{x}, \vec{y}} = \bar{x} \cdot \bar{y}, \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T, \quad \vec{y} = (y_1, \dots, y_n)^T \end{aligned}$$

**Konsequenz:**

$$r_{xy} = 0 \Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \vdots \\ \Delta y_n \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \vdots \\ \Delta y_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overline{\vec{x}, \vec{y}} = \bar{x} \cdot \bar{y}$$

Diese Situation tritt auf, wenn die Punkte „wolkenartig“ verteilt sind, wie man schon mit vier Punkten sieht, die die Ecken eines achsenparallelen Rechtecks bilden.



Detailliertere Untersuchung:

Seien

$$\Delta \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \bar{x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \vdots \\ \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix},$$

Hier ist:

$$\varphi = \angle(\Delta \vec{x}, \Delta \vec{y}).$$

$$\Delta \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \bar{y} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \vdots \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \vdots \\ \Delta y_n \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_x^2 \cdot s_y^2}} = \frac{\frac{1}{n-1} \cdot \langle \Delta \vec{x}, \Delta \vec{y} \rangle}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \langle \Delta \vec{x}, \Delta \vec{x} \rangle \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \langle \Delta \vec{y}, \Delta \vec{y} \rangle}} = \frac{\frac{1}{n-1} \cdot |\Delta \vec{x}| \cdot |\Delta \vec{y}| \cdot \cos(\varphi)}{\frac{1}{n-1} \cdot |\Delta \vec{x}| \cdot |\Delta \vec{y}|} = \cos(\varphi)$$

$$r_{xy} = 0 \Leftrightarrow \langle \Delta \vec{x}, \Delta \vec{y} \rangle = 0 \Leftrightarrow \Delta \vec{x} \perp \Delta \vec{y} \Leftrightarrow \cos(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$r_{xy} = 1 \Leftrightarrow \langle \Delta \vec{x}, \Delta \vec{y} \rangle = |\Delta \vec{x}| \cdot |\Delta \vec{y}| \Leftrightarrow \Delta \vec{x} \parallel \Delta \vec{y} \Leftrightarrow |\cos(\varphi)| = 1 \Leftrightarrow \varphi = n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

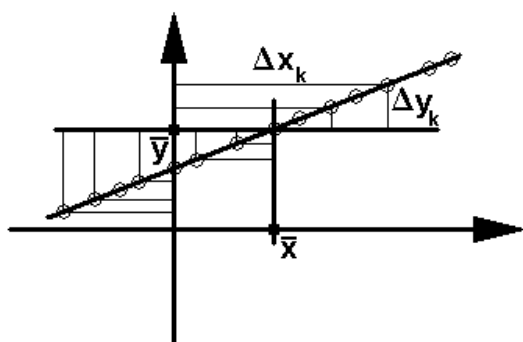
**Korollar:****Vor.:**

$$\varphi = \angle(\Delta \vec{x}, \Delta \vec{y}), \quad \Delta \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \bar{x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \bar{y} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

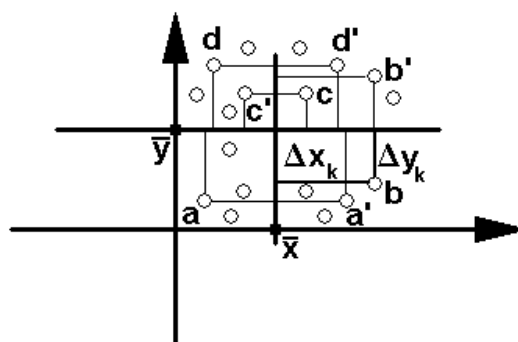
**Beh.:**

$$r_{xy} = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$|r_{xy}| = 1 \Leftrightarrow \varphi = n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$



$$\varphi = n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$



$$\varphi = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Bsp.:

1.  $x = \{2, 3, 4, 6, 8, 12\}$ ,  $y = \{4, 6, 8, 12, 16, 24\}$  ( $y = 2x$ )  $\Rightarrow r = 1$
2.  $x = \{-2.1, -2.1, 0, 0, 2, 2.1\}$ ,  $y = \{4, -4, 3, -3, 4, -4\}$   $\Rightarrow r = -0.0106422$
3.  $x = \{-2.1, -2, 2, 2.1\}$ ,  $y = \{4, -4, 4, -4\}$   $\Rightarrow r = -0.024383$



## Kapitel • Chapitre 8

# Integrale von Funktionen mit mehreren Veränderlichen — Intégrales de fonctions à plusieurs variables

### 8.1 Integration von Integralen — Intégration d'intégrales

#### 8.1.1 Gewöhnliche Integrale als Funktionen eines Parameters — Intégrales simples comme fonctions d'un paramètre

Fall 1: Rechtecksgebiete — Cas 1: Régions rectangulaires

Sei  $z = f(x, y)$   $f : (x, y) \xrightarrow{\text{stetig}} z$  resp.  $f : G \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

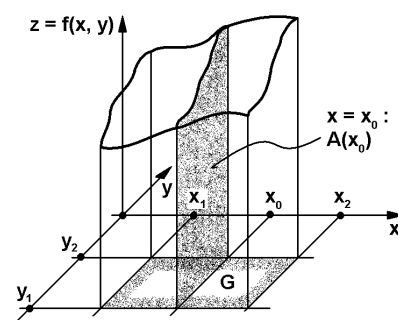
Sei  $x_0 \in \mathbb{R}$  fix  
( $x$  „eingefroren“ )

$$F(x_0) := \int_{y_1}^{y_2} f(x_0, y) dy$$

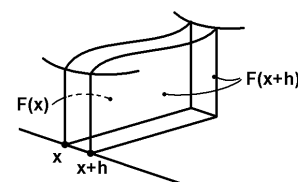
~> Allgemeiner:

$$F(x) := \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy, \quad x \in [x_1, x_2]$$

ist ein klassisches Riemann'sches Integral, das noch von einem Parameter  $x$  abhängt



$f(x, y)$  stetig  
 $\Rightarrow |f(x+h, y) - f(x, y)|$  klein,  
falls  $h$  klein  
 $\Rightarrow F(x)$  stetig



**Satz:****Vor.:**

$$\begin{aligned} f(x, y) &\in \text{stetig}(G) \\ (x, y_1), (x, y_2) &\in G \end{aligned}$$

**Beh.:**

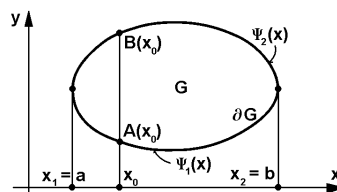
$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy \in \text{stetig} \\ \leadsto F(x) &\text{ wieder integrierbar} \end{aligned}$$

**Bsp.:**

$$F(x) = \int_0^1 \frac{x dy}{\sqrt{1-x^2 y^2}} = \int_0^x \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin(x) - \arcsin(0) = \arcsin(x)$$

**Fall 2: Allgemeine Gebiete — Cas 2: Régions générales**

Sei  $G$  so, dass  $\partial G$  durch zwei stetige Funktionen  $\Psi_1(x)$  und  $\Psi_2(x)$  oder dazu noch durch vertikale Geradenstücke  $\{(x_i, y) \mid y \in [y_1, y_2]\}$  einfach beschrieben werden kann.



**Begriffe:** Solche Gebiete mit derart einfach beschreibbarem Rand wollen wir hier **einfach beschreibbare Gebiete** nennen.

**Bsp.:** Konvexe Gebiete sind einfach beschreibbar.

Allgemein kann man „vernünftige Gebiete“ betrachten, die einen vernünftig beschreibbaren Rand (vgl. Seite 216) haben, d. h. keine fraktalen Gebilde. Man sieht unmittelbar geometrisch ein, dass sich solche Gebiete immer in einfach beschreibbare Teilgebiete zerschneiden lassen. Wir können hier auch umgekehrt vorgehen und Gebiete „vernünftig“ nennen, wenn sie sich in abzählbar viele einfach beschreibbare Teilgebiete zerschneiden lassen:

**Begriffe:**  $G$  heißt hier „vernünftig“, wenn sich  $G$  in abzählbar viele einfach beschreibbare Teilgebiete zerschneiden lässt. Ici  $G$  s'appelle „raisonnable“, si  $G$  est découpable en des régions facilement descriptibles.

Da Integrale unendliche Summen sind und sich solche addieren lassen, genügt es somit, einfach beschreibbare Teilgebiete zu studieren:

**Satz:****Vor.:**

$f(x, y) \in \text{stetig}(G)$ ,  $\Psi_1(x), \Psi_2(x) \in \text{stetig}([x_1, x_2])$  ( $\in \mathcal{C}([x_1, x_2])$ ),  
 $x \in [x_1, x_2]$

**Beh.:**

$$F(x) = \int_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} f(x, y) dy \in \text{stetig}([x_1, x_2]) \quad (\in \mathcal{C}([x_1, x_2]))$$

Das Gegenteil führt sofort zu einem Widerspruch!

**Bsp.:** Sei :

$G = K_r(x_0, y_0)$  = Kreis um  $(x_0, y_0)$  mit Radius  $r$ .

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{y_0 - \sqrt{r^2 - (x-x_0)^2}}^{y_0 + \sqrt{r^2 - (x-x_0)^2}} x \cdot y dy = \frac{1}{2} x \cdot y^2 \Big|_{y=y_0 - \sqrt{r^2 - (x-x_0)^2}}^{y=y_0 + \sqrt{r^2 - (x-x_0)^2}} \\ &= \frac{1}{2} x \cdot ((y_0 + \sqrt{r^2 - (x-x_0)^2})^2 - (y_0 - \sqrt{r^2 - (x-x_0)^2})^2) = \dots \end{aligned}$$

### 8.1.2 Übergang zu Doppelintegralen — Passage aux intégrales doubles

Im Fall wo  $F(x)$  stetig ist, lässt sich mühelos bilden:

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b \left( \int_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

**Definition:**

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b \left( \int_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx \text{ heisst } \mathbf{Doppelintegral}$$

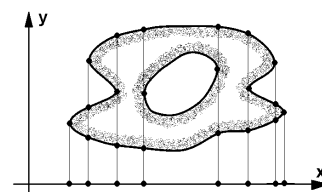
**Bsp.:** Z.B. im konvexen Fall:

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 x \cdot y dy \right) dx = \int_0^1 \left( \frac{1}{2} x \cdot 1^2 \right) dx = \frac{1}{4}$$

**Bemerkung:**

Die „geometrische Bedeutung“ wollen wir in einem späteren Abschnitt besprechen, vgl. Seite 266.

Im Falle dass  $G$  nicht einfach beschreibbar ist, zerschneiden wir  $G$  in einfach beschreibbare Teilgebiete und addieren die Integrale über den Teilgebieten.



**Bsp.:** In der Physik ist die Geschwindigkeit  $v(t)$  die Ableitung des Weges  $s(t)$  und die Beschleunigung  $a(t)$  die Ableitung der Geschwindigkeit.

Umgekehrt ist somit;

$$v(t) = \int_{\tau=t_0}^t a(\tau) d\tau \quad \text{und} \quad s(t) = \int_{\tau=t_0}^t v(\tau) d\tau = \int_{\tau=t_0}^t \left( \int_{\lambda=\tau_0}^{\tau} a(\lambda) d\lambda \right) d\tau$$

$\leadsto$  Doppelintegral

**Bsp.:**  $t_0 = 0, \tau_0 = 0, a(t) = a = \text{const.}$

$$\Rightarrow s(t) = \int_{\tau=0}^t v(\tau) d\tau = \int_{\tau=0}^t \left( \int_{\lambda=0}^{\tau} a d\lambda \right) d\tau = \int_{\tau=0}^t a \tau d\tau = \frac{1}{2} a t^2$$

### 8.1.3 Zur Vertauschbarkeit von Integration und Differentiation — Quant à l'échange de l'intégration et de la différentiation

Fall 1: Rechtecksgebiete — Cas 1: Régions rectangulaires

**Satz:**

**Vor.:**

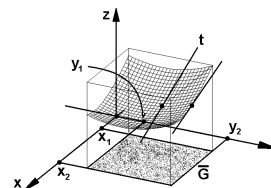
Sei  $\bar{G} = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$   
 $f(x, y)$  diff'bar nach  $x$  in  $G$   
 $f'_x(x, y)$  stetig in  $G$   
 $f$  integrierbar nach  $y$

**Beh.:**

$$1. F(x) = \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy \text{ diff'bar nach } x$$

$$\begin{aligned} 2. \frac{d}{dx} F(x) &= \frac{d}{dx} \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy \\ &= \int_{y_1}^{y_2} \frac{d}{dx} f(x, y) dy = \int_{y_1}^{y_2} f'_x(x, y) dy \\ &\leadsto \text{Differentiation und Integration sind vertauschbar} \end{aligned}$$

Zum Beweis:



$$F(x+h) - F(x) = \int_{y_1}^{y_2} f(x+h, y) dy - \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy = \int_{y_1}^{y_2} (f(x+h, y) - f(x, y)) dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{y_1}^{y_2} h \cdot f'_x(x + \lambda \cdot h, y) dy, \quad \lambda \in [0, 1] \text{ (Mittelwertsatz )} \\
&\Rightarrow \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \int_{y_1}^{y_2} f'_x(x, y) dy \right| = \left| \int_{y_1}^{y_2} \frac{h}{h} \cdot f'_x(x + \lambda \cdot h, y) dy - \int_{y_1}^{y_2} f'_x(x, y) dy \right| = \\
&\left| \int_{y_1}^{y_2} (f'_x(x + \lambda \cdot h, y) - f'_x(x, y)) dy \right| \leq \int_{y_1}^{y_2} |f'_x(x + \lambda \cdot h, y) - f'_x(x, y)| dy \leq_{(*)} \left| \int_{y_1}^{y_2} \varepsilon dy \right| = \varepsilon \cdot |y_2 - y_1| \\
&(*) : f'_x(x, y) \text{ stetig in } G, \quad |\lambda \cdot h| \leq \delta \Rightarrow |f'_x(x + \lambda \cdot h, y) - f'_x(x, y)| \leq \varepsilon \\
&\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'_x(x) = \int_{y_1}^{y_2} f'_x(x, y) dy \quad \odot
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Bsp.:} \quad &\frac{d}{dx} \int_0^1 \frac{\sin(x \cdot y)}{y} dy = \int_0^1 \frac{d}{dx} \frac{\sin(x \cdot y)}{y} dy \\
&= \int_0^1 \frac{\cos(x \cdot y) \cdot \cancel{dy}}{\cancel{dy}} dy = \int_0^1 \cos(x \cdot y) dy = \frac{1}{x} \cdot \sin(x \cdot y) \Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{\sin(x)}{x}
\end{aligned}$$

## Fall 2: Allgemeine Gebiete — Cas 2: Régions générales

Sei  $G$  ein vernünftiges Gebiet.

Aus Gründen der Zusammensetzbarkeit genügt es hier auch wieder, Teilgebiete mit einem vernünftig beschreibbaren Rand zu untersuchen.

Sei  $\partial G$  gegeben durch differenzierbare Funktionen  $\Psi_1(x), \Psi_2(x)$  sowie eventuell vertikale äussere Begrenzungen.

Sei  $f \in \mathcal{D}(G)$

$$\text{Sei } F(x) = \int_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} f(x, y) dy =: \int_u^v f(x, y) dy := \Phi(x, u, v) \quad (f \text{ stetig in } G)$$

$\Phi$  ist partiell diff'bar nach  $x$  ( $u, v = \text{const.}$ , vgl. oben), aber auch nach  $u$  und  $v$  (Fundamentalsatz der Infinitesimalrechnung).

$$\leadsto \text{ Kettenregel: } F'_x(x) = \Phi'_x \cdot x'_x + \Phi'_u \cdot u'_x + \Phi'_v \cdot v'_x = \Phi'_x + \Phi'_u \cdot u'_x + \Phi'_v \cdot v'_x$$

Fundamentalsatz der Infinitesimalrechnung:  $H(x) = \int_y^x h(t) dt \Leftrightarrow H'_x(x) = h(x)$  oder

$$H(\varphi(x)) = \int_y^{\varphi(x)} h(t) dt \Leftrightarrow H'_x(\varphi(x)) = h(\varphi(x)) \cdot \varphi'_x(x) \quad (\varphi'_x(x) \text{ ist die innere Ableitung.})$$

$$\Rightarrow F'_x(x) = \Phi'_x + \Phi'_u \cdot u'_x + \Phi'_v \cdot v'_x = \int_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} f'_x(x, y) dy - f(x, \Psi_1(x)) \cdot \Psi'_1(x) + f(x, \Psi_2(x)) \cdot \Psi'_2(x)$$

( $f, \Psi_1, \Psi_2$  diff'bar nach  $x$  in  $G$ )

**Satz:****Vor.:**

Sei  $G$  wie beschrieben  
 $f$  diff'bar nach  $x$  und stetig in  $G$   
 $\Psi_1, \Psi_2$  diff'bar  

$$F(x) = \int_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} f(x, y) dy$$

**Beh.:**

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} F(x) &= F'_x(x) = \\ &= \int_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} f'_x(x, y) dy + f(x, \Psi_2(x)) \cdot \Psi'_2(x) - f(x, \Psi_1(x)) \cdot \Psi'_1(x) \end{aligned}$$

**1. Beispiel:** 
$$\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin(x \cdot y)}{y} dy =$$

$$\begin{aligned} &= \int_{x^2}^{x^3} \cos(x \cdot y) dy + \frac{\sin(x \cdot x^3)}{x^3} \cdot 3x^2 - \frac{\sin(x \cdot x^2)}{x^2} \cdot 2x = \\ &= \frac{1}{x} \cdot \sin(x \cdot y) \Big|_{y=x^2}^{y=x^3} + \frac{3 \sin(x \cdot x^3)}{x} - \frac{2 \sin(x \cdot x^2)}{x} = \frac{1}{x} \cdot (4 \sin(x^4) - 3 \sin(x^3)) \end{aligned}$$

Man beachte hier, dass  $\frac{\sin(x \cdot y)}{y}$  keine elementare Stammfunktion hat ( $\leadsto$  „Integralsinus“).

**2. Beispiel:**

Sei 
$$F_n(x) = \int_0^x f(y) \cdot \frac{(x-y)^n}{n!} dy \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} F_n(x) = F'_n(x) = F_{n-1}(x)$$

Der Nachweis dieser Formel ist dem Leser als Übung überlassen.

## 8.2 Doppel — und Mehrfachintegrale: Begriffsfassung — Intégrales doubles et multiples: Déduire la notion

### 8.2.1 Konzept — Concept

Wir wollen versuchen, die Ideen bei der Herleitung des Integralbegriffs bei Funktionen mit nur einer Variablen zu übersetzen auf den Fall mehrerer Variablen. Bei Funktionen mit einer Variablen ging es um Flächeninhaltsberechnungen. Somit muss es bei Funktionen mit zwei Variablen um Volumeninhaltsberechnungen und bei Funktionen mit mehr als zwei Variablen um höherdimensionale Volumeninhaltsberechnungen gehen.

Wir wollen zuerst das Problem anhand von Funktionen mit zwei Variablen studieren. Die Übersetzung auf den Fall von Funktionen mit mehr als zwei Variablen wird dann nicht schwierig sein.

Sei  $G = D_f$  ein beschränktes, vernünftiges Gebiet.

(Zur Erinnerung: Beschränkte Gebiete haben in einem endlichen Kreis Platz. )

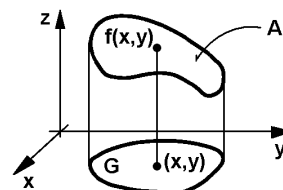
Sei  $f$  vorerst stetig.

Sei  $A_f = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in G\} \subset \mathbb{R}^3$  ( $\leadsto$  erzeugte Fläche)

**Problem:**

**Ges.:**

Volumeninhalt zwischen der  $xy$ -Ebene und  $A_f$ ?

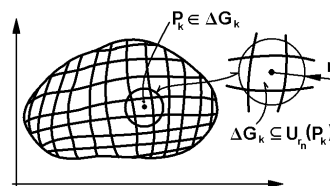


**Wichtig:** Bevor wir praktisch Beispiele lösen, d.h. wirtschaften können, müssen wir die „neue Landschaft erkunden“, d.h. einen Begriffsapparat aufbauen und diesen studieren.

### 8.2.2 Gebietszerlegungen — Partition d'une région

Bei Funktionen mit einer Variablen sind wir von Intervallteilungen ausgegangen. Analog gehen wir hier von einer **Gebietszerlegung** aus.

$\leadsto G = \bigcup_{k=1}^n \Delta G_k, \Delta G_i \cap \Delta G_k = \{\},$   
 $i \neq j, \forall k: \Delta G_k \subseteq U_{r_n}(P_k), P_k \in \Delta G_k$



$r_n$  sei unabhängig von  $k$  gewählt, d.h. zu gegebenem  $n$  global.

**Begriffe:** Wir nennen  $r_n$  hier die **Feinheit** der Zerlegung.

**Bsp.:** Sei  $\Delta G_k$  Rechteck,  $r_n = d_n =$  maximale halbe Diagonallänge bezüglich  $k$ .

### 8.2.3 Verfeinerungen von Gebietszerlegungen — Raffinements de partitions de régions

Bei den Intervallen haben wir von Intervallteilungen, regelmässigen Intervallteilungen und Verfeinerungen von solchen gesprochen. Diese Begriffe lassen sich problemlos unmittelbar ins Mehrdimensionale übersetzen, falls  $\Delta G$  dieselbe Form zulässt wie  $G$ . (Wir reden hier vom **problemlosen Fall**. Der andere Fall ist in einem späteren Abschnitt behandelt, vgl. Seite 270.) Wir erhalten dann z.B. im  $\mathbb{R}^2$  Gebietsteilungen, regelmässige Gebietsteilungen und Verfeinerungen von solchen. Dabei soll für eine Folge von Gebietszerlegungen  $r_n \rightarrow 0$  gelten, z.B.  $r_n = \frac{c}{2^n}$ . Gebietszerlegungen, die  $r_n \rightarrow 0$  erfüllen, wollen wir **zulässig** nennen.

Reguläre Gebietsteilungen müssen bei bestimmten Translationen in sich selbst übergehen. Man denke z.B. an Rechtecke oder Parallelogramme — oder Steinformen, die heute bei Pflästerungen von Plätzen verwendet werden.

### 8.2.4 Riemannsche Summen für problemlose Gebiete — Les sommes de Riemann pour des régions sans problèmes

Wie bei Funktionen mit einer Variablen kann man auch hier bei Funktionen mit zwei Variablen versuchen, den ideal oder auch physikalisch denkbaren Volumeninhalt durch stabförmige Quader über einer regulären Gebietsteilung anzunähern. Der Inhalt wird so mittels Ober- und Untersummen approximiert.

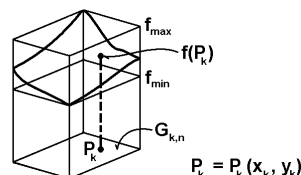
Sei  $f \in \text{beschränkt}(G)$

Sei  $M_{k,n} = f_{\max}$  in  $\Delta \bar{G}_{k,n} \rightsquigarrow$

$f_{\max}(\Delta \bar{G}_{k,n}),$

$m_{k,n} = f_{\min}(\Delta \bar{G}_{k,n})$

$|\Delta G_{k,n}| = \text{Inhalt von } \Delta G_{k,n}$



Es ist geometrisch klar, dass gilt:

$$m_{k,n} \cdot |\Delta G_{k,n}| \leq f(x_{k,n}, y_{k,n}) \cdot |\Delta G_{k,n}| \leq M_{k,n} \cdot |\Delta G_{k,n}|$$

Wie bei Funktionen mit einer Variablen definiert man:

**Definition:**

**Untersumme**

$$S_n^{in} = \sum_{k_1}^n m_{k,n} \cdot |\Delta G_{k,n}|$$

**Obersumme**

$$S_n^{Gr} = \sum_{k_1}^n M_{k,n} \cdot |\Delta G_{k,n}|$$

Für eine Zwischensumme muss daher gelten:

**Lemma:** 
$$S_n^{in} \leq \sum_{k_1}^n f(x_{k,n}, y_{k,n}) \cdot |\Delta G_{k,n}| \leq S_n^{Gr}$$

Wie bei Funktionen mit einer Variablen kann man auch hier zu einer brauchbaren Definition des Volumeninhaltes gelangen, falls gilt:

$$\sum_{k_1}^n \Delta V_{k,n} = \sum_{k_1}^n (M_{k,n} - m_{k,n}) \cdot |\Delta G_{k,n}| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

$n \rightarrow \infty$  bedeutet Feinheit:  $r_n \rightarrow 0$ .

Und wie bei Funktionen mit einer Variablen ist eine Obersumme  $S_n^{Gr}$  zu einer beliebigen Zerlegung immer eine obere Schranke für eine Untersumme  $S_m^{in}$  einer beliebigen andern Zerlegung u.s.w.:

**Lemma:**

**Vor.:**

Gegeben seien zwei beliebige Gebietszerlegungen  $\rightsquigarrow G_{k,n}, G_{j,m}$

**Beh.:**

$$S_n^{in} \leq S_m^{Gr}, \quad S_m^{in} \leq S_n^{Gr}$$



Sei nun  $f(x, y)$  stetig.

Wegen  $r_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  geht die Distanz zwischen den Punkten, an denen  $M_{k,n}$  und  $m_{k,n}$  gemessen wird, gegen 0 mit  $n \rightarrow \infty$ .

$$\leadsto f(x, y) \in \text{stetig} \Rightarrow \forall_k : M_{k,n} - m_{k,n} \rightarrow 0 \Rightarrow \text{Max}(|M_{k,n} - m_{k,n}|) \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| \sum_{k_1}^n \Delta V_{k,n} \right| &\leq \sum_{k_1}^n |\Delta V_{k,n}| = \sum_{k_1}^n |(M_{k,n} - m_{k,n})| \cdot |\Delta G_{k,n}| \leq \sum_{k_1}^n \text{Max}(|M_{k,n} - m_{k,n}|) \cdot |\Delta G_{k,n}| \\ &= \text{Max}(|M_{k,n} - m_{k,n}|) \cdot \sum_{k_1}^n |\Delta G_{k,n}| = \text{Max}(|M_{k,n} - m_{k,n}|) \cdot |G| \rightarrow 0 \quad (\text{wegen } \text{Max}(|M_{k,n} - m_{k,n}|) \text{ und } |G| \in \mathbb{R}.) \end{aligned}$$

In diesen Fällen gilt nun:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{in} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k_1}^n f(x_{k,n}, y_{k,n}) \cdot |\Delta G_{k,n}| = \lim_{n \rightarrow \infty} \leq S_n^{Gr} := V$$

$\leadsto V$  ist so definierbar!  $\leadsto$

**Lemma:**

**Vor.:**

Sei  $G$  problemlos und vernünftig

$f \in \text{stetig}(\bar{G})$ ,  $G \in \text{beschränkt}$

$k, n$  gehören zu einer zulässigen Gebietszerlegung

**Beh.:**

$$\triangleright (1) \sum_{k_1}^n \Delta V_{k,n} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

$$\triangleright (2) V := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k_1}^n f(x_{k,n}, y_{k,n}) \cdot |\Delta G_{k,n}| \text{ existiert}$$

(1) besagt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k_1}^n f(x_{k,n}, y_{k,n}) \cdot |\Delta G_{k,n}|$  unabhängig von der Wahl von  $P_{k,n}(x_{k,n}, y_{k,n}) \in \bar{G}_{k,n}$

Zur Begründung von (2):

$$\begin{aligned} \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k_1}^n f(x_{k,n}, y_{k,n}) \cdot |\Delta G_{k,n}| \right| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k_1}^n |f(x_{k,n}, y_{k,n})| \cdot |\Delta G_{k,n}| \leq \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k_1}^n \text{Max}(|f(x_{k,n}, y_{k,n})|) \cdot |\Delta G_{k,n}| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k_1}^n c \cdot |\Delta G_{k,n}| = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k_1}^n |\Delta G_{k,n}| = c \cdot |G| \end{aligned}$$

$\leadsto$  Majorante!

**Bemerkung:**

Zur „Epsilontik“

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k_1}^n \Delta V_{k,n} \right| = 0 \text{ bedeutet: } 0 < r_n < \delta \Rightarrow \left| \sum_{k_1}^n \Delta V_{k,n} \right| < \varepsilon$$

**Definition:**

$$\text{Sei } V := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k_1}^n f(x_{k,n}, y_{k,n}) \cdot |\Delta G_{k,n}|$$

Im Falle der Existenz von  $V \in \mathbb{R}$  nennen wir  $V$  **Volumeninhalte** des Körpers zwischen der  $xy$ -Ebene und der Funktionsfläche  $A_f$ .

**Symbol:**  $V := \iint_G f(x, y) dG := \int_G f(x, y) dG := \int_G f(x, y)$

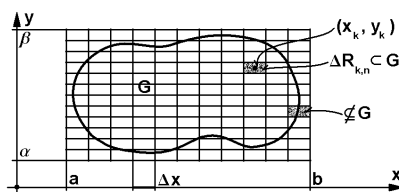
Falls  $f(x, y)$  auf  $G$  positiv ist, kann man vom **Körper unter der Fläche**  $A_f$  reden. Entsprechend für  $f(x, y)$  negativ. Im gemischten Fall entstehen negative und positive Inhalte und damit Differenzen.

### 8.2.5 Riemannsche Summen bei beliebigen vernünftigen Gebieten — Les sommes de Riemann pour des régions quelconques mais raisonnables

Sei  $G$  endlich. Wir verwenden einen Trick:

Packe  $G$  in ein Rechteck  $R$  ein und erweitere  $f$  und  $D_f$  wie folgt:

$$f_R(x, y) := \begin{cases} f(x, y) & (x, y) \in G \\ 0 & (x, y) \notin G \end{cases}$$

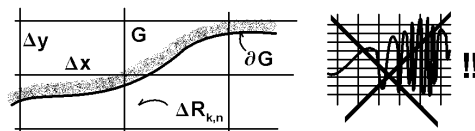
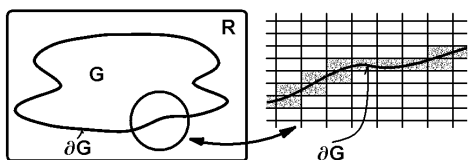


Seien  $\Delta x = \frac{b-a}{m}$ ,  $\Delta y = \frac{\beta-\alpha}{m}$ ,  $n = m^2$ ,  $(x_{k,n}, y_{k,n}) \in \Delta R_{k,n}$  beliebig

→ Jetzt können wir mit einer Rechteck-Gebietszerlegung und  $f_R$  arbeiten. Ausserhalb  $G$  liefert  $f_R$  keinen Beitrag. Die Riemannsche Summe erstreckt sich nur über die Punkte  $\in G$ .

$$\rightarrow \int_G f(x, y) dG \approx \sum_{k=1}^n f(x_{k,n}, y_{k,n}) \cdot \frac{(b-a)(\beta-\alpha)}{m^2} = \frac{(b-a)(\beta-\alpha)}{m^2} \cdot \sum_{k=1}^n f(x_{k,n}, y_{k,n})$$

→ **Problem:**



In der Randzone um  $\partial G$  kann zufällig  $f_R(x_{k,n}, y_{k,n}) = 0$  werden — oder aber  $f_R(x_{k,n}, y_{k,n}) = f(x_{k,n}, y_{k,n}) \neq 0$

→ Die Berechnung einer ganzen Zone kann also fehlerhaft sein.

Nach Voraussetzung ist  $G$  vernünftig, d.h. also  $\partial G$  genügend „glatt“. Sei nun die Gebietszerlegung genügend fein, sodass sich innerhalb der Problemzone nie 4 Rechtecke  $R_{k,n}$  in einem Punkt berühren. Dann kann man die Problemzone in ein Band der Länge von  $\partial G$  und der Breite gleich 2 mal die Diagonallänge der Rechtecke  $R_{k,n}$  legen.

$$\rightarrow \text{Inhalt der Problemzone} \leq |\partial G| \cdot 2 \cdot \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$\rightarrow |\text{Fehler}| \leq \max(|f(x_{k,n}, y_{k,n})|) \cdot |\partial G| \cdot 2 \cdot \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

(wegen  $\max(|f(x_{k,n}, y_{k,n})|), |\partial G| \in \mathbb{R}$ ,  $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0$ )

Wenn  $f_R = f$  in  $\bar{G}$  stetig ist und  $f_R = 0$  in  $R \setminus \bar{G}$ , so gilt für ganz  $R$  und für  $f_R$ :

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k_1}^n \Delta V_{k,n} \right| &\leq \sum_{k_1}^n |\Delta V_{k,n}| = \sum_{k_1}^n |(M_{k,n} - m_{k,n})| \cdot |\Delta R_{k,n}| \leq \sum_{k_1}^n \max(|M_{k,n} - m_{k,n}|) \cdot |\Delta R_{k,n}| = \\
&= \max(|M_{k,n} - m_{k,n}|) \cdot \sum_{k_1}^n |\Delta R_{k,n}| = \max(|M_{k,n} - m_{k,n}|) \cdot |G| \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Denn in  $G$  ist:  $\max(|M_{k,n} - m_{k,n}|) \rightarrow 0$

und ausserhalb von  $G$  gilt:  $M_{k,n} = m_{k,n} = 0$

Daher gilt der Satz:

**Satz:**

**Vor.:**

Sei  $G$  vernünftig

$f \in \text{stetig}(\bar{G})$ ,  $G \in \text{beschränkt}$

$k, n$  gehören zu einer zulässigen Gebietszerlegung

**Beh.:**

▷ (1)  $\int_G f(x, y) dG$  existiert

▷ (2)  $\int_G f(x, y) dG = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k_1}^n f(x_{k,n}, y_{k,n}) \cdot |\Delta G_{k,n}|$

Damit können wir auch die vorhin gegebene Definition des Volumeninhalts auch bei beliebigen vernünftigen Gebieten übernehmen.

## 8.2.6 n-dimensionale Volumenintegrale — Intégrales de volume à dim. n

Statt  $P_{k,n} \in G \subset \mathbb{R}^2$  zu wählen, kann man auch  $P_{k,n} \in G \subset \mathbb{R}^m$  wählen.

$\leadsto P_{k,n}$  wird durch  $m$  Koordinaten bestimmt:

$P_{k,n} = (x_{k,n_1}, \dots, x_{k,n_m})$

Entsprechend ist  $|\Delta G_{k,n}|$  ein Volumeninhalt im  $\mathbb{R}^m$ .

Dabei gehen wir immer von einem kartesischen Koordinatensystem aus, wenn wir nicht explizit ein anderes Koordinatensystem fordern!  $r_n$  ist dann der Radius einer  $m$ -dimensionalen Kugel. Wenn  $|\Delta G_{k,n}|$  ein  $m$ -dimensionaler Quader ist, kann man für  $r_n$  die halbe Diagonallänge nehmen:  $r_n = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_m)^2}$ . Man erhält dann wie bei  $m = 2$ :

$$\begin{aligned}
V &:= \iint_G \dots \int f(x_{k,n_1}, \dots, x_{k,n_m}) dG := \int_G f(x_{k,n_1}, \dots, x_{k,n_m}) dG \\
&:= \int_G f(x_{k,n_1}, \dots, x_{k,n_m}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k_1}^n f(x_{k,n}, y_{k,n}) \cdot |\Delta G_{k,n}|
\end{aligned}$$

$\leadsto$  **Schreibweise:**

$$\iint_G \dots \int f(x_{k,n_1}, \dots, x_{k,n_m}) dG := \int_G f(x_{k,n_1}, \dots, x_{k,n_m}) dG := \int_G f$$

**Bsp.:**  $P_{k,n} = f(x_{k,n_1}, \dots, x_{k,n_m}) := f(P_{k,n}) = c$

$$\Rightarrow \int_G f(x_{k,n_1}, \dots, x_{k,n_m}) dG = \int_G c dG = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k_1}^n c \cdot |\Delta G_{k,n}| = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k_1}^n |\Delta G_{k,n}| = c \cdot |G|$$

## 8.2.7 Integrationsregeln — Règles pour l'intégration

Analog zum Fall von Funktionen mit nur einer Variablen kann man hier entsprechende Integrationsregeln herleiten. Der bei der Herleitung der Regeln einzuschlagende Weg geht meist analog zum Fall von

Funktionen mit nur einer Variablen. Was anders ist, ist die Art der Berechnung von Abständen: Im  $\mathbb{R}^1$  sind es Beträge von Differenzen, z.B.  $x_1 - x_2$ , im  $\mathbb{R}^m$  sind es allgemeiner euklidische Distanzen, z.B.  $\sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_m)^2}$ . Auf die expliziten Beweise verzichten wir hier aus Raumgründen. Sie sind Sache des Lesers. Oft kann man die Regel auch geometrisch direkt einsehen.

**Regeln:**

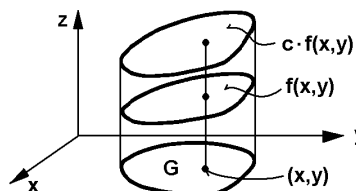
**Vor.:**

Die verwendeten Gebiete seien vernünftig und die Funktionen integrierbar.

**Beh.:**

$$\odot \int_G (c \cdot f) = c \cdot \int_G f$$

$\leadsto$  Streckung



$$\odot \int_G (f_1 + f_2) = \int_G f_1 + \int_G f_2$$

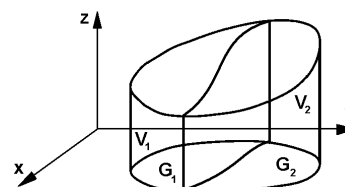
$\leadsto$  „Addition“ von Volumina

Das Integral ist ein **linearer Operator**.

$$\odot \int_{G_1 \cup G_2} f = \int_{G_1} f + \int_{G_2} f$$

$G_1 \cap G_2 = \{\}$

$\leadsto$  Zusammenzug von Gebieten



$$\odot f \geq g \text{ in } G \Rightarrow \int_G f \geq \int_G g$$

Speziell:

$$|f| \geq f \text{ in } G \Rightarrow \int_G |f| \geq \int_G f \geq \pm \int_G f = \int_G \pm f$$

$$\text{Sei } f_m = \min_{P \in G} f(P), \quad f_M = \max_{P \in G} f(P) \Rightarrow |G| \cdot f_m \leq \int_G f \leq |G| \cdot f_M$$

$\odot$  **Konsequenz:** Mittelwertsatz:

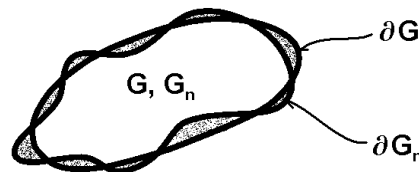
$$\text{Sei } f \in \mathcal{C}(G), \quad f \text{ beschränkt}(G) \Rightarrow \exists P \in G : |G| \cdot f(P) = \int_G f$$

$$\odot \text{Sei } \langle f_n \rangle \in \text{UNIFCONV}(G)^{22} \Rightarrow \int_G f_n \rightarrow \int_G f$$

---

<sup>22</sup>UNIFCONV vergleiche Seite 196

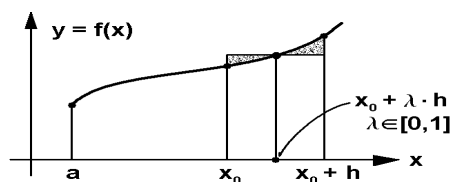
$$\begin{aligned}
& \oslash \quad \int_R f dG \text{ definiert,} \\
& \bar{G}_n, \bar{G} \subseteq R, \quad |G \triangle G_n| = \\
& = |(G \setminus G_n) \cup (G_n \setminus G)| \rightarrow 0 \\
& \text{für } n \rightarrow \infty \\
& \Rightarrow \int_{G_n} f \rightarrow \int_G f
\end{aligned}$$



⊙ Das Problem der Übertragung des Hauptsatzes der Infinitesimalrechnung („Gebietsdifferentiation“: :)

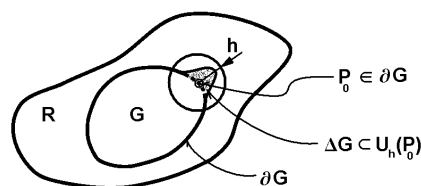
↪ Die Situation bei Funktionen mit nur einer Variablen:

$$\begin{aligned}
& \text{Sei } F(x) = \int_a^{x_0} f(t) dt \\
& F'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt}{h} \\
& = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot f(x_0 + \lambda h)}{h} \\
& = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + \lambda h) = f(x_0) \Rightarrow F'(x_0) = f(x_0) \text{ (Mittelwertsatz)}
\end{aligned}$$



Die Situation bei Funktionen mit zwei Variablen:

$$\begin{aligned}
& \text{Sei } f(x) \in \text{stetig}(R), \\
& \bar{G}_n, \bar{G} \subseteq R, \quad \Delta G \subseteq U_h(P_0), \quad P_0 \in \partial G \\
& \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{G \cup \Delta G} f dG - \int_G f dG}{|\Delta G|} = \\
& \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{\Delta G} f dG}{|\Delta G|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P) \cdot |\Delta G|}{|\Delta G|} \\
& = f(P_0) \text{ (Mittelwertsatz, } P \rightarrow P_0 \text{ für } h \rightarrow 0)
\end{aligned}$$



**Problem:** Unbestimmte Integrale von Funktionen mit nur einer Veränderlichen sind Stammfunktionen und als solche Funktionen der oberen Intervallgrenze.  $\int_G f$  ist ein bestimmtes Integral, das nicht nur von der Grösse von  $G$ , sondern auch von der **Form** von  $G$  abhängt. Intervalle im  $\mathbb{R}^1$  haben alle dieselbe Form, Gebiete aber jedoch nicht.

**Konsequenz:** Daher lässt sich der Begriff Stammfunktionen nicht direkt auf Integrale über Gebieten mit verschiedener Form übertragen.

## 8.3 Berechnung von Doppel- und Mehrfachintegralen — Calculer des intégrales doubles et multiples

### 8.3.1 Gebietsintegrale, allgemeine Situation — Intégrales de région, situation générale

Sei  $G$  ein vernünftiges, beschränktes Gebiet,  $f$  stetig und beschränkt auf  $G$ .  
Sei  $G \in R$  (Rechteck .)

Falls eine Funktion über  $G$  integrierbar ist, d.h. die Riemannsche Summen konvergieren, so folgt aus dem ersten Lemma (Seite 268), dass der Wert des Integrals nicht von der Art der Gebietszerlegung abhängen kann. Man darf somit für die  $\Delta G_{k,n}$  die denkbar vernünftigste Form wählen. Bei kartesischen Koordinaten drängen sich natürlich achsenparallele Rechtecke auf. Dabei ist folgender Begriff üblich:

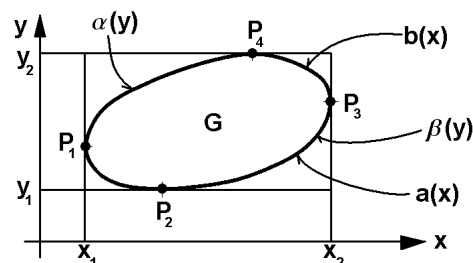
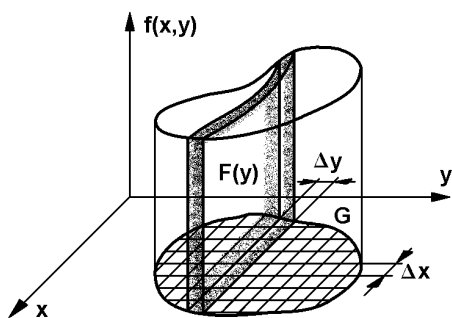
**Definition:**

Für  $\Delta G \subset \mathbb{R}^2$  heisst  $\Delta G$  **Flächenelement**, für  $\Delta G \subset \mathbb{R}^3$  heisst  $\Delta G$  **Volumenelement**, für  $\Delta G \subset \mathbb{R}^m$  heisst  $\Delta G$  **m-dimensionales Volumenelement**.

Im Falle einer Rechteckzerlegung erhalten wir für das Flächenelement bei einer Zerlegung in je  $m$  Streifen in  $x$  und in  $y$ -Richtung:

$$\Delta G_{k,n=m^2} = \Delta G_m = \Delta R_m = \Delta x \cdot \Delta y = \frac{x_1 - x_1}{m} \cdot \frac{y_1 - y_1}{m} = \frac{(x_1 - x_1)(y_1 - y_1)}{m^2}$$

### (1) Konvexe Gebiete — Des régions convexes



$$\text{Sei } \partial G = \{(x, a(x))\} \cup \{(x, b(x))\} = \{(\alpha(y), y)\} \cup \{(\beta(y), y)\}$$

Unten:  $\{(x, a(x))\}$  von  $P_1$  bis  $P_3$  über  $P_2$

Oben:  $\{(x, b(x))\}$  von  $P_1$  bis  $P_3$  über  $P_4$

Links:  $\{(\alpha(y), y)\}$  von  $P_4$  bis  $P_2$  über  $P_1$

Rechts:  $\{(\beta(y), y)\}$  von  $P_4$  bis  $P_2$  über  $P_3$

$$\text{Sei } \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m f_R(x_{i,m}, y) \Delta x_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m f(x_{i,m}, y) \Delta x_m = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx := F(y)$$

Ohne hier in die „Tiefen der Theorie der Doppelreihen“ hinauszusteigen, können wir bei Volumeninhalten doch durch die Anschauung motiviert nachvollziehen (Umstellungen zulässig für stetige, positive Funktionen wegen der absoluten Konvergenz):

$$\begin{aligned} & \leadsto \int_G f(x, y) dG = \int_R f_R(x, y) dR = \\ &= \lim_{n=m^2 \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n=m^2} f_R(x_{k,n}, y_{k,n}) \Delta R_m = \lim_{n=m^2 \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n=m^2} f_R(x_{k,n}, y_{k,n}) \Delta x_m \cdot \Delta y_m \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m f_R(x_{i,m}, y_{j,m}) \Delta x_m \cdot \Delta y_m = \lim_{m_2 \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{m_2} \left( \lim_{m_1 \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{m_1} f_R(x_{i,m_1}, y_{j,m_2}) \Delta x_{m_1} \right) \cdot \Delta y_{m_2} \\ &= \lim_{m_2 \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{m_2} F(y) \Delta y_{m_2} = \int_{x_1}^{x_2} F(y) dy = \int_{x_1}^{x_2} \left( \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx \right) dy \end{aligned}$$

Da  $\Delta R_m = \Delta x_m \cdot \Delta y_m = \Delta y_m \cdot \Delta x_m$  gilt, schliesst man ebenso durch Vertauschung der Summationsreihenfolge:

$$\int_G f(x, y) dG = \dots = \int_{x_1}^{x_2} \left( \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

**Satz:****Vor.:**

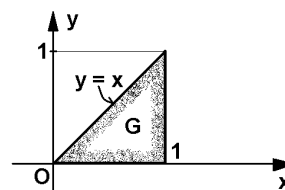
Seien :  $G$  vernünftig, beschränkt, konvex ,  
 $f$  stetig und beschränkt auf  $G$

**Beh.:**

$$\int_G f(x, y) dG = \int_{y_1}^{y_2} \left( \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx \right) dy = \int_{x_1}^{x_2} \left( \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

**1. Beispiel:**

$f(x, y) = x \cdot y^2$ ,  
 $G$  Dreieck wie gezeigt



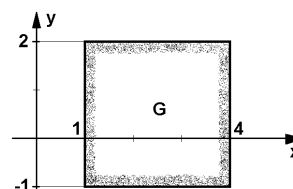
$$\int_G f(x, y) dG = \int_0^1 \left( \int_0^x x \cdot y^2 dy \right) dx = \int_0^1 \left( x \cdot \frac{1}{3} y^3 \Big|_0^x \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{3} x^4 dx = \frac{1}{3 \cdot 5} x^5 \Big|_0^1 = \frac{1}{15}$$

oder :

$$\begin{aligned} \int_G f(x, y) dG &= \int_0^1 \left( \int_y^1 x \cdot y^2 dx \right) dy = \int_0^1 \left( \frac{1}{2} x^2 \cdot y^2 \Big|_y^1 \right) dy = \int_0^1 \frac{1}{2} (1 - y^2) \cdot y^2 dy = \int_0^1 \frac{1}{2} (y^2 - y^4) dy = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 3} y^3 \Big|_0^1 - \frac{1}{2 \cdot 5} y^5 \Big|_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{5-3}{30} = \frac{1}{15} \end{aligned}$$

**2. Beispiel:**

$f(x, y) = 2x + 6x^3y$ ,  $G$  Rechteck wie gezeigt



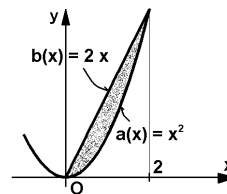
$$\int_G f(x, y) dG = \int_{-1}^2 \left( \int_1^4 2x + 6x^3y dx \right) dy = \int_{-1}^2 \left( 2 \frac{x^2}{2} + 6 \frac{x^4}{4} y \Big|_1^4 \right) dy = \int_{-1}^2 (15 + 38.5y) dy = 618.75$$

**3. Beispiel:**

$$f(x, y) = x^3 + 4y,$$

$G$  Figur wie gezeigt

$$a(x) = x^2, \quad b(x) = 2x, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 2$$

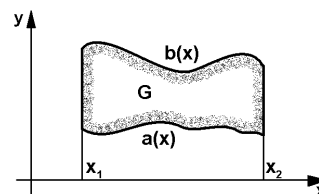


$$\begin{aligned} \int_G f(x, y) dG &= \int_0^2 \left( \int_{x^2}^{2x} (x^3 + 4y) dy \right) dx = \int_0^2 \left( x^3 y + \frac{4}{2} y^2 \Big|_{x^2}^{2x} \right) dx = \int_0^2 (2x^4 + 8x^2 - (x^5 + 2x^4)) dx = \\ &= \frac{8}{3} x^3 - \frac{1}{6} x^6 \Big|_0^2 = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

## (2) Gebiete begrenzt durch Vertikalen — Des régions bornées par des verticales

Sei die Situation wie bei konvexen Gebieten, ausser dass  $G$  links und rechts durch vertikale Geradenstücke begrenzt ist. Oben sei der Rand gegeben durch  $b(x)$  und unten durch  $a(x)$ .

Wie im Falle (1) steht auch hier zuerst einer Summation in  $y$ -Richtung und darauf in  $x$ -Richtung nichts im Wege. Umgekehrt kann man jedoch nicht vorgehen. Das zeigt die Form von  $G$ .



~> **Konsequenz:**

**Formel:**

**Vor.:**

Seien :  $G$  wie beschrieben  
 $f$  stetig und beschränkt auf  $G$

**Beh.:**

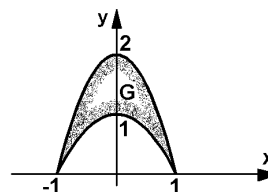
$$\int_G f(x, y) dG = \int_{x_1}^{x_2} \left( \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dy \right) dx$$

**Bsp.:**

$$f(x, y) = x + y,$$

$G$  Figur wie gezeigt

$$\Psi_1(x) = -x^2 + 1, \quad \Psi_2(x) = -2x^2 + 2$$



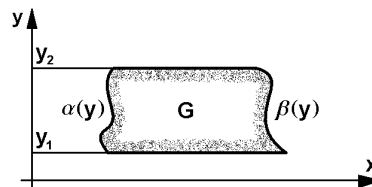
$$\begin{aligned} \int_G f(x, y) dG &= \int_{-1}^1 \left( \int_{-x^2+1}^{-2x^2+2} (x + y) dy \right) dx = \int_{-1}^1 \left( y \cdot x + \frac{1}{2} y^2 \Big|_{-x^2+1}^{-2x^2+2} \right) dx = \\ &= \int_{-1}^1 \left( \frac{3}{2} + x - 3x^2 - x^3 + \frac{3x^4}{2} \right) dx = \frac{8}{5} \end{aligned}$$



**(3) Gebiete begrenzt durch Horizontale — Des régions bornées par des horizontales**

Sei die Situation wie im Falle (2), ausser dass  $G$  oben und unten von Geradenstücke resp. Horizontalen (zwei Horizontale) begrenzt ist. Links sei der Rand gegeben durch  $\alpha(x)$  und rechts durch  $\beta(x)$ .

Wie im Falle (2) steht hier zuerst einer Summation in  $x$ -Richtung und darauf in  $y$ -Richtung nichts im Wege. Umgekehrt kann man jedoch nicht vorgehen. Das zeigt wieder die Form von  $G$ .



→ **Konsequenz:**

**Formel:**

**Vor.:**

Seien :  $G$  wie beschrieben  
 $f$  stetig und beschränkt auf  $G$

**Beh.:**

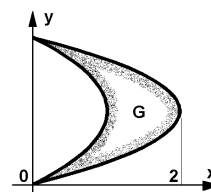
$$\int_G f(x, y) dG = \int_{y_1}^{y_2} \left( \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dy \right) dx$$

**Bsp.:**

$$f(x, y) = x \cdot y,$$

$G$  Figur wie gezeigt

$$\Psi_1(y) = \sin(y), \quad \Psi_2(y) = 2 \sin(y)$$



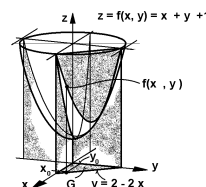
$$\int_G f(x, y) dG = \int_0^{\pi} \left( \int_{\sin(y)}^{2 \sin(y)} x \cdot y dx \right) dy = \int_0^{\pi} \left( \frac{3 y \sin(y)^2}{2} \right) dy = \frac{3 \pi^2}{8}$$

**8.3.2 Anwendung auf Volumenberechnungen — application pour calculer des volumes****1. Beispiel:**

Berechne den Volumeninhalt von  $V$  unterhalb des Rotationsparaboloids

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$$

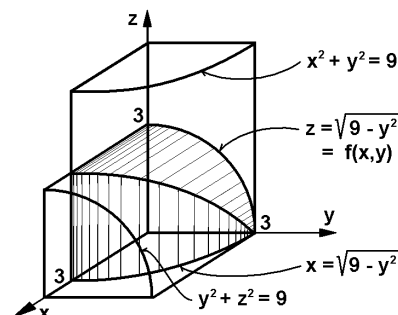
$V$  ist beschränkt durch die Koordinatenebenen sowie die Ebene  $2x + y = 2$ .



$$\begin{aligned} V &= \int_G f(x, y) dG = \int_{x=0}^{x=1} \left( \int_{y=0}^{y=2-2x} x^2 + y^2 + 1 dy \right) dx = \int_{x=0}^{x=1} \left( x^2 y + \frac{1}{3} y^3 + y \Big|_{y=0}^{y=2-2x} \right) dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \left( \frac{14}{3} - 10x + 10x^2 - \frac{14x^3}{3} \right) dx = \frac{14x}{3} - 5x^2 + \frac{10x^3}{3} - \frac{7x^4}{6} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{11}{16} \end{aligned}$$

**2. Beispiel:**

Berechne den Volumeninhalt des Körpers, der im ersten Oktanten liegt und begrenzt ist durch die Koordinatenebenen und die Zylinder  $x^2 + y^2 = 9$  sowie  $y^2 + z^2 = 9$



$$\begin{aligned}
 V &= \int_G f(x, y) dG = \int_{y=0}^{y=3} \left( \int_{x=0}^{x=\sqrt{9-y^2}} \sqrt{9-y^2} dx \right) dy = \int_{y=0}^{y=3} (x \cdot \sqrt{9-y^2} \Big|_{x=0}^{x=\sqrt{9-y^2}}) dy = \\
 &= \int_{y=0}^{y=3} (\sqrt{9-y^2} \cdot \sqrt{9-y^2}) dy = \int_{y=0}^{y=3} 9-y^2 dy = 9y - \frac{1}{3}y^3 \Big|_{y=0}^{y=3} = 9 \cdot 3 - \frac{1}{3}3^3 = 27 - 9 = 18
 \end{aligned}$$

Interessant!  $\pi$  kommt nicht vor im Resultat!

### 8.3.3 Uneigentliche Gebietsintegrale, Anwendung — Intégrales de région impropres, application

**Beispiel der Berechnung eines gewöhnlichen Integrals via Gebietsintegral — Exemple: Calculer une intégrale simple par une intégrale de région**

Betrachten wir zuerst:

$$\begin{aligned}
 \int_c^\infty \int_a^b f(x, y) dy dx &:= \lim_{d \rightarrow \infty} \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dy \right) dx = \lim_{d \rightarrow \infty} \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dx \right) dy = \\
 &= \lim_{d \rightarrow \infty} \int_a^b F(d, y) dy = \int_a^b \lim_{d \rightarrow \infty} F(d, y) dy
 \end{aligned}$$

(falls  $F(d, y)$  mit  $d \rightarrow \infty$  in  $[a, b]$  gleichmässig konvergiert, vgl. Seite 200)

$$\leadsto \int_c^\infty \left( \int_a^b f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \lim_{d \rightarrow \infty} \int_c^d f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^\infty f(x, y) dx \right) dy \quad \leadsto$$

**Lemma:**

**Vor.:**

$$F(d, y) = \int_c^d f(x, y) dx \in UNIFCONV$$

für  $x \in [a, b]$ ,  $d \rightarrow \infty$

Die verwendeten Integrale existieren

**Beh.:**

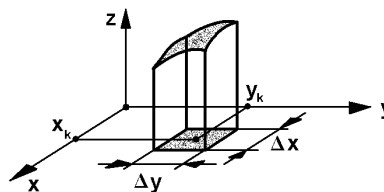
$$\int_c^\infty \left( \int_a^b f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \left( \int_c^\infty f(x, y) dx \right) dy$$

**Bsp.:** Sei  $a, b > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx &= \int_0^\infty \left( \int_a^b e^{-xy} dy \right) dx = \int_a^b \left( \int_0^\infty e^{-xy} dx \right) dy = \int_a^b \left( -\frac{e^{-xy}}{y} \Big|_0^\infty \right) dy = \\ &= \int_a^b \left( \frac{+e^{-xy}}{y} \Big|_\infty^0 \right) dy = \int_a^b \left( \frac{1}{y} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{+e^{-xy}}{y} \right) dy = \Big|_{a,b>0} \Rightarrow y>0 \int_a^b \left( \frac{1}{y} - 0 \right) dy = \ln(y) \Big|_a^b = \\ &= \ln(b) - \ln(a) = \ln\left(\frac{b}{a}\right) \end{aligned}$$

### 8.3.4 Gebietsintegrale in Polarkoordinaten — Intégrales de région en coordonnées polaires

In kartesischen Koordinaten war das Flächenelement  $\Delta x \cdot \Delta y$ , infinitesimal  $dx dy$ , und der „infinitesimale Quader  $f(x, y) dx dy$ .



Nun gibt es aber Probleme, die sich einfacher in Polarkoordinaten beschreiben lassen. Man denke z.B. an ein Gebiet, das von einer Spirale begrenzt ist. Dann muss man konsequenterweise hier eine Gebietszerlegung benutzen, die diesem Koordinatensystem angepasst ist. Das führt dann zu einem andern Flächenelement (vgl. Skizze).

Sektor:

$$A = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\Delta\varphi}{2\pi},$$

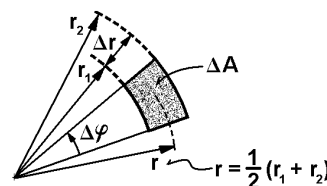
$$r_1 = r, \quad r_2 = r + \Delta r$$

$$\Delta G = \Delta A$$

$$\approx \frac{r_2 \cdot (r_2 \cdot \Delta\varphi)}{2} - \frac{r_1 \cdot (r_1 \cdot \Delta\varphi)}{2} =$$

$$\frac{\Delta\varphi}{2} \cdot (r_2^2 - r_1^2) = \frac{\Delta\varphi}{2} \cdot (r_2 - r_1) \cdot (r_2 + r_1)$$

$$= \frac{\Delta\varphi}{2} \cdot (\Delta r) \cdot (2r + \Delta r) = \Delta\varphi \cdot \Delta r \cdot \left(r + \frac{\Delta r}{2}\right) \rightarrow d\varphi dr r$$



**Lemma:**

In Polarkoordinaten ist das Flächenelement:  $r \varphi dr$

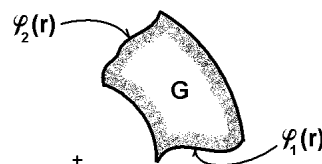
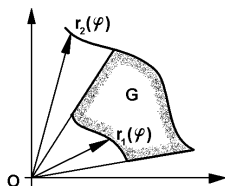
Wir können sinnvollerweise die folgenden beiden Fälle unterscheiden:

(1) Veränderliche Radien:

$$r_1 = g_1(\varphi), \quad r_2 = g_2(\varphi)$$

(2) Veränderliche Winkel:

$$\varphi_1 = h_1(r), \quad \varphi_2 = h_2(r)$$



Damit können wir analog zu den kartesischen Koordinaten die folgenden Formeln notieren:

**Formel:****Vor.:**Seien :  $G$  vernünftig, beschränkt, konvex $f$  stetig und beschränkt auf  $G$ **Beh.:**

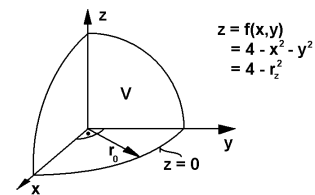
$$\text{Fall (1): } \int_G f(r, \varphi) dG = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left( \int_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} f(r, \varphi) \cdot r dr \right) d\varphi$$

$$\text{Fall (2): } \int_G f(r, \varphi) dG = \int_{r_1}^{r_2} \left( \int_{h_1(r)}^{h_2(r)} f(r, \varphi) \cdot r d\varphi \right) dr$$

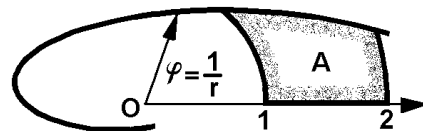
**Bemerkung:**Im Spezialfall  $f(r, \varphi) \equiv 1$  erhalten wir den Flächeninhalt!**1. Beispiel:**

$$z = f(x, y) = 4 - x^2 - y^2 = 4 - r^2 = f_p(r)$$

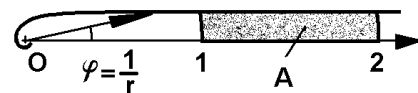
$$\begin{aligned} V &= \int_{\varphi_1=0}^{\varphi_2=\frac{\pi}{2}} \left( \int_{r_1=0}^{r_2=2} (4 - r^2) \cdot r dr \right) d\varphi \\ &= \int_{\varphi_1=0}^{\varphi_2=\frac{\pi}{2}} \left( 2r^2 - \frac{r^4}{4} \Big|_0^2 \right) d\varphi \\ &= \int_{\varphi_1=0}^{\varphi_2=\frac{\pi}{2}} 4 d\varphi = 4 \varphi \Big|_{\varphi_1=0}^{\varphi_2=\frac{\pi}{2}} \\ &= 4 \frac{\pi}{2} = 2\pi \end{aligned}$$

**2. Beispiel:**

$$\begin{aligned} \varphi_1 &\equiv 0, \quad \varphi_2 \equiv \frac{1}{r} \quad A = \int_G dG \\ &= \int_{r_1=1}^{r_2=2} \left( \int_{\varphi_1=0}^{\varphi_2=\frac{1}{r}} r d\varphi \right) dr = \int_{r_1=1}^{r_2=2} \left( r \varphi \Big|_{\varphi_1=0}^{\varphi_2=\frac{1}{r}} \right) dr \\ &= \int_{r_1=1}^{r_2=2} \left( r \frac{1}{r} \right) dr = \int_{r_1=1}^{r_2=2} 1 dr \\ &= r \Big|_{r_1=1}^{r_2=2} = 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

**Skizze / Esquisse**

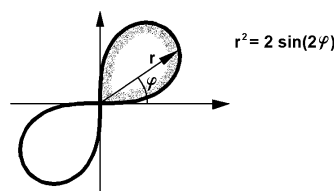
Massstäblich:

 $x : y = 1 : 1$ **3. Beispiel:**

Lemniskate:

$$r^2 = 2 \sin(2\varphi)$$

$$\begin{aligned} A &= \int_G dG = \int_{\varphi_1=0}^{\varphi_2=\frac{\pi}{2}} \left( \int_{r_1=0}^{r_2=\sqrt{2 \sin(2\varphi)}} r \, dr \right) d\varphi = \\ &= \int_{\varphi_1=0}^{\varphi_2=\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{2} r^2 \Big|_{r_1=0}^{r_2=\sqrt{2 \sin(2\varphi)}} \right) d\varphi = \\ &= \int_{\varphi_1=0}^{\varphi_2=\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \sin(2\varphi) \right) d\varphi = -\frac{1}{2} \cos(2\varphi) \Big|_{\varphi_1=0}^{\varphi_2=\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2} (-1 - (1)) = \frac{1}{2} 2 = 1 \end{aligned}$$



## 8.4 Oberflächenintegrale — Intégrales superficielles

### 8.4.1 Inhalte krummer Flächen — Mesures de surfaces courbes et tordues

**Problem:** Gegeben sei  $f(x, y)$  stetig differenzierbar (d.h. die Tangentenrichtung ändert stetig) und beschränkt über einem vernünftigen endlichen Gebiet  $G$ . Was ist der Inhalt der durch  $f$  erzeugten Fläche  $\Phi$  im  $\mathbb{R}^3$ ?

**Idee:** Man wähle sich ein beliebiges kleines Flächenstück  $\Delta A_k$ , das in einer Kugel mit Radius  $r_n$  Platz hat. Je kleiner man den Ausschnitt wählt, d.h. je kleiner  $r_n$  ist, desto mehr nähert sich das gewählte Flächenstück einem Ausschnitt einer Ebene. Das wird sichtbar, wenn man die Sache vergrößert. Approximiere nun solche kleine parallelogrammartige Flächenstücke durch passende ebene Parallelogramme  $\Delta T_k$  und berechne deren Inhalt mittels des Vektorprodukts. So kann man durch Summation zu einer Approximation des ganzen Flächeninhaltes gelangen.  $\Delta A_k$  und  $\Delta T_k$  können so gewählt werden, dass sie z.B. über achsenparallelen Flächenelementen  $\Delta G_k$  in der Grundebene liegen.

Sei  $\{\Delta G_k\}$  eine zulässige Gebietszerlegung

Sei  $f(x_k, y_k) = z_k$ ,  $(x_k, y_k) \in G_k$ ,  $(x_k, y_k, z_k) \in A_k$ .

$$\leadsto |A| = \sum_{k=1}^n |\Delta A_k| \approx \sum_{k=1}^n |\Delta T_k|$$

Sei  $d_k$  = Diagonallänge von  $\Delta G_k$  (Rechteck).

Sei  $d = \max_k d_k$ ,  $\vec{a}_k, \vec{b}_k$  Seitenvektoren von  $\Delta T_k$

$\leadsto \vec{a}_k, \vec{b}_k$  sind natürlich Tangentialvektoren an die Funktionsfläche.

Wir stehen nun vor dem Problem, dass bisher Inhalte allgemeiner gekrümmter Flächen gar nie definiert worden sind. Es ist aber wohl intuitiv einsichtig, dass sich solche Inhalte sinnvoll wie folgt definieren lassen:

**Definition:**

$$\text{Inhalt } A := \lim_{d_n \rightarrow 0} \sum_{k_1}^n |\Delta T_{k,n}|, \quad |\Delta T_{k,n}| = |\vec{a}_{k,n} \times \vec{b}_{k,n}|$$

$\lim_{d_n \rightarrow 0} \sum_{k_1}^n |\Delta T_{k,n}|$  führt offensichtlich zu einem Riemannschen Integral.

Bei solchen Integralen kann bekanntlich der Punkt  $P_k P(x_k, y_k) \in \Delta G_{x_k, y_k}$ , in dem  $\Delta T_{k,n}$  innerhalb der zulässigen Gebietszerlegung bestimmt wird, beliebig gewählt werden.

Nun gilt es, über  $\Delta G_{k,n}$  das  $\Delta T_{k,n}$  zu bilden.  $\Delta T_{k,n}$  wird durch die Seitenvektoren  $\vec{a}$  über  $\Delta x$  und  $\vec{b}$  über  $\Delta y$  bestimmt:

Z.B. ist die  $y$ -Komponente von  $\vec{a}$  gleich 0, die  $z$ -Komponente jedoch ist  $\Delta x$  mal Steigung von  $f$  in

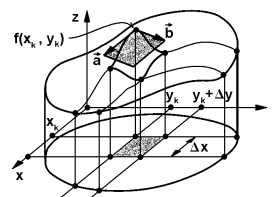
$y$ -Richtung.  $f$  muss demnach differenzierbar sein!

$\leadsto$  Das ergibt:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ 0 \\ f'_x(P_k) \cdot \Delta x \end{pmatrix}$$

Entsprechend:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta y \\ f'_y(P_k) \cdot \Delta y \end{pmatrix}$$



Dann wird der Inhalt  $|\Delta T_{k,n}|$ :

$$\begin{aligned} |\Delta T_{k,n}| &= |\vec{a} \times \vec{b}| = \left| \begin{pmatrix} -f'_x(P_k) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \\ -f'_y(P_k) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \\ \Delta x \cdot \Delta y \end{pmatrix} \right| = |\Delta x \cdot \Delta y| \cdot \sqrt{(f'_x(P_k))^2 + (f'_y(P_k))^2 + 1} = \\ &= |\Delta G_k| \cdot \sqrt{(f'_x(P_k))^2 + (f'_y(P_k))^2 + 1} \end{aligned}$$

Wir erhalten somit:

**Formel:**

**Vor.:**

Seien :  $G$  vernünftig, beschränkt  
 $f$  stetig differenzierbar und beschränkt auf  $\bar{G}$

**Beh.:**

$$\begin{aligned} A &= \int_G dA = \int_G \sqrt{(f'_x(P_k))^2 + (f'_y(P_k))^2 + 1} dG \\ &= \iint_G \sqrt{(f'_x(P_k))^2 + (f'_y(P_k))^2 + 1} dx dy \end{aligned}$$

**Definition:**

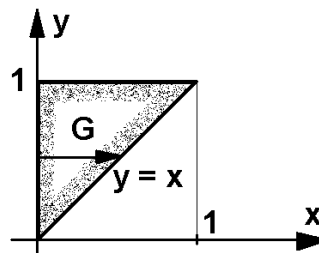
$\int_G dA$  heisst **Oberflächenintegral**

Es ist dem Leser überlassen, die Formel an bekannten Beispielen (Parallelogramme) zu überprüfen. Die Kugel zeigt, dass die Rechnungen mit dieser Formel umständlich werden (vgl. Seite 285). Da im Integranden eine Wurzel steht, ist allgemein nicht zu erwarten, dass man auf einfache Weise bekannte Stammfunktionen finden kann. Für die numerische Integration ist die Formel jedoch geeignet.

**1. Beispiel:**

$$f(x, y) = 3x + y^2$$

$G$  vgl. Skizze



$$\begin{aligned}
 A &= \iint_G \sqrt{(f'_x(P_k))^2 + (f'_y(P_k))^2 + 1} \, dx \, dy = \iint_G \sqrt{(3)^2 + (2y)^2 + 1} \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^y \sqrt{10 + 4y^2} \, dx \, dy \\
 &= \int_0^1 x \cdot \sqrt{10 + 4y^2} \Big|_0^y \, dy = \int_0^1 y \cdot (10 + 4y^2)^{\frac{1}{2}} \, dy = \frac{1}{12} (10 + 4y^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{14^{\frac{3}{2}} - 10^{\frac{3}{2}}}{12}
 \end{aligned}$$

**Bemerkung:**

Mit solchen Integralen kann man z.B. das Gewicht von Blech- oder Plastic-Flächen berechnen.

## 2. Beispiel:

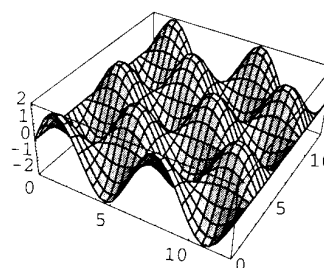
Inhalt der Oberfläche einer „Eierschachtel“:

$$f(x, y) := \sin(x + y) + \sin(x - y),$$

$$x, y \in [0, 4\pi]$$

Numerisch mit *Mathematica*:

$$A \approx 269.357$$



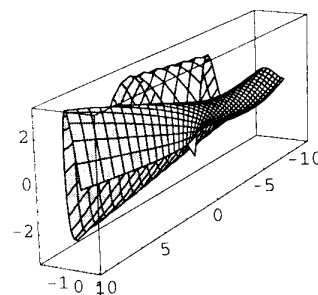
### 8.4.2 Ausdehnung des Begriffs für beliebige Koordinatensysteme — Extension de la notion pour des systèmes de coordonnées quelconques

Kompliziert im Raum gewundene Flächen  $\Phi$  können allgemein nicht als Funktionsflächen in einem kartesischen Koordinatensystem gegeben werden.

Analog zu Kurven kann man jedoch Flächen in **Parameterdarstellung** geben. D.h. mit andern Worten: als Vektorfunktionen mit zwei Variablen, die man hier üblicherweise „Parameter“ nennt.

**Bsp.:**

$$\begin{aligned}
 u &\in [0, \pi], \quad v \in [0, \pi], \\
 \Phi : \vec{\sigma}(u, v) &= \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} u^2 - v^2 \\ \ln(1 + u + v) \sin(u + v) \\ u \sin(uv) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$



Dabei seien  $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$  stetig differenzierbare Funktionen über einem Definitionsbereich  $D_x = D_y = D_z = \bar{G}$ . Dann wird die durch  $\vec{\sigma}(u, v)$  im Raum definierte Fläche  $\Phi$  glatt, d.h. die Tangentenvektoren  $\vec{\sigma}'_u$  und  $\vec{\sigma}'_v$  können sich nicht sprunghaft ändern.

Eine hinreichende Bedingung für die Existenz zwei verschiedener Tangentialvektoren in verschiedene Richtungen ist  $\vec{\sigma}'_u \nparallel \vec{\sigma}'_v$ , d.h.:

$$\vec{\sigma}'_u \times \vec{\sigma}'_v \neq \vec{0} \quad \text{oder} \quad M = (\vec{\sigma}'_u, \vec{\sigma}'_v) = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang}(M) = 2$$

Wir betrachten nun zwei Kurven in  $\Phi$ :

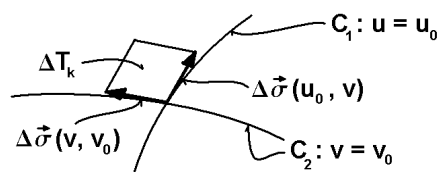
$$C_1 = \{\vec{\sigma}(u, v) \mid u = u_0\} \quad \text{und} \quad C_2 = \{\vec{\sigma}(u, v) \mid v = v_0\}$$

$$\text{Sei } \vec{\sigma}(u_0, v_0) := \vec{\sigma}_{P_0}$$

Für die Tangentenvektoren an  $C_1$  und  $C_2$  gilt:

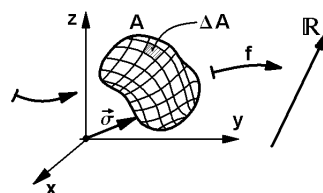
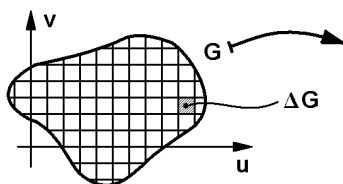
$$C_1: \frac{\Delta \vec{\sigma}(u, v)}{\Delta u} \rightarrow \frac{\partial \vec{\sigma}(u, v)}{\partial u} = \vec{\sigma}'_u$$

$$C_2: \frac{\Delta \vec{\sigma}(u, v)}{\Delta v} \rightarrow \frac{\partial \vec{\sigma}(u, v)}{\partial v} = \vec{\sigma}'_v$$



$\leadsto$   $\vec{\sigma}'_u$  und  $\vec{\sigma}'_v$  spannen in  $P_0$  in der Tangentialebene an die betrachtete Fläche ein Parallelogramm auf.

Damit hat man die folgende Situation gegeben:



Auf  $G$  haben wir damit ein kartesisches Koordinatensystem (Gitternetz) mit den Koordinaten  $u, v$ , den Maschenweiten  $\Delta u, \Delta v$  und dem Flächenelement  $|\Delta G| = |\Delta u \cdot \Delta v|$ . Das Gitternetz in  $G$  wird durch  $\vec{\sigma}$  in ein Gitternetz auf  $\Phi$  abgebildet. Dort sei das zu  $|\Delta G|$  gehörige Flächenelement mit  $|\Delta A|$  bezeichnet.

Z.B. auf  $C_2$  gilt dann:

$$\Delta \vec{\sigma}(u, v_0) \approx \vec{\sigma}'_u(u_0, v_0) \cdot \Delta u, \quad \Delta \vec{\sigma}(u_0, v) \approx \vec{\sigma}'_v(u_0, v_0) \cdot \Delta v$$

(Definition der Ableitung oder auch Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

Damit kann  $|\Delta A|$  approximiert werden:

$$|\Delta A| \approx |\Delta \vec{\sigma}(u, v_0) \times \Delta \vec{\sigma}(u_0, v)|$$

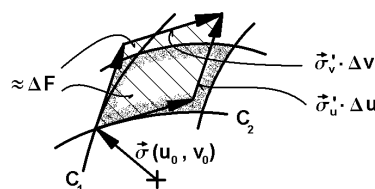
$$\approx |(\vec{\sigma}'_u(u_0, v_0) \cdot \Delta u) \times (\vec{\sigma}'_v(u_0, v_0) \cdot \Delta v)|$$

$$= |\Delta u \cdot \Delta v| \cdot |\vec{\sigma}'_u(u_0, v_0) \times \vec{\sigma}'_v(u_0, v_0)|$$

z.B.

$$\Delta \vec{\sigma}(u, v_0) = \vec{\sigma}(u + \Delta u, v_0) - \vec{\sigma}(u, v_0) =$$

$$\frac{\vec{\sigma}(u + \Delta u, v_0) - \vec{\sigma}(u, v_0)}{\Delta u} \cdot \Delta u \approx \vec{\sigma}'_u(u, v_0) \cdot \Delta u$$



Sei  $P_{k,n} = (u_{0k,n}, v_{0k,n})$ ,  $\Delta G_{k,n} \subseteq U_{r_{k,n}}(P_{k,n})$ ,  $r_n =: \text{Max}_k r_{k,n} \rightarrow 0$  mit  $n \rightarrow \infty$   
Damit wird bei beliebigm  $P_{k,n} \in \Delta G_{k,n}$ :



$$\begin{aligned} \leadsto \sum_{k=1}^n |\Delta A_{k,n}| &= \sum_{k=1}^n |\Delta A_{k,n}| = \sum_{k=1}^n |\vec{\sigma}'_u(P_{k,n}) \times \vec{\sigma}'_v(P_{k,n})| \cdot |\Delta u \cdot \Delta v| \rightarrow \\ &\rightarrow \iint_G |\vec{\sigma}'_u(P_{u,v}) \times \vec{\sigma}'_v(P_{u,v})| du dv = \int_G |\vec{\sigma}'_u(P_{u,v}) \times \vec{\sigma}'_v(P_{u,v})| dG := \int_G dA \end{aligned}$$

Damit lässt sich der Flächeninhalt einer durch  $\vec{\sigma}(u, v)$  gegebenen Fläche im  $\mathbb{R}^3$  definieren. Ein solcher ist ja bis jetzt nie definiert worden:

**Definition:**

$$\begin{aligned} |A| &= \int_G dA := \int_G |\vec{\sigma}'_u(P_{u,v}) \times \vec{\sigma}'_v(P_{u,v})| dG \\ &= \iint_G |\vec{\sigma}'_u(P_{u,v}) \times \vec{\sigma}'_v(P_{u,v})| du dv \end{aligned}$$

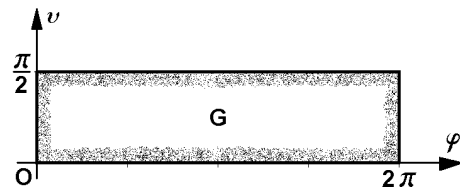
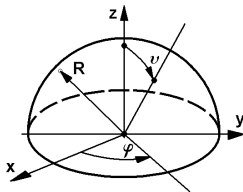
**Kontrolle:**

Sind  $u, v$  speziell kartesische Koordinaten, so muss wieder die dort hergeleitete Formel herauskommen:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(u, v) &= \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \Big|_{x=u, y=v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow |\vec{\sigma}'_u(u, v) \times \vec{\sigma}'_v(u, v)| &= \left| \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y)'_x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y)'_y \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x, y) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x, y) \end{pmatrix} \right| = \\ &= \left| \begin{pmatrix} -f'_y \\ -f'_x \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-f'_x)^2 + (-f'_y)^2 + 1} \Rightarrow dG = \sqrt{(-f'_x)^2 + (-f'_y)^2 + 1} dx dy \end{aligned}$$

Wir finden also hier das schon bekannte Flächenelement.

**Bsp.:** Nachrechnung der Kugeloberfläche:



Kugelkoordinaten:

$u := \varphi, v := \vartheta, R := \text{const.}, \varphi \in [0, 2\pi], \vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}] \leadsto$  halbe Sphäre.

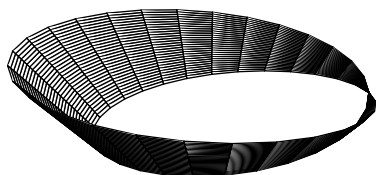
$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(u, v) &= \vec{\sigma}(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} R \cos(\varphi) \sin(\vartheta) \\ R \sin(\varphi) \sin(\vartheta) \\ R \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \vec{\sigma}'_\varphi(\varphi, \vartheta) &= \begin{pmatrix} -R \sin(\varphi) \sin(\vartheta) \\ R \cos(\varphi) \sin(\vartheta) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\sigma}'_\vartheta(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} R \cos(\varphi) \cos(\vartheta) \\ R \sin(\varphi) \cos(\vartheta) \\ -R \sin(\vartheta) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \vec{\sigma}'_\varphi(\varphi, \vartheta) \times \vec{\sigma}'_\vartheta(\varphi, \vartheta) &= R \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \sin(\vartheta) \\ \cos(\varphi) \sin(\vartheta) \\ 0 \end{pmatrix} \times R \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cos(\vartheta) \\ \sin(\varphi) \cos(\vartheta) \\ -\sin(\vartheta) \end{pmatrix} = \\ &= R^2 \begin{pmatrix} -\cos(\varphi) \sin^2(\vartheta) \\ -\sin(\varphi) \sin^2(\vartheta) \\ -\sin^2(\varphi) \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) - \cos^2(\varphi) \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -R^2 \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sin^2(\vartheta) \\ \sin(\varphi) \sin^2(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \end{pmatrix} = -R^2 \sin(\vartheta) \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sin(\vartheta) \\ \sin(\varphi) \sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \\
\Rightarrow |\vec{\sigma}'_{\varphi}(\varphi, \vartheta) \times \vec{\sigma}'_{\vartheta}(\varphi, \vartheta)| &= R^2 |\sin(\vartheta)| \sqrt{\cos^2(\varphi) \sin^2(\vartheta) + \sin^2(\varphi) \sin^2(\vartheta) + \cos^2(\vartheta)} \\
&= R^2 |\sin(\vartheta)| \sqrt{\sin^2(\vartheta) + \cos^2(\vartheta)} = R^2 |\sin(\vartheta)| \sqrt{1} = R^2 |\sin(\vartheta)| = R^2 \sin(\vartheta), \quad \vartheta \in [0, \pi] \\
\Rightarrow A &= 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} |\vec{\sigma}'_{\varphi}(\varphi, \vartheta) \times \vec{\sigma}'_{\vartheta}(\varphi, \vartheta)| d\varphi d\vartheta = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} R^2 \sin(\vartheta) d\varphi d\vartheta = 2 R^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \sin(\vartheta) \Big|_0^{\pi} d\vartheta = \\
&= 2 R^2 \cdot 2\pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\vartheta) d\vartheta = 4 R^2 \pi \cdot (-\cos(\vartheta)) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4 \cdot R^2 \cdot \pi
\end{aligned}$$

**Bsp.:** (Numerisch)

$$\begin{aligned}
u \in [0, \pi], \quad v \in [0, \pi], \quad \Phi: \vec{\sigma}(u, v) &= \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2 - v^2 \\ \ln(1 + u + v) \sin(u + v) \\ u \sin(u v) \end{pmatrix} \\
\Rightarrow |A| &= \int_G dA := \int_G |\vec{\sigma}'_u(P_{k,n}) \times \vec{\sigma}'_v(P_{k,n})| dG = \iint_G |\vec{\sigma}'_u(P_{k,n}) \times \vec{\sigma}'_v(P_{k,n})| du dv \approx 185.967 \quad (\text{Mathematica})
\end{aligned}$$

**Bsp.:** (Numerisch)



$$\vec{v}(\alpha, r) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \left( \frac{1}{2} r \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 1 \right) \\ \sin(\alpha) \left( \frac{1}{2} r \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 1 \right) \\ \frac{1}{2} r \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix}$$

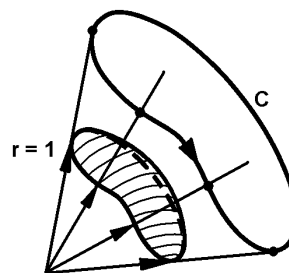
$\leadsto$  Möbiusband

$\leadsto A \approx 5.65685 \quad (\text{Mathematica})$

### 8.4.3 Anwendung Raumwinkel — Application angle solide

Gegeben sei ein Punkt  $S$  im Raum (die „Spitze“) und eine geschlossene Kurve  $C$  im Raum.

Wir lassen nun einen Strahl  $l$ , der von  $S$  aus geht,  $C$  entlang gleiten. Durch die von  $l$  erzeugte Fläche wird der Raum in zwei Teile geteilt.



Ein Teil des Raumes wird so von der Kurve eingeschlossen, der andere ausgeschlossen. Der eingeschlossene Teil entspricht auch dem Sehwinkel der Kurve.

**Definition:**

Die Punktmenge des so eingeschlossenen Teiles des Raumes nennen wir **Raumwinkel**

Das **Mass des Raumwinkels** ist der Flächeninhalt auf der Einheitskugel mit Zentrum in  $S$ , den der Raumwinkel ausschneidet.

**Bsp.:** Berechne das Mass des Raumwinkels eines Kreiskegels mit dem Öffnungswinkel  $2\alpha = \frac{2\pi}{3} \triangleq 120^\circ$ .  
 $2\alpha = \frac{2\pi}{3} \triangleq 120^\circ$ .

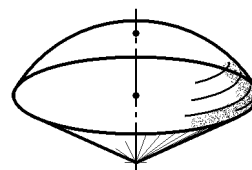
**Bsp.:** Nach dem Beispiel im letzten Abschnitt ist:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} |\vec{\sigma}'_\varphi(\varphi, \vartheta) \times \vec{\sigma}'_\vartheta(\varphi, \vartheta)| d\varphi d\vartheta = \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} R^2 \sin(\vartheta) d\varphi d\vartheta = R^2 \cdot \int_0^\alpha \varphi \sin(\vartheta) \Big|_0^{2\pi} d\vartheta \\ &= R^2 \cdot 2\pi \cdot \int_0^\alpha \sin(\vartheta) d\vartheta = 2R^2 \pi \cdot (-\cos(\vartheta) \Big|_0^\alpha) = 2R^2 \pi \cdot (-\cos(\alpha) + \cos(0)) = 2R^2 \pi \cdot (1 - \cos(\alpha)) \\ &:= 2R^2 \pi \cdot h \end{aligned}$$

**Lemma:**

Inhalt einer Kugelhaube

$$A = 2R^2 \pi \cdot (1 - \cos(\alpha)) := 2R^2 \pi \cdot h$$



Für  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  bekommt man dann:

$$A = 2R^2 \pi \cdot (1 - \cos(\frac{\pi}{3})) = \pi$$

#### 8.4.4 Ausdehnung des Begriffs für Funktionen auf Oberflächen — Extension de la notion pour des fonctions sur les surfaces

Einen Punkt der Oberfläche  $\Phi$  können wir weiterabbilden und somit eine Funktion auf der Oberfläche betrachten:

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & \longrightarrow & \longrightarrow & \xrightarrow{f_G} & \longrightarrow & \longrightarrow & \longrightarrow \\ G & \xrightarrow{\vec{\sigma}} & \Phi & \xrightarrow{f_\Phi} & M & \subseteq \mathbb{R} & \text{oder} \end{array}$$

$$P = (u, v) \mapsto \vec{\sigma}(u, v) \mapsto f(\vec{\sigma}(u, v)) := f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) := f_\Phi(x, y, z) := f_G(P)$$

Statt des Flächenelements  $dA$  kann man nun das Volumenelement  $dV := f_G(P) dG = f_G(\vec{\sigma}(u, v)) dG = f_\Phi(x, y, z) dA$  verwenden und so „das Integral von  $f$  über  $\Phi$  berechnen. So etwas macht z.B. in der Physik Sinn, wenn es z.B. darum geht, die farbabhängige Wärmeabstrahlung pro Flächeneinheit über die Oberfläche aufzusummieren.

Wir können so die Definition des Oberflächenintegrals verallgemeinern:

**Definition:**

$$\begin{aligned} \int_A f_\Phi(x, y, z) dA &:= \int_G f_G(P) dG = \\ &= \int_G f(\vec{\sigma}(u, v)) \cdot |\vec{\sigma}'_u(P_{k,n}) \times \vec{\sigma}'_v(P_{k,n})| dG = \\ &= \iint_G f_G(u, v) \cdot |\vec{\sigma}'_u(P_{k,n}) \times \vec{\sigma}'_v(P_{k,n})| du dv \quad \text{heisst} \quad \textbf{Ober-} \\ &\quad \textbf{flächenintegral} \end{aligned}$$

**Bsp.:**                      **Geg.:**

Halbkugel

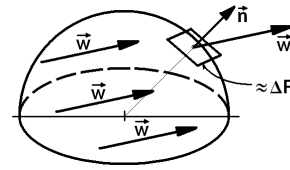
$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$$

Parallelströmung

$$(x, y, z) \mapsto \vec{w}(x, y, z) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \text{const.}$$

 $\vec{n}$  Normalenvektor auf  $S = \Phi$ 

**Ges.:** Durchströmung  $D = \iint_S \langle \vec{w}, \vec{n} \rangle dA$

**Lösung:**Verwende Parameterdarstellung:  $U := x, v := y$ 

$$\leadsto G = \text{Kreis} = K := \{(u, v) \mid 0 \leq u^2 + v^2 \leq R^2\}$$

$$\leadsto \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{\sigma}}{R} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \end{pmatrix}$$

$$\leadsto \vec{\sigma}'_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -u/\sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \end{pmatrix}, \quad \vec{\sigma}'_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -v/\sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \end{pmatrix}, \quad \vec{\sigma}'_u \times \vec{\sigma}'_v = \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \\ \frac{v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\vec{\sigma}'_u \times \vec{\sigma}'_v| = \left( \frac{u^2}{R^2 - u^2 - v^2} + \frac{v^2}{R^2 - u^2 - v^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{u^2 + v^2 + R^2 - u^2 - v^2}{R^2 - u^2 - v^2} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left( \frac{R^2}{R^2 - u^2 - v^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}$$

$$f(\vec{\sigma}(u, v)) = \langle \vec{w}, \vec{n} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \frac{1}{R} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{R} (a u + b v + c \sqrt{R^2 - u^2 - v^2})$$

$$D = \iint_S \langle \vec{w}, \vec{n} \rangle dA = \iint_S \frac{1}{R} (a u + b v + c \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}) \cdot |\vec{\sigma}'_u \times \vec{\sigma}'_v| du dv =$$

$$= \iint_S \frac{1}{R} (a u + b v + c \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}) \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} du dv =$$

$$= \iint_S \left( \frac{a u + b v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} + c \right) du dv = \iint_S \frac{a u + b v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} du dv + \iint_S c du dv = I_1 + I_2$$

$$I_2 = c \iint_S du dv = c \cdot R^2 \cdot \pi \quad (S: \text{Kreis})$$

$$I_1 = \iint_S \frac{a u + b v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} du dv \leadsto \text{Verwende Polarkoordinaten!}$$

$u := r \cdot \cos(\varphi), v := r \cdot \sin(\varphi), du dv = r \cdot dr d\varphi$   
(bekanntes Flächenelement.)

$$I_1 = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{a r \cdot \cos(\varphi) + b r \cdot \sin(\varphi)}{\sqrt{R^2 - (r \cdot \cos(\varphi))^2 - (r \cdot \sin(\varphi))^2}} \cdot r dr d\varphi = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \cdot \frac{a \cdot \cos(\varphi) + b \cdot \sin(\varphi)}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr d\varphi$$

$$= \int_0^R \frac{a \cdot r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} \cdot \underbrace{\left( \int_0^{2\pi} \cos(\varphi) d\varphi \right)}_{=0} dr + \int_0^R \frac{b \cdot r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} \cdot \underbrace{\left( \int_0^{2\pi} \sin(\varphi) d\varphi \right)}_{=0} dr = 0$$

$$\Rightarrow I_1 + I_2 = 0 + c \cdot R^2 \cdot \pi = c \cdot R^2 \cdot \pi$$

## 8.5 Mehrfachintegrale — Intégrales multiples

### 8.5.1 Allgemeines — Généralités

Bei den Integralen von Funktionen über Gebieten haben wir z.B. das Volumen unter der Funktionsfläche von  $f(x, y)$  berechnet durch:

$$\int_G f(x, y) dG = \int_{x_1}^{x_2} \left( \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dy \right) dx$$

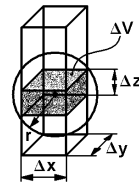
Dabei sind wir von zulässigen Gebietszerlegungen ausgegangen.

Falls man statt Funktionen  $f(x, y)$  über einem Gebiet  $G$  nun Funktionen  $f(x, y, z)$  über einem Volumen  $V$  betrachtet — oder etwa Funktionen  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  über einem  $n$ -dimensionalen Volumen  $V^{(n)}$ , entsteht kein grundsätzlich neues Problem.

Man muss dann an Stelle einer Gebietszerlegung in analoger Weise eine  $n$ -dimensionale **Volumenzerlegung** benützen. Und statt Flächenelemente wie z.B.  $\Delta x \cdot \Delta y$  für  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  treten dann z.B. für  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  Volumenelemente  $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$  auf u.s.w.

Z.B. im  $\mathbb{R}^3$  muss dann ein solches Volumenelement  $\Delta V$  in einer Kugel vom Radius  $r_m$  Platz haben und wir lassen dann wieder  $r_m \rightarrow 0$  gehen.

Entsprechend im  $\mathbb{R}^m$  sind es  $n$ -dimensionale Kugeln.



Das führt dann in kartesischen Koordinaten auf:

$$\int_V f(x, y, z) := \int_V f(x, y, z) dV := \iiint_V f(x, y, z) dV := \lim_{r_m \rightarrow 0} \sum_{k=1}^m f(x_{k,m}, y_{k,m}, z_{k,m}) \Delta V$$

Dabei ist:

$$\sum_{k=1}^m f(x_{k,m}, y_{k,m}, z_{k,m}) \Delta V = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t f(x_{k,t}, y_{j,s}, z_{i,q}) \Delta x_{k,t} \Delta y_{j,s} \Delta z_{i,q}, \quad \text{z.B. mit:}$$

$$\Delta x_{k,t} \Delta y_{j,s} \Delta z_{i,q} = \Delta x_t \Delta y_s \Delta z_q, \quad \text{u.s.w.}$$

Im Falle, wo  $V$  ein Quader ist, erhalten wir:

**Satz:****Vor.:**

Seien :  $V$  Quader  
 $f$  stetig und beschränkt auf  $V$

**Beh.:**

$$\int_V f(x, y, z) dV = \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, z) dx dy dz$$

**Wichtig:** In den andern Fällen, wo  $V$  durch irgendwelche Funktionsflächen beschränkt ist, muss man sich eine günstige Integrationsreihenfolge überlegen. Dabei gibt es  $3! = 6$  Möglichkeiten. Eventuell muss man den Körper erst günstig zerlegen.

Beispiel einer Möglichkeit:

$V$ : Grundfläche

$$z = \Phi_1(x, y)$$

Deckfläche

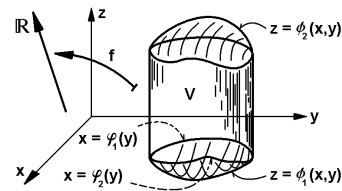
$$z = \Phi_2(x, y)$$

Nach der Integration über  $z$  Unterer Rand:

$$x = \varphi_1(y)$$

Oberer Rand:

$$x = \varphi_2(y)$$

**Formel:****Vor.:**

$V$  vernünftig, wie beschrieben  
 $f$  stetig und beschränkt auf  $V$

**Beh.:**

$$\int_V f(x, y, z) dV = \int_{z_1}^{z_2} \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} \int_{\Phi_1(x, y)}^{\Phi_2(x, y)} f(x, y, z) dx dy dz$$

Analog geht man vor bei Vierfachintegralen und höheren.

**Bemerkung:**

In der Praxis taucht sehr oft das Problem auf, die Funktionen, die die Integrationsgrenzen beschreiben, richtig zu finden. Dabei handelt es sich um ein **geometrisches Problem**. Dazu gibt es kein allgemeines Rezept.

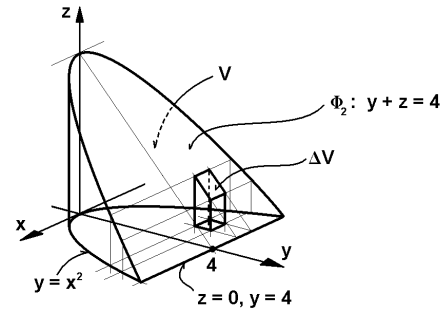
### 8.5.2 Beispiele in kartesischen Koordinaten — Exemples en coordonnées cartésiennes

#### 1. Beispiel:

Gesucht: Volumeninhalt?  $\leadsto V?$

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{y=0}^{y=4} \left( \int_{x=-\sqrt{y}}^{x=+\sqrt{y}} \left( \int_{z=0}^{z=4-y} 1 \, dz \right) dx \right) dy \\
 &= \int_{y=0}^{y=4} \left( \int_{x=-\sqrt{y}}^{x=+\sqrt{y}} (z|_{z=0}^{z=4-y}) dx \right) dy \\
 &= \int_{y=0}^{y=4} \left( \int_{x=-\sqrt{y}}^{x=+\sqrt{y}} (4-y) dx \right) dy \\
 &= \int_{y=0}^{y=4} ((4-y) \cdot x|_{x=-\sqrt{y}}^{x=+\sqrt{y}}) dy \\
 &= \int_{y=0}^{y=4} (4-y) \cdot \sqrt{y} \cdot 2 \, dy
 \end{aligned}$$

$$= 2 \cdot \int_{y=0}^{y=4} (4y^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{3}{2}}) dy = 2 \cdot \left( 4 \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} \right) \Big|_{y=0}^{y=4} = 2 \cdot \left( 4 \frac{2}{3} 4^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} 4^{\frac{5}{2}} \right) = \frac{256}{15}$$



## 2. Beispiel:

Bei einer andern Integrationsreihenfolge wird die Rechnung einfacher:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{x=-2}^{x=2} \left( \int_{y=x^2}^{y=4} \left( \int_{z=0}^{z=4-y} 1 \, dz \right) dy \right) dx = \int_{x=-2}^{x=2} \left( \int_{y=x^2}^{y=4} (z|_{z=0}^{z=4-y}) dy \right) dx = \\
 &= \int_{x=-2}^{x=2} \left( \int_{y=x^2}^{y=4} (4-y) dy \right) dx = \int_{x=-2}^{x=2} \left( 4y - \frac{1}{2} y^2 \Big|_{y=x^2}^{y=4} \right) dx = \int_{x=-2}^{x=2} \left( 8 - 4x^2 + \frac{1}{2} x^4 \right) dx = \\
 &= 8x - \frac{4}{3} x^3 + \frac{1}{10} x^5 \Big|_{x=-2}^{x=2} = \frac{256}{15}
 \end{aligned}$$

## 3. Beispiel:

Der eben behandelte Körper habe die Massendichte  $f(x, y, z) = x + 1$ . Was ist seine totale Masse?:

$$\begin{aligned}
 m &= \int_{x=-2}^{x=2} \left( \int_{y=x^2}^{y=4} \left( \int_{z=0}^{z=4-y} (x+1) \, dz \right) dy \right) dx = \int_{x=-2}^{x=2} \left( \int_{y=x^2}^{y=4} ((x+1) \cdot z|_{z=0}^{z=4-y}) dy \right) dx = \\
 &= \int_{x=-2}^{x=2} \left( \int_{y=x^2}^{y=4} (x+1) \cdot (4-y) dy \right) dx = \int_{x=-2}^{x=2} (x+1) \cdot \left( 4y - \frac{1}{2} y^2 \Big|_{y=x^2}^{y=4} \right) dx = \\
 &= \int_{x=-2}^{x=2} (x+1) \cdot \left( 8 - 4x^2 + \frac{1}{2} x^4 \right) dx = \int_{x=-2}^{x=2} \left( \frac{1}{2} x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 16x^2 + 8x + 32 \right) dx = \\
 &= 32x + 4x^2 - \frac{16x^3}{3} - x^4 + \frac{2x^5}{5} + \frac{x^6}{12} \Big|_{x=-2}^{x=2} = \frac{1024}{15}
 \end{aligned}$$

### 8.5.3 Integrale in Zylinderkoordinaten — Intégrales en coordonnées cylindriques

Wie wir bereits wissen, bietet es beim Rechnen Vorteile, wenn wir das verwendete Koordinatensystem dem vorhandenen Problem anpassen und nicht umgekehrt. In der Elektrizitätslehre z.B. hat man es oft mit Leitern zu tun, die man als achsensymmetrische, radialsymmetrische Zylinder annehmen kann. Hier verwenden wir beim Integrieren mit Vorteil Zylinderkoordinaten.

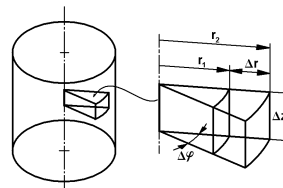
**Zylinderkoordinaten** sind wie folgt definiert: On définit les **coordonnées cylindriques** de la façon suivante:

Statt  $x, y, z$  (kartesisch) verwenden wir:

Radius:  $r$

Winkel:  $\varphi$

Achse:  $z$



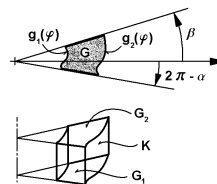
Damit erhalten wir:

$$\Delta V = V_2 - V_1 = r_2^2 \cdot \pi \cdot \frac{\Delta \varphi}{2 \cdot \pi} \cdot \Delta z - r_1^2 \cdot \pi \cdot \frac{\Delta \varphi}{2 \cdot \pi} \cdot \Delta z = (r_2^2 - r_1^2) \cdot \frac{\Delta \varphi}{2 \cdot \pi} \cdot \Delta z =$$

$$(r_2 + r_1) \cdot \frac{(r_2 - r_1)}{2} \cdot \Delta \varphi \Delta z = \frac{(2 r_1 + \Delta r)}{2} \cdot \Delta r \cdot \Delta \varphi \Delta z = \left(r_1 + \frac{\Delta r}{2}\right) \cdot \Delta r \cdot \Delta \varphi \Delta z$$

$$\rightarrow dV = r \cdot dr d\varphi dz$$

Beim Integrieren hat man bei 3 Koordinaten wieder  $3! = 6$  Möglichkeiten für die Reihenfolge. Ein **Beispiel** ist in der Skizze gezeigt.



**Formel:**

**Beispiel** einer Möglichkeit

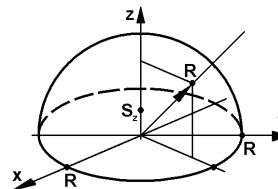
**Vor.:**

$V$  vernünftig, Zylinderkoordinaten wie beschrieben ,  
 $f$  stetig und beschränkt auf  $V$

**Beh.:**

$$\int_V f(r, \varphi, z) dV = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{R_1(\varphi)}^{R_2(\varphi)} \int_{h_1(r, \varphi)}^{h_2(r, \varphi)} f(r, \varphi, z) r dz dr d\varphi$$

Man bestimme den Schwerpunkt einer homogenen Halbkugel, die mit der Schnittfläche auf der  $xy$ -Ebene liegt mit der  $z$ -Achse als Symmetrieachse!



Sei  $V \hat{=} m$  (Masse ).

Man hat hier nur das Problem, die  $z$ -Koordinate  $z_s$  des Schwerpunktes  $S$  zu bestimmen.

Hebelgesetz:

$$z_s \cdot V \approx \sum_i z_i \Delta V_i \Rightarrow z_s \cdot V = \int_V z dV \Rightarrow z_s = \frac{\int_V z dV}{V} \quad V = \frac{2}{3} \cdot R^3 \cdot \pi$$

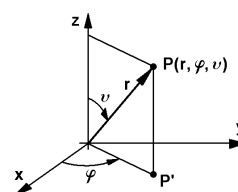


$$\begin{aligned}
\int_V z \, dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} z \, r \, dz \, dr \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{2} z^2 r \Big|_{z=0}^{z=\sqrt{R^2-r^2}} dr \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{2} (R^2 - r^2) r \, dr \, d\varphi = \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left( -\frac{r^4}{4} + \frac{r^2 R^2}{2} \right) \Big|_{r=0}^{r=R} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{R^4}{8} d\varphi = \frac{R^4}{8} \cdot \varphi \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = \frac{R^4}{8} \cdot 2\pi = \frac{R^4}{4} \cdot \pi \\
\Rightarrow z_s &= \frac{\int_V z \, dV}{V} = \frac{3}{8} \cdot R
\end{aligned}$$

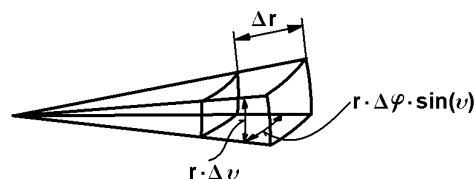
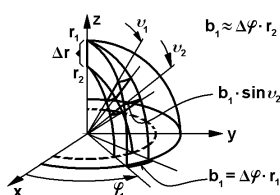
### 8.5.4 Integrale in Kugelkoordinaten — Intégrales en coordonnées sphériques

Bekannt sind die Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned}
x &= r \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\vartheta) \\
y &= r \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\vartheta) \\
z &= r \cdot \cos(\vartheta) \\
r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\
\varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\
\vartheta &= \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)
\end{aligned}$$



Das Volumenelement entnehmen wir der Geometrie, hier „etwas heuristisch“: (Eine genauere Herleitung wird später (Seite 298) mit Hilfe der Funktionaldeterminante möglich sein.)



$$\Delta V \approx (r \cdot \Delta\varphi \cdot \sin(\vartheta)) \cdot (r \cdot \Delta\vartheta) \cdot (\Delta r) = r^2 \cdot \sin(\vartheta) \cdot \Delta r \Delta\varphi \cdot \Delta\vartheta \leadsto dV = r^2 \cdot \sin(\vartheta) \, dr \, d\varphi \, d\vartheta$$

Beim Integrieren hat man wieder  $3! = 6$  Möglichkeiten für die Reihenfolge.

**Formel:**

**Beispiel** der Möglichkeit (konstanter Grenzen)

**Vor.:**

$V$  vernünftig, Kugelkoordinaten wie beschrieben,  
 $f$  stetig und beschränkt auf  $V$

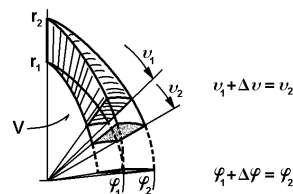
**Beh.:**

$$\int_V f(r, \varphi, \vartheta) \, dV = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{R_1}^{R_2} f(r, \varphi, \vartheta) \cdot r^2 \cdot \sin(\vartheta) \, dr \, d\varphi \, d\vartheta$$

**1. Beispiel:**

Man berechne den Volumeninhalt des gezeigten Abschnittes eines „Schnittes“  $S$ .

Gewinne daraus das Volumenelement  $\Delta V$  zurück!



$$\begin{aligned} V &= \int_S dV = \int_0^{\vartheta_1} \int_{\varphi_1}^{\varphi_1 + \Delta \varphi} \int_0^{R_1} r^2 \cdot \sin(\vartheta) dr d\varphi d\vartheta \\ &= \frac{1}{3} r^3 \Big|_{r=0}^{r=R_1} \cdot (-\cos(\vartheta)) \Big|_{\vartheta=0}^{\vartheta=\vartheta_1} \cdot \varphi \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_1 + \Delta \varphi} = \\ &= \frac{1}{3} (R_1)^3 \cdot (1 - \cos(\vartheta_1)) \cdot \Delta \varphi \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{3} (R_1)^3 \cdot \Delta \varphi \cdot (1 - \cos(\vartheta_1)) \end{aligned}$$

Sei  $R_m = \frac{R_2 + R_1}{2}$

$$\begin{aligned} \Delta S(\vartheta) &= \frac{1}{3} (R_2^3 - R_1^3) \cdot \Delta \varphi \cdot (1 - \cos(\vartheta_1)) = \frac{1}{3} \cdot (R_2 - R_1) \cdot (R_2^2 + R_2 \cdot R_1 + R_1^2) \cdot \Delta \varphi \cdot (1 - \cos(\vartheta_1)) \approx \\ &\approx \frac{1}{3} \cdot (\Delta R) \cdot (3 \cdot R_m^2) \cdot \Delta \varphi \cdot (1 - \cos(\vartheta_1)) = \Delta R \cdot R_m^2 \cdot \Delta \varphi \cdot (1 - \cos(\vartheta_1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta V &= \Delta S(\vartheta_2) - \Delta S(\vartheta_1) = \Delta R \cdot R_m^2 \cdot \Delta \varphi \cdot ((1 - \cos(\vartheta_2)) - (1 - \cos(\vartheta_1))) \\ &= \Delta R \cdot R_m^2 \cdot \Delta \varphi \cdot (\cos(\vartheta_1) - \cos(\vartheta_2)) \end{aligned}$$

Benütze die Potenzreihenentwicklung

$$\begin{aligned} \cos(\vartheta_2) &= \cos(\vartheta_1) + \frac{\cos'(\vartheta_1)}{1!} \cdot \Delta \vartheta + Rest(\vartheta) = \cos(\vartheta_1) - \sin(\vartheta_1) \cdot \Delta \vartheta + Rest(\vartheta) \\ \Rightarrow \cos(\vartheta_1) - \cos(\vartheta_2) &= \cos(\vartheta_1) - \cos(\vartheta_1) + \sin(\vartheta_1) \cdot \Delta \vartheta - Rest(\vartheta) \approx + \sin(\vartheta_1) \cdot \Delta \vartheta \end{aligned}$$

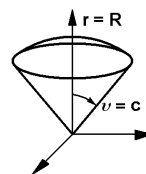
(Hier sind nun die höheren Glieder  $(\Delta \vartheta)^2, (\Delta \vartheta)^3, \dots$  weggelassen. )

$$\Rightarrow \Delta V \approx \Delta R \cdot R_m^2 \cdot \Delta \varphi \cdot \sin(\vartheta_1) \cdot \Delta \vartheta = R_m^2 \cdot \sin(\vartheta_1) \cdot \Delta R \cdot \Delta \varphi \cdot \Delta \vartheta$$

## 2. Beispiel:

Man berechne den Volumeninhalt der gezeigten Kugelkalotte (Haube).

(Kegel  $\cap$  Kugel )



$$\begin{aligned} V &= \int_K dV = \int_0^{2\pi} \int_0^c \int_0^R r^2 \cdot \sin(\vartheta) dr d\vartheta d\varphi = \frac{1}{3} r^3 \Big|_{r=0}^{r=R} \cdot (-\cos(\vartheta)) \Big|_{\vartheta=0}^{\vartheta=c} \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = \\ &= \frac{1}{3} (R_1)^3 \cdot (1 - \cos(c)) \cdot 2 \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad V = \frac{2 \cdot \pi}{3} (R)^3 \cdot (1 - \cos(c)) \end{aligned}$$

## 3. Beispiel:

Sei  $f(r, \varphi, \vartheta) = k \cdot r^2$ ,  $\int_K f(r, \varphi, \vartheta) dV = ?$  ( $K$  wie oben.)

$$\begin{aligned} \int_K f(r, \varphi, \vartheta) dV &= \int_K dV = \int_0^{2\pi} \int_0^c \int_0^R k \cdot r^2 \cdot r^2 \cdot \sin(\vartheta) dr d\vartheta d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^c \int_0^R k \cdot r^4 \cdot \sin(\vartheta) dr d\vartheta d\varphi = \\ &= k \cdot \frac{1}{5} r^5 \Big|_{r=0}^{r=R} \cdot (-\cos(\vartheta)) \Big|_{\vartheta=0}^{\vartheta=c} \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5} (R)^5 \cdot (1 - \cos(c)) \end{aligned}$$

## 8.6 Substitutionsregel: Transformation von Gebietsintegralen — Règle: Transformation d'intégrales de domaine

### 8.6.1 Der Fall mit zwei Variablen — Le cas avec deux variables

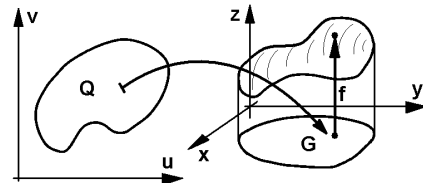
Sei gegeben:  $f(x, y)$ ,  $D_f = G \subseteq \mathbb{R}^2$

Dazu sei eine bijektive Abbildung  $\vec{\Phi}$  gegeben, die ein Gebiet  $Q$  in  $G$  abbildet und für unsere Zwecke stetig differenzierbar ist.

Situation:

$$Q \xrightarrow{\vec{\Phi}} G \xrightarrow{f} \mathbb{R} \quad \text{oder}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \xrightarrow{\vec{\Phi}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix} = \vec{\Phi}(u, v) \xrightarrow{f} z$$



Wir benutzen jetzt, dass der Wert eines Integrals nicht von der Gebietszerlegung abhängt. Dabei habe ein Flächenelement  $\Delta G_{k,n}$  in einer Umgebung mit dem Radius  $r_{k,n}$  Platz:

Sei  $r_n = \text{Max}(r_{k,n})$

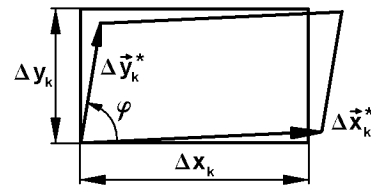
$$\int_G dG = \lim_{r_n \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_{k,n}, y_{k,n}) \cdot |\Delta G_{k,n}| = \lim_{r_n^* \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_{k,n}^*, y_{k,n}^*) \cdot |\Delta G_{k,n}^*|$$

Dabei sind  $\Delta G_{k,n}$  und  $\Delta G_{k,n}^*$  die Flächenelemente zu zwei verschiedenen Zerlegungen.

Sei nun:

$$|\Delta G_{k,n}| = \Delta x_{k,n} \cdot \Delta y_{k,n} := \Delta x \cdot \Delta y$$

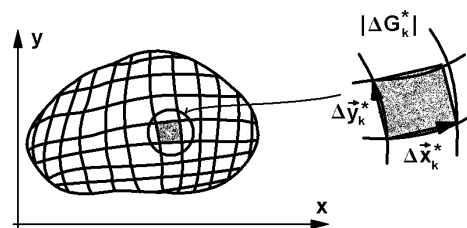
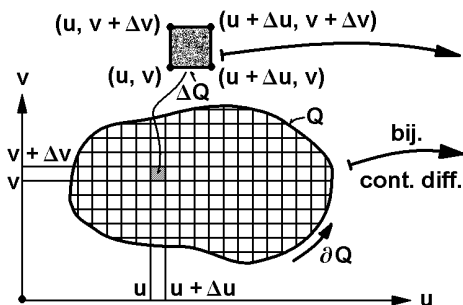
$$\begin{aligned} |\Delta G_{k,n}^*| &= |\Delta \vec{x}_{k,n}^* \times \Delta \vec{y}_{k,n}^*| = \\ &= |\Delta \vec{x}_{k,n}^*| \cdot |\Delta \vec{y}_{k,n}^*| \cdot \sin(\varphi_{k,n}) := \\ &:= |\Delta \vec{x}^*| \cdot |\Delta \vec{y}^*| \cdot \sin(\varphi) \end{aligned}$$



$\leadsto |\Delta G_{k,n}^*| := |\Delta G^*|$  ist ein Parallelogramminhalt.

(Der Kürze wegen lassen wir die Indices weg, behalten sie aber in Erinnerung.)

Wir beziehen nun die erwähnte Abbildung  $\vec{\Phi}(u, v)$ ,  $(u, v) \in Q$  in die Betrachtung ein und benutzen, dass für differenzierbare Funktionen gilt:  $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'_x(x) \cdot \Delta x$ .



$$\begin{aligned}
|\Delta G^*| &\approx |\Delta \vec{x}^* \times \Delta \vec{y}^*| \\
&= |(\vec{\Phi}(u + \Delta u, v) - \vec{\Phi}(u, v)) \times (\vec{\Phi}(u, v + \Delta v) - \vec{\Phi}(u, v))| \\
&= \left| \begin{pmatrix} \varphi(u + \Delta u, v) \\ \psi(u + \Delta u, v) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \\ 0 \end{pmatrix} \right| \times \left| \begin{pmatrix} \varphi(u, v + \Delta v) \\ \psi(u, v + \Delta v) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \\ 0 \end{pmatrix} \right| \\
&= \left| \begin{pmatrix} \varphi(u + \Delta u, v) - \varphi(u, v) \\ \psi(u + \Delta u, v) - \psi(u, v) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \varphi(u, v + \Delta v) - \varphi(u, v) \\ \psi(u, v + \Delta v) - \psi(u, v) \\ 0 \end{pmatrix} \right| \\
&\approx \left| \begin{pmatrix} \varphi'_u(u, v) \cdot \Delta u \\ \psi'_u(u, v) \cdot \Delta u \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \varphi'_v(u, v) \cdot \Delta v \\ \psi'_v(u, v) \cdot \Delta v \\ 0 \end{pmatrix} \right| \\
&= |\varphi'_u(u, v) \cdot \psi'_v(u, v) \cdot \Delta v \cdot \Delta u - \psi'_u(u, v) \cdot \varphi'_v(u, v) \cdot \Delta v \cdot \Delta u| = \left| \begin{vmatrix} \varphi'_u(u, v) & \psi'_u(u, v) \\ \varphi'_v(u, v) & \psi'_v(u, v) \end{vmatrix} \right| \cdot |\Delta u| \cdot |\Delta v| \\
&= \left| \begin{vmatrix} \varphi'_u(u, v) & \varphi'_v(u, v) \\ \psi'_u(u, v) & \psi'_v(u, v) \end{vmatrix} \right| \cdot |\Delta u| \cdot |\Delta v|
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

**Lemma:**  $|\Delta G^*| \rightarrow dG^* = \pm \begin{vmatrix} \varphi'_u(u, v) & \psi'_u(u, v) \\ \varphi'_v(u, v) & \psi'_v(u, v) \end{vmatrix} du dv$

**Problem:**  $|\Delta G_{k,n}^*| = |\Delta \vec{x}^*| \cdot |\Delta \vec{y}^*| \cdot \sin(\varphi)$  kann negativ sein, denn  $\sin(\varphi)$  kann als Winkelmaß negativ werden.

Wenn wir annehmen, dass  $\Delta u$  und  $\Delta v$  positive Differenzen sind, gilt aber immer noch:

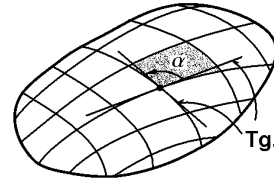
$$\begin{vmatrix} \varphi'_u(u, v) & \varphi'_v(u, v) \\ \psi'_u(u, v) & \psi'_v(u, v) \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \varphi'_v(u, v) & \varphi'_u(u, v) \\ \psi'_v(u, v) & \psi'_u(u, v) \end{vmatrix}$$

Das heisst, das Vorzeichen hängt einerseits von der Reihenfolge der gewählten Funktionen  $x = \varphi(u, v)$  und  $y = \psi(u, v)$  ab. Andererseits sollte zu wachsendem  $x$  und  $y$  auch gleichzeitig wachsende oder gleichzeitig fallende  $x = \varphi(u, v)$  und  $y = \psi(u, v)$  gehören, sonst kehrt sich bei der einen Variablen die Integrationsrichtung um, bei der andern nicht, was zu einem Vorzeichenwechsel führt.

Um die Sache hier etwas zu klären, definieren wir den **Umlaufsinn** der Randkurve  $\partial G$  eines Gebietes  $G$ .

**Definition:**

In  $G$  sei ein Koordinatengitter gegeben. Wenn darin die zweite Achse (Koordinatenlinie) aus der ersten Achse (Koordinatenlinie) durch Rechtsdrehung um einen Winkel  $\alpha \in (0, \pi)$  gewonnen werden kann, sagen wir, die Randkurve resp. damit das Gebiet habe **positiven Umlaufsinn**. Ansonst ist der **Umlaufsinn negativ**.



Ein Koordinatensystem orientiert also die Ebene resp. das Gebiet im Sinne der Vektorrechnung.

Aus dem bisher Gesagten geht nun hervor, dass das Flächenelement  $|\Delta G_{k,n}^*|$  genau dann positiv ist, wenn  $Q$  und  $G$  denselben Umlaufsinn haben.

Weiter definieren wir:

**Definition:**  $\det M = \begin{vmatrix} \varphi'_u(u, v) & \varphi'_v(u, v) \\ \psi'_u(u, v) & \psi'_v(u, v) \end{vmatrix} =: \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$   
 heisst **Funktionaldeterminante** oder **Jacobische Determinante**<sup>23</sup>

**Satz:**

**Vor.:**

$$Q \xrightarrow{\vec{\Phi}} G, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \xrightarrow{\vec{\Phi}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix} = \vec{\Phi}(u, v),$$

$\Phi$  stetig diff'bar, bijektiv,

$$D = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}$$

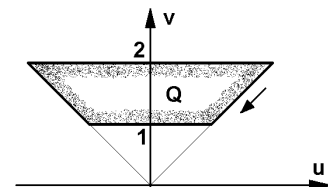
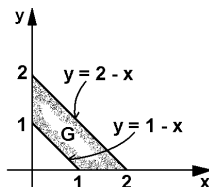
**Beh.:**

$$\int_G f(x, y) dG = \pm \int_Q f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \cdot \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} dQ, \quad dQ = du dv$$

+:  $G, Q$  haben gleichen Umlaufsinn  
 -: Sonst

**Schreibweise:** Die Schreibweise  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv$  ist analog zur Schreibweise  $dx = \frac{dx}{dt} dt$  bei der gewöhnlichen Substitutionsregel.

**Bsp.:**  $\int_G e^{\frac{y-x}{y+x}} dG = ?$



Sei  $u = y - x, \quad v = y + x \Rightarrow x = \frac{1}{2}(-u + v), \quad y = \frac{1}{2}(u + v)$

$$\Rightarrow \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

~> **Achtung:** Bei der Abbildung  $(u, v) \mapsto (x, y)$  kehrt sich der Umlaufsinn um!

$$\begin{aligned} \frac{y-x}{y+x} = \frac{u}{v} &\Rightarrow \int_G e^{\frac{y-x}{y+x}} dG = - \int_Q e^{\frac{u}{v}} \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv = - \int_Q e^{\frac{u}{v}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du dv = \frac{1}{2} \cdot \int_1^2 \left( \int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} du \right) dv \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_1^2 (v e^{\frac{u}{v}} \Big|_{u=-v}^{u=v}) dv = \frac{1}{2} \cdot \int_1^2 v (e^1 - e^{-1}) dv = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot v^2 \cdot (e^1 - e^{-1}) \Big|_1^2 = \frac{3}{4} \cdot (e^1 - e^{-1}) \end{aligned}$$

<sup>23</sup>Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804 – 1851

### 8.6.2 Verallgemeinerung — Généralisation

Im Falle von mehr als zwei Variablen führt man eine analoge Betrachtung. Im Falle von drei Variablen tritt an die Stelle eines Parallelogrammes  $\Delta Q$  ein Spat und an Stelle des durch  $\pm$  den Betrag eines Vektorprodukts gegebenen Parallelogramminhalts das Spatprodukt, also wieder eine Determinante. An Stelle der Orientierung der Ebene tritt hier die Orientierung des Raumes. Im  $\mathbb{R}^m$  hat man dann den Volumeninhalt eines  $m$ -dimensionalen Spates.

Unter analogen Voraussetzungen wie bei zwei Variablen erhalten wir danach die Formeln:

**Formel:**

$$\begin{aligned} \int_V f(x, y, z) dV &= \int_V f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \pm \int_M f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)) \cdot \frac{\partial(\varphi, \psi, \chi)}{\partial(u, v, w)} du dv dw \\ \int_V f(x_1, \dots, x_m) dV &= \dots = \\ &= \pm \int_M f(\varphi_1(u_1, \dots, u_m), \dots, \varphi_m(u_1, \dots, u_m)) \cdot \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{\partial(u_1, \dots, u_m)} du_1 \dots du_m \end{aligned}$$

**Bsp.:** Das Volumenelement in Kugelkoordinaten:

Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} u &= r, \quad v = \varphi, \quad w = \vartheta \\ x &= r \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\vartheta), \quad y = r \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\vartheta), \quad z = r \cdot \cos(\vartheta) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(\varphi, \psi, \chi)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) \sin(\vartheta) & -r \sin(\varphi) \sin(\vartheta) & r \cos(\varphi) \cos(\vartheta) \\ \sin(\varphi) \sin(\vartheta) & r \cos(\varphi) \sin(\vartheta) & r \sin(\varphi) \cos(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) & 0 & -r \sin(\vartheta) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} & -r^2 \sin^3(\vartheta) \cos^2(\varphi) - r^2 \sin^2(\varphi) \sin(\vartheta) \cos^2(\vartheta) - r^2 \cos^2(\varphi) \sin(\vartheta) \cos^2(\vartheta) - r^2 \sin^2(\varphi) \sin^3(\vartheta) \\ &= -r^2 \sin^3(\vartheta) (\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)) - r^2 \sin(\vartheta) \cos^2(\vartheta) (\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)) \\ &= -r^2 \sin^3(\vartheta) - r^2 \sin(\vartheta) \cos^2(\vartheta) = -r^2 \sin(\vartheta) (\sin^2(\vartheta) + \cos^2(\vartheta)) = -r^2 \sin(\vartheta) \end{aligned}$$

Das System  $(r, \varphi, \vartheta)$  bildet aber ein Linkssystem, was zu einem negativen Vorzeichen führt. (Ein Rechtssystem wäre z.B.  $(\varphi, r, \vartheta)$ ) Damit ist das Volumenelement von 8.5.4 bestätigt.

**Korollar:**

**Vor.:**

Kugelkoordinaten

**Beh.:**

Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\varphi, r, \vartheta)} = r^2 \sin(\vartheta)$$

## 8.6.3 Beispiel — Exemple

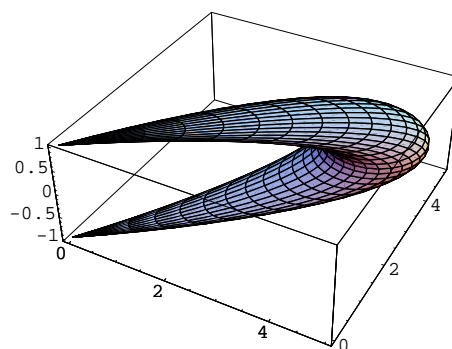
$$\vec{w}(u, v, r) = \begin{pmatrix} (r \cdot \cos(u) + 4) \sin(v) \\ (r \cdot \sin(u) + 4) \sin(v) \\ \cos(v) \end{pmatrix}$$

$$x(u, v, r) = (r \cdot \cos(u) + 4) \sin(v),$$

$$y(u, v, r) = (r \cdot \sin(u) + 4) \sin(v),$$

$$z(u, v, r) = \cos(v),$$

$$\Rightarrow |V| = \left| \int_V \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, r)} du dv dr \right| = ?$$



$$\leadsto \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, r)} = -r \cos^2(u) \sin^3(v) - r \sin^2(u) \sin^3(v),$$

$$\leadsto |V| = \left| \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 -r \cos^2(u) \sin^3(v) - r \sin^2(u) \sin^3(v) dr dv du \right| = \frac{4\pi}{3} \approx 4.18879$$





## Kapitel • Chapitre 9

# Differentialgeometrie: Kurven

### 9.1 Grundlagen

#### 9.1.1 Kurvendefinitionen

##### Allgemeine Kurve

Wir betrachten eine **vektorwertige Funktion**:

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}, \quad \varphi_i(t) \text{ stetig } (i = 1, 2, \dots, n)$$

**Definition:**  $\{\overrightarrow{OP} = \vec{v}(t) \mid t \in I, O = \text{Ursprung}\}$   
heisst **Kurve im  $\mathbb{R}^n$** .

**Beispiele:**

1.  $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \cos(10t) \\ \sin(10t) \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Zykloide im } \mathbb{R}^2$
2.  $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Schraubenlinie im } \mathbb{R}^3$

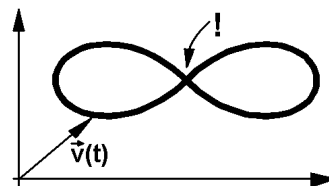
##### Geschlossene Kurve

Sei  $\vec{v}(t)$  definiert auf  $I = [t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$

**Definition:** Die Kurve heisst **geschlossen**, falls gilt:  $\vec{v}(t_1) = \vec{v}(t_2)$

$P_0$ :  $\vec{v}(t_1) = \vec{v}(t_2)$

$\rightsquigarrow$  Kreuzungspunkt



**Definition:** Eine Kurve heisst **einfach geschlossen**, wenn sie keinen Kreuzungspunkt hat.

### 9.1.2 Gebiete

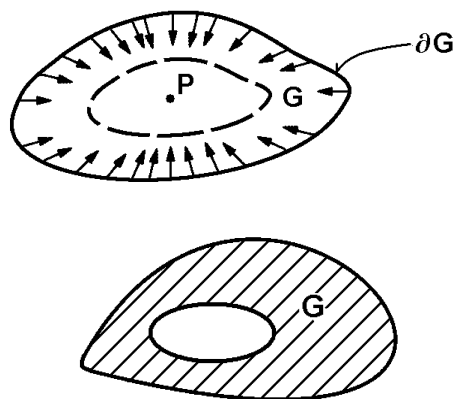
Von der Analysis I her wissen wir:

Im  $\mathbb{R}^2$  umschliesst eine einfach geschlossene Kurve ein **zusammenhängendes Gebiet**.

**Offenes Gebiet:** Ohne Rand  $\partial G$

**Abgeschlossenes Gebiet:**

Mit Rand  $\bar{G} = G \cup \partial G$



In einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $G$  lässt sich die Randkurve innerhalb von  $G$  stetig zu einem Punkt zusammenziehen. In einem mehrfach zusammenhängenden Gebiet gelingt das nicht immer wegen den Löchern.

### 9.1.3 Tangentenvektor, Tangentialebene

**Ausgangslage**

Sei  $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$  Kurve .- Sei  $\varphi_i(t)$  stetig diff'bar ( $i = 1, 2, \dots, n$ )

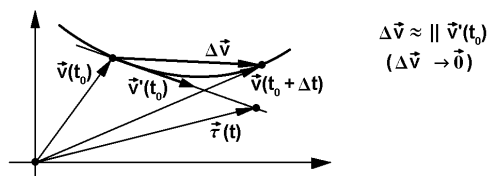
$\leadsto$  Die Koordinatenfunktionen  $\varphi_i(t)$  haben keinen **Knick**. (Die Graphen der  $\varphi_i(t)$  nannten wir **glatt**.)

#### Idee des Tangentenvektors

Wir gehen hier davon aus, dass die Tangente an eine Flugkurve eine physikalische Realität ist, die wir noch mathematisch beschreiben müssen.

Sei  $\Delta \vec{v} = \vec{v}(t_0 + \Delta t) - \vec{v}(t_0)$

Für  $\Delta t \rightarrow 0$  nähert sich die Richtung von  $\Delta \vec{v}$  immer mehr der Tangentenrichtung ( $\pm \vec{\tau}$ ).



Für  $\Delta t > 0$  hat  $\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$  dieselbe Richtung wie  $\vec{v}$ . (Für  $\Delta t < 0$  ist die Richtung entgegengesetzt.)

$\leadsto$  Parallelität:

$$\frac{\vec{v}(t_0 + \Delta t) - \vec{v}(t_0)}{\Delta t} \parallel \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \parallel \vec{v}$$

$\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$  ist eine Annäherung an die Richtung von  $\pm \vec{v}$ .

Für  $|\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}| \neq 0$  können wir daher die Tangentenrichtung durch die Richtung von  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$  definieren.

**Definition:**

$$\vec{\tau} := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \begin{pmatrix} \Delta \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \Delta \varphi_n(t) \end{pmatrix} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{\Delta \varphi_1(t)}{\Delta t} \\ \vdots \\ \frac{\Delta \varphi_n(t)}{\Delta t} \end{pmatrix} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \Delta \varphi_1(t)' \\ \vdots \\ \Delta \varphi_n(t)' \end{pmatrix} := \vec{v}(t_0)$$

**Bemerkung:** Falls das Koordinatensystem so gelegt ist, dass in  $t_0$  die 1.

Koordinatenachse parallel zu  $\vec{\tau}$  ist so gilt:

$$\vec{v}'(t_0) = \begin{pmatrix} \varphi_1'(t_0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (\leadsto \varphi_2'(t_0) = \dots = \varphi_n'(t_0) = 0. \text{ Horizontale Tangenten an die Graphen der } \\ \text{Koordinatenfunktionen.})$$

Die Kenntnisse aus der Vektorgeometrie erlauben uns nun sofort die Parametergleichung für die Tangente aufzuschreiben:

**Formel:** 
$$\vec{r}_0(t) = \vec{v}(t_0) + t \cdot \vec{v}'(t_0)$$

### Singuläre Punkte

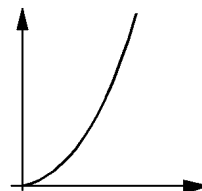
Für  $\vec{v}'(t_0) = \vec{0}$  existiert kein Tangentenvektor (Länge 0). Die Kurve kann hier einen singulären Punkt besitzen.

**Beispiele:**

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^4 \end{pmatrix}, \quad t \in [-a, a] = I$$

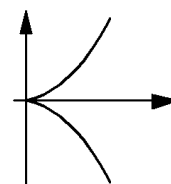
$$\leadsto \vec{v}(t) = \vec{v}(-t)$$

$$t = 0 \leadsto \text{Umkehrpunkt.}$$



$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, \quad t \in [-a, a] = I$$

$$t = 0 \leadsto \text{Spitze.}$$



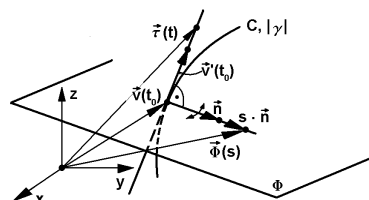
Im Falle  $\vec{v}'(t) \neq \vec{0}$  existiert ein endlich langer Tangentenvektor und daher eine Tangentenrichtung. Daher sagen wir:

**Definition:** Im Falle  $\vec{v}'(t) \neq \vec{0}$  heisst die Kurve **glatt**

### Die Normalenebene

Für einen Vektor  $\vec{\Phi}(s)$ , der in die Ebene  $\Phi$  zeigt, muss gelten:

$$\langle \vec{\Phi}(s) - \vec{v}(t_0), \vec{v}'(t_0) \rangle = \langle s \cdot \vec{n}, \vec{v}'(t_0) \rangle = 0 \quad (\perp)$$



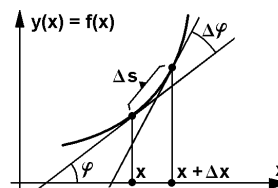
Die Normalenebene  $\Phi$  wird somit durch den Vektor  $\vec{\Phi}(s)$  in der folgenden Gleichung beschrieben:

**Formel:** 
$$\langle \vec{\Phi}(s) - \vec{v}(t_0), \vec{v}'(t_0) \rangle = 0$$

## 9.2 Krümmung von Kurven

### 9.2.1 Ebene Kurven

Wir definieren die **Krümmung** einer Kurve in einem Punkt  $P$  als die Änderung der Tangentenrichtung pro Weglänge in diesem Punkt. Dieses Verhältnis kann auch als Änderungsgeschwindigkeit der Tangentenrichtung verstanden werden, wenn man die Kurve mit gleichbleibender Geschwindigkeit durchfährt. Grosse Krümmung bedeutet daher rasche Richtungsänderung.



**Definition:** **Krümmung:**  $\kappa_0 = \left| \frac{d\varphi}{ds} \right|, \quad \kappa = \frac{d\varphi}{ds}$

### Bemerkung:

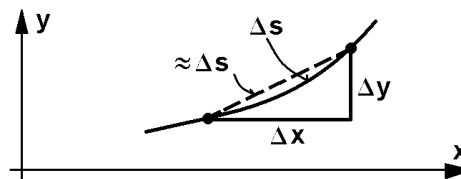
$\text{sgn}(\kappa)$  hängt von der Richtung ab, in der die Kurve durchlaufen wird.

### 9.2.2 Ebene Kurven

#### Kartesische Koordinaten

$$\Delta s \approx \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \Rightarrow \frac{\Delta s}{\Delta x} \approx \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

$$\rightarrow \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (y'(x))^2}$$



Nun gilt:

$$y' = \tan(\varphi) \Rightarrow \varphi = \arctan(y') \Rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = \varphi'_x = (\arctan(y'))'_x = \frac{1}{1 + (y'(x))^2} \cdot (y'(x))' = \frac{y(x)''}{1 + (y'(x))^2}$$

Andererseits gilt:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi(s)}{ds} \cdot \frac{ds(x)}{dx} = \operatorname{sgn}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right) \cdot \kappa \cdot \frac{ds}{dx} \Rightarrow \kappa = \left| \frac{\frac{d\varphi}{ds}}{\frac{ds}{dx}} \right| = \frac{y(x)''}{1 + (y'(x))^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}} = \frac{y(x)''}{(1 + (y'(x))^2)^{3/2}}$$

**Formel:**

$$\kappa = \frac{y(x)''}{(1 + (y'(x))^2)^{3/2}}$$

**Bsp.:**

$$1. \ y(x) = f(x) = x^2, \ x = 0, \ y'(x) = f'(x) = 2x, \ y''(x) = f''(x) = 2 \Rightarrow \kappa = \frac{2}{(1 + (2 \cdot 0)^2)^{3/2}} = 2$$

$$2. \ y(x) = f(x) = \sin(x), \ x = \frac{\pi}{2}, \ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \ y''(x) = f''(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \Rightarrow \kappa_0 = \left| \frac{1}{(1 + (0)^2)^{3/2}} \right| = 1$$

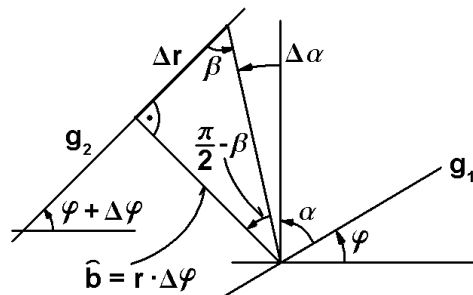
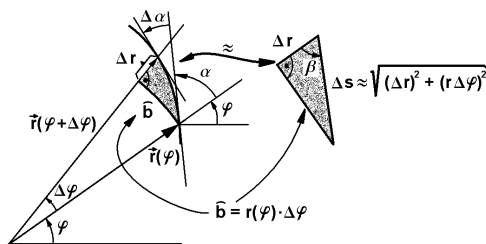
**Bemerkung:**  $\leadsto$  **Korollar:**

(!!!!)

$$f(x) = y(x) \rightarrow \{\text{Min}, \text{Max}\} \Rightarrow f'(x) = y'(x) = 0 \Rightarrow \kappa = \frac{y(x)''}{(1 + (y'(x))^2)^{3/2}} = \frac{y(x)''}{(1 + (0)^2)^{3/2}} = y(x)''$$

**Speziell:**  $y(x)' = y(x)'' = 0 \Rightarrow \kappa = 0$

**Polarkoordinaten**



$$\check{b} = r(\varphi) \cdot \Delta(\varphi)$$

$$\Delta s \approx \sqrt{(\Delta r)^2 + (\check{b})^2} = \sqrt{(\Delta r)^2 + r^2 \cdot (\Delta \varphi)^2}, \quad \frac{\Delta s}{\Delta \varphi} = \sqrt{\left(\frac{\Delta r}{\Delta \varphi}\right)^2 + r^2} \rightarrow \frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{(r'_\varphi)^2 + r^2} = s'_{Fi}$$

Für  $\Delta \alpha \rightarrow 0$  geht auch  $\Delta \varphi \rightarrow 0$

( $\leadsto g_1 \sim \|g_2\|$ )

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} - \beta + \alpha \approx \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta \approx \alpha$$

$$\arctan \beta \approx \frac{\check{b}}{\Delta r} = \frac{r \cdot \Delta(\varphi)}{\Delta r} = \frac{r}{\left(\frac{\Delta r}{\Delta \varphi}\right)} \rightarrow \frac{r}{r'_\varphi}$$

$$\Rightarrow \alpha \approx \beta \approx \arctan\left(\frac{r}{r'_{\varphi}}\right)$$

Krümmung (nach Definition):  $\kappa = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta(\varphi + \alpha)}{\Delta s}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \kappa &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta(\varphi + \alpha)}{\Delta \varphi} \cdot \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \varphi}{\Delta \varphi} + \frac{\Delta \alpha}{\Delta \varphi} \right) \cdot \frac{1}{\frac{\Delta s}{\Delta \varphi}} = (1 + \alpha'_{\varphi}) \cdot \frac{1}{s'_{\varphi}} = \\ (1 + (\arctan(\frac{r}{r'_{\varphi}}))'_{\varphi}) &\cdot \frac{1}{\sqrt{(r'_{\varphi})^2 + r^2}} = (1 + \frac{1}{1 + (\frac{r}{r'_{\varphi}})^2} \cdot \frac{r'_{\varphi} \cdot r'_{\varphi} - r \cdot r''_{\varphi\varphi}}{(r'_{\varphi})^2}) \cdot \frac{1}{\sqrt{(r'_{\varphi})^2 + r^2}} = \\ (1 + \frac{(r'_{\varphi})^2}{(r'_{\varphi})^2 + r^2} \cdot \frac{r'_{\varphi} \cdot r'_{\varphi} - r \cdot r''_{\varphi\varphi}}{(r'_{\varphi})^2}) &\cdot \frac{1}{((r'_{\varphi})^2 + r^2)^{1/2}} = \frac{(r'_{\varphi})^2 + r^2 + (r'_{\varphi})^2 - r \cdot r''_{\varphi\varphi}}{((r'_{\varphi})^2 + r^2) \cdot ((r'_{\varphi})^2 + r^2)^{1/2}} = \\ &\frac{r^2 + 2 \cdot (r'_{\varphi})^2 - r \cdot r''_{\varphi\varphi}}{((r'_{\varphi})^2 + r^2)^{3/2}} \leadsto \end{aligned}$$

**Formel:**

$$\kappa = \frac{r^2 + 2 \cdot (r'_{\varphi})^2 - r \cdot r''_{\varphi\varphi}}{((r'_{\varphi})^2 + r^2)^{3/2}}$$

**Bsp.:**

$$1. r(\varphi) = \varphi \Rightarrow \kappa = \frac{\varphi^2 + 2 \cdot 1^2 - \varphi \cdot 0}{((1)^2 + \varphi^2)^{3/2}} = \frac{\varphi^2 + 2}{(1 + \varphi^2)^{3/2}} \quad \varphi = 0 \Rightarrow \kappa = 2$$

$$2. r(\varphi) = e^{\varphi} \Rightarrow \kappa = \frac{e^{2\varphi} + 2 \cdot e^{2\varphi} - e^{\varphi} \cdot e^{\varphi}}{(e^{2\varphi} + e^{2\varphi})^{3/2}} = \frac{2 \cdot e^{2\varphi}}{(2e^{2\varphi})^{3/2}} = 2^{-1/2} e^{-\varphi} \quad \varphi = 0 \Rightarrow \kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

## Vektorfunktionen

Sei  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

Von den kartesisch definierten Funktionen her wissen wir:

$$\kappa = \left| \frac{y(x)''}{(1 + (y'(x))^2)^{3/2}} \right|, \quad y'(x) = y'_x = \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t} (*). \leadsto \text{Kurz: } \frac{y'}{x'}$$

$$\leadsto y''_{xx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d \frac{dy}{dx}}{dx} \stackrel{\text{subst}}{=} \frac{d \frac{dy}{dx}}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy'_x}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \stackrel{(*)}{=} \frac{d \frac{y'_t}{x'_t}}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_t}{(x'_t)^2} \cdot \frac{1}{x'_t},$$

$$\text{Kurz: } y''_{xx} = \frac{y'' \cdot x' - y' \cdot x''}{(x'')^3}$$

$$\leadsto \kappa = \left| \frac{y(x)''}{(1 + (y'(x))^2)^{3/2}} \right| = \left| \frac{y'' \cdot x' - y' \cdot x''}{(x'')^3} \right| \cdot \left| \frac{1}{(1 + (\frac{y'}{x'})^2)^{3/2}} \right|, \quad (1 + (\frac{y'}{x'})^2)^{3/2} = ((y')^2 + (x')^2)^{3/2} \cdot \frac{1}{(x')^3}$$

$$\leadsto \kappa = \left| \frac{y'' \cdot x' - y' \cdot x''}{((y')^2 + (x')^2)^{3/2}} \right| \leadsto$$

**Formel:****Vor.:**

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\vec{t}(t)| \neq \vec{0}, \quad x(t), y(t) \in \mathcal{D}^{(2)}(I)$$

**Beh.:**

$$\kappa = \frac{|\vec{v}''(t) \times \vec{v}'(t)|}{|\vec{v}'(t)|^3} = \left| \frac{y'' \cdot x' - y' \cdot x''}{((y')^2 + (x')^2)^{3/2}} \right|$$

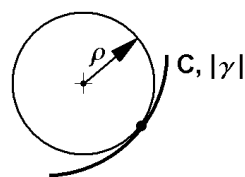
**Bsp.:**  $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \kappa = \left| \frac{6t \cdot 2t - 3t^2 \cdot 2}{((2t)^2 + (3t^2)^2)^{3/2}} \right| = \left| \frac{6t^2}{(4t^2 + 9t^4)^{3/2}} \right| = \frac{6}{|t \cdot (4 + 9t^2)^{3/2}|}, \quad t \neq 0$$

### 9.2.3 Krümmungsradius

**Problem:****Geg.:**Punkt P einer Kurve  $C$ , Krümmung  $\kappa_0(P)$ .**Ges.:** Kreis mit gleicher Krümmung  $\kappa_0(P)$  (Schmiegekreis in  $P$ , am besten passender Kreis).

$$\Delta s \approx \rho \Delta \varphi \Rightarrow \rho \approx \frac{\Delta s}{\Delta \varphi}, \quad \rho = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{1}{\frac{d\varphi}{ds}} = \frac{1}{\kappa}$$

**Formel:**

$$(\pm \text{Krümmungsradius}) \quad \rho = \frac{1}{\kappa}$$

**Bsp.:**

$$f(x) = \sin(x), \quad x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \kappa = 1$$

(Vgl. Seite 305 )

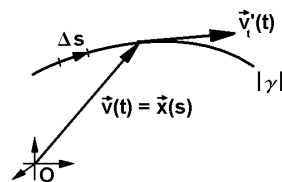
$$\Rightarrow \rho \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

### 9.2.4 Kurven im Raum

**Geg.:** Kurve  $\gamma$

$$t \mapsto \vec{v}(t), \quad t \in [a, b], \quad \gamma = \{\vec{v}(t)\}$$

$$\text{Sei } \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$



**Idee:** Führe die **Bogenlänge**  $s$  als neuen Parameter ein.

Normalerweise ist die Kurve vernünftig parametrisiert gegeben mit irgend einem Parameter  $t$ . Für die Kurvenlänge muss dann gelten:  $s = h(t)$ ,  $h$  streng monoton und bijektiv.

$$\leadsto t = h^{-1}(s) = h^{-1}(h(t)), \quad \vec{v}(t) = \vec{v}(h^{-1}(s)) = \vec{x}(s) = \vec{x}(h(t))$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{x}(h(t)) = \frac{d \vec{x}(s)}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \vec{x}_s' \cdot s_t' = \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \vec{v}_t'(t) \quad \leadsto$$

**Lemma:**

**Vor.:**

Wie beschreiben die Kurve durch  $\vec{v}(t)$  und  $\vec{x}(s)$

**Beh.:**

$$\vec{x}_s' = \frac{\vec{v}_t'(t)}{s_t'}$$

Wir stellen uns jetzt einige nützlichen Formeln bereit:

$$\Delta \vec{s} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta s = |\Delta \vec{s}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

$$\leadsto \text{Formal:} \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

$$\leadsto s_t' = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt} = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}} = \sqrt{\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}}$$

$$\Rightarrow s_t' = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2} = \left| \begin{pmatrix} x_t' \\ y_t' \\ z_t' \end{pmatrix} \right| = |\vec{v}_t'|$$

$$\text{Lemma} \Rightarrow \vec{x}_s' = \frac{\vec{v}_t'(t)}{s_t'} = \frac{\vec{v}_t'(t)}{|\vec{v}_t'|} = \vec{e}_{\vec{v}_t},$$

$\leadsto$  Einheitsvektor in Tangentenrichtung!



**Satz:****Vor.:**

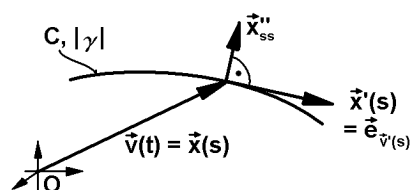
$\vec{v}(t) = \vec{x}'(s)$  differenzierbare Kurve ,  
 $t$  = vernünftiger Parameter,  
 $s$  = Bogenlänge

**Beh.:**

- 1)  $s'_t = |\vec{v}_t'|$
- 2)  $\vec{x}_s' = \vec{e}_{\vec{v}_t'}$ ,  $|\vec{e}_{\vec{v}_t'}| = 1$   
 $\vec{x}_s'$  Einheitsvektor in Tangentenrichtung!

Dann gilt:

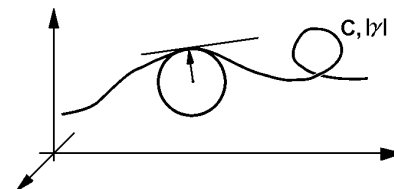
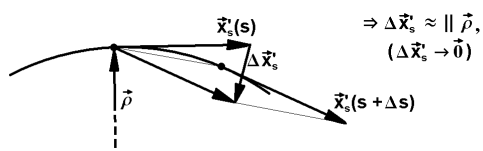
$$\begin{aligned}
 |\vec{x}_s'|^2 &= \langle \vec{x}_s', \vec{x}_s' \rangle = \langle \vec{e}_{\vec{v}_t'}, \vec{e}_{\vec{v}_t'} \rangle = 1, \\
 \langle \vec{e}, \vec{e} \rangle &= |\vec{e}|^2 = 1 \\
 (|\vec{x}_s'|^2)'_s &= \langle \vec{x}_s', \vec{x}_s' \rangle'_s = 2 \cdot \langle \vec{x}_s', \vec{x}_{ss}'' \rangle = \\
 (1)'_s &= 0 \\
 \Rightarrow \vec{x}_s' &\perp \vec{x}_{ss}''
 \end{aligned}$$

**Satz:****Vor.:**

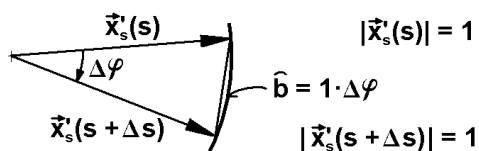
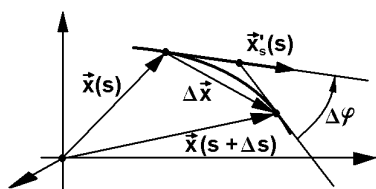
$\vec{v}(t) = \vec{x}(s)$  differenzierbare Kurve ,  
 $t$  = vernünftiger Parameter,  
 $s$  = Bogenlänge

**Beh.:**

$$\vec{x}_s' \perp \vec{x}_{ss}''$$



Betrachte:



$$\Rightarrow |\Delta \vec{x}_s'| = |\vec{x}_s'(s + \Delta s) - \vec{x}_s'(s)| \approx \Delta \varphi$$

$$\leadsto \text{Krümmung } \kappa_0 := \left| \frac{d\varphi}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}_s'}{\Delta s} = \left| \frac{d}{ds} \vec{x}_s' \right| = |\vec{x}_{ss}''|$$

**Lemma:****Vor.:**

$\vec{v}(t) = \vec{x}(s)$ ,  
 $s$  = Bogenlänge als Parameter

**Beh.:**

$$\kappa_0 = |\vec{x}_{ss}''|, \quad \kappa^2 = \langle \vec{x}_{ss}'', \vec{x}_{ss}'' \rangle$$

**Problem:** Die ungewöhnliche Parametrisierung  $\vec{x}(s)$  muss berechnet oder aber umgangen werden.

**Rechnung:** Sei  $\vec{x}(s)$  eine zulässige Umparametrisierung von  $\vec{v}(t)$ .

$$\begin{aligned} \frac{\Delta s}{\Delta t} &= \frac{|\Delta \vec{v}(t)|}{\Delta t} = \frac{\sqrt{\langle \Delta \vec{v}(t), \Delta \vec{v}(t) \rangle}}{\Delta t} = \sqrt{\left\langle \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t}, \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t} \right\rangle} = \sqrt{\left( \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t} \right)^2} \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \sqrt{(\vec{v}_t')^2} = s_t' \\ s_{tt}'' &= \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d \sqrt{(\vec{v}_t')^2}}{dt} = \frac{d((\vec{v}_t')^2)^{1/2}}{dt} = \frac{1}{2} \cdot ((\vec{v}_t')^2)^{-1/2} \cdot 2 \cdot \langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle = \frac{\langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle}{|\vec{v}_t'|} = \frac{\langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle}{s_t'} \\ \Rightarrow s_{tt}'' &= \frac{d^2 t}{ds^2} = \frac{\langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle}{s_t'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Weiter: } \vec{v}_{tt}'' &= \frac{d^2 \vec{v}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \vec{v}_t' = \frac{d}{dt} (\vec{x}_s' \cdot s_t') = \frac{d}{dt} \vec{x}_s' \cdot s_t' + \vec{x}_s' \cdot \frac{d}{dt} s_t' \\ &= \frac{d}{ds} (\vec{x}_s') \cdot \frac{d}{dt} (s_t') \cdot s_t' + \vec{x}_s' \cdot \frac{d}{dt} s_t' = \vec{x}_{ss}'' \cdot (s_t')^2 + \vec{x}_s' \cdot s_{tt}'' \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Mit Lemma von Seite 308:

$$\begin{aligned} \vec{x}_{ss}'' &= \frac{\vec{v}_{tt}'' - \vec{x}_s' \cdot s_{tt}''}{(s_t')^2} = \frac{1}{(s_t')^2} \cdot (\vec{v}_{tt}'' - \frac{\vec{v}_t'}{s_t'} \cdot s_{tt}'') = \frac{1}{(s_t')^2} \cdot (\vec{v}_{tt}'' - \frac{\vec{v}_t'}{s_t'} \cdot \frac{\langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle}{s_t'}) \\ (\text{vgl. oben}) &= \frac{1}{(s_t')^2} \cdot (\vec{v}_{tt}'' - \frac{\vec{v}_t' \cdot \langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle}{(s_t')^2}) \end{aligned}$$

Mit dem Satz von Seite 309:

$$s_t' = |\vec{v}_t'| \Rightarrow (s_t')^2 = |\vec{v}_t'|^2 = \langle \vec{v}_t', \vec{v}_t' \rangle \Rightarrow \vec{x}_{ss}'' = \frac{1}{\langle \vec{v}_t', \vec{v}_t' \rangle} \cdot (\vec{v}_{tt}'' - \frac{\vec{v}_t' \cdot \langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle}{\langle \vec{v}_t', \vec{v}_t' \rangle}), \quad \kappa_0 = |\vec{x}_{ss}''| \leadsto$$

**Formel:**

$$\begin{aligned} \kappa_0 = |\vec{x}_{ss}''| &= \frac{1}{|\vec{v}_t'|^2} \cdot |\vec{v}_{tt}'' - \frac{\vec{v}_t' \cdot \langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle}{|\vec{v}_t'|^2}| = \\ &= \frac{1}{|\vec{v}_t'|^4} \cdot |\vec{v}_{tt}'' \cdot |\vec{v}_t'|^2 - \vec{v}_t' \cdot \langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle| \end{aligned}$$

In dieser Formel wird eine beliebige zulässige Parametrisierung der Kurve verwendet!

Eine Umrechnung:

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= \left( \frac{1}{|\vec{v}_t'|^4} \cdot |\vec{v}_{tt}'' \cdot |\vec{v}_t'|^2 - \vec{v}_t' \cdot \langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle| \right)^2 = \left( \frac{1}{|\vec{v}_t'|^3} \cdot |\vec{v}_{tt}'' \cdot |\vec{v}_t'| - \frac{\vec{v}_t'}{|\vec{v}_t'|} \cdot \langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle| \right)^2 = \\ &= \frac{1}{|\vec{v}_t'|^6} \cdot \langle \vec{v}_{tt}'' \cdot |\vec{v}_t'| - \frac{\vec{v}_t'}{|\vec{v}_t'|} \cdot \langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle, \vec{v}_{tt}'' \cdot |\vec{v}_t'| - \frac{\vec{v}_t'}{|\vec{v}_t'|} \cdot \langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle \rangle = \\ &= \frac{1}{|\vec{v}_t'|^6} \cdot (|\vec{v}_{tt}''|^2 \cdot |\vec{v}_t'|^2 - 2 \cdot \langle \vec{v}_{tt}'' \cdot |\vec{v}_t'|, \frac{\vec{v}_t'}{|\vec{v}_t'|} \cdot \langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle \rangle + \frac{|\vec{v}_t'|^2}{|\vec{v}_t'|^2} \cdot (\langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle)^2) = \\ &= \frac{1}{|\vec{v}_t'|^6} \cdot (|\vec{v}_{tt}''|^2 \cdot |\vec{v}_t'|^2 - 2 \cdot \langle \vec{v}_{tt}'', \vec{v}_t' \cdot \langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle \rangle + (\langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle)^2) = \\ &= \frac{1}{(|\vec{v}_t'|^2)^3} \cdot (\langle \vec{v}_{tt}'', \vec{v}_{tt}'' \rangle \cdot \langle \vec{v}_t', \vec{v}_t' \rangle - (\langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle)^2) \end{aligned}$$

Sei  $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_t' = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_{tt}'' = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \Rightarrow \leadsto$

**Formel:**

$$\kappa^2 = \frac{1}{(|\vec{v}_t'|^2)^3} \cdot (\langle \vec{v}_{tt}'', \vec{v}_{tt}'' \rangle \cdot \langle \vec{v}_t', \vec{v}_t' \rangle - (\langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle)^2)$$

$$= \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \cdot (\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2) - (\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z})^2}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^3}$$

**Bsp.:** Schraubenlinie:

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_t' = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_{tt}'' = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \kappa^2 =$$

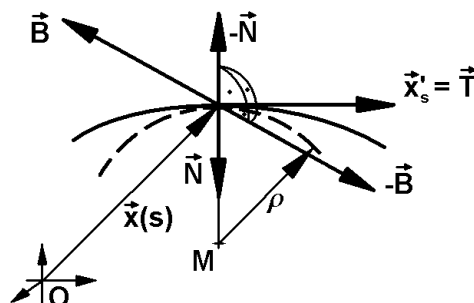
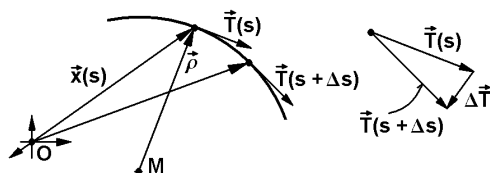
$$\frac{(\sin^2(t) + \cos^2(t) + 0) \cdot (\cos^2(t) + \sin^2(t) + 1^2) - ((-\sin(t)) \cdot (-\cos(t)) + \cos(t) \cdot (-\sin(t)) + 1 \cdot 0)^2}{(\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1^2)^3}$$

$$= \frac{1 \cdot 2 - (0 + 0)^2}{(1 + 1)^3} = \frac{2}{2^3} = \frac{1}{4} \Rightarrow \kappa = \frac{1}{2}, \quad \rho = \frac{1}{\kappa} = 2$$

## 9.3 Das begleitende Dreibein

### 9.3.1 Das lokale Koordinatensystem

Betrachte



**Definition:**

Tangentenvektor:  $\vec{T} := \vec{x}_s'$  (bekannt)

Normalenvektor:  $\vec{N} := \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds}$

Binormalenvektor:  $\vec{B} := \vec{T} \times \vec{N}$

Wir wissen:  $|\vec{x}_s'| = 1$

**Problem:**

Wie berechnet man auf einfache Weise  $\vec{N}$ ?

$$\leadsto \vec{N} := \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{dT}{ds} = \frac{1}{|\vec{x}_{ss}''|} \cdot \frac{d\vec{x}_s'}{ds} = \frac{1}{|\vec{x}_{ss}''|} \cdot \vec{x}_{ss}'' \Rightarrow |\vec{N}| = 1$$

$\leadsto \vec{N}$  ist der Einheitsvektor in Richtung Krümmungsmittelpunkt.

$\leadsto \vec{B}$  ist ebenfalls Einheitsvektor.

Berechnung von  $\vec{N}$  (vgl. Seite 310):

$$\begin{aligned} \vec{x}_{ss}'' &= \frac{1}{\langle \vec{v}_t', \vec{v}_t' \rangle} \cdot (\vec{v}_{tt}'' - \frac{\vec{v}_t' \cdot \langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle}{\langle \vec{v}_t', \vec{v}_t' \rangle}) \\ \Rightarrow \vec{N} &= \frac{1}{|\vec{x}_{ss}''|} \cdot \vec{x}_{ss}'' = \frac{1}{|\vec{x}_{ss}''|} \cdot \frac{1}{\langle \vec{v}_t', \vec{v}_t' \rangle} \cdot (\vec{v}_{tt}'' - \frac{\vec{v}_t' \cdot \langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle}{\langle \vec{v}_t', \vec{v}_t' \rangle}) \end{aligned}$$

Weiter:

$$\begin{aligned} \vec{x}_s' &= \frac{\vec{v}_t'}{s_t'} = \frac{\vec{v}_t'}{|\vec{v}_t'|} \Rightarrow \vec{v}_t' = \vec{x}_s' \cdot |\vec{v}_t'|, \quad (\vec{x}_s')_t = (\vec{x}_s')_s' \cdot s_t' = \vec{x}_{ss}'' \cdot s_t' = \vec{x}_{ss}'' \cdot |\vec{v}_t'| \\ \Rightarrow \vec{x}_{ss}'' &= \frac{1}{s_t'} \cdot (\vec{x}_s')_t = \frac{1}{s_t'} \cdot \left( \frac{\vec{v}_t'}{|\vec{v}_t'|} \right)_t' \end{aligned}$$

**Formel:** 
$$\vec{N} = \frac{1}{|\vec{x}_{ss}''|} \cdot \vec{x}_{ss}'' = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{1}{|\vec{v}_t'|} \cdot \left( \frac{\vec{v}_t'}{|\vec{v}_t'|} \right)_t'$$

**Bemerkung:**

Mit Hilfe von  $\vec{N}$  und  $\kappa$  lässt sich der Krümmungsmittelpunkt berechnen. (Mathematica-Übung.)

**Eigenschaft:**

Zu einem Punkt  $P$  auf der Kurve bildet  $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$  ein lokales Koordinatensystem.

**Definition:**

$\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$  heisst das **begleitende Dreiein**

### 9.3.2 Fernet–Serret’sche Gleichungen

Ohne Beweis seien hier die Fernet–Serret’sche Gleichungen gegeben:

**Formel:**

$$\begin{aligned} 1. \quad \frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa \cdot \vec{N} \\ 2. \quad \frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa \cdot \vec{T} + \tau \cdot \vec{B} \\ 3. \quad \frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau \cdot \vec{N} \end{aligned}$$

Analog zu  $\kappa$  definiert man die **Torsion**  $\tau$ :

**Definition:**

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{ds}{d\epsilon} \\ \epsilon &= \text{Änderung des Binormalenwinkels.} \\ \sigma &= \frac{1}{\tau} \text{ heisst } \mathbf{Torsionsradius}. \end{aligned}$$

**Bemerkung:**

Die Torsion ist ein Mass für die **Verdrehung der Kurve**.

Ähnlich wie für  $\kappa$  gilt für  $\tau$ :

**Formel:**

$$\tau = \rho^2 \cdot \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{3/2}} = \rho^2 \cdot \frac{[\vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'', \vec{v}_{ttt}''']}{((\vec{v}_t')^2)^{3/2}}$$

**9.3.3 Konstruktion eines Schlauches****Zusammenfassung:**

1. Kurve  $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \vec{x}(s), \quad s = \text{Kurvenlänge}$

2. Tangentenvektor:

$$\vec{T} = \vec{x}_s' = \frac{\vec{v}_t'(t)}{s_t'} = \frac{\vec{v}_t'(t)}{|\vec{v}_t'(t)|}$$

3. Krümmung:

$$\vec{x}_s'(s) \perp \vec{x}_{ss}''(s), \quad \kappa = |\vec{x}_{ss}''(s)| = \sqrt{\frac{1}{(|\vec{v}_t'|^2)^3} \cdot (\langle \vec{v}_{tt}'', \vec{v}_{tt}'' \rangle \cdot \langle \vec{v}_t', \vec{v}_t' \rangle - (\langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle)^2)}$$

4. Normalenvektor:

$$\vec{N} = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{|\vec{x}_{ss}''|} \cdot \vec{x}_{ss}'' = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{1}{|\vec{v}_t'|} \cdot \left( \frac{\vec{v}_t'}{|\vec{v}_t'|} \right)'_t$$

5. Binormalenvektor:

$$\vec{B} := \vec{T} \times \vec{N}$$

6. Begleitendes Dreiein  $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$

**Schlauchkonstruktion:**

1. Kurve mit gestrecktem Dreiein:

$$\vec{w}(t) = \vec{v}(t) + \lambda \vec{T} + \mu \vec{N} + \nu \vec{B}$$

2. Schlauch rund:

$$\lambda = 0, \quad \mu = r_0 \cos(\varphi), \quad \nu = r_0 \sin(\varphi)$$

3. Schlauch beliebig:

$$\lambda = 0, \quad \mu = a(t, \varphi) \cos(\varphi), \quad \nu = b(t, \varphi) \sin(\varphi)$$

```

Remove["Global`*"];

(* Schlauchdefinitionen *)
x[t_]:=4 Cos[t]; y[t_]:=4 Sin[t]; z[t_]:=t;
a[t_,f_]:= 1;    b[t_,f_]:= 1;

(* Rechnung *)
v[t_]:={x[t],y[t],z[t]};
kp[t_]:=Sqrt[(v'[t].v'[t])(v'[t].v'[t])-(v'[t].v''[t])^2]/((v'[t].(v'[t]))^3];
tT[t_]:= v'[t]/Sqrt[v'[t].v'[t]];
nN[t_]:= 1/kp[t] 1/Sqrt[v'[t].v'[t]] D[v'[t]/Sqrt[v'[t].v'[t]],t];
bB[t_]:= Cross[tT[t],nN[t]];
w[t_,f_]:= v[t]+a[t,f] Cos[f] nN[t]+b[t,f] Sin[f] bB[t];
(* Plot *)
ParametricPlot3D[Evaluate[w[t,f]],{t,0,2Pi},{f,0,2Pi}];

```

→ Output 1

Neue Schlauchdefinitionen:

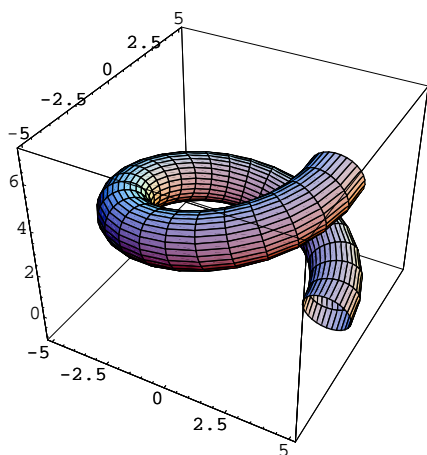
```

Remove["Global`*"];

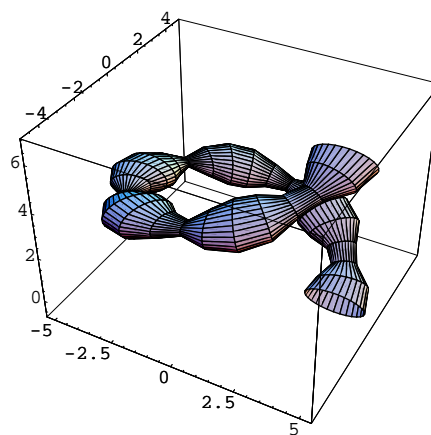
(* Schlauchdefinitionen *)
x[t_]:=4 Cos[t]; y[t_]:=4 Sin[t]; z[t_]:=t;
a[t_,f_]:= (Abs[Cos[3t]]+0.2);    b[t_,f_]:= (Abs[Cos[3t]]+0.2)/2;

```

→ Output 2



Output 1



Output 2

## 9.4 Evolute und Evolvente

### 9.4.1 Einführung

Gegeben sei der Graph  $C$  einer Kurve  $t \mapsto \vec{v}(t)$  im  $\mathbb{R}^2$ , bei der in jedem Punkt der Krümmungsmittelpunkt  $M$  existiert. Wir betrachten derart „vernünftige“ Kurven, bei denen die Krümmungsmittelpunkte wieder eine Kurve  $C_M$  bildet ( $t \mapsto \vec{w}(t)$ ).

**Definition:** Die Kurve  $C_M$  der Krümmungsmittelpunkte zu  $C$  heisst **Evolute** zu  $C$ . Umgekehrt heisst  $C$  **Evolvente** zu  $C_M$ .

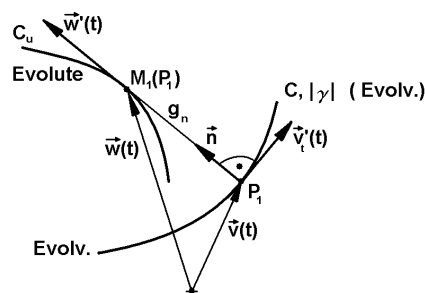
Sei  $\vec{n} \perp \vec{v}'(t)$   
( $\vec{n}$  normiert,  $\vec{v}'(t)$  Tangentenvektor. )

$$\leadsto \vec{w}(t) = \vec{v}(t) + \rho \cdot \vec{n} = \vec{v}(t) + \frac{1}{\kappa} \cdot \vec{n}$$

$$\vec{n} = D_{\pm\pi/2} \cdot \frac{\vec{v}'(t)}{|\vec{v}'(t)|} = D_{\pm\pi/2} \cdot \vec{e}_v,$$

$$\kappa_0 = \frac{|\vec{v}''(t) \times \vec{v}'(t)|}{|\vec{v}'(t)|^3} \quad (\mathbb{R}^3, z=0)$$

(vgl. Seite 307)



$$\leadsto \vec{w}(t) = \vec{v}(t) + \frac{|\vec{v}'(t)|^3}{|\vec{v}''(t) \times \vec{v}'(t)|} \cdot D_{\pm\pi/2} \cdot \frac{\vec{v}'(t)}{|\vec{v}'(t)|} = \vec{v}(t) + \frac{|\vec{v}'(t)|^2}{|\vec{v}''(t) \times \vec{v}'(t)|} \cdot D_{\pm\pi/2} \cdot \vec{v}'(t)$$

Die Rechnung (Übung!) zeigt, dass gilt:  $\vec{w}'(t) \perp \vec{v}'(t)$

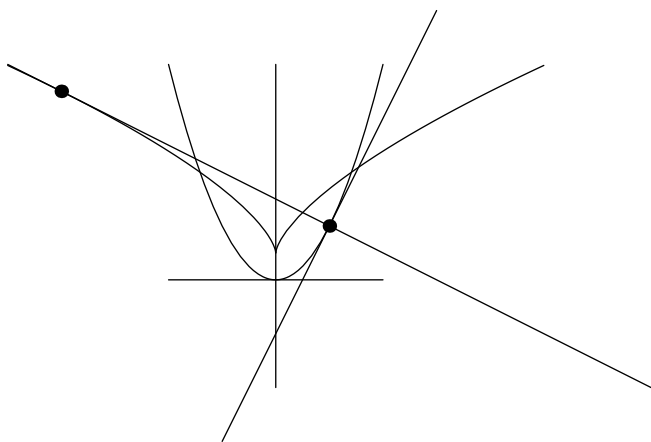
**Satz:**  $\vec{w}'(t) \parallel \vec{n}$  (Tangente an  $C_M$  )

Weiter kann man zeigen, dass für die Evolvente gilt:  $\frac{\Delta s}{\Delta t} \approx \frac{\Delta \rho}{\Delta t}, \quad \frac{ds}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \leadsto$

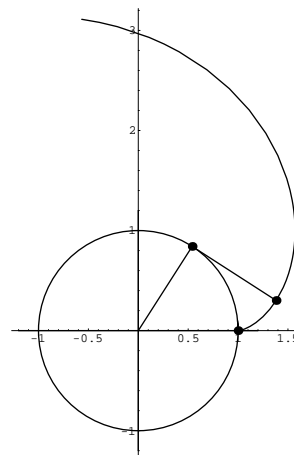
**Satz:** Die Bogenlänge  $\Delta s$  zwischen zwei Punkten der Evolute ist gleich der Differenz der Krümmungsradien  $\Delta \rho$  der entsprechenden Punkte der Evolvente.

**Konsequenz:** Die Evolvente ist die Abwicklungskurve der Evolute.

## 9.4.2 Beispiele

Evolute an  $f(x) = x^2$ .

$$w(x) = \frac{1}{4} \left( \frac{2|2^{2/3}x^{2/3} + 1|^{3/2}}{\sqrt{2^{2/3}|x|^{2/3} + 1}} + 2^{2/3}x^{2/3} \right)$$



Evolvente an den Einheitskreis.

$$\vec{z}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) + t \sin(t) \\ \sin(t) - t \cos(t) \end{pmatrix}$$

Mathematica-Code Evolute:

```
Remove["Global`*"]
a=1;
x[t_]:=t;
y[t_]:=t^2;
v[t_]:={x[t],y[t]};
tang[t_,t0_]:= Evaluate[(v[u] + D[v[u],u] t)/.u->t0];
n[t_,t0_]:= Evaluate[(v[u] + {-D[v[u],u][[2]],D[v[u],u][[1]]} t)/.u->t0];
p1=ParametricPlot[v[t],{t,-2,2},AspectRatio->Automatic,DisplayFunction->Identity];
p2[a_]:=ParametricPlot[tang[t,a],{t,-2,2},AspectRatio->Automatic,DisplayFunction->Identity];
p3[a_]:=ParametricPlot[n[t,a],{t,-3,3},AspectRatio->Automatic,DisplayFunction->Identity];
k[t_]:=Abs[D[x[t],{t,1}] D[y[t],{t,2}]-D[y[t],{t,1}] D[x[t],{t,2}]]/Abs[(D[x[t],{t,1}]^2
+D[y[t],{t,1}]^2)^(3/2)];
r[t_]:=Evaluate[1/k[t]];
m[t0_]:=v[t0]+(n[1,t0]-v[t0])*r[t0]/Norm[(n[1,t0]-v[t0])];
sh[a_]:=Show[Graphics[{PointSize[0.03],Point[m[a]],
Point[v[a]]
}],p1,p2[a],p3[a],DisplayFunction->$DisplayFunction,AspectRatio->Automatic];
c1=(s-m[s][[1]])/s;
xX == s-c1 s //InputForm;
solv=Solve[xX == s - (s*Abs[1 + 4*s^2]^(3/2))/Sqrt[1 + 4*Abs[s]^2],{s}][[1]];
f[xX_]:=Evaluate[m[s][[2]]/.solv];
p4=Plot[f[xX],{xX,0,5},AspectRatio->Automatic,DisplayFunction->Identity];
p5=Plot[f[-xX],{xX,-5,0},AspectRatio->Automatic,DisplayFunction->Identity];
Show[Graphics[{PointSize[0.03],Point[m[a]],
Point[v[a]],Line[{{-2,0},{2,0}}],Line[{{0,-2},{0,4}}]}],p1,p2[a],p3[a],p4,p5,
DisplayFunction->$DisplayFunction,AspectRatio->Automatic];
Print["f[x] = ",f[x]]
```

Mathematica-Code Evolvente:

Remove["Global`\*"]



```

aa = 1;
r0=1;
r[t_,a_]:= t r0{Cos[a],Sin[a]};
n[t_,a_]:= r[1,a]+ t r0 {Sin[a],-Cos[a]};
evoln[a_]:= r[1,a]+ a r0 {Sin[a],-Cos[a]};
p1[a_]:=ParametricPlot[r[t,a],{t,0,1},AspectRatio->Automatic,DisplayFunction->Identity];
p2[a_]:=ParametricPlot[n[t,a],{t,0,1},AspectRatio->Automatic,DisplayFunction->Identity];
p3=ParametricPlot[evoln[a],{a,0,3},AspectRatio->Automatic,DisplayFunction->Identity];
Show[p1[aa],p2[aa],p3,Graphics[{Circle[r0{0,0},1],Line[{r0{-1.2,0},r0{1.2,0}}],
Line[{r0{0,-1.2},r0{0,1.2,0}}],PointSize[0.02],Point[r[1,aa]],Point[n[aa,aa]],Point[r[1,0]]}],
AspectRatio->Automatic,DisplayFunction->$DisplayFunction];
D[evoln[u],u]

```

### 9.4.3 Evolute (Vertiefung)

Wir studieren die Evolute  $\beta$  zu einer gegebenen Kurve  $\alpha$  in  $\mathbb{R}^2$ :

**Definition:**

Die **Kurve**  $\vec{v}(t)$ ,  $t \in I = [a, b]$  heisst **regulär**  $\Leftrightarrow$

1.  $\vec{v}'(t)$  existiert in  $I$
2.  $|\vec{v}'(t)| > 0$

**Symbol:**  $\vec{v}(t) \in \mathcal{REG}$

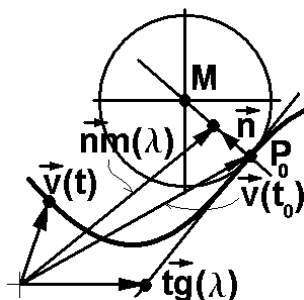
**Definition:**

$\vec{v}'(t)$  nennen wir **Geschwindigkeit** der Kurve.

Wir verwenden weiter:

$$J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow J^2 := J \cdot J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E, \quad \vec{v}(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$\leadsto$



$$\begin{aligned}
 \vec{OP}_0 &= \vec{v}(t_0) \\
 M &:= M(t_0) := \text{Krümmungsmittelpunkt} \\
 t\vec{g}(\lambda) &= \vec{v}(t_0) + \lambda \vec{v}'(t_0) \\
 \vec{n} &:= \vec{n}(t_0) = \begin{pmatrix} -y(t_0) \\ x(t_0) \end{pmatrix} = J \cdot \vec{v}(t_0) \\
 n\vec{m}(\lambda) &= \vec{v}(t_0) + \lambda \vec{n}(t_0) = \vec{v}(t_0) + \lambda \cdot (J \cdot \vec{v}(t_0))
 \end{aligned}$$

Über die Krümmung wissen wir:

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{x'(t) \cdot y''(t) - x''(t) \cdot y'(t)}{(\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2})^3} = \frac{\langle \vec{v}''(t), J \cdot \vec{v}'(t) \rangle}{|\vec{v}'(t)|^3}, \quad \rho_\alpha(t) = \frac{1}{\kappa_\alpha(t)}$$

**Definition:**

**Evolute zu  $\alpha$ :**

$$\begin{aligned}
 \beta(t) &:= \beta_\alpha(t) := \vec{OM}(t) := \vec{w}(t) := \vec{v}(t) + \rho_\alpha(t) \cdot \vec{e}_{n,\alpha} \\
 \text{mit } \vec{e}_{n,\alpha} &= \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n}, \quad \vec{w}(t) := \vec{w}(\vec{v}(t))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\leadsto \beta(t) &= \vec{w}(t) = \vec{v}(t) + \rho_\alpha(t) \cdot \vec{e}_{n,\alpha} = \vec{v}(t) + \rho_\alpha(t) \cdot \frac{J \cdot \vec{v}'(t)}{|J \cdot \vec{v}'(t)|} = \vec{v}(t) + \frac{|\vec{v}(t)|^3}{\langle \vec{v}''(t), J \cdot \vec{v}'(t) \rangle} \cdot \underbrace{\frac{J \cdot \vec{v}'(t)}{|J \cdot \vec{v}'(t)|}}_{=|\vec{v}'(t)|} \\
&= \vec{v}(t) + \frac{|\vec{v}(t)|^2}{\langle \vec{v}''(t), J \cdot \vec{v}'(t) \rangle} \cdot J \cdot \vec{v}'(t) := \vec{v}(t) + f(t) \cdot J \cdot \vec{v}'(t), \quad f(t) = \frac{|\vec{v}(t)|^2}{\langle \vec{v}''(t), J \cdot \vec{v}'(t) \rangle}, \quad t \in I
\end{aligned}$$

**Lemma:**

$$\begin{aligned}
\beta(t) &= \beta_\alpha(t) = \vec{w}(t) = \vec{v}(t) + f(t) \cdot J \cdot \vec{v}'(t), \\
f(t) &= \frac{|\vec{v}(t)|^2}{\langle \vec{v}''(t), J \cdot \vec{v}'(t) \rangle}, \quad t \in I = [a, b]
\end{aligned}$$

Sei  $h: t \mapsto s := h(t)$ , mit  $h: I \xrightarrow{\text{bij.}} \{h(t) \mid t \in I\}$ ,  $\vec{v}(t) = \alpha(t)$ ,  $\vec{w}(t) = \beta(t)$ .

$$\leadsto \beta(\alpha(t)) = (\beta \circ \alpha)(t) = (\beta \circ \alpha)(h^{-1}(s)) = (\beta \circ (\alpha \circ h^{-1}))(s), \quad \text{mit } t = h^{-1}(s).$$

Sei  $s$  = Kurvenlänge:  $s = h(t) = \int_{t_0}^t |\vec{v}'(t)| dt$ .

$|\vec{v}'(t)| > 0 \Rightarrow s = h(t)$  monoton wachsend

$$\Rightarrow \frac{ds}{dt} > 0 \Rightarrow \frac{dt}{ds} = \frac{d(h^{-1}(s))}{ds} > 0$$

$$\leadsto s = \int_{t_0}^t |\vec{v}'(t)| dt = \int_{h(t_0)}^{h(t)} |\vec{v}'(t)| \cdot \frac{dt}{ds} ds = \int_{h(t_0)}^{h(t)} |\vec{v}'(t)| \cdot \underbrace{(h^{-1}(s))'_s}_{=\frac{dt}{ds}, > 0} ds = \int_{h(t_0)}^{h(t)} \underbrace{|\vec{v}'_t(t)| \cdot \frac{dt}{ds}}_{=|\vec{v}'_s(h^{-1}(s))|} ds$$

$$\leadsto s = \int_{h(t_0)}^{h(t)} |\vec{v}'_s(h^{-1}(s))| ds \leadsto 1 = \frac{ds}{ds} = \frac{d}{ds} \int_{h(t_0)}^{h(t)} |\vec{v}'_s(h^{-1}(s))| ds = |\vec{v}'_s(h^{-1}(h(t)))| = |\vec{v}'_s(h^{-1}(s))|$$

$$\leadsto \hat{\alpha}(s) := \alpha(h^{-1}(s)), \quad |\hat{\alpha}(s)|'_s = |(\alpha(h^{-1}(s)))'_s| = 1$$

**Lemma:**

Bei einer regulären Kurve (z.B.  $\alpha$ ) kann die Weglänge  $s$  als Parameter benutzt werden. Dann ist für  $\alpha = \alpha(s)$  die absolute Geschwindigkeit = 1.

$$\leadsto \text{Sei } \alpha(s) = \vec{v}(s), \quad |\vec{v}'(s)| = 1$$

$$\Rightarrow \langle \vec{v}'(s), \vec{v}'(s) \rangle = |\vec{v}'(s)|^2 = 1 \Rightarrow (\langle \vec{v}'(s), \vec{v}'(s) \rangle)'_s = 2 \langle \vec{v}'(s), \vec{v}''(s) \rangle = (1)'_s = 0$$

$$\Rightarrow \vec{v}'(s) \perp \vec{v}''(s) \Rightarrow \vec{v}''(s) \parallel J \cdot \vec{v}'(s)$$

**Lemma:****Vor.:**

$$\vec{v}(s) \in \mathcal{RE}\mathcal{G}, \quad |\vec{v}'(s)| = 1$$

**Beh.:**

$$\vec{v}'(s) \perp \vec{v}''(s) \parallel J \cdot \vec{v}'(s)$$

$\leadsto$  Es gilt:  $\exists_\mu : \vec{v}''(s) = \mu(s) \cdot J \cdot \vec{v}'(s)$

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= \frac{\langle \vec{v}''(s), J \cdot \vec{v}'(s) \rangle}{|\vec{v}'(s)|^3} = \langle \vec{v}''(s), J \cdot \vec{v}'(s) \rangle = \langle \mu(s) \cdot J \cdot \vec{v}'(s), J \cdot \vec{v}'(s) \rangle = \mu(s) \cdot \langle J \cdot \vec{v}'(s), J \cdot \vec{v}'(s) \rangle \\ &= \mu(s) \cdot |J \cdot \vec{v}'(s)|^2 = \mu(s) \cdot |\vec{v}'(s)|^2 = \mu(s) \Rightarrow \mu(s) = \kappa(s) \end{aligned}$$

**Lemma:**

**Vor.:**

$$\vec{v}(s) \in \mathcal{REG}, \quad |\vec{v}'(s)| = 1$$

**Beh.:**

$$\vec{v}''(s) = \kappa(s) \cdot J \cdot \vec{v}'(s)$$

$$\text{Sei } |\vec{v}'(t)| = 1, \quad \beta(t) = \vec{w}(t) = \vec{v}(t) + \rho \cdot \frac{J \cdot \vec{v}'(t)}{|\vec{v}'(t)|} = \vec{v}(t) + \frac{1}{\kappa} \cdot J \cdot \vec{v}'(t)$$

$$\begin{aligned} \leadsto \quad \beta(t)' &= \vec{w}'(t) = \vec{v}'(t) + \left(\frac{1}{\kappa} \cdot J \cdot \vec{v}'(t)\right)' = \vec{v}'(t) + \left(\frac{1}{\kappa}\right)' \cdot J \cdot \vec{v}'(t) + \frac{1}{\kappa} \cdot J \cdot \vec{v}''(t) \\ &= \vec{v}'(t) + \frac{-\kappa'(t)}{(\kappa(t))^2} \cdot J \cdot \vec{v}'(t) + \underbrace{\frac{1}{\kappa} \cdot J \cdot (\kappa \cdot J \cdot \vec{v}'(t))}_{J^2 = -E} = \vec{v}'(t) - \frac{\kappa'(t)}{(\kappa(t))^2} \cdot J \cdot \vec{v}'(t) - \vec{v}'(t) = -\frac{\kappa'(t)}{(\kappa(t))^2} \cdot J \cdot \vec{v}'(t) \\ \Rightarrow \quad \beta(t)' &= \vec{w}'(t) \parallel \vec{n}_\alpha \end{aligned}$$

**Lemma:**

**Vor.:**

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &\in \mathcal{REG}, \quad |\vec{v}'(t)| = 1 \\ \beta(t) &= \vec{w}(t) = \vec{v}(t) + \rho \cdot \frac{J \cdot \vec{v}'(t)}{|\vec{v}'(t)|} \\ &(\text{Evolute}) \end{aligned}$$

**Beh.:**

$$\beta(t)' = \vec{w}'(t) = -\frac{\kappa'(t)}{(\kappa(t))^2} \cdot J \cdot \vec{v}'(t) \parallel \vec{n}_\alpha$$

**Konsequenz:** Die Tangente von  $\beta$  ist parallel zur Normalen von  $\alpha$ .

**Problem:** Sei  $\vec{w}_q(t) = \vec{v}(t) + q(t) \cdot J \cdot \vec{v}'(t)$ ,  $|\vec{v}'(t)| = 1$ .

Gibt es andere Kurven der Form  $\vec{w}_q(t) \neq \vec{w}(t)$ , deren Tangente parallel zur Normalen von  $\alpha$  ist?

$$\text{Sei } \vec{w}_q(t) \neq \vec{w}(t), \quad \vec{w}_q(t) = \vec{v}(t) + q(t) \cdot J \cdot \vec{v}'(t), \quad |\vec{v}'(t)| = 1$$

$$\begin{aligned} \leadsto \quad \vec{w}_q'(t) &= \vec{v}'(t) + (q(t) \cdot J \cdot \vec{v}'(t))' = \vec{v}'(t) + q(t)' \cdot J \cdot \vec{v}'(t) + q(t) \cdot \underbrace{J \cdot \vec{v}''(t)}_{= \kappa_\alpha \cdot J \cdot \vec{v}'(t)} \\ &= \vec{v}'(t) + q(t)' \cdot J \cdot \vec{v}'(t) + q(t) \cdot \underbrace{\kappa_\alpha \cdot J^2}_{=-E} \cdot \vec{v}'(t) = \vec{v}'(t) + q(t)' \cdot J \cdot \vec{v}'(t) - q(t) \cdot \kappa_\alpha \cdot \vec{v}'(t) \\ &= \vec{v}'(t) \cdot (1 - q(t) \cdot \kappa_\alpha) + q(t)' \cdot J \cdot \vec{v}'(t) \parallel \vec{n}(t) = J \cdot \vec{v}'(t) \Rightarrow \vec{v}'(t) \cdot (1 - q(t) \cdot \kappa_\alpha) = \vec{0} \\ \Rightarrow \quad q(t) &= \frac{1}{\kappa_\alpha} = \rho_\alpha \Rightarrow \vec{w}_q(t) = \vec{w}(t) \leadsto \text{Widerspruch!} \end{aligned}$$

**Satz:**

**Vor.:**

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \vec{v}(t) \in \mathcal{REG} \\ |\vec{v}'(t)| &= 1 \\ \beta(t) &= \vec{w}_q(t) = \vec{v}(t) + q(t) \cdot J \cdot \vec{v}'(t)\end{aligned}$$

**Beh.:**

1.  $\beta(t)$  Evolute  $\Rightarrow q(t) = \rho_\alpha(t)$
2.  $\beta(t)$  Evolute  $\Leftrightarrow \text{Tangente}_\beta = \text{Normale}_\alpha$

**9.4.4 Evolvente (Vertiefung)**

Sei  $\beta : I = [a, b] \mapsto \mathbb{R}^w$ , mit  $t \xrightarrow{\text{bij.}} \vec{w}(t)$ ,  $|\vec{w}'(t)| = 1$ ,  $c \in I$ ,

( $s$  = Kurvenlänge)

**Definition:**

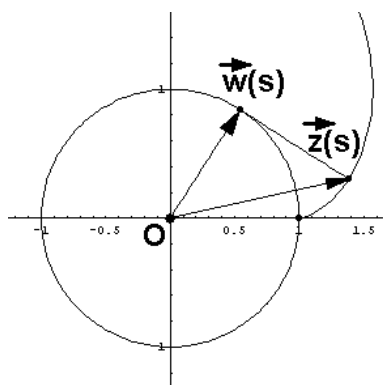
**Evolvente zu  $\beta$ :**

$$\begin{aligned}\gamma_{\beta,c}(s) &:= \gamma(s) := \vec{z}(s) = \vec{w}(s) + (c - s) \vec{w}'(s), \\ |\vec{w}'(t)| \neq 1 &\Rightarrow \gamma_{\beta,c}(t) := \gamma(t) := \vec{z}(t) = \vec{w}(t) + (s(c) - s(t)) \frac{\vec{w}'(t)}{|\vec{w}'(t)|}\end{aligned}$$

Es gilt:  $s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{w}'(t)| dt$

**Satz:**

Die Evolvente einer regulären ebenen Kurve  $\beta$  wird durch die Abwicklungskurve einer um  $\beta$  gewickelten gestreckten Fadens gegeben.

**Beweis:**

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir setzen:

$$|\vec{w}'(s)| = 1$$

$\leadsto$  Tangentenlänge:

$$\begin{aligned}|\vec{z}(s) - \vec{w}(s)| &= |(\vec{w}(s) + (c - s) \vec{w}'(s)) - \vec{w}(s)| \\ &= (c - s) \underbrace{|\vec{w}'(s)|}_{=1} = |c - s|\end{aligned}$$

**Lemma:****Vor.:**

$$\begin{aligned}\beta : I = [a, b] &\mapsto \mathbb{R}^w, s \xrightarrow{\text{bij.}} \vec{w}(s) \\ \gamma_{\beta,c}(s) &= \gamma(s): \text{Evolvente}\end{aligned}$$

**Beh.:**

$$\kappa_\gamma(s) = \frac{\text{sgn}(\kappa_\beta(s))}{|c - s|}$$

**Beweis:**

$$\vec{z}(s) = \vec{w}(s) + (c-s) \vec{w}'(s), \quad |\vec{w}'(s)| = 1$$

$$\leadsto \vec{z}'(s) = \vec{w}'(s) + (-1) \vec{w}'(s) + (c-s) \vec{w}''(s) = (c-s) \vec{w}''(s) = (c-s) \cdot \kappa_\beta(s) \cdot J \cdot \vec{w}'(s)$$

$$\Rightarrow J \cdot \vec{z}'(s) = (c-s) \cdot \kappa_\beta(s) \cdot \underbrace{J^2}_{=-E} \cdot \vec{w}'(s) = -(c-s) \cdot \kappa_\beta(s) \cdot \vec{w}'(s)$$

$$\leadsto \vec{z}''(s) = (-1) \cdot \kappa_\beta(s) \cdot J \cdot \vec{w}'(s) + (c-s) \cdot \kappa_\beta'(s) \cdot J \cdot \vec{w}'(s) + (c-s) \cdot \kappa_\beta(s) \cdot J \cdot \underbrace{\vec{w}''(s)}_{=\kappa_\beta(s) \cdot J \cdot \vec{w}'(s)}$$

$$= (-\kappa_\beta(s) \cdot J \cdot \vec{w}'(s) + (c-s) \cdot \kappa_\beta'(s)) \cdot J \cdot \vec{w}'(s) + (c-s) \cdot (\kappa_\beta(s))^2 \cdot \underbrace{J^2}_{=-E} \cdot \vec{w}'(s)$$

$$\Rightarrow \vec{z}''(s) = (-\kappa_\beta(s) \cdot J \cdot \vec{w}'(s) + (c-s) \cdot \kappa_\beta'(s)) \cdot J \cdot \vec{w}'(s) + (c-s) \cdot (\kappa_\beta(s))^2 \cdot (-\vec{w}'(s))$$

$$\leadsto \langle \vec{r}, J \cdot \vec{r} \rangle = 0 \forall \vec{r} \Rightarrow \langle \vec{z}''(s), J \cdot \vec{z}'(s) \rangle =$$

$$= \langle (-\kappa_\beta(s) \cdot J \cdot \vec{w}'(s) + (c-s) \cdot \kappa_\beta'(s)) \cdot J \cdot \vec{w}'(s) + (c-s) \cdot (\kappa_\beta(s))^2 \cdot (-\vec{w}'(s)), -(c-s) \cdot \kappa_\beta(s) \cdot \vec{w}'(s) \rangle$$

$$= 0 + 0 + (c-s) \cdot (-(c-s)) \cdot (\kappa_\beta(s))^3 \cdot \underbrace{\langle \vec{w}'(s), \vec{w}'(s) \rangle}_{=|\vec{w}'(s)|^2=1} = -(c-s)^2 \cdot (\kappa_\beta(s))^3$$

$$\leadsto \kappa_\gamma(s) = \frac{\langle \vec{z}''(s), J \cdot \vec{z}'(s) \rangle}{|\vec{z}'(s)|^3} = \frac{-(c-s)^2 \cdot (\kappa_\beta(s))^3}{|\vec{z}'(s)|^3} \Rightarrow \kappa_\gamma(s) \cdot |\vec{z}'(s)|^3 = -(c-s)^2 \cdot (\kappa_\beta(s))^3$$

$$J \cdot \vec{z}'(s) = -(c-s) \cdot \kappa_\beta(s) \cdot \vec{w}'(s) \Rightarrow |\vec{z}'(s)|^3 = |J \cdot \vec{z}'(s)|^3 = |-(c-s) \cdot \kappa_\beta(s) \cdot \vec{w}'(s)|^3$$

$$= |c-s|^3 \cdot |\kappa_\beta(s)|^3 \cdot \underbrace{|\vec{w}'(s)|^3}_{=1} \Rightarrow |\vec{z}'(s)|^3 = |c-s|^3 \cdot |\kappa_\beta(s)|^3$$

$$\leadsto \kappa_\gamma(s) \cdot |\vec{z}'(s)|^3 = \kappa_\gamma(s) \cdot |c-s|^3 \cdot |\kappa_\beta(s)|^3 = -(c-s)^2 \cdot (\kappa_\beta(s))^3$$

$$\Rightarrow \kappa_\gamma(s) = \frac{-(c-s)^2 \cdot (\kappa_\beta(s))^3}{|c-s|^3 \cdot |\kappa_\beta(s)|^3} = \frac{-\text{sgn}((\kappa_\beta(s))^3)}{|c-s|}$$

**Bemerkung:**

Wir haben zudem gezeigt:

$$\vec{z}'(s) = (c-s) \vec{w}''(s) = (c-s) \cdot \kappa_\beta(s) \cdot J \cdot \vec{w}'(s)$$

**Satz:****Vor.:**

$$\beta : I = [a, b] \longmapsto \mathbb{R}^w, s \xrightarrow{\text{bij.}} \vec{w}(s), |\vec{w}'(s)| = 1$$

$$\gamma_{\beta,c}(s) = \gamma(s): \text{ Evolvente}$$

**Beh.:** $\beta$  Evolute zu  $\gamma$ .**Beweis:**

$$\text{Evolute zu } \gamma: \quad \xi(s) := \vec{u}(s) = \vec{z}(s) + \frac{1}{\kappa_\gamma(s)} \cdot \frac{J \cdot \vec{z}'(s)}{|\vec{z}'(s)|}, \quad \kappa_\gamma(s) = \frac{\text{sgn}(\kappa_\beta(s))}{|c-s|}$$

$$\text{Es gilt: } \vec{z}(s) = \vec{w}(s) + (c-s) \vec{w}'(s), \quad \vec{z}'(s) = (c-s) \vec{w}''(s) = (c-s) \cdot \kappa_\beta(s) \cdot J \cdot \vec{w}'(s)$$

$$\begin{aligned}
\leadsto \vec{u}(s) &= \vec{z}(s) + \frac{|c-s|}{\operatorname{sgn}(\kappa_\beta(s))} \cdot \frac{J \cdot ((c-s) \cdot \kappa_\beta(s) \cdot J \cdot \vec{w}'(s))}{|(c-s) \cdot \kappa_\beta(s) \cdot J \cdot \vec{w}'(s)|} \\
&= \vec{w}(s) + (c-s) \vec{w}'(s) + \frac{|c-s|}{\operatorname{sgn}(\kappa_\beta(s))} \cdot \frac{(-1) \cdot ((c-s) \cdot \kappa_\beta(s) \cdot \underbrace{\vec{w}'(s)}_{=1})}{|(c-s)| \cdot |\kappa_\beta(s)| \cdot |\vec{w}'(s)|} \\
&= \vec{w}(s) + (c-s) \vec{w}'(s) - ((c-s) \cdot \vec{w}'(s)) = \vec{w}(s) \Rightarrow \xi(s) = \vec{u}(s) = \vec{w}(s) = \beta(s)
\end{aligned}$$


---

😊

## Kapitel • Chapitre 10

# Anhang 1: Komplexe Funktionen, konforme Abbildungen — Annexe 1: Fonctions complexes, applications conformes

### Bemerkung:

Dieser Teil ist dem Skript „Algebra“ des Autors entnommen. Dort werden die komplexen Zahlen eingeführt.

## 10.1 Differenzierbarkeit, Wege — Dérivés, chemins

### 10.1.1 Grundlagen, Stetigkeit — Fondements, continuité

Wir verwenden einige Begriffe, die schon von früher bekannt sein sollten, also nicht mehr neu definiert werden müssen.

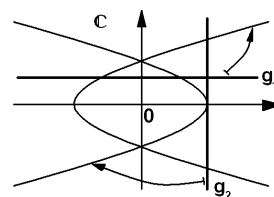
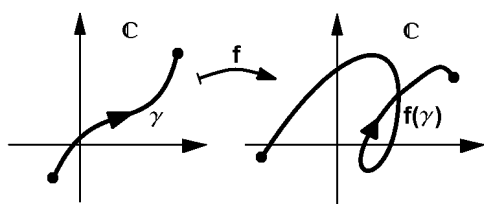
**Kurven, Wege :** Stetige Funktionen  $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ , z.B.  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f : t \mapsto f(t) = \cos(t) + i \sin(t) \in \mathbb{C}$

**Gebietsabbildungen :** Funktionen  $\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ , z.B.  $z \in \mathbb{C}$ ,  $f : z \mapsto f(z) = z^2 \in \mathbb{C}$

Allgemein:  $f : G = D_f \mapsto G^* = W_f$ ,  $f : z \mapsto f(z) = w$

oder  $f : z = x + iy \mapsto w = f(z) = u(z) + iv(z) = u(x + iy) + iv(x + iy)$

mit  $u(z) = \operatorname{Re}(f(z))$ ,  $v(z) = \operatorname{Im}(f(z))$



**Wichtig:** Stetige Funktionen.

**Definition:**  $f$  stetig in  $z_0 \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$   
 oder  $\lim_{z \rightarrow z_0} w = w_0$

„Epsilontisch“ :  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z \in U_\delta(z_0) :$

$$w = f(z) \in U_\epsilon(f(z_0)) = U_\epsilon(w_0)$$

Anschaulich: Nahe  $z$  haben nahe  $f(z) = w$  zur Folge.

**Folgerung:**  $f$  ( stetig in )  $z_0 \Leftrightarrow u(z)$  ( und )  $v(z)$   
 ( stetig in )  $z_0$

**Konsequenz:**  
 $u(x + i y)$  ( und )  $v(x + i y)$  ( stetig in )  $x$  ( und )  $y$  (notwendig).

Folgende Aussagen beweist man wie in  $\mathbb{R}$ , indem man den Abstand in  $\mathbb{R}$  durch den in  $\mathbb{C}$  ersetzt:

**Satz:** **Vor.:**

$$f_1(z), f_2(z) \text{ ( stetig in ) } z_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$$

**Beh.:**

1.  $\lambda_1 f_1(z) + \lambda_2 f_2(z)$  ( stetig in )  $z_0$
2.  $f_1(z) \cdot f_2(z)$  ( stetig in )  $z_0$
3.  $f_2(z_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$  ( stetig in )  $z_0$
4.  $f_1(z_0) = w_0, f_2(z)$  ( stetig in )  $w_0 \Leftrightarrow f_2(f_1(z))$  ( stetig in )  $z_0$

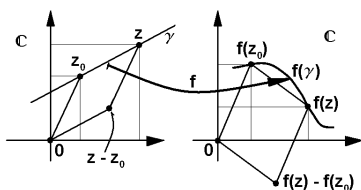
**Folgerung:** Polynome :  $p(z) = c_n z^n + \dots + c_1 z + c_0$   
 ( stetig in )  $\mathbb{C}$  ( $\forall z \in \mathbb{C}$ )

Stetigkeit in einem Gebiet:

**Definition:**  $f$  ( stetig in )  $G \Leftrightarrow f$  ( stetig in )  $\forall z \in G$



## 10.1.2 Differenzierbarkeit — Dérivabilité (différentiabilité)



Sei  $\dot{U}_\delta(z_0) = \{z \mid 0 < |z - z_0| < \delta\}$

Betrachte

$$D(z) := \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{in } \dot{U}_\delta(z_0)$$

( $D(z)$ : Differenzenquotient)

**Definition:**

1.  $f$  **komplex differenzierbar** (in  $z_0$ )  
 $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} D(z)$  existiert.
2.  $f$  **komplex differenzierbar mit der Ableitung  $a$**   
 $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} D(z) = a := f'(z_0)$
3.  $f$  **holomorph**<sup>2</sup> (regulär analytisch) in  $G$   
 $\Leftrightarrow f'(z)$  existiert  $\forall z \in G$

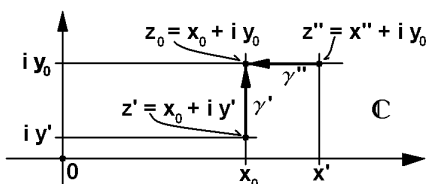
**Bsp.:**

$$1. f(z) = a \cdot z + b, \quad D(z) = \frac{az + b - (az_0 + b)}{z - z_0} = \frac{a(z - z_0)}{z - z_0} = a \Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} D(z) = a$$

$$2. f(z) = z^2, \quad D(z) = \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \frac{(z + z_0)(z - z_0)}{z - z_0} = (z + z_0) \Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} D(z) = 2z_0$$

$$3. f(z) = \operatorname{Re}(z) + 2i \operatorname{Im}(z) = x + 2iy, \quad D_f = \mathbb{C}, \quad d(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{(x - x_0) + 2i(y - y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)}$$

Betrachte zwei verschiedene Wege:



Sei  $z_0 = x_0 + iy_0$ ,  
 $z' = x_0 + iy'$ ,  $z'' = x' + iy_0$

$$\odot z' \rightarrow z_0 : \lim_{z' \rightarrow z_0} D(z') = \lim_{z' \rightarrow z_0} \frac{(x_0 - x_0) + 2i(y' - y_0)}{(x_0 - x_0) + i(y' - y_0)} = \lim_{z' \rightarrow z_0} \frac{2i(y' - y_0)}{i(y' - y_0)} = 2$$

$$\odot z'' \rightarrow z_0 : \lim_{z'' \rightarrow z_0} D(z'') = \lim_{z'' \rightarrow z_0} \frac{(x'' - x_0) + 2i(y_0 - y_0)}{(x'' - x_0) + i(y_0 - y_0)} = \lim_{z'' \rightarrow z_0} \frac{(x'' - x_0)}{(x'' - x_0)} = 1 \neq 2$$

$$\Rightarrow \lim_{z' \rightarrow z_0} D(z') \neq \lim_{z'' \rightarrow z_0} D(z''), \quad \lim_{z \rightarrow z_0} D(z) \text{ existiert nicht.}$$

$\leadsto$  Schon die einfache Funktion  $f(z) = \operatorname{Re}(z) + 2i \operatorname{Im}(z)$  ist nicht holomorph. Holomorph ist also etwas Spezielles.

## 10.1.3 Differenzierbarkeitsregeln — Règles pour dérivabilité

Wenn nichts bemerkt ist, gehen die Beweise wie im Reellen (indem man den Abstand in  $\mathbb{R}$  durch den in  $\mathbb{C}$  ersetzt).

<sup>2</sup>Griech. holo: ganz, völlig, unversehrt, morphe: Gestalt

**Satz:****Vor.:** $f(z), g(z)$  ( holomorph in )  $G$ ,  $a, b \in \mathbb{C}$ **Beh.:**1.  $f, g$  ( stetig in )  $G$ 

2. Linearität:

 $F(z) = a \cdot f(z) + b \cdot g(z)$  holomorph in  $G \wedge$  $F'(z) = a \cdot f'(z) + b \cdot g'(z)$ 

3. Produktenregel:

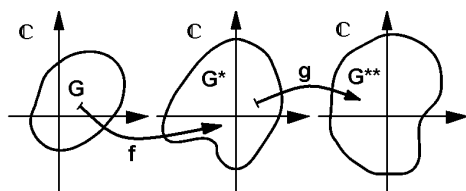
 $F(z) = f(z) \cdot g(z)$  holomorph in  $G \wedge$  $F'(z) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$ 

4. Quotientenregel:

Sei  $F(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ ,  $g(z_0) \neq 0 \Rightarrow F(z)$  holomorph in  $G \wedge F'(z) =$   

$$\frac{f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)}{(g(z))^2}$$
**Satz:****Vor.:** $f(z)$  holomorph in  $G$ ,  $f : G \mapsto f(G) \subseteq G^*$ ,  $f : z \mapsto f(z) = w$  $g$  holomorph in  $G^*$ ,  $g : G^* \mapsto g(G^*) = G^{**}$  $F = f \circ g$ ,  $f(z) = f(g(z))$ **Beh.:**

Kettenregel:

 $F(z)$  holomorph in  $G \wedge$  $F'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z) = f'(w) \cdot g'(z) = \frac{df}{dw} \cdot \frac{dg}{dz}$ oder  $F'(z) = \frac{d}{dz} f(z) \cdot \frac{d}{dz} g(z)$ **Folgerung:**

1. Polynomfunktionen sind holomorph in  $\mathbb{C}$ .
2. Rationale Funktionen sind holomorph in  $\mathbb{C}$ , wenn der Nenner  $\neq 0$  ist.

**Problem:** Beim Differenzieren im Reellen hat die Ableitung die Bedeutung einer Tangentensteigung. Aus Dimensionsgründen lässt sich diese Bedeutung bei der komplexen Differenzierbarkeit nicht gebrauchen. Was ist dann der Sinn komplexer Ableitungen? Eine Interpretation werden wir später bei den **konformen Abbildungen** gewinnen können.

### 10.1.4 Wege in $\mathbb{C}$ — Chemins dans $\mathbb{C}$

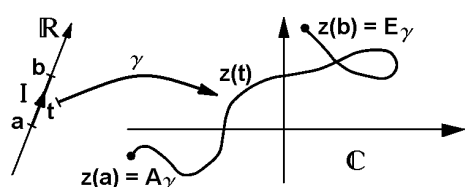
Betrachte  $I = [a, b] = \{t \in \mathbb{R} \mid a \leq t \leq b\}$  sowie  $x(t), y(t)$  diff'bar in  $I$ .

Sei  $z(t) = x(t) + iy(t)$ ,  $I \mapsto \mathbb{C}$

**Bsp.:**  $I = [0, 2\pi]$ ,  $z(t) = \sin(t) + i \cos(t)$  (Abbildung von  $I$  auf den Einheitskreis in  $\mathbb{C}$ .)

**Definition:**

Eine stetige Abbildung  
 $\gamma : I \mapsto \mathbb{C}$  mit  $t \mapsto z(t)$   
 heisst **Weg in  $\mathbb{C}$** ,  
 $|\gamma| = \{z(t) \mid t \in I\}$  heisst **Spur** v.  $\gamma$



$z(a) = A_\gamma :=$   
**Anfangspunkt**  
 $z(b) = E_\gamma :=$  **Endpunkt**

**Geschlossene Wege :**  $A_\gamma = E_\gamma$

**Inverser Weg**  $(-\gamma)$  zu  $\gamma$  :

Sei  $t = b + a - t'$ ,  $t' = b + a - t$ ,  $-\gamma : t' \mapsto w(t') (= z(t))$ ,  $(t' \in [a, b] \Leftrightarrow t \in [a, b])$ .  
 Läuft  $t$  von  $a$  nach  $b$ , so läuft  $t'$  von  $b$  nach  $a$ .

**Definition:**

**Differenzierbarer Weg :**  
 $\gamma : t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t)$  differenzierbar  
 $\Leftrightarrow x(t), y(t)$  diff'bar .  
 $z'(t) = x'(t) + iy'(t) \rightsquigarrow$  Ableitung. .

**Regeln:**

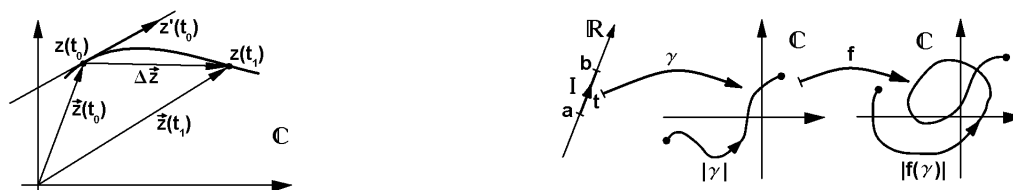
1.  $A_{-\gamma} = E_\gamma$ ,  $A_\gamma = E_{-\gamma}$
2.  $|\gamma| = |-\gamma|$
3.  $-(-\gamma) = \gamma$

(Wie man sofort sieht...)

### 10.1.5 Differenzierbare Wege in $\mathbb{C}$ — Chemins derivables dans $\mathbb{C}$

Wir wissen:  $\gamma$  diff'bar  $\Rightarrow$  Ableitung :  $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$

$\rightsquigarrow$  Tangentenvektor an den Weg  $\gamma : \vec{z}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$



**Definition:** **Bildweg** von  $\gamma$  :

$$f \circ \gamma := f(\gamma) : t \mapsto w(t) = f(z(t)), \quad t \in I$$

**Eigenschaften:**

1.  $f(\gamma)$  ist wieder Weg
2.  $|f(\gamma)| = f(|\gamma|)$
3.  $A_{f(\gamma)} := A_{f(|\gamma|)} = f(A_\gamma)$
4.  $E_{f(\gamma)} := E_{f(|\gamma|)} = f(E_\gamma)$

Weiter gilt die **Kettenregel** (Beweis analog im Reellen): :

**Satz:**

**Vor.:**

$f$  holomorph in  $G$ ,  
 $\gamma$  diff'barer Weg :  $t \mapsto z(t)$ ,  $|\gamma| \subset G$ ,  $t \in I$

**Beh.:**

Für den Bildweg gilt

1.  $w(t) = f(z(t))$  ist diff'bar in  $I$
2.  $\frac{d}{dt} w(t) = w'(t) = f'(z(t)) \cdot z'(t) = \frac{d}{dz} f(z) \cdot \frac{d}{dt} z(t)$   
 (Komplexe und reelle Ableitungen gemischt!)

**Bsp.:**  $I = [0, 1]$ ,  $\gamma : t \mapsto z(t) = t^2 + i(t+1)$ ,  $f : z \mapsto z^2$   
 $\leadsto f(\gamma) : t \mapsto (t^2 + i(t+1))^2 = w(t) \Rightarrow w'(t) = 2z \cdot z'(t) = 2(t^2 + i(t+1)) \cdot (2t + i)$

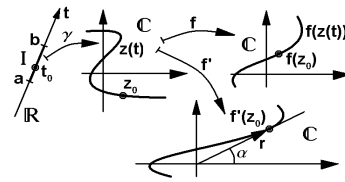
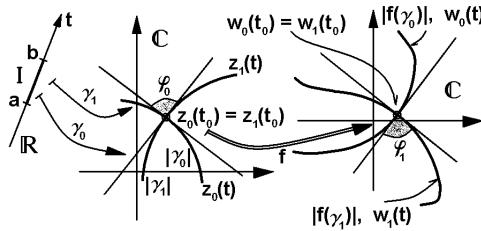
**Bemerkung:**

$$z'(t) = \frac{d}{dt} z(t) = \frac{d}{dt} x(t) + i \frac{d}{dt} y(t) = x'(t) + i y'(t)$$

$\leadsto$  Integral :

$$z(t) + C = \int z'(t) dt = \int x'(t) dt + i \int y'(t) dt = x(t) + i y(t) + C$$

## 10.2 Konforme Abbildungen — Applications conformes



Sei  $f'(z_0) \neq 0$ ,  
 $f'(z_0) = |f'(z_0)| \cdot (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)) =$   
 $= r \cdot e^{i \cdot \alpha}$   
 mit  $|f'(z_0)| = r$ ,  $\alpha = \text{Arg}(f'(z_0))$

Betrachte:  $\gamma$  diff'bar in  $G$ ,  $I \ni t \mapsto z(t) \in \mathbb{C}$ ,

Speziell:  $z(t_0) = z_0$ ,  $z'(t_0) \neq 0$ .

Nach Voraussetzung ist:  $z'(t_0) \neq 0$

$\leadsto$  Tangentenvektor existiert, die Kurve (Weg) ist **glatt**.

**Untersuchung** von  $f \circ \gamma := f(\gamma)$ :

$$w(t) = f(z(t)) \Leftrightarrow w'(t) = f'(z(t)) \cdot z'(t), \quad w'(t_0) = f'(z(t_0)) \cdot z'(t_0) = \underbrace{f'(z_0)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{z'(t_0)}_{\neq 0}.$$

Bei der Multiplikation in  $\mathbb{C}$  addieren sich die Argumente:

$$\text{Arg}(w'(t_0)) = \underbrace{\text{Arg}(f'(z_0)) + \text{Arg}(z'(t_0))}_{:= \alpha}, \quad \text{speziell:}$$

$$\leadsto \text{Für } \gamma_0, f(\gamma_0): \text{Arg}(w'_0(t_0)) = \alpha + \text{Arg}(z'_0(t_0)).$$

$$\leadsto \text{Für } \gamma_1, f(\gamma_1): \text{Arg}(w'_1(t_0)) = \alpha + \text{Arg}(z'_1(t_0)).$$

$$\Rightarrow \varphi_1 = \text{Arg}(w'_0(t_0)) - \text{Arg}(w'_1(t_0)) = (\alpha + \text{Arg}(z'_0(t_0))) - (\alpha + \text{Arg}(z'_1(t_0))) \\ = (\text{Arg}(z'_0(t_0))) - (\text{Arg}(z'_1(t_0))) = \varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 = \varphi_1$$

**Definition:**

Eine Abbildung heisst **winkeltreu** oder **konform**, wenn sich der Schnittwinkel zweier differenzierbarer Wege ( $\nexists$  zwischen Tangentenvektoren  $\neq \vec{0}$ ) bei der Abbildung nicht ändert.

**Satz:**

**Vor.:**

$f$  holomorph,  $f'(z) \neq 0$  in  $G$

**Beh.:**

$f$  konform in  $G$

## 10.3 Möbius-Transformationen — Transformations de Möbius

### 10.4 Definitionen — Définitions

**Definition:**  $f_M(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ ,  $c \neq 0$  heisst Möbiustransformation.

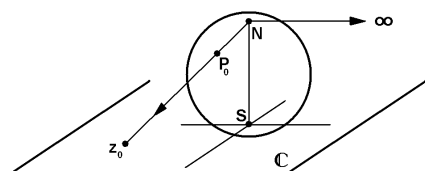
Solche Abbildungen spielen in der technischen Praxis eine Rolle.

Klassisch gilt:  $D_f = \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ .

Um eine geschlossene Theorie zu erhalten, ist es aber hier notwendig, den Definitionsbereich für den Fall  $-\frac{d}{c}$  auszuweiten:

Betrachtung: :

Sei  $f_M(z) = u(z) + i v(z)$ ,  $z \rightarrow -\frac{d}{c} \Rightarrow r = |f_M(z)| = (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \infty$ .



$\mathbb{C}$  erweitern:  $\bar{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ,  
 $\infty \hat{=}$  Nordpol der Gauss'schen Zahlenkugel.

**Definition:**  $f_M(-\frac{d}{c}) := \infty$ ,  $f_M(\infty) := \frac{a}{c}$

$(z \rightarrow \infty \Rightarrow f_M(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{z + \frac{b}{z}}{z + \frac{d}{z}} \rightarrow \frac{a}{c})$ . Man sieht unmittelbar:

**Satz:**  $f_M : \bar{\mathbb{C}} \xrightarrow{\text{bij.}} \bar{\mathbb{C}}$   
 $f_M$  konform für  $c \cdot b \neq d \cdot a$ ,  $z \neq \infty$ ,  $z \neq -\frac{d}{c}$

(Kontrolle der Bijektivität: Algebraische Umformung.  $f_M^{-1}(w) = z = -\frac{dw-b}{cw-a}$ ,  $f'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$  )

**Korollar:**  $f_M^{-1}$  ist auch Möbiustransformation, speziell:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{c} &\xrightarrow{f} \infty, & \infty &\xrightarrow{f} \frac{a}{c}, \\ +\frac{a}{c} &\xrightarrow{f^{-1}} \infty, & \infty &\xrightarrow{f^{-1}} -\frac{d}{c} \end{aligned}$$

#### 10.4.1 Eigenschaften — Qualités

Betrachte:  $f : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} \cdot (1 + \frac{\frac{b}{a} - \frac{d}{c}}{z + \frac{d}{c}})$

Sei : Trans. :> (Verschiebung), Inv. :> (Kehrwert bilden), Rot. :> (Drehstreckung).

Dann kann man  $f$  wie folgt zusammensetzen:

$$z \xrightarrow{\text{Trans.}} w = z + \frac{d}{c} \xrightarrow{\text{Inv.}} \frac{1}{w} = \frac{1}{z + \frac{d}{c}} \xrightarrow{\text{Rot.}} \frac{a}{c} \cdot \left(\frac{b}{a} - \frac{d}{c}\right) \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}} = \left(\frac{b}{c} - \frac{a \cdot d}{c^2}\right) \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}} \xrightarrow{\text{Trans.}}$$

$$\xrightarrow{\text{Trans.}} \frac{a}{c} + \frac{a}{c} \cdot \left(\frac{b}{a} - \frac{d}{c}\right) \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} \left(1 + \frac{\frac{b}{a} - \frac{d}{c}}{z + \frac{d}{c}}\right) = \frac{az + b}{cz + d}$$

$\leadsto$  Eine Möbiustransformation lässt sich aus Drehstreckungen, Verschiebungen und einer Inversion  $w \mapsto \frac{1}{w}$  zusammensetzen.

**Problem:** Drehstreckungen und Verschiebungen sind Ähnlichkeitsabbildungen, führen also Geraden in Geraden und Kreise in Kreise über. Was aber macht die Inversion?

Durch  $z(t)$  sei eine Gerade in  $\mathbb{C}$  gegeben.

Es gilt:  $z(t) = e^{i\varphi} z_0(t)$ :  $\leadsto$

Gerade durch Drehung entstanden aus  $z_0(t)$  ( $\{z_0(t)\}$  in spezieller Lage  $\perp x$ -Achse.)

$$z(t) = e^{i\varphi} z_0(t) \mapsto \frac{1}{z(t)} = e^{-i\varphi} \cdot \frac{1}{z_0(t)}, \quad z_0(t) = x_0 + it = x_0 \cdot \left(1 + i \frac{t}{x_0}\right) = x_0 \cdot (1 + i\lambda)$$

( $x_0 \neq 0$ : Streckung ).

$$(x_0 = 0 : z_0(t) = it \rightarrow \frac{1}{it} = -i \frac{1}{t}, \text{ d.h. Gerade} \rightarrow \text{Gerade.})$$

$$\leadsto \text{Reduziertes Problem: Gerade } 1 + i\lambda \mapsto \frac{1}{1 + i\lambda} = ?$$

Es gilt:  $1 \mapsto 1$  und  $\infty \mapsto 0$ .  $\frac{1}{2}$  bildet die Mitte zwischen 0 und 1.

Daher betrachten wir das Bild in einem Koordinatensystem, dessen Ursprung in  $(0, \frac{1}{2})$  verschoben ist. .

Somit müssen wir die folgende Abbildung studieren:  $1 + i\lambda \mapsto \frac{1}{1 + i\lambda} - \frac{1}{2}$ . Wir formen um:

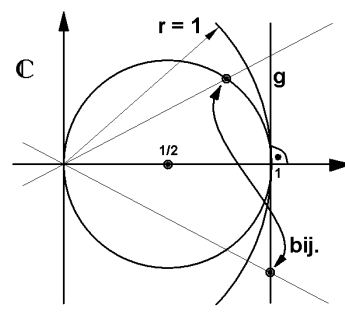
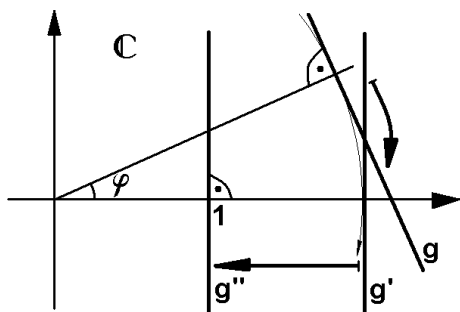
$$\left| \frac{1}{1 + i\lambda} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{1 - i\lambda}{1 + \lambda^2} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{1 - i\lambda - \frac{1}{2}(1 + \lambda^2)}{1 + \lambda^2} \right| = \left| \frac{-i\lambda + \frac{1}{2}1 - \frac{1}{2}\lambda^2}{1 + \lambda^2} \right| = \left| \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 2i\lambda - \lambda^2}{1 + \lambda^2} \right| =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left| \frac{1 - 2i\lambda - \lambda^2}{1 + \lambda^2} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{(1 - i\lambda)^2}{1 + \lambda^2} \right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \lambda^2}{1 + \lambda^2} = \frac{1}{2}$$

$$\leadsto \left| \frac{1}{1 + i\lambda} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} = \text{const.}$$

$\leadsto$  Das Bild der Gerade ist ein Kreis

Setzt man die Abbildungen wieder zusammen, so folgt, dass eine Gerade in jedem Fall entweder auf eine Gerade oder auf einen Kreis abgebildet wird.



Für die Umkehrabbildung  $h^{-1}$  von  $h : z \mapsto \frac{1}{z}$  gilt  $h = h^{-1}$ . Aus obiger Betrachtung folgt, dass unter  $h$  eine nicht zentrisch liegende Gerade in einen nicht zentrisch liegenden Kreis, umgekehrt also ein nicht zentrisch liegender Kreis in eine nicht zentrisch liegende Gerade abgebildet wird. Ein zentrisch liegender Kreis wird unter  $h$  bekanntlich auf einen ebensolchen Kreis abgebildet.  
Konsequenz :

**Satz:**

**Vor.:**

$f$  = Möbiustransformation ,  
 $K = \{ \text{Kreise, Geraden, } \}$

**Beh.:**

$f : K \mapsto K$  bijektiv

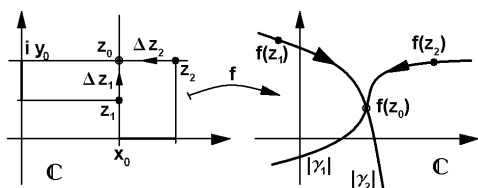
## 10.5 Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen — Equations différentielles de Cauchy-Riemann

### 10.5.1 Herleitung — Dédution

Sei  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  holomorph ,

$$\operatorname{Re}(f(z)) = u(z) = u(x, y), \quad \operatorname{Im}(f(z)) = v(z) = v(x, y)$$

$$\Rightarrow f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} D(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$



Betrachte :

$$z_0 = x_0 + i y_0$$

$$z_1 = z_0 + \Delta z_1 = x_0 + i (y_0 + \Delta y) = z_0 + i \Delta y$$

$$z_2 = z_0 + \Delta z_2 = (x_0 + \Delta x) + i y_0 = z_0 + \Delta x$$

Auf  $\gamma_1$ :

$$D(z) = \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{u(z_0 + \Delta x) - u(z_0)}{\Delta x} + i \frac{v(z_0 + \Delta x) - v(z_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + i \frac{\Delta v}{\Delta x} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Auf  $\gamma_2$ :

$$D(z) = \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{u(z_0 + i \Delta y) - u(z_0)}{i \Delta y} + i \frac{v(z_0 + i \Delta y) - v(z_0)}{i \Delta y} = \frac{\Delta u}{i \Delta y} + i \frac{\Delta v}{i \Delta y} \\ \rightarrow \frac{\partial u}{i \partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} D(z) = f'(z_0) \text{ darf nicht vom Weg } \gamma_k \text{ abhängen. Daher gilt: } f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{i \partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

Diese Betrachtung lässt sich auch umkehren.  $\leadsto$



**Satz:** **Cauchy–Riemann'sche Differentialgleichungen**  
 :  
 $f$  holomorph in  $G \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$   
 in  $G$

Mit diesen Differentialgleichungen lässt sich oft rasch entscheiden, ob eine gegebene Funktion holomorph ist.

### 10.5.2 Harmonische Funktionen — Fonctions harmoniques

Sei  $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ , (allgemeiner :  $\Delta := \sum_{k=0}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ )

**Definition:**  $f$  heisst harmonisch in  $G$  :  
 $\Leftrightarrow \Delta f = 0$  in  $G$

Aus der Analysis ist bekannt, dass für einigermaßen „anständige“ Funktionen  $f$  gilt:  $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}$ .  
 In der sogenannten „Funktionentheorie“ wird bewiesen, dass eine in einem Gebiet holomorphe Funktion immer in eine Potenzreihe entwickelt werden kann, also mindestens zweimal differenzierbar ist.  
 Wir definieren nun:

**Definition:**  $f$  **harmonisch** in  $G$   
 $\Leftrightarrow \Delta f = 0$  in  $G$

Daher sieht man durch einfache Rechnung mit Hilfe von Cauchy–Riemann:

**Satz:** **Vor.:**  
 $f$  holomorph in  $G$

**Beh.:**  
 $f$  harmonisch in  $G$

**Konsequenz:**  
 $f(z) = u(z) + i v(z)$  holomorph in  $G$   
 $\Leftrightarrow u(z), v(z)$  holomorph in  $G$

Damit haben wir das Rüstzeug für die Diskussion wichtiger **transzendenter** komplexer Funktionen: Exponentialfunktion, Logarithmusfunktion, trigonometrische Funktionen, Arcusfunktionen u.s.w..

## 10.6 Komplexe Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion — Fonctions exponentielle et logarithme complexes

Im Reellen kann die Eulersche Exponentialfunktion durch folgende drei Eigenschaften definiert werden:

1.  $f$  diff'bar in  $\mathbb{R}$
2.  $\forall_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f'(x)$
3.  $f(0) = 1$

In der Theorie der Differentialgleichungen wird gezeigt, dass eine Lösung  $f$  existiert und auch eindeutig bestimmt ist als Lösung des gegebenen Anfangswertproblems.

Diese Problemstellung lässt sich samt Lösungskonzept ins Komplexe übertragen. Dabei spielt Cauchy–Riemann eine wichtige Rolle. Vdist

Sei  $z = x + iy$ . Bekannt:  $e^x$ ,  $e^{iy} := \cos(y) + i \sin(y)$ .

**Bemerkung:**

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad i^6 = -1, \quad i^7 = -i, \quad i^8 = 1, \quad \dots$$

Benutze die Potenzreihenentwicklung  $\leadsto$

$$\cos(\varphi) = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \frac{\varphi^8}{8!} - \frac{\varphi^{10}}{10!} + \dots = 1 + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^6}{6!} + \frac{(i\varphi)^8}{8!} + \frac{(i\varphi)^{10}}{10!} + \dots$$

$$i \sin(\varphi) = i\varphi - \frac{i\varphi^3}{3!} + \frac{i\varphi^5}{5!} - \frac{i\varphi^7}{7!} + \frac{i\varphi^9}{9!} - \dots = i\varphi + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} + \frac{(i\varphi)^7}{7!} + \frac{(i\varphi)^9}{9!} + \dots$$

$$\cos(\varphi) + i \sin(\varphi) = 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} + \frac{(i\varphi)^6}{6!} + \frac{(i\varphi)^7}{7!} + \frac{(i\varphi)^8}{8!} + \frac{(i\varphi)^9}{9!} + \dots = e^{i\varphi}$$

$$\Rightarrow \cos(\varphi) + i \sin(\varphi) = e^{i\varphi}$$

Wir definieren damit:

**Definition:**

$$f(z) := e^z = e^{x+iy} := e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos(y) + i \sin(y))$$

**(Exponentialfunktion)**

Die rechte Seite ist bekannt

$$\leadsto u(x, y) = e^x \cdot \cos(y), \quad v(x, y) = e^x \cdot \sin(y).$$

Für  $u$  und  $v$  gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cdot \cos(y) \quad \wedge \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cdot \sin(y).$$

Damit ist  $f$  holomorph.

Daher ist der Differentialquotient wegunabhängig.

Wir können daher rechnen:

$$\begin{aligned}
 f'(x_0) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta x) - f(z_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{z_0 + \Delta x} - e^{z_0}}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x + iy_0} - e^{x_0 + iy_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} \cdot e^{iy_0} - e^{x_0} \cdot e^{iy_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} \cdot e^{iy_0} = \\
 &= e^{x_0} \cdot e^{iy_0} = e^{x_0 + iy_0} = e^{z_0}
 \end{aligned}$$

$\leadsto f(z) = e^z$  erfüllt die Differentialgleichung  
 $f(z) = f'(z)$  in  $\mathbb{C}$ .

Zudem gilt:  $f(0) = e^{0+i0} = e^0 = 1$ .

Weiter folgt aus der Theorie der Differentialgleichung die Eindeutigkeit der Lösung.

**Satz:**  $f(z) = e^z$  ist die einzige Funktion, die folgende Bedingungen erfüllt

1.  $f$  diff'bar in  $\mathbb{R}$
2.  $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f'(x)$
3.  $f(0) = 1$

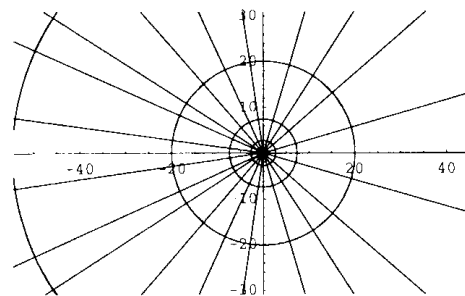
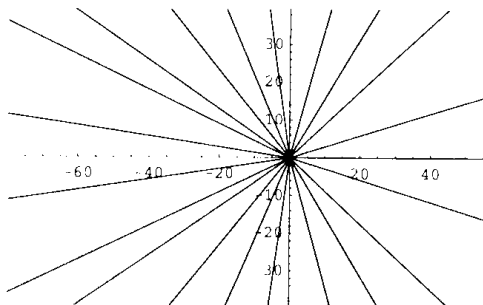
Die folgenden Regeln lassen sich einfach nachprüfen mit Hilfe von:  $e^z = e^x \cdot (\cos(y) + i \sin(y))$ .

Dabei benutzen wir folgende Bezeichnung:

$S_n := \{z = x + i(y + 2n\pi) \mid y \in (-\pi, \pi]\}$  heisst **Periodenstreifen**,  $\dot{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

**Regeln:**

1.  $|e^z| = e^x = e^{\operatorname{Re}(z)}$
2.  $\operatorname{Arg}(e^z) = y = \operatorname{Im}(z)$
3.  $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$
4.  $e^z = e^{z + i2n\pi} = e^z = e^z \cdot e^{i2n\pi}$
5.  $S_n \xrightarrow{\text{bji.}} \dot{\mathbb{C}}$   
 $\{\text{Horizontale Geraden}\} \mapsto \{\text{zentrische Strahlen}\}$   
 $\{\text{Vertikale Geraden}\} \mapsto \{\text{zentrische Kreise}\}$



Wegen der Bijektivität von  $f(z) = e^z = w$  auf  $(S_n \times \dot{\mathbb{C}})$  existiert jeweils die Umkehrfunktion  $f_n^{-1}(w) = z$ , allerdings abhängig von  $n$  (Standard in der Literatur:  $n = 0$ ).

**Bemerkung:**

Mit Hilfe des Begriffs der **Riemannschen Fläche** gelingt es, die Umkehrfunktion eindeutig zu machen. Dazu Unterscheiden wir verschiedene komplexe Bildebenen  $\dot{\mathbb{C}}_n$  mit  $f : S_n \mapsto \dot{\mathbb{C}}_n$ . Da der Rand der Streifen  $S_n$  auf  $\mathbb{R}^{(-)}$  abgebildet wird, denkt man sich alle diese  $\dot{\mathbb{C}}_n$  längs der negativen reellen Achse aufgeschnitten und dort mit den beiden Nachbarn  $\dot{\mathbb{C}}_{n-1}$  und  $\dot{\mathbb{C}}_{n+1}$  verklebt. Das entstehende Gebilde  $R$  (eine Riemannsche Fläche) gleicht dann einer Wendeltreppe (nahe beim Ursprung hinkt der Vergleich aber). Für  $(\mathbb{C} \times R)$  ist dann  $f$  bijektiv.

**Definition:** Die eben besprochene Umkehrfunktion  $f^{-1} : \dot{\mathbb{C}}_n \mapsto S_n$  heisst  
**natürliche Logarithmusfunktion**  $f^{-1}(w) = \ln(w) \mapsto z$

Üblicherweise werden wir  $\ln$  auf dem Standardstreifen  $S_0$  betrachten.

Es ist:  $f : z = x + iy \mapsto f(z) = e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) = u(x, y) + iv(x, y) = w$ ,  
 $r = |w| = e^x$ ,  $\text{Arg}(w) = y$ .  
 $\leadsto f^{-1} : w = u + iv \mapsto f^{-1}(w) = \ln(w) = z = x + iy$   
mit  $x = \ln|w|$ ,  $y = \text{Arg}(w) = \arctan(\frac{v}{u}) \leadsto$

**Satz:** **Vor.:**

$$f(z) = e^z = w, \quad z \in S_0$$

**Beh.:**

$$f_0^{-1}(w) = \ln(w) = \ln|w| + i\text{Arg}(w) = \ln|e^z| + i\text{Arg}(e^z) = z$$

**Bsp.:** Sei  $x \in \mathbb{R}^+$ .  $f_0^{-1}(-x) = \ln_0(-x) = \ln(x) + i\text{Arg}(-x) = \ln(x) + i\pi$ ,  
Speziell:  $f_0^{-1}(-1) = \ln_0(-1) = \ln(1) + i\text{Arg}(-1) = 0 + i\pi = i\pi$ .

## 10.7 Trigonometrische Funktionen, Arkusfunktionen — Fonctions trigonométriques, fonctions circulaires inverses

Bekannt sind die Eulerschen Identitäten:

$$e^{\pm i\varphi} = \cos(\varphi) \pm i\sin(\varphi)$$

Damit lässt sich Sinus und Cosinus rein analytisch definieren, also losgelöst von Geometrie.

$$\leadsto \sin(x) := \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos(x) := \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Diese Formeln lassen sich jetzt für komplexe  $z$  verallgemeinern.  $\leadsto$  Sei  $z \in \mathbb{C}$

**Definition:**

$$\begin{aligned}\sin(z) &:= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, & \cos(z) &:= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \\ \tan(z) &= \frac{\sin(z)}{\cos(z)}, & \cot(z) &= \frac{1}{\tan(z)}, \\ \arcsin(w) &= z \quad \text{für } w = \sin(z) \text{ u.s.w.}\end{aligned}$$

**Bemerkung:**

Die im Reellen geltenden Regeln bleiben erhalten.

1. Differentiationsregeln  
Z.B.  $(\sin(z))'_z = \cos(z)$
2. Additionstheoreme
3. Regeln für Nullstellen
4. ... u.s.w

Ein Beispiel :

**Problem:** Was ist das Bild des kartesischen Koordinatengitters unter der Cosinusfunktion?

$$\begin{aligned}\cos(z) &= \cos(x + iy) = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} = \frac{e^{ix} \cdot e^{-y} + e^{-ix} \cdot e^y}{2} \\ &= \frac{(\cos(x) + i \sin(x)) \cdot e^{-y} + (\cos(-x) + i \sin(-x)) \cdot e^y}{2} \\ &= \frac{(\cos(x) + i \sin(x)) \cdot e^{-y} + (\cos(x) - i \sin(x)) \cdot e^y}{2} = \frac{\cos(x) \cdot (e^y + e^{-y}) - i(\sin(x) \cdot (e^y - e^{-y}))}{2} \\ &= \cos(x) \cdot \cosh(y) - i \sin(x) \sinh(y). \quad \rightsquigarrow \quad \cos(z) \hat{=} \begin{pmatrix} \cos(x) \cdot \cosh(y) \\ \sin(x) \sinh(y) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

In der Regel sind somit die Bilder der horizontalen Geraden Ellipsen, die Bilder der vertikalen Geraden Hyperbeln.

## 10.8 Anwendungen — Applications

### 10.8.1 Idee — Idée

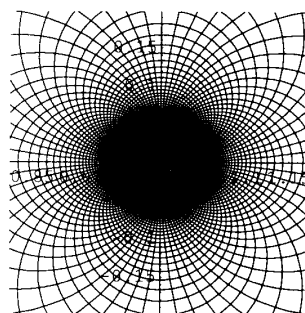
Oft gelingt es Probleme zu lösen, indem man die gegebene geometrisch komplizierte Situation konform in eine einfachere Situation abbildet. Wenn sich bei einer solchen bijektiven Abbildung die Problembedingungen einfach auf die neue Situation übertragen, kann man das Problem in der neuen Situation lösen und dann die Lösung zurückabbilden.

Z.B. soll der Potentialverlauf zwischen einem Fahrleitungsdraht und einer Brücke studiert werden. Nimmt man im Querschnitt die Brücke als Gerade und den Draht als Kreis an, so kann man eine konforme Abbildung konstruieren, die diese Situation auf zwei konzentrische Kreise abbildet. Dort ist der Potentialverlauf offensichtlich (Zentralfeld).

### 10.8.2 Smith-Diagramm — Diagramme de Smith

In der Elektrotechnik spielt die Möbiustransformation  $\mathbb{C} \ni z \mapsto w = f(z) = \frac{z-1}{z+1} \in \mathbb{C}$  eine wichtige Rolle. Das Bild des rechtwinkligen Koordinatennetzes der  $z$ -Ebene in der  $w$  Ebene heisst **Smith-Diagramm** (Smith-Chart).

$f$  erzeugt vom rechtwinkligen Koordinatennetzes der  $z$ -Ebene in der  $w$  Ebene folgendes Bild (vgl. Fig.):



Das Bild der vertikalen Geraden der  $z$ -Ebene mit den Realanteilen  $x = 0$  ist der Einheitskreis. Die Bilder aller andern Vertikalen sind Kreise, die im Einheitskreis drin liegen, diesen in  $w = 1$  berühren und mit wachsendem  $\operatorname{Re}(z)$  kleiner werden. Die horizontalen Halbgeraden gehen in Kreislinien über, die die erwähnten Kreise senkrecht schneiden.

$$\text{Es gilt: } f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\frac{1}{z} - 1}{\frac{1}{z} + 1} = \frac{1 - z}{1 + z} = -\frac{z - 1}{1 + z} = -f(z)$$

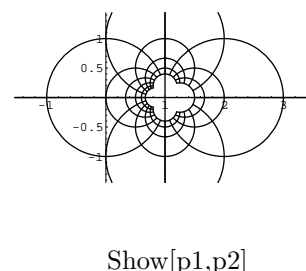
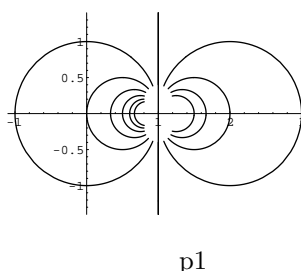
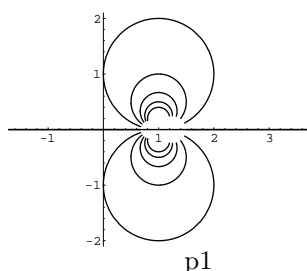
**Konsequenz:** Im Smidt-Diagramm kann man die Inversen einer komplexen Zahl  $z$  graphisch einfach durch Spiegelung an den Ursprung bestimmen. Es gilt:  $f\left(\frac{1}{z}\right) = -f(z)$ .  $f\left(\frac{1}{z}\right) = -f(z)$ .

### Konstruktion — Construction

Mit *Mathematica*:

```
f[z_]:= (z-1)/(z+1);
z1[t_,a_]:= t + a I;
z2[t_,b_]:= b + t I;
u[z_]:= {Re[f[z]], Im[f[z]]};
```

```
p1=ParametricPlot[Evaluate[Table[u[z1[t,a]],{a,-5,5}]],{t,-5,5}, AspectRatio->Automatic];
p2=ParametricPlot[Evaluate[Table[u[z2[t,b]],{b,-5,5}]],{t,-5,5}, AspectRatio->Automatic];
Show[p1,p2];
```



### 10.8.3 Joukowski-Profil — Profil de Joukowski

Wir studieren ein konkretes Beispiel: Nous étudions un exemple concret:

Gegeben sei in der komplexen Ebene  $\mathbb{C}$  der Kreis:  $t \mapsto z(t) = \sqrt{0.97} \cdot e^{i \cdot t} + (-0.1 + 0.4i)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

Betrachte dazu noch die komplexe Abbildung:

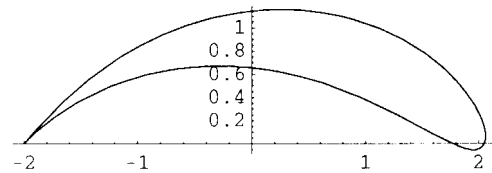
$$\varphi : z \mapsto \varphi(z) = z + \frac{1}{z}.$$

Hiermit wird folgendes Bild der Kurve  $z(t)$  definiert:

$$\varphi(z(t)) := w(t) = z(t) + \frac{1}{z(t)}$$

Die Kurve  $w(t)$  in  $\mathbb{C}$  zeigt ein stromlinienförmiges Profil.

Dieses Kurvenprofil spielt in der Aerodynamik (z.B. beim Tragflügel) oder bei Turbinenschaufeln eine Rolle. Es heisst *Joukowski-Profil*.



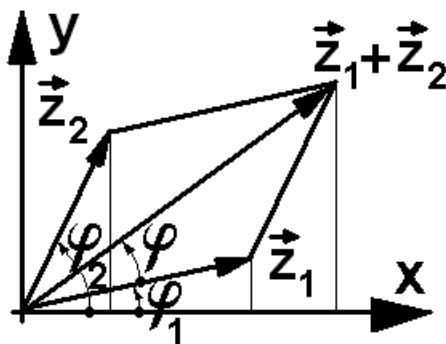
#### 10.8.4 Zeigerdiagramme — diagrammes-vecteurs

In der Elektrotechnik ist es im Zusammenhang mit Wechselstrom üblich, den Strom  $I$  und die Spannung  $U$  mit Hilfe von **Zeigern** (Vektoren) in Form von komplexen Zahlen zu schreiben. Auf diese Weise lassen sich verschiedene Ströme und Spannungen einfach addieren.

**Bsp.:**  $I = I_0 \cos(\omega \cdot t + \varphi_I), \quad U = U_0 \cos(\omega \cdot t + \varphi_U)$

$\leadsto$  Allgemein:

$$z_{Re} = z_0 \cos(\omega \cdot t + \varphi_0), \quad z_{Im} = z_0 \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) \leadsto \vec{z} = \begin{pmatrix} z_0 \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) \\ z_0 \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) \end{pmatrix} \hat{=} z_0 \cdot e^{I \omega t + \varphi_0}$$



Zeiger / Vecteurs ou rayons

Sei

$$\vec{z}_1 \hat{=} A_1 \cdot e^{I \omega t + \varphi_1}$$

$$\vec{z}_2 \hat{=} A_2 \cdot e^{I \omega t + \varphi_2}$$

$$\vec{z} \hat{=} A \cdot e^{I \omega t + \varphi}$$

$\leadsto$  Es gilt:

$$A = |\vec{z}_1 + \vec{z}_2|,$$

$$\varphi = \varphi_1 + \arccos\left(\frac{\langle \vec{z}_1, \vec{z}_1 + \vec{z}_2 \rangle}{|\vec{z}_1| \cdot |\vec{z}_1 + \vec{z}_2|}\right)$$

$$\leadsto A_1 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_1) + A_2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_2) =$$

$$= |A_1 \begin{pmatrix} \cos(\omega \cdot t + \varphi_1) \\ \sin(\omega \cdot t + \varphi_1) \end{pmatrix} + A_2 \begin{pmatrix} \cos(\omega \cdot t + \varphi_2) \\ \sin(\omega \cdot t + \varphi_2) \end{pmatrix}| \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_1 + \arccos(\frac{\langle \vec{z}_1, \vec{z}_1 + \vec{z}_2 \rangle}{|\vec{z}_1| \cdot |\vec{z}_1 + \vec{z}_2|}))$$

## 10.9 Darstellung komplexer Funktionen — Représentation de fonctions complexes

### 10.9.1 Beispiel einer Kurve — Exemple d'une courbe

Geg.:

$$z(t) := \frac{1}{1+it}, \quad g(t) = 1+it, \quad z(t) := \frac{1}{g(t)}$$

Code: (*Mathematica*)

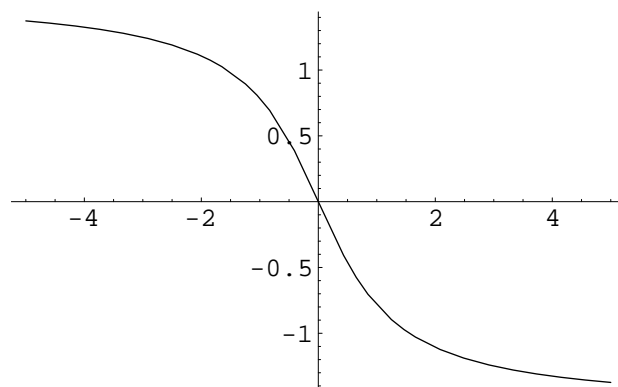
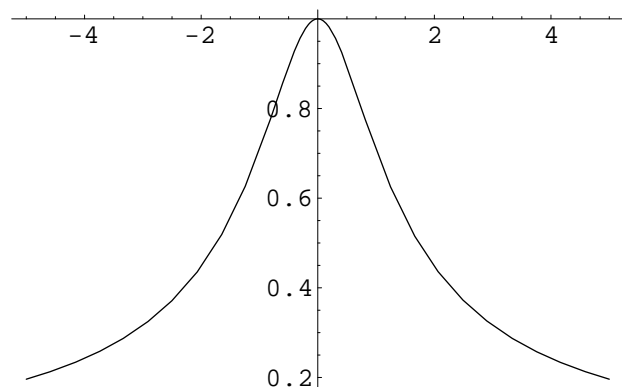
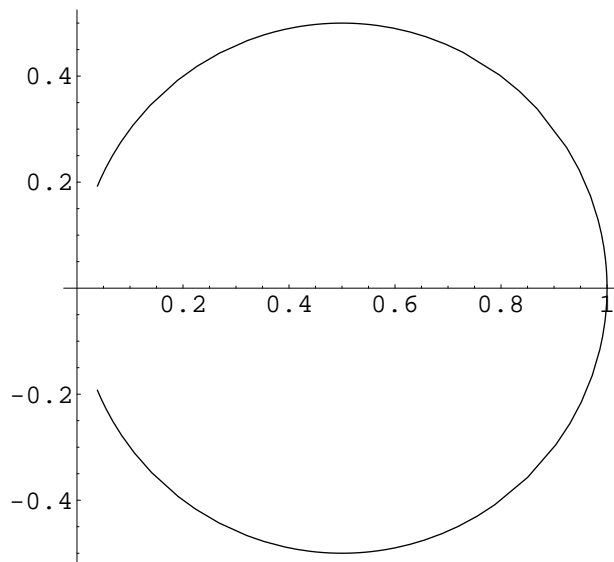
```
z[t_] := 1/(1 + I t);
ParametricPlot[{Re[z[t]], Im[z[t]]}, {t, -5, 5}, AspectRatio -> Automatic];
amplitude[t_] := Norm[z[t]];
Plot[amplitude[t], {t, -5, 5}];
Plot[Arg[z[t]], {t, -5, 5}];
```

Output: (*Mathematica*)

Rechts: Die Funktionskurve im Komplexen.

Unten links: Der Betrag des Funktionswerts.

Unten rechts: Das Argument des Funktionswerts.





## 10.9.2 Beispiel einer rationalen Funktion — Exemple: Fonction rationnelle

Geg.:

$$f(z) := \frac{2z^2 - z}{z^3 - z^2 + 1}$$

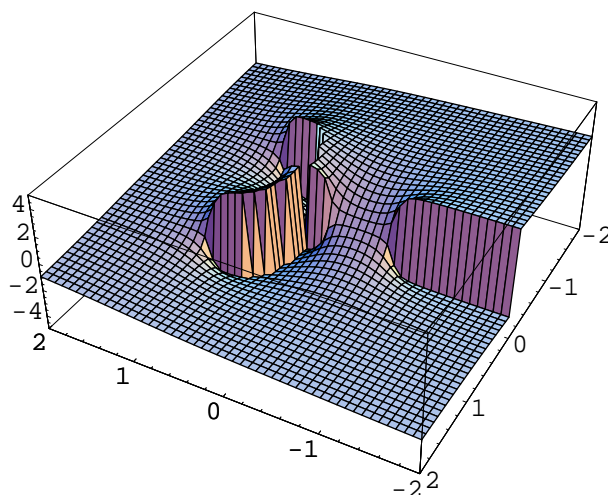
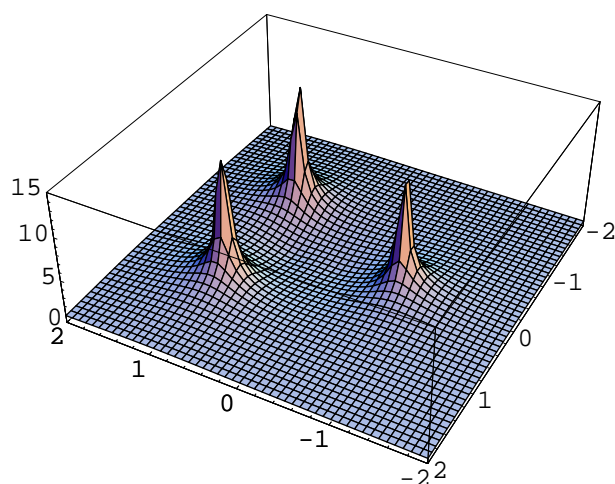
Code: (Mathematica)

```
f[z_] := (2 z^2 - z)/(z^3 - z^2 + 1)
z[s_, t_] := s + I t;
u[s_, t_] := Norm[f[z[s, t]]];
w[s_, t_] := Arg[f[z[s, t]]];
Plot3D[u[s, t], {s, -2, 2}, {t, -2, 2},
  PlotPoints -> 50, PlotRange -> {0, 15}, ViewPoint -> {-1.3, +2.4, 2.}];
Plot3D[w[s, t], {s, -2, 2}, {t, -2, 2},
  PlotPoints -> 50, PlotRange -> {-5, 5}, ViewPoint -> {-1.3, +2.4, 2.}];
Plot3D[Re[f[z[s, t]]], {s, -2, 2}, {t, -2, 2},
  PlotPoints -> 50, PlotRange -> {-5, 5}, ViewPoint -> {-1.3, +2.4, 2.}];
Plot3D[Im[f[z[s, t]]], {s, -2, 2}, {t, -2, 2},
  PlotPoints -> 50, PlotRange -> {-5, 5}, ViewPoint -> {-1.3, +2.4, 2.}];
```

Output: (Mathematica)

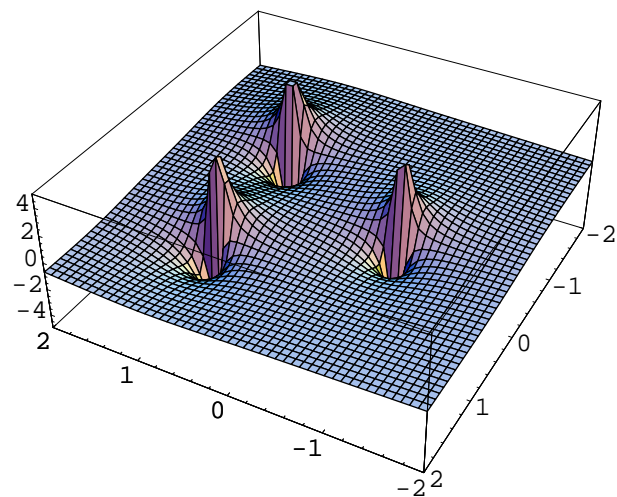
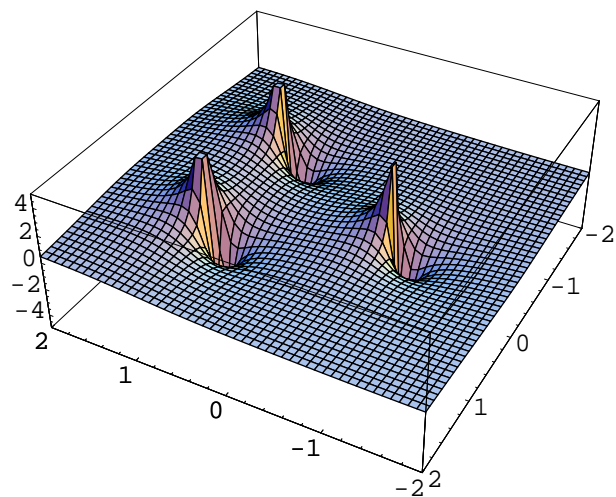
Unten links: Der Betrag des Funktionswerts.

Unten rechts: Das Argument des Funktionswerts.



Unten links: Der Realanteil des Funktionswerts.

Unten rechts: Der Imaginäranteil des Funktionswerts.



## Kapitel • Chapitre 11

# Anhang 2 : Komplexe Weg– oder Kurvenintegrale — Annexe 2: Intégrales curvilignes complexes

### Bemerkung:

Dieser Teil ist einem andern Skript des Autors entnommen, das bisher nur in deutscher Sprache vorhanden ist.

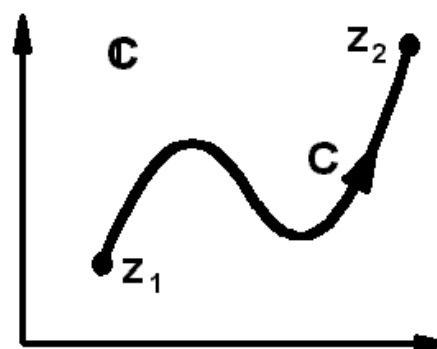
## 11.1 Grundlagen aus der Funktionentheorie

Die Kapitel über die Einführung in die komplexen Zahlen und die Einführung in die holomorphen Funktionen (Funktionentheorie) sind im Algebra-Skript des Autors wiedergegeben. Des Umfangs wegen werden sie daher hier nicht nochmals aufgeführt. Der Leser ist gebeten, im Algebra-Skript nachzuschlagen.

### 11.1.1 Definition des Kurvenintegrals

$C$ : Einfach geschlossene Kurve, doppelpunktfrei, einmal durchlaufen,  $z_1 = z(a)$ ,  $z_2 = z(b)$ ,  $z(t)$  stetig diff'bar

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u(x, y) + i v(x, y)) (dx + i dy) := \int_a^b f(z) z'(t) dt$$



### 11.1.2 Sätze, Eigenschaften

#### Abschätzung

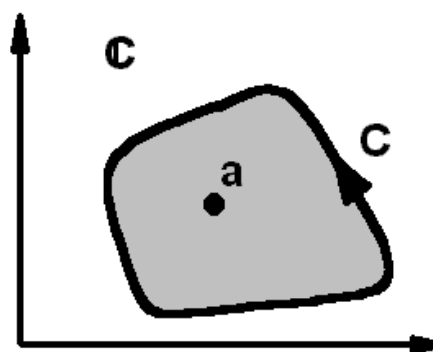
Sei  $L$  = Weglänge von  $C$ ,  $M = \max_{z \in C} (|f(z)|)$  ( $\leadsto |f(z)| \leq M, z = z(t), t \in [a, b]$ )

$$\Rightarrow \left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz| \leq M \cdot L$$

#### Stammfunktionseigenschaft

Sei  $f$  holomorph in  $G$ ,  $\partial G = C$ ,  $F(z)$  ist Stammfunktion von  $f(z)$  in  $\bar{G} = G \cup \partial G$

$$\Rightarrow \int_C f(z) dz = F(z_1) - F(z_2)$$



#### Integralsatz von Cauchy

Sei  $C$  einfach geschlossen,  $f$  holomorph auf  $\bar{G} = G \cup \partial G$

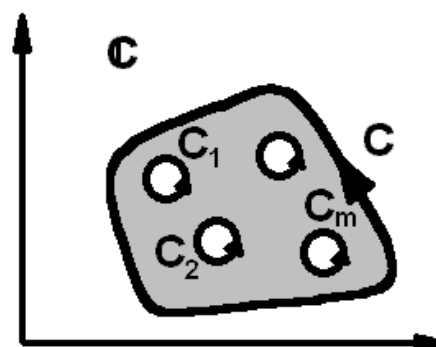
$$\Rightarrow \oint_C f(z) dz = 0$$

#### Umkehrung des Integralsatzes von Cauchy: Satz von Morera

Seien  $\dots, C_k, \dots$  geschlossene Kurve in  $G$ .

Sei  $f$  stetig in  $G$  und  $\forall C_k \subset G: \oint_{C_k} f(z) dz = 0$

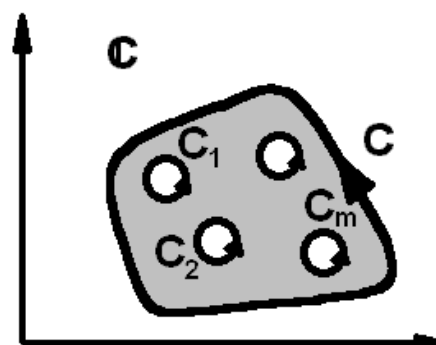
$$\Rightarrow f \text{ holomorph in } G$$



**Summensatz der Randintegrale**

$G_k$  sei ein „Loch“ in  $G$  mit Rand  $\partial G_k$ ,  
 $k = 1, \dots, n$ ,  $n \in \mathbb{N}$   
 $f$  sei holomorph in  $G \setminus \bigcup_{k=1}^n G_k$   
 (in  $G_k$  kann die Holomorphie verletzt sein)  
 $\partial G_k = C_k$

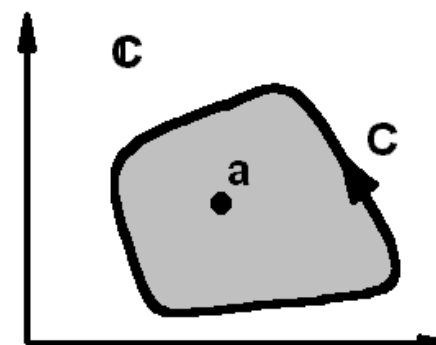
$$\Rightarrow \oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z) dz$$

**Integralformel von Cauchy**

Sei  $f$  holomorph auf  $\bar{G} = G \cup \partial G$   
 $C = \partial G$  sei einfach geschlossen,  $a = z_0 \in G$

$$\Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

**Abschätzungsformel von Cauchy**

Sei  $f$  holomorph auf einem Kreis  $K$ ,  $\bar{K} = K \cup \partial K$  mit Mittelpunkt  $a = z_0$  und dem Radius  $r$ .  
 $f$  sei beschränkt auf  $C = \partial K$ :  $|f(z)| \leq M$ ,  $z \in C = \partial K$

$$\Rightarrow |f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{M \cdot n!}{r^n}$$

**Satz von Liouville**

Sei  $f$  holomorph und  $|f(z)|$  beschränkt in  $\mathbb{C}$

$$\Rightarrow f(z) = \text{const.}, \quad z \in \mathbb{C}$$

**11.1.3 Residuenrechnung****Laurent-Entwicklung**

Sei  $z_0$  = Zentrum eines Kreises  $K$  mit dem Radius  $R$ ,  $\dot{K} = K \setminus \{z_0\}$ ,  $\dot{K} \subseteq G$ .  
 Sei  $f$  holomorph in  $G$  resp. auf dem Rand  $\partial K$  von  $K$ . (In  $z_0$  braucht  $f$  nicht holomorph zu sein.)

$$\Rightarrow \text{Laurent-Entwicklung: } f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

$$c_n = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial K} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

**Residuum**

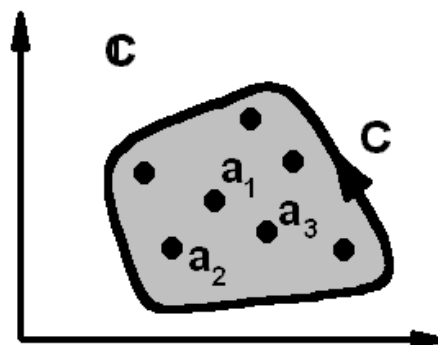
Das Residuum von  $f(z)$  in  $z = z_0$  ist der Koeffizient  $c_{-1} = (z - z_0)^{-1} = \frac{1}{z - z_0}$  in der Laurent-Entwicklung von  $f(z)$  um  $z = z_0$ , wobei die Laurent-Reihe für  $z \in (0, R)$ , d.h. für  $0 < |z - z_0| < R$  konvergiert. ( $R$  = Kreisradius von  $K$ .)

$$\operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) := c_{-1}$$

**Residuensatz**

Sei  $f$  holomorph in  $G$  mit Ausnahme endlich vieler Punkte  $z_1, z_2, \dots, z_n \in K \subseteq G$ ,  $C = \partial G$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z)$$

**Methoden zur Residuenberechnung**

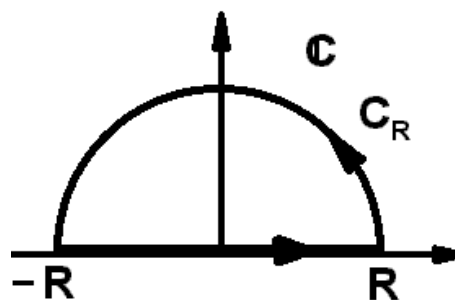
1. Beschaffe die Laurent-Reihe von  $f(z)$  um  $z = z_0$ .  $\leadsto$  Lese  $c_1 = \operatorname{Res}_{z=z_k}$  ab.
2. Fall wo  $f(z)$  in  $z_0$  einen Pol 1. Ordnung hat: Benutze die Regel von Bernulli

$$\leadsto \operatorname{Res}_{z=z_k} = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot (z - z_0)$$

3. Sei  $f(z) := \frac{g(z)}{h(z)}$ ,  $g(z)$  und  $h(z)$  holomorph in  $U_{z_0}$ ,  $h(z_0) = 0$ ,  $h'(z_0) \neq 0 \leadsto \operatorname{Res}_{z=z_k} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$

4. Fall wo  $f(z)$  in  $z_0$  einen Pol m-ter Ordnung hat:  $\operatorname{Res}_{z=z_k} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{m-1} ((z - z_0)^m f(z))$

5. ...



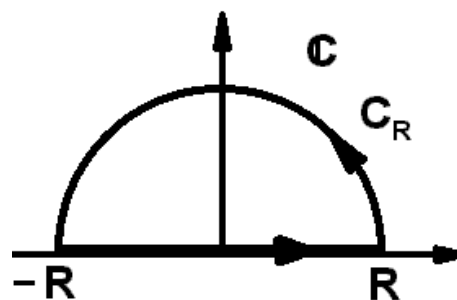
## 11.2 Berechnung bestimmter Integrale

### Zur Methode

Sei  $f(z)$  holomorph, z.B. für  $\Im(z) \geq 0$  (obere Halbebene  $H$ ) mit Ausnahme der Punkte  $z_1, z_2, \dots, z_n \in H$ . Es gelte dort zudem  $|z \cdot f(z)| \rightarrow 0$  für  $z \rightarrow \infty$ . (D.h.  $|f(z)|$  wächst schwächer als  $|z|$ .) Dann gilt wegen der Abschätzungsformel von Cauchy für Halbkreisurven  $C_H$  in  $H$  um den Ursprung  $O$  mit Radius  $R$ :

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_H} f(z) dz \right| &\leq \int_{C_H} |f(z)| |dz| \leq M \cdot L = M \cdot R \cdot \pi = \underbrace{\max_{z \in C_H} |f(z)|}_{\rightarrow 0, |z| \rightarrow \infty} \cdot R \cdot \pi \rightarrow 0. \\ &\leadsto \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx}_{z=x \in \mathbb{R}} + \underbrace{\int_{C_H} f(z) dz}_{=0} = \oint_{\partial K} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) \\ &\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Residuensatzes gelingt nun die Berechnung von reellen Integralen, deren direkte exakte Integration im Reellen oft nicht möglich ist. (Das geschieht jetzt via komplexe Wege, Veranschaulichung der Idee vergleiche nebenstehende Skizze.)



### Beispiele von Resultaten

Leider zeigt es sich, dass die Berechnung praktischer Beispiele oft Seiten füllt. Daher sei für die Umsetzung auf die Literatur verwiesen, z.B. auf die von François Fricker verfasste Ausgabe der Vorlesung „Einführung in die Funktionentheorie“ von Prof. Heinz Huber.

Einige mit der Residuenmethode gewonnene Resultate seien hier angefügt:

1. Sei  $R$  eine rationale Funktion der reellen Funktionen  $\sin(t)$  und  $\cos(t) \leadsto R(\sin(t), \cos(t))$ . Daraus lassen sich folgende Formeln gewinnen:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sin^4(t) + \cos^4(t)} = 2\pi \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (\sin(t))^{2n} dt = \frac{\pi}{2^{2n-1}} \binom{2n}{n}$$

2. Seien  $P(x)$  und  $Q(x)$  reelle Polynome in  $x$ . Wie oben erwähnt können wir nun über grosse Halbkreise integrieren und verwenden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{P(x)}{Q(x)} dx.$$

Sei nun  $\text{pgrad}(Q) \geq 2 + \text{pgrad}(P)$ . Nun lässt sich herleiten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im}(z_k) > 0} \text{Res}_{z=z_k} \frac{P(z)}{Q(z)}$$

Damit kann man z.B. die folgenden Formeln gewinnen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}}{x^{2n} + 1} dx = \frac{\pi}{n} (\sin(\frac{2m+1}{2n} \pi))^{-1}$$

3. Sei  $P(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0$ ,  $Q(z) = z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0$  ( $b_n = 1$ ). Sei dabei  $n > m$  und  $Q(t) \neq 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Sei weiter  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Damit lässt sich errechnen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} \cdot e^{i\lambda t} dt = 2\pi i \cdot \sum_{\text{Im}(z_k) > 0} (\text{Res}_{z=z_k} \frac{P(z)}{Q(z)} \cdot e^{i\lambda z})$$

Sei  $\forall_k : |a_k| < C$ ,  $|b_k| < C \leadsto C \in \mathbb{R}^+$ . Weiter kann man für  $a < -2(C+1)$  und  $b > 2(C+1)$  abschätzen ( $a \in \mathbb{R}^-$ ,  $b \in \mathbb{R}^+$ ):

$$|\int_a^b \frac{P(t)}{Q(t)} \cdot e^{i\lambda t} dt - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} \cdot e^{i\lambda t} dt| \leq \frac{4C}{\lambda} \cdot (\frac{1}{|a|} + \frac{1}{b})$$

Z.B. lässt sich damit das folgende Integral berechnen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda t}}{t^4 + 1} dt = \pi \cdot e^{|\lambda| \frac{-\sqrt{2}}{2}} \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} |\lambda|)$$

In Real- und iMaginäranteil aufgespalten ergibt das:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\lambda t)}{t^4 + 1} dt = \pi \cdot e^{|\lambda| \frac{-\sqrt{2}}{2}} \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} |\lambda|)$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{t^4 + 1} dt = 0$$

Die letzte Gleichung ist trivial (ungerade Funktion).

4. Mit der Residuenmethode kann man nun auch die folgenden **Fresnelschen Integrale** berechnen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2(t) dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$





## Kapitel • Chapitre 12

# Anhang 3 — Annexe 3

### 12.1 Hinweise – Indications

#### 12.1.1 Häufig verwendete Abkürzungen – Abréviations fréquemment utilisées

<b>Vor.</b>	Voraussetzung
<b>Beh.</b>	Behauptung
<b>Bew.</b>	Beweis

#### 12.1.2 Literatur — Littérature

Hier eine kleine Auswahl, die jeweils den grössten Teil des gesamten Stoffes abdeckt:

Leupold u.a., Mathematik 1, 2

Swobowsky, Analyse

Swobowsky, Calculus

Glyn James, Modern Engineering Mathematics,

Advanced Modern Engineering Mathematics

Ende