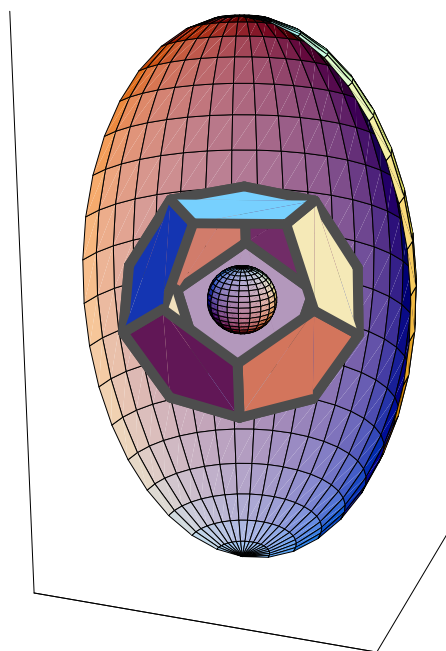


Script ◇ Math ◇ Ing
◇ Analysis ◇ Analyse ◇
kurz & bündig ◇ concis



Scripta bilingua

von • *de*

Rolf Wirz

Berner Fachhochschule BFH ◇ HTI und • *et* HSB

V.2.14.25a / 2.12.44a d/f / 18. August 2012

Produziert mit LaTeX/PCTEX auf NeXT/ WIN98/ XP. • *Produit avec LaTeX/PCTEX sur NeXT/ WIN98/ XP.*
Einige Graphiken sind auch mit *Mathematica* entstanden. • *Quelques représentations ont été produites avec Mathematica.*

*Je mathématique et plus efficace une théorie est, desto unanschaulicher ist
sie. Die moderne Wissenschaft erkaufte sich ihre Möglichkeit die Welt zu verändern
— oft durch Verzicht auf die Anschaulichkeit der Beschreibung. . . .*
• *Plus une théorie est mathématique et efficace, moins elle est claire. Les sciences
modernes acquièrent la possibilité de changer le monde — au prix de la clarté de la
description. . . .*

Fleckenstein

Aktuelle Adresse des Autors (2007):

Rolf W. Wirz-Depierre

Prof. für Math.

Berner Fachhochschule (BFH), Dep. AHB und TI

Pestalozzistrasse 20

Büro B112 CH-3400 Burgdorf/BE

Tel. ++41 (0)34 426 42 30 / intern 230

Mail: Siehe <http://rowicus.ch/Wir/indexTotalF.html> unter „Koordinaten von R.W.“

Alt: Ingenieurschule Biel (HTL), Ing'schule des Kt. Bern, Fachhochschule ab 1997) // BFH HTA Biel // BFH TI //

Die Urheberrechte für das verwendete graphische Material gehören dem Autor.

©1998 . . . 2003/04/05/06/07/08/09/10/11/ 2012

Information erscheint nur in der deutschen Ausgabe.

- *Information seulement pour l'édition allemande.*

Inhaltsverzeichnis • Table des matières

1 Organisatorisches — Quant à l'organisation	1
2 Reelle Funktionen — Fonctions réelles	3
2.1 Grundlagen — Fondements	3
2.1.1 Einführung — Introduction	3
2.1.2 Anschaulicher Funktionsbegriff — Version simple de la notion de fonction	3
2.1.3 Zahlen — Nombres	4
2.1.4 Standardkoordinatensysteme — Systèmes de coordonnées standard	4
2.1.5 Einteilung reeller Fkt. — Distinction des fct. réelles	5
2.1.6 Definitions- und Wertebereiche — Domaines de définition et de valeur	5
2.1.7 Gleichheit von Funktionen — Egalité de fonctions	6
2.2 Einige Standardfunktionen — Quelques fonctions standard	6
2.2.1 Einige algebraische Typen — Quelques types algébriques	6
2.2.2 Einige Eigenschaften — Quelques qualités	12
2.2.3 Umkehrabbildungen — Applications inverses	22
2.2.4 Transzendente Funktionen — Fonctions transcendentes	24
2.3 Reelle Zahlen und Folgen — Nombres réels et suites	30
2.3.1 Darstellungsarten — Façons de représentation	30
2.3.2 Zahlenerweiterung — Elargir les ensembles de nombres	32
2.3.3 Das Problem der Mächtigkeiten — Le problème de la puissance	34
2.3.4 Weitere Resultate — D'autres résultats	37
2.3.5 Folgen — Suites	39
2.3.6 Nullfolgen — Suites vers zéro	40
2.3.7 Stetige Verzinsung — Continuellement rapporter des intérêts	54
2.4 Grenzwerte bei Funktionen — Valeurs limites de fonctions	55
2.4.1 Konvergenz bei Funktionen — Convergence de fonctions	55
2.4.2 Einseitige Limites — Limites unilatérales	57
2.4.3 Stetigkeit — Continuité	58
2.4.4 L -Stetigkeit — "Continuité L "	60
2.4.5 Eigenschaften stetiger Funktionen — Qualités de fonctions continues	61
2.4.6 Anwendung auf Graphen — Applications à des graphes	63
2.4.7 Schranken, Grenzen, Extrema — Bornes, limites, extréma	63
2.4.8 Gleichmässige Stetigkeit — Continuité uniforme	65
2.5 Simulation mit rekurs. Folgen — Simulation av. d. suites récurr.	68
2.5.1 Beispiel: Linearer Naturschutzes — Exemple: Protect. de la nature linéaire	68
2.6 Landau-Symbole und Fibonacci — Le symboles de Landau et Fibonacci	73
2.6.1 Landaus 'O'-Symbol — Le symbole 'O' de Landau	73
2.6.2 Benchmark, Fibonacci — Benchmark, Fibonacci	74

3	Differentialrechnung — Calcul différentiel	79
3.1	Problemstellung — Problématique	79
3.1.1	Vorbemerkung — Fondements	79
3.1.2	Das Problem der Tangentensteigung — Le problème de la pente de la tangente	79
3.1.3	Die Begriffe — Les notions	79
3.1.4	L -Differenzierbarkeit — "Dérivable L "	82
3.1.5	Einfache Beispiele — Exemples simples	83
3.1.6	Höhere Ableitungen — Dérivées supérieures	84
3.1.7	Diff'barkeit und Stetigkeit — Dérivabilité et continuité	85
3.1.8	Links- und rechtsseitige Diff'barkeit — Dérivabilité de gauche et de droite	86
3.2	Der Kalkül — Le calcul	87
3.2.1	Grundlagen, Potenzfunktion — Fondements, fonction puissance	87
3.2.2	Linearität — Linéarité	87
3.2.3	Wichtige Regeln — Des règles importantes	89
3.2.4	Ableitung wichtiger Funktionen — Dérivées de fonctions importantes	94
3.2.5	Tangenten und Normalen an Graphen — Tangentes et normales aux graphes	98
3.2.6	Der Mittelwertsatz — Le théorème des accroissements finis	99
3.3	Extremalprobleme — Problèmes d'extréma	100
3.3.1	Extrema — Extréma	100
3.3.2	Wendepunkte — Points d'inflexion	102
3.3.3	Kurvendiskussion — Discussion de graphes	105
3.4	Die Regel von Bernoulli — La règle de Bernoulli	106
3.4.1	Herleitung der Regel — Dédution de la règle	106
3.4.2	Ausdehnung der Regel — Extension de la règle	107
3.4.3	Wichtige Beispiele — Exemples importants	108
3.5	Anwendungen — Applications	110
3.5.1	Kurvenform bei der Eisenbahn — Forme du virage du chemin de fer	110
3.5.2	Weitere Beispiele — D'autres exemples	110
4	Integralrechnung — Calcul intégral	111
4.1	Inhalte krumml. begr. Flächen — Aires de surf. au bord courbe	111
4.1.1	Die Idee der Approximation — L'idée de l'approximation	111
4.1.2	Das Riemannsche Integral — L'intégrale de Riemann	116
4.2	Kriterien und Eigenschaften — Critères et Qualités	118
4.2.1	Integrationskriterien — Critères pour l'intégrabilité	118
4.2.2	Eigenschaften bestimmter Integrale — Qualités d'intégrales définies	120
4.3	Der Kalkül — Le calcul	126
4.3.1	Stammfunktionen — Fonctions antidérivées	126
4.3.2	Hauptsatz der Infinitesimalrechnung — Théorème principal du calcul infinitésimal	128
4.3.3	Uneigentliche Integrale — Intégrales impropres	131
4.3.4	Integrationsregeln — Règles d'intégration	133
4.3.5	Partielle Integration — Intégration partielle	134
4.3.6	Substitutionen — Substitutions	136
4.3.7	Partialbruchzerlegung — Décomposition en fractions partielles	138
4.4	Anwendungen, Beispiele — Applications, exemples	140
4.4.1	Rechenbeispiele — Exemples de calcul	140
4.4.2	Kurven in Polarkoordinaten — Courbes en coordonnées polaires	141
4.4.3	Kurvenlängen — Longueurs de courbes	141
4.4.4	Elementare Linienintegrale — Intégrales curvilignes élémentaires	145
4.4.5	Flächen unter Vektorkurven — Surfaces sous des courbes vectorielles	148
4.4.6	Rotationskörper — corps de révolution	149
4.4.7	Schwerpunkte und Guldin — Centres de gravité et Guldin	150
4.4.8	Trägheitsmoment — Moment d'inertie	151

4.4.9	Physikalische Anwendungen — Applications en physique	153
4.4.10	Die Bedeutung des arsinh — La signification de l' arsinh	154
4.4.11	Die Gamma-Funktion — La fonction gamma	154
4.4.12	Die Irrationalität von π — L'irrationalité de π	156
5	Etwas Numerik — Un peu de mathématique numérique	159
5.1	Algorithmen — Algorithmes	159
5.2	Iterative Lös. v. Gleich'syst. — Solution d. syst. d'équ. p. itér.	159
5.2.1	Beispiel aus der Algebra — Exemple de l'algèbre	159
5.3	Nullstellenapproximation — Approximation de zéros	160
5.3.1	Intervalleingrenzung — Emboîtement d'intervalle	160
5.3.2	Tangentenmethode — Méthode de la tangente	161
5.3.3	Eine Anwendung — Une application	162
5.3.4	Sekantenmethode — Méthode de la sécante	162
5.3.5	Fixpunktmethode — Méthode du point fixe	163
5.3.6	Korrigierte Fixpunktmethode — Méthode corrigée du point fixe	166
5.3.7	Fixpunktmethode für Systeme — Méthode du point fixe pour systèmes	169
5.4	Interpolationspolynome — Polynômes d'interpolation	169
5.4.1	Probleme — Problèmes	169
5.4.2	Begriff — Notion	169
5.4.3	Zum Hornerschema — Quant au schéma de Horner	170
5.4.4	Darstellung von Lagrange — Représentation de Lagrange	170
5.4.5	Abschätzung und Runge-Effekt — Estimation et effect de Runge	171
5.4.6	Darstellung von Newton — Représentation de Newton	173
5.4.7	Zum Aitken-Neville-Algorithmus — Quant à l'algorithme de Aitken-Neville	173
5.4.8	Hermite-Interpolation, Splines — Interpolation d'après Hermite, splines	175
5.4.9	Splines — Splines	177
5.4.10	Ausblick: Bezier-Kurven — Annexe: Courbes de Bézier	181
5.5	Numerische Differentiation — Différentiation numérique	183
5.5.1	Graphische Methode — Méthode graphique	183
5.5.2	Polynommethode — Méthode polynomiale	184
5.5.3	Methode der Binomialkoeffizienten, $f^{(n)}$ — Méthode des coefficients binomiaux, $f^{(n)}$	185
5.5.4	Methode der zentralen Differenzen — Méthode des différences centrales	186
5.6	Numerische Integration — Intégration numérique	189
5.6.1	Rechteckmethode — Méthode des rectangles	189
5.6.2	Trapezmethode — Méthode du trapèze	190
5.6.3	Polynommethode — Méthode de polynômes	191
5.6.4	Simpsonmethode — Méthode de Simpson	191
5.6.5	Der Rombergalgorithmus — L'algorithme de Romberg	192
5.6.6	Die Integrationsformel von Gauss — La formule d'intégration de Gauss	193
6	Reihen — Séries	195
6.1	Zahlenfolgen — Suites de nombres	195
6.1.1	Bekannte Begriffe — Notions connues	195
6.1.2	Spezielle Folgen — Suites spéciales	196
6.1.3	Konvergenzprobleme — Problèmes de convergence	200
6.2	Reihen, Zahlenreihen — Séries, séries de nombres	201
6.2.1	Gegenstand, Motivation — Sujet, motivation	201
6.2.2	Spezielle Reihen — Séries spéciales	202
6.2.3	Konvergenzkriterien — Critères de convergence	204
6.2.4	Arithmetik mit Reihen — Arithmétique de séries	211
6.2.5	Rechnen mit Reihen — Calculer avec des séries	212
6.2.6	Interessante Beispiele — Exemples intéressants	216

6.2.7	Weitere Kriterien — D'autres critères	217
6.3	Folgen und Reihen von Fkt. — Suites et séries de fonct.	218
6.4	Funktionenreihen — Séries de fonctions	218
6.5	Gleichmässige Konvergenz — Convergence uniforme	218
6.5.1	Problem und Definition — Problème et définition	218
6.5.2	Gleichm. Konvergenz v. Fkt'reihen — Conv. uniforme de séries de f'cts	220
6.5.3	Gleichmässige Konv. u. Vertauschungssätze — Conv. unif. et théorèmes d'échang.	223
6.6	Potenzreihen — Séries de puissances	226
6.6.1	Theorie: Begriffe, Sätze — Théorie: Notions, théorèmes	226
6.6.2	Praxis: Potenzreihenentwicklung — Pratique: Développement en séries de puiss.	230
7	Diff'rechn. im 'R-n' — Calcul diff. dans le 'R-n'	241
7.1	Funktionen m. mehreren Var. — Fonct. à plusieurs variables	241
7.1.1	Beispiele — Exemples	241
7.1.2	Definitionsbereiche — Domaines de définition	242
7.1.3	Funktionstypen — Types de fonctions	244
7.1.4	Aspekte der Darstellung — Aspects de la représentation	245
7.2	Stetigkeit — Continuité	247
7.2.1	Das neue Problem — Le problème nouveau	247
7.2.2	Stetigkeitsdefinition — Définition de la continuité	248
7.3	Partielle Ableitungen — Dérivées partielles	252
7.3.1	Ableitungsarten — Manières de définir une dérivée	252
7.3.2	Partielle Ableitungen — Dérivées partielles	253
7.3.3	Höhere partielle Ableitungen — Dérivées partielles supérieures	253
7.3.4	Eigenschaften partieller Ableitungen — Qualités de dérivées partielles	254
7.4	Differential — Différentielle	256
7.4.1	Situation b. F'kt. m. nur einer Variablen — Situation p.l. f'ct. à u. seule var.	256
7.4.2	Situation b. F'kt. m. zwei und mehr Var. — Situation p. l. f'ct. à deux et plus var.	258
7.4.3	Verallgemeinerung der Differenzierbarkeit — Généralisation de la dérivabilité	264
7.4.4	Zum Gradienten — Quant au gradient	265
7.4.5	Tangentialebenen, Potenzreihenentw. — Plans tangentiels, séries de puissances	268
7.4.6	Bemerkungen zum totalen Differential — Remarques quant à la différentielle totale	269
7.4.7	Die Kettenregel — La règle conjointe	271
7.5	Anwendungen — Applications	273
7.5.1	Verpflanzung von Differentialoperatoren — Transposition d'opérateurs différentiels	273
7.5.2	Totale Ableitung — Dérivée totale	274
7.5.3	Anwendung auf implizite Funktionen — Application aux fonctions implicites	274
7.5.4	Extremalprobleme — Problèmes d'extréma	275
7.5.5	Klassifikation von Kegelschnitten — Classifications des sections de cônes	277
7.5.6	Extremalprobl. m. Nebenbed. — Probl. d'extréma avec cond. séc.	279
7.5.7	Newton-Approximation b. mehreren Var. — Approx. d. Newton pour plusieurs var.	280
7.6	Fehlerrechnung (Abhängigkeit) — Calcul de l'erreur (dépendance)	281
7.6.1	Das Problem der Verpflanzung — Le problème de la dépendance	282
7.6.2	Verwendung des totalen Differentials — Appliquer la différentielle totale	282
7.6.3	Linearisierungen — Linéarisations	284
7.7	Regression — Régression	284
7.7.1	Der Begriff — La notion	284
7.7.2	Methode der kleinsten Quadrate — Méthode des carrés minimaux	285
7.7.3	Korrelation — Corrélation	289
7.7.4	Korrelationskoeff.: Bedeutung — Coeff. de corrélation: Signification	291

8	Integrale im 'R-n' — Intégrales d.l. 'R-n'	293
8.1	Integration von Integralen — Intégration d'intégrales	293
8.1.1	Gewöhnl. Integr. als F'kt. eines Param. — Intégr. simpl. comme f'ct. d'un param.	293
8.1.2	Übergang zu Doppelintegralen — Passage aux intégrales doubles	295
8.1.3	Vertauschbarkeit v. Integr. u. Diff. — Echang. de l'intégr. e.d.l. diff.	296
8.2	Mehrfachintegrale: Begriff. . . — Intégrales multiples: Notion	299
8.2.1	Konzept — Concept	299
8.2.2	Gebietszerlegungen — Partition d'une région	299
8.2.3	Verfeinerungen v. Gebietszerleg. — Raffinements d. partit. d. régions	300
8.2.4	Riem. Summen f. prob'lose Gebiete — Sommes d. Riem. p.d. rég. sans probl.	300
8.2.5	Riem. Summen bei vernünft. Gebieten — Sommes d. Riem. p.d. rég. raisonnabl.	303
8.2.6	n-dim. Volumenintegrale — Intégrales de volume à dim. n	305
8.2.7	Integrationsegeln — Règles pour l'intégration	305
8.3	Berechn. von Doppel-etc.-Integr. — Calc. des intégr. doubles	307
8.3.1	Gebietsintegrale, allgemeine Situation — Intégrales de région, situation générale	307
8.3.2	Anwendung auf Volumenberechnungen — application pour calculer des volumes	311
8.3.3	Uneigentliche Gebietsinteg., Anwend. — Intég. d. région impropr., applic.	312
8.3.4	Gebietsintegr. in Polarkoord. — Intégr. de rég. en coord. polaires	313
8.4	Oberflächenintegrale — Intégrales superficielles	315
8.4.1	Inhalte krummer Flächen — Mesures de surfaces courbes et tordues	315
8.4.2	Für beliebige Koord'syst. — P.d. syst. d. coord. quelc.	318
8.4.3	Anwendung Raumwinkel — Application angle solide	322
8.4.4	Für Funk. auf Oberfl. — Pour d. fonc. sur l. surf.	323
8.5	Mehrfachintegrale — Intégrales multiples	324
8.5.1	Allgemeines — Généralités	324
8.5.2	Beispiele in kartesischen Koordinaten — Exemples en coordonnées cartésiennes	326
8.5.3	Integrale in Zylinderkoord. — Intégrales en coord. cylindriques	327
8.5.4	Integrale in Kugelkoord. — Intégrales en coord. sphériques	329
8.6	Transf. v. Gebietsintegr. — Transf. d'intégr. de domaine	331
8.6.1	Der Fall mit zwei Variablen — Le cas avec deux variables	331
8.6.2	Verallgemeinerung — Généralisation	334
8.6.3	Beispiel — Exemple	336
9	Kurven — Courbes	337
9.1	Grundlagen — Bases	337
9.1.1	Kurvendefinitionen — Définitions de courbes	337
9.1.2	Gebiete — Régions	338
9.1.3	Tangentenvektor, Tangentialebene — Vecteur tangent, plan tangent	338
9.2	Krümmung von Kurven — Courbure de courbes	341
9.2.1	Definition der Krümmung — Définition de la courbure	341
9.2.2	Ebene Kurven — Des courbes planes	341
9.2.3	Krümmungsradius — Rayon de courbure	343
9.2.4	Kurven im Raum — Courbes dans l'espace	344
9.3	Das begleitende Dreibein — Le trièdre mobile	348
9.3.1	Das lokale Koordinatensystem — Le système de coordonnées locales	348
9.3.2	Fernet-Serret'sche Gleichungen — Equations de Fernet-Serret	349
9.3.3	Konstruktion eines Schlauches — Construction d'un tube	350
9.4	Evolute und Evolvente — Développée et développante	352
9.4.1	Einführung — Introduction	352
9.4.2	Beispiele — Exemples	353
9.4.3	Evolute (Vertiefung) — Développée (approfondissement)	354
9.4.4	Evolvente (Vertiefung) — Développante (approfondissement)	357

10 A. 1 Komplexe Funktionen — Fonctions complexes	361
10.1 Differenzierbarkeit, Wege — Dérivés, chemins	361
10.1.1 Grundlagen — Fondements	361
10.1.2 Differenzierbarkeit — Dérivabilité	363
10.1.3 Differenzierbarkeitsregeln — Règles pour dérivabilité	364
10.1.4 Wege in $\mathbf{C}$ — Chemins dans $\mathbf{C}$	365
10.1.5 Differenzierbare Wege — Chemins dérivables	366
10.2 Konforme Abbildungen — Applications conformes	367
10.3 Möbius-Transformationen — Transformations de Möbius	368
10.4 Definitionen — Définitions	368
10.4.1 Eigenschaften — Qualités	369
10.5 Cauchy-Riemann — Cauchy-Riemann	371
10.5.1 Herleitung — Dédution	371
10.5.2 Harmonische Funktionen — Fonctions harmoniques	371
10.6 Exp-, Log’funktion — Fonct. exp., log.	372
10.7 Trig. Funkt. — Fonct. trig.	375
10.8 Anwendungen — Applications	376
10.8.1 Idee — Idée	376
10.8.2 Smith-Diagramm — Diagramme de Smith	377
10.8.3 Joukowski-Profil — Profil de Joukowski	378
10.8.4 Zeigerdiagramme — diagrammes-vecteurs	379
10.9 Darstellung komplexer Funktionen — Représentation de fonct. compl.	379
10.9.1 Beispiel einer Kurve — Exemple d’une courbe	379
10.9.2 Beispiel einer rationalen Funktion — Exemple: Fonction rationnelle	380
11 A. 2 Komplexe Kurvenintegrale — Intégrales curvil. compl.	383
11.1 Grundlagen aus der Funktionentheorie — Bases de la théorie de fonctions	383
11.1.1 Definition des Kurvenintegrals — Définition de l’intégrale curviligne	383
11.1.2 Sätze, Eigenschaften — Théorèmes, propriétés, qualités	384
11.1.3 Residuenrechnung — Méthode des résidus	385
11.2 Berechnung bestimmter Integrale — Calculer des intégrales définies	387
12 Anhang 3 — Annexe 3	389
12.1 Hinweise — Indications	389
12.1.1 Abkürzungen — Abréviations	389
12.1.2 Literatur — Littérature	389

Kapitel • Chapitre 1

Organisatorisches — Quant à l'organisation

Kurze Übersicht • *Vue générale*

1. Organisation, Rahmen • *Organisation, cadre*
2. Stoff • *Matière*
3. Ziel, Weg, Methoden, Feedback, Team • *But, chemin, méthodes, feedback, groupe*
4. Übungen, Selbststudium • *Exercices, études personnelles*
5. Lerntechnik, Arbeitstechnik, Selfmanagement • *Technique de travail et d'apprendre, selfmanagement*
6. Rechte und Pflichten des Studenten und der Schule • *Droits et devoirs de l'étudiant et de l'école*
7. Prinzipien, Grundsätze • *Principes et positions*
8. Rechner, Computer, Mathematiksoftware • *Calculatrices de poche, ordinateurs, software en mathes*
9. Semesterorganisation Mathematik (Anzahl Noten, Prüfungsreglement, Prüfungsplan, Prüfungsrahmen, erlaubte Unterlagen, formale Anforderungen, Benotungskriterien, Benotung der Übungen und Projekte, Arbeitsnachweismappe, Klassensprecher, Klassenbetreuer, Kopierchef, Sprechstunden)
 - *Organisation du semestre en mathématiques (nombre de notes, règlement des examens, Plan des examens, conditions concernant les examens, exigences formelles, conditions formelles, philosophie des notes, évaluation des exercices et des projets, porte-feuille, chef de classe, professeur chargé de la classe, chef chargé des copies, heures de consultation)*
10. Hilfsmittel (Bibliothek, Taschenrechner, Mathematiksoftware, Literatur) • *Aides (bibliothèque, calculatrice de poche, software en mathématiques, littérature)*
11. Zeitplanung • *Plan du temps à disposition*

12. Einführung: Über das Wesen der Mathematik • *L'essence (caractère) des mathématiques*

- (a) Beispielhafte Beweise • *Des preuves exemplaires*
- (b) Wieso beweisen? • *Pourquoi prouver?*
- (c) Modell und Wirklichkeit • *Modèles et réalité*
- (d) Geschichtlicher Rahmen und Auftrag • *Cadre de l'histoire et but*

Kapitel • Chapitre 2

Reelle Funktionen — Fonctions réelles

2.1 Grundlagen — Fondements

2.1.1 Einführung — Introduction

Literatur — Littérature

Kurze Liste: Vgl. Anhang. • *Petite liste: Voir Annexe.*

Lit. fürs Selbststudium: Vgl. spezielle Literaturliste. • *Litt. pour les études pers.: Voir liste de littérature spéciale.*

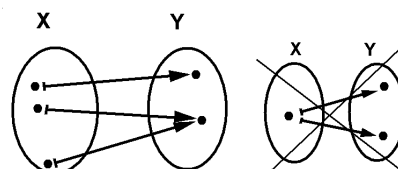
Vorausgesetzter Stoff — Matière dont on exige la connaissance

Funktionen und reelle Zahlen sind elementare Werkzeuge der Mathematik. In vereinfachter Version gehören sie zum Schulstoff, der vorausgesetzt wird. Es geht hier vor allem um eine kurze Repetition und dann um den Ausbau der Begriffe.

• *Les fonctions et les nombres réels sont des outils élémentaires des mathématiques, qu'on doit connaître, car, simplifiés, ils font partie du programme scolaire. Ici il s'agit surtout d'une brève répétition et puis d'aller plus loin dans la matière.*

2.1.2 Anschaulicher Funktionsbegriff — Version simple de la notion de fonction

Wir gehen hier von einer anschaulichen Definition aus, die von der Schule bekannt sein sollte. Im Teil „Algebra“ wird im Zusammenhang mit Mengenlehre und Relationen eine allgemeinere Definition erarbeitet, auf die im Moment noch nicht zurückgegriffen werden muss. Zudem beschränken wir uns hier auf **reelle Funktionen**.



• *Nous partons ici d'une définition simple qui devrait être connue du temps de l'école. Dans la partie "Algèbre" on élabore une définition plus générale dans le contexte de la théorie de l'ensemble et des relations. En ce moment on n'a pas encore besoin de cette définition plus générale. En plus ne traitons ici que des **fonctions réelles**.*

Geg.: • **Donné:** Zwei Mengen X, Y . • *Deux ensembles X, Y .*

Definition: • **Définition:**

(**Anschaulich:** • **De façon simple:**)

Eine **Funktion** f ist gegeben durch eine Vorschrift, die jedem Element $x \in X$ ($X = D_f$: **Definitionsbereich**) genau ein Element $y \in Y$ ($Y = W_f$: **Wertebereich**) zuordnet.

• *Une fonction f est donnée par une prescription qui adjoint à chaque élément $x \in X$ ($X = D_f$: **domaine de définition**) exactement un élément $y \in Y$ ($Y = W_f$: **domaine des valeurs**).*

Reelle Funktionen sind solche mit $D_f \subseteq \mathbb{R}$ (reelle Zahlen). • *Les fonctions réelles sont celles avec $D_f \subseteq \mathbb{R}$ (nombres réels).*

Problem: • **Problème:**

$$f: x \mapsto y = f(n) = \sin(n), \quad n \in D_f = \mathbb{N}, \quad y \in W_f = (0, 1), \quad B_f = \{y = \sin(n) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset W_f$$

$$|D_f| = |\mathbb{N}| = |B_f| < |W_f| = |(0, 1)|$$

(Später gezeigt... • *Sera démontré plus tard...*)

2.1.3 Zahlen — Nombres

Wir werden mit folgenden Zahlensystemen arbeiten: $\mathbb{N}$ (natürliche Zahlen), $\mathbb{Z}$ (ganze Zahlen), $\mathbb{Q}$ (rationale Zahlen), $\mathbb{R}$ (reelle Zahlen), $\mathbb{C}$ (komplexe Zahlen). Diese Systeme werden wir später auch genauer behandeln. Für den Moment merken wir uns: $\mathbb{Q}$ = Menge aller möglichen äquivalenten Klassen von Brüchen (z.B. $\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$). $\mathbb{R}$ = Menge aller möglichen Dezimalbrüchen.

• *Nous allons travailler avec les systèmes de nombres suivants: $\mathbb{N}$ (nombres naturels), $\mathbb{Z}$ (nombres entiers), $\mathbb{Q}$ (nombres rationnels), $\mathbb{R}$ (nombres réels), $\mathbb{C}$ (nombres complexes). Nous allons traiter de façon plus exacte ces systèmes plus tard. Pour le moment nous retenons: $\mathbb{Q}$ = ensemble de toutes les classes équivalentes de fractions (p.ex. $\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$). $\mathbb{R}$ = ensemble de toutes les fractions décimales possibles.*

Wichtige Eigenschaften von $\mathbb{R}$: • *Qualités importantes de $\mathbb{R}$:*

⊙ $\mathbb{R}$ ist geordnet: • *$\mathbb{R}$ est ordonné: $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad (a < b) \vee (a = b) \vee (a > b)$*

⊙ ($\mathbb{R}$ ist lückenlos. • *$\mathbb{R}$ est sans lacunes.*)

$\mathbb{Q}$ ist nicht lückenlos: • *$\mathbb{Q}$ n'est pas sans lacunes: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \rightsquigarrow$ Lücke • Lacune.*

⊙ $\mathbb{R}$ ist dicht: • *$\mathbb{R}$ est dense:*

Zwischen zwei reellen Zahlen gibt es immer eine dritte. • *Entre deux nombres réels il y en a toujours un troisième.*

⊙ $\mathbb{R}$ ist geordnet. $\rightsquigarrow$ $\mathbb{R}$ lässt sich durch eine skalierte Gerade darstellen, die **Zahlengerade**.

• *$\mathbb{R}$ est ordonné. $\rightsquigarrow$ $\mathbb{R}$ se laisse représenter par une droite ordonnée, la droite numérique.*

2.1.4 Standardkoordinatensysteme — Systèmes de coordonnées standard

Wir werden vorerst vor allem mit einer unabhängigen Variablen $x \in \mathbb{R}$ und einer davon abhängigen Variablen $y = f(x) \in \mathbb{R}$ arbeiten. ($f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$) Wir brauchen somit zwei Dimensionen. Graphisch gehört dazu die Ebene $\mathbb{R}^2$.

• *Ici nous allons surtout travailler avec une variable indépendante $x \in \mathbb{R}$ et avec une variable dépendante $y = f(x) \in \mathbb{R}$ qui dépend de x . ($f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$) Nous avons donc besoin de deux dimensions. C'est*

graphiquement lié au plan $\mathbb{R}^2$.

Standardkoordinatensysteme sind demnach: • *Comme systèmes de coordonnées standard nous avons:*

  Kartesisches Koordinatensystem • *Système de coordonnées cartésien*

  Polarkoordinatensystem • *Système de coordonnées polaire*

Bekanntlich kann man mit Hilfe solcher Koordinatensysteme **Graphen** von Funktionen skizzieren, indem man sich **Wertetabellen** erstellt oder den Graphikrechner benutzt.

• *On sait qu'on peut faire des esquisses de graphes des fonctions à l'aide de tels systèmes de coordonnées. Pour celà on se fait des tableaux de valeurs ou bien on utilise une calculatrice qui fait des représentations graphiques.*

2.1.5 Einteilung der reellen Funktionen — Distinction des fonctions réelles

Folgende Einteilung ist üblich: • *La distinction suivante est de coutume:*

Reelle Funktionen: • **Fonctions r eles:**

  Transzendente Funktionen • *Fonctions transcendantes*

  Algebraische Funktionen • *Fonctions algébriques*

– Algebraisch irrationale Funktionen • *Fonctions algébriques irrationnelles*

– Rationale Funktionen • *Fonctions rationnelles*

* Gebrochen rationale Funktionen • *Fonctions rationnelles fractionnaires*

* Ganzrationale Funktionen • *Fonctions polynomiales*

Ganzrational bedeutet, dass die vorkommenden Ausdrücke Polynome sind, d.h. nur plus, minus und mal sowie Potenzierungen als Operationen auftreten. • *Polynomial signifie qu'on n'a que des expressions polynomiales, c.v.d. on n'a que les opérations plus, minus, multiplication et calculer des puissances.*

Gebrochen rational bedeutet, dass die vorkommenden Ausdrücke Quotienten von Polynomen sind.

• *Rationel fractionnaire signifie que les expressions sont des quotients de polynômes.*

Algebraisch irrational bedeutet, dass in den vorkommenden Ausdrücken neben Quotienten von Polynomen auch Wurzeln vorhanden sind. • *Algébrique irrationnel signifie que dans les expressions on a des quotients de polynômes et aussi ces racines.*

Transzendent bedeutet, dass in den vorkommenden Ausdrücken nicht algebraische Konstruktionen auftreten wie z.B. Sinus, Cosinus u.s.w.. • *Transcendente signifie que dans les expressions on a des constructions non algébriques comme p.ex. sinus, cosinus etc..*

2.1.6 Definitions- und Wertebereiche — Domaines de définition et de valeur

Bei reellen Funktionen hat man bekanntlich: • *Pour les fonctions réelles il vaut:*

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ definiert}\}$ • *défini* } $W_f = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in D_f : y = f(x)\}$

D_f und W_f sind häufig **Intervalle** $I, \bar{I}, \dots$ • *D_f und W_f sont souvent des intervalles $I, \bar{I}, \dots$*

Wir treffen folgende Intervalltypen: • *Nous rencontrons les types d'intervalles suivants:*

  **Abgeschlossenes** Intervall: • *Intervalle fermé:* $[a, b] = \bar{I} = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

  **Offenes** Intervall: • *Intervalle ouvert:* $(a, b) = I = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

  **Halboffenes** Intervall: • *Intervalle semi-ouvert:* $[a, b) = I = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
oder • *ou* $(a, b] = I = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

- δ -Umgebung: • **Voisinage** δ : $U_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \mid x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$
- **Punktierte Umgebung**: • **Voisinage sans milieu**:
 $U_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \mid x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \wedge x \neq x_0\}$
- **Einseitig unendlich**: • **Infini d'un côté**: $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$
 oder • *ou* $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$
- **Beidseitig unendlich**: • **infini des deux côtés**: $(-\infty, \infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

Problem: • **Problème:** Oft sind die Wertemengen W_f nicht geometrisch klar erfassbar. Wir benutzen daher auch den Ausdruck **Bildbereich** B (mit $W_f \subseteq B$) für eine Menge, die genauer fassbar ist. • *Géométriquement, le domaine des valeurs W_f n'est souvent pas facilement descriptible. C'est pourquoi nous utilisons des fois l'expression domaine des images B (avec $W_f \subseteq B$) pour un ensemble qui est plus facile descriptible.*

Bsp.: • **Exemple:** Sei • *Soit* $n \in \mathbb{N} \rightsquigarrow f(n) = \sin(n) \rightsquigarrow W_f = \{y = f(n) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset B = (0, 1) \subset \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow$ Struktur von W_f ? ... • *Structure de W_f ? ...*

2.1.7 Gleichheit von Funktionen — Egalité de fonctions

Definition: • **Définition:** Zwei Funktionen f und g heißen **gleich** in I : • *Deux fonctions f et g s'appellent égaux dans I : $\Leftrightarrow \forall_{x \in I} f(x) = g(x)$*

Bemerkung: In der Mathematik unterscheidet man diverse Arten von Gleichheit oder Gleichungen. Beispiele: Bestimmungsgleichungen wie $3 + x = 4$, $x = ?$. Oder: $f(x) = g(x)$, $x = ?$. Zuweisungen wie z.B. $x = 7$: Der Variablen x wird der Wert 7 zugewiesen („auf den Speicherplatz geschrieben“). Identitäten, z.B. $\forall_{x \in I} f(x) = g(x)$. Syntaktische Identitäten, z.B. sogar gleiche Zeichenfolgen in zwei Ausdrücken. Z.B. $(a + b)^2$ und $a^2 + 2ab + b^2$ sind verschiedene Zeichenfolgen.

• **Remarque:** *Dans les mathématiques on distingue différents types d'égalités ou bien d'équations. Exemples: Equations pour évaluer une variable comme $3 + x = 4$, $x = ?$. Ou: $f(x) = g(x)$, $x = ?$. Assignations telles que p.ex. $x = 7$: A la variable x on assigne la valeur 7 („on l'écrit sur la place de mémoire“). Identités, p.ex. $\forall_{x \in I} f(x) = g(x)$. Identités syntactiques, p.ex. la même suite de symboles dans deux expressions. P.ex. $(a + b)^2$ et $a^2 + 2ab + b^2$ sont des suites de symboles différentes.*

2.2 Einige reelle Standardfunktionen — Quelques fonctions standard réelles

2.2.1 Einige algebraische Typen — Quelques types algébriques

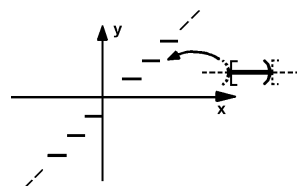
Gauss-Klammer-Funktion — Fonction aux parenthèses de Gauss

$$f(x) = [x] := n, \quad x \in [n, n + 1), \quad n \in \mathbb{Z}$$

(Intervalle links abgeschlossen, rechts offen! • *Intervalle fermé à gauche, ouvert à droite!*)

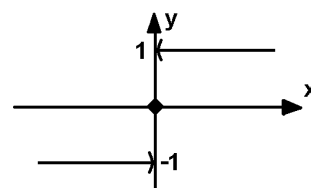
$f(x)$ ist **stückweise** (auf $[n, n + 1)$) algebraisch definiert.

• *$f(x)$ est définie algébriquement par morceaux (sur $[n, n + 1)$).*



Signum-Funktion — Fonction signum

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) : = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



Man sieht sofort ein, indem man die verschiedenen Vorzeichenkombinationen durchgeht:

- *On voit tout de suite en pensant aux différentes combinaisons de signes:*

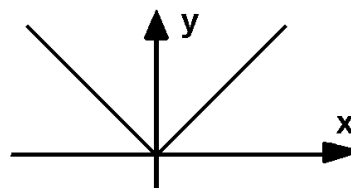
Eigenschaft: • **Qualité:** $\operatorname{sgn}(x \cdot y) = \operatorname{sgn}(x) \cdot \operatorname{sgn}(y)$

Betrags-Funktion — Fonction de valeur absolue

Definition: • **Définition:** $f(x) = |x| := +\sqrt{x^2}$

Satz: • **Théorème:**

$$f(x) = |x| := x \cdot \operatorname{sgn}(x)$$



Eigenschaften: (Rechnen mit Beträgen: • *Calculer avec des valeurs absolues:*)

• **Qualités:**

$$1. |x|^2 = (x \cdot \operatorname{sgn}(x))^2 = x^2, \quad (x \neq 0 \Rightarrow \operatorname{Sgn}(x)^2 = 1, \quad x = 0 \Rightarrow \operatorname{Sgn}(x)^2 = 0)$$

$$2. |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

Beweis: • **Preuve:**

$$|x \cdot y| = (x \cdot y) \cdot \operatorname{sgn}(x \cdot y) = x \cdot y \cdot \operatorname{sgn}(x) \cdot \operatorname{sgn}(y) = (x \cdot \operatorname{sgn}(x)) \cdot (y \cdot \operatorname{sgn}(y)) = |x| \cdot |y|$$

$$3. \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

(Ersetze im letzten Ausdruck y durch $\frac{1}{y}$ • *Remplace dans l'expression précédente y par $\frac{1}{y}$*)

$$4. |x \pm y| \leq |x| + |y|$$

(Auf der Zahlengeraden ablesbar. • *On peut voir ce rapport sur la droite numérique*)

$$5. |x \pm y| \geq ||x| - |y||$$

(Auf der Zahlengeraden ablesbar. • *On peut voir ce rapport sur la droite numérique*)

Bemerkung: • **Remarque:** $\operatorname{sgn}(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2} + 0\sqrt{x^2}}$

Zahlenfolgen — Suites de nombres

$f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}, f(n) = a_n$ heisst **Folge**

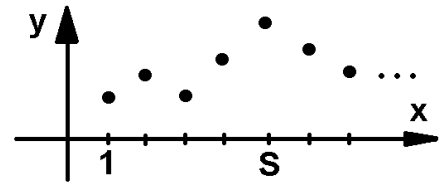
• s'appelle **suite**

Folgen sind somit Funktionen f mit

$D_f = \mathbb{N}$.

• Les suites sont donc des fonctions f avec

$D_f = \mathbb{N}$.



Für die Funktion als Punktmenge $\{(n|f(n))\}$ schreiben wir abgekürzt: • Pour la fonction comme ensemble de points nous écrivons brièvement:

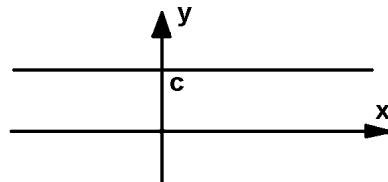
$\{(n|f(n)) \mid f(n) = a_n\} = [a_1, a_2, a_3 \dots] = \langle a_n \rangle$.

a_n in $\langle a_n \rangle$ nennen wir das **allgemeine Glied**. • Nous appelons a_n dans $\langle a_n \rangle$ le **terme général**.

Man unterscheidet zwischen induktiv und rekursiv definierten Folgen (vgl. Algebra-Kurs). • On distingue entre des suites récurrentes et des suites définies par induction (voir cours d'algèbre).

Konstante Funktion — Fonction constante

$f(x) = c \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$

**Lineare Funktion — Fonction linéaire**

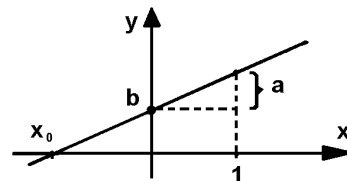
$f(x) = a \cdot x + b$

Steigung: • Monté:

$$\frac{\Delta(y)}{\Delta(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \tan(\alpha) = a \forall x$$

Ähnliche Dreiecke $\leadsto$ Gerade.

• Triangles semblables $\leadsto$ droite.



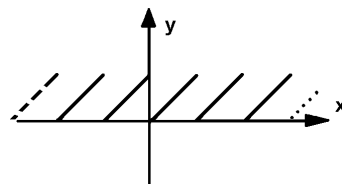
y-Achsenabschnitt: • Intercepte y : $\leadsto b$

x-Achsenabschnitt oder Nullstelle: • Intercepte x ou bien **zéro** $\leadsto x_0 = -\frac{b}{a}$

Graph: Gerade. • Graphe: Droite.

Sägezahnfunktion — Fonction en forme de scie

$f(x) = x - [x]$



$\leadsto$ Periodisch! • Périodique!

Quadratische Funktion — Fonction quadratique

▷ $f(x) = x^2$ **Parabel** (Normalparabel), Scheitel im Ursprung, $f(x) = a \geq 0$ für $x \neq 0$

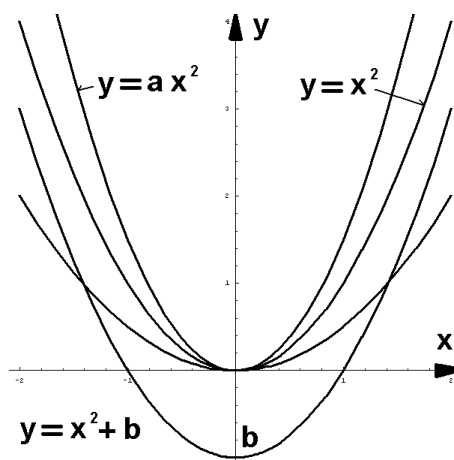
• **Parabole normale**, sommet dans l'origine, $f(x) = a \geq 0$ für $x \neq 0$

▷ $f(x) = a \cdot x^2$ Parabel, Scheitel wie vorhin (Nullstelle (NS oder NS'Z) $(0, 0)$), **Öffnung**

a • **Parabole**, sommet comme avant (zéro (Z ou NS'Z) $(0, 0)$), **ouverture** a

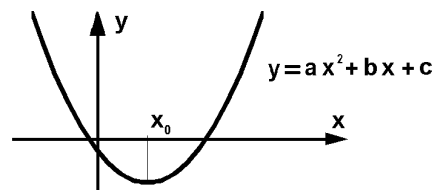
▷ $f(x) = a \cdot x^2 + c$ Parabel verschoben um c in y -Richtung, Scheitel in $(0, c)$, für $a \cdot c < 0$ zwei NS'Z $x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$

• $f(x) = a \cdot x^2 + c$ **Parabole déplacée** par c en direction d' y , sommet dans $(0, c)$, pour $a \cdot c < 0$ deux NS'Z $x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$



▷ $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ Parabel verschoben in x -Richtung und in y -Richtung, Symmetrieachse bei noch unbekanntem x_0 , y -Achsenabschnitt c

• $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ **Parabole déplacée** par c en direction x et y , axe de symétrie à x_0 qu'on ne connaît pas encore, section de axe y dans c



Bemerkung: • **Remarque:**

$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ heisst **Grundform**.

• $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ s'appelle **forme de base**.

Problem: • **Problème:** NS'Z = ?

Sei • Soit $x - x_0 = z$, $x = z + x_0 \Rightarrow f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (z + x_0)^2 + b \cdot (z + x_0) + c = az^2 + 2azx_0 + ax_0^2 + bz + bx_0 + c = az^2 + (2ax_0 + b)z + (ax_0^2 + bx_0 + c) = h(z)$

Da die Symmetrieachse von f durch x_0 geht, muss die Symmetrieachse von h durch $z = x_0 - x_0 = 0$ gehen.

• Comme l'axe de symétrie de f passe par x_0 , l'axe de symétrie de h doit passer par $z = x_0 - x_0 = 0$.

$\leadsto h(z) = h(-z) \Rightarrow (2ax_0 + b) = 0 \ (z^2 = (-z)^2 \ \forall z, \ z \neq -z \ \forall z)$

$\Rightarrow x_0 = -\frac{b}{2a}$, $x = z + x_0 = z - \frac{b}{2a}$

NS'Z: $0 = h(z) = az^2 + 0 \cdot z + (a(-\frac{b}{2a})^2 + b(-\frac{b}{2a}) + c) = a(z^2 + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a^2} + \frac{c}{a}) = a(z^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2})$

$\Rightarrow z^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2} = 0 \ (a \neq 0) \Rightarrow z_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x_{1,2} = x_0 + z_{1,2}$

$= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Offensichtlich hängt es von $\sqrt{b^2 - 4ac}$ ab, ob die **quadratische Gleichung** $f(x) = 0$ Lösungen hat und wieviele es sind. Wir definieren daher:

• Il dépend clairement de $\sqrt{b^2 - 4ac}$ si l'équation quadratique $f(x) = 0$ a des solutions et combien il y en a. Nous disons:

Definition: • **Définition:**

$D = b^2 - 4ac$ heisst **Diskriminante** der quadratischen Gleichung

• s'appelle **discriminant** de l'équation quadratique

$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

Beh.: • **Thè.:**

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$D > 0 \rightsquigarrow \text{zwei Lösungen} \quad \bullet \text{ deux solutions}$$

$$D = 0 \rightsquigarrow \text{eine Lösung} \quad \bullet \text{ une solution}$$

$$D < 0 \rightsquigarrow \text{keine Lösung} \quad \bullet \text{ pas de solution}$$

Nochmals zur **Bedeutung der Koeffizienten** a , b , c :

• *Encore une fois: Quant à la signification des coefficients* a , b , c :

$$f(x) = a \cdot x^2 + c$$

$\rightsquigarrow a$: Öffnung • *Ouverture*

$\rightsquigarrow c$: Translation in Richtung der y -Achse • *Translation en direction axe y*

$\rightsquigarrow b$: $\rightsquigarrow$?

Wir wissen: • *Connu:*

$$\text{Nullstellen: } \bullet \text{ Zéros: } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \rightsquigarrow x_m := \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b}{2a}$$

Es gilt: • *Il vaut:* $f(x_m + d) = f(x_m - d)$ (Symmetrie, nachrechnen) • *(Symétrie, contrôler)*

$\rightsquigarrow$ Die Parabel hat in x_m ihr Maximum oder Minimum.

• $\rightsquigarrow$ *Dans x_m il y a le maximum ou le minimum de la parabole.*

$\rightsquigarrow b$ beschreibt linear die Lage des Extremums $x_m := \frac{-b}{2a}$ auf der x -Achse.

• $\rightsquigarrow b$ décrit de façon linéaire la position de l'extrême $x_m := \frac{-b}{2a}$ de la parabole sur l'axe x .

$$\rightsquigarrow y_m = f(x_m) = a x_m^2 + b x_m + c = a \left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b \left(\frac{-b}{2a}\right) + c = -\frac{b^2}{4a} + c$$

$$\rightsquigarrow (x_m, y_m) = \left(\frac{-b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c\right) \rightsquigarrow \text{Parabel, Variable } b \quad \bullet \text{ Parabole, variable } b$$

Quadratisch ergänzen — Compléter de façon quadratique

$$a x^2 + b x + c = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a} x = -\frac{c}{a} \Rightarrow x^2 + 2 \frac{b}{2a} x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac} - b}{2a}$$

Scheitelpunktsform — Forme du point culminant

$$\text{Sei } \bullet \text{ Soit } a \neq 0, f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a \left(x^2 + \frac{2}{2} \cdot \frac{b}{a} x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) = a \left(\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{:= -m} + \underbrace{\left(\frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)}_{:= n}\right) = a(x - m)^2 + n \rightsquigarrow$$

Formel: • Formule: Scheitelpunktsform • Forme du point culminant

$$f(x) = a(x - m)^2 + n = \frac{-D}{4a^2} \quad (= a \cdot x^2 + b \cdot x + c), \quad D = b^2 - 4ac$$

Quadratische Ungleichungen — Inégalités quadratiques

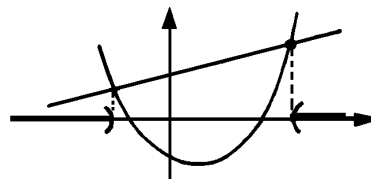
Bsp.: • Exemple:

$$4x^2 - 3x - 1 > 2x + 1$$

oder • ou :

$$4x^2 - 5x - 2 > 0$$

Lösungsmenge vgl. Skizze • Ensemble de solution voir esquisse.



Potenzfunktion — Fonction puissance

Definition: • Définition: $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$ heisst **Potenzfunktion** • s'appelle fonction puissance

$f(x) = x^3$: Parabel 3-ter Ordnung

• *parabole de l'ordre 3.*

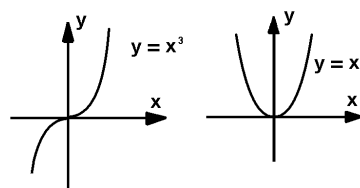
$f(x) = x^4$: Parabel 4-ter Ordnung

• *parabole de l'ordre 4.*

$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$: Parabel n -ter Ordnung •

parabole de l'ordre n .

$D_f = \mathbb{R}$



$f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$: **Hyperbel** (1-ter Ordnung)

• **hyperbole** (de l'ordre 1).

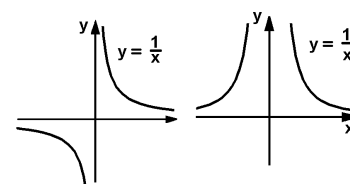
$f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$: Hyperbel 2-ter Ordnung

• *hyperbole de l'ordre 2.*

$f(x) = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$: Hyperbel n -ter Ordnung

• *hyperbole de l'ordre n .*

$D_f = \mathbb{R}$

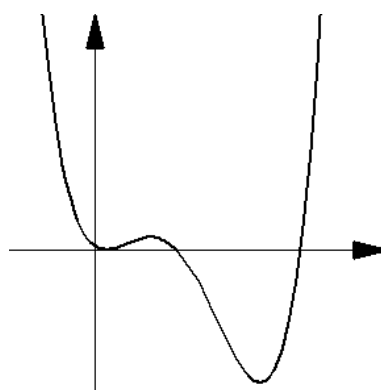
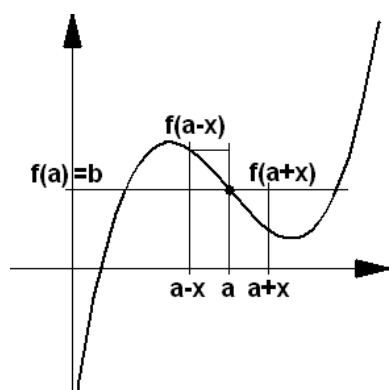


Eine Hyperbel besteht aus zwei **Ästen**, die durch einen **Pol** „getrennt sind“. • *Une hyperbole consiste en deux branches qui sont "séparées" par un pôle.*

Bemerkung: • Remarque:

Polynome vom Grad 3 haben immer einen punktsymmetrischen Graphen, Polynome vom Grad höher als 3 jedoch nicht mehr, wie das Beispiel $f(x) = x^4 - 12x^3 + 35x^2 - 24x$ unten rechts zeigt.

• *Les polynômes du degré 3 ont toujours un graphe qui est symétrique par rapport à un point ce qui des fois ne vaut plus pour les polynômes du degré supérieur à 3, comme l'exemple à droite ci dessus $f(x) = x^4 - 12x^3 + 35x^2 - 24x$ nous montre.*



Hinweis zur Symmetrie: • *Indication quant à la symétrie:*

Sei • *Soit* $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$

↪ Wendepunkt (siehe Differentialrechnung): • *Point d'inflexion (voir calcul différentiel):*

$$f''(x_0) = 6ax_0 + 2b = 0 \Rightarrow P(x_0, f(x_0)) = P\left(\frac{-b}{3a}, \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{cb}{3a} + d\right)$$

$$\text{Sei } • \text{ Soit } x = \tilde{x} + x_0 \Rightarrow f_1(\tilde{x}) := f(x) - f(x_0) = f(\tilde{x} + x_0) - f(x_0) = a\tilde{x}^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)\tilde{x}$$

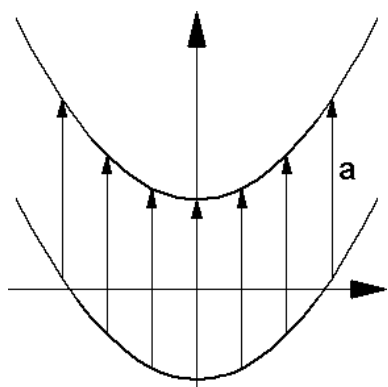
f_1 ist aus f durch Koordinatentransformation entstanden: Translation in y -Richtung $f(x) - f(x_0)$, Translation in x -Richtung $\tilde{x} = x - x_0$. Da $f_1(\tilde{x})$ ungerade ist, ist die Symmetrie zum Ursprung nachgewiesen.

• f_1 à été contruite à l'aide de f par transformation de coordonnées: Translation $f(x) - f(x_0)$ en direction y , translation $\tilde{x} = x - x_0$ en direction x . Comme $f_1(\tilde{x})$ est impaire, la symétrie par rapport à l'origine est prouvée.

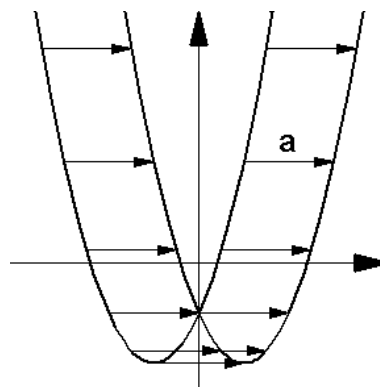
2.2.2 Einige Eigenschaften — Quelques qualités

Transformationen und Geometrie — Transformations et géométrie

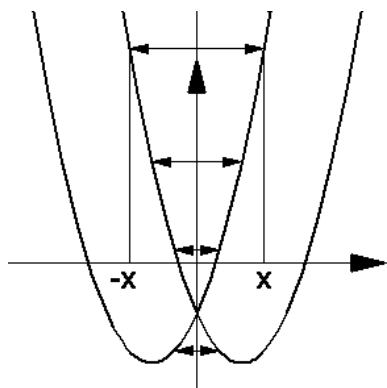
$$h(x) := f(x) + a$$



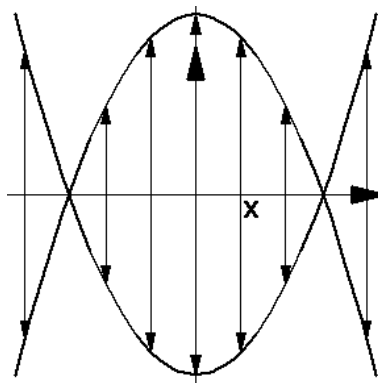
$$h(x) := f(x - a)$$



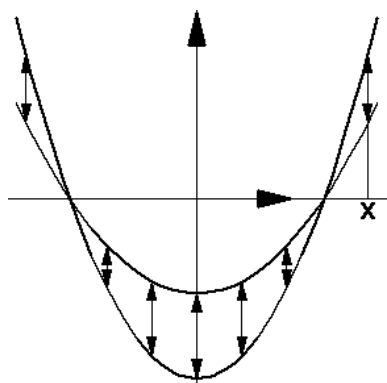
$$h(x) := f(-x)$$



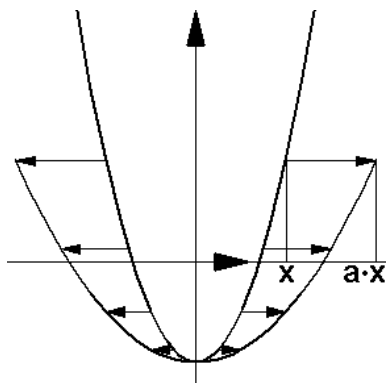
$$h(x) := -f(x)$$



$$h(x) := a \cdot f(x)$$



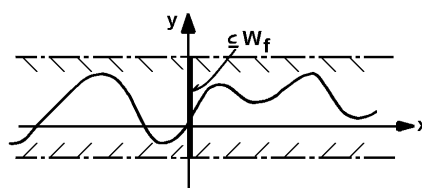
$$h(x) := -f(a \cdot x)$$



Beschränkte Funktionen — Fonctions bornées

Beispiele: • Exemples:

- ▷ $f(x) = \sin(x), D_f = \mathbb{R}$
- ▷ $f(x) = x^2, D_f = [-1, 1]$
- ▷ $f(x) = e^{-x^2}, D_f = \mathbb{R}$



Definition: • Définition: f beschränkt • bornée $\Leftrightarrow \exists_{M \in \mathbb{R}^+} \forall_{x \in D_f} : |f(x)| \leq M$

Funktion mit Polen — Fonction avec des pôles

Wir betrachten die nachfolgende Skizze: • Nous considérons l'esquisse suivante:

Sei • Soit C = Kreis • cercle,

N = Nordpol • pôle nord

Die Abbildung $y \mapsto P = C(y)$
(resp. $P \mapsto y$) ist **bijektiv** (eindeutig)

$\forall P \in C, P \neq N$

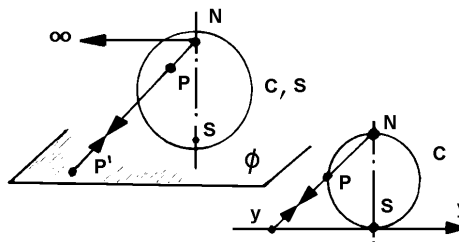
• L'application $y \mapsto P = C(y)$ (resp. $P \mapsto y$) est **bijektive** (bi-univoque)

$\forall P \in C, P \neq N$

Konsequenz: • **Conséquence:**

$P = C(y) \rightarrow N \Rightarrow y \rightarrow \pm\infty$

$\leadsto \pm\infty$ entspricht dem Nordpol • correspond au pôle nord.



Daher benützen wir folgende Definition: • C'est pourquoi nous utilisons la définition suivante:

Definition: • **Définition:**

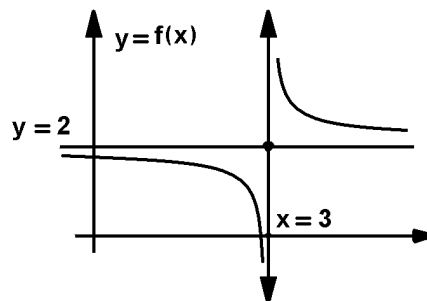
x_0 heisst **Polstelle** von f , wenn sich $y = f(x)$ gegen $\pm\infty$ resp. $P = C(y)$ gegen den Nordpol N bewegt, falls wir x gegen x_0 bewegen.

• x_0 s'appelle **place du pôle** de f , si $y = f(x)$ avance vers $\pm\infty$ resp. $P = C(y)$ avance vers le pôle nord N , si nous déplaçons x en direction de x_0

Bsp.: • **Exemple:**

$$f(x) = \frac{1}{x-3} + 2$$

$\leadsto$ Polstelle • Place du pôle $x = 3$

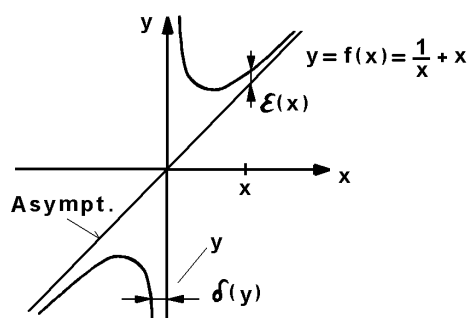


Funktionen mit Asymptoten — Fonctions avec asymptotes

Zeichnet man im Graphen von vornhin durch die Polstelle eine senkrechte Gerade, so stellt man fest, dass die Distanz zwischen der Funktionskurve und dieser Geraden immer kleiner wird, je grösser wir $|y|$ werden lassen. Diese senkrechte Gerade hier ist somit eine „Schmiegegerade“ oder **Asymptote**. • Si l'on dessine dans le graphe qu'on vient de traiter une droite perpendiculaire à travers la place du pôle, on constate que la distance entre la courbe de la fonction et cette droite devient de plus en plus petite si on laisse s'agrandir $|y|$. Cette droite verticale est donc une droite qui s'approche de la courbe ou un **asymptote**.

Betrachtet man im Graphen von $f(x) = \frac{1}{x-3} + 2$ die horizontale Gerade $y = 2$, so stellt man ebenfalls dieses Anschmiegeverhalten **asymptotisches Verhalten** fest. Man spricht hier von einer waagrechten Asymptote.

• Si l'on considère dans le graphe de $f(x) = \frac{1}{x-3} + 2$ la droite horizontale $y = 2$, on aperçoit aussi ce comportement d'approchement **comportement asymptotique**. Ici on parle d'un asymptote horizontal.



Im Graphen von $f(x) = \frac{1}{x} + x$ dagegen tut dies die Gerade $y = x$. • Dans le graphe de $f(x) = \frac{1}{x} + x$ c'est la droite $y = x$ qui montre ce comportement.

Zu einer **exakten Definition** der Asymptote können wir erst gelangen, wenn wir den **Grenzwertbegriff** erarbeitet haben. • Nous pouvons arriver à une **définition exacte** seulement si nous avons élaboré la notion de la **valeur limite**.

Für den Moment können wir uns aber schon merken, dass seine nicht vertikale Asymptote $y = h(x)$ dann gegeben ist, wenn die Distanz $|f(x) - h(x)|$ mit grösser werdendem x (oder $-x$) immer kleiner wird, beliebig klein, falls man nur x (oder $-x$) genügend gross macht.

• Pour le moment nous pouvons retenir qu'un asymptote non vertical $y = h(x)$ est donné quand la distance $|f(x) - h(x)|$ devient de plus en plus petite, si l'on laisse s'agrandir x (ou $-x$), la distance devient aussi petite qu'on veut, il faut seulement choisir x (ou $-x$) assez grand.

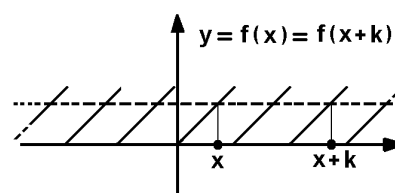
Jedoch können wir schon heute Funktionen mit Hilfe von Graphikrechnern auf Hinweise auf Asymptoten untersuchen und Erfahrungen sammeln. • Tenant compte de ce défaut nous pouvons déjà maintenant acquérir de l'expérience en utilisant des calculatrices ou des ordinateurs "graphiques". Comme ça on obtient des indications pour des asymptotes.

Periodische Funktion — Fonction périodique

Wir kennen bereits die Sägezahnfunktion:

• Nous connaissons déjà la fonction en forme de scie:

$$f(x) = x - [x]$$



Es gilt: $\forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N} : f(x) = f(x+k)$. Diese Funktion zeigt offensichtlich ein periodisches Verhalten.

• Cette fonction montre, comme on voit, un comportement périodique.

Wir definieren allgemein: • Nous définissons de façon générale:

Definition: • **Définition:**

Eine Funktion heisst **periodisch** mit der Periode p

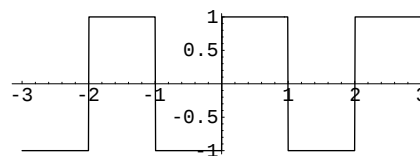
• Une fonction s'appelle **périodique** avec la période p

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N} : f(x) = f(x + kp)$$

Bsp.: • **Exemple:** $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$, $f(x) = x - [x] \dots$

Bsp.: • Exemple:

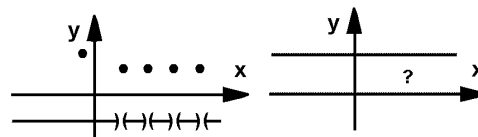
$$f(x) = \operatorname{sgn}(\sin(\pi x))$$



Punktweise definierte Funktion — Fonction définie par points

Beispiele: • Exemples:

$$\begin{aligned} \triangleright \quad f(x) &= \begin{cases} 5 & x \in \mathbb{N} \\ -2 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \end{cases} \\ \triangleright \quad d(x) &= \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases} \end{aligned}$$



Im letzten Beispiel ist der Funktionswert $d(x)$ je nach Zahlentyp des Wertes von x anders definiert. Das führt hier zu einem **unendlich dichten Kamm**. Es ist prinzipiell unmöglich (auch für einen Graphik-Rechner!) den Graphen dieser Funktion sinnvoll zu zeichnen (auch für einen Graphik-Rechner!). Man sieht hier eindrucksvoll die Grenzen der Darstellbarkeit.

• Dans l'exemple dernier la valeur de la fonction $d(x)$ est définie différemment selon le type de valeur de x . Ici ça mène à un **peigne infiniment dense**. Il est impossible de dessiner le graphe de cette fonction de manière raisonnable (aussi pour une calculatrice qui produit des représentations graphiques!). C'est impressionnant de voir les limites des possibilités de représenter sont visibles.

Diskret definierte Funktion — Fonction définie de manière discrète

Definition: • Définition:

Ein Punkt $x \in M$ heisst **isoliert**, wenn zwischen x und dem nächstgelegenen Punkt $y \in M$ ein positiver Abstand $d > 0$ existiert. (x ist also vom Rest der Menge M durch einen gewissen Abstand getrennt.) • Un point $x \in M$ s'appelle **isolé** (acnodal), s'il existe une distance positive $d > 0$ entre x et le point le plus proche $y \in M$. (x est donc séparé du reste de l'ensemble M par une certaine distance.

Definition: • Définition:

$M = D_f$ heisst **diskret**, wenn diese Menge nur aus isolierten Punkten besteht. • $M = D_f$ s'appelle **discret**, si cet ensemble ne consiste que de points discrets.

Beispiele für diskrete Mengen: • Exemples pour des ensembles discrets:

$$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \{1, 2, 3, 4, 5\} \dots$$

Definition: • Définition:

Diskrete Funktionen sind Funktionen, deren Graph eine diskrete Menge bildet. • Les **fonctions discrètes** sont des fonctions dont le graphe est un ensemble discret.

Konsequenz: • Conséquence:

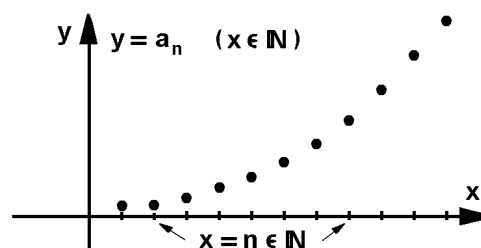
Ist D_f diskret, so ist f diskret. • f est discret quand D_f est discret.

Ein Beispiel für diskrete Funktionen sind die Zahlenfolgen: • Un exemple pour les fonctions discrètes sont les suites de nombres:

Definition: • **Définition:** **Zahlenfolgen** sind Funktionen mit $D_f = \mathbb{N}$.
 • **Les suites de nombres** sont des fonctions avec $D_f = \mathbb{N}$

Bsp.: • **Exemple:**

$\triangleright f(x) = f(n) = a_n = n^2, x = n \in \mathbb{N}$
 $\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{N}\} = \{(n, a_n) \mid n \in \mathbb{N}\} =$
 $= \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25), \dots\}$
 $:= [1, 4, 9, 16, 25, \dots]$



Allgemeines Glied: • *Terme général:*

$\langle a_n \rangle = \langle n^2 \rangle$

Bsp.: • **Exemple:** $\langle a_n \rangle = \langle (-1)^n + \frac{1}{n} \rangle \leadsto$ funktional. • *fonctionnel.*

$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (a_n + \frac{2}{a_n}) \leadsto$ rekursiv. • *récuratif.*

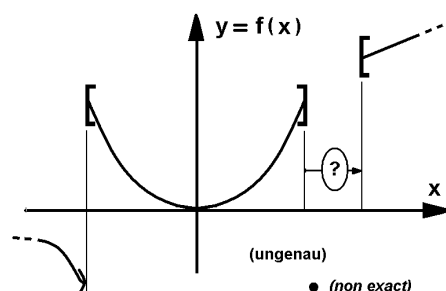
Stückweise definierte Funktion — Fonction définie par morceaux

Man kann Funktionen auf verschiedenen disjunkten Teilintervallen einzeln definieren:

• *On peut définir des fonctions sur différents intervalles partiels séparément:*

Bsp.: • **Exemple:**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x} + 1 & x < -2 \\ x^2 & -2 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2}x + 5 & 3 \leq x \end{cases}$$



Für $2 \leq x < 3$ ist die Funktion nicht definiert.

• *Pour $2 \leq x < 3$ la fonction n'est pas définie.*

Verkettete Funktion — Fonction composées

Bsp.: • **Exemple:** (Vgl. Algebra! • *Voir algèbre!*)

$$x \xrightarrow{f} y = f(x) \xrightarrow{g} z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) \xrightarrow{h} w = h(z) = h(g(f(x))) = (h \circ (g \circ f))(x)$$

Speziell: • *Spécialement:*

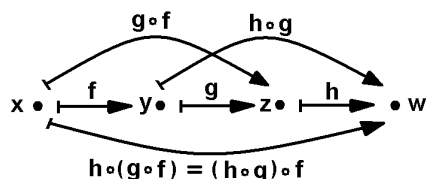
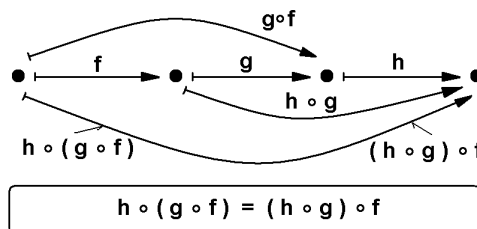
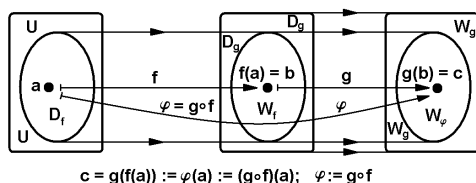
$$x \xrightarrow{f} y = f(x) = 2x + 3 \xrightarrow{g} z = g(y) = \sin(y) = g(f(x)) = \sin(2x + 3) = (g \circ f)(x) \xrightarrow{h} w$$

$$w = h(z) = e^z = h(g(y)) = e^{\sin(y)} = h(g(f(x))) = e^{\sin(2x+3)} = h \circ (g \circ f)(x)$$

oder • *ou*

$$x \xrightarrow{f} y = f(x) = \frac{x}{2\pi} + \frac{1}{2} \xrightarrow{g} z = g(y) = y - [y] = g(f(x)) = (\frac{x}{2\pi} + \frac{1}{2}) - [\frac{x}{2\pi} + \frac{1}{2}] = (g \circ f)(x) \xrightarrow{h} w$$

$$w = h(z) = 4z - 2 = h(g(y)) = 4([y]) - 2 = h(g(f(x))) = 4((\frac{x}{2\pi} + \frac{1}{2}) - [\frac{x}{2\pi} + \frac{1}{2}]) - 2 = h \circ (g \circ f)(x)$$



$$\begin{aligned}
 y &= f(x), \quad z = g(y) = g(f(x)) =: (g \circ f)(x) \\
 w &= h(z) = h(g(y)) = (h \circ g)(y) \quad (*) \\
 &= (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x) \\
 (*) &= (h \circ g)(y) = h(g(y)) = h(g(f(x))) \\
 &= h((g \circ f)(x)) = (h \circ (g \circ f))(x) \\
 &\Rightarrow ((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (h \circ g) \circ f = (h \circ (g \circ f))$$

Wie man aus dem Beispiel erkennt, kann man mit Hilfe der Gauss-Klammer-Funktion und der Verkettung beliebige Sägezahnfunktionen aufbauen. Das wird wichtig, wenn man mit Computeralgebra-Programmen (z.B. mit *Mathematica*) solche Funktionen bearbeiten will.

• *Comme on voit par l'exemple, on peut construire des fonctions en forme de scie quelconques à l'aide de la fonction aux parenthèses de Gauss. Ça devient important quand on veut traiter de telles fonctions à l'aide des programmes d'algèbre à l'ordinateur (p.ex. avec Mathematica).*

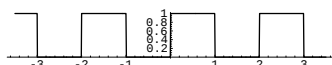
Einige Beispiele — Quelques exemples

1. Es gilt: • *Il vaut:*

$$\text{Max}(a, b) = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2} = \frac{1}{2} (a+b + (a-b) \cdot \text{sgn}(a-b))$$

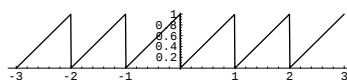
$$\text{Min}(a, b) = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2} = \frac{1}{2} (a+b - (a-b) \cdot \text{sgn}(a-b))$$

2.



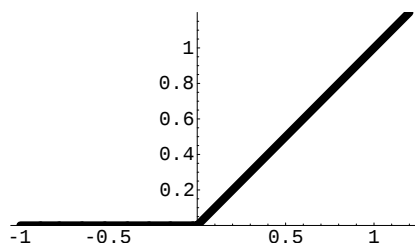
$$s_1(x) := \left[\frac{\sin(\pi x)}{2} + 1 \right]$$

3.



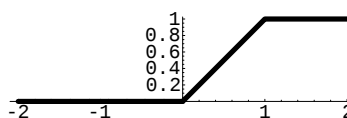
$$s_2(x) := x - [x]$$

4.



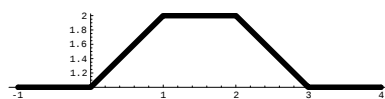
$$h(x) := \frac{|x| + x}{2}$$

5.



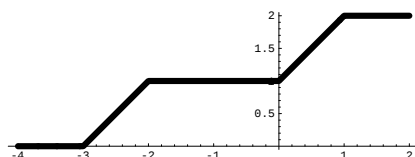
$$v(x) := h(x) - h(x-1)$$

6.



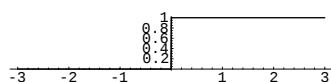
$$v_1(x) := v(x) + v(-x + 3)$$

7.



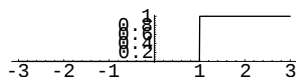
$$v_2(x) := v(x) + v(x + 3)$$

8.



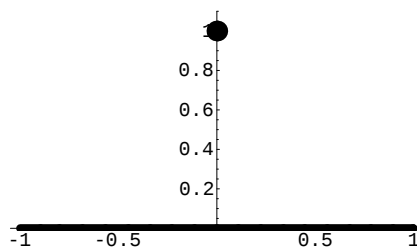
$$H(x) := \operatorname{sgn}\left(\frac{|x| + x}{2}\right)$$

9.



$$H_1(x) := H(x - 1)$$

10.



$$u(x) := 1 - \operatorname{sgn}^2(x)$$

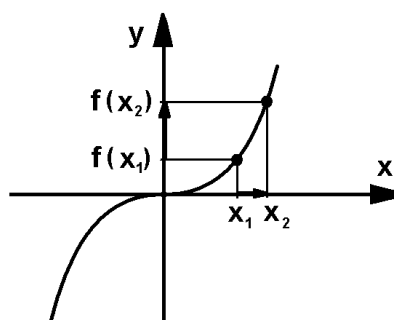
Monotone Funktionen — Fonctions monotones

Bsp.: • **Exemple:**

$$f(x) = x^3 \rightsquigarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Falls x wächst, so wächst auch $y = f(x)$.

• Si x augmente, $y = f(x)$ augmente aussi.



Solche Verhaltensweisen fassen wir in strengen Definitionen: • De tels comportements nous les définissons de manière stricte:

Definition: • **Définition:**

f heisst: • *Quant à f :*

⊙ **monoton wachsend** • **monte (croissant, augmente) de façon monotone**

$$\Leftrightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

⊙ **strengmonoton wachsend** • **monte monotonement de façon stricte**

$$\Leftrightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

⊙ **monoton fallend** • **descend (décroissant) de façon monotone**

$$\Leftrightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

⊙ **strengmonoton fallend** • **descend monotonement de façon stricte**

$$\Leftrightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Z.B. • *P.ex.*

▷ $f(x) = 7$ fällt und wächst monoton! • *descend et monte monotonement!*

▷ $f(x) = x^3$ wächst streng monoton • *monte monotonement de façon stricte.*

▷ $f(x) = x^2$ fällt streng monoton für $x \leq 0$ und wächst streng monoton für $x \geq 0$.

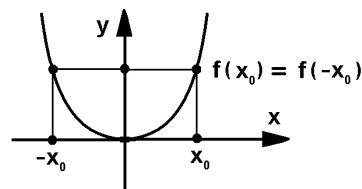
• $f(x) = x^2$ descend monotonement de façon stricte pour $x \leq 0$ et augmente monotonement de façon stricte pour $x \geq 0$.

Gerade und ungerade Funktionen — Fonctions paires et impaires

Funktionen, deren Graph symmetrisch zur y -Achse ist, nennen wir **gerade** • *Les fonctions dont le graphe est symétrique par rapport à l'axe y s'appellent paires.*

Bsp.: • **Exemple:**

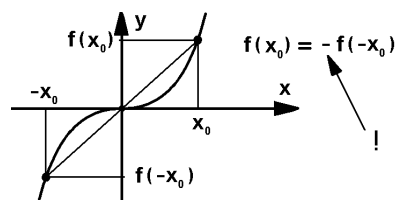
$$f(x) = x^2 = (-x)^2 = f(-x)$$



Funktionen, deren Graph symmetrisch zum Ursprung ist, nennen wir **ungerade** • *Les fonctions dont le graphe est symétrique par rapport à l'origine s'appellent impaires.*

Bsp.: • **Exemple:**

$$f(x) = x^3 = -(-x)^3 = -f(-x)$$



Definition: • **Définition:**

f heisst **gerade** • *s'appelle paire*

$$\Leftrightarrow \forall x \in D_f \quad f(x) = f(-x)$$

Definition: • **Définition:**

f heisst **ungerade** • *s'appelle impaire*

$$\Leftrightarrow \forall x \in D_f \quad f(x) = -f(-x)$$

Es gilt: • *Il vaut:*

1. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, f, g gerade • *paire*

$$\Rightarrow \alpha f + \beta g \text{ gerade} \quad \bullet \text{ paire, } f \cdot g \text{ gerade} \quad \bullet \text{ paire, } \frac{f}{g} \text{ (} g(x) \neq 0 \text{) gerade} \quad \bullet \text{ paire}$$

2. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, f, g ungerade • *impaire*

$\Rightarrow \alpha f + \beta g$ ungerade • *impaire*, $f \cdot g$ ungerade • *impaire*, $\frac{f}{g}$ ($g(x) \neq 0$) ungerade • *impaire*

Ganzrationale Funktionen — Fonctions polynomiales

Geg.: • **Donné:** Polynom • Polynôme

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 x^0 = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

Es gilt • *Il vaut:* $(\dots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \dots + a_1)x + a_0$

(**Horner**-Schema. Mit dieser Darstellung kommt man bei der Berechnung mit wesentlich weniger arithmetischen Operationen aus. • *Schéma de Horner. Dans cette représentation on arrive à calculer les valeurs avec beaucoup moins d'opérations arithmétiques.*)

$a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$: **Koeffizienten** des Polynoms • *coefficients du polynôme*.

n : **Grad** des Polynoms (*pgrad*) • *degré du polynôme (pgrad)*.

Ganzrationale Funktionen sind solche, die durch ein Polynom gegeben sind.

• *Les fonctions polynomiales sont celles qui sont données par un polynôme.*

$$\leadsto f(x) = p(x), \quad D_f = \mathbb{R}.$$

Für Polynome gilt der **Hauptsatz der Algebra** (vgl. Teil Algebra). Obwohl die komplexen Zahlen hier nicht behandelt worden sind, ist dieser Satz nachstehend wiedergegeben. Er ist uns auch für reelle Funktionen nützlich. • *Pour les polynômes, il vaut le théorème principal de l'algèbre (voir partie algèbre). Même si les nombres complexes ne sont pas traités ici, ce théorème est reproduit ci-dessous. Il nous est utile aussi pour les fonctions réelles.*

Satz: • **Théorème:** (Hauptsatz der Algebra • Théorème principal de l'algèbre)

Vor.: • **Hyp.:**

$p(x)$ = Polynom mit Grad n • *polynôme de degré n .*

Beh.: • **Thè.:**

$p(x)$ hat in • *possède dans $\mathbb{C}$ n NS'Z x_i .*

$\leadsto p(x)$ hat in • *possède dans $\mathbb{R}$ $m \leq n$ NS'Z.*

$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ ($\leadsto x_1, \dots, x_n$ NS)

$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \leadsto$ **Linearfaktorenzerlegung**

• *Décomposition en facteurs linéaires*

Speziell: • **Spécialement:**

$n = 2$: $p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 + a(-x_1 - x_2)x + ax_1 x_2$

$\Rightarrow a_1 = b = -a(x_1 + x_2) = -a_0(x_1 + x_2), \quad a_0 = c = ax_1 x_2 = a_2 x_1 x_2$ (Vieta! • *Viète*)

Bsp.: • **Exemple:** $p(x) = x^2 + 3x - 4, \quad x_1, x_2 = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases} \quad (x - 1)(x + 4) = x^2 + 3x - 4$

Gebrochen rationale Funktionen — Fonctions rationnelles fractionnaires

Seien • *Soient* $p(x), q(x)$ Polynome • *polynômes*.

Definition: • **Définition:** $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ heisst **gebrochen rationale Funktion**
• *s'appelle fonction rationnelle fractionnaire*

Bsp.: • **Exemple:** $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x + 9}{x^2 - 8x - 3}$

Falls $\text{pgrad}(p(x)) > \text{pgrad}(q(x))$ gilt, kann man $p(x)$ durch $q(x)$ dividieren, wobei ein Rest $r(x)$ übrigbleiben kann mit $\text{pgrad}(r(x)) < \text{pgrad}(q(x))$. • *Si l'on a $\text{pgrad}(p(x)) > \text{pgrad}(q(x))$ on peut diviser $p(x)$ par $q(x)$. Mais on peut obtenir un reste $r(x)$ avec $\text{pgrad}(r(x)) < \text{pgrad}(q(x))$.*

$\leadsto f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = h(x) + \frac{r(x)}{q(x)}, \text{pgrad}(r(x)) < \text{pgrad}(q(x))$

Bsp.: • **Exemple:** $\frac{9 + 2x - 4x^2 + x^3}{-3 - 8x + x^2} = 4 + x + \frac{21 + 37x}{-3 - 8x + x^2} = 4 + x + R(x)$

$4 + x \leadsto$ Asymptote • *Asymptote, $R(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \infty$)*

Bemerkung: • **Remarque:** Da rationale Funktionen nur endlich viele Nullstellen haben (beschränkt durch den Grad des Zählerpolynoms), können periodische Funktionen nicht rational sein. • *Comme le nombre de zéros d'une fonction rationnelle est fini (limité par le degré du numérateur), les fonctions périodiques ne peuvent pas être rationnelles.*

Satz: • **Théorème:** Eine periodische Funktion ist nicht rational.
• *Une fonction périodique n'est pas rationnelle.*

2.2.3 Umkehrabbildungen — Applications inverses

Begriff — Notion

Bsp.: • **Exemple:**

$f(x) = f(-x) = x^2$ ist nicht bijektiv

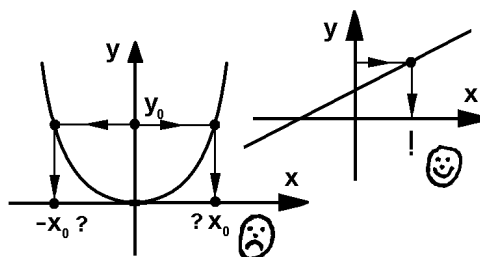
• *n'est pas bijectif:*

$$\begin{array}{ccc} x & \mapsto & x^2 \\ -x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

$f(x) = y = ax + b$ hingegen ist bijektiv

• *est bijectif*

$$x = \frac{y - b}{a}$$



Bei der Behandlung der Abbildungen (vgl. Teil Algebra) wird die Umkehrabbildung genau erklärt. Hier nur kurz: Wird eine Abbildung $A \mapsto B$ durch die Menge $\{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$ gegeben, so definiert die Menge $\{(b, a) \mid a \in A \wedge b \in B\}$ die **Umkehrabbildung**.

• *La notion de l'application inverse est expliquée au "chapitre" des applications (voir partie algèbre). Ici de manière brève: Si l'application $A \mapsto B$ est donnée par l'ensemble $\{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$, l'ensemble*

$\{(b, a) \mid a \in A \wedge b \in B\}$ définit l'application inverse.

Ist f bijektiv, so ist die Umkehrabbildung f^{-1} wieder Funktion mit $D_{f^{-1}} = W_f$.

• Si f est bijectif, l'application inverse f^{-1} est de nouveau une fonction avec $D_{f^{-1}} = W_f$.

$$\leadsto \quad \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & y = f(x) \\ = f^{-1}(y) & \xleftarrow{f^{-1}} & y \end{array} \quad \leadsto \quad \begin{array}{l} x = f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) \\ y = f(x) = f(f^{-1}(y)) \end{array}$$

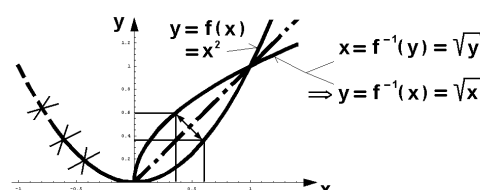
Manchmal wird f erst durch **Einschränkung** von D_f bijektiv. • Parfois f devient bijective seulement par restriction de D_f .

Bsp.: • **Exemple:** $f(x) = x^2$, $D_f = \mathbb{R}_0^+$

Beispiel Quadratwurzel — Exemple racine carrée

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{f} & y = x^2 \\ x = \sqrt{y} & \xleftarrow{f^{-1}} & y \end{array}$$

$$\leadsto f^{-1}(y) = x = +\sqrt{y}$$



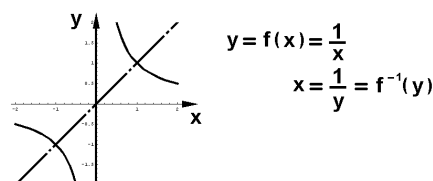
Darstellungsproblem, Variablenwechsel — Problème de représentation, changement de variable

Problem: • **Problème:** Oben war x die unabhängige Variable von f und y die abhängige Variable $y = f(x)$. Jedoch war y die unabhängige Variable von f^{-1} . Sogar ist manchmal ungeschickt: Besonders dann, wenn zwecks Vergleich der Graph von f und derjenige von f^{-1} in einem Diagramm dargestellt werden sollen. Dann ist es erforderlich, auch bei f^{-1} x als unabhängige Variable einzuführen, d.h. bei f^{-1} **die Variablen zu vertauschen**.

• En haut x était la variable indépendante de f et y la variable indépendante de f^{-1} . (Mais y était la variable dépendante chez f : $y = f(x)$.) Parfois cette constellation n'est pas très agréable: Surtout quand il faut dessiner les deux graphes dans le même diagramme pour pouvoir les comparer. Alors il faut introduire x aussi dans f^{-1} comme variable indépendante, c.v.d. **il faut échanger les variables** à f^{-1} .

Vertauschen der Variablen bedeutet aber vertauschen der Axen, d.h. Spiegelung an der Geraden, die den ersten Quadranten halbiert. • Echange des variables signifie échange des axes, c. v.d. réflexion à la droite qui coupe le premier quadrant en deux morceaux égaux.

$$\begin{array}{ccc} & f^{-1} & \\ x & \xrightarrow{\quad} & y = f(x) \\ & f & \\ x = f^{-1}(y) & \xleftarrow{\quad} & y = f^{-1}(f(x)) \end{array}$$



$$\leadsto y = f(x) = f(f^{-1}(f(x))), \quad f = f \circ (f^{-1} \circ f) = f \circ f^{-1} \circ f, \quad f^{-1} = f^{-1} \circ f \circ f^{-1} \dots$$

(Abbildungen sind assoziativ, vgl. Algebra. • Les applications sont associatives, voir algèbre.)

$$\text{Speziell:} \quad \bullet \text{ Spécialement: } f(x) = \frac{1}{x} = y \Rightarrow x = \frac{1}{y}$$

$\Rightarrow f(x) = f^{-1}(x)$ (nach Variablenwechsel • après avoir échangé les variables).

Satz: • Théorème: Bei einer streng monotonen Funktion ist die Umkehrabbildung wieder eine Funktion mit $W_f = D_f$. • *L'application inverse d'une fonction qui est monotone de façon stricte est de aussi une fonction avec $W_f = D_f$.*

Beweis: • Preuve: Bei strenger Monotonie ist die Injektivität offensichtlich.
• *Pour la monotonie stricte, injectif est bien claire.*

2.2.4 Transzendente Funktionen — Fonctions transcendentes

Elementare Begriffe — Notions élémentaires

Problem: • Problème: Nach langen Schuljahren stellen wir uns nun eine Frage: **Was ist ein Winkel** und was ist das **Mass eines Winkels**? Vergleichbar sind die Fragen: Was ist eine Fläche und was ist das Mass einer Fläche? — Flächen sind zum Beispiel ein Kreis, ein Quadrat oder ein Dreieck in der Ebene. Flächen haben also eine Form. Das Mass kann $1 m^2$ sein. 1 ist eine Zahl. Wie ist das nun entsprechend beim Winkel und beim Winkelmass?

• *Après de longues années d'école nous nous posons une question: Qu'est-ce un angle et qu'est-ce la mesure de l'angle? Des questions comparables sont: Qu'est-ce une surface et qu'est-ce la mesure d'une surface? — Par exemple un cercle, un carré, un triangle sont des surfaces. Les surfaces ont donc une forme. Tandis que la mesure peut être $1 m^2$. 1 est un nombre. Maintenant que vaut-il pour les angles et les mesures des angles?*

Hören wir dazu Euklid: • *Écoutons ce qu'Euclide dit à ce sujet:* Euklid sagt: Zwei nicht parallele Geraden zerschneiden eine Ebene in vier Winkel. — Ein **Winkel** ist demnach eines dieser vier von zwei Geraden ausgeschnittenen Ebenenstücke. Ob wir die Ränder dazu zählen oder nicht — das lassen wir vorerst einmal offen. Dass aber ein Winkel ein Teil einer Ebene ist, werden wir unverzichtbar gebrauchen, wenn es darum geht, dem Winkel einen Richtungsvektor zuzuordnen. • *Euclide dit: Deux droites non parallèles coupent un plan en quatre angles. Un angle est donc une de ces quatre pièces qui sont coupées de cette manière. Pour le moment nous ne tenons pas compte s'il faut inclure les bords ou non. Mais nous utilisons le fait que l'angle est une partie du plan quand il s'agit d'adjoindre un vecteur de direction à l'angle.*

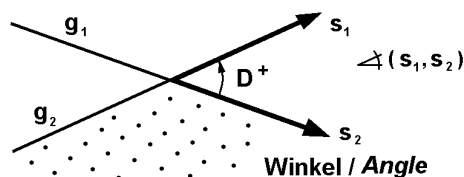
Problem: • Problème:

Durch zwei von einem Punkt ausgehende Strahlen s_1 und s_2 werden zwei Winkel definiert: $\angle(s_1, s_2)$ und $\angle(s_2, s_1)$.

$(\angle(s_1, s_2) \rightsquigarrow$ Drehe s_1 um den Schnittpunkt S in s_2 .)

• *Deux rayons s_1 und s_2 qui partent d'un point définissent deux angles: $\angle(s_1, s_2)$ et $\angle(s_2, s_1)$.*

$(\angle(s_1, s_2) \rightsquigarrow$ Fais tourner s_1 autour du point d'intersection S dans s_2 .)



Orientierung: Positiv in Richtung Gegenuhreigersinn.

• **Orientation:** Positive en direction opposée des aiguilles de la montre.

Messung des Winkels • Mesure de l'angle:

Idee: Unterteile den Winkel in kongruente Teile.

Altes Babylon: Ca. 360 Tage pro Jahr $\rightsquigarrow$ 360° (Altgrad) im Vollwinkel. (Der Sternhimmel verschiebt sich pro Tag um ca. ein Grad.) „Moderner“ Neugrad: 100 Teile statt 90 Teile im rechten Winkel.

Für die Mathematik ist das **Bogenmass** besser geeignet: Messe als Winkelgrösse die Länge des Bogens auf dem Einheitskreis. (In der Physik verwendet man dazu die überflüssige künstliche Einheit **Radian**.)

• *Idée: Partage l'angle en parties congruentes.*

Ancienne Babylone: Env. 360 jours par an $\rightsquigarrow$ 360° (degré ancien) dans l'angle plein. (Le firmament se

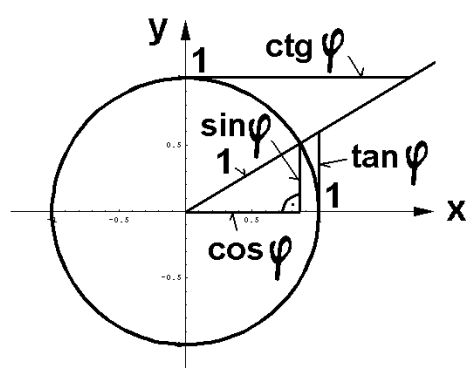
déplace par jour environ d'un degré.) "Plus moderne" grade: 100 parties au lieu de 90 parties dans l'angle droit.

Pour les mathématiques la mesure d'arc est plus utile: Mesure comme grandeur de l'angle la longueur de l'arc sur le cercle unité. (Dans la physique on utilise l'unité superflue et artificielle: **radiant**.)

Winkelfunktionen — Fonctions trigonométriques

Hier gehen wir von der Geometrie aus und definieren vorerst die Winkelfunktionen (trigonometrische Funktionen) geometrisch am Einheitskreis. Von der mathematischen Problematik der Winkel- und Längenmessung sehen wir vorerst einmal ab. (Messung $\leadsto$ Physik.)

• Ici nous partons de la géométrie. Pour le moment nous définissons les fonctions trigonométriques à l'aide du cercle unité. Actuellement nous ne nous occupons pas de la problématique du mesurage des angles et des longueurs. (Mesurage $\leadsto$ physique.)



Siehe Skizze • Voir esquisse:

$\alpha \leadsto$ Standard: Bogenmass • Standard: mesure d'arc

Sinus: $\sin(\alpha) = \frac{b}{c}$

Cosinus: $\cos(\alpha) = \frac{a}{c}$

α : Bogen • arc $\leadsto$ arcus.

Secans: $\sec(\alpha) := \frac{1}{\cos(\alpha)}$

Cosecans: $\csc(\alpha) := \frac{1}{\sin(\alpha)}$

Tangens: $\tan(\alpha) := \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

Cotangens: $\cot(\alpha) = \operatorname{ctg}(\alpha) := \frac{1}{\tan(\alpha)}$

$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ (Pythagoras • Pythagore)

Graphen: • Graphes:

$\sin(\alpha), \cos(\alpha) \in [0, 1]$

NS'Z: $\sin, \tan \leadsto \alpha = n\pi, n \in \mathbb{Z}$

$\cos, \cot \leadsto \alpha = n\pi + \frac{\pi}{2}$

Polstellen • Places des pôles:

$\tan \leadsto \alpha = n\pi + \frac{\pi}{2}$

$\cot \leadsto \alpha = n\pi$

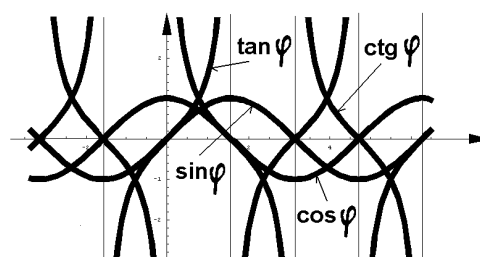
Periodizität • Périodicité:

$\sin(\alpha) = \sin(\alpha + 2n\pi)$

$\cos(\alpha) = \cos(\alpha + 2n\pi)$

$\tan(\alpha) = \tan(\alpha + n\pi)$

$\cot(\alpha) = \cot(\alpha + n\pi)$



Bemerkung: • Remarque:

Trigonometrische Funktionen sind als periodische Funktionen nicht rational.

• Les fonctions trigonométriques sont périodiques et donc elles ne sont pas rationnelles.

Arcusfunktionen — Fonctions circulaires inverses

Auf gewissen eingeschränkten Bereichen sind die trigonometrischen Funktionen bijektiv und somit dort umkehrbar.

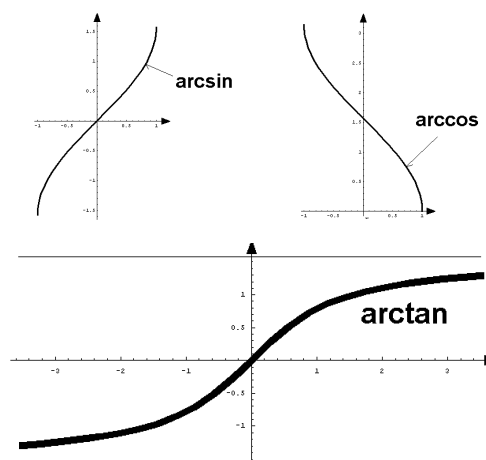
D.h. f^{-1} ist bereichsabhängig. Wir wählen als **Standardbereich** jeweils den Bereich um den Ursprung oder unmittelbar rechts davon.

→ **Arcusfunktionen.**

- Dans certains intervalles les fonctions trigonométriques sont bijectives, donc inversibles.

Ç.v.d. f^{-1} dépend de l'intervalle. Nous choisissons comme **intervalles standard** selon le cas l'intervalle autour de l'origine ou bien directement à droite de l'origine.

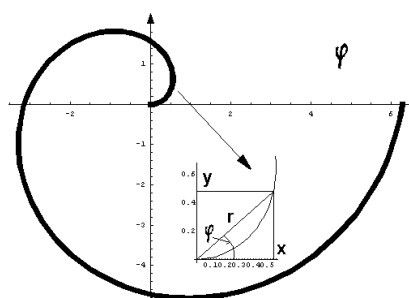
→ **Fonctions circulaires inverses** (trigonométriques réciproques).



Anwendung bei Polarkoordinatensystemen — Application pour les systèmes de coordonnées polaires

$$P = P(x, y) = P(r, \varphi) \leadsto$$

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\varphi) \\ y &= r \sin(\varphi) \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \cot(\alpha) &= \cot(\alpha + n\pi) \end{aligned}$$



Bsp.: • **Exemple:**

$$r : \varphi \mapsto r(\varphi) = \varphi \quad (\sim \text{Spirale})$$

$$r : \varphi \mapsto r(\varphi) = \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad (\sim \text{Cartinoide})$$

Exponentialfunktion — Fonction exponentielle

Bsp.: • **Exemple:** $f(n) = 2^n$, $n \in \mathbb{Z}$

→ Wertetabelle: • *Table de valeurs:*

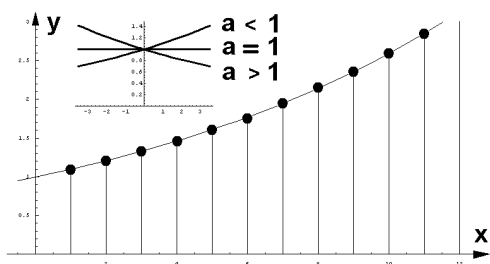
n	-4	-2	0	1	2	4	
$f(n)$	$2^{-4} = \frac{1}{16}$	$2^{-2} = \frac{1}{4}$	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^4 = 16$	u.s.w. • etc..

Wir definieren allgemeiner: • *Nous définissons plus généralement:*

Definition: • **Définition:** $f(x) = a^x$ heisst **Exponentialfunktion** • s'appelle **fonction exponentielle**

$a \leadsto$ **Basis** • **base** ($a > 0$)

$x \leadsto$ **Exponent** • **exposant**



$a^x \rightsquigarrow$ definiert für • *défini pour* $x \in \mathbb{N}$

$x = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$

$\rightsquigarrow a^x = a^{\frac{n}{m}} := (a^n)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$ definiert

• *défini*

$x \notin \mathbb{Q} \rightsquigarrow x$ annähern durch • *approximer par* $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$

$\rightsquigarrow a^x$ annähern durch • *approximer par* $a^{\frac{n}{m}} \in \mathbb{Q}$

(Annäherungsprozesse vgl. Ausführungen über Folgen und Reihen. • *Approximations voir les exposés concernant suites et séries.*)

Wichtig: • **Important:**

Eulersche Exponentialfunktion • **Fonction exponentielle d'Euler**

$\rightsquigarrow f(x) = e^x, e \approx 2.718281\dots, e \notin \mathbb{Q}, e \in \mathbb{R}$ (**Eulersche Zahl** • **nombre d'Euler**)

Nachfolgend einige bekannte Regeln für das Rechnen mit Potenzen: • *Ci-joint quelques règles connues concernant le calcul avec des exposants:*

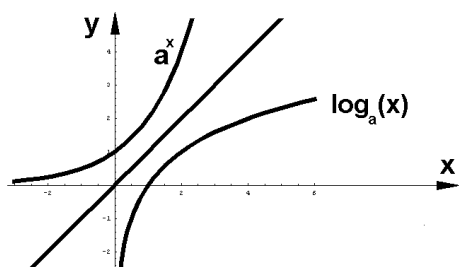
Regeln: • **Règles:**

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
3. $a^0 = 1$
4. $a^1 = a$
5. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}, a \neq 0$
6. $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$
7. $a > 1 \wedge x > 0 \Rightarrow a^x > 1$
8. $a > 0 \Rightarrow \forall_x a^x > 0$

Logarithmusfunktion — Fonction logarithme

Sei • *Soit* $a > 1, x < y, x+d=y, d > 0 \rightsquigarrow a^y = a^{x+d} = a^x \cdot a^d > a^x \Rightarrow a^x < a^y \rightsquigarrow a > 1 \Rightarrow a^x$ streng monoton wachsend • *croissant de façon monotone et stricte.*

Ebenso: • *De même:* $0 < a < 1 \Rightarrow a^x$ streng monoton fallend • *décroissant de façon monotone et stricte.*

**Konsequenz: • Conséquence:**

- 1) $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1 \Rightarrow f^{-1}(x)$ existiert für $x > 0$. Es ist: $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}_0^+$
- 2) $f(x) = a^x = y$ monoton wachsend $\Rightarrow f^{-1}(y) = \log_a(x)$ ebenfalls monoton wachsend

Definition: • Définition:

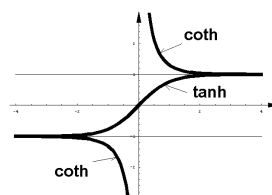
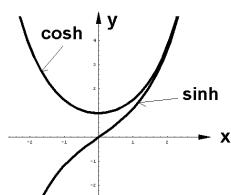
$f(x) = a^x$
 $\leadsto f^{-1}(x)$ heisst **Logarithmusfunktion** zu Basis a
 • s'appelle **fonction logarithmique** pour la base a

Speziell: • Spécialement: $\log_e(x) := \ln(x)$ heisst • s'appelle **Logarithmus naturalis**.

Die folgenden Gesetze oder Regeln oder Eigenschaften beweist man durch Rückgriff auf die Exponentialfunktionen: • *On prouve les lois, règles ou bien qualités ayant recours aux fonctions exponentielles:*

Regeln: • Règles:

- $x = \log_a(a^x) = a^{\log_a(x)}$
- $\log_a(a) = 1$
- $\log_a(1) = 0$
- $\log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(x \cdot y)$ (log: bji.! • bji.!)
- $\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$ ($\leadsto$ Basiswechsel! • *Echangement de base!*)
 $x = b^{\log_b(x)}$, $x = b^{\log_b(x)} = a^{\log_a(x)} = (b^{\log_b(a)})^{\log_a(x)} \dots$
 $= b^{\log_b(a) \cdot \log_a(x)} \Rightarrow \log_b(x) = \log_b(a) \cdot \log_a(x)$
 (Monotonie!) • (Monotonie!)
- $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x)$ $\log_a(x \cdot x) = \log_a(x) + \log_a(x) \dots$

Hyperbolische Funktionen — Fonction hyperboliques**Definition: • Définition:****Sinus hyperbolicus:**

$$\sinh(x) = sh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Cosinus hyperbolicus:

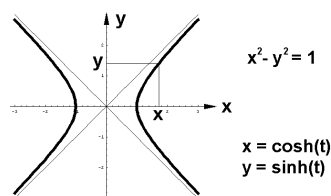
$$\cosh(x) = ch(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Tangens hyperbolicus:

$$\tanh(x) = th(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

Cotangens hyperbolicus:

$$\coth(x) = cth(x) := \frac{1}{\tanh(x)}$$



$$x = \cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad y = \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= \cosh^2(t) - \sinh^2(t) \\ &= \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} (e^{2t} + 2e^t e^{-t} + e^{-2t} - e^{2t} + 2e^t e^{-t} - e^{-2t}) \Rightarrow x^2 - y^2 = \frac{1}{4} 4e^{t-t} = e^0 = 1$$

Konsequenz: • **Conséquence:** $\leadsto x^2 - y^2 = \cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$

Nach Definition gilt: • *D'après la définition il vaut:* $\tanh(t) = \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)}$

$\leadsto \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)} = \tanh(t) = \frac{\tanh(t)}{1} \leadsto \tanh$ richtig in der Skizze. • $\tanh$ dans l'esquisse est juste.

$A = \frac{t}{2} = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arsinh}(y)$ Siehe Integralrechnung Seite 154. • *Voir calcul intégral, voir à la page 154.*

Aus der Definition kann man ablesen: • *Dans la définition on voit:*

Folgerungen:

• **Conclusions:**

1. $f(x) = \sinh(x) \leadsto$ ungerade Funktion • *fonction impaire*
2. $f(x) = \cosh(x) \leadsto$ gerade Funktion • *fonction paire*
3. $f(x) = \tanh(x) \leadsto$ ungerade Funktion • *fonction impaire*
4. $f(x) = \coth(x) \leadsto$ ungerade Funktion • *fonction impaire*

5. **Zusammenhang:** • **Formule:**

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$$

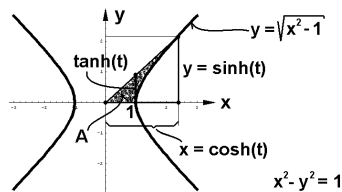
6. **Zusammenhang:** • **Formule:**

$$\cosh^2(t) + \sinh^2(t) = \cosh^2(2t)$$

Bemerkung: • **Remarque:**

Vergleiche mit der Hyperbel • *Compare avec l'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$*

(Sei • *Soit $x = \cosh(t)$, $y = \sinh(t)$*)



Kurvenlänge: • *Longueur de la courbe:*

$$L = \frac{\sinh(a(x_2 - x_0)) - \sinh(a(x_1 - x_0))}{a}$$

Sei • *Soit* $u = e^x > 0 \Rightarrow y = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{u - \frac{1}{u}}{2} \Rightarrow u^2 - 2yu - 1 = 0$
 $\Rightarrow u_{1,2} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2}, u = e^x > 0 \Rightarrow u = e^x = \frac{2y + \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y + \sqrt{y^2 + 1}$
 $\Rightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) = \sinh^{-1}(y) := \operatorname{arsinh}(y)$

In ähnlicher Weise kann man weitere Formeln herleiten:

• *De manière pareille, on peut déduire d'autres formules:* $\leadsto$

Folgerungen:

• **Conclusions:**

1. $\sinh^{-1}(x) := \operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
2. $\cosh^{-1}(x) := \operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), x \geq 1$
3. $\tanh^{-1}(x) := \operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), |x| < 1$
4. $\coth^{-1}(x) := \operatorname{arcoth}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), |x| > 1$

2.3 Reelle Zahlen und Folgen — Nombres réels et suites

2.3.1 Darstellungsarten — Façons de représentation

Dezimalbrüche — Fractions décimales

In 2.1.3 auf Seite 4 haben wir die reellen Zahlen bereits getroffen. Sie bilden unsere wichtigste Grundmenge für Definitions- und Wertebereiche. • *Nous venons d'étudier les nombres réels dans 2.1.3 à la page 4. Pour nous ils sont l'ensemble fondamental le plus important pour les domaines de définition et de valeurs.*

Von früher wissen wir, dass die reellen Zahlen diejenigen Zahlen sind, die als **Dezimalbrüche** darstellbar oder vorstellbar sind. Z.B. π oder e (**Eulersche Zahl**): • *Nous avons déjà appris que les nombres réels sont ceux qu'on peut imaginer ou représenter comme fractions décimales. P.ex. π ou e (nombre d'Euler):*

$$\pi = 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164 \dots$$

π ist nicht periodisch! Ebenso: • *π n'est pas périodique. La même chose vaut pour:*

$$e = 2.718281828459045235360287471352662497757247093699959574966967627724077 \dots$$

Weiter sind bekanntlich die rationalen Zahlen genau diejenigen Zahlen, die sich auch als **periodische Dezimalbrüche** schreiben lassen und umgekehrt. Die Periode kann dabei auch 0 sein. Z.B.: • *En plus les nombres rationnels sont exactement ceux qu'on peut écrire comme fractions décimales périodiques (et inversément). La période peut être aussi 0. P.ex.:*

$$\frac{1}{4} = 0.25 = 0.250000000 \dots \quad \text{oder} \quad \bullet \quad \text{ou} \quad \frac{1}{7} = 0.142857142857142857 \dots$$

$\frac{a}{b} \rightsquigarrow$ Periodenlänge $< b$ (Wiederholung der Ziffern bei der Division, Vorrat beschränkt!).

• $\frac{a}{b} \rightsquigarrow$ longueur de la période $< b$ (répétition des chiffres à la division, la réserve est limitée!).

Oder: • *Ou:*

$$\begin{aligned} x = 0.333\dots &\Rightarrow 10x = 3.333\dots \Rightarrow 10x - x = 9x = 3.333\dots - 0.333\dots = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \\ \Rightarrow 3x &= 3 \cdot \frac{1}{3} = 1 = 3 \cdot 0.333\dots = 0.999\dots \Rightarrow 1 \stackrel{?}{=} 0.999\dots? \end{aligned}$$

Stimmt das: $1 = 0.999\dots$? — Das bedarf einer Erklärung. Wir müssen über die reellen Zahlen mehr in Erfahrung bringen! • *Est-ce juste: $1 = 0.999\dots$? — Il faut expliquer cela. Nous devons apprendre plus sur les nombres réels!*

Wir merken uns: • *Retenons:*

Wichtig: • **Important:**

$x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x$ darstellbar als unendlicher Dezimalbruch • *x peut être écrit comme fraction décimale infinie.*

$x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x$ darstellbar als unendlicher periodischer Dezimalbruch • *x peut être écrit comme fraction décimale périodique infinie.*

Bemerkung: • **Remarque:**

Statt Dezimalbrüche (im Dezimalsystem, Basis 10) kann man auch **p -adische Brüche** (Basis p) mit beliebigem $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$ verwenden. • *Au lieu d'utiliser des fractions décimales (système décimal, base 10) on peut aussi utiliser des **factions** p -adiques avec un $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$ quelconque.*

Kettenbrüche — Fractions continues

Beispiel eines **Kettenbruchs**: • *Exemple d'une fraction continue*

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}} := 1 + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \dots (= \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}})$$

$\rightsquigarrow$ Es gilt • *Il vaut:* $x = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Da sicher gilt $x \geq 0$, kommt nur die Lösung $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ in Frage. • *Comme il est certain que $x \geq 0$, la solution $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est la seule qui compte.*

Oder: • *Ou:*

$$x = 1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \dots}}}} = 1 + \left\lfloor \frac{1}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{4} \right\rfloor + \dots \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$$

Interessanterweise gilt hier z.B.: • *Il est intéressant qu'il vaut ici p.ex.:*

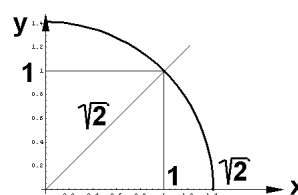
Lemma: • **Lemma:** $\sqrt{2}, \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$

Indirekter Beweis für $\sqrt{2}$: • *Preuve indirecte pour $\sqrt{2}$:*

Annahme: • *Supposons que:* $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ gekürzter Bruch • *fraction réduite, $p, q \in \mathbb{N}$*

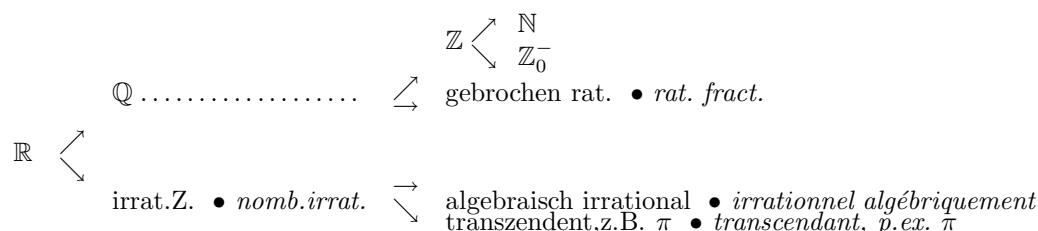
(teilerfremd • *sans diviseur commun*). $\Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow p$ gerade • *pair*
 $\Rightarrow p = 2k$, $k \in \mathbb{N} \Rightarrow 2q^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow q$ gerade • *pair* $\Rightarrow p, q$ haben den gemeinsamen Teiler 2 • *ont le diviseur commun 2* ($\text{ggT}(p, q) > 1$) $\Rightarrow$ Widerspruch! • *Contradiction!*
 $\leadsto$ Annahme $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ falsch. • *Supposition $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ fausse.*

Bemerkenswert ist, dass sich einerseits $\sqrt{2}$ resp. $\sqrt{5}$ sofort als geometrische Strecke bestimmen lässt (Pythagoras: $1^2 + 1^2 = \sqrt{2}^2 = 2$), dass $\sqrt{2}$ resp. $\sqrt{5}$ einfache Kettenbruchentwicklungen haben, dass sie jedoch wegen $\sqrt{2}, \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ keine periodische Dezimalbruchentwicklungen haben.



• *Il est bien remarquable que d'une part on peut donner $\sqrt{2}$ resp. $\sqrt{5}$ tout de suite comme segment géométrique (Pythagore: $1^2 + 1^2 = \sqrt{2}^2 = 2$), que $\sqrt{2}$ resp. $\sqrt{5}$ ont des développements simples en fractions continues, mais qu'ils n'ont pas de développements en fractions décimales périodiques parce qu'il vaut $\sqrt{2}, \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.*

Folgende Zahleneinteilung ist geläufig: • *De coutume on partage les nombres comme il suit:*



Irrationale Zahlen als nichtperiodische Dezimalbrüche lassen sich sofort aufschreiben, z.B.:

• *On peut tout de suite noter des nombres irrationnels comme fractions décimales non-périodiques, p.ex.:*

$$x = 0.1011011101111011111011111011111011\dots$$

Eine Möglichkeit, die reellen Zahlen mit Hilfe exakter mathematischer Grundlagen zu gewinnen, sind auch die **Dedekindschen Schnitte** (vgl. Lit.). • *Une possibilité de construire les nombres réels de façon exacte sont les coupures de Dedekind.*

2.3.2 Zahlenerweiterung — Elargir les ensembles de nombres

Bekanntlich muss man die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ einführen, weil in den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ Gleichungen wie $2 + x = 1$ nicht lösbar sind. $\mathbb{Q}$ führt man ein, weil in $\mathbb{Z}$ Gleichungen wie $2 \cdot x = 1$ nicht lösbar sind.

Und die irrationalen Zahlen muss man einführen, weil in $\mathbb{Q}$ Gleichungen wie $x^2 = 2$ nicht lösbar sind. Die letzte Gleichung nennt man **algebraisch**, weil sie mit den Mitteln der Arithmetik formulierbar ist. So gelangt man zu reellen Zahlen. Dabei begegnet man aber sofort zwei neuen Problemen: Einmal hat eine Gleichung wie $x^2 = -1$ in $\mathbb{R}$ keine Lösung. Man kann die Lösbarkeit solcher Gleichungen wieder erzwingen, indem man $\mathbb{R}$ zu den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ erweitert. Andererseits lässt sich z.B. die Zahl π nicht durch einen endlichen arithmetischen Ausdruck beschreiben, ist also nicht algebraisch. (Der Beweis dieser Tatsache ist recht kompliziert und daher momentan hier nicht möglich). Es zeigt sich jedoch, dass man Zahlen wie π oder e (Eulersche Zahl) durch „Grenzprozesse“ gewinnen kann. Z.B. wenn man die Folge $\langle a_n \rangle = \langle (1 + \frac{1}{n})^n \rangle$ studiert, so beobachtet man, dass sich a_n immer mehr e nähert (gegen e **konvergiert**), beliebig genau, wenn man n genügend gross wählt.

• *Comme on sait il faut introduire les nombres $\mathbb{Z}$ parce que dans $\mathbb{N}$ des équations comme $2 + x = 1$ ne sont pas résolubles. On introduit $\mathbb{Q}$ parce que dans $\mathbb{Z}$ des équations comme $2 \cdot x = 1$ ne sont pas résolubles. Et on introduit les nombres irrationnels parce qu'on ne peut pas résoudre en $\mathbb{Q}$ les équations du type $x^2 = 2$. La dernière équation s'appelle **algébrique**, parce qu'on peut l'écrire avec les moyens de l'algèbre. Ainsi on arrive aux nombres réels. Mais là on observe deux problèmes nouveaux: D'une part une équation comme $x^2 = -1$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$. Mais en élargissant $\mathbb{R}$ aux nombres complexes $\mathbb{C}$ on peut obtenir une solution de force. D'autre part des nombres comme π ne se laissent pas décrire par une expression algébrique finie, ils ne sont donc pas algébriques. (La preuve de ce fait est bien compliquée. C'est pourquoi il n'est pas possible de la donner ici.) Mais on trouve qu'on peut décrire des nombres comme π ou bien e (nombre d'Euler) par des "processus à la limite. P. ex. si l'on étudie la suite $\langle a_n \rangle = \langle (1 + \frac{1}{n})^n \rangle$, on observe que a_n s'approche de plus en plus à e (**converge vers e**), aussi exactement qu'on veut, il faut seulement choisir n assez grand.*

Wie wir später beim Studium der Folgen sehen werden, hat $\mathbb{R}$ Eigenschaften, die in $\mathbb{Q}$ nicht vorhanden sind. Zwar ist $\mathbb{Q}$ **dicht** (d.h. zwischen zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Q}$ gibt es immer eine dritte, z.B. $c = \frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$, $a < c < b$). $\mathbb{Q}$ hat aber **Lücken**, z.B. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ oder $\pi \notin \mathbb{Q}$. $\mathbb{R}$ hingegen ist nicht nur dicht, sondern auch **lückenlos**. Zwischen die reellen Zahlen kann man nichts Vernünftiges, nicht Reelles, von reellen Zahlen durch endliche Differenzen Verschiedenes mehr einpacken. Später zeigen wir:

• *Nous allons voir, en étudiant les suites, que $\mathbb{R}$ a des qualités qui manquent dans $\mathbb{Q}$. Il vaut bien que $\mathbb{Q}$ est **dense** (ç.v.d. entre deux nombres $a, b \in \mathbb{Q}$ il existe toujours un troisième nombre, p.ex. $c = \frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$, $a < c < b$). Mais $\mathbb{Q}$ a des **lacunes**, p.ex. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ou $\pi \notin \mathbb{Q}$. Par contre $\mathbb{R}$ est dense et aussi **sans lacunes**. Entre deux nombres réels on ne peut plus placer de nombre non réel qui soit différent des nombres réels par une différence finie. Plus tard nous démontrerons:*

Satz: • **Théorème:**

1. Jede monotone und beschränkte Folge konvergiert in $\overline{\mathbb{R}}$: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ist „**abgeschlossen**“. • *Chaque suite monotone et bornée est convergente dans $\mathbb{R}$: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ est "fermé".*
2. Jede nichtleere Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$, die eine **untere Schranke** hat (Zahl s unterhalb allen Elementen von M), hat auch eine maximale untere Schranke. • *Chaque sous-ensemble $M \subseteq \mathbb{R}$ qui possède une **borne inférieure** (nombre s en dessous de tous les éléments de M), possède aussi une borne inférieure maximale.*

(Die Konvergenz wird später besprochen. Danach gilt z.B.:

• *On va traiter la convergence plus tard. Selon ce qui suit il vaut p.ex.:*

$$x = 0.99\ldots \Rightarrow 10x = 9.99\ldots \Rightarrow 9x = 9 \Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{0 + 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + \ldots + 10^{-n}}_{=0.999\ldots} = 1 \quad \text{d. h.} \quad \bullet \quad \text{ç. v. d.} \quad 1 - \underbrace{0.999\ldots 9}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Konsequenz: • **Conséquence:**

Reelle Zahlen sind daher Klassen von Dezimalbrüchen mit gleichem Grenzwert.

- Les nombres réelles sont donc des classes de fractions décimales au même valeur limite.

2.3.3 Das Problem der Mächtigkeiten unendlicher Mengen — Le problème de la puissance des ensembles infinis

Zwei endliche Mengen nennen wir bekanntlich **gleichmächtig**, wenn sie die gleiche Anzahl Elemente haben — oder, was dasselbe bedeutet, wenn sich die Elemente gleich durchnummerieren oder bijektiv aufeinander abbilden lassen. Wie ist das nun entsprechend bei sogenannten „unendlichen Mengen“ wie $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$? Ersichtlicherweise hat es in $\mathbb{Q}$ oder in $\mathbb{R}$ Zahlen, die in $\mathbb{N}$ fehlen: Es hat also in $\mathbb{N}$ weniger Zahlen als etwa in $\mathbb{R}$. Es gilt ja $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Andererseits hat es in $\mathbb{N}$ und in $\mathbb{R}$ unendlich viele Elemente. Ist daher etwa „weniger unendlich“ wie in $\mathbb{N}$ das Gleiche wie „mehr unendlich“ wie in $\mathbb{R}$ — oder ist es anders? Man merkt schon: Unendlich ist noch kein scharf gefasster Begriff. Er bedarf einer Untersuchung oder Präzisierung. Den Anstoß zu solchen Untersuchungen hat Kummer¹ gegeben mit seiner Mengenlehre oder „Theorie der transfiniten Kardinalzahlen“ (d.h. überendliche Mächtigkeiten). • *Comme nous savons de l'algèbre, nous appelons deux ensembles finis d'égle puissance, s'ils ont le même nombre d'éléments — ou, ce qui est la même chose, si l'on peut numéroter les éléments par paires, ou bien si l'on peut les appliquer de façon bijective. Comment est-ce que c'est maintenant quant aux ensembles dits infinis tel que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$? On voit que dans $\mathbb{Q}$ ou dans $\mathbb{R}$ on a des nombres qui manquent dans $\mathbb{N}$: Il y a donc moins de nombres dans $\mathbb{N}$ que dans $\mathbb{R}$. Il vaut: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. D'autre part dans $\mathbb{N}$ et dans $\mathbb{R}$ il y a un nombre infini d'éléments. Est-ce que "moins infini comme dans $\mathbb{N}$ " est donc la même chose que "plus infini comme dans $\mathbb{R}$ " — ou bien est-ce différent? On aperçoit: "Infini" n'est pas une notion claire et nette. Il faut l'étudier et préciser. Kummer¹ a donné l'impact initial pour ces études par sa théorie des ensembles ou la "théorie des nombres cardinaux transfinis" (ç.v.d. les puissances transfinies).*

Um die Mächtigkeit zweier unendlicher Mengen vergleichen zu können, definieren wir: • *Pour pouvoir comparer les puissances de deux ensembles infinies, nous définissons:*

Definition: • **Définition:**

M gleichmächtig wie N • M a la même puissance que N

$$(|M| = |N|) : \Leftrightarrow \exists \text{ Bijection } f : M \xrightarrow{\text{bji.}} N$$

Falls alle f höchstens injektiv, nie aber surjektiv sind: • *Si tous les f sont au maximum injectifs mais jamais surjectifs:*

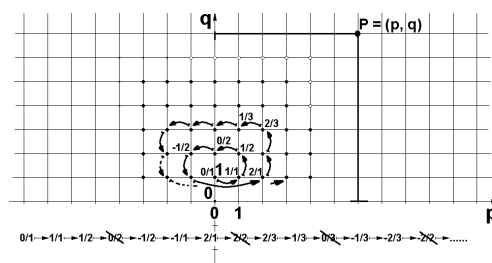
$$|M| < |N|$$

Wir wollen nun zeigen: • *Nous voulons démontrer: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$. ($\Rightarrow |\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$.)*

Das gelingt, wenn wir jeder rationalen Zahl $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ eine Nummer (oder ein Index) $n \in \mathbb{N}$ zuordnen können. Dann haben wir $\mathbb{Q}$ abgezählt oder bijektiv auf $\mathbb{N}$ abgebildet.

• *Cela va réussir si nous arrivons à adjoindre à chaque nombre rationnel $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ un nombre (index) $n \in \mathbb{N}$. Alors nous avons compté les nombres de $\mathbb{Q}$ ou bien appliqué $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{N}$ de façon bijective.*

Trage dazu die Zahlen $\frac{p}{q}$ in ein Koordinatensystem ein. $\frac{p}{q}$ ist eindeutig einem Punkt $P_{p,q} = (p, q)$ zugeordnet. Diese Punkte lassen sich wie folgt abzählen: Gehe die Punkte vom Ursprung aus einer Spirale folgend im Gegenurzeigersinn durch, einer nach dem andern, und verteile jedem Punkt eine Nummer, falls er eine Zahl darstellt, die noch nicht vorgekommen ist. Auf diese Weise erhält jede rationale Zahl eine Nummer. $\mathbb{Q}$ ist daher so abgezählt.



¹Kummer: 1810-1893

• Inscrivez les nombres $\frac{p}{q}$ dans un système de coordonnées. $\frac{p}{q}$ est appliqué à un point $P_{p,q} = (p, q)$ de façon bi-univoque. Ces points se laissent compter comme il suit: Suivez les points à partir de l'origine et en parcourant une spirale dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Passez par les points l'un après l'autre et donnez à chacun un numéro s'il représente un nombre qu'on n'a pas déjà eu. De cette manière tous les nombres rationnels obtiennent un numéro: On a compté $\mathbb{Q}$.

Lemma: • **Lemme:** $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$

↪ **Problem:** • **Problème:** Wie verhält es sich mit $|\mathbb{Q}|$ und $|\mathbb{R}|$?

• Quelle est la situation quant à $|\mathbb{Q}|$ et $|\mathbb{R}|$?

Wir wollen zeigen: $|\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$ indem wir wesentlich mehr zeigen: • *Nous voulons démontrer: $|\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$ en démontrant essentiellement plus:*

Lemma: • **Lemme:** $|\mathbb{Q}| < |[0, 1]|$

$[0, 1] \subset \mathbb{R}$ ist die Menge Zahlen, deren Dezimalbrüche, die mit '0.' beginnen. ($1 = 1.000\bar{0} \dots = 0.999\bar{9} \dots$)

• $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres, dont la fraction décimale commence par '0.'. ($1 = 1.000\bar{0} \dots = 0.999\bar{9} \dots$)

Wir führen die Begründung indirekt: Wir nehmen an, es gelte $|\mathbb{Q}| = [0, 1]$. D.h. die Zahlen im Intervall $[0, 1]$ lassen sich vollständig durchnummerieren: • *Nous fondons cette thèse de façon indirecte: Supposons que soit $|\mathbb{Q}| = [0, 1]$. ç.v.d. on peut numéroter de façon complète les nombres dans l'intervalle $[0, 1]$.*

Z.B. • *P.ex. :*

$$x_1 = 0.z_{11}z_{12}z_{13}z_{14} \dots$$

$$x_2 = 0.z_{21}z_{22}z_{23}z_{24} \dots$$

$$x_3 = 0.z_{31}z_{32}z_{33}z_{34} \dots$$

$$x_4 = 0.z_{41}z_{42}z_{43}z_{44} \dots$$

⋮

Es gilt demnach: • *Il vaut donc:*

$$\{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots\} = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q}$$

mit • *avec* $z_{ij} \in Z = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (Ziffern • *chiffres*)

Nun kann man aber sofort eine Zahl $x = r \in [0, 1]$ konstruieren, die nicht in der Liste resp. Aufzählung vorkommt: • *On peut maintenant tout de suite contruire un nombre z qui manque dans la liste resp. dans l'énumération:*

Sei • *Soit* $r = 0.z_1z_2z_3z_4 \dots$, $z_i \in Z = \{0, \dots, 9\}$. Wähle für diese Konstruktion: • *Choisis pour cette construction: $z_1 \neq z_{11}$, $z_2 \neq z_{22}$, $z_3 \neq z_{33} \dots$, $z_i \neq z_{ii}$, . (Wegen $z_i \neq z_{ii}$ stehen für z_i jeweils 9 Ziffern zur Auswahl! • *A cause de $z_i \neq z_{ii}$ on a pour chaque z_i 9 chiffres à disposition.)**

⇒ $r \neq x_1$ (da • *car $z_1 \neq z_{11}$*), $r \neq x_2$, $r \neq x_3 \dots r \neq x_i \dots$ ⇒ r fehlt in der Liste, die Nummerierung ist nicht vollständig. • *r manque dans la liste, l'énumération n'est pas complète.*

↪ **Problem:** • **Problème:**

Lässt sich $\mathbb{C}$ so wie $\mathbb{R}$ ordnen? • *Est-ce qu'on peut arranger $\mathbb{C}$ tel que $\mathbb{R}$?*

Untersuchungen zeigen, dass man sehr einfach in $\mathbb{C}$ eine strenge Ordnungsrelation definieren kann. Jedoch ist bis jetzt keine totale Ordnung bekannt, die elementargeometrisch Sinn macht. Der Preis für die Erweiterung von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{C}$ ist also der Verzicht auf eine geometrisch sinnvolle Ordnung.

• *Si l'on traite ce problème, on voit tout de suite qu'il est possible de définir dans $\mathbb{C}$ une relation d'ordre*

stricte. Mais jusqu'à maintenant on ne connaît pas de telle relation d'ordre totale qui donne un sens géométrique élémentaire. Alors le prix de l'élargissement de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$ est le renoncement à une relation d'ordre raisonnable.

Bsp.: • **Exemple:**

(Definition einer Ordnungsrelation in $\mathbb{C}$: • *Définition d'une relation d'ordre dans $\mathbb{C}$:*)

Wir werden dabei zeigen: • *Nous allons démontrons en outre :*

Lemma: • **Lemme:** $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^2| = |\mathbb{C}|$

(In der Algebra wird gezeigt, dass man die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ als Punkte einer Ebene auffassen kann.

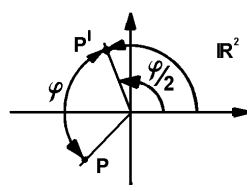
• *Dans l'algèbre on démontre qu'on peut comprendre les nombres complexes $\mathbb{C}$ comme points d'un plan.*)

Seien • *Soient* $(x, y) \in \mathbb{R}_{y+}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$ ($y \geq 0$).

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\text{bij.}} M_2$ mit • *avec* $\varphi \mapsto \frac{\varphi}{2}$,

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\text{bij.}} M_4$ mit • *avec* $\varphi \mapsto \frac{\varphi}{4}$,

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\text{bij.}} M_{3/4}$ mit • *avec* $\varphi \mapsto \frac{3\varphi}{4}$



$\Rightarrow |M_4| = |M_2| = |M_{3/4}| = |\mathbb{R}^2|$ (Bij.) $\wedge M_4 \subset M_2 \subset \mathbb{R}_{y+}^2 \subset M_{3/4} \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow |\mathbb{R}_{y+}^2| = |\mathbb{R}^2|$

Trotz der Anschaulichkeit obiger Abbildung haben wir noch keine Bijektivität. Das kann man aber wie folgt erreichen:

• *L'application qu'on vient de traiter donne une idée, mais elle ne donne pas la bijectivité. Mais on peut l'avoir comme il suit:*

Sei • *Soit*

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{1-x}\right) - 1 & x \in [0, 1) \\ -x + 1 & x \in [1, \infty) \end{cases}$$

f bildet $\mathbb{R}_0^+$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ ab. $\leadsto h = f^{-1}$ bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}_0^+$ ab.

• f applique $\mathbb{R}_0^+$ sur $\mathbb{R}$ de façon bijective. $\leadsto h = f^{-1}$ applique $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_0^+$ de façon bijective.

$\leadsto$ Mit h können wir daher $\mathbb{C}$ auf die obere komplexe Halbebene ($\text{Im}(z) \geq 0$) abbilden. • *A l'aide de h nous pouvons donc appliquer $\mathbb{C}$ sur le demi-plan complexe en haut ($\text{Im}(z) \geq 0$)*

$\leadsto$ Seien somit: • *Soient donc:* $z_1 = a_1 + i b_1$, $z_2 = a_2 + i b_2$, $a_k \in \mathbb{R}$, $b_k \in \mathbb{R}_0^+$. $\leadsto \text{Im}(z) \geq 0$

$\leadsto x = v_j v_{j-1} \dots v_2 v_1 \cdot x_1 x_2 x_3 \dots$, $y = w_k w_{k-1} \dots w_2 w_1 \cdot y_1 y_2 y_3 \dots$, $v_i, x_i, w_i, y_i \in Z = \{0, \dots, 9\}$

Betrachte den Fall $j \geq k$. Fülle nun y vorne bis zur j -ten Stelle mit 0 auf. • *Complète maintenant y de devant avec des 0 jusqu'à la place j .*

$\leadsto y = 0_j 0_{j-1} \dots 0_{k+1} w_k w_{k-1} \dots w_2 w_1 \cdot y_1 y_2 y_3 \dots := w_j w_{j-1} \dots w_{k+1} w_k w_{k-1} \dots w_2 w_1 \cdot y_1 y_2 y_3 \dots$

Für die Abbildung $(x, y) \in \mathbb{R}_{y \geq 0}^2 \mapsto z \in \mathbb{R}$ „mischen“ wir die Dezimalbrüche wie folgt: • *Pour l'application $(x, y) \in \mathbb{R}_{y \geq 0}^2 \mapsto z \in \mathbb{R}$ nous "mélangeons" les fractions décimales comme il suit:*

$$(x, y) := (x/y) = (v_j v_{j-1} \dots v_2 v_1 \cdot x_1 x_2 x_3 \dots / w_j w_{j-1} \dots w_2 w_1 \cdot y_1 y_2 y_3 \dots) \mapsto z = \\ = v_j w_j v_{j-1} w_{j-1} \dots v_2 w_2 v_1 w_1 \cdot x_1 y_1 x_2 y_2 x_3 y_3 \dots$$

mit $\operatorname{sgn}(z) := \operatorname{sgn}(x)$

(Für $j \leq k$ argumentiert man ebenso.) • (Pour $j \leq k$ on prend les mêmes arguments.)

Ersichtlicherweise ist diese Abbildung „beinahe“ bijektiv, denn die „Entmischung“ bei der Rückabbildung geht stellenweise eindeutig und ist somit problemlos möglich. • *On voit bien que cette application est "presque" bijective, car la reconstruction des nombres x et y va par places de façon univoque et ne pose donc pas de problème.*

Es besteht noch das Problem, dass einige reelle Zahlen nicht eindeutig darstellbar sind. • *Il y a encore le problème que quelques nombres réels ne sont pas clairement représentables.*

Bsp.: • **Exemple:** $1.000\bar{0} \dots = 0.999\bar{9} \dots$

Das Problem besteht aber nur für abzählbar viele periodische Dezimalbrüche, d.h. für rationale Zahlen, für die gilt: • *Mais problème existe seulement pour certains fractions décimales périodiques qui sont dénombrables, c.-à.-d. pour les nombres rationnels. Pour ceux-là il vaut:*

$$|\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|, \quad |\mathbb{Q}| + |\mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$$

$$\leadsto \quad \exists_f \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \quad \odot$$

Als erste Konsequenz haben wir nun: • *On a donc comme première conséquence:*

Satz: • **Théorème:** $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^2| = |\mathbb{C}|$

Konsequenz: • **Conséquence:** Es gibt somit verschiedene Typen von „unendlich“: Z.B. ∞ vom Typ $|\mathbb{N}|$ ($\leadsto \infty_{\mathbb{N}}$) oder ∞ vom Typ $|\mathbb{R}|$ ($\leadsto \infty_{\mathbb{R}}$). • *Il existe donc différents "types d'infini": P.ex. ∞ du type $|\mathbb{N}|$ ($\leadsto \infty_{\mathbb{N}}$) ou ∞ du type $|\mathbb{R}|$ ($\leadsto \infty_{\mathbb{R}}$).*

Wir werden weiter unten sehen, dass für immer grösser werdende n (n geht „gegen unendlich“) die Folgenglieder $a_n = \frac{1}{n}$ von $\langle a_n \rangle$ immer näher zu 0 rücken, was uns dann später zu Feststellungen wie „ $\frac{1}{0^+} = \infty$ “ führt. Daraus sieht man, dass zu verschiedenen Typen von ∞ auch verschiedene Typen von 0 gehören müssen, eine Entdeckung, die sich in der „Non-Standard-Analysis“ ausbeuten lässt. Elemente aus diesem Bereich werden uns für die Anschaulichkeit und das Verständnis im Folgenden eine grosse Hilfe sein.

• *Nous allons voir plus tard que pour des n qui s'agrandissent, (n va "vers infini") les termes de la suite $a_n = \frac{1}{n}$ de $\langle a_n \rangle$ s'approchent de plus en plus à 0. Plus tard ça nous permet de constater " $\frac{1}{0^+} = \infty$ ". On voit donc que pour des types différents d'infini ∞ il faut donc aussi des types différents de 0. C'est une découverte dont on peut profiter dans l'analyse "Non-Standard". Des éléments de ce domaine nous seront une grande aide pour la compréhension et la clarté des situations en ce qui suit.*

Konsequenz: • **Conséquence:** Dimension $\neq$ Mächtigkeit • *Dimension $\neq$ puissance*

2.3.4 Weitere Resultate — D'autres résultats

Siehe Seite 34: • *Voir page 34:*

$$\begin{aligned}
& ((\frac{p}{q} \hat{=} P_{p,q} = (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}) \wedge (|\mathbb{Z} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|)) \Rightarrow \mathbb{Q} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \\
& \leadsto (|A_1| = |A_2| = |\mathbb{N}| \Rightarrow |A_1 \times A_2| = |\mathbb{N}|) \\
& \leadsto (|A_1| = \dots = |A_k| = |\mathbb{N}|) \Rightarrow |A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |\mathbb{N}|
\end{aligned}$$

Satz: • Théorème: $(|A_1| = \dots = |A_k| = |\mathbb{N}|) \Rightarrow |A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |\mathbb{N}|$

Analog sieht man (vgl. Seite 37): • *Analogiquement nous constatons (voir page 37):*

Satz: • Théorème: $(|A_1| = \dots = |A_k| = |\mathbb{R}|) \Rightarrow |A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |\mathbb{R}|$

Weiter gilt: • *En outre on peut déduire:*

Satz: • Théorème: $|A| < |\mathbb{N}| \Rightarrow |A| \in \mathbb{N}_0$

Zum Beweis: Sonst Widerspruch zum zornschen Lemma (Lit.).

• *Si non: Cotradiction au lemme de Kuratowski–Zorn (lit.).*

Satz: • Théorème: $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |[0, 1]| = |\mathbb{R}| < |\mathcal{P}(\mathbb{R})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))| < \dots$

Zum Beweis: • Quant à la preuve:

$$1. f : x \xrightarrow{bij.} f(x) = \frac{1}{x} \leadsto f : (0, 1] \xrightarrow{bij.} [1, \infty) \leadsto |[0, 1]| = |(0, 1]| = |[1, \infty)|$$

$$|[0, 1]| = |[1, \infty)| \wedge [0, 1] \cup [1, \infty) = \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow |[0, 1]| = |\mathbb{R}_0^+|$$

$$|\mathbb{R}_0^+| = |\mathbb{R}^-| \wedge \mathbb{R}_0^+ \cup \mathbb{R}^- = \mathbb{R} \Rightarrow |[0, 1]| = |\mathbb{R}_0^+| = |\mathbb{R}|$$

2. Sei • *Soit* $z_k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (Ziffern) • *(chiffres)*
 $\leadsto$ binär: • *binnaire:* $z_k \hat{=} b_k \in \{0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001\}$.

Entsprechend im 11-er System: • *Correspondant dans le système avec la base 11:*

$$z_k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \hat{=} \{0_{(11)}, 1_{(11)}, 2_{(11)}, 3_{(11)}, 4_{(11)}, 5_{(11)}, 6_{(11)}, 7_{(11)}, 8_{(11)}, 9_{(11)}, A_{(11)}\}$$

Sei • *Soit* $z = 0.z_1 z_2 z_3 z_4 \dots \in [0, 1) \leadsto \exists_f inj. : [0, 1) \xrightarrow{inj.} \mathcal{P}(\mathbb{N}) :$

$$z = 0.z_1 z_2 z_3 z_4 \dots \xrightarrow{inj.} M = \{z_1, z_{2,3}, z_{4,5,6}, z_{7,8,9,10}, \dots\}, M \in \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

Dabei ist: • *On y utilise:*

$$z_1 : \hat{=} A_{(11)} z_{(11);1} \in \mathbb{N}, \quad z_{2,3} : \hat{=} A_{(11)} z_{(11);2} z_{(11);3} \in \mathbb{N}, \quad z_{4,5,6} : \hat{=} A_{(11)} z_{(11);4} z_{(11);5} z_{(11);6} \in \mathbb{N} \dots$$

Wegen der Anzahl Ziffern gilt: • *A cause du nombre des chiffres il vaut:* $z_1 < z_{2,3} < z_{4,5,6} < \dots$

Durch die vorgestellte $A_{(11)}$ wird erreicht, dass die jeweils entstehende Zahl $z_{\dots}$ nicht mit 0 beginnen kann und so die Ordnung nicht mehr stimmt. • *Par $A_{(11)}$ placé devant on garantit que le nombre obtenu ne peut pas commencer avec un 0 ce qui dérangerait l'ordre des nombres.*

$$\Rightarrow |[0, 1]| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$$

3. Sei • *Soit* $M \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $M = \{n_1, n_2, n_3, n_4, \dots\} \in \mathbb{N}$ mit • *avec* $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \dots$

$$\leadsto \exists_{f_1 \text{ inj.}} : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \xrightarrow{\text{inj.}} [0, 1), \mathcal{P}(\mathbb{N}) \ni M = \{n_1, n_2, n_3, n_4, \dots\} \xrightarrow{\text{inj.}} z \in [0, 1)$$

Dabei ist: • *On y utilise:*

$n_1 = b_1, n_2 = b_2, n_3 = b_3, \dots, b_k =$ Binärdarstellung von n_k • $b_k =$ représentation binaire de n_k
und • *et* $z := 0.b_1 2 b_2 2 b_3 2 b_4 2 \dots$

Durch die eingeschobene 2 wird jeweils die eindeutige Trennung der verwendeten Binärzahlen garantiert. Damit wird die Abbildung f_1 injektiv. • *Par le 2 inséré on garantit la distinction univoque des nombres binaires utilisés. Ceci rend l'application f_1 injective.*

$$\Rightarrow |\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |[0, 1)|$$

4.

$$(|[0, 1)| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|) \wedge (|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |[0, 1)|) \Rightarrow |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |[0, 1)| = |\mathbb{R}|$$

5. Sei • *Soit* $|\mathbb{N}| \leq |M|$

$$\text{Vor.: } \bullet \text{ Hyp.: } \exists_{f \text{ bij.}} : M \xrightarrow{\text{bij.}} \mathcal{P}(M) \quad \leadsto \text{Frage: } \bullet \text{ Question: } |M| < |\mathcal{P}(M)| ?$$

Sei • *Soit* $T = \{m_j \mid m_j \notin f(m_j) \subset \mathcal{P}(M), j \in \{\text{Ind.}\}\},$
 $\{\text{Ind.}\} = \text{Indexmenge}$ • *Ensemble des indices*

Es gilt: • *Il vaut:* $T \neq \{\}$

Ansonst: • *Si non:* $T = \{\} \leadsto \forall_{m_k} : \{m_k\} \in \mathcal{P}(M) \wedge f^{-1}(\{m_k\}) = m_k$

$\leadsto f$ nicht injektiv, alle Bilder haben Mächtigkeit 1. • *f non injective, tous les images ont la puissance 1.*

$$\leadsto T \neq \{\}$$

$$\leadsto \exists_{f \text{ bij.}, x_0} : M \xrightarrow{\text{inj.}} \mathcal{P}(M) \wedge T = f(x_0) \in \mathcal{P}(M), x_0 = f^{-1}(T)$$

Sei • *Soit* $x_0 \notin T = f(x_0) \Rightarrow x_0 \in T$ (nach Def. von T) • *selon déf. de T .*

Sei • *Soit* $x_0 \in T = f(x_0) \Rightarrow x_0 \notin T$ (nach Def. von T) • *selon déf. de T .*

$\Rightarrow (x_0 \in T \Leftrightarrow x_0 \notin T) \leadsto$ Widerspruch! • *Contradiction!*

$$\leadsto \text{Voraussetzung falsch! } \bullet \text{ Hypothèse fausse! } \leadsto \neg \exists_{f \text{ bij.}} : M \xrightarrow{\text{bij.}} \mathcal{P}(M)$$

$$\text{Es gilt: } \bullet \text{ Il vaut: } (|\mathbb{N}| \leq |M| \wedge M \subset \mathcal{P}(M)) \Rightarrow |\mathbb{N}| \leq |M| < |\mathcal{P}(M)|$$

2.3.5 Folgen — Suites

Umgebungen — Voisinages

In 2.1.6 auf Seite 5 haben wir den **Umgebungsbegriff** kennengelernt. Wir werden ihn jetzt brauchen.

• Dans 2.1.6 à la page 5 nous avons appris la notion de **voisinage**. Nous allons l'utiliser maintenant.

Bsp.: • Exemple:

δ -Umgebung $\subseteq \mathbb{R}^n$: • *Voisinage* $\delta \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$U_\delta(P_0) = \{P \in \mathbb{R}^n \mid |P - P_0| < \delta\}$$

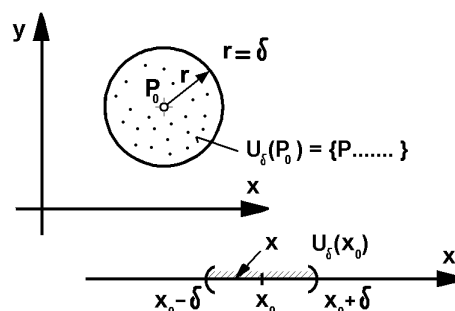
δ -Umgebung $\subseteq \mathbb{R}$: • *Voisinage* $\delta \subseteq \mathbb{R}$:

$$U_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \delta\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$$

$$= \{x_0 - \delta, x_0 + \delta\}$$

$\leadsto$ Offenes Intervall • *Intervalle ouvert.*

**2.3.6 Nullfolgen — Suites vers zéro**

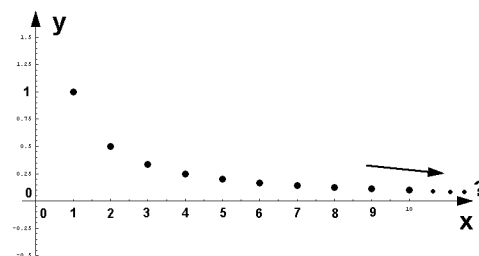
Folgen sind uns bereits bekannt (vgl. 2.2.1, Seite 8 $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}(\mathbb{N})$). Folgen also sind spezielle Funktionen mit $D_f = \mathbb{N}$. • *Nous connaissons déjà les suites (voir 2.2.1, Seite 8 $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}(\mathbb{N})$). Les suites sont donc des fonctions spéciales avec $D_f = \mathbb{N}$.*

Nullfolgen sind spezielle Folgen, bei denen sich a_n immer mehr an 0 annähert, je grösser n wird.

• **Les suites convergeant vers zéro** sont des suites spéciales où a_n s'approche toujours plus vers 0, si n s'agrandit.

Wähle $\varepsilon > 0$ beliebig $\leadsto a_n < \varepsilon$, sobald n genügend gross.

• Choisir $\varepsilon > 0$ quelconque $\leadsto a_n < \varepsilon$, si n assez grand.

**Bsp.: • Exemple:**

$$\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle = \left[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right], \quad \frac{1}{n} > 0$$

Problem: • Problème:

Offensichtlich ist es schwierig, die Graphen der Folgen so zu gestalten, dass das Verhalten sichtbar wird.

• *Evidemment il est difficile de représenter les graphes qui rendent visible le comportement.*

Die beiden Aspekte von unendlich — Les deux aspects de l'infini

Auf der einen Seite haben wir den Zugang zum Unendlichen als Prozess: Z.B. eine Nullfolge $\langle a_n \rangle$ hat unendlich viele Glieder. Man kann eines nach dem andern berechnen. Aber wie viele man auch berechnet, immer sind es nur endlich viele, die man berechnet hat. Die noch nicht berechneten aber sind immer unendlich viele. Man kommt dem „Unendlichen“ so zwar näher, aber man hat immer praktisch nichts zu dem was noch bleibt. Und doch können wir uns vorstellen, dass die Nullfolge immer näher gegen 0 rückt, wenn wir n wachsen lassen. Bei $\langle a_n \rangle = \langle \frac{1}{n} \rangle$ freilich wird man durch Rechnung die 0 nie erreichen. Das Unendliche ist hier nur erfahrbare durch den **Prozess des ständigen Weiterschreitens**, des nie enden Wollens. Man hat so den Zugang zum Unendlichen durch die Prozesshaftigkeit von unendlich im Sinne einer Abzählung mit Hilfe von $\mathbb{N}$. Bei Folgen haben wir diesen Zugang.

• *D'un côté nous avons l'accès à l'infini par le processus: P.ex. une suite convergeant vers zéro $\langle a_n \rangle$ possède un nombre infini de termes: On peut calculer l'un après l'autre. Mais n'importe combien on calcule, on a toujours un nombre fini de termes calculés. Ceux qui restent forment toujours un ensemble infini. Comme ça on s'approche de "l'infini", mais on n'a pratiquement toujours rien comparé à ce qui*

reste. Mais quand-même on peut s'imaginer qu'une suite convergeant vers zéro s'approche toujours plus de 0 si l'on laisse s'agrandir n . Par $\langle a_n \rangle = \langle \frac{1}{n} \rangle$ notamment, on ne peut jamais arriver à 0 par le calcul. Ici on ne peut faire l'expérience de l'infini que par la **qualité du processus** en avançant vers l'infini qui ne se termine jamais. Comme ça on arrive à s'imaginer l'infini par le processus de l'énumération à l'aide de $\mathbb{N}$. Nous avons cet accès pour les suites.

Ganz anders beim **aktualen Zugang**: Stellt man sich das Intervall $[0, 1]$ als **geometrische Strecke** vor, so muss man feststellen, dass in dieser Strecke offensichtlich unendlich viele Punkte liegen, die sogar von grösserer Mächtigkeit sind als $|\mathbb{N}|$, die man jedoch mit einem Blick erfassen kann. Man hat hier das **aktual Unendliche**, unendlich auf einem Blick gefasst in einer überschaubaren Strecke. Welch Gegensatz zum prozesshaften Zugang, wo man nur das Weiterschreiten überblickt, nie jedoch das Ende oder das Ziel. An diese beiden Zugängen wollen wir uns jeweils erinnern, wenn wir mit dem Unendlichen arbeiten.

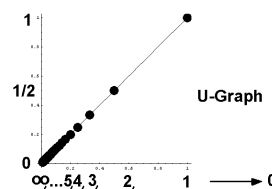
• *C'est tout différent pour l'accès par l'actualité: Imaginons l'intervalle $[0, 1]$ comme segment géométrique. On doit constater que dans ce segment il y a un nombre infini de points, qui ont même une puissance plus grande que $|\mathbb{N}|$, mais qu'on peut saisir d'un seul coup d'oeil. Ici on a l'infini actuel, infini saisi d'un coup sur un segment bien compréhensible. Quel opposition à l'accès par le processus où l'on peut se faire une idée d'avancer, mais jamais du but ou de la fin. Nous voulons nous rappeler ces deux accès quand nous travaillerons avec l'infini.*

U-Graphen — Graphes inverses

Ein Problem bei der Darstellung von Folgen ist die Prozesshaftigkeit. Was man im Graphen links sieht, sind die ersten Glieder, die eigentlich nicht gross interessieren. Das was interessiert liegt soweit rechts, dass es in der Darstellung nicht erfassbar ist. **U-Graphen**² sind eine Darstellungsart für Folgen, die sich auf das aktual Unendliche stützen und den interessanten Teil ins Zentrum holen.

• *Un problème en représentant les suites est la qualité du processus. Ce qu'on voit à gauche dans le graphe sont les premiers termes qui ne sont pas intéressants. Et ce qui est intéressant est tellement loin à droite qu'on ne peut pas le représenter graphiquement. Les graphes inverses² sont une manière de représenter les suites qui se basent sur l'infini actuel et qui mettent la partie intéressante au centre.*

Im **U-Graphen** zur Darstellung von Folgen $\langle a_n \rangle$ skalieren wir die x -Achse reziprok. Das bedeutet, dass wir den Wert n statt in der Distanz vom Ursprung $x = n$ nun in der Distanz $\frac{1}{n}$ rechts vom Achsenschnittpunkt eintragen. Der y -Wert resp. a_n behalten wir wie üblich bei.



• *Dans le graphe inverse pour représenter la suite $\langle a_n \rangle$ nous choisissons l'échelle réciproque. Cela signifie qu'on dessine la valeur n à la distance $\frac{1}{n}$ à droite du point d'intersection des axes, au lieu de l'indiquer à la distance de l'origine $x = n$. Nous gardons la valeur y resp. a_n comme de coutume.*

Bsp.: • **Exemple:** $\langle a_n \rangle = \langle \frac{1}{n} \rangle$ Wir haben das Problem, dass ∞ gar keine Zahl ist. • *Nous avons le problème que ∞ n'est pas un nombre. ($\infty \notin \mathbb{N}$)*

Schreibweise: • **Façon d'écrire:** Um auszudrücken, dass n immer und immer grösser wird, schreiben wir: • *Pour exprimer que n devient de plus en plus grand, nous écrivons:*

$$n \rightarrow \infty$$

Problem: • **Problème:** Wie hängen nun $n \rightarrow \infty$ und $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ zusammen? Ist die Schreibweise " $\frac{1}{\infty} = 0$ " zulässig? • *Comment $n \rightarrow \infty$ et $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ sont-ils liés? Est-ce que la façon d'écrire (" $\frac{1}{\infty} = 0$ ") est admise?*

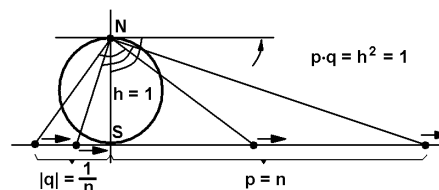
²Die Technik der U-Graphen ist vom Autor 1980 in Basel vorgestellt worden. • *La technique des graphes inverses a été présentée par l'auteur en 1980 à Bâle*

Idee: Betrachte den Kreis über dem Ursprung mit Mittelpunkt $M = (0, \frac{1}{2})$ und Radius $r = 1$.

1. • *Idee: Etudier le cercle sur l'origine avec le centre $M = (0, \frac{1}{2})$ et le rayon $r = 1$.*

Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$,

$C = N$ (Nordpol) gilt der Höhensatz:



• Dans le triangle rectangulaire $\triangle ABC$, $C = N$ (pôle nord) le théorème de la hauteur est valable:

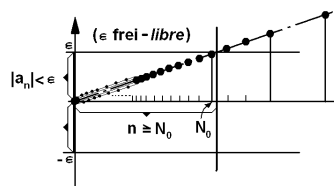
$$h^2 = 1 = |p| \cdot |q|. \leadsto |p| = \frac{1}{|q|}, \quad |p| = n \Rightarrow |q| = \frac{1}{n}.$$

Wenn nun $|p| = n$ wächst und wächst (wenn „ n gegen unendlich strebt“) so wird im Grenzfall das Dreieck entartet: Die Strecke $\overline{AC}$ wird zu einer Parallelen zur x -Achse und die Strecke $\overline{BC}$ wird zu $\overline{OC} = \overline{SC}$. Das bedeutet: Im Grenzfall „ $n = \infty$ “ wird $\frac{1}{n}$ zu 0. Im Beispiel $\langle a_n \rangle = \langle \frac{1}{n} \rangle$ liegen daher die Punkte auf einer Geraden durch den Achsenschnittpunkt. Dieser stellt nun hier den als Punkt sichtbar gewordenen **Grenzwert** oder Grenzpunkt $(\infty, 0)$ dar.

• Si $|p| = n$ devient de plus en plus grand (si „ n va vers infini“), on a au cas limite un triangle singulier: Le segment $\overline{AC}$ devient une parallèle à l'axe x et le segment $\overline{BC}$ devient $\overline{OC} = \overline{SC}$. Cela signifie: Au cas limite „ $n = \infty$ “ $\frac{1}{n}$ devient 0. Dans l'exemple $\langle a_n \rangle = \langle \frac{1}{n} \rangle$ les points sont situés sur une droite qui passe par le point d'intersection des axes. Celui-ci représente maintenant dans ce cas la **valeur limite** ou point limite $(\infty, 0)$ qui est devenue visible.

Vergleiche mit der Skizze: Wie man auch eine Zahl $\varepsilon > 0$ wählt, so gilt $a_n < \varepsilon$ von einer gewissen Schranke oder Zahl $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ an ($n > N_0$).

• Regarder l'esquisse: Comme on choisit un nombre $\varepsilon > 0$, il vaut $a_n < \varepsilon$ pour $n > N_0$, $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$.



Dieses Verhalten können wir als Grundlage einer abstrakten Definition der Nullfolge gebrauchen, wie sie heute gebräuchlich ist: • Nous pouvons utiliser ce comportement pour une définition abstraite de la suite convergeant vers zéro, comme on l'utilise aujourd'hui:

Definition: • **Définition:** $\langle a_n \rangle$ Nullfolge • suite convergeant vers zéro (NF'SZ)

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} \forall n > N_0 : |a_n| < \varepsilon$$

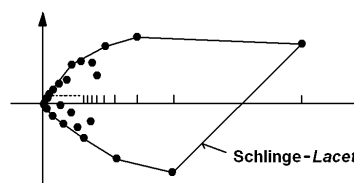
Diese Definition enthält drei Quantoren $\forall, \exists, \forall$, was in der Umgangssprache nicht vorkommt. Es braucht also eine grosse intellektuelle Anstrengung für den Lernenden und viel Geduld, um damit klar zu kommen. • Cette définition contient trois quantificateurs $\forall, \exists, \forall$ ce qui n'est pas de coutume dans la langue parlée. Il faut donc un grand effort intellectuel pour celui qui apprend et beaucoup de patience pour arriver à un point satisfaisant.

Symbol: • **Symbole:** $\langle a_n \rangle$ NF'SZ $\leadsto a_n \rightarrow 0, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$\leadsto a_n$ konvergiert gegen 0 resp. 0 ist **Grenzwert** von a_n . • a_n converge vers 0 resp. 0 est **valeur limite** de a_n .

Konvexe Schlingen — Lacets convexes

Wir denken uns im U-Graphen in jedem Punkt der Folge einen unendlich dünnen Nagel eingeschlagen. Wenn man um alle Nägel einen Faden legt und diesen spannt, so entsteht eine konvexe Schlinge. Diese nennen wir die **konvexe Schlinge des U-Graphen**.



• *Nous nous imaginons que dans chaque point du graphe inverse on ait planté un clou infiniment mince. Si on tend une ficelle autour de tous ces clous on obtient un lacet convexe. Nous l'appelons le **lacet convexe du graphe inverse**.*

Wir sehen sofort, dass bei einer Nullfolge die konvexe Schlinge die y -Achse nur in einem Punkt berührt, in $(\infty, 0)$ nämlich. • *Nous voyons tout de suite que dans une NF'SZ le lacet convexe touche l'axe y seulement dans un point: $(\infty, 0)$.*

Wir sagen: • *Nous disons:*

Definition: • **Définition:**

Eine konvexe Schlinge heisst **einfach**, wenn sie mit der y -Achse genau einen Berührungspunkt hat. Einen solchen Berührungspunkt nennen wir **Kontakt**. • *Nous appelons un lacet convexe **simple**, s'il n'a qu'un point où il touche l'axe y . Nous appelons **contact** un tel point de contact.*

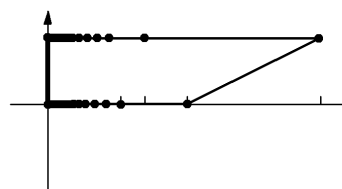
Man sieht unmittelbar: • *Nous voyons tout de suite:*

Korollar: • **Corollaire:**

$\langle a_n \rangle$ NF'SZ $\Rightarrow$ die konvexe Schlinge berührt links nur in $(\infty, 0)$
• *le lacet convexe touche à gauche seulement dans $(\infty, 0)$*

Bsp.: • **Exemple:**

$$a_n = \begin{cases} 1 & n = 2m - 1, \quad m \in \mathbb{N} \\ 0 & n = 2m, \quad m \in \mathbb{N} \end{cases}$$



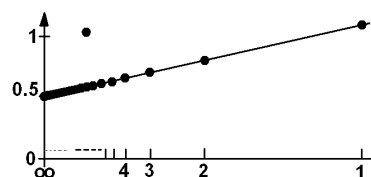
$\leadsto$ Schlinge nicht einfach. • *Lacet non simple.*

Bsp.: • **Exemple:**

$$a_n = 0.5 + \frac{1}{n}$$

$\leadsto$ Schlinge einfach. • *Lacet simple.*

Kontakt in • *contact à $(\infty, 0.5) = (\infty, a)$*



Das letzte Beispiel legt folgende Definition nahe: • *L'exemple dernier nous donne la motivation pour la définition suivante:*

Definition: • **Définition:**

$\langle a_n \rangle$ konvergiert gegen • *converge vers $a \Rightarrow \langle a_n - a \rangle$ NF'SZ*
($\Rightarrow$ einziger Kontakt in • *contact unique à (∞, a))*
 a heisst **Grenzwert** der Folge • *s'appelle **valeur limite** de la suite*

Symbol: • **Symbole:** $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

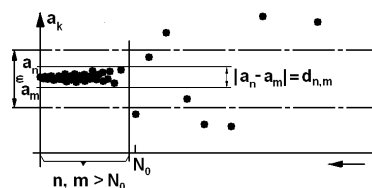
$\langle a_n \rangle$ hat demnach einen Grenzwert, wenn die Folge eine konvexe Schlinge besitzt mit nur einem Kontakt.
 • $\langle a_n \rangle$ a donc une valeur limite, si la suite possède un lacet convexe avec un seul contact.

Definition: • **Définition:** Eine Folge, die einen Grenzwert besitzt, nennen wir **konvergent** (conv).
 • Und suite qui possède une valeur limite, s'appelle **convergente** (conv).
 Eine Folge, die nicht konvergiert, nennen wir **divergent**.
 • Und suite qui ne converge pas, s'appelle **divergente**.

Konvergenzkriterien — critères de convergence

Die Katze beißt sich nun in den Schwanz: Einerseits möchte man Grenzwerte von Folgen bestimmen, von denen man sich aber erst überzeugen muss, dass sie konvergieren, d.h. einen Grenzwert besitzen. Andererseits muss man den Grenzwert a schon kennen, um die verfügbare Konvergenzdefinition anwenden zu können. • *Le chat se mord maintenant dans la queue: D'une part on aimerait calculer la valeur limite d'une suite dont on doit d'abord savoir qu'elle converge, ç.v.d. qu'elle possède une valeur limite. D'autre part il faut déjà connaître la valeur limite a pour pouvoir appliquer la définition de convergence disponible.*

Ein Instrument zur Beurteilung der Konvergenz ohne Kenntnis des Grenzwertes haben wir mit dem **Kriterium von Cauchy**³, das man am U-Graphen unmittelbar ablesen und nachvollziehen kann. Man nennt es auch **grenz-wertfreie Konvergenzdefinition**.



• *Le critère de Cauchy*³ nous donne un instrument pour juger la convergence sans connaître la valeur limite. On peut le vérifier et comprendre à l'aide des graphes inverses. On l'appelle aussi **définition de la convergence sans valeur limite**.

Satz: • **Théorème:** **Cauchy**
 $\langle a_n \rangle$ konv. • conv. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} \forall n, m > N_0, n, m \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \varepsilon$

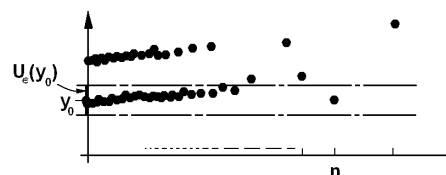
Zum Beweis • **Quant à la preuve:**

$\Rightarrow$: Klar. • *Bien clair.*

$\Leftarrow$: Widerspruch, da sonst mehrere Berührungspunkte. • *Contradiction, si non plusieurs points de contact.*

Definition: • **Définition:**

y_0 **Häufungspunkt** (HP'PA) von $\langle a_n \rangle$:
 • y_0 **point d'accumulation** (HP'PA) de $\langle a_n \rangle$: $\Leftrightarrow \forall U_\varepsilon(y_0) \exists \infty$ viele Folgenglieder in $U_\varepsilon(y_0)$ • *termes dans $U_\varepsilon(y_0)$*



Man merkt gleich, dass Grenzwerte HP'PA sind. Weiter ist ein HP'PA in einem U-Graphen immer Kontaktpunkt. • *On aperçoit tout de suite que des valeurs limites sont des HP'PA. En plus un*

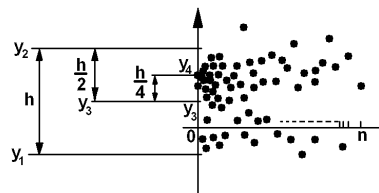
³Cauchy: 1789-1857

HP'PA est dans le graphe inverse toujours un point de contact.

Weiter gilt der erstaunliche Satz: • *En outre le théorème étonnant suivant est valable:*

Satz: • Théorème: Jede Folge besitzt mindestens einen HP'PA, der auch $\pm\infty$ sein kann.
 • *Chaque suite possède au moins un HP'PA qui peut être aussi $\pm\infty$.*

Um diese Tatsache einzusehen, betrachten wir in einem U-Graphen die Kontaktpunkte. Falls $\pm\infty$ HP'PA ist, brauchen wir nichts zu zeigen. Sei also $\pm\infty$ nicht HP'PA. Die Kontaktpunkte und damit unendlich viele Folgenglieder liegen somit in einem endlichen Intervall $I_0 = [y_1, y_2]$ der Länge h .



Teilen wir dieses Intervall durch y_3 in der Mitte, so ergeben sich zwei neue Teilintervalle $[y_1, y_3]$, $[y_3, y_2]$ der Länge $\frac{1}{2}h$, von denen in mindestens einem wieder unendlich viele Folgenglieder liegen. Dieses eine Intervall nennen wir I_2 . Mit I_2 verfahren wir genauso und erhalten ein Intervall I_3 der Länge $(\frac{1}{2})^2h$ mit unendlich vielen Folgengliedern und so fort. Nach n solchen Schritten haben wir ein Teilintervall I_{n+1} der Länge $(\frac{1}{2})^{n+1}h$ mit unendlich vielen Folgengliedern. Daraus ersieht man, dass sich bei der Fortsetzung dieses Prozesses die Intervalllänge auf 0 zusammenzieht und so ein Kontaktpunkt entstehen muss. Dieser ist aus dem Prozess ersichtlich ein HP'PA. (Nach Konstruktion existieren in jeder Umgebung Intervalle, die unendlich viele Punkte enthalten.)

• *Pour pouvoir comprendre ce fait nous étudions dans un graphe inverse les points de contact. Si $\pm\infty$ est HP'PA, on n'a rien à démontrer. Soit donc $\pm\infty$ non HP'PA. Les point de contact et avec eux un nombre infini de termes de la suite sont donc situés dans un intervalle fini $I_0 = [y_1, y_2]$ de longueur h . Si l'on partage cet intervalle au milieu par y_3 , on obtient deux nouveaux intervalles partiels $[y_1, y_3]$, $[y_3, y_2]$ de longueur $\frac{1}{2}h$ dans au moins un desquels un nombre infini de termes de la suite sont situés. Nous appelons cet intervalle I_2 . Pour I_2 nous appliquons la même méthode. Puis nous obtenons un intervalle I_3 de longueur $(\frac{1}{2})^2h$ qui contient un nombre infini de termes de la suite etc.. Après n étapes on a un intervalle partiel I_{n+1} de longueur $(\frac{1}{2})^{n+1}h$ avec un nombre infini de termes de la suite. On voit donc qu'en continuant ce processus la longueur de l'intervalle se réduit vers 0. On arrive à un point de contact. Celui-ci est un HP'PA comme on voit du processus. (D'après la construction, dans chaque voisinage il existent des intervalles qui contiennent un nombre infini de points.)*

Bsp.: • Exemple: Sei • *Soit $n \in \mathbb{N}$, $a_n := \sin(n) \rightsquigarrow a_n \in (0, 1)$, $a_n \neq 0$*

- Annahme: • *Supposons: $a_n = \sin(n) = \pm 1 \rightsquigarrow n = k \cdot \pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) $\Rightarrow (\pi = \frac{n}{k} \in \mathbb{Q}) \vee (k = 0)$
 $\Rightarrow$ Widerspruch! • *Contradiction!**
- Annahme: • *Supposons: $a_n = a_m \Rightarrow \sin(n) = \sin(m)$ ($n, m \in \mathbb{N} \wedge n \neq m$)
 $\rightsquigarrow m = n + k \cdot 2\pi \vee m = \pi - n + k \cdot 2\pi \Rightarrow \pi = \frac{m - n}{2k} \in \mathbb{Q} \vee \pi = \frac{m + n}{2(k + 1)} \in \mathbb{Q}$, ($k \neq 0$) $\vee$ ($k + 1 \neq 0$)
 $\Rightarrow$ Widerspruch! • *Contradiction!**

Konsequenz: • Conséquence:

$\{a_n \mid \langle a_n \rangle = \langle \sin(n) \rangle\} \subset (0, 1)$, $|\{a_n = \sin(n) \mid n \in \mathbb{N}\}| = |\mathbb{N}| < |(0, 1)|$
 $\rightsquigarrow \langle a_n \rangle$ ist in $(0, 1)$ verteilt und es gibt mindestens einen Häufungspunkt. Doch ist es momentan überhaupt nicht vorstellbar, wo ein solcher in $(0, 1)$ liegen könnte.

• *$\langle a_n \rangle$ est distribué dans $(0, 1)$ et il y a au moins un point d'accumulation. Mais momentanément, de toute façon il n'est pas imaginable où un tel point pourrait être situé dans $(0, 1)$.*

Definition: • **Définition:** $\langle b_n \rangle$ **Teilfolge** von • **suite partielle** de $\langle a_n \rangle$: $\Leftrightarrow$
 $\langle b_n \rangle$ entsteht aus $\langle a_n \rangle$ durch weglassen von Gliedern
 • $\langle b_n \rangle$ *est déduit de $\langle a_n \rangle$ en traçant des termes.*
Symbol: • **Symbole:** $\langle b_n \rangle \subseteq \langle a_n \rangle$

Dabei kann man beliebig viele Glieder weglassen. Die Reihenfolge darf aber nicht geändert werden. Und die Nummerierung muss angepasst werden. • *On peut laisser tomber un nombre quelconque de termes, mais il ne faut pas changer l'ordre. Et l'énumération doit être adaptée.*

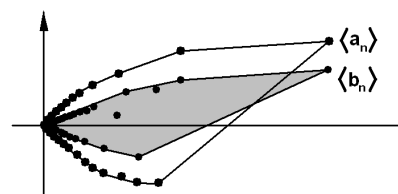
Es ist sofort einsichtig, dass gilt: • *On voit tout de suite qu'il vaut:*

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:** $\langle b_n \rangle \subseteq \langle a_n \rangle, a_n \rightarrow a$
Beh.: • **Thè.:** $b_n \rightarrow a$

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:** y_0 HP'PA von • de $\langle a_n \rangle$
Beh.: • **Thè.:** $\exists_{\langle b_n \rangle \subseteq \langle a_n \rangle} : b_n \rightarrow y_0$

Definition: • **Définition:** $\langle a_n \rangle$ **Majorante** von • **majorante** de $\langle b_n \rangle$:
 $\Rightarrow \exists_{N_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n > N_0} : |a_n| \geq |b_n|$
 $\leadsto \langle b_n \rangle$ **Minorante** von • **minorante** de $\langle a_n \rangle$

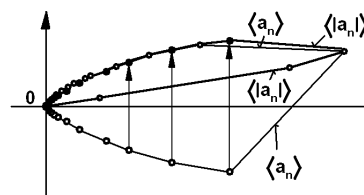
Mit Hilfe eines U-Graphen macht man sich leicht das folgende **Majorantenkriterium** klar: • *A l'aide des graphes inverses on comprend facilement le critère de la majorante suivant:*



Satz: • **Théorème:** **Majorantenkriterium** • **critère de la majorante**
Vor.: • **Hyp.:** $\langle a_n \rangle$ NF'SZ und Majorante von • et majorante de $\langle b_n \rangle$
Beh.: • **Thè.:** $\langle b_n \rangle$ NF'SZ

Vgl. U-Graph • *Voir graphe inverse:*

$\langle a_n \rangle$ NF'SZ $\Leftrightarrow \langle |a_n| \rangle$ NF'SZ



Satz: • **Théorème:** $\langle a_n \rangle$ NF'SZ $\Leftrightarrow \langle |a_n| \rangle$ NF'SZ

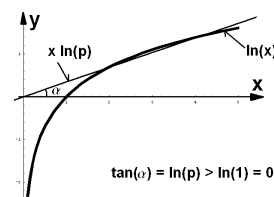
Bsp.: • **Exemple:** Es gilt: • *Il vaut:*

$$n > 1, p > 1 \Rightarrow \ln(n) < \ln(p^n) = n \ln(p)$$

$$\Rightarrow n < p^n \text{ für } \bullet \text{ pour } n > N_0.$$

Das sieht man aus den Graphen von: • *Ça se voit des diagrammes de:* $f(x) = \ln(x)$

und • *et* $g(x) = x \ln(p) = x \cdot c$. (Vgl. auch die Umkehrfunktionen. • *Voir aussi les fonctions inverses.*)



$$\Rightarrow \frac{1}{p^n} = \left(\frac{1}{p}\right)^n = q^n < \frac{1}{n} \rightsquigarrow \langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle \text{ NF'SZ, } |q| < 1 \Rightarrow |q|^n < \frac{1}{n} \Rightarrow \langle b_n \rangle = \langle |q|^n \rangle \text{ NF'SZ.}$$

Beweis: • **Preuve:**

$$|q| < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{|q|} := 1 + d \Rightarrow \frac{1}{|q|^n} = (1 + d)^n = 1^n + \binom{n}{1} 1^{n-1} d + \binom{n}{2} 1^{n-2} d^2 + \dots + d^n > 1^n + \binom{n}{1} 1^{n-1} d + \binom{n}{2} 1^{n-2} d^2 = 1 + n d + \underbrace{\frac{n(n-1)}{2} d^2}_{\sim n^2} > n \text{ für } \bullet \text{ pour } n > N_0$$

$$\rightsquigarrow n > N_0 \Rightarrow \frac{1}{n} > |q|^n, \lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = 0$$



Definition: • **Définition:**

Die Folge • *La suite* $\langle b_n \rangle = \langle q^n \rangle$ heisst **geometrische Folge**

• *s'appelle suite géométrique.*

(Allgemeiner: • *Plus générale:* $\langle b_n \rangle = c \cdot \langle q^n \rangle$)

Korollar: • **Corollaire:**

$$|q| < 1 \Rightarrow \langle a_n \rangle = \langle |q|^n \rangle \Rightarrow \langle b_n \rangle = \langle q^n \rangle \rightarrow 0 \text{ (NF'SZ)}$$

$$q = 1 \Rightarrow \langle a_n \rangle = \langle 1^n \rangle \rightarrow 1$$

$$q = -1 \Rightarrow \langle a_n \rangle = \langle (-1)^n \rangle \rightarrow \pm 1 \text{ (2 HP'PA)}$$

$$q > 1 \Rightarrow \langle a_n \rangle = \langle q^n \rangle \rightarrow \infty \text{ (Div.)} \bullet \text{ div.}$$

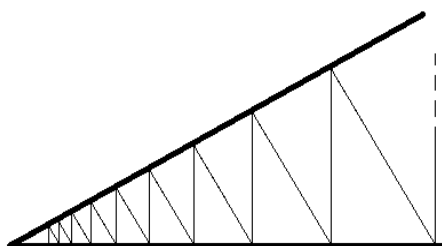
$$q < -1 \Rightarrow \langle a_n \rangle = \langle q^n \rangle \rightarrow \pm \infty \text{ (Div.)} \bullet \text{ div.}$$

Bemerkung: • **Remarque:**

Geometrische Folgen sind keine polynomiale Folgen mehr wie z.B. die arithmetischen Folgen es sind $(a_n = a_1 + (n-1)d)$. Sie verhalten sich exponentiell, denn $a_n = q^{n-1}$ ist ein Spezialfall der Funktion

$$f(x) = q^{x-1} = \frac{1}{q} \cdot q^x = c \cdot q^x, \text{ zum Beispiel } f(x) = c \cdot e^x$$

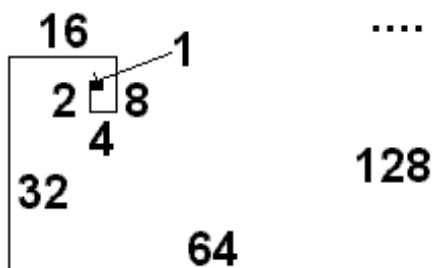
• *Les suites géométriques ne sont plus de suites polynomes, p. ex. comme on sait des suites arithmétiques* $(a_n = a_1 + (n-1)d)$. *Elles se comportent de façon exponentielle, car* $a_n = q^{n-1}$ *est un cas spécial de* $f(x) = q^{x-1} = \frac{1}{q} \cdot q^x = c \cdot q^x$, *comme par exemple* $f(x) = c \cdot e^x$.



Nebstehend ist eine Iteration einer Ähnlichkeitsabbildung gezeigt. Man prüft sofort nach, dass die Teilpunkte auf den Schenkeln je eine geometrische Folge bilden. Wir sind hier mitten in der Geometrie. $\leadsto$ Geometrische Folge.

• *Ci-contre, on voit une itération d'une transformation par similitude. On contrôle tout de suite que les points d'intersection sur les côtés forment une suite géométrique. Ici nous sommes directement dans la géométrie. $\leadsto$ Suite géométrique.*

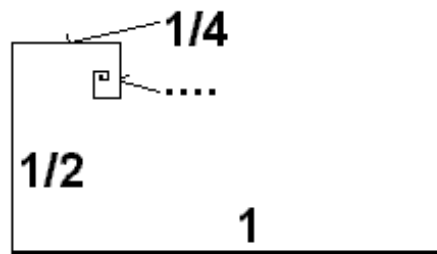
Problem: • **Problème:**



a) Totale Streckenlänge:

• *Longueur totale du chemin:*

$$L = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots \rightarrow \infty$$



b) Totale Streckenlänge:

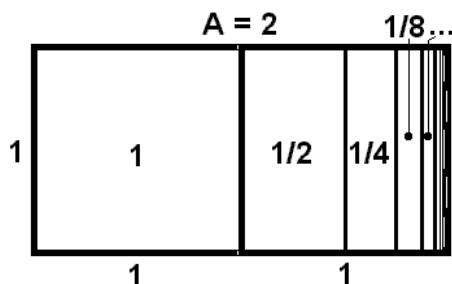
• *Longueur totale du chemin:*

$$L = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \rightarrow ?$$

Vergleich: • *Comparaison:*

$$A_{tot} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \leq 1 + 1 = 2$$

Frage: • *Question:* $A_{tot} \stackrel{?}{=} 2$



Hinweis: • **Indication:** Man denke an das Problem von Achilles mit der Schildkröte... • *Pensons au problème d'Achille avec la tortue...*

Um das obige Problem zu lösen müssen wir die Summe der Glieder einer konvergenten geometrischen Folge exakter behandeln: • *Pour résoudre ce problème, nous devons traiter de problème de la somme des termes (membres) d'une suite géométrique et convergente de façon plus exacte:*

Definition: • **Définition:**

Die Folge • *La suite* $\langle c_n \rangle = \langle \sum_{k=0}^n q^k \rangle$

heißt **geometrische Reihe** • *s'appelle série géométrique.*

Es gilt: • *Il vaut:*

$$(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) \cdot (1 - q) = 1 - q^n \Rightarrow 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} \rightarrow \frac{1}{1 - q} \quad (|q| < 1)$$

Korollar: • **Corollaire:****Vor.:** • **Hyp.:**

$|q| < 1$

Beh.: • **Thè.:**

$$\left(\sum_{k=0}^n q^k\right) \rightarrow \frac{1}{1-q}$$

Bemerkung: • **Remarque:**

Falls man weiss, dass die Reihe konvergiert, kann man den Grenzwert auch wie folgt berechnen:

• *Si on sait que la série converge, on peut calculer la valeur limite comme il suit:*

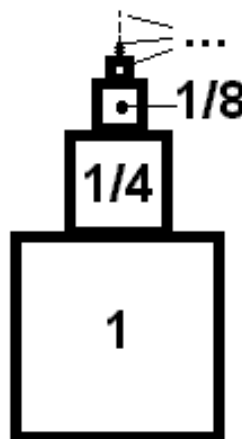
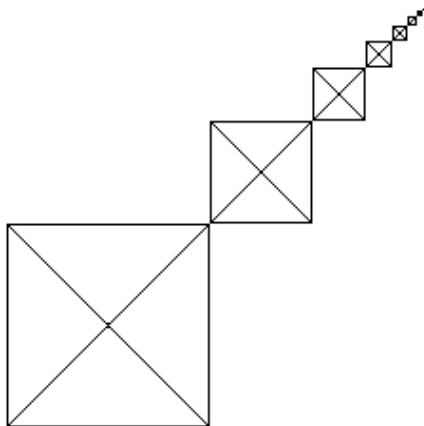
$$x = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots = 1 + q \cdot (1 + q + q^2 + q^3 + \dots) = 1 + q \cdot x \Rightarrow x \cdot (1 - q) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{1 - q}$$

$$\leadsto \textbf{Konsequenz:} \quad \bullet \textbf{Conséquence:} \quad A_{tot} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

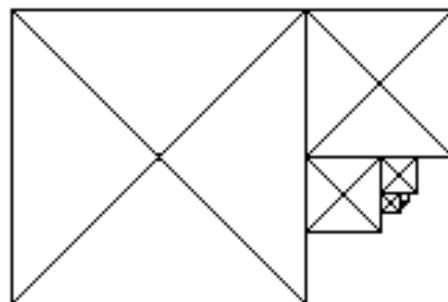
Im nebenstehenden Bild ist ein unendlich hoher Turm mit quadratischem Grundriss gezeigt. Der Volumeninhalt ist: • *Dans l'image ci-contre, nous voyons une tour infi-niment haute avec plan carré. Le volume est:*

$$V = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^3}\right)^2 + \dots = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \neq \infty$$

($h = 1 + 1 + 1 + \dots \rightarrow \infty$)

**Weitere Beispiele:** • **D'autres exemples:**

a) $A_{tot} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$



b) $A_{tot} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$

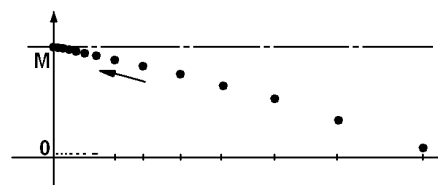
Weiter wissen wir, dass jede Folge mindestens einen HP hat. Was heisst das für Folgen, die monoton und beschränkt sind?

• *En outre nous savons que chaque suite a au moins un PA. Qu'est-ce que ça signifie pour une suite monotone et bornée?*

Vgl. U-Graph • *Voir graphe inverse:*

Sei: $\langle a_n \rangle$ monoton wachsende und beschränkte Folge

• *Soit: $\langle a_n \rangle$ suite croissante monotone et bornée.*



Wegen der Monotonie kann die Folge im U-Graphen nur einen Kontakt haben, der beschränkt ($\neq \pm\infty$) sein muss • *A cause de la monotonie la suite ne peut avoir qu'un seul contact dans le graphe inverse, qui doit donc être borné.*

Ebenso für fallende Folgen • *De même pour des suites décroissantes.*

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$\langle a_n \rangle$ monoton und beschränkt • *monotone et borné*

Beh.: • **Thè.:**

$\langle a_n \rangle$ konvergent • *convergent*

(Eselsbrücke: Denke an die konvergente Lektion: Sie ist monoton und beschränkt.

• *Moyen mnémotechnique: Penser à la leçon convergente: Elle est monotone et bornée.)*

Bsp.: • **Exemple:** Sei • *Soit* $a_1 = 2, a_2 = 3, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(a_{n-1})^n}$

$$1. \frac{1}{(a_{n-1})^n} > 0 \Rightarrow a_n < a_n + \frac{1}{(a_{n-1})^n} = a_{n+1} \\ \sim \langle a_n \rangle \text{ monoton wachsend} \quad \bullet \langle a_n \rangle \text{ croissante de façon monotone}$$

$$2. a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(a_{n-1})^n} < a_n + \frac{1}{\min(a_n)^n} = a_n + \frac{1}{2^n} < a_{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} < a_{n-2} + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} < \dots < a_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 + \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3 \sim \langle a_n \rangle \text{ beschränkt} \quad \bullet \langle a_n \rangle \text{ bornée}$$

$$3. \langle a_n \rangle \text{ monoton und beschränkt} \sim \langle a_n \rangle \text{ konvergent} \\ \bullet \langle a_n \rangle \text{ monotone et borné} \sim \langle a_n \rangle \text{ convergente}$$

Rechenregeln — Règles de calcul

Seien • *Soient* $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$ Folgen mit • *suites avec* $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b, c \in \mathbb{R}$.

Mit Hilfe von U-Graphen kann man die meisten der folgenden elementaren Regeln sofort ablesen:

• *Dans la plupart des cas suivants on peut se rendre compte tout de suite à l'aide des graphes inverses que les règles sont valables:*

Regeln: • **Règles:**

- | | |
|---|---|
| 1. $a_n \pm b_n \rightarrow a \pm b$ | 6. c^{a_n}, c^a def. • <i>défini</i> $\Rightarrow c^{a_n} \rightarrow c^a$ |
| 2. $a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b$ | 7. $c^{\frac{1}{n}} \rightarrow c^0 = 1$ |
| 3. $a_n \cdot c \rightarrow a \cdot c$ | 8. $\sin(a_n) \rightarrow \sin(a)$ |
| 4. $b, b_n \neq 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$ | 9. $\cos(a_n) \rightarrow \cos(a)$ |
| 5. a_n^c, a^c definiert • <i>défini</i> $\Rightarrow a_n^c \rightarrow a^c$ | 10. Mehr bei den stetigen Funktionen.
• <i>Davantage lors des fonctions continues.</i> |

Bsp.: • **Exemple:** $\frac{\frac{1}{n} + 1 + n}{1 + (-3n) + 2n^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow ?$

Trick: • **Truc:** Bringe alle Potenzen in Zählern zum Verschwinden: Dividiere hier Zähler und Nenner durch n^2 . • *Faire disparaître toutes les puissances dans les numérateurs et les dénominateurs: Diviser les numérateurs et les dénominateurs par n^2 .* $\leadsto$

$$\frac{\frac{1}{n} + 1 + n}{1 + (-3n) + 2n^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + (-3)\frac{1}{n} + 2} \cdot \cos\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow \frac{0 + 0 + 0}{0 + (-3 \cdot 0) + 2} \cdot \cos(0) = \frac{0}{2} \cdot 1 = 0$$

Die Eulersche Zahl als Grenzwert — Le nombre d'Euler comme valeur limite

In 2.3.1 auf Seite 30 wurde der Wert • *Dans 2.3.1 à la page 30 la valeur*

$e = 2.718281828459045235360287471352662497757247093699959574966967627724077 \dots$

genannt. Woher kommt dieser Wert? • *était mentionnée. D'où vient cette valeur?*

e ist eine Zahl, die man als Grenzwert einer Folge definieren kann: • *e est un nombre qu'on peut définir comme valeur limite d'une suite:*

Definition: • **Définition:** (a) $e := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, (b) $e := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$

Problem: • **Problème:** (a) Konvergiert diese Folge? • *(a) Est-ce que cette suite est convergente?*

Konzept: Wir zeigen zwei Dinge. Erstens: $\langle a_n \rangle$ ist beschränkt. Zweitens: $\langle a_n \rangle$ ist streng monoton wachsend. Somit muss $\langle a_n \rangle$ konvergent sein. Man kann den Rechner einsetzen, um zu numerischen Näherungen zu gelangen.

• *Concept: Nous démontrons deux choses. Premièrement: $\langle a_n \rangle$ est borné. Deuxièmement $\langle a_n \rangle$ est croissant de façon stricte. $\langle a_n \rangle$ doit donc être convergente. On peut utiliser l'ordinateur pour obtenir des approximations.*

$$1. \ 1 < a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0}1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} =$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \frac{n}{n} + \frac{n \cdot (n-1)}{2 \cdot n \cdot n} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{2 \cdot 3 \cdot n \cdot n \cdot n} + \dots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n} = \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{3}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n^n} \\
&< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \dots = \\
&= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} + \frac{1}{42320} + \frac{1}{362880 (=r)} + \frac{1}{r \cdot 10} + \frac{1}{r \cdot 10 \cdot 11} + \dots := \\
&:= a + \frac{1}{362880 (=r)} + \frac{1}{r \cdot 10} + \frac{1}{r \cdot 10 \cdot 11} + \dots = a + r \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 10 \cdot 10} + \dots\right) = \\
&= a + r \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots\right) = a + r \cdot (1.1111\dots) := z \in \mathbb{R}, \\
&a = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} + \frac{1}{42320} \Rightarrow \forall_{n \in \mathbb{N}} 0 < a_n < z \Rightarrow \langle a_n \rangle \text{ beschr'borné}
\end{aligned}$$

2. $a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{3}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n^n} <$
 $1 + 1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \left(1 - \frac{3}{n+1}\right) + \dots = a_{n+1}$
 $\leadsto$ " $<$ " ist richtig • *est juste*.
Denn wegen • *Car à cause de* $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ folgt • *il suit* $\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$.
Zudem hat a_{n+1} einen positiven Summanden mehr. • *En plus* a_{n+1} possède un terme positif de plus dans la somme.
 $\leadsto$ a_n ist streng monoton wachsend • *est croissant de façon monotone et stricte*. ☺

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$\langle a_n \rangle = \left\langle \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\rangle$$

Beh.: • **Thè.:**

$$\langle a_n \rangle \text{ conv (Grenzwert} = e \text{ • Valeur limite} = e)$$

Bemerkung: • **Remarque:**

Man kann zeigen, dass gilt: • *On peut montrer:*

1. $e \notin \mathbb{Q}$

$$2. e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \dots}}}}}$$

$$2 + \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{1}} + \dots$$

$$3. e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

Vgl. Potenzreihen • *Voir séries de puissances*

Konvergenz: • **Convergence:** $c_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$

$$\begin{aligned}
&\leadsto \forall_n : c_{n+1} = c_n + \frac{1}{(n+1)!} > c_n, \\
2.7083\bar{3} < c_n &= \underbrace{\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}}_{=2.7083\bar{3}} + \dots < 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3 \\
&\leadsto 2.7083\bar{3} = 2.70833333 \dots < c_{\infty} = e < 3
\end{aligned}$$

Rekursionsformel für Kettenbrüche — Formule de récurrence pour le développement en fraction continue

Problem: • **Problème:** Wie findet man • *Comment trouver* $e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \dots}}}}}$ =

$$2 + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor + \dots ?$$

Sei $[x]$ die Gauss-Klammer-Funktion von x . Soit $[x]$ la fonction aux parenthèses de Gauss de x .

Sei • *Soit* $z := z_0 = z_1 + \frac{1}{z_2 + \frac{1}{z_3 + \frac{1}{z_4 + \frac{1}{z_5 + \frac{1}{z_6 + \dots}}}}}$, $z = z_0 := x_0 \in \mathbb{R}$, $z_k \in \mathbb{Z}$ ($k \in \mathbb{N}$)

Wir schreiben: • *Nous écrivons:* $z := x_0 = [x_0] + r_0 = [x_0] + \frac{1}{x_1} = [x_0] + \frac{1}{[x_1] + r_1} = [x_0] + \frac{1}{[x_1] + \frac{1}{x_2}} =$

$$= [x_0] + \frac{1}{[x_1] + \frac{1}{[x_2] + r_2}} = [x_0] + \frac{1}{[x_1] + \frac{1}{[x_2] + \frac{1}{x_3}}} = \dots, \quad r_k := \frac{1}{x_{k+1}} \in (-1, 1)$$

$$\begin{aligned}
\leadsto \quad z = x_0 \quad r_0 &= \frac{1}{x_1} = x_0 - [x_0] & \Rightarrow x_1 &= \frac{1}{x_0 - [x_0]} \\
r_1 &= \frac{1}{x_2} = x_1 - [x_1] & \Rightarrow x_2 &= \frac{1}{x_1 - [x_1]} \\
r_2 &= \frac{1}{x_3} = x_2 - [x_2] & \Rightarrow x_3 &= \frac{1}{x_2 - [x_2]} \\
&\vdots & & \vdots \\
r_k &= \frac{1}{x_{k+1}} = x_k - [x_k] & \Rightarrow x_{k+1} &= \frac{1}{x_k - [x_k]}
\end{aligned}$$

Formel: • **Formule:** $z_0 := z = x_0$, $z_1 = [z_0] = [x_0]$, $z_{k+1} = [x_k] = \left\lfloor \frac{1}{x_{k-1} - [x_{k-1}]} \right\rfloor$, $k > 1$

Hinweis: • **Indication:** Die Programmierung dieser Formeln z.B. mit *Mathematica* ist sehr einfach (vgl. *Mathematica*-Demo-File CM9). • *La programmation de cette formule p.ex. avec Mathematica est très simple (voir fichier de démonstration en Mathematica CM9).*

Die harmonische Reihe — La série harmonique

Definition: • **Définition:** $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$
 heisst **harmonische Reihe** • *s'appelle série harmonique*

Wir wollen etwas vorgreifen. Mit Hilfe der Integralrechnung und des Minorantenkriteriums können wir später zeigen, dass die Harmonische Reihe divergiert. • *Nous allons regarder un peu en avant. A l'aide du calcul intégral et du critère de la minorante nous pouvons montrer plus tard que la série harmonique diverge.*

Direkt kann man das wie folgt einsehen: • *Directement on peut le voir comme il suit:*

$$\underbrace{1}_{=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}_{\geq \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}}_{\geq \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} + \dots \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \rightarrow \infty$$

Nun zu einer Anwendung von Folgen aus der Finanzmathematik:

- *Voilà une application des suites dans les mathématiques des finances:*

2.3.7 Stetige Verzinsung — Continuellement rapporter des intérêts

Sei K_0 = Anfangskapital, K_n = Kapital nach m Perioden, p = Zinsfuß, t = n -ter Teil des Jahres, Z_m = Zins nach m Perioden.

- *Soit K_0 = capital initial, K_n = capital après m périodes, p = taux d'intérêt, t = n -ème partie de l'année, Z_m = intérêt après m périodes.*

Für den Zins und das Kapital nach m Jahren gilt, wenn das Geld auf der Bank bleibt: Si on laisse l'argent à la banque, il vaut pour l'intérêt après m années:

$$\begin{aligned} \varepsilon &:= \frac{p}{100} \\ K_1 &= K_0 + Z_1 = K_0 + K_0 \cdot \frac{p}{100} = K_0 + K_0 \cdot \varepsilon = K_0 \cdot (1 + \varepsilon) \\ K_2 &= K_1 + Z_2 = K_1 + K_1 \cdot \varepsilon = K_1 \cdot (1 + \varepsilon) = K_0 \cdot (1 + \varepsilon)^2 \\ &\vdots \\ K_m &= K_{m-1} + Z_m = K_{m-1} + K_{m-1} \cdot \varepsilon = K_{m-1} \cdot (1 + \varepsilon) = K_0 \cdot (1 + \varepsilon)^m \end{aligned}$$

Für den Zins und das Kapital nach m Perioden eines Jahres mit h Perioden gilt, wenn das Geld auf der Bank bleibt:

- *Si on laisse l'argent à la banque, il vaut pour l'intérêt après m périodes de année avec h périodes:*

$$\begin{aligned} h \cdot T &= 1 \text{ (Jahr)} \quad \bullet \text{ (année)} \\ K_1 &= K_0 + Z_1 = K_0 + K_0 \cdot \frac{\varepsilon}{h} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{h}\right) \\ K_2 &= K_1 + Z_2 = K_1 + K_1 \cdot \frac{\varepsilon}{h} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{h}\right)^2 \\ &\vdots \\ K_m &= K_{m-1} + Z_m = K_{m-1} + K_{m-1} \cdot \frac{\varepsilon}{h} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{h}\right)^m \end{aligned}$$

Für den Zins und das Kapital nach $m = n \cdot h$ Perioden in n Jahren mit h Perioden pro Jahr gilt, wenn das Geld auf der Bank bleibt:

- Si on laisse l'argent à la banque, il vaut pour l'intérêt après $m = n \cdot h$ périodes après n années avec h périodes:

$$m = n \cdot h, \quad \frac{\varepsilon}{h} = \frac{1}{h'}, \quad h' = \frac{h}{\varepsilon}, \quad h \cdot T = 1$$

$$K_{n,T} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{h}\right)^{n \cdot h} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{h'}\right)^{n \cdot h' \cdot \varepsilon}$$

Für $T \rightarrow 0$ und gleichzeitig $h \rightarrow \infty$, $h' \rightarrow \infty$ gilt:

- Pour $T \rightarrow 0$ et en même temps $h \rightarrow \infty$, $h' \rightarrow \infty$ il vaut:

$$\lim_{T \rightarrow 0} K_{n,T} = K_{n,0} = K_0 \cdot \lim_{h' \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{h'}\right)^{h' \cdot \varepsilon \cdot n} = K_0 \cdot \left(\lim_{h' \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{h'}\right)^{h'}\right)^{(\varepsilon \cdot n)} = K_0 \cdot e^{(\varepsilon \cdot n)}$$

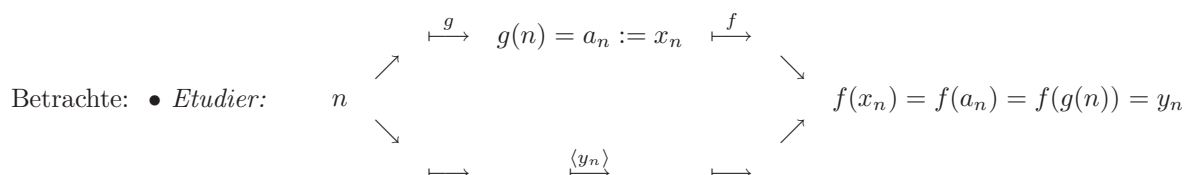
Die erstaunliche Erkenntnis hier ist, dass das Kapital bei stetiger Verzinsung zwar exponentiell wächst und damit aber immer endlich bleibt.

- Quant à cette déduction, la découverte importante est que le capital croît de façon exponentielle. Mais il ne devient jamais infini.

Korollar: • **Corollaire:** $\varepsilon := \frac{p}{100} \Rightarrow K_{n,0} = K_0 \cdot e^{(\varepsilon \cdot n)}$

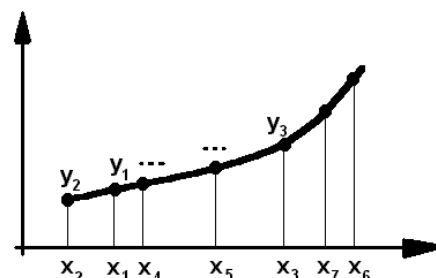
2.4 Grenzwerte bei Funktionen — Valeurs limites de fonctions

2.4.1 Konvergenz bei Funktionen — Convergence de fonctions



Durch Zusammensetzung von $\langle a_n \rangle$ und f erhalten wir eine neue Folge $\langle y_n \rangle$

- En composant $\langle a_n \rangle$ et f nous obtenons une nouvelle suite $\langle y_n \rangle$.



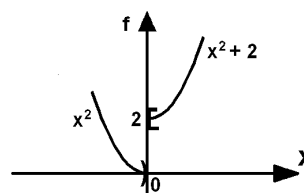
Sei • Soit $a_n = x_n \rightarrow a_0 = x_0 \wedge y_n = f(x_n) = f(a_n) \rightarrow y_0$.

D. h. • Ç. v. d.: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$

Achtung: • **Attention:** $y_n = f(x_n) = f(a_n) \rightarrow f(x_0) = f(a_0)$ wird nicht vorausgesetzt!
 • $y_n = f(x_n) = f(a_n) \rightarrow f(x_0) = f(a_0)$ n'est pas postulé!

Bsp.: • **Exemple:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x^2 + 2 & x \geq 0 \end{cases}$$



Sei weiter: • *Soit en outre:*

$$\begin{aligned} x_n = \frac{1}{n}, \quad x > 0 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + 2 = 2 = f(0) = f(x_0) \\ x_n = \frac{1}{-n}, \quad x < 0 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(-n)^2} = \frac{1}{n^2} = 0 \end{aligned} \quad \begin{matrix} \searrow \\ \nearrow \end{matrix} \neq$$

Konsequenz: • **Conséquence:** $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ ist ein Spezialfall • *est un cas spécial!*

Aus $x_n \rightarrow x_0$ folgt nicht unbedingt auch $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

• *De $x_n \rightarrow x_0$ on ne peut pas toujours déduire $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.*

Daher definieren wir für den Spezialfall, in dem $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ unabhängig von der gewählten Folge x_n immer gleich ist: • *C'est pourquoi nous définissons pour le cas spécial, dans lequel $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ ne change pas et ne dépend pas de la suite x_n :*

Definition: • **Définition:** f hat für $x \rightarrow x_0$ einen **Grenzwert** • f possède une **valeur limite** pour $x \rightarrow x_0$:

$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ hängt nicht von der gewählten Folge ab

• *ne dépend pas de la suite choisie*

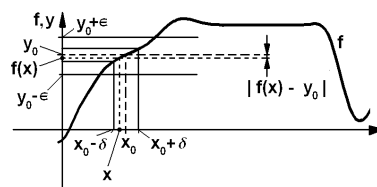
$\Leftrightarrow \exists y_0 \forall \langle x_n \rangle, \quad x_n \rightarrow x_0 : \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_0$

Abstrakter formuliert: • *Dit de façon plus abstraite:*

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in U_\delta(x_0) : f(x) \in U_\varepsilon(y_0)$

Oder: • *Ou bien:* $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, |x - x_0| < \delta : |f(x) - y_0| < \varepsilon$



Die Definition der Konvergenz für Funktionen ist somit ein Spezialfall von Konvergenzverhalten von Folgen. • *La définition de la convergence pour une fonction est donc un cas spécial de la définition de la convergence de suites.*

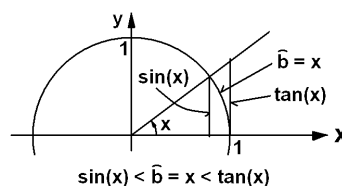
Konsequenz: • **Conséquence:** Speziell für die Konvergenz der Folgen $\langle y_n \rangle$ gelten die vorgängig erarbeiteten Konvergenzsätze für Folgen immer noch! • *Spécialement pour la convergence des suites $\langle y_n \rangle$ les théorèmes de convergence pour les suites, qu'on a élaboré avant, sont toujours valables!*

Bsp.: • **Exemple:**

Aus der geometrischen Erfahrung weiss man:

• *De l'expérience géométrique on sait:*

$$\begin{aligned} x > 0 &\Rightarrow \sin(x) < \widehat{b} = x < \tan(x) \\ \Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{\tan(x)}{\sin(x)} &= \frac{1}{\cos(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : 1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \cos(x) \Rightarrow 1 = \lim_{x \rightarrow 0} 1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} \leq \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$$

Ebenso zeigt man: • *Avec la même méthode on déduit:* $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

2.4.2 Einseitige Limites — Limites unilatérales

Betrachte: • *Etudie:* $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ mit • *avec* $f(x) = \sqrt{x}$

Man merkt sofort: • *On voit tout de suite:*

$\lim_{x_n \rightarrow 0} \sqrt{x}$ ist für $x_n = \frac{1}{-n}$, $n \in \mathbb{N}$ sinnlos

• $\lim_{x_n \rightarrow 0} \sqrt{x}$ n'a pas de sens pour $x_n = \frac{1}{-n}$, $n \in \mathbb{N}$.

$\leadsto \lim_{x_n \rightarrow 0} \sqrt{x}$ macht nur Sinn, wenn man den Definitionsbereich einschränkt auf $\mathbb{R}_0^+$

• $\lim_{x_n \rightarrow 0} \sqrt{x}$ a de sens seulement si l'on restreint le domaine de définition sur $\mathbb{R}_0^+$.

$\leadsto$ **Schreibweise:** • **Façon d'écrire:** $\lim_{x \downarrow 0} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$.

Problem: • **Problème:** Diese Idee wollen wir allgemein fassen. • *Nous voulons poursuivre cette idée de façon générale.*

Untersucht werden soll der Limes der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 .

• *Il faut examiner la fonction $f(x)$ à la place x_0 .*

Definition: • **Définition:** Sei • *Soit* $x < x_0$, $D_f = (-\infty, x_0)$.

$\leadsto \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)|_{x < x_0} := \lim_{x \uparrow x_0} f(x)$ heisst

Linksseitiger Limes • *s'appelle limite à gauche*

Definition: • **Définition:** Sei • *Soit* $x > x_0$, $D_f = (x_0, +\infty)$.

$\leadsto \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)|_{x > x_0} := \lim_{x \downarrow x_0} f(x)$ heisst

Rechtsseitiger Limes • *s'appelle limite à droite*

Konsequenz: • **Conséquence:**

$\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x)$ ist eine besondere Forderung. • *est une exigence spéciale.*

Aus der Logik wissen wir: Falls für $x < x_0$ und für $x > x_0$ eine bestimmte Beziehung gilt, so gilt sie auch für $(x < x_0) \vee (x > x_0)$. • *Selon la logique nous savons: Si pour $x < x_0$ et pour $x > x_0$ une certaine relation est vraie, elle est aussi vraie pour $(x < x_0) \vee (x > x_0)$.* $\leadsto$

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x)$$

Beh.: • **Thè.:**

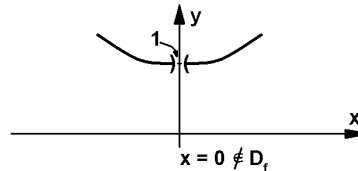
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert • *existe*

und • *et* $\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

Bsp.: • Exemple:

$$f(x) = \frac{x}{\sin(x)} \Rightarrow x = 0 \notin D_f, \quad \lim_{x \uparrow 0} f(x) = 1, \quad \lim_{x \downarrow 0} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

Das Beispiel zeigt, dass im Falle $x_0 \notin D_f$ (**Definitionslücke** in x_0) der Limes $\lim_{x \rightarrow x_0}$ trotzdem existieren kann. Durch die **Definition** $f(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ lässt sich dann die Definitionslücke auf **natürliche Weise** „stopfen“.



• *L'exemple nous montre que dans le cas $x_0 \notin D_f$ (lacune de définition à x_0) la limite $\lim_{x \rightarrow x_0}$ peut exister quand même. On peut supprimer cette lacune par la définition $f(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ de façon naturelle.*

Bsp.: • Exemple: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Für $x \neq 1$ kann man jedoch kürzen:

• *Pour $x \neq 1$ nous pouvons simplifier la fraction: $\leadsto$*

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \stackrel{|x \neq 1}{=} x + 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} x + 1 = 1$$

2.4.3 Stetigkeit — Continuité

Flugbahnkurven von Objekten der Makrophysik sind immer Kurven, die keine Lücken aufweisen. Das Objekt kann nicht augenblicklich seine Position wechseln, ohne dafür Zeit aufzuwenden: Es kann nicht „springen“, es muss sich stets bewegen. Bahnkurven nennt man daher **stetig**. Man kann sie mit einem Zeichenstift in einem Zuge skizzieren, ohne den Stift abheben zu müssen. Ist die Bahnkurve durch eine Funktionskurve dargestellt, so gilt in jedem Punkt $(x_0, y_0 = f(x_0))$ daher: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = y_0$.

Gleiches gilt für den Rand begrenzter Flächen. Das motiviert uns zu der folgenden Definition:

• *Les courbes de vol des objets de la macrophysique (physique phénoménologique) sont toujours des courbes qui n'ont pas de lacunes. Car l'objet ne peut pas changer de position en un clin d'oeil sans consommer de temps: Il ne peut pas "sauter", il doit toujours avancer continuellement. C'est pourquoi on appelle les courbes de vol **continues**. On peut les dessiner avec un crayon en un seul trait sans devoir lever le crayon. Si la courbe de vol est représentée par un graphe d'une fonction, il vaut $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = y_0$ pour chaque point $(x_0, y_0 = f(x_0))$. Une chose pareille vaut pour le bord de surfaces bornées. Cela nous donne la motivation pour la définition suivante:*

Definition: • Définition: $f(x)$ heißt **stetig** in x_0 • $f(x)$ s'appelle **continue** à x_0
 $:\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), f(x_0)$ existieren und • ... existent et
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

(Schreibweise: • **Façon d'écrire:** „stet'cont“ für stetig • *pour continue*)

Bemerkung: • Remarque: Eine in x_0 stetige Funktion hat dort somit keinen Sprung, keine Definitionslücke und keinen Pol. • *Donc, une fonction qui est continue à x_0 n'y saute pas, n'y a pas de lacune de définition et de place de pôle.*

Diese Definition lässt sich sofort auf ganze Urbildmengen ausdehnen. f nennen wir stetig auf M , wenn f in jedem x_0 aus M stetig ist: • *Nous pouvons tout de suite étendre cette définition pour des ensembles d'originaux complets. Nous appelons f continue sur M , si f est continue à toutes les places x_0 de M :*

Definition: • **Définition:** f stetig auf M • f continue sur M
 $: \Leftrightarrow \forall x_0 \in M \ f(x)$ stetig • continue.

Wir fassen es noch abstrakt, indem wir die schon erwähnten abstrakten Definitionen kombinieren:

• *Nous le répétons encore de façon abstraite en combinant les définitions abstraites que nous venons de discuter:*

Definition: • **Définition:** f stetig auf M • f continue sur M
 $:$
 $\Leftrightarrow \forall x_0 \in M \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
 $\Leftrightarrow \forall x_0 \in M \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(x_0, \varepsilon) > 0 : \forall x, |x - x_0| < \delta(x_0, \varepsilon) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
 $\Leftrightarrow \forall x_0 \in M \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(x_0, \varepsilon) > 0 : \forall x \in U_{\delta(x_0, \varepsilon)}(x_0) : f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$

Bemerkung: • **Remarque:** Nach dieser Definition wählt man sich zuerst ein $x_0 \in M$ aus ($\forall x_0 \in M$). Dann wählt man sich ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ aus ($\forall \varepsilon > 0$). Dann gilt es dazu ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ zu finden ($\exists \delta > 0$). Dieses δ muss demnach auf die vorher gewählten Parameter ε und x_0 abgestimmt sein. Man muss ja ein geeignetes δ finden, das bei den schon gewählten ε und x_0 die dann folgenden Bedingungen erfüllt. Das heisst: Ein geeignetes δ hängt demnach von ε und x_0 ab: $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$.

• *D'après cette définition il faut d'abord choisir un $x_0 \in M$ ($\forall x_0 \in M$). Puis on choisit un $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ($\forall \varepsilon > 0$). Puis pour ce choix il faut trouver un $\delta \in \mathbb{R}^+$ ($\exists \delta > 0$). Ce δ doit bien jouer avec les paramètres ε et x_0 qu'on a choisi avant. Il faut trouver un δ convenable, qui satisfait les conditions qui suivent pour le ε et le x_0 choisi. Ça veut dire: Un δ convenable dépend donc de ε et x_0 : $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$.*

Konsequenz: • **Conséquence:** Für die Stetigkeit auf einer Menge M gilt:
 • *Pour la continuité sur un ensemble M il vaut:* $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$.

Ist M speziell ein Intervall I , so bedeutet das, dass f in I keinen Sprung, keine Definitionslücke und keine Polstelle hat. Der Graph ist problemlos in einem Zug skizzierbar. • *Si M est spécialement un intervalle I , ça signifie que f ne saute pas, n'a pas de lacune ni de place de pôle. On peut dessiner le graphe sans problème en un seul trait.*

Am Ende eines abgeschlossenen Intervalls kann es jedoch Probleme geben, wenn die Funktion ausserhalb des Intervalls nicht mehr definiert ist. Daher benutzt man dort folgende Definitionen: • *A la fin d'un intervalle fermé on peut avoir des problèmes si la fonction n'est plus définie en dehors de l'intervalle. C'est pourquoi on utilise les définitions suivantes:*

Definition: • **Définition:** f heisst linksseitig stetig in x_0 • f s'appelle continue de gauche à x_0 : $\Leftrightarrow \lim_{x \uparrow x_0} f(x) = f(x_0)$

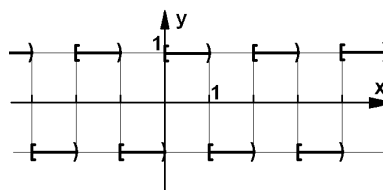
Definition: • **Définition:** f heisst rechtsseitig stetig in x_0 • f s'appelle continue de droite à x_0 : $\Leftrightarrow \lim_{x \downarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Bei Funktionen, die ab und zu einen Pol aufweisen, eignet sich die folgende Definition:

• *Pour les fonctions qui ont des fois un pôle, la définition suivante est utile:*

Definition: • **Définition:** f heisst **stückweise stetig** in I • f s'appelle **continue par morceaux** dans I
 $: \Leftrightarrow f$ stetig in I ausser an isolierten Ausnahmestellen
 • f continue dans I sauf à des places d'exception isolées.

Isolierte Ausnahmestellen kann u.a. heissen, dass die Funktion an endlich vielen Stellen nicht stetig ist — oder auch dass f auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ stetig ist. • *Des places d'exception isolées signifient entre autres que la fonction n'est pas continue à un nombre de places fini — ou aussi que f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.*



2.4.4 L -Stetigkeit — "Continuité L "

In den letzten Jahren hat man infolge Zeitknappheit begonnen, mit einem stärkeren, einschränkenderen Stetigkeits-Kriterium zu arbeiten. Die dabei verwendete Methode orientiert sich an der Lipschitzbedingung, welche im Zusammenhang mit der Eindeutigkeit von Lösungen von Differentialgleichungen eine Rolle spielt. Es ist üblich geworden, die dabei verwendete Konstante L auch bei der Stetigkeit „Lipschitz-Konstante L “ zu nennen. Daher werden wir hier kurz von „Lipschitz-Stetigkeit“ reden.

• *Dans les années dernières, par la suite de manque de temps, on a commencé à utiliser un critère plus fort et restrictif (ou limitatif) pour la continuité. La méthode qu'on y utilise est orientée à la méthode de la condition de Lipschitz qui joue un rôle dans le contexte de l'évidence de solutions d'équations différentielles. Il est devenu usuel d'appeler aussi cette constante, qu'on y applique maintenant pour la continuité, "constante de Lipschitz L ". Par conséquent nous parlerons ici brièvement de la "continuité de Lipschitz".*

Für die Lipschitz-Stetigkeit verwenden wir folgende Definition:

• *Pour le continuité de Lipschitz nous utilisons la définition suivante:*

Definition: • **Définition:** **Lokale L -Stetigkeit** • **Continuité L locale:**

Die Funktion f heisst **L -stetig** in x_0

• *La fonction f s'appelle **continue L** dans x_0*

$$\Leftrightarrow \exists_{L, \delta \in \mathbb{R}^+} \forall_{x \in U_\delta} : |f(x) - f(x_0)| \leq L |x - x_0|$$

Definition: • **Définition:** **Globale L -Stetigkeit** • **Continuité L globale:**

Die Funktion f heisst **L -stetig** in I

• *La fonction f s'appelle **continue L** dans I*

$$\Leftrightarrow \forall_{x \in I} : f \text{ ist } L\text{-stetig in } x_0 \quad \bullet \quad f \text{ est continue } L \text{ dans } x_0$$

Für abgeschlossene Intervalle folgt sofort: • *Pour des intervalles fermés on peut conclure immédiatement:*

Korollar: • **Corollaire:**

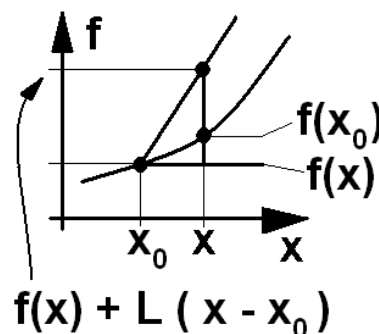
Die Funktion f ist **L -stetig** auf $I = [a, b]$

• *La fonction f est **continue L** sur $I = [a, b]$*

$$\Leftrightarrow \exists_{L \in \mathbb{R}^+} \forall_{x, x_0 \in I} : |f(x) - f(x_0)| \leq L |x - x_0|$$

Wählt man $\delta = L \cdot \varepsilon$, so sieht man sofort, dass aus L -stetig „gewöhnlich stetig“ folgt. Konsequenz:

- Si on choisit $\delta = L \cdot \varepsilon$, on voit tout de suite qu'on peut déduire de continuité L la "continuité pure". Conséquence:



Satz: • **Théorème:** f L -stetig • f continue L

f stetig • f continue

2.4.5 Eigenschaften stetiger Funktionen — Qualités de fonctions continues

Stetige Funktionen auf einem abgeschlossenen Intervall sind **beschränkt**. Sonst müsste eine solche Funktion ja irgendwo auf $I = [a, b]$ über alle Schranken wachsen, also einen Pol aufweisen. Das kann aber nicht sein, da für alle $x_0 \in I$ gilt: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}$, $\neq \pm\infty$.

- Les fonctions continues sur un intervalle fermé sont **bornées**. Si non une telle fonction devrait grandir à un certain point dans $I = [a, b]$ par dessus toutes les limites. Elle aurait donc un pôle. Mais ceci ne peut pas être, car pour tous les $x_0 \in I$ il vaut: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \in \mathbb{R}$, $\neq \pm\infty$.

Schreibweise: • **Façon d'écrire:**

f stet'cont(x_0) $\leadsto$ f stet'cont in x_0 • f stet'cont à x_0

f stet'cont(I) $\leadsto$ f stet'cont auf I • f stet'cont sur I

beschr'borné für beschränkt • beschr'borné pour borné

$\leadsto$ beschr'borné(I) für beschränkt auf I • beschr'borné(I) pour borné sur I

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

f stet'cont(I), $I = [a, b]$

Beh.: • **Thè.:**

f beschr'borné(I), $I = [a, b]$

Aus der Definition der Stetigkeit folgt direkt: • De la définition de la continuité on dérive directement:

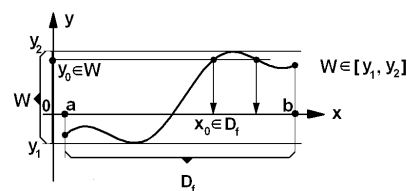
Satz: • **Théorème:** **Vertauschung des Limes** • **Echange de la limite**

f stet'cont(x_0) $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$

Stetige Funktionen zeigen die **Zwischenwerteigenschaft**:

Ist z.B. zu $a < b$, $f(a) \neq f(b)$, z.B. $f(a) < f(b)$ und $y_0 \in [f(a), f(b)]$ so gibt es mindestens ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = y_0$. $f(x)$ kann nicht an y_0 „vorbeispringen“.

(Sonst könnte man das Intervall $[a, b]$ in



zwei Teilmengen teilen, sodass auf der einen $f(x_0) < y_0$ und auf der anderen $f(x_0) > y_0$ wäre. Es gäbe einen Grenzpunkt x_0 zwischen diesen Teilmengen, bei dem man x von der einen in andere Teilmenge wandern lassen könnte. Z.B. wäre dann $\lim_{x \uparrow x_0} < y_0$ nach Konstruktion der Teilmengen — und $\lim_{x \downarrow x_0} > y_0$, also $\lim_{x \uparrow x_0} \neq \lim_{x \downarrow x_0}$. Man hätte hier Unstetigkeit.)

• *Les fonctions continues montrent la qualité de la valeur intermédiaire:*

S'il vaut p.ex. $f(a) \neq f(b)$ pour $a < b$, p.ex. $f(a) < f(b)$ et si l'on a $y_0 \in [f(a), f(b)]$, il existe au moins un $x_0 \in [a, b]$ avec $f(x_0) = y_0$. $f(x)$ ne peut pas "sauter à côté de" y_0 .

(Si non on pourrait partager l'intervalle $[a, b]$ en deux parties de façon que $f(x_0) < y_0$ soit sur un des deux ensembles et $f(x_0) > y_0$ sur l'autre. On aurait un point de limite x_0 entre ces deux ensembles ou l'on pourrait laisser passer x de l'un à l'autre des sous-ensembles. P.ex. on aurait donc $\lim_{x \uparrow x_0} < y_0$ d'après la construction des sous-ensembles — et $\lim_{x \downarrow x_0} > y_0$, donc par conséquent $\lim_{x \uparrow x_0} \neq \lim_{x \downarrow x_0}$. On n'aurait pas de continuité.) $\leadsto$

Satz: • **Théorème:**

Vor.: • **Hyp.:**

f stet'cont(I), $I = [a, b]$, $a \neq b$, $f(a) \neq f(b)$,
 $y_0 \in [f(a), f(b)]$ (oder • ou $y_0 \in [f(b), f(a)]$)

Beh.: • **Thè.:**

$\exists_{x_0 \in I} : f(x_0) = y_0$

Da die Stetigkeit mit Hilfe von Grenzwerten von Folgen definiert ist, kann man die Eigenschaften der Grenzwerte von Folgen auf die stetigen Funktionen übertragen. Dann folgt: • *Comme la continuité a été définie à l'aide des valeurs limites de suites, on peut adapter les qualités des valeurs limites de suites pour les fonctions continues. Alors il vaut:*

Satz: • **Théorème:**

Vor.: • **Hyp.:**

f, g stet'cont(x_0) resp. • resp. f, g stet'cont(x_0), $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Beh.: • **Thè.:**

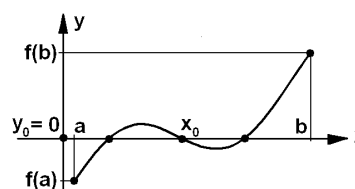
1. $\alpha f(x) \pm \beta g(x)$ stet'cont(x_0) resp. • resp. f, g stet'cont(I)

2. $f(x) \cdot g(x)$ stet'cont(x_0) resp. • resp. stet'cont(I)

3. $g(x) \neq 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$ stet'cont(I) resp. • resp. stet'cont(I)

Korollar: • **Corollaire:****Vor.:** • **Hyp.:** $p(x), q(x)$ Polynome • *polynômes***Beh.:** • **Thè.:** $p(x), q(x) \in \text{stet}'\text{cont}(\mathbb{R})$ $q(x_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{p(x)}{q(x)} \in \text{stet}'\text{cont}(x_0)$ **Bemerkung:** • **Remarque:** $f(x) = e^x, \ln(x), \sin(x), \cos(x), \dots \in \text{stet}'\text{cont}(D_f)$ $\leadsto$ Vgl. auch Theorie der Potenzreihen!• *Voir aussi théorie des séries de puissances!***Bsp.:** • **Exemple:** $f(x) = e^x \in \text{stet}'\text{cont}$? — **Zeigen:** • **Montrer:** $x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow e^{x_n} \rightarrow e^{x_0}$ $\leadsto e^{x_n} = e^{x_n - x_0 + x_0} = e^{(x_n - x_0) + x_0} = e^{x_n - x_0} \cdot e^{x_0} = e^{\varepsilon_n} \cdot e^{x_0}, \varepsilon_n = x_n - x_0 \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$ Wir betrachten den Fall $\varepsilon_n \geq 0$. Der Fall $\varepsilon_n \leq 0$ wird dann genauso behandelt.• *Nous considérons le cas $\varepsilon_n \geq 0$. Le cas $\varepsilon_n \leq 0$ est traité de la même manière.*Wir wissen, dass die Exponentialfunktionen monoton sind. • *Nous savons que les fonctions exponentielles sont monotones.* $\leadsto 1 \leq e^{\varepsilon_n} \leq 3^{\varepsilon_n} \leq 3^{\frac{1}{m}}, 0 \leq \varepsilon_n \leq \frac{1}{m}$ Wegen $\varepsilon_n \rightarrow 0$ können wir $\frac{1}{m} \rightarrow 0$ wählen. • *A cause de $\varepsilon_n \rightarrow 0$ nous pouvons choisir $\frac{1}{m} \rightarrow 0$.* $\leadsto 1 \leq e^{\varepsilon_n} \leq 3^{\frac{1}{m}} \rightarrow 3^0 = 1 \Rightarrow e^{\varepsilon_n} \rightarrow 1 \Rightarrow e^{x_n} \rightarrow e^0 \cdot e^{x_0} = e^{x_0}$ 

2.4.6 Anwendung auf Graphen — Applications à des graphes

Bei einer stetigen Funktion folgt unmittelbar aus Zwischenwertsatz, dass der Graph nicht über die x -Achse „hüpfen“ kann, ohne einen Schnittpunkt oder eine Nullstelle zu erzeugen:• *Quant aux fonctions continues, on voit tout de suite de la qualité de la valeur intermédiaire (propriété de Darboux) que le graphe ne peut pas dépasser l'axe x sans point de section ou zéro:***Satz:** • **Théorème:****Vor.:** • **Hyp.:** $f(x)$ stetig auf $I = [a, b], f(a) \cdot f(b) < 0$ **Beh.:** • **Thè.:** $\exists x_0 \in I = (y, b) : f(x_0) = 0$

2.4.7 Schranken, Grenzen, Extrema — Bornes, limites, extréma

Definitionen — **Définitions**Im Folgenden sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes, halboffenes oder offenes Intervall.• *Dans ce qui suit $I \subseteq \mathbb{R}$ soit un intervalle fermé, semi-ouvert ou ouvert.*

(Z.B. • *P.ex.* $I = [\alpha, \beta], (\alpha, \beta], [\alpha, \beta), (\alpha, \beta)$.)

Wir sagen: • *Nous appelons:*

Definition: • **Définition:** $\{a, b\} := \partial I$ heisst **Rand** von I • *s'appelle* **bord** de I .

Für Intervalle hat man in der Mathematik verschiedene wichtige Begrenzungsarten besonders bezeichnet:
• *Dans les mathématiques, on a dû trouver des noms spéciaux pour les différentes façons de borner les intervalles:*

Definition: • **Définition:** a heisst **untere Schranke** von I • *a s'appelle* **borne inférieure** de $I \Leftrightarrow \forall x \in I : a \leq x$
Entsprechend für eine **obere Schranke** • *Correspondant pour une* **borne supérieure**.

Definition: • **Définition:** Die grösst mögliche untere Schranke von I heisst **Infimum** oder **untere Grenze**. • *La plus grande borne possible de I s'appelle* **infimum** ou **limite inférieure**.
Entsprechend **Supremum** oder **obere Grenze** • *Correspondant* **suprémum** ou **limite supérieure**.

Bsp.: • **Exemple:** $x \in (0, \pi] \Rightarrow 0 < f(x) = \frac{\sin x}{x} < 1, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = \text{Sup}_{x \rightarrow 0} f(x)$

Man sieht sofort: • *On constate:*

Lemma: • **Lemme:** **Vor.:** • **Hyp.:** $\forall x \in D_f \quad M_1 < f(x) < M_2$

Beh.: • **Thè.:** $|f(x)| \leq \text{Max}(|M_1|, |M_2|)$

Bei abgeschlossenen Intervallen hat man besondere Verhältnisse: • *Pour les intervalles fermés on a une situation spéciale:*

Definition: • **Définition:** Gehört ein Infimum a zu I ($a \in I$), so heisst a **Minimum** von I
• *Si un infimum a appartient à I ($a \in I$), a s'appelle* **minimum** de I .
Entsprechend für **Maximum** • *Correspondant pour* **maximum**.

Anwendung bei Wertebereichen — Application pour des domaines de valeurs

Falls $f(x_0)$ das Minimum des Wertebereichs von f ist, so sagen wir: • *Si $f(x_0)$ est le minimum du domaine des valeurs de f , nous disons:*

Definition: • **Définition:** f hat in x_0 ein **absolute Minimum** • *f possède à x_0 un* **minimum absolu** $\Leftrightarrow \forall x \in I : f(x_0) \leq f(x)$
Entsprechend für **absolute Maximum** • *Correspondant pour* **maximum absolu**.

Definition: • **Définition:** f hat in x_0 ein **relatives** oder **lokales Minimum**
 • f possède à x_0 un **minimum relatif** ou **local**
 $\Leftrightarrow \exists U_\delta(x_0) : f(x_0) = \text{absolutes Minimum in } U_\delta(x_0)$ • *minimum absolu dans $U_\delta(x_0)$*
 Entsprechend **relatives** oder **lokales Maximum** • *Correspondant pour maximum relatif ou local.*

Sei • Soit $x_0 \in \partial I$:

Definition: • **Définition:** f hat in x_0 ein **Randminimum** (lokal oder absolut)
 • f a à x_0 un **minimum de bord** (local ou absolu)
 $\Leftrightarrow \exists \delta \in \mathbb{R} : f$ hat in x_0 ein absolutes Minimum bezüglich
 • f a un minimum absolu dans x_0 par rapport à $I \cap U_\delta(x_0)$
 Entsprechend **Randmaximum** • *Correspondant pour maximum au bord.*

Da jede stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall beschränkt ist, lässt sich durch Betrachtung von Grenzwerten von Folgen $\langle x_n \rangle$, deren Bilder y_n z.B. gegen ein Supremum der Wertemenge konvergieren, zeigen, dass auch das Supremum als Grenzwert ein Urbild x_0 haben muss. Somit muss der folgende Satz richtig sein: • *Comme chaque fonction continue est bornée sur un intervalle fermé, on peut démontrer la chose suivante en étudiant les valeurs limites de suites $\langle x_n \rangle$ dont les images y_n convergent p.ex. vers un suprémum de l'ensemble de valeurs: Le suprémum comme valeur limite doit avoir un original x_0 . Le théorème suivant doit donc être valable:*

Satz: • **Théorème:** Jede auf einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion nimmt dort mindestens ein absolutes Maximum oder Minimum an. • *Chaque fonction qui est continue sur un intervalle fermé y a au moins un maximum ou minimum absolu.*

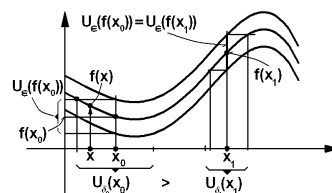
Wichtig: • **Important:** Jede auf einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion ist dort beschränkt, hat dort ein absolutes Maximum und Minimum und erfüllt den Zwischenwertsatz.
 • *Chaque fonction qui est continue sur un intervalle fermé y est bornée, a un maximum et minimum absolu et satisfait le théorème de la valeur intermédiaire (propriété de Darboux).*

2.4.8 Gleichmäßige Stetigkeit — Continuité uniforme

Wir erinnern uns an die Stetigkeitsdefinition für Funktionen auf einem Intervall: • *Nous nous rappelons la définition de la continuité de fonctions sur un intervalle:*

f **stetig** auf • **continue** sur $M : \Leftrightarrow \forall x_0 \in M \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(x_0, \varepsilon) > 0 : \forall x \in U_{\delta(x_0, \varepsilon)}(x_0) : f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$

Bei einem gegebenen $\varepsilon > 0$ und x_0 hängt demnach das mögliche δ von $\varepsilon > 0$ und x_0 ab. $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$. Skizziert man bei gegebenem ε zu jedem $f(x_0)$ auch $f(x_0) - \varepsilon$ und $f(x_0) + \varepsilon$, so erhält man den **fixen ε -Schlauch**.



• *Pour un $\varepsilon > 0$ et un x_0 donné le x_0 possible dépend par conséquent de $\varepsilon > 0$ et de x_0 . $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$. Si l'on dessine, pour un ε donné, pour chaque $f(x_0)$ aussi $f(x_0) - \varepsilon$ et $f(x_0) + \varepsilon$ on obtient le **tube ε fixe**.*

Bsp. • Exemple: Sei • Soit $f(x) = \frac{1}{x}$. Löse: • Résoudre: $f(x \pm \delta) = x \mp \varepsilon \Rightarrow \delta$

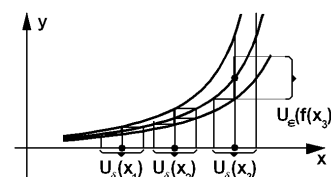
x	$f(x)$	$\varepsilon_{1,2}$	$\delta_{1,2}$	Bem. • Rem.
0.1	10	+0.05	3.3333...	δ gross
0.1	10	-0.05	10	• δ grand
10	0.1	+0.05	0.000497512...	δ klein
10	0.1	-0.05	0.000502513...	• δ petit

$\leadsto \delta$ hängt also von x ab. • δ dépend donc de x ab.

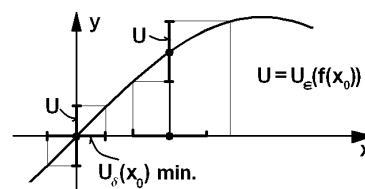
Man kann die Sache aber auch umkehren: • Mais on peut aussi retourner la chose:

Interessiert man sich in jedem Punkte x_0 bei vorgegebenem δ für das dazu mögliche ε , so erhält man den variablen $\varepsilon(x_0, \delta)$ —**Schlauch**.

• Si l'on s'intéresse à chaque point x_0 , soit δ donné, pour le ε correspondant possible, on obtient le **tube** $\varepsilon(x_0, \delta)$ variable.



In Fällen wie $f(x) = \sin(x)$, $x \in [0, \pi]$ ergeben sich keine Probleme. Man findet bequeme Verhältnisse. Aus einer Graphik kann man ablesen, dass offensichtlich folgendes vermutet werden darf: Bei fix vorgegebenem ε gibt es irgendwo bei einem bestimmten x_0 ein minimales $\delta(x_0, \varepsilon)$, das wegen der Minimalität für andere x_0 auch verwendet werden kann.



• Dans les cas comme $f(x) = \sin(x)$, $x \in [0, \pi]$ on n'a pas de problèmes. On trouve une situation convenable. Le graphe nous fait supposer la chose suivante: Si ε est donné de façon fixe, il existe quelque part pour un x_0 déterminé un $\delta(x_0, \varepsilon)$ minimal qu'on peut utiliser aussi ailleurs (pour d'autres x_0) à cause de la minimalité.

Gegeben sei: • Soit donné: $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $x_0 \in I = \{x_0\}$ (Intervall • intervalle), $\delta < c = \text{const.}$

Allgemein kann man vermuten, dass hier das $\delta(x_0, \varepsilon)$ wahrscheinlich eine stetige Funktion von x_0 sein muss, denn es ist in I definiert, hat keinen Pol und kann nicht springen. (Sonst müsste $f(x_0)$ springen, ε ist fix.)

• Généralement on suppose qu'ici le $\delta(x_0, \varepsilon)$ doit être probablement une fonction continue de x_0 , car il est défini dans I , n'a pas de pôle et ne peut pas sauter. (Si non $f(x_0)$ devrait sauter, ε est fixe.)

Auf einem abgeschlossenen Intervall $I = [a, b]$ hat eine stetige Funktion ein Maximum und Minimum. $\delta(x_0, \varepsilon) > 0$ ist wegen der Stetigkeit von f überall auf I definiert, hat also z.B. in $x_0 = c_0$ ein Minimum $c_1 = \delta(c_0, \varepsilon) > 0$.

(Falls trotzdem Zweifel an der Stetigkeit von $\delta(x_0, \varepsilon)$ bei fixem ε bestehen, so bedenke man, dass $\{\delta(x_0, \varepsilon) \mid x_0 \in I\}$ ein Infimum besitzen muss, gegen das eine Folge $\langle \delta(x_{0,n}, \varepsilon) \rangle$ konvergieren muss. Da $x_{0,n} \in I$ gilt, muss die Urbildfolge einen Häufungspunkt c_0 haben, der aber in I liegen muss, da I abgeschlossen ist. Falls nun $\delta(c_0, \varepsilon) = 0$ gelten würde, hätte man in c_0 keine Stetigkeit, was nicht sein kann. Damit ist $c_0 > 0$.)

• Sur un intervalle $I = [a, b]$ fermé une fonction continue possède un maximum et un minimum. $\delta(x_0, \varepsilon) > 0$ est défini partout sur I à cause de la continuité de f . $\delta(x_0, \varepsilon) > 0$ a donc un minimum $c_1 = \delta(c_0, \varepsilon) > 0$ p.ex à $x_0 = c_0$.

(Si l'on doute quand même que $\delta(x_0, \varepsilon)$ soit continue pour un ε fixe, il faut penser que $\{\delta(x_0, \varepsilon) \mid x_0 \in I\}$ doit posséder un infimum vers lequel la suite $\langle \delta(x_{0,n}, \varepsilon) \rangle$ doit converger. Comme il est $x_{0,n} \in I$, la suite originale possède un point d'accumulation c_0 , qui doit être situé dans I , parce que I est fermé.

S'il valait $\delta(c_0, \varepsilon) = 0$, on n'aurait pas de continuité à c_0 , ce qui ne peut pas être. Il vaut donc $c_0 > 0$.) $\leadsto$

Lemma: • **Lemme:** **Vor.:** • **Hyp.:**

f stet'cont(I), I abgeschlossen • fermé

Beh.: • **Thè.:**

$\exists_{x_0=c_0 \in I} : \delta(c_0, \varepsilon) = c_1 \in \mathbb{R}^+$ minimal • minimal

Problem: • **Problème:** Nun gibt es ersichtlicherweise äusserst ungünstige Fälle, bei denen bei gegebenem ε das zugehörige δ bei bestimmten x_0 sogar 0 werden kann, die Stetigkeitsdefinition ($\delta > 0$) somit verletzt ist. (Umgekehrt kann bei fixem δ dort $\varepsilon = \infty$ werden.) • *Comme on apprend des exemples il existe des cas très défavorables où pour un ε donné le δ qui appartient à cet ε devient même 0 pour certains x_0 . La définition de continuité ($\delta > 0$) est donc bléssée (Au contraire pour un δ fixe $\varepsilon = \infty$.)*

Bsp.: • **Exemple:**

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 \in U(0) \cap \mathbb{R}^+.$$

Seien • Soient :

$$f_1(x) = \frac{1}{x} + \varepsilon = \frac{1 + \varepsilon x}{x} := \frac{1}{x_1} = f(x_1)$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{x}{1 + \varepsilon x}$$

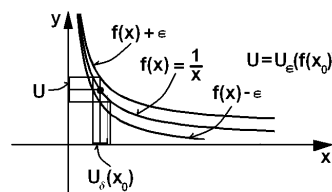
$$f_2(x) = \frac{1}{x} - \varepsilon = \frac{1 - \varepsilon x}{x} := \frac{1}{x_2} = f(x_2)$$

Betrachte z.B. • Etudie p.ex.

$$\varepsilon = \frac{1}{2}, \quad 0 < x_0 < 1, \quad \delta = x_0 - x_1 = x_0 - \frac{x_0}{1 + \varepsilon x_0} = x_0 \left(1 - \frac{1}{1 + \varepsilon x_0}\right), \quad 0 < \varepsilon x_0 < 1$$

Für • Pour $x_0 \rightarrow 0$

$$\text{erhält man: } \bullet \text{ on obtient: } \delta = x_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + \varepsilon x_0}\right) \rightarrow 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{1 + 0}\right) = 0$$



In der Mathematik zieht man sich in solchen Situationen immer durch einen besonderen Trick aus dem Sumpf: Man schränkt die Menge der Funktionen oder der Definitionsmengen so ein, dass dort das störende Problem nicht mehr auftritt. Man definiert eine ausgezeichnete Menge, in der alles rund läuft und untersucht dann, was diese Menge für Elemente hat. • *Dans les mathématiques, dans de telles situations, on s'en tire toujours par le même truc: On borne l'ensemble de fonctions ou bien les domaines de définition de façon que le problème qui dérange n'y existe plus. On définit un ensemble spécial dans lequel tout va bien et puis on examine quels sont les éléments de cet ensemble.* $\leadsto$

In unserem Fall nennen wir eine Funktion **gleichmässig stetig**, wenn δ unabhängig von x_0 gewählt werden kann: $\delta(x_0, \varepsilon) = \delta(\varepsilon)$. • *Dans notre cas nous appelons une fonction **uniformément continue**, si δ peut être choisi indépendamment de x_0 : $\delta(x_0, \varepsilon) = \delta(\varepsilon)$.*

Definition: • **Définition:**

f gleichmässig stetig auf M

• f uniformément continue sur M

$$: \Leftrightarrow \forall_{x_0 \in M} \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta(\varepsilon) > 0} : \forall_{x \in U_{\delta(\varepsilon)}(x_0)} : f(x) \in U_{\varepsilon}(f(x_0))$$

Obiges Lemma können wir jetzt wie folgt als Satz formulieren: • *Nous pouvons maintenant formuler le lemme d'en haut comme théorème comme il suit:*

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

f stet'cont(I), I abgeschlossen • fermé

Beh.: • **Thè.:**

f gleichmässig stetig auf I • f uniformément continue sur I

Andererseits wissen wir jetzt, dass bei Funktionen auf offenen Intervallen, die am Intervallende einen Pol besitzen, Probleme zu erwarten sind. • *D'autre part nous savons maintenant qu'il faut s'attendre à des problèmes avec les fonctions qui possèdent un pôle à une fin d'intervalle.*

2.5 Eine Simulation mit rekursiven Folgen — Une simulation avec des suites récurrentes

2.5.1 Ein Beispiel von linearem Naturschutzes — Un exemple de protection de la nature linéaire

Das folgende Beispiel hat sich angeblich um 1970 in einem abgegrenzten amerikanischen Nationalpark zugetragen: Alljährlich haben Jäger aus der Umgebung im Park eine Hirschjagd veranstaltet. Trotz der Jagd war die Population der Hirsche immer etwa konstant. Eines Tages haben Naturschützer von der Sache erfahren. Nach ihrer Meinung war das Treiben der Jäger nicht im Sinne des Naturschutzes. Schliesslich haben sie vor Gericht ein Jagdverbot erreicht. Danach ist es passiert.

Im Winter liegt bedeckt in dieser Gegend eine dicke Schneedecke längere Zeit den Boden. Die Hirsche überleben nur, da sie dann die Rinde von den Bäumen fressen. Diese sterben danach ab. Ohne Dezimierung durch die Jäger ist danach die Hirschpopulation rasch angestiegen. Die Menge der angefressenen Bäume hat schnell ein Ausmass erreicht, dass niemand erwartet hat: Nach wenigen Jahren waren alle Bäume des Waldes leergefressen und danach abgestorben. Im folgenden Winter sind alle Hirsche dann verhungert...

• *L'exemple suivant s'est passé censément en 1970 dans un parc national délimité américain: Annuellement des chasseurs voisins ont organisé une chasse de cerfs dans le parc. Malgré la chasse, la population des cerfs était toujours environ constante. Soudain des écologistes ont appris la chose. Selon leur opinion, l'activité des chasseurs n'était pas en accord avec la protection de la nature. Finalement, devant le tribunal, ils ont atteint une interdiction de la chasse. Après il s'est passé la chose suivante. En hiver, une grosse couverture de neige couvre le sol dans cette région pendant un temps très long. Les cerfs survivent seulement parce qu'ils bouffent l'écorce des arbres. Après ceux-ci dépérissent. Après, sans la décimation par les chasseurs, la population de cerfs est montée très vite. La quantité des arbres corrodés a atteint aussi vite une mesure que personne n'a attendu: Après peu d'ans, tous les arbres de la forêt étaient complètement bouffés et dépéris. Par conséquent tous les cerfs sont morts de faim pendant l'hiver suivant...*

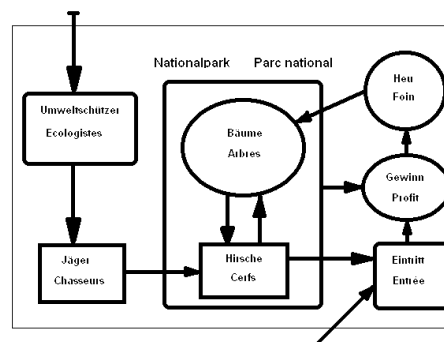
Dieses Geschehen wollen wir nun simulieren! Da es sich hier um ein vernetztes, rückgekoppeltes System von Zusammenhängen zwischen den einzelnen Variablen handelt, haben die nur linear denkenden Naturschützer die Hirschpopulation ausgerottet statt ihr Dasein zu verbessern. Ebenso für den Wald. Die gute, mit Unverstand realisierte Absicht hat zur maximal möglichen Katastrophe geführt. Das lehrt uns, dass man mit komplexen rückgekoppelten Systemen nicht naif verbesserisch umgehen darf. Die Katastrophe verhindern kann man durch Simulationen, jedoch nicht durch besserwisserische Hitzköpfigkeit.

• *Maintenant, nous voulons simuler cet événement! Comme il s'agit ici d'un système interconnecté et*

lié à des contextes entre différentes variables, les écologistes qui savaient penser seulement de façon linéaire, ont exterminé la population de cerfs au lieu d'améliorer leur existence. La même chose est arrivée pour la forêt. La bonne intention, réalisée avec déraison immense, a mené à la catastrophe maximale possible. Ça nous enseigne qu'on ne peut pas manier des systèmes couplés et complexes de façon naïve et incompétente. La catastrophe peut être prévue et empêchée par une simulation, mais non par un "fanatisme" ingénu (par "je-sait-tout" et de manière de "tête brûlée").

Das nebenstehende Schema zeigt ein erstes einfaches Modell des Systems. Nun müssen wir die Wirkungszusammenhänge mit Hilfe von Funktionen modellieren. Wir untersuchen dann das System an diskreten Zeitpunkten, z.B. immer im Frühjahr. Das führt zu einem rückgekoppelten System von rekursiven Folgen.

• *Le schématisation ci-contre montre un premier modèle simple du système. Maintenant nous devons modéliser les contextes d'effet à l'aide de fonctions. Nous examinons alors le système à moments discrets, par exemple toujours au printemps. Ça mène à un système couplé de conséquences récursives.*



Sei n die Variable für das Jahr. Wir führen folgende Funktionen von n ein, die bei diskreten Werten für n je eine Folge bilden:

• *Sois n la variable pour l'an. Nous introduisons les fonctions suivantes de la variable n qui forment des suites de valeurs discrètes.*

$vE[n]$	=	Anzahl Eintritte • Nombre d'entrées
$vG[n]$	=	Gewinn • Profit
$vF[n]$	=	Fressen (Heu) • Manger (foin)
$vU[n]$	=	Anzahl Umweltschützer im Einsatz • Nombre d'activistes (écologistes actifs)
$vJ[n]$	=	Anzahl Jäger • Nombre de chasseurs
$vB[n]$	=	Anzahl Bäume • Le nombre d'arbres dans le parc
$vH[n]$	=	Anzahl Hirsche • Nombre de cerfs

Dazu kommen die folgenden Parameter. Die einen sind naturgegeben, die ändern kann der Mensch wählen.

• *En plus nous utilisons les paramètres suivants. L'un est observé dans la nature et donc inéluctable, l'autre est choisi par l'homme.*

<i>eintrittPreis</i>	=	Preis für einen Eintritt • <i>Prix d'entrée</i>
<i>fixKosten</i>	=	Fixkosten Verwaltung • <i>Frais fixes pour l'administration</i>
<i>factHeu</i>	=	Faktor für Äquivalent Gewinn — Heu statt Baum • <i>Facteur pour l'équivalent profit — foin (au lieu d'arbres)</i>
<i>umweltjahr</i>	=	Jahr mit Beginn Umweltschutz • <i>Année du commencement de la protection des cerfs</i>
<i>pU</i>	=	Anzahl Umweltschützer • <i>Nombre d'activistes (écologistes actifs)</i>
<i>vJTot</i>	=	Anzahl Jäger • <i>Nombre de chasseurs</i>
<i>fressen</i>	=	Faktor für gefressene Bäume pro Hirsch • <i>Facteur pour les arbres mangés par un cerf</i>
<i>faktorB</i>	=	Faktor für Vermehrung der Bäume • <i>Facteur pour l'accroissement du nombre d'arbres</i>
<i>faktorH</i>	=	Faktor für Vermehrung der Hirsche • <i>Facteur pour l'augmentation du nombre de cerfs</i>
<i>factorJschieszen</i>	=	Anzahl abgeschossene Hirsche pro Jäger • <i>Nombre de cerfs tirés (tués) par un chasseur</i>
<i>umweltjahr</i>	=	Jahr mit Beginn Umweltschutz • <i>Année du commencement de la protection de l'environnement</i>

Zur Zeit $n = 0$ initialisieren wir alle Variablen mit 1, also z.B. $vE[0] = 1$. Damit verhindern wir später unbelegte Variablen.

• *Nous initialisons toutes les variables au temps $n = 0$ avec 1, ainsi p.ex. $vE[0] = 1$. Avec cela nous empêchons plus tard des variables non initialisées.*

Eigentlich müsste man die naturgegebenen Gesetze aus auf Beobachtungen basierende Statistiken gewinnen. Da uns das hier nicht möglich ist, schätzen wir sie fürs erste sehr grob wie folgt (*Mathematica*-Code):

• *Proprement on aurait dû gagner les lois inéluctables par des statistiques ou bien se baser sur les observations. Comme ici ceci ne nous est pas possible, nous l'estimons très grossièrement pour une première approximation comme il suit (voir Mathematica-code):*

Mathematica-Programm: • Programme en Mathematica:

```
fPos[x_ /; x >= 0] := x;
fPos[x_ /; x < 0] := 0;
vE[n_] := Floor[vH[n - 1]/vH[1] * vE[n - 1] + vE[n - 1] * Random[]];
vG[n_] := fPos[eintrittPreis * vE[n] - fixKosten];
vF[n_] := vG[n]/factHeu;
vU[n_ /; n >= umweltjahr] = pU;
vU[n_ /; n < umweltjahr] = 0;
vJ[n_] := Ceiling[vJTot * E^(-vU[n])];
vB[n_] := fPos[Floor[vB[n - 1] * faktorB - vH[n - 1] * fressen]];
vH[n_] :=
  fPos[Floor[
    vH[n - 1] * faktorH * (vB[n] + vF[n]) / (vB[n - 1] + 1) -
    factorJschieszen * vJ[n - 1]]];
```

fPos macht negative Werte zu 0. Damit werden negative Anzahlen unterdrückt. *Floor* wählt die nächstkleinere ganze Zahl. *Random* gibt eine Pseudozufallszahl zwischen 0 und 1. *vU* gibt für $n \geq \text{umweltjahr}$ den Wert pU und sonst den Wert 0. *Ceiling* gibt die nächstgrössere ganze Zahl. *E* ist die eulersche Zahl. Es sei dem Leser überlassen, diese Formeln in üblicher mathematischer Schreibweise zu schreiben und die gewählten Zusammenhänge zu erklären.

• *fPos remplace des valeurs négatives avec 0. Comme ça nous réprimons des nombres négatifs. Floor*

choisit le prochain nombre entier plus petit. *Random* donne un nombre pseudo hasard entre 0 et 1. *vU* donne la valeur *pU* pour $n \geq \text{umweltjahr}$ et 0 dans les autres cas. *Ceiling* donne le nombre entier prochain et plus grand. *E* est le nombre de Euler. Le lecteur écrira ces formules dans l'orthographe mathématique et usuelle et expliquea les contextes choisis.

Mit dem folgenden Programm erzeugen wir eine Liste der Werte sowie zugehörige Diagramme für $vH[n]$

- Avec le programme suivant, nous produisons une liste des valeurs ainsi que des diagrammes affilié à $vH[n]$

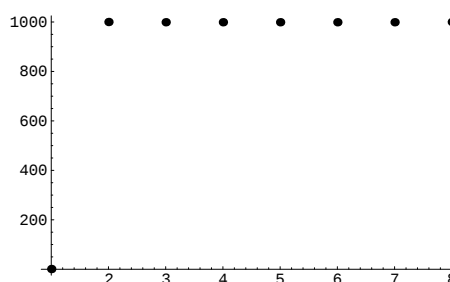
Mathematica-Programm: • Programme en Mathematica:

```
Print[MatrixForm
[N[Prepend[Table[{vE[n], vG[n], vF[n], vU[n], vJ[n], vB[n], vH[n]}, {n, 0,
7}], {"vE[n]", "vG[n]", "vF[n]", "vU[n]", "vJ[n]", "vB[n]",
"vH[n]"}]]]];
tabH = Flatten[Table[{vH[n]}, {n, 0, 7}]];
lP1 = ListPlot[tabH, PlotStyle -> PointSize[0.02]];
tabH = Flatten[Table[{vH[n]}, {n, 0, 7}]];
lP2 = ListPlot[tabH, PlotJoined -> True];
Show[lP1, lP2];
```

Die folgenden Startwerte und Parameterwerte (1'000 Hirsche, 10'000 Bäume) führen zum nebenstehenden Diagramm für die Hirschpopulation. Hier schießen die Jäger jährlich einige Hirsche ab. (10 Jäger je 20 Hirsche.)

- Les valeurs de départ suivantes et les valeurs de paramètre (1'000 cerfs, 10'000 arbres) mènent au diagramme pour la population de cerfs ci-contre. Ici, les chasseurs abattent annuellement quelques cerfs. (10 chasseurs, 20 cerfs par chasseur).

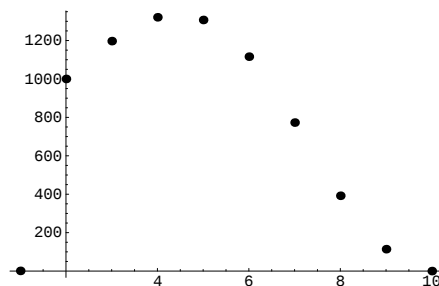
$vE[1]$	=	10
eintrittPreis	=	5
fixKosten	=	500
factHeu	=	10
pU	=	5
$vJ\text{Tot}$	=	10
$vB[1]$	=	10000
fressen	=	4
faktorB	=	1.4
$vH[1]$	=	1000
faktorH	=	1.2
$\text{factorJ}\text{schiesse}$	=	20
umweltjahr	=	100



Nun ändern wir die Situation: Ab Jahr 1 ist Jagdverbot. Es wird noch etwas gewildert. Wie man sieht, bricht die Hirschpopulation rasch auf 0 zusammen.

- Maintenant nous changeons la situation: Défense de chasse à partir de l'an 1. On a encore quelque braconnage. Comme on voit, la population de cerfs s'effondre vite à 0.

$vE[1]$	=	10
$eintrittPreis$	=	5
$fixKosten$	=	500
$factHeu$	=	10
pU	=	5
$vJTot$	=	10
$vB[1]$	=	10000
$fressen$	=	4
$faktorB$	=	1.4
$vH[1]$	=	1000
$faktorH$	=	1.2
$factorJschuessen$	=	2 !!!
$umweltjahr$	=	1 !!!



Die nachfolgende Tabelle zeigt den genauen Simulationsverlauf.

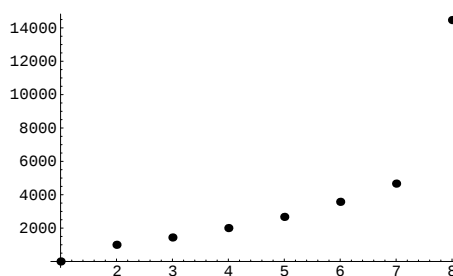
- *Le tableau consécutif montre le cours précis d'une simulation.*

n	$vE[n]$	$vG[n]$	$vF[n]$	$vU[n]$	$vJ[n]$	$vB[n]$	$vH[n]$
1.	10.	0.	0.	5.	1.	10000.	1000.
2.	14.	0.	0.	5.	1.	10000.	1197.
3.	28.	0.	0.	5.	1.	9212.	1321.
4.	34.	0.	0.	5.	1.	7612.	1307.
5.	77.	0.	0.	5.	1.	5428.	1116.
6.	114.	0.	0.	5.	1.	3135.	773.
7.	249.	485.	75.	5.	1.	1305.	401.
8.	112.	180.	62	5.	1.	214.	83.
9.	164.	420.	0.	5.	1.	0.	22.
10.	106.	0.	20	5.	1.	56.	0.

Nun ändern wir die Situation nochmals: Es wird nicht mehr geschossen (Faktor 0). Die Hirsche benötigen weniger Rinde. Dazu bekommen sie mehr Heu. Wie man sieht, steigt die Hirschpopulation rasch an...

- *Maintenant nous changeons encore une fois la situation: On ne tire plus (facteur 0). Les cerfs mangent moins d'écorce. Aussi ils reçoivent plus de foin. Comme on voit, la population de cerfs monte vite...*

$vE[1]$	=	10
$eintrittPreis$	=	5
$fixKosten$	=	500
$factHeu$	=	1 !!!
pU	=	5
$vJTot$	=	10
$vB[1]$	=	10000
$fressen$	=	2 !!!
$faktorB$	=	1.4
$vH[1]$	=	1000
$faktorH$	=	1.2
$factorJschuessen$	=	0 !!!
$umweltjahr$	=	100 !!!



Das Mathematica-Programm ist zu finden unter:

- *On trouve le programme de Mathematica sous:*

<http://www.hta-bi.bfh.ch/~wir/MathemDF/Mathem.html>
 === > File CM10.nb

2.6 Landau-Symbole und Fibonacci — Le symboles de Landau et Fibonacci

2.6.1 Landaus 'O'-Symbol — Le symbole 'O' de Landau

Definition — Définition

Symbole 'O' und 'o' von Landau: • **symbole 'O' et 'o' de Landau:**

Symbol: • **Symbole:** $3n^3 - 2n^2 + 4n - 5 = O[n^3], o[n^4]$

'O' steht dabei für „Ordnung“ ($O[n^3]$) $\rightsquigarrow$ Potenzen der Ordnung (Polynomgrad) mindestens n .

• 'O' signifie "Ordre" ($O[n^3]$) $\rightsquigarrow$ puissances de l'ordre (polynome de degré!) au moins n .

Gegeben seien zwei Folgen $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$. Wir definieren ($O[b_n]$, $O(b_n)$, $o[b_n]$, $o(b_n)$):

• Soient données deux suites $\langle a_n \rangle$ et $\langle b_n \rangle$. Nous définissons ($O[b_n]$, $O(b_n)$, $o[b_n]$, $o(b_n)$):

Definition: • **Définition:** $\langle a_n \rangle = O(b_n) \Leftrightarrow (\exists_{M \in \mathbb{R}^+} : |\frac{a_n}{b_n}| \leq M)$

$\langle a_n \rangle = o(b_n) \Leftrightarrow (\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0)$

Bsp.: • **Exemple:**

1. $\langle n^3 - 4n^2 + 5n + 9 \rangle = O(n^3)$
2. $\langle n^3 - 4n^2 + 5n + 9 \rangle = O(n^k)$, $k \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$
3. $\langle n^3 - 4n^2 + 5n + 9 \rangle = o(n^4)$
4. $\langle n^3 - 4n^2 + 5n + 9 \rangle = o(e^n)$

Bemerkung: • **Remarque:**

Statt $a_n = O(b_n)$ schreiben wir kurz $O(b_n) \rightsquigarrow$ z.B. $c \cdot a_n = c \cdot O(b_n)$ u.s.w..

• Au lieu d'écrire $a_n = O(b_n)$, nous écrivons brièvement $O(b_n) \rightsquigarrow$ p.ex. $c \cdot a_n = c \cdot O(b_n)$ etc..

Wichtig: • **Important:**

Z.B. *Mathematica* verwendet auch dieses Symbol! Für die Rechnung mit Reihen muss es unterdrückt werden. Dafür existiert der Befehl „Normal“.

• p.ex. *Mathematica* utilise aussi ce symbole! Pour le calcul il faut supprimer cet ordre. Pour ça il existe l'ordre "Normal".

Regeln — Règles

Aus der Definition ist unmittelbar ersichtlich: • *On saisit aussitôt à l'aide de la définition:*

Konsequenz: • **Conséquence:**

$$\circledast a_n = O(a_n)$$

$$\circledast c = \text{const.} \in \mathbb{R} \Rightarrow c \cdot a_n = O(a_n) - \spadesuit \heartsuit \spadesuit - c \cdot o(a_n) = o(a_n)$$

$$\oslash c_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow c_1 \cdot O(a_n) + c_2 \cdot O(a_n) = O(a_n) \quad - \spadesuit \heartsuit \spadesuit - \quad c_1 \cdot o(a_n) + c_2 \cdot o(a_n) = o(a_n)$$

$$\oslash a_n = O(b_n), \quad b_n = O(c_n) \Rightarrow a_n = O(c_n) \quad - \spadesuit \heartsuit \spadesuit - \quad a_n = o(b_n), \quad b_n = o(c_n) \Rightarrow a_n = o(c_n)$$

$$\oslash O(O(a_n)) = O(a_n) \quad - \spadesuit \heartsuit \spadesuit - \quad o(o(a_n)) = o(a_n)$$

$$\oslash O(a_n) O(b_n) = O(a_n b_n) = a_n O(b_n) \quad - \spadesuit \heartsuit \spadesuit - \quad o(a_n) o(b_n) = o(a_n b_n) = a_n o(b_n)$$

Bemerkung: • **Remarque:**

Die folgenden Folgen sind mit O und o nicht vergleichbar:

• *Les suites suivantes ne sont pas comparables à l'aide de O et o :*

$$a_n = \begin{cases} n^2 & n \text{ gerade} \bullet \textit{pair} \\ \sin(n) & n \text{ ungerade} \bullet \textit{impair} \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} \sin(n) & n \text{ ungerade} \bullet \textit{impair} \\ n^2 & n \text{ gerade} \bullet \textit{pair} \end{cases}$$

Begriffe: • **Notions:**

O	Folge • Suite
$O(1)$	konstant • <i>constant</i>
$O(n)$	linear • <i>linéaire</i>
$O(n^2)$	quadratisch • <i>quadratique</i>
$O(n^3)$	kubisch • <i>cubique</i>
$O(n^k)$	polynomial • <i>polynomial</i>
$O(e^n)$	exponentiell • <i>exponentiel</i>
$O(\log_a n, \quad a > 1)$	logarithmisch • <i>logarithmique</i>
$O(\dots)$	...

2.6.2 Benchmark, Fibonacci — Benchmark, Fibonacci

Problem — Problème

Computer werden oft nach Benchmarktests bewertet. Eine gängige Methode ist es, Fibonacci-Zahlen zu berechnen und dabei die Zeit zu messen. Wie weit die berechneten Glieder einer Folge den Speicher füllen hängt dabei von ihrem Wachstumsverhalten ab. Ähnliche Probleme begegnen einem bei Sortialgorithmen.

• *Des ordinateurs sont souvent évalués d'après leurs performances. Une méthode courante est de calculer des nombres de Fibonacci et de mesurer le temps utilisé. De quelle façon et avec quelle vitesse les nombres calculés remplissent la mémoire dépend du genre de la croissance. Nous rencontrons des problèmes pareils aussi en cas d'algorithmes de triage.*

Fibonacci-Folgen, Definition — Suites de Fibonacci, définition

Definition: • **Définition:** $\langle a_n \rangle$ Fibonacci-Folge • $\langle a_n \rangle$ suite de Fibonacci $\Leftrightarrow$

1. $a_1 \in \mathbb{R}_0^+$
2. $a_2 \in \mathbb{R}^+$
3. $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

Eigenschaften von Fibonacci-Folgen, Qualités des suites de Fibonacci

Sei • *Soit* $q_n := \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow q_n = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{q_{n-1}}$

Lemma: • **Lemme:** **Vor.:** • **Hyp.:** $q_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}, a_1 \in \mathbb{R}_0^+, a_2 \in \mathbb{R}^+$

Beh.: • **Thè.:** $q_n = 1 + \frac{1}{q_{n-1}}$

$a_1 \in \mathbb{R}_0^+, a_1 \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a_{n+1} = a_n + a_{n-1} > 0$
 $\Rightarrow \forall_{n>1} q_n > 0 \rightsquigarrow \forall_{n>2} 1 < 1 + \frac{1}{q_{n-1}} = q_n \wedge \forall_{n>2} \frac{1}{q_{n-1}} < 1 \Rightarrow \forall_{n>2} 1 < q_n < 1 + 1 = 2$

Lemma: • **Lemme:** **Vor.:** • **Hyp.:** $q_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}, a_1 \in \mathbb{R}_0^+, a_2 \in \mathbb{R}^+$

Beh.: • **Thè.:** $1 < q_n < 2$ (beschränkt) • (borné)

Um die Konvergenz der q_n nachzuweisen, müssen wir die Monotonie untersuchen. Dazu habe ich entdeckt, dass Kettenbrüche weiterhelfen:

• *Pour prouver la convergence des q_n , il faut traiter la monotonie. J'ai découvert que les fractions continues aident à faire ce travail:*

Es gilt: • *Il vaut:* $q_n = 1 + \frac{1}{q_{n-1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{q_{n-2}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{q_{n-3}}}} = \dots = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots \frac{1}{1 + \frac{a_2}{a_1}}}}}$

Im Falle $a_1 = a_2 = 1$ erhalten wir einen endlichen Kettenbruch: • *Dans le cas $a_1 = a_2 = 1$ nous obtenons une fraction continue finie:*

$$q_n = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}$$

Im Falle $a_1 = a_2 = 1$ wird daher:

• *Dans le cas $a_1 = a_2 = 1$ on obtient donc:*

$$q_n = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}$$

Ein Kettenbruch ist also eine Abbildung des rekursiven Algorithmus $q_n = 1 + \frac{1}{q_{n-1}}$. Wir definieren nun:

• *Une fraction continue est donc une application de l'algorithme récurrent $q_n = 1 + \frac{1}{q_{n-1}}$. Nous définissons maintenant:*

Definition: • **Définition:**

p ist Fixpunkt des rekursiven Algorithmus $c_n = f(c_{n-1}) \Leftrightarrow p = f(p)$

• p est point fixe de l'algorithme récurrent $c_n = f(c_{n-1}) \Leftrightarrow p = f(p)$

Wir suchen nun die Fixpunkte g von $q_n = 1 + \frac{1}{q_{n-1}}$.

• *Maintenant nous cherchons les points fixe g de $q_n = 1 + \frac{1}{q_{n-1}}$.*

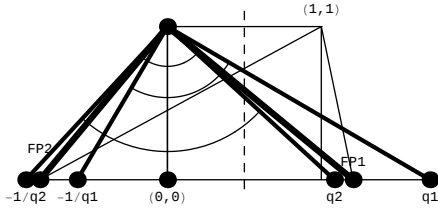
$$g = 1 + \frac{1}{g} \Rightarrow g^2 = g + 1 \Rightarrow g^2 - g - 1 = 0 \Rightarrow g_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$q_n \geq 0 \rightsquigarrow$ nur $g > 0$ interessant. • $q_n \geq 0 \rightsquigarrow$ on s'intéresse seulement à $g > 0$.

Lemma: • Lemme: $g = 1 + \frac{1}{g}, g > 0 \Rightarrow g = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Wir verwenden nun den Höhensatz $p \cdot q = h^2$ für $q = q_{n-1}$ und $h = 1$

• *Nous utilisons maintenant le théorème de la hauteur $p \cdot q = h^2$ pour $q = q_{n-1}$ et $h = 1$*



$$\rightsquigarrow p_n := \frac{1}{q_{n-1}}, \quad q_n = 1 + \frac{1}{q_{n-1}} = 1 + p_n$$

Es gilt: • *Il vaut:* q_{n-1} rechts von $g \rightsquigarrow q_n$ links von $g \rightsquigarrow q_{n+1}$ rechts von $g \dots$
 q_{n-1} links von $g \rightsquigarrow q_n$ rechts von $g \rightsquigarrow q_{n+1}$ links von $g \dots$
 • q_{n-1} à droite de $g \rightsquigarrow q_n$ à gauche de $g \rightsquigarrow q_{n+1}$ à droite de $g \dots$
 q_{n-1} à gauche de $g \rightsquigarrow q_n$ à droite de $g \rightsquigarrow q_{n+1}$ à gauche de $g \dots$

Sei • *Soit* $q_{n-1} - g := d_{n-1} \Rightarrow q_{n-1} = g + d_{n-1}$

Es gilt: • *Il vaut:* $q_n = 1 + \frac{1}{q_{n-1}}$,

$$\rightsquigarrow q_{n+1} = 1 + \frac{1}{q_n} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{q_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{\frac{q_{n-1} + 1}{q_{n-1}}} = 1 + \frac{q_{n-1}}{q_{n-1} + 1} = \frac{q_{n-1} + 1 + q_{n-1}}{q_{n-1} + 1} = \frac{2q_{n-1} + 1}{q_{n-1} + 1}$$

$$\rightsquigarrow d_{n-1} - d_{n+1} = (q_{n-1} - g) - (q_{n+1} - g) = q_{n-1} - q_{n+1} = q_{n-1} - \frac{2q_{n-1} + 1}{q_{n-1} + 1} = \frac{q_{n-1}^2 + q_{n-1} - 2q_{n-1} - 1}{q_{n-1} + 1}$$

Lemma: • Lemme: $d_{n-1} - d_{n+1} = \frac{q_{n-1}^2 - q_{n-1} - 1}{q_{n-1} + 1}$

Sei • *Soit* $|d_k| \ll 1, g \approx 1.61803, q_{n-1} = g + d_{n-1}$

$$\Rightarrow \Delta d_{2,n-1} = d_{n-1} - d_{n+1} = \frac{(g + d_{n-1})^2 - (g + d_{n-1}) - 1}{g + d_{n-1} + 1} = \frac{g^2 + 2gd_{n-1} + d_{n-1}^2 - g - d_{n-1} - 1}{g + d_{n-1} + 1} =$$

$$\frac{g^2 + 2gd_{n-1} + d_{n-1}^2 - g - d_{n-1} - 1}{g + d_{n-1} + 1} = \frac{\overbrace{g^2 - g - 1}^{=0} + 2gd_{n-1} + d_{n-1}^2 - d_{n-1}}{g + d_{n-1} + 1} = \frac{2gd_{n-1} + d_{n-1}^2 - d_{n-1}}{g + d_{n-1} + 1}$$

$$\approx \frac{2gd_{n-1} - d_{n-1}}{g + d_{n-1} + 1} = \frac{(2g - 1)d_{n-1}}{g + d_{n-1} + 1} \approx \frac{(2g - 1)d_{n-1}}{g + 1} \approx \frac{2.23607d_{n-1}}{2.61803} \approx 0.854102d_{n-1}$$

$$\Rightarrow \text{sgn}(d_{2,n-1}) = \text{sgn}(d_{n-1}), \quad d_{n-1} - d_{n+1} \approx 0.854102d_{n-1} \Rightarrow d_{n+1} \approx 0.145898d_{n-1} \Rightarrow |d_{n+1}| < |d_{n-1}|$$

Lemma: • **Lemme:**

1. $|d_{n+1}| < |d_{n-1}|$
2. $\operatorname{sgn}(d_{2,n-1}) = \operatorname{sgn}(d_{n-1})$

Konsequenz: • **Conséquence:** $\langle q_{2n} \rangle$ monoton fallend • *monotonement décroissant*
 $\langle q_{2n-1} \rangle$ monoton wachsend • *monotonement croissant*

g ist einziger positiver Fixpunkt von $q_n = 1 + \frac{1}{q_{n-1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{q_{n-2}}}$ für $n = 2k$ und für $n = 2k + 1$.

Beide Folgen ($n = 2k$, $n = 2k + 1$) sind monoton und beschränkt. Da der Häufungspunkt Fixpunkt des Algorithmus sein muss, konvergieren die Folgen gegen $g = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

• g est le seul point fixe de $q_n = 1 + \frac{1}{q_{n-1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{q_{n-2}}}$ pour $n = 2k$ et pour $n = 2k + 1$. Les deux suites ($n = 2k$, $n = 2k + 1$) sont monotones et bornées. Comme le point d'accumulation doit être point fixe de l'algorithme, les suites convergent vers $g = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

1. $a_1 \in \mathbb{R}_0^+$
2. $a_2 \in \mathbb{R}^+$
3. $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

Beh.: • **Thè.:**

1. $q_n := \frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow g = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$
2. $g = q_\infty = q_n = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}$
3. $q_n = 1 + \frac{1}{q_{n-1}}$

Wachstum von Fibonacci-Folgen — Manière de croître des suites de Fibonacci

Wir wollen die Fibonacci-Folge mit $c_n = b^n$, $b > 1$ vergleichen. • *Maintenant nous allons comparer la suite de Fibonacci avec $c_n = b^n$, $b > 1$.*

Es gilt: • *Il vaut:* $b^n = b^{n-1} \cdot b$, $b^{n+1} = b^n \cdot b = b^{n-1} \cdot b^2$

$$\Rightarrow c_{n+1} = b^{n+1} = b^{n-1} \cdot b^2$$

$$c_n + c_{n-1} = b^{n-1} \cdot b + b^{n-1} = b^{n-1} \cdot (b + 1)$$

Problem: • **Problème:** $c_{n+1} = c_n + c_{n-1} \Rightarrow b = ?$

Sei • *Soit* $c_{n+1} = c_n + c_{n-1} \Rightarrow b^{n-1} \cdot b^2 = b^{n-1} \cdot (b+1) \Rightarrow b^2 = b+1 \Rightarrow b^2 - b - 1 = 0$
 $\Rightarrow b_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \wedge b > 0 \Rightarrow b_{1,2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = g \Rightarrow b_n = g^n$

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

1. $c_n = b^n, b > 1$
2. $c_{n+1} = c_n + c_{n-1}$

Beh.: • **Thè.:** $b = g = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, c_1 = g, c_n = g^n$

Korollar: • **Corollaire:** **Vor.:** • **Hyp.:**

1. $c_{n+1} = c_n + c_{n-1}$
2. $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, a_1 \geq 0, a_2 > 0$
3. $q_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Beh.: • **Thè.:**

1. $c_n = g^n \Rightarrow \frac{c_{n+1}}{c_n} \rightarrow g$
2. $c_n = a_n \neq g^n \Rightarrow q_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow g$
3. $a_n = O(g^n)$

Wir müssen noch $a_n = O(g^{n+k})$ nachweisen. • *Il faut encore prouver $a_n = O(g^{n+k})$.*

1. Sei • *Soit* $a_1 = 1 < c_1 = g, a_2 < c_2 = g^2, a_3 = 1 + 1 = 2 < g + g^2 = c_3 = c_1 + c_2$

Induktion: • *Induction:*

$$a_n < c_n = g^n, a_{n-1} < c_{n-1} = g^{n-1} \Rightarrow a_{n+1} = a_n + a_{n-1} < c_n + c_{n-1} = c_{n+1}$$

$$\Rightarrow \exists_{M \in \mathbb{R}^+} \left| \frac{a_n}{c_n} \right| < M$$

2. Sei • *Soit* $a_1 \geq 0, a_2 < 0$

$$\Rightarrow \exists_{k, n_0} \forall_{n < n_0} a_n < g^{n+k} = c_{n+k} \Rightarrow a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

$$< c_{n+k} + c_{n-1_k} = c_{n+1+k} = g^{n+1+k} = c_{n+1} \cdot g^k$$

$$\Rightarrow \exists_{M \in \mathbb{R}^+, N_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n > N_0} \left| \frac{a_n}{c_n} \right| < M \quad \text{😊}$$

Kapitel • Chapitre 3

Differentialrechnung (Funktionen mit einer Variablen) — Calcul différentiel (fonctions avec une variable)

3.1 Problemstellung — Problématique

3.1.1 Grundlagen — Fondements

Klassisch teilt man die **Infinitesimalrechnung** auf in **Differentialrechnung** und **Integralrechnung**. Die uns auferlegten Rahmenbedingungen erlauben es uns aus Gründen der Gewichtung jedoch nicht, dieser reinen Form der Aufteilung zu folgen. Trotzdem bildet sie aber eine untrennbare Einheit.

• *Classiquement on partage le calcul infinitésimal en calcul différentiel et en calcul intégral. Le cadre des conditions qu'on nous a posé ne permet pas de suivre cette forme pure de la classification. Elle forme quand même une unité qu'on ne peut pas partager.*

Historisch geht die Infinitesimalrechnung (nach Anfängen bei Pascal⁴ und anderen) hauptsächlich auf Leibniz⁵ und Newton⁶ zurück. Weiter ausgearbeitet wurde sie dann zu einem grossen Teil in Basel durch die Bernoullis⁷ und durch Euler⁸.

• *Historiquement le calcul infinitésimal (après les premières découvertes par Pascal⁴ et autres) a été fondé principalement par Leibniz⁵ et Newton⁶. Il a été élaboré en grande partie après à Bâle par les Bernoulli⁷ et par Euler⁸.*

3.1.2 Das Problem der Tangentensteigung — Le problème de la pente de la tangente

3.1.3 Die Begriffe — Les notions

Problem: • **Problème:** Die Geometrie und später die Physik hat zu folgender Fragestellung motiviert: • *La géométrie et plus tard la physique a donné la motivation pour la question suivante:*

⁴Blaise Pascal 1623–1662

⁵Gottfried Willhelm Leibniz 1646–1716

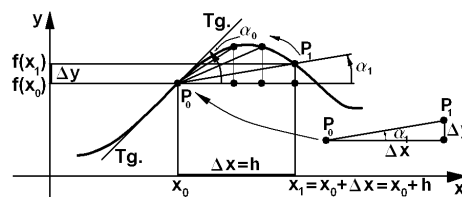
⁶Isaac Newton 1642–1727

⁷Z.B. • *P.ex.* Jakob der ältere Bernoulli 1654–1705

⁸Leonard Euler 1707–1783

Gegeben sei eine Funktionskurve ($\leadsto$ der Graph einer stetigen Funktion, die keine „Zacken“ aufweist). • *Soit donné la courbe d'une fonction (graphe d'une fonction continue qui n'a pas de sommets pointus.)*

Gesucht: Die Tangente („Schmiegegerade“) an die Kurve in einem Punkt P_0 . Diese soll eindeutig sein. • *Chercher: La tangente ("tangente principale") à la courbe dans le point P_0 . On exige qu'elle soit univoque.*



In der Physik trifft man diese Fragestellung, wenn es darum geht, z.B. die „Momentangeschwindigkeit“ eines Massepunktes zu bestimmen. Die durchschnittliche Geschwindigkeit eines Massepunktes im Weg–Zeit–Diagramm zwischen $P_0 = (t_0, s(t_0)) = (t_0, s_0)$ und $P_1 = (t_1, s(t_1)) = (t_1, s_1)$ berechnet sich nach Definition der Geschwindigkeit bekanntlich als das Verhältnis $\frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0}$. Das ist gerade die Steigung der Sehne zwischen den genannten Punkten: $\frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = \tan \alpha_0$.

• *En physique on trouve cette question quand il s'agit p.ex. de chercher la "vitesse instantanée" d'un point masse. On calcule la vitesse moyenne d'un point masse dans le diagramme distance–parcours–temps entre $P_0 = (t_0, s(t_0)) = (t_0, s_0)$ et $P_1 = (t_1, s(t_1)) = (t_1, s_1)$ d'après la définition comme rapport $\frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0}$. C'est la pente de la corde (bisécante) entre les points en question: $\frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = \tan \alpha_0$.*

Idee: Um von der Sehnensteigung (Sekantensteigung) zur „Tangentensteigung“ zu kommen, rücken wir den Punkt P_1 immer näher zu P_0 . Die Sekante geht so im Grenzfalle in diejenige Gerade über, die wir offensichtlich für die Tangente halten und somit als Tangente definieren müssen – die Tangente ist ja in der Geometrie erst für Kurven wie Kreis, Ellipse u.s.w. durch eine Konstruktionsanleitung definiert, aber nicht für beliebige Kurven. Genauso verfahren wir bei Punkten P_0, P_1 auf beliebigen Graphen von reellen Funktionen mit einer Variablen. Das könnte dann funktionieren in jedem Punkt $P_0 = (x_0, f(x_0))$ eines Graphen, wo die Kurve „glatt“ ist, d.h. keine Spitze hat.

• **Idée:** *Pour arriver de la pente de la corde (sécante) à la pente de la "tangente", nous approchons le point P_1 de plus en plus au point P_0 . Alors la sécante se transforme dans le cas limite en cette droite qu'on tient pour la tangente. Nous devons donc définir cette droite comme tangente – car la tangente en géométrie n'est définie que pour des courbes comme le cercle, l'ellipse, etc., par la méthode de construction. Mais elle n'est point définie pour une courbe quelconque. Nous appliquons la même méthode pour des points P_0, P_1 sur des graphes de fonctions réelles quelconques à une variable. Ça pourrait fonctionner à tous les points $P_0 = (x_0, f(x_0))$ d'un graphe où la courbe est "lisse", ç.v.d. n'a pas de pointe. $\leadsto$*

Um über das eben Gesagte besser reden zu können, fassen wir einige spezielle Sachverhalte in Begriffe, d.h. wir führen Namen ein: • *Pour pouvoir mieux traiter les sujets dont on vient de parler, nous introduisons des notions, ç.v.d. nous donnons des noms:*

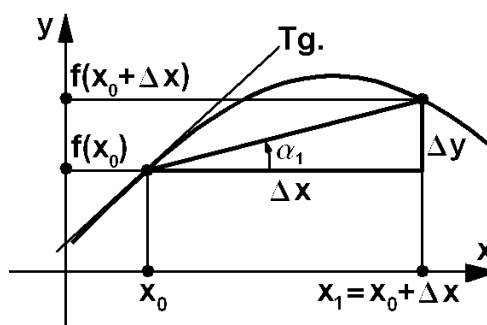
Definition: • **Définition:**

Die Sekantensteigung: • *La pente de la sécante:*

$$\tan(\alpha_1) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} := DQ(f, x_0, x_1)$$

heißt **Differenzenquotient**

• *s'appelle quotient de différences.*



Definition: • **Définition:**

Der Limes des Differenzenquotienten • *La limite du quotient de différences*

$$\begin{aligned}\tan(\alpha_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} DQ(f, x_0, x)\end{aligned}$$

heisst **Differentialquotient** oder **Ableitung** resp. **Tangentensteigung** der **Stammfunktion** f an der Stelle x_0

• *s'appelle quotient différentiel ou dérivé resp. pente de la tangente de la fonction primitive (ou originale) f à la place x_0 .*

Schreibweise: • **Façon d'écrire:** $\tan(\alpha_0) := f'(x_0) = \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=x_0} := \frac{d}{dx}f(x) \Big|_{x=x_0}$

Bemerkung: • **Remarque:**

$f'(x_0)$ stammt von Newton • *a été utilisé par Newton,*

$\frac{df(x)}{dx}$ hingegen von Leibniz • *par contre vient de Leibniz.*

Beide Schreibweisen sind gebräuchlich. Je nach Situation ist die eine oder die andere besser.

• *Les deux manières s'utilisent aujourd'hui. Selon la situation l'une des deux est la meilleure.*

dx , dy , df nennt man **differentielle** oder **infinitesimale** Grössen. • *s'appellent des entités différentielles ou infinitésimales.* Sie haben hier nur symbolischen Charakter. • *Elles ont une signification symbolique.*

Einen Sinn erhalten sie in der **Non-Standard-Analysis**. Wir können uns vorstellen, dass sie beim Grenzübergang 0 werden, jedoch nicht von beliebig hoher Ordnung 0. Dass es verschiedene Ordnungen von 0 gibt, haben wir bei der Untersuchung der reellen Zahlen und von unendlich erfahren.

• *Ils obtiennent un sens par l'analyse non-standard. On peut s'imaginer qu'ils deviennent 0 par le passage à la limite, mais pas 0 d'ordre quelconque. Nous avons appris en examinant les nombres réels et l'infini qu'il existe différents ordres de 0*

Wie wir wissen, braucht ein Limes nicht immer zu existieren. Hier existiert er nur, falls die Sekantensteigung $a_{(x_0)}(x_1)$ sich in x_0 stetig verhält (bei $\lim_{x \rightarrow x_0}$). Falls das der Fall ist, so sagen wir:

• *Comme nous savons, une limite ne doit pas exister nécessairement. Ici elle existe seulement si la pente de la sécante $a_{(x_0)}(x_1)$ est continue à x_0 (pour $\lim_{x \rightarrow x_0}$). Si c'est le cas, on dit:*

Definition: • **Définition:** Falls $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} DQ(f, x_0, x)$ existiert, so heisst f in x_0 **differenzierbar**. • *Si $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} DQ(f, x_0, x)$ existe, f s'appelle dérivable à x_0 .*

Wenn $f'(x_0)$ in jedem x_0 in einer gewählten Definitionsmenge D_f existiert, so ist dadurch in natürlicher Weise eine **Funktion** $f' : x_0 \mapsto f'(x_0)$ definiert. Somit können wir definieren:

• *Si $f'(x_0)$ existe à chaque x_0 dans une domaine de définition D_f choisi, une fonction $f' : x_0 \mapsto f'(x_0)$ est définie de façon naturelle. Nous pouvons donc définir:*

Definition: • **Définition:** $f' : x \mapsto f'(x)$ ($x \in D_{f'}$) heisst **Ableitungsfunktion** (kurz: **Ableitung**) • *s'appelle fonction dérivée (bref: dérivée)*

Die Ableitung $f'(x)$ ist demnach die Steigungsfunktion der Tangente. • *La dérivée $f'(x)$ est donc la fonction de la pente de la tangente.*

Definition: • **Définition:** f heisst **differenzierbar** auf I • *s'appelle dérivable sur I*
 $\Leftrightarrow \forall_{x_0 \in I} f'(x_0)$ existiert • *existe.*
 $\leadsto$ kurz • *bref:* diff'bar'dérivab,
diff'bar'dérivab($()I$) $\leadsto$ auf I • *sur I*
 $\mathcal{D}^{(1)}(I) := \{f \mid f \text{ diff'bar'dérivab}(I)\}$

3.1.4 L –Differenzierbarkeit — ”Dérivable

Analog zur L –Stetigkeit können wir auch die stärkere L –Differenzierbarkeit definieren:

• *Analoguement à la ”continuité L ”, nous pouvons aussi définir la ”dérivabilité L ”:*

Definition: • **Définition:** **Lokale L –Differenzierbarkeit** • **Dérivabilité L locale:**

Die Funktion f heisst **L –differenzierbar** in x_0

• *La fonction f s'appelle dérivable L dans x_0*

$$\Leftrightarrow \exists_{m \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}^+} \forall_{x \in U_\delta} :$$

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + R(x) \wedge |R(x)| \leq k \cdot (x - x_0)^2$$

m heisst im Falle der L –Diff'barkeit **Ableitung** von f in x_0 .

• *m s'appelle dérivé de f dans x_0 , si f ist dérivable d'après le critère ci-dessus.*

Konsequenz: • **Conséquence:**

Vor.: • **Hyp.:**

$$\forall_{x \in U_\delta} : f \text{ } L\text{-differenzierbar} \quad \bullet \quad \forall_{x \in U_\delta} : f \text{ dérivable } L$$

Beh.: • **Thè.:**

$$\exists_{L \in \mathbb{R}^+} \forall_{x \in U_\delta} : \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| = |m| + |k \cdot (x - x_0)| \leq L$$

Interpretation: Die Sekantensteigung ist demnach in U_δ immer kleiner gleich L .

• **Interprétation:** *Dans U_δ , la pente de la sécante est donc toujours plus petite ou égale à L .*

Definition: • **Définition:** **Globale L –Differenzierbarkeit** • **Dérivabilité L globale:**

Die Funktion f heisst **L –differenzierbar** in I

• *La fonction f s'appelle dérivable L dans I*

$$\Leftrightarrow \forall_{x \in I} : f \text{ ist } L\text{-diff'bar in } x_0. \quad \bullet \quad f \text{ est dérivable } L \text{ dans } x_0.$$

Für abgeschlossene Intervalle folgt sofort: • *Pour des intervalles fermés on peut conclure immédiatement:*

Korollar: • **Corollaire:**Die Funktion f ist L -**differenzierbar** auf $I = [a, b]$ • *La fonction f est dérivable L sur $I = [a, b]$*

$$\Leftrightarrow \exists_{L \in \mathbb{R}^+} \forall_{x, x_0 \in I} : |f(x) - f(x_0)| \leq L |x - x_0|$$

Ähnlich wie bei der L -Stetigkeit sieht man sofort, dass aus L -differenzierbar „gewöhnlich differenzierbar“ folgt. Konsequenz:

• *Pareillement à la continuité L on voit tout de suite qu'on peut déduire de dérivabilité L la "dérivabilité pure". Conséquence:*

Satz: • **Théorème:****Vor.:** • **Hyp.:** f L -differenzierbar • f dérivable L **Beh.:** • **Thè.:** f differenzierbar • f dérivable

Trivialerweise gilt der Satz: • *On voit tout de suite que le le théorème suivant est vrai:*

Satz: • **Théorème:****Vor.:** • **Hyp.:** f L -differenzierbar • f dérivable L **Beh.:** • **Thè.:** f L -stetig • f continue L

3.1.5 Einfache Beispiele — Exemples simples

1. Beispiel: • **Exemple 1:** Gerade: • *Droite:*

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b \Rightarrow f(x_0) = ax_0 + b \\ \Rightarrow f'(x_0) &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{(ax_1 + b) - (ax_0 + b)}{x_1 - x_0} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{a(x_1 - x_0) + (b - b)}{(x_1 - x_0)} \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{a(x_1 - x_0)}{(x_1 - x_0)} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} a = a \Rightarrow f'(x) = a \end{aligned}$$

Die berechnete Steigung ist demnach die bekannte Geradensteigung. • *Ce résultat est connu comme monté de la droite.*

Speziell: • **Spécialement:** $f(x) = b = \text{const.} \Rightarrow a = 0 \Rightarrow f'(x) \equiv 0$

2. Beispiel: • **Exemple 2:** Parabel: • *Parabole:*

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 \Rightarrow f(x_0) = ax_0^2 \Rightarrow \forall_{x_0 \in \mathbb{R}} DQ = DQ(ax^2, x_0, x_1) = \frac{ax_1^2 - ax_0^2}{x_1 - x_0} = \\ &= \frac{a(x_1 - x_0)(x_1 + x_0)}{(x_1 - x_0)} = a(x_1 + x_0)|_{x_1 \neq x_0} \Rightarrow \lim_{x_1 \rightarrow x_0} DQ = a \cdot 2 \cdot x_0 = f'(x_0) \Rightarrow \forall_{x \in \mathbb{R}} f'(x) = 2ax \end{aligned}$$

3. Beispiel: • **Exemple 3:** Wurzel: • *Racine:* $(\sqrt{x})' = ?$

$$\begin{aligned}
 DQ &= \frac{(x_0 + h)^{\frac{1}{2}} - (x_0)^{\frac{1}{2}}}{h} = \frac{(x_0 + h)^{\frac{1}{2}} - (x_0)^{\frac{1}{2}}}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{(x_0 + h)^{\frac{1}{2}} - (x_0)^{\frac{1}{2}}}{((x_0 + h)^{\frac{1}{2}} + x_0^{\frac{1}{2}})((x_0 + h)^{\frac{1}{2}} - x_0^{\frac{1}{2}})} \\
 &= \frac{1}{((x_0 + h)^{\frac{1}{2}} + x_0^{\frac{1}{2}})} \longrightarrow \frac{1}{2x_0^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = (\sqrt{x})' \leadsto
 \end{aligned}$$

Formel: • **Formule:** $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2} x_0^{-\frac{1}{2}}$

4. Beispiel: • **Exemple 4:** Parabel höherer Ordnung: • *Parabole d'ordre supérieur:*

$$\begin{aligned}
 f(x) = x^n &\Rightarrow f(x_0) = x_0^n \Rightarrow \forall_{x_0 \in \mathbb{R}} DQ = DQ(x^n, x_0, x_1) = \frac{x_1^n - x_0^n}{x_1 - x_0} = \\
 &= \frac{(x_1 - x_0)(x_1^{n-1}x_0^0 + x_1^{n-2}x_0^1 + x_1^{n-3}x_0^2 + \dots + x_1^0x_0^{n-1})}{(x_1 - x_0)} = \\
 &= (x_1^{n-1}x_0^0 + x_1^{n-2}x_0^1 + x_1^{n-3}x_0^2 + \dots + x_1^0x_0^{n-1})|_{x_1 \neq x_0} \\
 \Rightarrow \lim_{x_1 \rightarrow x_0} DQ &= n x_0^{n-1} = f'(x_0) \Rightarrow \forall_{x \in \mathbb{R}} f'(x) = n x^{n-1}
 \end{aligned}$$

3.1.6 Höhere Ableitungen — Dérivées supérieures

Da $f'(x)$ wieder eine Funktion ist, kann es sein, dass in den betrachteten Punkten wieder Tangenten an den Graphen von $f'(x)$ existieren, dass also $(f'(x))' = \lim_{x_1 \rightarrow x} DQ(f', x, x_1)$ wieder existiert für die betrachteten x . Dann ist $(f'(x))'$ wieder eine Funktion. Entsprechend für $((f'(x))')'$ und so fort. Wir reden hier von **höheren Ableitungen**.

• *Comme $f'(x)$ est de nouveau une fonction, il peut être qu'aux points en question la tangente au graphe de $f'(x)$ existe aussi, que $(f'(x))' = \lim_{x_1 \rightarrow x} DQ(f', x, x_1)$ existe donc pour les x considérés. Par conséquent $(f'(x))'$ est de nouveau une fonction. Correspondant pour $((f'(x))')'$ etc.. Alors on parle de **dérivées supérieures**.*

Definition: • **Définition:** $f''(x) := (f'(x))' = \frac{d}{dx}(\frac{d}{dx}f) := \frac{d^2 f}{dx^2}$:

2-te Ableitung • **2-ème dérivée** ($f \in \mathcal{D}^{(2)}(I) \dots$)

$$f'''(x) := (f''(x))' = \frac{d}{dx}(\frac{d}{dx}f') := \frac{d^3 f}{dx^3}$$

3-te Ableitung • **3-ème dérivée** ($f \in \mathcal{D}^{(3)}(I) \dots$)

$$f^{(n)}(x) := (f^{(n-1)}(x))' = \frac{d}{dx}(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}) := \frac{d^n f}{dx^n}$$

n-te Ableitung • **n-ème dérivée** ($f \in \mathcal{D}^{(n)}(I) \dots$)

(Später sind diese Ableitungen wichtig bei Potenzreihen. • *Plus tard ces dérivées sont importantes quand on traite les séries de puissances.*)

Bsp.: • **Exemple:**

Ein Massepunkt bewegt sich nach der Gleichung • *Un point masse se meut d'après l'équation*
 $s(t) = ct^2$.

$\leadsto$ Geschwindigkeit (Änderung des Weges pro Zeit) • *vitesse (changement du chemin (distance) par rapport au temps):* $v(t) = s'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = 2ct$ (vgl. Bsp. 2 oben) • *voir expl. 2 en haut*.

$\leadsto$ Beschleunigung: Änderung der Geschwindigkeit pro Zeit • *accélération: changement de la vitesse par*

rapport au temps $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t) = (s'(t))' = s''(t) = \frac{d^2 s}{dt^2} = 2c$

(Es ist natürlich nicht notwendig, immer alle diversen Schreibweisen wiederzugeben. • *Naturellement il n'est pas nécessaire de rendre toujours toutes les façons d'écrire.*)

3.1.7 Diff'barkeit und Stetigkeit — Dérivabilité et continuité

Man sieht schon anschaulich ein, dass eine Funktion an ihren Unstetigkeitspunkten keine eindeutige Tangente besitzen kann. (Man denke an Polstellen, Definitionslücken, Sprünge.) Nicht stetig bedeutet also nicht differenzierbar. Jedoch kann es sehr wohl sein, dass eine Funktion in einem Punkt stetig ist, jedoch nicht differenzierbar. Man denke an eine Spitze im Graphen, wo keine eindeutige Tangente existiert. Es gilt jedoch: Falls in einem Punkt eine Tangente existiert (falls die Funktion differenzierbar ist), so ist sie dort stetig.

• *On voit de façon naturelle qu'une fonction ne peut pas avoir de tangente aux points où elle est discontinue. (Pensons aux places de pôles, lacunes de définition, sauts.) Non continue signifie donc non dérivable. Mais il peut arriver qu'une fonction est continue à un certain point, mais n'y est pas dérivable. Pensons à une pointe dans le graphe, où il n'existe pas de tangente univoque. Mais il vaut: Si une tangente existe à un certain point (si la fonction est dérivable), elle y est continue.*

$$\begin{aligned} \text{Denn} \bullet \text{ Car: } c = f'(x_0) &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \Rightarrow 0 = \left(\lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right) - c \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right) - c = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0) - c(x_1 - x_0)}{x_1 - x_0} \\ \Rightarrow 0 &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} f(x_1) - f(x_0) - c(x_1 - x_0) = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} f(x_1) - f(x_0) - \lim_{x_1 \rightarrow x_0} c(x_1 - x_0) \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} f(x_1) - f(x_0) = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} f(x_1) = f(x_0) \Rightarrow f \text{ stet'cont}(x_0). \end{aligned}$$

Satz: • **Théorème:** $f \text{ diff'bar'dérivab}(x_0) \Rightarrow f \text{ stet'cont}(x_0)$

Kontraposition: • **Contraposition:**

$$\begin{aligned} f \text{ nicht stetig in } &\bullet \text{ non continue à } x_0 \\ \Rightarrow f \text{ nicht diff'bar in } &\bullet \text{ non dérivable à } x_0 \end{aligned}$$

Wichtig: • **Important:** Stetigkeit ist nur notwendig, aber nicht hinreichend für Differenzierbarkeit. Es gibt stetige, nicht differenzierbare Funktionen (z.B. fraktale Gebilde).

• *La continuité est nécessaire, mais ne suffit pas pour la dérivabilité. Il existe des fonctions continues, mais non dérivables (p.ex. des constructions fractales).*

Es gibt sogar Funktionen, die überall definiert sind, jedoch nirgends stetig und somit nirgends diff'bar sind. • *Il existe même des fonctions qui sont définies partout, mais qui ne sont nulle part continues et qui ne sont donc dérivables à aucun point.*

Bsp.: • **Exemple:**

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Eine Funktion, die überall stetig und nirgends differenzierbar ist, stammt von Weierstrass:

• *Weierstrass a donné une fonction qui est continue partout et qui n'est dérivable nulle part:*

$$f(x) = f(x, \lambda, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(2-s)k} \cdot \sin(\lambda^k x), \quad \lambda \gg 1, \quad s \in (1, 2), \quad x \in D_f = [0, 1]$$

Eine Vorstellung vom Graphen erhalten wir durch folgende grobe Approximation:

- *L'approximation grossière suivante nous donne une idée du diagramme:*

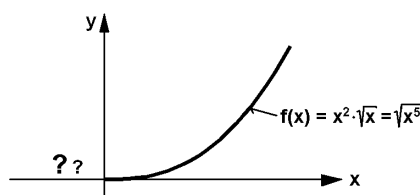
$$f_n(x) = f_n(x, \lambda, s) = f_5(x, 5, 1.5) = \sum_{k=1}^{n=5} 5^{(2-1.5)k} \cdot \sin(5^k x)$$



3.1.8 Links- und rechtsseitige Diff'barkeit — Dérivabilité de gauche et de droite

Bsp.: • **Exemple:** $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x} = \sqrt{x^5}$

Betrachtet man den Graphen, so wird es offensichtlich, dass eine Tangente im Punkt $(0,0)$ sinnvoll ist. Jedoch ist dort vorerst die Ableitung nicht definiert, da wegen dem Definitionsbereich kein zweiseitiger Limes existieren kann. Es existiert nur ein rechtsseitiger Limes:



- *Si l'on considère le graphe, il est clair qu'au point $(0,0)$ la tangente a un sens. Mais d'abord la dérivée n'est pas définie parce que, à cause du domaine de définition, une limite de deux côtés ne peut pas exister. Il existe seulement une limite de droite.*

$$\leadsto DQ = DQ(x_1^{\frac{5}{2}}, 0, x_1) = \frac{x_1^{\frac{5}{2}} - 0^{\frac{5}{2}}}{x_1 - 0} = \frac{x_1^{\frac{5}{2}}}{x_1} = x_1^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \lim_{x_1 \downarrow 0} DQ = \lim_{x_1 \downarrow 0} x_1^{\frac{3}{2}} = 0^{\frac{3}{2}} = 0$$

Daher ist es in Punkten wie im eben studierten Beispiel sinnvoll, eine links- und rechtsseitige Ableitung zu definieren: • *A des points comme dans l'exemple qu'on vient d'étudier, il est donc sensé de définir une dérivée de gauche ou de droite:*

Definition: • **Définition:**

$$\lim_{x_1 \uparrow x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} := f'_\uparrow(x_0)$$

heisst **linksseitige Ableitung** von f in x_0 (linksseitige Tangentensteigung) • *s'appelle **dérivée de gauche** de f à x_0 (pente de la tangente de gauche).*

$$\lim_{x_1 \downarrow x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} := f'_\downarrow(x_0)$$

heisst **rechtsseitige Ableitung** von f in x_0 (rechtsseitige Tangentensteigung) • *s'appelle **dérivée de droite** de f à x_0 (pente de la tangente de droite).*

Damit gelingt es nun, auch den Knick mathematisch zu fassen. Wir Definieren: • *A l'aide de ces définitions on arrive à définir aussi le pli (coude) de manière mathématique. Nous définissons:*

Definition: • **Définition:**

Vor.: • **Hyp.:** $\lim_{x \uparrow x_0} f(x), \lim_{x \downarrow x_0} f(x)$ existieren • *existent.*

$\leadsto f$ hat in x_0 einen **Sprung** • *a un saut* à x_0

$$\Leftrightarrow \lim_{x \uparrow x_0} f(x) \neq \lim_{x \downarrow x_0} f(x)$$

Definition: • **Définition:****Vor.:** • **Hyp.:**

Sei • *Soit* f stet'cont(x_0),
 $\lim_{x \uparrow x_0} f'(x), \lim_{x \downarrow x_0} f'(x)$ ex. • *ex..*

f hat in x_0 einen **Knick** • *a un pli* à x_0
 $\Leftrightarrow \lim_{x \uparrow x_0} f'(x) \neq \lim_{x \downarrow x_0} f'(x)$

Das bedeutet also dass die linksseitige Steigung der Tangente ungleich der rechtsseitigen Steigung der Tangente ist. • *Cela signifie donc que la pente de la tangente à gauche est inégale par rapport à la pente de la tangente à droite.*

3.2 Der Kalkül — Le calcul

3.2.1 Grundlagen, Potenzfunktion — Fondements, fonction puissance

Ein Kalkül ist eine Sammlung von Regeln, die uns die Sache besonders einfach machen, da man sich wiederholende Sachverhalte nicht immer neu herzuleiten braucht. • *Un calcul est une collection de règles qui simplifie la chose parce qu'on ne doit pas toujours prouver à nouveau les choses qui se répètent.*

Eine Regel haben wir schon hergeleitet (vg. Bsp. 3, 3.1.5 Seite 83): • *Nous avons déjà prouvé une règle, (voir 3.1.5 page 83):*

Regel: • **Règle:****Potenzfunktion** • **Fonction puissance****Vor.:** • **Hyp.:** $f(x) = x^n$ **Beh.:** • **Thè.:** $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ **Bsp.:** • **Exemple:** $f(x) = x^7 \Rightarrow f'(x) = 7x^6$

3.2.2 Linearität — Linéarité

Lineare Operatoren — Opérateurs linéaires

Bis jetzt haben wir Funktionen mit $D_f \subseteq \mathbb{R}$, $W_f \subseteq \mathbb{R}$ studiert. Auf der Grundlage des allgemeinen Funktionenbegriffs (vgl. Algebra) ist diese Einschränkung jedoch künstlich. D_f und W_f können irgend welche Mengen sein, z.B. auch Zahlen oder auch selbst Funktionen. Z.B. $D_f = \{f(x) \mid f \text{ diff'bar}(I)\}$, $W_f = \{h(x) \mid \exists_{f(x)} : h(x) = f'(x)\}$. Wenn nun Definition- und Wertebereich aus Funktionen bestehen, so wollen wir von **Operatoren** sprechen.

• *Jusqu'ici nous avons étudié des fonctions avec $D_f \subseteq \mathbb{R}$, $W_f \subseteq \mathbb{R}$. Basé sur la notion de fonction générale (voir algèbre) cette restriction est artificielle. D_f et W_f peuvent être des ensembles quelconques, aussi p.ex. des nombres ou aussi des fonctions. P.ex. $D_f = \{f(x) \mid f \text{ dérivable}(I)\}$, $W_f = \{h(x) \mid \exists_{f(x)} : h(x) = f'(x)\}$. Si les domaines de définition et de valeurs consistent en fonctions, nous parlons d'opérateurs.*

Seien • *Soient* : $M_D, M_W =$ speziell festgelegte Funktionenklassen • *classes de fonctions bien définies.*

Definition: • **Définition:** **Operatoren** sind Funktionen mit
 $D_{Op} \subseteq M_D, W_{Op} \subseteq M_W$.
 • *Ici les opérateurs sont des fonctions avec*
 $D_{Op} \subseteq M_D, W_{Op} \subseteq M_W$.

Bsp.: • **Exemple:** $\frac{d}{dx} : f(x) \mapsto f'(x) = \frac{df}{dx}$ ist ein Operator • *est un opérateur*

Bemerkung: • **Remarque:**

Da infolge $\frac{d}{dx}$ differenziert wird, heisst dieser Operator speziell **Differentialoperator**.

• *Comme on calcule des dérivées à l'aide de "différences infinitésimales", on parle ici d'opérateur différentiel.*

Definition: • **Définition:** Ein Operator $\Phi : V \mapsto V'$ heisst **linear**, wenn er folgende Bedingungen erfüllt: • *Un opérateur $\Phi : V \mapsto V'$ s'appelle linéaire, s'il satisfait les conditions suivantes:*

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} \forall f_1, f_2 \in V \quad & \Phi(f_1(x) + f_2(x)) = \Phi(f_1(x)) + \Phi(f_2(x)) \\ \forall f(x) \in V, \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \quad & \Phi(\lambda f(x)) = \lambda \Phi(f(x)) \end{aligned}$$

Konsequenz: • **Conséquence:**

Ein linearer Operator erfüllt: • *Un opérateur linéaire satisfait:*

$$\Phi(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)) = \lambda_1 \Phi(f_1(x)) + \lambda_2 \Phi(f_2(x))$$

Linearität des Differentialoperators — Linéarité de l'opérateur différentiel

Satz: • **Théorème:** $\frac{d}{dx}$ ist ein linearer Operator: • *est un opérateur linéaire:* $\leadsto$

Regel: • **Règle:** **Vor.:** • **Hyp.:** $f_1, f_2 \in \{f \mid f \text{ diff'bar'dérivab}(I)\}, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$

Beh.: • **Thè.:**

$$1. \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in \{f \mid f \text{ diff'bar'dérivab}(I)\}$$

$$2. (\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x))' = \alpha_1 f_1'(x) + \alpha_2 f_2'(x)$$

Beweis: • **Preuve:**

$$\begin{aligned} & DQ = DQ(\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x), x_0, x_1) \\ &= \frac{(\alpha_1 f_1(x_1) + \alpha_2 f_2(x_1)) - (\alpha_1 f_1(x_0) + \alpha_2 f_2(x_0))}{x_1 - x_0} = \\ &= \frac{\alpha_1(f_1(x_1) - f_1(x_0)) + \alpha_2(f_2(x_1) - f_2(x_0))}{x_1 - x_0} = \alpha_1 \frac{f_1(x_1) - f_1(x_0)}{x_1 - x_0} + \alpha_2 \frac{f_2(x_1) - f_2(x_0)}{x_1 - x_0} \\ &\Rightarrow \lim_{x_1 \rightarrow x_0} DQ = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \alpha_1 \frac{f_1(x_1) - f_1(x_0)}{x_1 - x_0} + \alpha_2 \frac{f_2(x_1) - f_2(x_0)}{x_1 - x_0} = \alpha_1 f_1'(x_0) + \alpha_2 f_2'(x_0) \\ &= \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{(\alpha_1 f_1(x_1) + \alpha_2 f_2(x_1)) - (\alpha_1 f_1(x_0) + \alpha_2 f_2(x_0))}{x_1 - x_0} = (\alpha_1 f_1(x_0) + \alpha_2 f_2(x_0))' \end{aligned}$$

Bsp.: • **Exemple:** $f(x) = 3x^6 - 4x^5 + 8x^2 - 9 \Rightarrow f'(x) = 18x^5 - 20x^4 + 16x + 0$

Konsequenz: • **Conséquence:**Polynome sind diff'bar auf $\mathbb{R}$. • *Les polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$.***Korollar:** • **Corollaire:****Vor.:** • **Hyp.:**

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Beh.: • **Thè.:**

1. $p'(x) = a_n \cdot n \cdot x^{n-1} + a_{n-1} \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} + \dots + a_1$
2. $p^{(n)}(x) = a_n \cdot n! = \text{const.}$
3. $p^{(n+1)}(x) = 0$

3.2.3 Wichtige Regeln — Règles importantes

Differenzenquotient und Restfunktion — Quotient différentiel et fonction de reste

Seien • *Soient*

$$\triangleright DQ = DQ(f(x), x_0, x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} := R_f(x) \quad \text{für} \quad \bullet \text{ pour } x_0 \in \mathbb{R} \text{ fix} \quad \bullet \text{ fixe.}$$

$$\triangleright f \in \mathcal{D}^{(1)}(x_0) \quad (\leadsto \quad f'(x_0) \text{ existiert} \quad \bullet \text{ existe})$$

$$\triangleright \exists_{\delta \in \mathbb{R}^+} : \frac{1}{x - x_0} \text{ stet'cont}(\dot{U}_\delta(x_0)).$$

Dann gilt: • *Alors il vaut:*

$$\triangleright R_f(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ stet'cont}(x_0) \quad \left(\lim_{x \rightarrow x_0} R_f(x) = f'(x_0), \text{ fortsetzbar} \quad \bullet \text{ prolongeable} \right)$$

$$\begin{aligned} \triangleright f(x) &= \frac{f(x_0)(x - x_0) + f(x)(x - x_0) - f(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = \\ &= f(x_0) + R_f(x)(x - x_0) \end{aligned}$$

Lemma: • **Lemme:****Restfunktionslemma** • **Lemme de la fonction du reste****Vor.:** • **Hyp.:**

$$R_f(x) = DQ(f(x), x_0, x) \quad \wedge \quad f \in \mathcal{D}^{(1)}(x_0)$$

Beh.: • **Thè.:**

$$f(x) = f(x_0) + R_f(x)(x - x_0), \quad D_{R_f} = D_f, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} R_f(x) = f'(x_0)$$

Mit dem Restfunktionslemma gelingt es, verschiedene Regeln herzuleiten. A l'aide du lemme de la fonction du reste on peut déduire certaines règles.

Ableitung des Sinus — Dérivée du sinus

Verwende das Additionstheorem: • *Utilise le théorème d'addition:*

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \quad \text{sowie:} \quad \bullet \text{ et en plus: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\begin{aligned}
\leadsto DQ &= R_{\sin}(x) = \frac{\sin(x_1) - \sin(x)}{x_1 - x} = (\sin(x + \Delta x) - \sin(x)) \cdot \frac{1}{\Delta x} = \\
&= 2 \sin\left(\frac{x + \Delta x - x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x + \Delta x + x}{2}\right) \cdot \frac{1}{\Delta x} = 2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{1}{\Delta x} \cdot \cos\left(\frac{2x + \Delta x}{2}\right) \\
\Rightarrow \sin'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{1}{\Delta x} \cdot \cos\left(\frac{2x + \Delta x}{2}\right) = 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x^*)}{2\Delta x^*} \Big|_{x^* = \frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{2x + \Delta x}{2}\right) \\
&= 2 \lim_{\Delta x^* \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x^*)}{\Delta x^*} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(x) = 1 \cdot \cos(x) = \cos(x)
\end{aligned}$$

Regel: • **Règle:** $\forall x \in \mathbb{R} : \sin'(x) = \cos(x)$

Produkten- und Quotientenregel — Règle du produit et du quotient

Seien • *Soient* $f, g \in \mathcal{D}^{(1)}(x_0)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f(x) \cdot g(x) &= (f(x_0) + R_f(x)(x - x_0)) \cdot (g(x_0) + R_g(x)(x - x_0)) = \\
&= f(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot R_g(x)(x - x_0) + g(x_0) \cdot R_f(x)(x - x_0) + R_f(x) \cdot R_g(x) \cdot (x - x_0)^2 \\
\Rightarrow DQ &= \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} = \\
&= \frac{f(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot R_g(x)(x - x_0) + g(x_0) \cdot R_f(x)(x - x_0) + R_f(x) \cdot R_g(x) \cdot (x - x_0)^2 - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} \\
&= f(x_0) \cdot R_g(x) + g(x_0) \cdot R_f(x) + R_f(x) \cdot R_g(x) \cdot (x - x_0) \\
- \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} DQ &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) \cdot R_g(x) + g(x_0) \cdot R_f(x) + R_f(x) \cdot R_g(x) \cdot (x - x_0) = \\
&= f(x_0) \cdot g'(x_0) + g(x_0) \cdot f'(x_0)
\end{aligned}$$

Kurz: • **Bref:**

$$\begin{aligned}
\frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x_0) + f(x) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} = \\
f(x) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} &+ g(x_0) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow f(x_0) \cdot f'(x_0) + g(x_0) \cdot g'(x_0)
\end{aligned}$$

Falls $f, g \in \mathcal{D}^{(1)}(I)$ gilt, ist diese Betrachtung für alle $x_0 \in I$ gültig. Man erhält somit die Regel:

• *S'il vaut $f, g \in \mathcal{D}^{(1)}(I)$, cette déduction est valable pour tous les $x_0 \in I$. On obtient donc la règle:*

Regel: • **Règle:** **Produktenregel** • **Règle du produit**

Vor.: • **Hyp.:** $f, g \in \mathcal{D}^{(1)}(I)$

Beh.: • **Thè.:**

$$(f(x) \cdot g(x))' = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x) \quad \text{in} \quad \bullet \quad \text{dans } I$$

1. Beispiel: • **Exemple 1:**

$$(x \cdot \sin(x))' = (x)' \cdot \sin(x) + x \cdot (\sin'(x)) = 1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x) = \sin(x) + x \cdot \cos(x)$$

2. Beispiel: • **Exemple 2:**

$$1 = (x)' = (\sqrt{x} \cdot \sqrt{x})' = 2 \cdot \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x})' \Rightarrow (\sqrt{x})' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

3. Beispiel: • Exemple 3:

$$f(x) = \sin^2(x), \quad f'(x) = (\sin(x) \cdot \sin(x))' = \cos(x) \cdot \sin(x) + \sin(x) \cdot \cos(x) = 2 \sin(x) \cdot \cos(x)$$

4. Beispiel: • Exemple 4:

Mit Hilfe vollständiger Induktion und der Produktenregel beweist man sofort:

• *A l'aide de l'induction complète on prouve tout de suite:*

Regel: • Règle: **Leibniz-Formel • Formule de Leibniz**

Vor.: • Hyp.: $f, g \in \mathcal{D}^{(n)}(I)$

Beh.: • Thè.:

$$(f(x) \cdot g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x) \quad \text{in} \quad \bullet \quad \text{dans } I$$

Eine etwas andere Schreibweise der Produktenregel ist die Quotientenregel:

• *Si l'on écrit la règle du produit de façon un peu différente, on obtient la règle du quotient:*

Sei • *Soit* $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, $f, g, h \in \mathcal{D}^{(1)}(I)$, $h(x) \neq 0 \ (\forall x \in I) \Rightarrow f(x) \cdot h(x) = g(x)$

$$\Rightarrow g'(x) = (f(x) \cdot h(x))' = f'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot h'(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{h(x)} \cdot (g'(x) - f(x) \cdot h'(x))$$

$$= \frac{1}{h^2(x)} \cdot (g'(x) \cdot h(x) - \frac{g(x)}{h(x)} \cdot h'(x) \cdot h(x)) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h^2(x)}$$

Regel: • Règle: **Quotientenregel • Règle du quotient**

Vor.: • Hyp.: $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, $f, g, h \in \mathcal{D}^{(1)}(I)$, $\forall x \in I : h(x) \neq 0$

Beh.: • Thè.:

$$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h^2(x)} \quad \text{in} \quad \bullet \quad \text{dans } I$$

Spezialfall: • *Cas spécial:* $f(x) = \frac{1}{h(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{(1)' \cdot h(x) - 1 \cdot h'(x)}{h^2(x)} = \frac{-h'(x)}{h^2(x)}$

Korollar: • Corollaire: **Vor.: • Hyp.:**

$$f(x) = \frac{1}{h(x)}, \quad h \in \mathcal{D}^{(1)}(I), \quad \forall x \in I : h(x) \neq 0$$

Beh.: • Thè.: $f'(x) = -\frac{h'(x)}{h^2(x)} \quad \text{in} \quad \bullet \quad \text{dans } I$

Bsp.: • Exemple: $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \Rightarrow (x^{-n})' = -\frac{(x^n)'}{x^{2n}} = -\frac{(n \cdot x^{n-1})'}{x^{2n}} = (-n) \cdot x^{-(n+1)}$

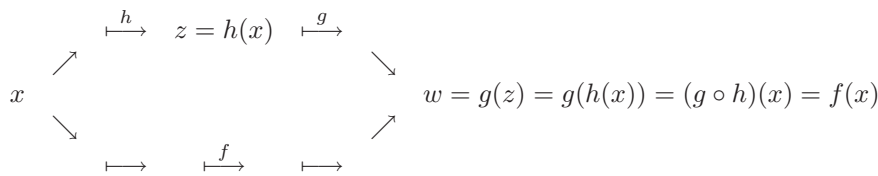
Bemerkung: • **Remarque:** Es ist somit: • *Il est donc:* $(x^{-n})' = (-n) \cdot x^{-n-1}$

1. Beispiel: • **Exemple 1:** Mit Hilfe der Quotientenregel können wir nun auch den Tangens (u.s.w.) differenzieren: • *A l'aide de la règle du quotient nous pouvons maintenant calculer la dérivée de la tangente:*

$$\begin{aligned} (\tan(x))' &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)' = \frac{(\sin(x))' \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (\cos(x))'}{\cos^2(x)} = \\ &= \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} \end{aligned}$$

Kettenregel — Règle conjointe

Studierte: • *Etudier:*



Es gilt: • *Il vaut:* $DQ = \frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}$, $x \rightarrow x_0 \Rightarrow z \rightarrow z_0$

$$\Rightarrow \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \left(\frac{dg}{dz} \Big|_{z=z_0=h(x_0)} \right) \cdot \frac{dh}{dx} \Big|_{x=x_0}$$

Regel: • **Règle:** **Kettenregel** • **Règle conjointe**

Vor.: • **Hyp.:**

$$f(x) = g(h(x)), \quad f, h \in \mathcal{D}^{(1)}(I), \quad g \in \mathcal{D}^{(1)}(h(I))$$

Beh.: • **Thè.:**

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dg(h(x))}{dx} = \left(\frac{dg(z)}{dz} \Big|_{z=h(x)} \right) \cdot \frac{dh(x)}{dx}$$

Definition: • **Définition:**

$g(x)$ heisst hier **äussere Funktion**, $h(x)$ hingegen **innere Funktion**. Entsprechend heisst $g'(x)$ **äussere Ableitung** und $h'(x)$ **innere Ableitung**

• $g(x)$ s'appelle **fonction extérieure**, $h(x)$ par contre **fonction intérieure**. Par correspondance $g'(x)$ s'appelle **dérivée extérieure** et $h'(x)$ **dérivée intérieure**.

1. Beispiel: • **Exemple 1:** $f(x) = \sin^2(x) = h(x)^2 = z^2$ ($h(x) = \sin(x)$, $g(z) = z^2$)

Wir wissen von oben: • *Nous savons déjà:* $f'(x) = (\sin^2(x))' = 2 \sin(x) \cdot \cos(x)$

Nun können wir auch anders rechnen: • *Maintenant nous pouvons calculer aussi de façon différente:*

$$f'(x) = \left(\frac{dz^2}{dz} \Big|_{z=\sin(x)} \right) \cdot \frac{d \sin(x)}{dx} = 2z \cdot \cos(x) = 2 \sin(x) \cdot \cos(x)$$

Andererseits ist aber hier: • *D'autre part on a ici:* $f(x) = \sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$

$$\Rightarrow 2 \sin(x) \cdot \cos(x) = f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = (1)' - (\cos^2(x))' = -(\cos^2(x))' = -\frac{dz^2}{dz} \Big|_{z=\cos(x)} \cdot \frac{d \cos(x)}{dx}$$

$$\begin{aligned}
&= -2z|_{z=\cos(x)} \cdot \frac{d \cos(x)}{dx} = -2 \cos(x) \cdot \frac{d \cos(x)}{dx} \\
&\Rightarrow 2 \sin(x) \cdot \cos(x) = -2 \cos(x) \cdot \frac{d \cos(x)}{dx} \Rightarrow \frac{d \cos(x)}{dx} = -\sin(x)
\end{aligned}$$

2. Beispiel: • **Exemple 2:** $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) = \sin(z)$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{df(z)}{dz} \cdot \frac{dz(x)}{dx} = \frac{d \sin(z)}{dz} \cdot \frac{d \omega x + \varphi}{dx} = \cos(z) \cdot \omega = \omega \cdot \cos(\omega x + \varphi)$$

Korollar: • **Corollaire:** $(\cos(x))' = -\sin(x) \quad (\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$

Ableitung der Umkehrfunktion — Dérivée de la fonction inverse

Mit Hilfe der Kettenregel ist es jetzt einfach, Umkehrfunktionen abzuleiten. Betrachte:

• *A l'aide de la règle conjointe il est maintenant facile de calculer la dérivée des fonctions inverses. Etudier:*

$$\begin{aligned}
z = f^{-1}(x), \quad f^{-1}(f(z)) = (f^{-1} \circ f)(z) = \text{Id}(z) = z, \quad z \xrightleftharpoons[f^{-1}]{f} x \\
\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 = \frac{df^{-1}(f(z))}{dz} = \frac{df^{-1}(x)}{dx} \Big|_{x=f(z)} \cdot \frac{d(f(z))}{dz} \Big|_{z=f^{-1}(x)} \Rightarrow \frac{df(x)^{-1}}{dx} = \frac{1}{\frac{d(f(z))}{dz} \Big|_{z=f^{-1}(x)}}
\end{aligned}$$

Regel: • **Règle:**
$$\frac{df(x)^{-1}}{dx} = \frac{1}{\frac{d(f(z))}{dz} \Big|_{z=f^{-1}(x)}}$$

Mit dieser Regel können wir jetzt z.B. Wurzelfunktionen differenzieren:

• *Maintenant nous pouvons calculer les dérivées de racines à l'aide de cette règle:*

Bsp.: • **Exemple:** Sei • *Soit* $x = f(z) = z^n, \quad z = f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{d(x^{\frac{1}{n}})}{dx} &= \frac{1}{\frac{dz^n}{dz} \Big|_{z=x^{\frac{1}{n}}}} = \frac{1}{n \cdot z^{n-1} \Big|_{z=x^{\frac{1}{n}}}} = \frac{1}{n \cdot (x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot (x^{-\frac{1}{n}})^{n-1} = \frac{1}{n} \cdot x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} \\
\Rightarrow (x^{\frac{1}{n}})' &= \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}
\end{aligned}$$

Der Witz des Tages: • **Le gag du jour:** $\frac{f'}{f} = \frac{\cdot'}{\cdot}$

(Gefunden anlässlich der Korrektur einer Arbeit.) • *(Trouvé lors de la correction d'un travail.)*

Mit der Kettenregel finden wir jetzt allgemeiner:

• *A l'aide de la règle conjointe nous trouvons maintenant:*

$$\begin{aligned}
f(x) = \sqrt[q]{x^p} = x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}} \Rightarrow (\sqrt[q]{x^p})' = ((x^p)^{\frac{1}{q}})' = \frac{dz^{\frac{1}{q}}}{dz} \Big|_{z=x^p} \cdot \frac{dx^p}{dx} = \frac{1}{q} \cdot (x^p)^{\frac{1}{q}-1} \cdot p \cdot x^{p-1} \\
= \frac{p}{q} \cdot x^{p(\frac{1}{q}-1)+(p-1)} = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1} \Rightarrow (x^{\frac{p}{q}})' = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1}
\end{aligned}$$

Korollar: • **Corollaire:****Vor.:** • **Hyp.:**Sei • *Soit* $\sqrt[q]{x^q} = x^{\frac{p}{q}}$ definiert • *défini***Beh.:** • **Thè.:** $(x^{\frac{p}{q}})' = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1}$ **Konsequenz:** • **Conséquence:** In allen betrachteten Fällen haben wir bis jetzt die folgende Regel gefunden: • *Dans tous les cas considérés nous avons trouvé la règle suivante:* $f(x) = x^\alpha \Rightarrow f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ **Problem:** • **Problème:**Gilt diese Regel auch für • *Est-ce que cette règle vaut aussi pour* $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \notin \mathbb{Q}$?

Die Frage ist zu bejahen. Anschaulich kann man sich der Sache durch das Argument nähern, dass wir eine irrationale Zahl $r = \alpha \in \mathbb{R}, r \notin \mathbb{Q}$ durch rationale Zahlen $r_n = \alpha_n$ beliebig genau annähern können. $f'_n(x) = r_n x^{r_n-1}$ nähert sich dann beliebig genau an $r x^{r-1}$ an. Da sich die betrachteten Kurven mitsamt der Tangenten aus Erfahrung bei diesem Prozess stetig verhalten, ist stark zu vermuten, dass $r x^{r-1} = (x^r)'$ gilt. Um den Rahmen zu wahren, lassen wir hier den exakten Beweis weg.

• *Il faut répondre oui. L'argument suivant facilite la compréhension: On peut approximer un nombre irrationnel $r = \alpha \in \mathbb{R}, r \notin \mathbb{Q}$ par des nombres rationnels $r_n = \alpha_n$ aussi exactement qu'on veut. $f'_n(x) = r_n x^{r_n-1}$ approxime aussi exactement qu'on veut à $r x^{r-1}$. Comme les courbes en question et aussi les tangentes se comportent de manière continue à ce processus, comme on sait par l'expérience, on a la forte supposition qu'il est $r x^{r-1} = (x^r)'$. Pour garder le cadre ce cours, nous laissons tomber la preuve exacte.*

3.2.4 Ableitung wichtiger Funktionen — Dérivées de fonctions importantes

Plausibilitätsbetrachtung — Dédution de façon plausibleSei • *Soit* $n \cdot x = y, x = \text{const.}, n \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow \infty \rightsquigarrow n = \frac{y}{x}$ Bekannt: • *On sait:* $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n \Rightarrow e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} ((1 + \frac{1}{n})^n)^x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^{n \cdot x} = \lim_{y \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{y})^y$ Angenommen, man könnte die Limesbildung bei der Zahl e mit der Limesbildung bei der Ableitung vertauschen, so müsste gelten:• *Supposons qu'on puisse échanger la formation de la valeur limite du nombre e avec la formation de la valeur limite quand on calcule la dérivée. On devait donc conclure:*

$$(e^x)' = (\lim_{y \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{y})^y)' = \lim_{y \rightarrow \infty} ((1 + \frac{x}{y})^y)' = \lim_{y \rightarrow \infty} y \cdot (1 + \frac{x}{y})^{y-1} \cdot (1 + \frac{x}{y})' = \lim_{y \rightarrow \infty} y \cdot (1 + \frac{x}{y})^{y-1} \cdot \frac{1}{y} = \lim_{y \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{y})^{y-1} \cdot \frac{1 + \frac{x}{y}}{1 + \frac{x}{y}} = \lim_{y \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{y})^y \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{y}} = \lim_{y \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{y})^y \cdot \frac{1}{1 + 0} = \lim_{y \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{y})^y = e^x \Rightarrow (e^x)' = e^x$$

Vermutung: • **Hypothèse:** $(e^x)' = e^x$ **Ableitung des natürlichen Logarithmus — Dérivée du logarithme naturel**Sei • *Soit* $f(x) = y = \ln(x), x_0 > 0, \frac{\Delta x}{x_0} = \gamma, \frac{1}{\gamma} = \alpha$

Es gilt: • *Il vaut:* $DQ = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln(x) - \ln(x_0)}{x - x_0} = \frac{\ln(\frac{x}{x_0})}{x - x_0} = \frac{\ln(\frac{x_0 + \Delta x}{x_0})}{\Delta x} = \frac{\ln(1 + \frac{\Delta x}{x_0})}{x_0 \cdot \frac{\Delta x}{x_0}} =$
 $= \frac{1}{x_0} \cdot \frac{\ln(1 + \frac{\Delta x}{x_0})}{\frac{\Delta x}{x_0}} \Big|_{\frac{\Delta x}{x_0} = \gamma} = \frac{1}{x_0} \cdot \frac{\ln(1 + \gamma)}{\gamma} = \frac{1}{x_0} \cdot \ln((1 + \gamma)^{\gamma^{-1}}) = \frac{1}{x_0} \cdot \ln((1 + \frac{1}{\alpha})^{(\alpha)})$

Betrachte den Fall • *Considérer le cas* $\alpha > 0$, z.B. • *p.ex.* $\alpha = n \in \mathbb{N}$:

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} DQ = \lim_{\gamma \rightarrow 0} DQ = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} DQ = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{x_0} \cdot \ln((1 + \frac{1}{\alpha})^{(\alpha)}) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_0} \cdot \ln((1 + \frac{1}{n})^{(n)}) \Big|_{(\ln \text{ stet'cont})} = \frac{1}{x_0} \cdot \ln(\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^{(n)}) = \frac{1}{x_0} \cdot \ln(e) = \frac{1}{x_0} \cdot 1 = \frac{1}{x_0}$$

Für $\alpha < 0$ erhält man denselben Grenzwert durch die folgende Substitution:

• *Pour* $\alpha < 0$ *on obtient la même valeur limite par la substitution suivante:*

$$(1 + \frac{1}{\alpha})^{(\alpha)} \Big|_{\alpha = -\beta} = (1 + \frac{1}{-\beta})^{(-\beta)} = (1 - \frac{1}{\beta})^{(-\beta)} = (\frac{\beta - 1}{\beta})^{(-\beta)} = (\frac{\beta}{\beta - 1})^{(\beta)} = (\frac{\beta - 1 + 1}{\beta - 1})^{(\beta)}$$

$$= (1 + \frac{1}{\beta - 1})^{(\beta)} \Big|_{\rho = \beta - 1} = (1 + \frac{1}{\rho})^{(\rho + 1)} = (1 + \frac{1}{\rho})^{(\rho)} \cdot (1 + \frac{1}{\rho}) \rightarrow e \cdot 1 = e,$$

$$\alpha \rightarrow -\infty \Rightarrow \beta \rightarrow +\infty \Rightarrow \rho \rightarrow +\infty$$

Bsp.: • **Exemple:** $(\ln(|x|))' = (\ln(x \cdot \operatorname{sgn}(x)))' = \frac{1}{x \cdot \operatorname{sgn}(x)} \cdot (x \cdot \operatorname{sgn}(x))' = \frac{1}{|x|} \cdot (x \cdot \operatorname{sgn}(x))' =$
 $= \frac{1}{|x|} \cdot (1 \cdot \operatorname{sgn}(x) + x \cdot (\operatorname{sgn}(x))') = \frac{1}{|x|} \cdot (1 \cdot \operatorname{sgn}(x) + 0) = \frac{1}{|x|} \cdot \operatorname{sgn}(x) = \frac{1}{|x| \cdot \operatorname{sgn}(x)} = \frac{1}{x}$

(Für $x = 0$ ist $\ln(|x|)$ nicht definiert. Für $x \neq 0$ ist $\operatorname{sgn}(x) = \text{const.}$, d.h. $(\operatorname{sgn}(x))' = 0$. • *Pour* $x = 0$, $\ln(|x|)$ *n'est pas défini. Pour* $x \neq 0$ *il vaut* $\operatorname{sgn}(x) = \text{const.}$, *c.v.d.* $(\operatorname{sgn}(x))' = 0$.)

Regel: • **Règle:** $(\ln(|x|))' = \frac{1}{x}$

Ableitung der Exponentialfunktion — Dérivée de la fonction exponentielle

Sei • *Soit* $f(x) = \ln(x) \Rightarrow f^{-1}(x) = e^x \Rightarrow \frac{de^x}{dx} = \frac{1}{\frac{\ln(z)}{z}} \Big|_{z=e^x} = \frac{1}{\frac{1}{z}} \Big|_{z=e^x} = z \Big|_{z=e^x} = e^x$

Regel: • **Règle:** $(e^x)' = e^x$

1. Beispiel: • Exemple 1:

$$(x^2 e^{\sin(x)})' = (x^2)' e^{\sin(x)} + x^2 (e^{\sin(x)})' = 2x e^{\sin(x)} + x^2 \frac{de^z}{dz} \Big|_{z=\sin(x)} \cdot \frac{d \sin(x)}{dx} =$$

$$= 2x e^{\sin(x)} + x^2 e^{\sin(x)} \cos(x)$$

2. Beispiel: • Exemple 2: $f(x) = x^x$, $f'(x) = ?$

Idee: • *Idée:* $x = e^{\ln(x)} \Rightarrow x^x = (e^{\ln(x)})^x = e^{x \cdot \ln(x)}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{de^{x \cdot \ln(x)}}{dx} = \frac{de^y}{dy} \cdot \frac{dx \cdot \ln(x)}{dx} = e^y \cdot (1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}) = x^x \cdot \underbrace{(1 + \ln(x))}_{\rightarrow \infty}$$

$\leadsto f'$ wächst stärker als f : **Überexponentielles Wachstum.**

• *f' croît plus fortement que f: accroissement plus fort que exponentiel.*

Ableitung bei Basiswechsel — Dérivée après échange de base**Exponentialfunktion • Fonction exponentielle:**

Sei • *Soit* $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) = ?$

Benütze: • *Utiliser:* $a^x = (e^{\ln(a)})^x = e^{x \cdot \ln(a)} = e^z \Big|_{z=x \cdot \ln(a)}$
 $\Rightarrow f'(x) = \frac{d e^z}{d z} \cdot \frac{d x \cdot \ln(a)}{d x} = e^z \cdot \ln(a) = a^x \cdot \ln(a)$

Logarithmusfunktion • Fonction logarithme:

Sei • *Soit* $f(x) = \log_a(x)$, $a \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) = ?$

Benütze: • *Utiliser:* $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \ln(x)$ ($a = e \Rightarrow \ln(a) = 1$)
 $\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$

Trigonometrische Funktionen, Arcus-Funktionen — Fonctions trigonométriques, fonctions circulaires réciproques

Die trigonometrischen Funktionen wurden in 2.2.4 auf Seite 25 besprochen.

• *Les fonctions trigonométriques ont été discutées dans 2.2.4 à la page 25.*

Analog zu den hyperbolischen Funktionen gilt der Satz:

• *Analogiquement aux fonctions hyperboliques il vaut:*

Satz: • Théorème: $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

Wir wissen bereits: • *Nous savons déjà*

Regeln: • Règles: $\sin'(t) = \cos(t)$, $\cos'(t) = -\sin(t)$,
 $\tan'(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}$, $\cot'(t) = -\frac{1}{\sin^2(t)}$

Über die Monotoniebereiche der trigonometrischen Funktionen wissen wir wegen ihrer geometrischen Bedeutung Bescheid. (Z.B. wenn in einem rechtwinkligen Dreieck der Winkel an einer fixgehaltenen Kathete monoton wächst, so wächst damit die gegenüberliegende Kathete und damit der Sinus u.s.w.). In den bekannten Monotoniebereichen lassen sich somit die Umkehrfunktionen definieren. Üblicherweise wählt man als Standardbereich nach Möglichkeit das Intervall, in dem der Ursprung liegt oder jenes Intervall, in dem der Ursprung am Anfang liegt.

• *Nous connaissons la monotonie des fonctions trigonométriques par leurs significations géométriques. (P.ex si dans un triangle rectangulaire l'angle à un côté fixe augmente, le côté à l'opposition augmente aussi et donc le sinus augmente aussi.) Dans les intervalles de monotonie connus on peut donc définir les fonctions inverses. De coutume on choisit comme domaine de définition standard l'intervalle dans lequel est située l'origine ou bien l'intervalle dans lequel l'origine se trouve à gauche.*

Definition: • Définition:

Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen heißen **Arcusfunktionen**. • *Les fonctions inverses des fonctions trigonométriques s'appellent fonctions circulaires réciproques.*
 $\leadsto \arcsin(t)$, $\arccos(t)$, $\arctan(t)$, $\operatorname{arccot}(t)$

Der Name „arc“ kommt von „Arcus“ (lat. Bogen). • *Le nom "arc" vient de "arcus".*

Die Ableitungen der Umkehrfunktionen errechnet man mit der Regel für die Umkehrfunktion:

• *On calcule les dérivés des fonctions inverses à l'aide de la règle pour les fonctions inverses:*

Regeln: • **Règles:**

$$\arcsin'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \arccos'(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}},$$

$$\arctan'(t) = \frac{1}{1+t^2}, \quad \operatorname{arccot}'(t) = -\frac{1}{1+t^2}$$

Hyperbolische Funktionen, Area-Funktionen — Fonctions hyperboliques, aréa-fonction

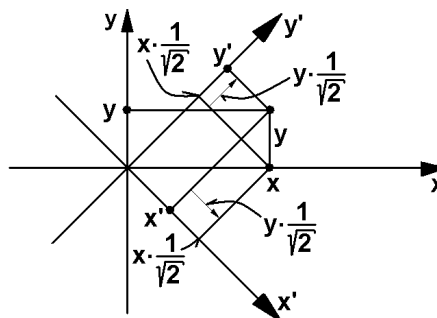
Von 2.2.4 auf Seite 28 wissen wir: • *Nous savons de 2.2.4 à la page 28:*

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \quad \coth(x) := \frac{1}{\tanh(x)}$$

Substituiere: • *Substituer:*

$$x' = (x - y) \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y' = (x + y) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Aus der Skizze erkennt man, dass die (x', y') die Koordinaten von $P(x, y)$ in einem um $-\frac{\pi}{4}$ gedrehten Koordinatensystem sind. • *On voit dans l'esquisse que (x', y') sont les coordonnées de $P(x, y)$ dans un système de coordonnées tourné de $-\frac{\pi}{4}$ degrés.*



Sei • *Soit* $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} := x, \quad \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} := y \Rightarrow x^2 - y^2 = \cosh^2(t) - \sinh^2(t)$

$$= \frac{e^{2t} + 2e^t e^{-t} + e^{-2t}}{4} - \frac{e^{2t} - 2e^t e^{-t} + e^{-2t}}{4} = \frac{2e^t e^{-t} + 2e^t e^{-t}}{4} = \frac{2 + 2}{4} = 1.$$

Andererseits findet man mit • *D'autre part on trouve avec $x^* =: \sqrt{2}x', y^* =: \sqrt{2}y'$:*

$$x' \cdot y' = \frac{1}{2} (x + y) \cdot (x - y) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} + \frac{e^t - e^{-t}}{2} \right) \cdot \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} - \frac{e^t - e^{-t}}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2e^t}{2} \right) \cdot \left(\frac{2e^{-t}}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2} \frac{1}{x'}, \quad y^* = \frac{1}{x^*} \rightsquigarrow \text{Normalhyperbel im gedrehten Koordinatensystem}$$

• *... Hyperbole dans le système de coordonnées tourné.*

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$x = \cosh(t), \quad y = \sinh(t), \quad x^* = x + y, \quad y^* = x - y$$

Beh.: • **Thè.:**

$$\triangleright x^2 - y^2 = \cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$$

$$\triangleright y^* = \frac{1}{x^*}$$

Für die Ableitungen errechnet man: • *Pour les dérivées on calcule:*

Regeln: • **Règles:** $\sinh'(t) = \cosh(t), \quad \cosh'(t) = \sinh(t),$
 $\tanh'(t) = \frac{1}{\cosh^2(t)}, \quad \coth'(t) = -\frac{1}{\sinh^2(t)}$

Durch Zurückführen auf die e -Funktion gelingt es, die Monotonie der hyperbolischen Funktionen zu klären. • *En s'appuyant sur la fonction exponentielle, on arrive à clarifier la monotonie des fonctions hyperboliques.*

Man findet • *On trouve:*

Satz: • **Théorème:** $\sinh(t)$ ist in $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend • $\sinh(t)$ croît strictement monotonement dans $\mathbb{R}$.
 $\cosh(t)$ ist in $\mathbb{R}_0^+$ streng monoton wachsend. Der Graph ist symmetrisch zur y -Achse. • $\cosh(t)$ croît strictement monotonement dans $\mathbb{R}_0^+$. Le graphe est symétrique à l'axe y .

Somit existieren in den Monotoniebereichen die Umkehrfunktionen. • *Donc les inverses existent dans les intervalles où les fonctions sont monotones.*

Definition: • **Définition:** Die Umkehrfunktionen der hyperbolischen Funktionen heissen **Areafunktionen** • *Les fonctions inverses des fonctions hyperboliques s'appellent aréa-fonctions (fonctions hyperboliques inverses)*
 $\leadsto \operatorname{arsinh}(t), \operatorname{arcosh}(t) \dots$

Der Name kommt von einer Beziehung im Zusammenhang mit einer durch die Hyperbel definierte Fläche. • *Le nom vient d'un rapport dans le cadre d'une surface définie par l'hyperbole.*

Die Ableitungen der Umkehrfunktionen errechnet man auch hier mit der Regel für die Umkehrfunktion (vgl. Lit.).

• *On calcule les dérivées des fonctions inverses à l'aide de la règle pour les fonctions inverses (voir litt.).*

3.2.5 Tangenten und Normalen an Graphen — Tangentes et normales aux graphes

Geg.: • **Donné:**

Graph von • *Graphe de $f(x)$.*

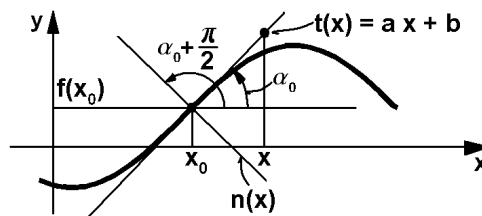
Ges.: • **Trouver:**

Tangente, Normale • *Tangente, normale $t(x)$,*

$n(x), t(x) = ax + b$

$$\begin{aligned} \tan(\alpha_0) &= f'(x_0) = a = \\ &= \frac{t(x) - t(x_0)}{x - x_0} = \frac{t(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ \Rightarrow t(x) &= f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan(\alpha_0 + \frac{\pi}{2}) &= -\cot(\alpha_0) = -\frac{1}{\tan(\alpha_0)} = -\frac{1}{f'(x_0)} = \frac{n(x) - n(x_0)}{x - x_0} = \frac{n(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ \Rightarrow n(x) &= -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0) \quad (f'(x_0) \neq 0) \end{aligned}$$



Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:** $f \in \mathcal{D}^{(1)}x_0$

Beh.: • **Thè.:**

Tangente in • *Tangente* à x_0 : $t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Normale in • *Normale* à x_0 : $n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$

3.2.6 Der Mittelwertsatz — Le théorème des accroissements finis

Sei • *Soit* $f(x) = \begin{cases} x^3 & x \in \mathbb{R}_0^+ \\ x^2 & x \in \mathbb{R}^- \end{cases} \quad \text{stet'cont}(\mathbb{R}) \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \in \mathbb{R}_0^+ \\ 2x & x \in \mathbb{R}^- \end{cases} \quad \text{stet'cont}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow f''(x) = \begin{cases} 6x & x \in \mathbb{R}_0^+ \\ 2 & x \in \mathbb{R}^- \end{cases} \rightsquigarrow \text{unstetig in } 0 \quad \bullet \text{ non continue à } 0. \left(\lim_{x \uparrow 0} = 0 \neq 2 = \lim_{x \downarrow 0} \right)$

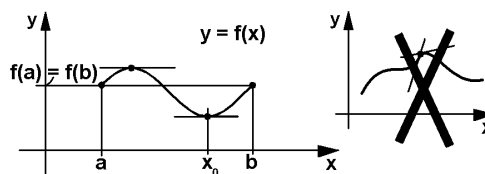
Daher ist die folgende Abkürzung sinnvoll: • *C'est pourquoi l'abréviation suivante a un sens:*

Definition: • **Définition:** $f(x)$ n mal stetig differenzierbar in x_0 resp. I :
 • $f(x)$ *dérivable* n fois *continûment* à x_0 resp. *dans* I :
 $\Leftrightarrow$
 $f^{(n)}(x)$ existiert dort und $f^{(n)}(x)$ ist stetig
 • $f^{(n)}(x)$ *y existe et* $f^{(n)}(x)$ *est continue.*

Schreibweise: • **Façon d' écrire:**

$f \in \mathcal{C}^{(n)}(x_0), f \in \mathcal{C}^{(n)}(I)$ (analog zu diff'bar: • *analogue à dérivable:* $f \in \mathcal{D}^{(n)}(x_0), \mathcal{D}^{(n)}(I)$)

Stetig diff'bar im Intervall I bedeutet, dass die Tangente nicht schlagartig die Richtung ändert. Der Satz von Rolle sagt aus, dass eine in einem Intervall stetig diff'bare Funktion dort mindestens in einem Punkt eine horizontale Tangente besitzt, wenn an den Intervallenden die Funktionswerte auf gleicher Höhe liegen.



• *Continûment dérivable dans un intervalle signifie que la tangente n'y change pas la direction de façon abrupte. Le théorème de Rolle dit qu'une telle fonction y possède au moins une tangente horizontale, si les valeurs de la fonction sont les mêmes aux points terminus de l'intervalle.*

Satz: • **Théorème:** **Satz von Rolle** • **Théorème de Rolle**

Vor.: • **Hyp.:**

$I = (a, b), f \in \mathcal{C}^{(1)}(I), f \in \mathcal{C}^{(0)}(\bar{I}), f(a) = f(b)$

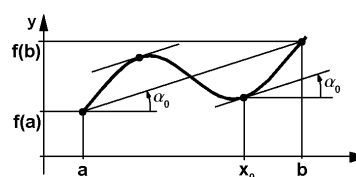
Beh.: • **Thè.:** $\exists_{x_0 \in I} : f'(x_0) = 0$

Im Falle $f(x) = \text{const.}$ (d.h. $f'(x) \equiv 0$) gibt es nichts zu beweisen. Im andern Fall ($f'(x) \not\equiv 0$, $f(x) \neq \text{const.}$) führt man den Beweis indirekt. Sei z.B. $f'(x) > 0$ in einem Punkt rechts von a . Da $f'(x) = 0$ ausgeschlossen ist und $f'(x)$ stetig ist, muss auf ganz I gelten: $f'(x) > 0$ (Zwischenwerteigenschaft stetiger Funktionen, 2.4.5 Seite 62). Dann aber müsste $f(x)$ in I streng monoton wachsen, $f(b)$ müsste grösser sein als $f(a)$: Widerspruch.

• Dans le cas $f(x) = \text{const.}$ (c.v.d. $f'(x) \equiv 0$) il n'y a rien à prouver. Dans l'autre cas ($f'(x) \not\equiv 0$, $f(x) \neq \text{const.}$) on fait la preuve de façon indirecte. Soit p.ex. à un point à droite de a : $f'(x) > 0$. Comme $f'(x) = 0$ est exclu et $f'(x)$ est continue, il vaut sur I : $f'(x) > 0$ (théorème de la valeur intermédiaire (condition de Darboux) pour des fonctions continues, 2.4.5 page 62). Par conséquent $f(x)$ devrait être croissante de façon monotone et stricte dans tout I , $f(b)$ ne pourrait pas être plus grande que $f(a)$: Contradiction.

Der **Mittelwertsatz der Differentialrechnung** ist eine Verallgemeinerung dieses Sachverhaltes.

• **Le théorème des accroissements finis** du calcul différentiel est une généralisation de ce fait.



Satz: • **Théorème:** **Mittelwertsatz** • **Le théorème des accroissements finis**
Vor.: • **Hyp.:**

$$I = (a, b), \quad f \in \mathcal{C}^{(1)}(I) \wedge f \in \mathcal{C}^{(0)}(\bar{I}), \quad \alpha_0 = \arctan\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)$$

Beh.: • **Thè.:** $\exists_{x_0 \in I} : f'(x_0) = \tan(\alpha_0)$

Er sagt aus, dass im Graphen einer stetig diff'baren Funktion irgendwo im Intervall I ein Punkt x_0 existiert, in dem die Tangentensteigung gleich der Steigung der Sehne zwischen den Endpunkten des Graphen ist.

• Il dit que dans le graphe d'une fonction continûment dérivable il existe un certain point x_0 dans l'intervalle I où la pente de la tangente est égale à la pente de la bisécante (corde) entre les points finaux du graphe.

Die Sehne ist durch die folgende Funktion gegeben: • La bisécante est donnée par la fonction suivante:

$$s(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x + \left(f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot a\right)$$

$\leadsto f(x)$ und $s(x)$ haben in a und b gleiche Funktionswerte. • $f(x)$ et $s(x)$ ont les mêmes valeurs de fonction à a et à b .

$\leadsto$ Die Differenzfunktion $f(x) - s(x)$ erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Rolle:

• La fonction de différence $f(x) - s(x)$ satisfait les hypothèses du théorème de Rolle:

$$\exists_{x_0 \in I} : f'(x_0) - s'(x_0) = 0. \quad \leadsto \text{In } x_0 \text{ gilt: } \bullet \text{ A } x_0 \text{ il vaut: } f'(x_0) = s'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

3.3 Extremalprobleme — Problèmes d'extréma

3.3.1 Extrema — Extréma

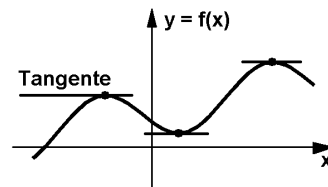
Begriffe: • **Notions:** In 2.4.7 auf Seite 64 haben wir die Begriffe **lokales** und **globales Minimum** und **Maximum** sowie **Randminimum** und **Randmaximum** besprochen. Man spricht auch von lokalen

beziehungsweise globalen **Extrema** u.s.w. $\leadsto$ Extr'loc, Extr'glob.

• Dans 2.4.7 à la page 64 nous avons discuté les notions **minimum** et **maximum local** et **global** et aussi **maximum** resp. **minimum au bord**. On dit aussi **extrémum local** et **global** etc.. $\leadsto$ Extr'loc, Extr'glob.

Sei • Soit $f \in \mathcal{C}^1(I)$.

Man sieht sofort, dass in einer lokalen oder globalen Extremwertstelle $x_0 \in (a, b) = I$ die Tangente an den Graphen horizontal sein muss: $f'(x_0) = 0$. • On voit tout de suite qu'à une place d'extrémum local ou global $x_0 \in (a, b) = I$ la tangente au graphe doit être horizontale: $f'(x_0) = 0$.



Da globale immer auch lokale Extremwertstellen sind, können wir formulieren: • Comme les extrémums globaux sont toujours aussi des extrémums locaux, nous pouvons dire:

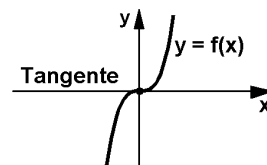
Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$f \in \mathcal{C}^1(I), \text{ Extr'loc}(x_0), x_0 \in I$$

Beh.: • **Thè.:** $f'(x_0) = 0$

Die Umkehrung des Satzes gilt nicht immer.

• A l'inverse, le théorème n'est pas toujours valable.



Bsp.: • **Exemple:** $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$
Tangente horizontale, kein Extremum (**Terrassenpunkt**). • Tangente horizontale, pas d'extremum ('point de terrasse', point d'inflexion)

Sei • Soit: $f \in \mathcal{C}^2(I)$, $f'(x_0) = 0$, $x_0 \in I$.

$$f''(x_0) < 0 \Rightarrow$$

$f'(x)$ fällt in • décroissant dans $U_\delta(x_0) \Rightarrow$

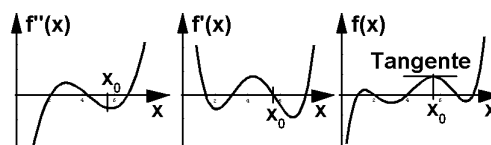
$f'(x) > 0$ links von • à gauche de x_0 ,

$f'(x) < 0$ rechts von • à droite de $x_0 \Rightarrow$

$f(x)$ steigt links von, fällt rechts von x_0

• $f(x)$ croissant à gauche de, décroissant à droite de x_0

$\leadsto$ lokales Maximum • maximum local.



$$f''(x_0) > 0 \Rightarrow$$

$f'(x)$ wächst in • croissant dans $U_\delta(x_0) \Rightarrow$

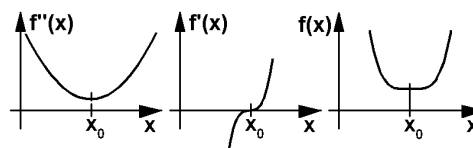
$f'(x) < 0$ links von • à gauche de x_0 ,

$f'(x) > 0$ rechts von • à droite de $x_0 \Rightarrow$

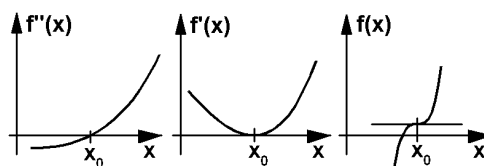
$f(x)$ fällt links von, wächst rechts von x_0

• $f(x)$ décroissant à gauche de, croissant à droite de x_0

$\leadsto$ lokales Minimum • minimum local

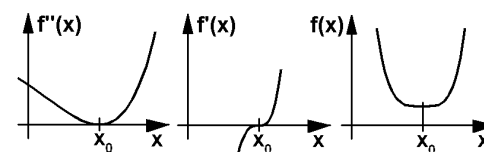


$f''(x_0) = 0$, $f''(x)$ wächst (fällt) in
 • *croissant (décroissant) dans $U_\delta(x_0)$* $\Rightarrow$
 $f'(x)$ hat Minimum (Maximum) in
 • *a minimum (maximum) à x_0*
 $\Rightarrow f$ hat in x_0 horizontale Tangente
 • *f a à x_0 une tangente horizontale:*
 f hat in x_0 einen Terrassenpunkt • *f a à x_0
 un 'point de terrasse' (d'inflexion)*



Analog findet man: • *On trouve analogue-ment:*

$f''(x_0) = 0$, $f''(x) \geq (\leq) 0$ ($U_\delta(x_0)$)
 $\Rightarrow f(x)$ hat Minimum (Maximum) in
 • *a minimum (maximum) à x_0*



Regel: • **Règle:**

Vor.: • **Hyp.:**

$f \in \mathcal{C}^{(2)}(I)$, $f'(x_0) = 0$, $x_0 \in I$

Beh.: • **Thè.:**

- $\triangleright f''(x_0) < 0 \leadsto$ lokales Maximum • *maximum local*
- $\triangleright f''(x_0) > 0 \leadsto$ lokales Minimum • *minimum local*
- $\triangleright f''(x_0) = 0 \leadsto$ Weitere Untersuchung notwendig: Terrassenpunkt, lokales Minimum oder Maximum • *Il faut examiner encore: 'Point de terrasse', minimum local ou maximum local*

Bemerkung: • **Remarque:**

Extremwerte haben grosse praktische Bedeutung. Man trifft die Problematik überall.: Maximale Kosten, Energieverbrauch, Gewicht, Belastung u.s.w.. • *Les valeurs extrêmes sont très importantes en pratique: Frais maximaux, consommation d'énergie, poids, pression etc..*

3.3.2 Wendepunkte — Points d'inflexion

Terrassenpunkte sind sogenannte **Wendepunkte** mit horizontaler **Wendetangente**. Dort wendet die **Steigungstendenz**, d.h. die Ableitung f' wechselt das Steigungsverhalten. • *Les points de terrasse sont des points d'inflexion, ç.v.d. des points qui possèdent une tangente d'inflexion horizontale. Là la tendance de pente change, ç.v.d. la dérivée f' change le comportement de croissance.*

Definition: • **Définition:**

- f hat einen **Wendepunkt** (WP'PdI) in x_0
- f a un **point d'inflexion** (WP'PdI) à x_0
- : $\Leftrightarrow f'$ hat ein Extremum in x_0 • f' a un **extrémum** à x_0

(Spezialfall: WP'PdI mit $f'(x_0) = 0$: Terrassenpunkt.

• *Cas spécial: WP'PdI avec $f'(x_0) = 0$: Point de terrasse.*)

Aus unseren bisherigen Kenntnissen ergibt sich sofort die notwendige Bedingung für einen WP'PdI:

• *De nos connaissances accumulées jusqu'à présent nous pouvons déduire la condition nécessaire pour un WP'PdI:*

Satz: • Théorème: Vor.: • Hyp.: f hat WP'PdI in x_0 • a WP'PdI à x_0
 Beh.: • Thè.: $f''(x_0) = 0$

Wir orientieren uns jetzt für die nachstehenden Definitionen an den folgenden Graphiken:

• *Nous nous orientons maintenant aux graphiques suivants pour les définitions qui suivent:*



Definition: • Définition:

Der Graph C der Funktion f heisst **streng konkav** oder **streng konkav von oben** (resp. **streng konvex** oder **streng konvex von unten**) genau dann wenn der Steigungswinkel $\alpha(x)$ mit x wächst (resp. fällt).

• *Le graphe C de la fonction f s'appelle **concave** ou **concave par en dessus** (resp. **convexe** ou **convexe par en dessous**) de façon **stricte** exactement quand l'angle de la pente $\alpha(x)$ croît avec x (resp. décroît).*

Bemerkung: • Remarque:

Es gibt Autoren, die die Begriffe „konkav“ und „konvex“ in vertauschter Form verwenden. In diesem System ist f konvex resp. **konvex von oben** für $f''(x) > 0$ und konkav resp. **konkav von unten** für $f''(x) < 0$. Wenn man aber die Begriffe konsequent immer gleich verwendet, kann nichts passieren.

• *Il y a des auteurs qui utilisent les notions "concave" et "convexe" de manière intervertie. Dans ce système, f est convexe ou convexe par en dessus pour $f''(x) > 0$ et concave ou concave par en dessous pour $f''(x) < 0$. Si on applique ces notions de façon logique, conséquent et ferme, rien ne peut se passer.*

Es gilt z.B.: • *Il vaut p.ex.:*

$[C \text{ streng konkav in } x_0] \Leftrightarrow [C \text{ strictement concave à } x_0] \Leftrightarrow [\alpha(x) \text{ wächst in } x_0] \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow [\tan(\alpha(x)) \text{ wächst in } x_0] \Leftrightarrow f''(x_0) > 0.$

Ebenso für konvex. • *De même pour convexe.*

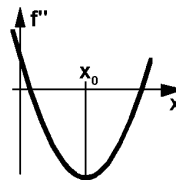
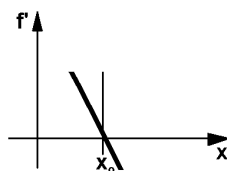
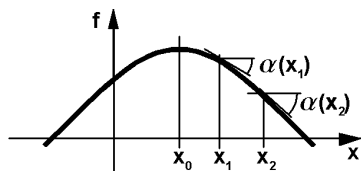
Konsequenz: • **Conséquence:** Bei einem WP geht im Graph ein streng konkaves Verhalten in ein streng konkaves über (oder ein streng konkaves in ein streng konvexes). • *A un point d'inflexion un comportement strictement convexe passe en un comportement strictement concave (ou bien strictement concave en strictement convexe).*

Aus den nachfolgenden Graphiken ist der Zusammenhang zwischen dem Verhalten von f , f' und f'' ersichtlich: • *Du graphe suivant on voit bien le rapport entre f , f' et f'' :*

A.

 $\alpha(x)$ fällt: C konvex• $\alpha(x)$ décroissant: C convexe,lokales Max. • *max. local* $f'(x)$ fällt• $f'(x)$ décroissant $f'(x_0) = 0$

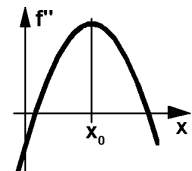
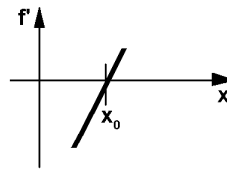
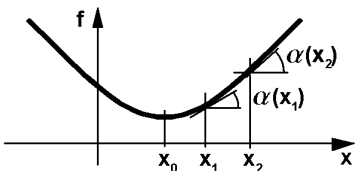
$$f''(x) < 0$$

 $\leadsto$ 

B.

 $\alpha(x)$ wächst: C konkav• $\alpha(x)$ croissant: C concave,lokales Min. • *min. local* $f'(x)$ wächst• $f'(x)$ croissant $f'(x_0) = 0$

$$f''(x) > 0$$

 $\leadsto$ 

C.

 C konvex $\leadsto$ konkav• C convexe $\leadsto$ concave,

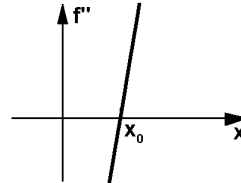
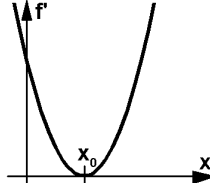
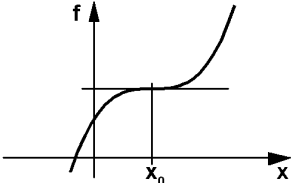
Terrassenpunkt

• *point de terrasse*

$$f'(x) \geq 0, \quad f'(x_0) = 0$$

$$f''(x) < 0 \leadsto f''(x_0) = 0$$

$$\leadsto f''(x) > 0$$

 $\leadsto$ 

D.

 C konkav $\leadsto$ konvex• *concave* $\leadsto$ *convexe*,

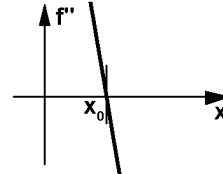
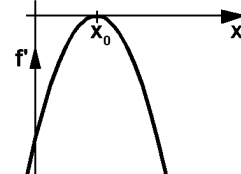
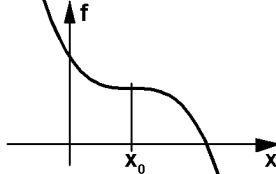
Terrassenpunkt

• *point de terrasse*

$$f'(x) \leq 0, \quad f'(x_0) = 0$$

$$f''(x) > 0 \leadsto f''(x_0) = 0$$

$$\leadsto f''(x) < 0$$

 $\leadsto$ 

E.

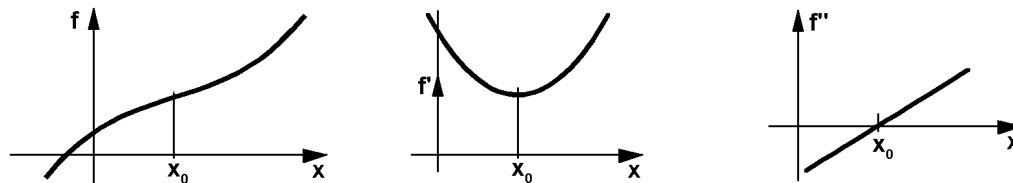
 C konvex $\leadsto$ konkav• C *convexe* $\leadsto$ *concave*,

WP'PdI

$$f'(x) > 0$$

$$f''(x) < 0 \leadsto f''(x_0) = 0$$

$$\leadsto f''(x) > 0$$

 $\leadsto$ 

F.

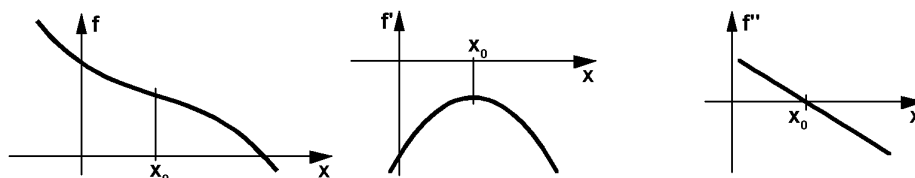
 C konkav $\leadsto$ konvex• C *concave* $\leadsto$ *convexe*,

WP'PdI

$$f'(x) < 0$$

$$f''(x) > 0 \leadsto f''(x_0) = 0$$

$$\leadsto f''(x) < 0$$

 $\leadsto$ 

3.3.3 Kurvendiskussion — Discussion de graphes

Mit den nun zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln gelingt es, zu einem relativ guten Überblick über die wichtigsten charakteristischen Eigenschaften eines Graphen zu kommen. Folgende Besonderheiten verdienen dabei spezielle Erwähnung:

• *Par les moyens à disposition nous réussissons à avoir une assez bonne vue d'ensemble sur toutes les principales qualités d'un graphe. Mais les particularités suivantes doivent être mentionnées spécialement:*

- | | |
|--|---|
| ▷ Def'bereich • <i>Domaine de définition</i> | ▷ Nullstellen • <i>Zéros</i> |
| ▷ Wertebereich • <i>Domaine de valeurs</i> | ▷ y -Achse'schnittp. • <i>Inters. av. axe y</i> |
| ▷ Stetigkeit • <i>Continuité</i> | ▷ Extremw'stellen • <i>Places d'extr.</i> |
| ▷ Periodizität • <i>Périodicité</i> | ▷ Extremwerte • <i>Extréma</i> |
| ▷ Symmetrien • <i>Symétries</i> | ▷ Terrassenpunkte • <i>Points de terrasse</i> |
| ▷ Monotonie • <i>Monotonie</i> | ▷ Wendepunkte • <i>Points d'inflexion</i> |
| ▷ Differenzierbarkeit • <i>Dérivabilité</i> | ▷ Polstellen • <i>Places de pôle</i> |
| ▷ Sprünge • <i>Sauts</i> | ▷ Beschränktheit • <i>Borne</i> |
| ▷ Isolierte Punkte • <i>Points isolés</i> | ▷ Asymptoten • <i>Asymptotes</i> |
| ▷ Knicks • <i>Coudes</i> | ▷ $ x $ gross, y ? • $ x $ grand, y ? |

Auf ein besonderes Beispiel, das alle genannten Eigenschaften zeigt, sei an dieser Stelle verzichtet, da die meisten der genannten Besonderheiten schon früher an speziellen Beispielen erläutert worden sind oder sonst noch werden. • *Nous renonçons ici à donner un exemple spécial qui montre toutes les qualités mentionnées, parce que presque toutes les spécialités mentionnées ont déjà été discutées à l'aide d'exemples spéciaux, quelques-unes seront expliquées plus tard.*

Bemerkung: • **Remarque:**

1. x_0 **Polstelle von** • **place de pôle de** $f \leadsto \lim_{x \uparrow x_0} |f(x)| = \infty \vee \lim_{x \downarrow x_0} |f(x)| = \infty$
2. $h(x)$ **Asymptote von** • **asymptote de** $f \leadsto \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x) - h(x)| = 0$

1. Beispiel: • Exemple 1:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1,$$

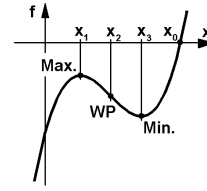
$$\text{NS'Z: } x_0 \simeq 1.75488$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = 1$$

$$f''(x) = 6x - 4 = 0, \quad x_3 = \frac{2}{3} \leadsto \quad \text{WP'PdI}$$

$$f(x_1) < 0 \leadsto \text{Max'loc},$$

$$f(x_2) > 0 \leadsto \text{Min'loc}.$$

**2. Beispiel: • Exemple 2:** $f(x) = (2x - 3) + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$

$$\leadsto \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x) - (2x - 3)| = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left| \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right| = 0 - 0 = 0 \leadsto g(x) = 2x - 3 \text{ Asympt}$$

3.4 Die Regel von Bernoulli — La règle de Bernoulli**3.4.1 Herleitung der Regel — Dédution de la règle**

Bemerkung: • Remarque: Früher hiess die Regel, um die es hier geht, auch **Regel von de l'Hospital**. Kürzlich hat man jedoch endgültig herausgefunden, dass die Regel von Bernoulli stammt, der sie an de l'Hospital verkauft hat. Dieser hat sie dann unter seinem Namen publiziert. Man staune, für was Menschen schon Geld ausgegeben haben!

• *A l'époque on appelait la règle qu'on va traiter la règle de de l'Hospital. Récemment on a trouvé finalement que par contre la règle a été trouvée par Bernoulli qui l'a vendue à de l'Hospital. Celui-ci l'a publiée sous son propre nom.*

Bsp.: • Exemple: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(e^x - 1)}{\sin(x)} = ?$

Hier hat man es mit folgendem allgemeinerem Problemtyp zu tun: • *Ici on a à faire à un type de problème plus général:*

Geg.: • Donné: $f(x), g(x): \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$

Problem: • Problème: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = ?$

Idee: • Idée: Seien • *Soient* $f, g \in \mathcal{C}^{(1)}(U_\epsilon(x_0)), \quad f(x_0) = g(x_0) = 0$

Benütze das Restfunktionslemma aus 3.2.3 auf Seite 89: • *Utiliser le lemme de la fonction du reste de 3.2.3 à la page 89:*

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)R_f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} R_f(x) = f'(x_0), \quad f(x_0) = 0 \Rightarrow f(x) = (x - x_0)R_f(x)$$

$$g(x) = g(x_0) + (x - x_0)R_g(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} R_g(x) = g'(x_0), \quad g(x_0) = 0 \Rightarrow g(x) = (x - x_0)R_g(x)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x - x_0)R_f(x)}{(x - x_0)R_g(x)} = \lim_{x \neq x_0} \frac{R_f(x)}{R_g(x)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_f(x)}{R_g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Es kann sein, dass wieder gilt: • *Il peut arriver qu'il vaut de nouveau: $f'(x_0) \neq 0 \wedge g'(x_0) \neq 0$.*

Seien • *Soient* $f, g \in \mathcal{C}^{(2)}(U_\epsilon(x_0)) \leadsto \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)} \text{ u.s.w.} \bullet \text{ etc.}$

Regel: • **Règle:** **Regel v. Bernoulli** • **Règle de Bernoulli**
Vor.: • **Hyp.:**

$$\begin{aligned} f, g &\in \mathcal{C}^{(n)}(U_\epsilon(x_0)), \\ f(x_0) &= f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \\ g(x_0) &= g'(x_0) = \dots = g^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{aligned}$$

Beh.: • **Thè.:**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

Bsp.: • **Exemple:** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^x - 1}{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3e^x - 1)'}{(\sin(x))'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^x}{\cos(x)} = \frac{3e^0}{\cos(0)} = \frac{3}{1} = 3$

3.4.2 Ausdehnung der Regel — Extension de la règle

Oben haben wir folgenden Problemtyp studiert: • *Nous venons d'étudier le genre de problème suivant:*

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0''}{0} = ?$ Manchmal treten an Stelle dieses Problems verwandte Probleme auf:

• *Des fois, au lieu d'avoir ce problème, on rencontre des problèmes semblables:*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty''}{\infty} = ? \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \infty \cdot 0'' = ? \quad \dots$$

Bsp.: • **Exemple:** $\lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln(x)}{\cot(x)} = ?$

Hier hat man es mit folgendem allgemeinerem Problemtyp zu tun: • *ici on a à faire à un type de problème plus général:*

Geg.: • **Donné:** $f(x), g(x): \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$

Nachfolgend begnügen wir uns mit einer formalen Herleitung. Es sei immer vorausgesetzt, dass die vorkommenden Limites existieren. • *Dans ce qui suit nous nous contentons d'une déduction formelle. Supposons que les limites utilisées existent.*

Seien • *Soient* $\frac{1}{f}, \frac{1}{g} \in \mathcal{C}^{(1)}(U_\epsilon(x_0)), \quad \frac{1}{f(x_0)} = \frac{1}{g(x_0)} = 0$

$\leadsto \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$ ist mit obiger Regel behandelbar • *peut être traité avec la règle en haut.*

$$\leadsto \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\frac{1}{g(x)})'}{(\frac{1}{f(x)})'} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-\frac{g'(x)}{g(x)^2}}{-\frac{f'(x)}{f(x)^2}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot \left(\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} \right)^2 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} \right)^2$$

$$\Rightarrow 1 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)} \cdot \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} \right) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Korollar: • **Corollaire:****Vor.:** • **Hyp.:**

$$\frac{1}{f}, \frac{1}{g} \in \mathcal{C}^{(n)}(U_\epsilon(x_0)), \quad f(x_0) = \pm\infty, \quad g(x_0) = \pm\infty$$

Beh.: • **Thè.:**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Bsp.: • **Exemple:** $\lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln(x)}{\cot(x)} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{(\ln(x))'}{(\cot(x))'} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{(-\frac{1}{\sin^2(x)})} = \lim_{x \downarrow 0} -\frac{\sin^2(x)}{x}$

$$= -\lim_{x \downarrow 0} \frac{(\sin^2(x))'}{(x)'} = -\lim_{x \downarrow 0} \frac{(\sin^2(x))'}{(x)'} = -\lim_{x \downarrow 0} \frac{(\sin(x)) \cdot 2 \cdot \cos(x)}{1} = 0$$

3.4.3 Wichtige Beispiele — Exemples importants

Im Falle ‘ $\lim_{x \rightarrow \infty}$ ’ resp. ‘ $\lim_{x \rightarrow -\infty}$ ’ können wir die Regel mit Hilfe einer Substitution auf den Fall ‘ $\lim_{x \rightarrow 0}$ ’ zurückführen: • *Dans le cas ‘ $\lim_{x \rightarrow \infty}$ ’ resp. ‘ $\lim_{x \rightarrow -\infty}$ ’ nous pouvons ramener la règle au cas ‘ $\lim_{x \rightarrow 0}$ ’:*

1. Beispiel: • **Exemple 1:** $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = ?$

Benütze die Substitution: • *Employer la substitution:* $x = \frac{1}{t}, \quad t \geq 0$

$$\leadsto \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(\frac{1}{t})}{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\ln(\frac{1}{t}))'}{(\frac{1}{t})'} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{t} \cdot (\frac{1}{t})'}{(\frac{1}{t})'} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} t = 0$$

Dieses Beispiel lässt sich leicht ausdehnen: • *Nous pouvons facilement étendre cet exemple:*

Sei • *Soit* $k > 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^k} = ?$

$$k := 1 + r, \quad r > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^k} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x \cdot x^r} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^r} = 0 \cdot 0 = 0$$

Sei • *Soit* $1 > k > 0$, $r \cdot k = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^k} = ?$

$$u := x^k \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^k} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\ln(u^{\frac{1}{k}})}{u} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k} \cdot \ln(u)}{u} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{\ln(u)}{u} = \frac{1}{k} \cdot 0 = 0$$

Andere Methode: • *Autre méthode:* $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$

2. Beispiel: • **Exemple 2:** Sei • *Soit* $k > 0$, $\lim_{x \downarrow 0} \frac{x^k}{\ln(x)} = ?$

Dieser Fall ist trivial: • *Ce cas est très simple:*

$$\lim_{x \downarrow 0} \left| \frac{x^k}{\ln(x)} \right| = \lim_{x \downarrow 0} |x^k| \cdot \lim_{x \downarrow 0} \left| \frac{1}{\ln(x)} \right| = 0 \cdot \frac{1}{\lim_{x \downarrow 0} |\ln(x)|} = 0 \cdot 0 = 0$$

3. Beispiel: • **Exemple 3:** Sei • *Soit* $k > 0$, $\lim_{x \downarrow 0} x^k \cdot \ln(x) = ?$

$$\lim_{x \downarrow 0} x^k \cdot \ln(x) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln(x)}{x^{-k}} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{(\ln(x))'}{(x^{-k})'} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{x^{-1}}{(-k)x^{-k-1}} = \lim_{x \downarrow 0} x^{-1} \cdot x^{k+1} \frac{1}{(-k)} =$$

$$= \lim_{x \downarrow 0} x^k \frac{1}{(-k)} = 0$$

4. Beispiel: • **Exemple 4:** Sei • *Soit* $x := \ln(t)$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{e^x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\ln(t))^k}{e^{\ln(t)}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\ln(t))^k}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln(t)}{t^{\frac{1}{k}}} \right)^k = 0^k = 0$

Folgerung: • **Conclusion:** **Vor.:** • **Hyp.:** $k > 0$

Beh.: • **Thè.:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^k} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{x^k}{\ln(x)} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{e^x} = 0$$

Konsequenz: • **Conséquence:** Die e -Funktion wächst stärker als jede Potenz von x . Jede Potenz x^k , $k > 0$ wächst stärker als die Logarithmusfunktion. • *La Fonction exponentielle croît plus vite que chaque puissance de x . Chaque puissance x^k , $k > 0$ croît plus vite que le logarithme.*

6. Beispiel: • **Exemple 6:** $\lim_{x \downarrow 0} x^x = ?$
 $\lim_{x \downarrow 0} x^x = \lim_{x \downarrow 0} (e^{\ln(x)})^x = \lim_{x \downarrow 0} e^{\ln(x) \cdot x} = e^{\lim_{x \downarrow 0} \ln(x) \cdot x} = e^0 = 1$

Bemerkung: • **Remarque:**

Sei • *Soit* $k > 0 \Rightarrow \lim_{x \downarrow 0} k^x = k^0 = 1, \quad \lim_{x \downarrow 0} 0^x = \lim_{x \downarrow 0} 0 = 0$

Damit haben wir jetzt ein altes Problem gelöst: • *On a donc résolu un vieux problème:*

Folgerung: • **Conclusion:** $1 = \lim_{x \downarrow 0} x^0 = \lim_{x \downarrow 0} x^x \neq \lim_{x \downarrow 0} 0^x = 0$

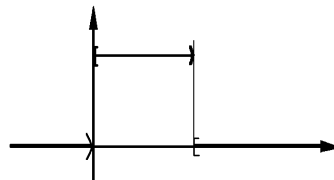
Wegen $\lim_{x \downarrow 0} x^x = 1$ definiert man: • *A cause de $\lim_{x \downarrow 0} x^x = 1$ on définit:*

Definition: • **Définition:** $0^0 := 1$

$\leadsto f(x) = 0^{|x|}$ hat einen **isolierten Punkt** (Sprung) bei $x = 0$.
 $f(x) = 0^{|x|}$ a un **point isolé** (saut) à $x = 0$.

Problem: • **Problème:**

$$f(x) = 0^{|x|} ? \quad \leadsto$$

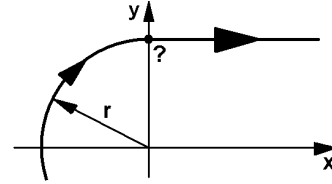


3.5 Anwendungen — Applications

3.5.1 Kurvenform bei der Eisenbahn — Forme du virage du chemin de fer

Bis zu einem Punkt P_0 sei die Kurve kreisförmig. Durch welche möglichen Funktionen, ist der Schienenweg bei P_0 fortsetzbar? • *Un virage possède la forme d'un cercle jusqu'à un point P_0 . Problème: Par quelles fonctions possibles peut-on continuer le chemin de fer à partir de P_0 ?*

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} -r \cos(t) \\ r \sin(t) \end{pmatrix}$$



Problem: • **Problème:** Sei • *Soit $\vec{a} = \ddot{\vec{s}} = \frac{d^2\vec{s}}{dt^2}$ die Beschleunigung • l'accélération.*

~ Bei P_0 darf $\vec{a}$ nicht plötzlich ändern, sonst tritt schlagartig eine Kraft $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ auf, d. h. ein Schlag tritt auf! • *A P_0 $\vec{a}$ ne doit pas changer d'un moment à l'autre, si non on a une force $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ qui se manifeste tout d'un coup, cela donne un coup au train!*

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m \cdot \vec{a}|_{t=\frac{\pi}{2}} = m \cdot \frac{d^2\vec{s}}{dt^2}|_{t=\frac{\pi}{2}} = m \cdot \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} -r \cos(t) \\ r \sin(t) \end{pmatrix} \Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = m \cdot \begin{pmatrix} r \cos(t) \\ -r \sin(t) \end{pmatrix} \Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = m \cdot \begin{pmatrix} r \cdot 0 \\ -r \cdot 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \vec{F} &= m \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -r \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Gesucht ist demnach eine Fortsetzungskurve $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ mit $\vec{a} = \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -r \end{pmatrix}$. Da bei einer Geraden die zweiten Ableitungen von $x(t)$ und $y(t)$ gleich sein müssen, sieht man sofort, dass da eine Gerade unmöglich ist! Hingegen würde z.B. eine Parabel $\vec{v}(t) = \frac{r}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ -t^2 + 2 \end{pmatrix}$ gehen.

• *On cherche donc une courbe pour continuer avec $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -r \end{pmatrix}$. Comme pour la droite les deuxièmes dérivées de $x(t)$ et $y(t)$ doivent être les mêmes, on voit tout de suite qu'une droite est impossible! Par contre une parabole $\vec{v}(t) = \frac{r}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 + 2 \end{pmatrix}$ devrait aller.*

Vergleich: Im betrachteten Punkt hat man auch eine schlagartige Veränderung der Zentrifugalkraft...

• *Parallèle: Au point considéré on a un changement immédiat de la force centrifuge...*

3.5.2 Weitere Beispiele — D'autres exemples

Siehe Vordiplom- und Modulprüfungsserien. • *Voir séries de diplômes préalables et examens de module.*

Kapitel • Chapitre 4

Integralrechnung — Calcul intégral

4.1 Inhalte krummlinig begrenzter Flächen — Aires de surfaces au bord courbe

4.1.1 Die Idee der Approximation — L'idée de l'approximation

Ober- und Untersummen — Aire des polygones rectangulaires circonscrits et inscrits

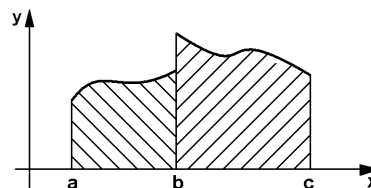
Geg.: • **Donné:**

f stet'cont, beschr'borné

$f : x \mapsto f(x), x \in I = [a, b]$

$\leadsto$ Fläche: • *Surface:* G ,

$G = \{(x, y) \mid x \in I \wedge y \in [0, f(x)]\}$



Problem: • **Problème:** Inhalt (Mass) • *Aire (contenu, mesure)* $A = m(G) = ?$

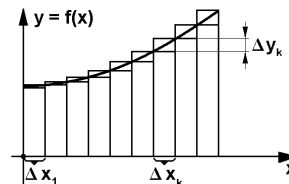
$\leadsto$ Ausser bei gewissen Figuren, die mit dem Kreis zusammenhängen, ist der Inhalt krummlinig begrenzter Flächen elementargeometrisch nicht definiert. Von der Physik her ist es aber offensichtlich, dass ein Inhalt eindeutig definierbar sein muss. Man denke nur an Figuren aus Blech. Der Begriff „Inhalt“ existiert daher bereits in seiner physikalischen Erscheinung in unserer Vorstellung. $\leadsto A_{phys}$.

• *L'aire de figures dont le bord n'est pas donné par des lignes droites (mais par des courbes) n'est pas définie par la géométrie élémentaire, excepté pour certaines figures qui sont en rapport avec le cercle. Par contre la physique nous montre clairement qu'un contenu (aire) doit être univoquement définissable. Pensons à des figures en tôle. La notion "d'aire" existe donc déjà dans notre imagination dans son aspect physique.* $\leadsto A_{phys}$.

Bsp.: • **Exemple:**

$f(x) = x^2 + 1, x \in I = [0, 1]$

Idee: • **Idée:** Approximation, grenze den Inhalt A_{phys} ein durch Summen von Rechteckinhalten. • *Approximation, enboîter l'aire A_{phys} par des sommes d'aires de rectangles*
 $\leadsto (\Delta x_i \cdot y_i)$



Wir verwenden hier die folgenden Schreibweisen¹¹: • *Ici nous utilisons les symboles suivants:*¹¹:

¹¹In der einsprachigen deutschen oder französischen Literatur werden meistens andere, sprachgebundene Symbole ver-

Schreibweise: • **Façon d'écriture:**

$R_i^{Gr} :=$ Inhalt des grösseren, umschriebenen Rechtecks mit der Nummer i .

- *Aire du rectangle plus grand, circonscrit avec le numéro i .*

$R_i^{in} :=$ Inhalt des innern, kleineren, eingeschriebenen Rechtecks mit der Nummer i .

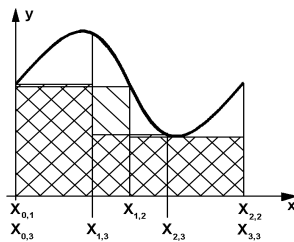
- *Aire du rectangle inscrit avec le numéro i .*

$S_n^{Gr} = \sum_{i=1}^n R_i^{Gr} :=$ n -te **Obersumme** • n -ème somme d'aires des rectangles circonscrits (aire du polygone rectangulaire circonscrit).

$S_n^{in} = \sum_{i=1}^n R_i^{in} :=$ n -te **Untersumme** • n -ème somme d'aires des rectangles inscrits (aire du polygone rectangulaire inscrit).

Intervallteilungen — Partitions d'intervalles

Um S_n^{Gr} und S_n^{in} zu bilden, verwenden wir **Intervallteilungen** T_n . Eine Intervallteilung entsteht durch Teilung von $I = [a, b]$ in n Teilintervalle. • *Pour former S_n^{Gr} et S_n^{in} nous utilisons des **partitions d'intervalles** T_n . Nous obtenons une partition d'intervalle en tranchant $I = [a, b]$ en n intervalles partiels.*



Das nebenstehende Bild zeigt, dass eine grössere Intervallzahl nicht immer zu einer besseren Approximation des Flächeninhalts führt. Wenn ein Intervall in neue Intervalle unterteilt wird, kann aber die Approximation nicht schlechter werden. Zudem sind verschieden lange Teilintervalle nicht komfortabel beim Arbeiten.

• *L'image à gauche montre qu'un nombre d'intervalles plus grand ne mène pas toujours à une meilleure approximation de la surface. Si un intervalle est subdivisé en nouveaux intervalles, l'approximation ne peut pas se détériorer. En outre il n'est pas confortable de travailler avec des intervalles partiels de longueurs différentes.*

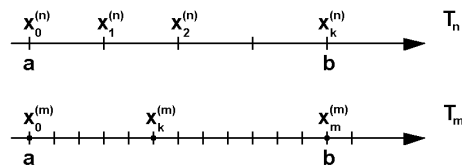
Eine Intervallteilung heisst **regelmässig**, wenn alle Teilintervalle gleich lang sind:

- *Une partition d'intervalle s'appelle **régulière**, si tous les intervalles partiels ont la même longueur:*

$$\leadsto \Delta x_n^{(i)} = x_i - x_{i-1} = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{b - a}{n}$$

T_m heisst **Verfeinerung** von T_n , wenn T_m aus T_n durch Einfügen neuer Teilpunkte entsteht.

- T_m s'appelle **raffinement** de T_n , si on obtient T_m de T_n en introduisant de nouveaux points de division.



wendet. • *Dans la littérature uniquement française ou uniquement allemande on utilise des symboles différents qui sont souvent liés à la langue.*

Bsp.: • **Exemple:** T_{2n} ist eine Verfeinerung von T_n , T_{n+1} hingegen ist keine solche.

• T_{2n} est un raffinement de T_n , T_{n+1} par contre non.

Das folgende Lemma ist unmittelbar einsichtig: • *On voit de façon immédiate que le lemme qui suit est vrai:*

Lemma: • **Lemme:** **Vor.:** • **Hyp.:**

T_m Verfeinerung von T_n • T_m raffinement de T_n

$x \in I \Rightarrow f(x) \geq 0$

Beh.: • **Thè.:**

$S_m^{Gr} - S_m^{in} \leq S_n^{Gr} - S_n^{in}$ oder • *ou*

$S_n^{in} \leq S_m^{in} \leq S_m^{Gr} \leq S_n^{Gr}$

$\leadsto$ Bei einer Verfeinerung der Intervallteilung wird eine Approximation von A_{phys} durch Ober- und Untersummen höchstens genauer. • *Si on raffine la partition de l'intervalle l'approximation de A_{phys} par des aires de polygones rectangulaires circonscrits ou inscrits devient plus exacte ou bien reste.*

Genauigkeit der Approximation — Exactitude de l'approximation

Sei I ein gegebenes Intervall. • *Soit I un intervalle donné.*

$\leadsto I = [a, b], (a, b], [a, b), (a, b), a, b \in \mathbb{R}$

Sei T_n regelmässige Intervallteilung • *Soit T_n une partition régulière de l'intervalle,*

$I = \bigcup_{i=1}^n I_i, I_i = [x_{i-1}, x_i], l(I_i) = \Delta x_n$ (Länge • *Longueur*)

Absicht: T_n so verfeinern, dass $\Delta x_{k,n} \rightarrow 0$ erreicht wird für $n \rightarrow \infty$.

• **Intention:** *Subdiviser T_n der façon qu'on atteint $\Delta x_{k,n} \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow \infty$.*

Sei f eine auf I beschränkte Funktion ($\leadsto f$ hat auf jedem I_i ein Infimum und ein Supremum.)

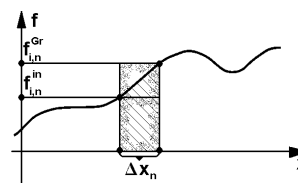
• *Soit f une fonction bornée sur I ($\leadsto f$ a sur chaque I_i un infimum et un suprémum.)*

Sei • *Soit*

$f_i^{Gr} = f_{i,n}^{Gr} = \sup_{x \in I_i} f(x),$

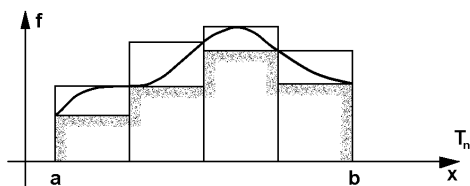
$f_i^{in} = f_{i,n}^{in} = \inf_{x \in I_i} f(x) \Rightarrow \forall x \in I_i :$

$f_i^{in} \cdot \Delta x_n \leq f(x)_{x \in I_i} \cdot \Delta x_n \leq f_i^{Gr} \cdot \Delta x_n$



Damit können wir exakter definieren: • *Maintenant nous pouvons définir plus exactement:*

Definition: • **Définition:**



$S_n^{Gr} := \sum_{i=1}^n f_i^{Gr} \cdot \Delta x_n$: Zu T_n gehörige **Obersumme** • **Aire de polygone rectangulaire circonscrit** appartenant à T_n

$S_n^{in} := \sum_{i=1}^n f_i^{in} \cdot \Delta x_n$: Zu T_n gehörige **Untersumme** • **Aire de polygone rectangulaire inscrit** appartenant à T_n

$\leadsto S_n^{Gr}, S_n^{in}$ sind Flächeninhalte • *sont des aires.*

Für diese gilt nach Konstruktion: • *D'après la construction il vaut: $S_n^{in} \leq A_{phys} \leq S_n^{Gr}$.*

Wünschenswert wäre nun, dass gelten würde: • *Nous désirons maintenant qu'il vaille:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty (\Delta x_n \rightarrow 0)} S_n^{in} = \lim_{n \rightarrow \infty (\Delta x_n \rightarrow 0)} S_n^{Gr} (= S)$$

Dann könnten wir A_{phys} wie folgt exakt definieren: $A := S$ • *Alors on pourrait définir A_{phys} de façon exacte comme il suit: $A := S$*

Falls A so definierbar ist, gilt trivialerweise das folgende Lemma: • *Si A peut être défini de cette manière, on obtient directement le lemme suivant:*

Lemma: • **Lemme:** $f(x) \geq 0$ in • *dans $I \Rightarrow A \geq 0$*

Seien • *Soient S_k^{Gr}, S_k^{in} die Summen bei einer beliebigen neuen Intervallteilung • les sommes qui appartiennent à une partition d'intervalle quelconque et nouvelle.*

Sei • *Soit $\lim_{n \rightarrow \infty (\Delta x_n \rightarrow 0)} S_n^{in} = \lim_{n \rightarrow \infty (\Delta x_n \rightarrow 0)} S_n^{Gr} = S$*

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty (\Delta x_n \rightarrow 0)} S_n^{in} = S \leq S_k^{Gr}, \lim_{n \rightarrow \infty (\Delta x_n \rightarrow 0)} S_n^{Gr} = S \geq S_k^{in} \Rightarrow S_k^{in} \leq S \leq S_k^{Gr}$

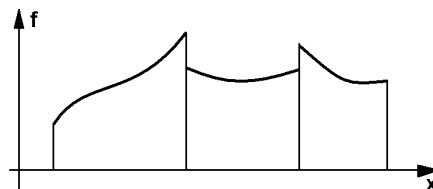
Diese Beziehung wird auch nicht gestört, wenn man mit unregelmässigen Intervallteilungen arbeitet, für die gilt: • *Cette relation n'est pas non plus dérangée si on opère avec des partitions d'intervalle irrégulières, pour lesquelles il vaut:*

$$\Delta x_n := \max_i (\Delta x_{n,i}) = \max_i (x_{i,n} - x_{i-1,n}) \rightarrow 0$$

Konsequenz: • **Conséquence:** Eine beliebige andere Intervallteilung kann nicht zu einem von S verschiedenen anderen Flächeninhalt führen. Es ist somit egal, mit welcher Intervallteilung man arbeitet! • *Une autre partition d'intervalle quelconque ne peut pas mener à une autre aire différente de S . Il est donc égal quelle partition d'intervalle on va prendre.*

Beispiele — Exemples

Im Folgenden schränken wir uns ein auf **stückweise stetige Funktionen** über einem endlichen Intervall I . • *A partir de maintenant nous voulons restreindre l'ensemble des fonctions concernées à des fonctions continues par morceaux sur un intervalle fini I .*



1. Beispiel: • Exemple 1:

Das Beispiel eines „unendlich dichten Kammes über $[0, 1]$ “ zeigt, dass diese Einschränkung sinnvoll ist:

• *L'exemple du peigne infiniment dense sur $[0, 1]$ nous montre que cette restriction a un sens:*

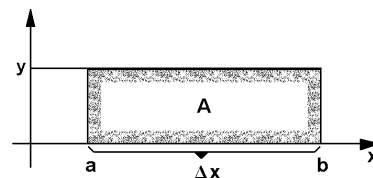
▷

$$\leadsto S_n^{in} = 0 \cdot 1 = 0 < S_n^{Gr} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

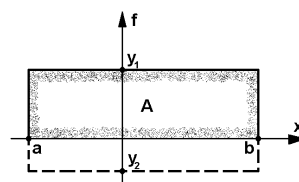
2. Beispiel: • Exemple 2:Rechteck • *Rectangle* $0 \leq a < b, y > 0$

$$S_n^{Gr} = S_n^{in} = S = A = (b - a) \cdot y = \Delta x \cdot y$$

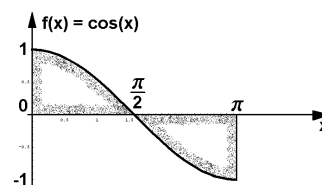
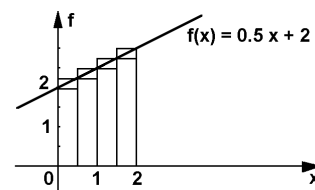
**Problem: • Problème:** $S < 0: f^*(x) := -f(x) > 0 \Rightarrow S^*, S = -S^*$ **3. Beispiel: • Exemple 3:**Rechteck • *Rectangle* $a < 0 < b, y < 0$

$$\leadsto b - a = b - (-|a|) = b + |a| = |b| + |a| > 0$$

$$A = (b - a) \cdot y = (|b| + |a|) \cdot y < 0$$

 y kann negativ sein! $\leadsto$ Negative Flächeninhalte treten auf!• y peut être négatif! $\leadsto$ Des aires négatives apparaissent!**4. Beispiel: • Exemple 4:**

$$f(x) = \cos(x), I = [0, \pi]$$

Symmetriezentrum • *centre de symétrie* $(\frac{\pi}{2}, 0) \leadsto$ Falls gilt: • *S'il vaut:* $S_n^{Gr} = S_n^{in} = S = A$ so muss sein • *on doit avoir:* $A = 0$ **5. Beispiel: • Exemple 5:**Lineare Funktion • *Fonction linéaire* $f(x) = 0.5x + 2, I = [0, 2]$ Sei • *Soit* $\Delta x_n = \frac{2}{n}, x_k = k \cdot \frac{2}{n}$ Bekannt: • *On sait:* $A = 2 \cdot 2.5 = 5$ Berechnung mit Ober- und Untersummen: • *Calcul à l'aide d'aires de polygones rectangulaires circonscrits et inscrits:*

$$\begin{aligned} S_n^{in} &= \sum_{k=1}^n (0.5 \cdot x_{k-1} + 2) \cdot \frac{2}{n} = \sum_{k=1}^n (0.5 \cdot (k-1) \cdot \frac{2}{n} + 2) \cdot \frac{2}{n} = \frac{2}{n} \cdot \sum_{k=1}^n (0.5 \cdot (k-1) \cdot \frac{2}{n} + 2) \\ &= \frac{2}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (0.5 \cdot k \cdot \frac{2}{n} + 2) = \frac{2}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (\frac{k}{n} + 2) = \frac{2}{n} \cdot (\frac{1}{n} \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2} + n \cdot 2) = \frac{2}{n} \cdot (\frac{n-1}{2} + n \cdot 2) \\ &= \frac{2 \cdot n}{n \cdot 2} - \frac{2 \cdot 1}{n \cdot 2} + \frac{2 \cdot 2 \cdot n}{n} = 1 - \frac{1}{n} + 4 = 5 - \frac{1}{n} \rightarrow 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n^{Gr} &= \sum_{k=1}^n (0.5 \cdot x_k + 2) \cdot \frac{2}{n} = \sum_{k=1}^n (0.5 \cdot k \cdot \frac{2}{n} + 2) \cdot \frac{2}{n} = \frac{2}{n} \cdot \sum_{k=1}^n (0.5 \cdot k \cdot \frac{2}{n} + 2) = \frac{2}{n} \cdot \sum_{k=1}^n (\frac{k}{n} + 2) \\ &= \frac{2}{n} \cdot (\frac{1}{n} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n \cdot 2) = \frac{2}{n} \cdot (\frac{n+1}{2} + n \cdot 2) = \frac{2 \cdot n}{n \cdot 2} + \frac{2 \cdot 1}{n \cdot 2} + \frac{2 \cdot 2 \cdot n}{n} = 1 + \frac{1}{n} + 4 = 5 + \frac{1}{n} \rightarrow 5 \end{aligned}$$

$$\leadsto S_n^{Gr} - S_n^{in} = \frac{2}{n} \rightarrow 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\Delta x_n \rightarrow 0) S_n^{in} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\Delta x_n \rightarrow 0) S_n^{Gr} = 5 := A$$

4.1.2 Das Riemannsche Integral — L'intégrale de Riemann

Positive Funktionen — Fonctions positives

Sei • *Soit* $\forall_{x \in I=(a,b)} f(x) \geq 0$, f beschränkt (I)

Weiter sei eine Intervallteilung gegeben mit: • *Soit donné en outre une partition d'intervalle avec:*
 $\Delta x_n := \max(\Delta x_{n,i}) = \max(x_{i,n} - x_{i-1,n}) \rightarrow 0$

Sei • *Soit* $\lim_{n \rightarrow \infty (\Delta x_n \rightarrow 0)} S_n^{in} = \lim_{n \rightarrow \infty (\Delta x_n \rightarrow 0)} S_n^{Gr} = S := A$

$S_n^{in} = \sum_{i=1}^n f_i^{in} \cdot \Delta x_n$, $S_n^{Gr} = \sum_{i=1}^n f_i^{Gr} \cdot \Delta x_n$ sind Summen von Produkten, deren Faktoren positiv sind

• *sont des sommes de produits dont les facteurs sont positifs.*

Man hat hier also die altbekannte Situation der elementargeometrisch definierbaren Rechtecksflächeninhalten. • *Ici on trouve donc la situation connue d'aires de rectangles qu'on peut définir à l'aide de la géométrie élémentaire.*

Definition: • Définition:

Falls A existiert, so heisst f **integrierbar**. f heisst dann **Integrand**. • *Si A existe, f s'appelle intégrable et f s'appelle fonction à intégrer (fonction intégrée, quantité à intégrer).*

A heisst **Riemannsches Integral** oder auch **bestimmtes Integral** von f über I .

• *A s'appelle intégrale de Riemann ou bien aussi intégrale définie de f sur I .*

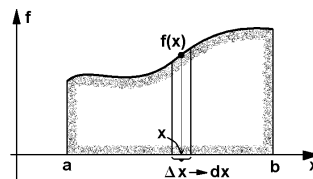
(Später werden wir auch das „unbestimmte Integral“ definieren. • *Plus tard nous allons aussi définir "l'intégrale indéfinie".*)

Symbol: • Symbole: $A := \int_I f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

Schreibweise: • Façon d'écrire:

Falls f über I integrierbar ist, schreiben wir kurz: $f \in \mathcal{INT}(I)$. • *Quand f est intégrable sur I , nous écrivons brièvement: $f \in \mathcal{INT}(I)$.*

$\int$ steht für Summe • *signifie s*omme,
 $a, b \rightsquigarrow$ Grenzen • *limites (bornes)*,
 dx entstand aus Δx_n • *dx est né de Δx_n*
 $\rightsquigarrow$ („infinitesimales Element“
 • *"élément infinitésimal"*).



Bemerkung: • Remarque:

Da wir nachfolgend häufig den Begriff „existiert“ verwenden müssen, werden wir diesen kürzer als ex. schreiben. • *Comme, dans ce qui suit, nous utilisons très souvent le mot "existe", nous allons écrire de façon abrégée: ex.*

$\rightsquigarrow$ Symbol: • Symbole: ex. $\rightsquigarrow$ existiert • *existe*

Folgerung: • **Conclusion:** **Vor.:** • **Hyp.:** $\int_I f(x) dx$ ex.

Beh.: • **Thè.:**

Für jede Intervallteilung gilt: • *Pour chaque partition d'intervalle il vaut:* $S_n^{in} \leq \int_I f(x) dx \leq S_n^{Gr}$

Da in den Summen S_n^{in} , S_n^{Gr} keine negativen Terme vorkommen, kann auch der Limes $\int_a^b f(x) dx$ nicht negativ werden. • *Comme dans les sommes S_n^{in} , S_n^{Gr} aucun des termes n'est négatif, de même la limite $\int_a^b f(x) dx$ ne peut pas être négative.*

Lemma: • **Lemme:** **Vor.:** • **Hyp.:** $f \in \mathcal{INT}(I_i)$, $f(x) \geq 0$

Beh.: • **Thè.:** $\int_I f(x) dx \geq 0$

Negative Funktionen — Fonctions négatives

Sei • *Soit* $\forall_{x \in I=(a,b)} f(x) \leq 0$, f beschr'borné(I)

Sei • *Soit* $f^-(x) := -f(x) = |f(x)| \Rightarrow \forall_{x \in I} f^-(x) = |f(x)| \geq 0$

Sei für f^- • *Soit pour f^- :* $\lim_{n \rightarrow \infty (\Delta x_n \rightarrow 0)} S_n^{in} = \lim_{n \rightarrow \infty (\Delta x_n \rightarrow 0)} S_n^{Gr} = S := A$

$\leadsto \int_I f^-(x) dx$ ist ein definierter positiver Flächeninhalt • *est une aire définie et positive.*

Definition: • **Définition:** $\int_I f(x) dx := - \int_I f^-(x) dx = - \int_I |f(x)| dx$

Konsequenz: • **Conséquence:** Diese Definition hat zur Folge, dass bei negativen Funktionen die Fläche zwischen der x -Achse und dem Graphen einen negativen Inhalt bekommt. • *Cette définition a comme conséquence que la surface entre l'axe x et le graphe de fonctions négatives possède une mesure négative.*

Funktionen mit wechselndem Vorzeichen — Fonctions au signe alternant

Sei • *Soit* f beschr'borné(I), $I = \bigcup_{i=1}^n I_i$, $\forall_i \operatorname{sgn}(f(x)) = \text{const. in } I_i$ • *dans I_i*

Sei • *Soit* $\forall_i : f \in \mathcal{INT}(I_i) \leadsto \int_{I_i} f(x) dx$ ex. .

Nun können wir $\int_I f(x) dx$ einfach definieren: • *Maintenant nous pouvons définir $\int_I f(x) dx$ de façon simple:*

Definition: • **Définition:** $\int_I f(x) dx = \sum_{i=1}^n (\int_{I_i} f(x) dx)$

Diese Definition lässt sich leicht ausdehnen für die Fälle, wo f das Vorzeichen in I abzählbar unendlich oft wechselt: • *Nous pouvons facilement étendre cette définition pour les cas où f change le signe dans I infiniment de fois, mais de façon dénombrable:* $\leadsto I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$

Definition: • **Définition:** $\int_I f(x) dx = \sum_{i=1}^{\infty} (\int_{I_i} f(x) dx)$

Bemerkung: • **Remarque:** Wir sind von stückweise stetigen und beschränkten Funktionen ausgegangen. Solche Funktionen, bei denen das Vorzeichen in I höchstens abzählbar unendlich oft wechselt, wollen wir kurz als **vernünftige Funktionen** bezeichnen. • *Nous sommes partis de fonctions continues par morceaux et bornées. Nous allons appeler ces fonctions des fonctions raisonnables si le nombre de changements de signe I est dénombrable*

Damit haben wir in vielen Fällen eine brauchbare Definition für den Flächeninhalt unter der Funktionskurve. Ein grosses Problem ist aber noch geblieben. Für welche Klasse von Funktionen ist denn dieser Flächeninhalt resp. dieses Integral denn definiert? — Wir haben ja eingangs gesehen, dass z.B. schon für einen unendlich dichten Kamm dieser Inhalt nach Riemann nicht definierbar ist! Wir müssen somit zuerst Integrationskriterien suchen. • *Ainsi nous avons une définition convenable pour l'aire de surface sous la courbe d'une fonction pour un grand nombre de cas. Mais il reste un problème. Pour quelles classes de fonctions cette aire resp. cette intégrale est-elle définie? — Au début nous avons vu que déjà pour un peigne infiniment dense cette aire n'existe pas d'après Riemann. Il faut donc d'abord chercher des critères pour l'intégrabilité.*

4.2 Kriterien und Eigenschaften — Critères et Qualités

Bevor wir Beispiele lösen können, müssen wir erst den Integralbegriff besser kennenlernen.

• *Avant de pouvoir résoudre des problèmes nous devons mieux connaître la notion de l'intégrale.*

4.2.1 Integrationskriterien — Critères pour l'intégrabilité

Sei • *Soit $f \in \text{beschr'borné}(I)$, f monoton wachsend in $I = [a, b]$ und vernünftig* • *f croissant monotonement dans I et raisonnable.*

Nach dem vorhergehenden Abschnitt genügt es, positive Funktionen zu betrachten. • *Selon le dernier chapitre il suffit de traiter des fonctions positives.*

Die nebenstehende Skizze zeigt, dass gilt:

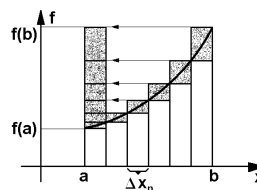
• *L'esquisse à côté nous montre qu'il vaut:*

$$0 \leq S_n^{Gr} - S_n^{in} \leq (f(b) - f(a)) \cdot \Delta x_n$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{\Delta x_n \rightarrow 0} S_n^{Gr} - S_n^{in} = \lim_{\Delta x_n \rightarrow 0} \Delta S_n$$

$$\leq \lim_{\Delta x_n \rightarrow 0} (f(b) - f(a)) \cdot \Delta x_n = 0$$

$$\leadsto f \in \mathcal{INT}(I)$$



Entsprechendes können wir für negative Funktionen folgern. Zerfällt demnach I in endlich viele Teilintervalle, auf denen f monoton ist, so ist f über I integrierbar. • *Nous pouvons déduire la même chose pour des fonctions négatives. Si I peut être décomposé dans un nombre fini d'intervalles partiels où f est monotone, nous constatons donc que f est intégrable.*

Bemerkung: • **Remarque:** Solche Funktionen wollen wir **endlich oszillierend** nennen. Es ist unmittelbar klar, dass diese Funktionen vernünftig sind.
• *Nous appelons ces fonctions **oscillantes de façon finie**. Il est bien clair que ces fonctions sont raisonnables.* $\leadsto$

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$f \in \text{beschr'borné}(I), f \in \text{stet'cont}$
 f endlich oszillierend • *oscillantes de façon finie*

Beh.: • **Thè.:** $f \in \mathcal{INT}(I)$

Problem: • **Problème:**

Ist die Integrierbarkeit nun auch wirklich unabhängig von der Regelmässigkeit der Intervallteilung?

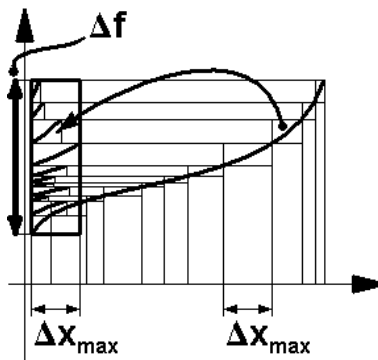
• *Est-ce que la possibilité qu'une fonction soit intégrable est vraiment indépendant de la régularité de la partition d'intervalle?*

Sei • *Soit f monoton, stetig, beschränkt auf $I = (a, b)$*

• *f monotone, continue, bornée sur $I = (a, b)$*

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_n^{Gr} - S_n^{in} &= \Delta A_{max} \\ &\leq |(\Delta x_{k,n})_{max}| \cdot |f(x_{0,n}) - f(x_{n,n})| \\ &= |(\Delta x_{k,n})_{max}| \cdot |\Delta f| \rightarrow 0 \\ \text{für } \bullet \text{ pour } n \rightarrow \infty, |(\Delta x_{k,n})_{max}| &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

$\leadsto f \in \mathcal{INT}(I), I = (a, b)$



Ausdehnung: • **Extension:**

Der Definitionsbereich $I = (a, b)$ einer auf endlich vielen Teilintervallen monotonen (endlich oszillierenden) und stückweise stetigen beschränkten Funktion kann man aus endlich vielen Teilintervallen $I_k = (a_k, b_k)$ zusammensetzen mit $f \in \mathcal{INT}(I_k) \Rightarrow f \in \mathcal{INT}(I)$.

• *Maintenant on peut composer le domaine de définition $I = (a, b)$ d'une fonction monotone par morceaux (oscillante de façon finie), continue par morceaux et bornée d'un nombre d'intervalles partielles $I_k = (a_k, b_k)$ avec la qualité $f \in \mathcal{INT}(I_k)$, donc on peut conclure $\Rightarrow f \in \mathcal{INT}(I)$.*

Sei nun f stetig in $I = [a, b]$.

• *Soit maintenant f continue dans $I = [a, b]$. ($\Rightarrow f \in \text{beschr'borné}(I)$.)*

Wir betrachten Verfeinerungen einer regelmässigen Intervallteilung. • *Nous considérons des raffinements d'une partition d'intervalle régulière.*

$$\leadsto \lim_{\Delta x_n \rightarrow 0} \Delta S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (f_{i,n}^{Gr} - f_{i,n}^{in}) \cdot \Delta x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (\Delta f_{i,n}) \cdot \left(\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b-a}{n}\right) \cdot \sum_{i=1}^n (\Delta f_{i,n})$$

Da f auf dem beschränkten, abgeschlossenen Intervall $I = [a, b]$ stetig ist, folgt dass f auf I gleichmässig stetig sein muss. • *Comme f est continue sur l'intervalle fermé et borné $I = [a, b]$, il suit que f doit être uniformément continue sur I .*

$$\leadsto \Leftrightarrow \forall x_0 \in I \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in U_{\delta(\varepsilon)}(x_0) : f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0)) \text{ (Definition! • Définition!)}$$

Sei ε gegeben. Dazu existiert dann ein $\delta(\varepsilon) > 0$. • *Soit donné ε . Il en existe alors un $\delta(\varepsilon) > 0$.*

Wähle n jetzt so gross, dass gilt: • *Choisir n assez grand qu'il vaut:* $2\Delta x_n = \frac{2(b-a)}{n} < \delta(\varepsilon)$.

Dann folgt: • *Alors il suit:* $|(f_{i,n}^{Gr} - f_{i,n}^{in})| < |\Delta f_{i,n}| < \varepsilon$

$$\begin{aligned} \leadsto \Rightarrow \forall_i \forall_{\varepsilon > 0} \exists_n n \in \mathbb{N} : |\Delta f_{i,n}| < \varepsilon &\Rightarrow \lim_{\Delta x_n \rightarrow 0} \Delta S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b-a}{n}\right) \cdot \sum_{i=1}^n (\Delta f_{i,n}) \\ &< \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b-a}{n}\right) \cdot \sum_{i=1}^n \varepsilon = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b-a}{n}\right) \cdot n \cdot \varepsilon = \lim_{n \rightarrow \infty} (b-a) \cdot \varepsilon = 0 \end{aligned}$$

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:** $I = [a, b], f \in \text{stet'cont}(I)$

Beh.: • **Thè.:** $f \in \mathcal{INT}(I) \leadsto \int_I f(x) dx \text{ exist.}$

4.2.2 Eigenschaften bestimmter Integrale — Qualités d'intégrales définies

Zur Limesbildung — Quant à la valeur limite

Wir setzen voraus, dass das Integral $\int_I f(x) dx$ existiere. • *Nous supposons qu'il existe l'intégrale*

$$\int_I f(x) dx.$$

Sei • *Soit $f(x) \geq 0$ in • dans I .* $\leadsto$ Dann gilt: • *Alors il vaut:*

$$\begin{aligned} S_n^{in} &= \sum_{i=1}^n R_{i,n}^{in} = \sum_{i=1}^n f_{i,n}^{in} \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^n \inf_{x \in I_i} f(x) \cdot \Delta x_n \leq \sum_{i=1}^n f(x)|_{x \in I_i} \cdot \Delta x_n \\ &:= S_n^x \leq \sum_{i=1}^n \sup_{x \in I_i} f(x) \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f_{i,n}^{Gr} \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^n R_{i,n}^{Gr} = S_n^{Gr} \leadsto S_n^{in} \leq S_n^x \leq S_n^{Gr}. \end{aligned}$$

In S_n^x ist jeweils $x \in I_i$ beliebig gewählt. • *Dans S_n^x on a choisi $x \in I_i$ librement.*

Nun gilt: • *Maintenant il vaut:*

$$\int_I f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{(\Delta x_n \rightarrow 0)} S_n^{in} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{(\Delta x_n \rightarrow 0)} S_n^{Gr} \Rightarrow \int_I f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{(\Delta x_n \rightarrow 0)} S_n^x$$

Lemma: • **Lemme:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$\int_I f(x) dx \text{ ex.}$$

$$S_n^x = \sum_{i=1}^n f(x)|_{x \in I_i} \cdot \Delta x_n, \quad x \in I_i \text{ beliebig} \quad \bullet \text{ } \textit{quelconque}$$

Beh.: • **Thè.:**

$$\int_I f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty (\Delta x_n \rightarrow 0)} S_n^x$$

Bemerkung: • **Remarque:** Summen S_n^x nennen wir auch **Riemannsche Summen**. (Solche Summen von Produkten kann man immer auch als Skalarprodukte verstehen.)

• *Les sommes S_n^x s'appellent aussi **sommes de Riemann**. (On peut comprendre des tels sommes de produits aussi comme des produits scalaires.)*

Linearität — Linéarité

Wie wir schon beim Differentialoperator gesehen haben, finden wir auch hier, dass es sich beim Integral ebenfalls um einen linearen Operator handelt. • *C'est une situation analogue à celle de l'opérateur différentiel. L'intégral est un opérateur linéaire.*

$$\text{Sei} \quad \bullet \quad \textit{Soit} \quad \int_I f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty (\Delta x_n \rightarrow 0)} S_n^{x,f} = \lim_{n \rightarrow \infty (\Delta x_n \rightarrow 0)} \sum_{i=1}^n f(x) \cdot \Delta x_n,$$

$$\int_I g(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty (\Delta x_n \rightarrow 0)} S_n^{x,g} = \lim_{n \rightarrow \infty (\Delta x_n \rightarrow 0)} \sum_{i=1}^n g(x) \cdot \Delta x_n \text{ ex. } \quad , \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \alpha \cdot \int_I f(x) dx + \beta \cdot \int_I g(x) dx = \alpha \cdot \lim_{n \rightarrow \infty (\Delta x_n \rightarrow 0)} \sum_{i=1}^n f(x) \cdot \Delta x_n + \beta \cdot \lim_{n \rightarrow \infty (\Delta x_n \rightarrow 0)} \sum_{i=1}^n g(x) \cdot \Delta x_n \\ = & \lim_{n \rightarrow \infty (\Delta x_n \rightarrow 0)} \alpha \cdot \sum_{i=1}^n f(x) \cdot \Delta x_n + \lim_{n \rightarrow \infty (\Delta x_n \rightarrow 0)} \beta \cdot \sum_{i=1}^n g(x) \cdot \Delta x_n \\ = & \lim_{n \rightarrow \infty (\Delta x_n \rightarrow 0)} \sum_{i=1}^n (\alpha \cdot f(x) \cdot \Delta x_n) + \sum_{i=1}^n (\beta \cdot g(x) \cdot \Delta x_n) \\ = & \lim_{n \rightarrow \infty (\Delta x_n \rightarrow 0)} \sum_{i=1}^n (\alpha \cdot f(x) \cdot \Delta x_n + \beta \cdot g(x) \cdot \Delta x_n) = \int_I (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)) dx \end{aligned}$$

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$\int_I f(x) dx, \quad \int_I g(x) dx \text{ ex. } \quad , \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Beh.: • **Thè.:**

$$\int_I (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)) dx \text{ ex. } \quad \wedge$$

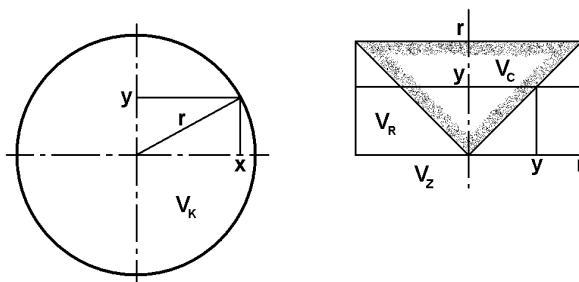
$$\int_I (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)) dx = \alpha \cdot \int_I f(x) dx + \beta \cdot \int_I g(x) dx$$

Ausblick: Das Prinzip von Cavalieri — Application: Le principe de Cavalieri

Es gilt: • *Il vaut:*
$$f(x) = g(x) - h(x) \Rightarrow \int_I f(x) dx = \int_I g(x) dx - \int_I h(x) dx$$

Einmal berechnen wir hier die den Inhalt der Fläche zwischen der x -Achse und der Kurve $y_1 = f(x)$. Dieser Inhalt ist gleich dem Inhalt der Fläche zwischen den Kurven $y_2 = h(x)$ und $y_3 = g(x)$. Es spielt daher für den Inhalt keine Rolle, ob wir die „infinitesimal dünnen Balken mit dem Inhalt $f(x) dx$ “ beliebig in y -Richtung verschieben. Dieses Prinzip ist bekannt als das **Prinzip von Cavalieri**.

• *D'une part nous calculons ici le contenu de la surface entre l'axe x et la courbe $y_1 = f(x)$. D'autre part, ce contenu est égal au contenu de la surface entre la courbe $y_2 = h(x)$ et la courbe $y_3 = g(x)$. Pour le contenu, il ne joue donc pas de rôle si nous déplaçons "les bâton minces de façon infinitésimale dont le contenu est $f(x) dx$ " librement en direction de l'axe y . Ce principe est connu comme le **principe de Cavalieri**.*



Links: Kugel.
Rechts: Zylinder,
darin Kegel.
• *A gauche: Sphère.
A droite: cylindre,
dedans un cône.*

Kugel (K): • *Sphère (K):* $\leadsto x^2 + y^2 = r^2 \leadsto$ Querschnitt: • *Section droite:* $A_k = x^2 \cdot \pi$
Zylinder(Z) mit Kegel(C): Kreisring(R) • *Cylindre(Z) avec dedans un cône(C): couronne circulaire(R)*
 $\leadsto A_R = r^2 \cdot \pi - y^2 \cdot \pi = (r^2 - y^2) \cdot \pi = x^2 \cdot \pi \Rightarrow A_K = A_R$

Cavalieri: $A_K dx = A_R dx \leadsto V_a = \frac{1}{2} \cdot V_K$

$\leadsto V_K = 2 V_a = 2 (V_Z - V_C) = 2 (r^2 \pi \cdot r - r^2 \pi \cdot r \cdot \frac{1}{3}) = 2 r^3 \pi \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \cdot r^3 \pi \leadsto V_K = \frac{4}{3} \cdot r^3 \pi$

Intervalle und Vereinigungen — Intervalles et réunions

Seien • *Soient* $I_A = (a, b)$, $I_B = [a, b]$, $I_C = (a, b]$, $I_D = [a, b]$

Sei • *Soit* $\int_{I_A} f(x) dx$ ex.

Es gilt: • *Il vaut:*

$$\int_{I_A} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty (\Delta x_n \rightarrow 0)} S_n^{x,f} = \int_{I_A} f(x) dx, = \int_{I_B} f(x) dx, = \int_{I_C} f(x) dx, = \int_{I_D} f(x) dx \leadsto$$

Lemma: • **Lemme:**
$$\int_{I_A} f(x) dx = \int_{I_B} f(x) dx = \int_{I_C} f(x) dx = \int_{I_D} f(x) dx$$

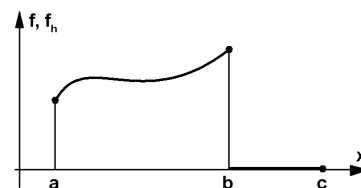
Seien • *Soient*

$I_a = (a, b]$, $I_b = (b, c)$, $I = (a, c)$

Sei • *Soit* $\int_a^b f(x) dx$ ex. .

Wir dehnen nun f aus auf ganz I wie folgt:

• *Nous extendons maintenant f sur tout I comme il suit:*



$$f_h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in I_a = (a, b] \\ 0 & x \in I_b = (b, c) \end{cases}$$

Dann gilt: • *Alors il vaut:* $\int_I f_h(x) dx = \int_a^c f_h(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f_h(x) \cdot (x_{i,n} - x_{i-1,n})$

Nach Definition von f_h ist $f_h(x)$ von einem gewissen Index $i = k(n)$ an 0, liefert also keinen Beitrag mehr zur Summe. • *D'après la définition de f_h , $f_h(x)$ est égal à 0 à partir d'un certain index $i = k(n)$ à 0. $f_h(x)$ ne contribue donc plus à la somme.* $\leadsto$

Wähle nun die Intervallteilung so, dass gilt: • *Choisis maintenant une partition d'intervalle pour laquelle il vaut:* $x_{i=k(n),n} = b$

$$\int_I f_h(x) dx = \int_a^c f_h(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k(n)} f_h(x) \cdot (x_{i,n} - x_{i-1,n})$$

Wegen $\Delta x_n := \text{Max} \Delta x_{n,i} = \text{Max}(x_{i,n} - x_{i-1,n}) \rightarrow 0$ geht mit n auch $k(n)$ gegen ∞ .

• *Si n va vers ∞ , $k(n)$ va aussi vers ∞ , à cause de $\Delta x_n := \text{Max} \Delta x_{n,i} = \text{Max}(x_{i,n} - x_{i-1,n}) \rightarrow 0$.* $\leadsto$

$$\begin{aligned} \int_I f_h(x) dx &= \int_a^c f_h(x) dx = \lim_{k(n) \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k(n)} f_h(x) \cdot (x_{i,n} - x_{i-1,n}) = \\ &= \lim_{k(n) \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k(n)} f(x) \cdot \Delta x_{i,n} = \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

Nach dem gleichen Muster kann man diese Aussage auf den Fall $(a, b) \subseteq (c, d)$ verallgemeinern.

• *D'après la même méthode on peut généraliser ce fait pour le cas $(a, b) \subseteq (c, d)$.* $\leadsto$

Lemma: • **Lemme:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$\begin{aligned} &\int_a^b f(x) dx \text{ ex. } . \\ &f_h(x) = f(x) \text{ für } \bullet \text{ pour } x \in (a, b), \quad f_h(x) = 0 \text{ für } \bullet \text{ pour } x \notin (a, b) \\ &(a, b) \subset [a, c] \end{aligned}$$

Beh.: • **Thè.:**

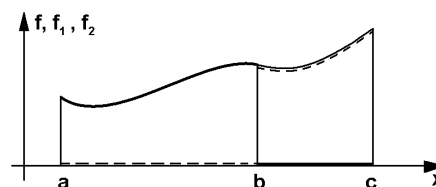
$$\int_a^c f_h(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Seien • *Soient*

$I_a = (a, b]$, $I_b = (b, c)$, $I = (a, c)$

Sei • *Soit* $\int_a^c f(x) dx \text{ ex. } .$

Wir zerlegen nun f auf I wie folgt: • *Nous décomposons maintenant f sur I comme il suit:*



$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (a, b] \\ 0 & x \notin (a, b] \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (b, c) \\ 0 & x \notin (b, c) \end{cases} \quad \leadsto \quad f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

Wegen der Linearität des Integraloperators und des Lemmas gilt nun: • *A cause de la linéarité de l'opérateur intégrale et du lemme il vaut:*

$$\begin{aligned} \int_a^c f(x) dx &= \int_a^c (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int_a^c f_1(x) dx + \int_a^c f_2(x) dx \\ &= \int_a^b f_1(x) dx + \int_b^c f_2(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx \end{aligned}$$

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:** $\int_a^c f(x) dx$ ex.

Beh.: • **Thè.:**

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Ein Integral lässt sich somit beliebig in Teilintegrale aufteilen. Diesen Sachverhalt hätte man anders auch nicht erwartet. • *Une intégrale se laisse partager en intégrales partielles de façon quelconque. C'est un fait auquel on s'attendait.*

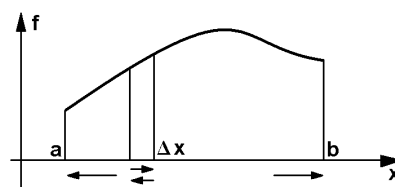
Intervallumkehrung — Intervalle à l'inverse

$$\begin{aligned} \text{Sei } \bullet \text{ Soit } \int_I f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{(\Delta x_n \rightarrow 0)} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x_n \text{ ex. } \leadsto \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{(\Delta x_n \rightarrow 0)} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{(\Delta x_n \rightarrow 0)} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot (x_{i,n} - x_{i-1,n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{(\Delta x_n \rightarrow 0)} \sum_{i=n}^1 f(x_i) \cdot (-(x_{i-1,n} - x_{i,n})) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{(\Delta x_n \rightarrow 0)} - \sum_{i=n}^1 f(x_i) \cdot (\Delta x_n^-) := - \int_{-I} f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \end{aligned}$$

Satz: • **Théorème:**

Vor.: • **Hyp.:** $\int_a^b f(x) dx$ ex.

Beh.: • **Thè.:**



$$\leadsto \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

Nach dem Satz im letzten Abschnitt gilt nun: • *Nous pouvons maintenant déduire du théorème dans la section précédente:*

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^a f(x) dx + \int_a^b f(x) dx \\ \Rightarrow \int_a^a f(x) dx &= \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f(x) dx (= \int_a^b f(x) dx + (- \int_b^a f(x) dx)) \end{aligned}$$

Korollar: • **Corollaire:** $\int_a^a f(x) dx = 0$

Ungleichungen — Inégalités

Im folgenden setzen wir voraus, dass die verwendeten Funktionen integrierbar sind. • *Dans ce qui suit nous partons de l'hypothèse que les fonctions utilisées sont intégrables.*

Wir wissen schon: • *Nous savons déjà:* $f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_I f(x) dx \geq 0$

Sei • *Soit* $f(x) \geq g(x)$ in • *dans* $I \leadsto f(x) - g(x) \geq 0$
 $\Rightarrow \int_I (f(x) - g(x)) dx = \int_I f(x) dx - \int_I g(x) dx \geq 0 \Rightarrow \int_I f(x) dx \geq \int_I g(x) dx$

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$f(x) \geq g(x) \text{ in } \bullet \text{ dans } I, (f, g \in \mathcal{INT}(I))$$

Beh.: • **Thè.:**

$$\int_I f(x) dx \geq \int_I g(x) dx$$

Wegen • *A cause de* $|f(x)| \geq \pm f(x)$ gilt speziell: • *il vaut spécialement:*

Korollar: • **Corollaire:** $\int_I |f(x)| dx \geq \left| \int_I f(x) dx \right| \geq \pm \int_I f(x) dx$

Weiter gilt die **Ungleichung von Schwarz:** • *En outre il y a l'inégalité de Schwarz:*

Satz: • **Théorème:** $\left(\int_I f(x) \cdot g(x) dx \right)^2 \leq \int_I (f(x))^2 dx \cdot \int_I (g(x))^2 dx$

Zur Herleitung: • **Quant à la déduction:**

$\leadsto$ für • *pour* $f(x) \equiv 0 \vee g(x) \equiv 0$ ist nichts zu beweisen • *il ne faut rien prouver.*

Sei also: • *Soit donc:* $f(x) \not\equiv 0 \wedge g(x) \not\equiv 0$.

Seien • *Soient* $\alpha = \left(\int_I (f(x))^2 dx \right)^{-\frac{1}{2}}, \beta = \left(\int_I (g(x))^2 dx \right)^{-\frac{1}{2}}$

Setzen wir α und β in den folgenden Ausdruck ein und formen wir um, so erhalten wir die Schwarzsche Ungleichung: • *Si nous plaçons α et β dans l'expression suivante et si nous transformons alors l'expression à l'aide de règles algébriques, nous arrivons à l'inégalité de Schwarz:*

$$\begin{aligned} A &= \alpha^2 \int_I (f(x))^2 dx - 2\alpha\beta \int_I f(x) \cdot g(x) dx + \beta^2 \int_I (g(x))^2 dx = \\ &= \int_I (\alpha^2 f(x)^2 - 2\alpha\beta f(x) \cdot g(x) + \beta^2 g(x)^2) dx = \int_I (\alpha f(x) - \beta g(x))^2 dx \geq 0 \\ &\quad \text{da } \bullet \text{ parce que } (\alpha f(x) - \beta g(x))^2 \geq 0 \\ \Rightarrow \frac{\int f^2}{\int g^2} + \frac{\int g^2}{\int f^2} &\geq 2 \frac{1}{\int f^2} \cdot \frac{1}{\int g^2} \cdot \int f \cdot g \Rightarrow 1 \geq \frac{\int f \cdot g}{\int f^2 \cdot \int g^2} \end{aligned}$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung — Théorème de la moyenne du calcul intégral

Sei • *Soit* $f \text{ stet'cont}(I), I = [a, b]$

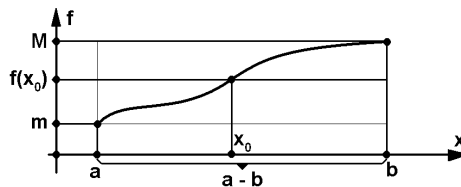
Jede auf einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion nimmt dort mindestens ein absolutes Maximum M oder Minimum m an • *Chaque fonction qui est continue sur un intervalle fermé y a au moins un maximum M ou minimum absolu $m \Rightarrow \exists_{m, M \in \mathbb{R}} \forall_{x \in I} : x \leq f(x) \leq M$*

$f(x)$ durchläuft demnach das Intervall $[m, M]$ • $f(x)$ prend donc toutes les valeurs de l'intervalle $[m, M]$

$$\leadsto (b-a) \cdot m = \int_a^b m \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx = (b-a) \cdot M$$

Da $f(x)$ alle Werte aus $[m, M]$ annimmt, gilt somit: • Comme $f(x)$ prend donc toutes les valeurs de l'intervalle $[m, M]$, il suit donc:

$$\begin{aligned} \exists_{x_0 \in I} : f(x_0) \in [m, M] \wedge (b-a) \cdot f(x_0) &= \\ &= \int_a^b f(x) \, dx \end{aligned}$$



D.h. das Integral $\int_a^b f(x) \, dx$ ist gleich dem Inhalt eines Rechtecks, das zwischen den Rechtecken mit den

Inhalten $(b-a) \cdot m$ und $(b-a) \cdot M$ liegt. • C.v.d. l'intégrale $\int_a^b f(x) \, dx$ est égale à l'aire d'un rectangle qui est posé entre les rectangles avec les aires $(b-a) \cdot m$ et $(b-a) \cdot M$.

Satz: • **Théorème:** **Mittelwertsatz der Integralrechnung** • **Théorème de la moyenne du calcul intégral**

Vor.: • **Hyp.:**

f stet'cont(I), $I = [a, b]$

Beh.: • **Thè.:**

$$\exists_{x_0 \in I} : (b-a) \cdot f(x_0) = \int_a^b f(x) \, dx$$

Wie weiter? — Comment continuer?

Bis jetzt haben wir eine Menge von Sätzen hergeleitet, damit aber noch überhaupt kein einziges interessantes Beispiel rechnen können. Wozu denn all diese Arbeit eigentlich? — Das wird sich noch zeigen. Der ganze Trick der Integralrechnung beruht auf dem sogenannten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Infinitesimalrechnung, von Leibniz und Newton), der einen Zusammenhang zwischen dem Differenzieren und dem Integrieren klarlegt. Und dieser Zusammenhang erlaubt es, einen Kalkül aufzubauen. Wir werden damit schlagartig mit den Kenntnissen der Differentialrechnungen bequem Integrale berechnen können.

• Jusqu'à maintenant nous avons déduit un nombre de théorèmes sans pouvoir calculer aucune intégrale intéressante à l'aide de ce théorème. Pourquoi donc de travail? — On verra plus tard. Tout le truc du calcul intégral repose sur le dit théorème principal du calcul différentiel et intégral (infinitésimal, de Leibniz et Newton), qui crée un rapport entre différencier et intégrer. Et ce rapport nous permet de construire un calcul. D'un coup, nous allons pouvoir calculer confortablement des intégrales à l'aide des connaissances du calcul différentiel.

4.3 Der Kalkül — Le calcul

4.3.1 Stammfunktionen — Fonctions antidérivées

Um beim Integrieren weiterzukommen ist es notwendig, uns erst wieder ein wenig mit der Differentialrechnung zu beschäftigen. • A l'intention d'avancer dans le calcul intégral il est donc nécessaire

d'étudier de nouveau un peu le calcul différentiel.

Sei • Soit f definiert über • défini sur I .

Definition: • **Définition:** $F : x \mapsto F(x)$ heisst **Stammfunktion** von f über I
 • s'appelle **antidérivée** ou **fonction primitive** de f sur I
 $\Leftrightarrow \frac{dF}{dx} = F'(x) = f(x)$ in • dans I

1. Beispiel: • **Exemple 1:**

$f(x) = e^x \Rightarrow F_c(x) = e^x + c$ ist Stammfunktion zu $f(x)$ • est antidérivée de $f(x)$.

2. Beispiel: • **Exemple 2:**

$f(x) = k \Rightarrow F_c(x) = k \cdot x + c$ ist Stammfunktion zu $f(x)$ • est antidérivée de $f(x)$.

3. Beispiel: • **Exemple 3:**

$f(x) = \frac{1}{2}x \Rightarrow F_c(x) = x^2 + c$ ist Stammfunktion zu $f(x)$ • est antidérivée de $f(x)$.

4. Beispiel: • **Exemple 4:**

$f(x) = \frac{1}{3}x^2 \Rightarrow F_c(x) = x^3 + c$ ist Stammfunktion zu $f(x)$ • est antidérivée de $f(x)$.

Die Beispiele zeigen: • Les exemples montrent: $[F(x) + c]' = [F(x)]' \Rightarrow$ mit $F(x)$ ist auch $F(x) + c$ Stammfunktion • si $F(x)$ est antidérivée, $F(x) + c$ est aussi antidérivée

$\leadsto$ **Problem:** • **Problème:** Sei • Soit $\mathcal{F} = \{F(x) + c\}$ — Ist $\mathcal{F}$ die Menge aller Stammfunktionen zu $f(x)$, oder gibt es noch weitere? Wir wollen uns das überlegen: • Est-ce que $\mathcal{F}$ est l'ensemble de toutes les antidérivées pour $f(x)$, ou y en a-t-il encore d'autres? Nous voulons y réfléchir:

Seien • Soient

$F_1(x), F_2(x)$ zwei Stammfunktionen zu • deux antidérivées pour $f(x)$ über • sur I .

Sei • Soit $F_1(x) - F_2(x) = \Phi(x) \neq \text{const.} \Rightarrow \Phi'(x) \neq 0$ (keine nur horizontale Tangente • pas de tangente seulement horizontale) $\Rightarrow [F_1(x) - F_2(x)]' \equiv F_1'(x) - F_2'(x) \equiv f(x) - f(x) \equiv 0$
 $\Rightarrow \Phi'(x) = \text{const.} \leadsto$ Widerspruch! • Contradiction! $\leadsto$

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$F_1(x), F_2(x) \leadsto$ Stammfunktionen zu $f(x)$ über I • antidérivées pour $f(x)$ sur I

Beh.: • **Thè.:**

$F_1(x) - F_2(x) \equiv \text{const.}$
 $\{F_1(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\} =$ Menge aller Stammf'kt. zu $f(x)$ über I
 • ensemble de toutes les antidérivées pour $f(x)$ sur I .

Konsequenz: • **Conséquence:** Kennt man eine Stammfunktion, so kennt man demnach alle.

• Si l'on connaît une antidérivée, on connaît donc toutes.

4.3.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung — Théorème principal du calcul différentiel et intégral

Herleitung — Dédution

Zur Herleitung des Hauptsatzes können wir die aufgestellte Theorie der bestimmten Integrale fruchtbar anwenden. • *Pour la déduction du théorème principal nous pouvons appliquer la théorie des intégrales définies.*

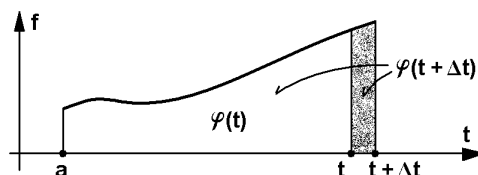
Sei • Soit $\varphi(t) = \int_a^t f(x) dx$ ex.

($a \in I$, $t \in I$ variabel • variable)

$\leadsto \varphi(t)$ ist ein bestimmtes Integral als Funktion der oberen Grenze.

• $\varphi(t)$ est une intégrale définie comme fonction de la limite supérieure.

$\leadsto \varphi'(t) = ?$



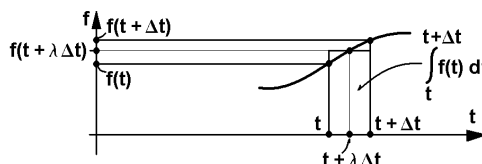
Sei • Soit $t + \Delta t \in I$

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{d\varphi(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_a^{t+\Delta t} f(x) dx - \int_a^t f(x) dx}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_t^{t+\Delta t} f(x) dx}{\Delta t} \stackrel{\text{Mittelwertsatz} \bullet \text{théorème de la valeur moyenne}}{=} \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_m) \cdot \Delta t}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} f(t + \lambda \cdot \Delta t) = f(t), \quad \lambda \in [0, 1]$$

$\leadsto$



Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$\int_a^t f(x) dx \text{ ex. für } \bullet \text{ pour } t \in I, a \in I$$

Beh.: • **Thè.:** $\frac{d}{dt} \int_a^t f(x) dx = f(t)$

Konsequenz: • **Conséquence:** $\int_a^t f(x) dx$ ist Stammfunktion von • est antiderivée de $f(x)$.

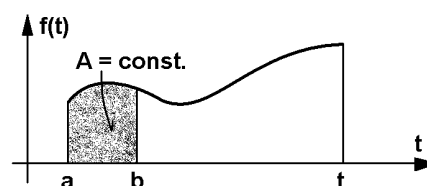
Anders formuliert: Die Ableitung des Integrals als Funktion der oberen Grenze ergibt den Integranden.

• Da dérivée de l'intégrale comme fonction de la limite supérieure donne la fonction à intégrer.

Stammfunktionen sind nur bis auf eine additive Konstante bestimmt. • *Les antiderivées sont fixes excepté une constante additive.*

Wählt man a anders, so erhält man eine andere Stammfunktion (vgl. Skizze).

• *Si l'on choisit a différemment, on obtient une autre antiderivée (voir esquisse).*



$$F_1(t) = \int_a^t f(x) dx, \quad F_2(t) = \int_b^t f(x) dx$$

$$\Rightarrow F_1(t) = \int_a^t f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^t f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + F_2(t),$$

$$\int_a^b f(x) dx = F_1(t) - F_2(t) = \text{const.}$$

Bemerkung: • **Remarque:**

$$\int_a^t f(x) dx = F(t) \text{ ist Stammfunktion} \quad \bullet \text{ est antiderivée} \rightsquigarrow \int_a^a f(x) dx = 0 = F(a)$$

Für die anschliessende Überlegung ist es zweckmässig, die Grenzen anders zu benennen:

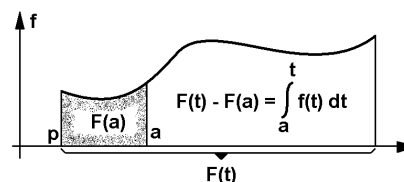
• *Pour les réflexions suivantes il est utile de changer les noms des limites:*

Sei • *Soit* $F(t) = \int_p^t f(x) dx$ eine Stammfunktion zu $f(x)$ • *une antiderivée pour* $f(x)$.

$$\rightsquigarrow F(t) = \int_p^t f(x) dx =$$

$$\int_p^a f(x) dx + \int_a^t f(x) dx = F(a) + \int_a^t f(x) dx$$

$$\Rightarrow F(t) = \int_a^t f(x) dx + F(a)$$



$$\text{Wähle nun} \quad \bullet \text{ Choisis maintenant } t = b \Rightarrow F(b) = \int_a^b f(x) dx + F(a) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Satz: • **Théorème:**

Vor.: • **Hyp.:**

Sei $F(x)$ beliebige Stammfunktion von $f(x)$ über $I = [a, b]$

• *Soit* $F(x)$ *antiderivée quelconque de* $f(x)$ *sur* $I = [a, b]$

Beh.: • **Thè.:**

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Konsequenz: • **Conséquence:** Die Berechnung bestimmter Integrale ist somit reduziert auf die Berechnung von Stammfunktionen. • *Le problème de calculer des intégrales définies est donc réduit au problème de calculer des antiderivées.*

Dabei ist die folgende Bezeichnung üblich: • *La notation suivante est de coutume:*

Definition: • Définition:

Eine Stammfunktion heisst **unbestimmtes Integral**

• *Une antiderivée s'appelle* **intégrale indéfinie**.

Man schreibt: • *On écrit:* $\int f(x) dx := F(x) + C$

C heisst **Integrationskonstante**

• *C s'appelle* **constante d'intégration**.

Bemerkung: • Remarque:

Eine andere Auffassung geht vom Mengenbegriff aus:

• *Une autre façon de voir les choses utilis la notion de l'ensemble:*

$$\int f(x) dx := \{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$$

Beispiele: • Exemples:

$$1. \int 1 dx = x + C$$

$$2. \int x dx = \frac{1}{2} x^2 + C$$

$$3. \int \cos(x) dx = \sin(x) + C$$

$$4. \int_1^3 \frac{1}{x} dx = (\ln(3) + C) - (\ln(1) + C) = \ln(3) - \ln(1)$$

$$5. \int_0^1 x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{t^2} \Big|_{t=0}^{t=1} = e^1 - e^0 = e - 1$$

Man schreibt oft einfach: • *Souvent on écrit simplement:* $\frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_{x=0}^{x=1} = \dots = e - 1$

$$6. \int_r^s x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \Big|_{x=r}^{x=s} = s^{\alpha+1} - r^{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1)$$

Achtung: • Attention: Viele elementare Funktionen besitzen keine elementare Stammfunktionen!

• *Beaucoup de fonctions élémentaires ne possèdent pas d'antiderivée élémentaire!*

Z.B. • *P.ex.* $f(x) = e^{x^2}$ oder • *ou* $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

In einigen Fällen hilft man sich dann damit, dass man den unbekannten Stammfunktionen einen Namen gibt und sie tabelliert. Z.B.: • *Dans certains cas on se débrouille en donnant un nom aux antiderivées inconnues. On construit aussi des tables de valeurs. P.ex.:*

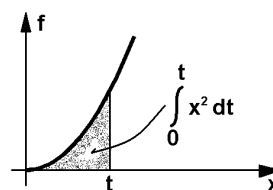
Definition: • Définition:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2} dx := \text{Erf}(t) \leadsto \underline{\text{Error function}}$$

$$\int_0^t \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx := \leadsto \text{Fresnelintegral} \quad \bullet \text{Intégrale de Fresnel}$$

Elementare Beispiele — Exemples élémentaires**1. Beispiel: • Exemple 1:**

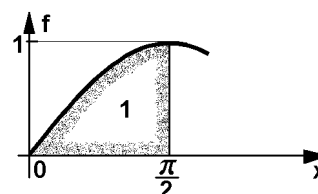
$$\int_0^t x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_{x=0}^{x=t} = \frac{1}{3} (t^3 - 0) = \frac{1}{3} t^3$$

**Bemerkung: • Remarque:**

Das durch den Ursprung und den Punkt (t, t^2) gegebene Quadrat hat den Inhalt t^3 . Die Parabel drittelt dieses Quadrat! • *Le carré donné par l'origine et le point (t, t^2) a l'aire t^3 . La parabole coupe en trois tiers ce carré!*

2. Beispiel: • Exemple 2:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx &= -\cos(x) \Big|_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos(0)) = 0 - (-1) = 1 \end{aligned}$$



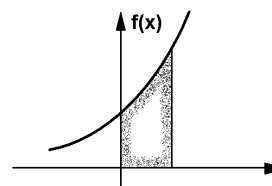
Bemerkung: • Remarque:

Eine transzendente Funktion über einem Intervall mit einer transzendenten Länge begrenzt hier eine Fläche mit einem ganzzahligen Inhalt! • *Une fonction transcendente sur un intervalle dont la longueur est aussi transcendante mène a une surface dont l'aire est un nombre naturel!*

Eine transzendente Funktion über einem Intervall mit einer transzendenten Länge begrenzt hier eine Fläche mit einem ganzzahligen Inhalt! • *Une fonction transcendente sur un intervalle dont la longueur est aussi transcendante mène a une surface dont l'aire est un nombre naturel!*

3. Beispiel: • Exemple 3:

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^x dx &= e^x \Big|_{x=0}^{x=1} = e^1 - e^0 = e - 1 \\ \int_0^1 (e^x + 1) dx &= e^x + x \Big|_{x=0}^{x=1} = \\ &= (e^1 + 1) - (e^0 + 0) = e + 1 - 1 = e \end{aligned}$$

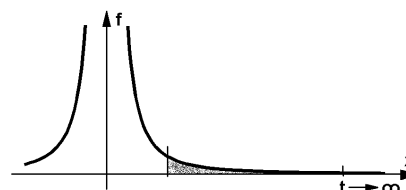


4.3.3 Uneigentliche Integrale — Intégrales impropres

Unendliche Intervalllängen — Longueurs infinies d'intervalles

Bsp.: • Exemple:

$$\begin{aligned} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx &= \int_1^t x^{-2} dx = \frac{1}{-1} x^{-1} \Big|_{x=1}^{x=t} = \\ &= (-t^{-1}) - (-1^{-1}) = -\frac{1}{t} + 1 \end{aligned}$$



Wenn man t immer weiter nach rechts rückt, (d.h. $t \rightarrow \infty$), existiert der Limes des Integrals. Es gilt:

• *Si l'on pousse t de plus en plus à droite, (ç.v.d. $t \rightarrow \infty$), la valeur limite de l'intégrale existe. Il vaut:*

$$\int_1^t \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{t} + 1 \rightarrow 0 + 1 = 1 := \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

Bemerkung: • Remarque:

Wir haben hier die höchst erstaunliche Tatsache vor uns, dass es offenbar Flächen mit endlichen Inhalten unter unendlich langen Kurven gibt! Ohne exakte Mathematik wäre das wohl nicht glaubhaft! • *On voit ici le fait étonnant qu'il existe des surfaces aux mesures finies sous une courbe de longueur infinie! Sans*

les mathématiques exactes on ne pourrait pas croire une chose pareille.

Solche Integrale über unendlichen Intervallen nennen wir **uneigentliche Integrale**. • *Des intégrales sur des intervalles infinis, comme nous avons vu dans l'exemple, s'appellent des intégrales impropres.*

Bsp.: • **Exemple:**

$$\int_1^t \frac{1}{x} dx = \ln(x) \Big|_{x=1}^{x=t} = \ln(t) - \ln(1) = \ln(t) - 0 = \ln(t) \rightarrow \infty \text{ für } \bullet \text{ pour } t \rightarrow \infty.$$

Hier hat die Situation gewechselt: Der Inhalt ist unendlich geworden! • *Ici la situation a changé: L'aire est devenue infinie!*

Bsp.: • **Exemple:** Sei • *Soit* $t < 0$.

$$\int_t^0 e^x dx = e^x \Big|_{x=t}^{x=0} = e^0 - e^t = 1 - e^{-|t|}$$

$$= 1 - \frac{1}{e^{|t|}} \rightarrow 1 - 0 = 1$$

für • *pour* $t \rightarrow -\infty$.



Integrale und Pole — Intégrales et pôles

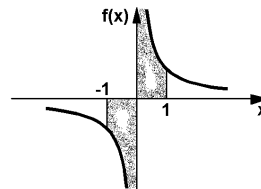
Eine vergleichbare Situation hat man bei Polen. • *Aux pôles on a une situation semblable.*

1. Beispiel: • **Exemple 1:** $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = ?$

$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ hat bei $x = 0$ einen Pol

• *a un pôle à* $x = 0$.

Andererseits muss aus Symmetriegründen der Inhalt der Fläche unter der Kurve 0 sein (Skizze!). • *D'autre part, à cause de la symétrie, la mesure de l'aire sous la courbe doit être 0.*



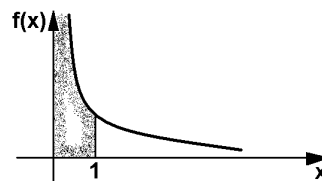
Rechnerisch kann man zu diesem Resultat gelangen, wenn man erst eine symmetrische Umgebung von 0 ($U_\varepsilon(0)$) weglässt, integriert und dann ε gegen 0 gehen lässt. • *On peut calculer ce résultat si l'on enlève d'abord le voisinage symétrique de 0 ($U_\varepsilon(0)$). Après on calcule l'intégrale et puis on laisse aller ε vers 0.*

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left((\ln(|x|) \Big|_{x=-1}^{x=-\varepsilon}) + (\ln(|x|) \Big|_{x=\varepsilon}^{x=1}) \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} ((\ln(|-\varepsilon|) - \ln(1)) + ((\ln(1) - \ln(\varepsilon))) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln(\varepsilon) - \ln(1) + \ln(1) - \ln(\varepsilon)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 0 = 0 \end{aligned}$$

2. Beispiel: • **Exemple 2:**

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} \Big|_{x=0}^{x=1} =$$

$$2\sqrt{x} \Big|_{x=0}^{x=1} = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{0} = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 2$$



Obwohl $\frac{1}{\sqrt{x}}$ bei 0 einen Pol hat, ist das Integral endlich! • *Bien que $\frac{1}{\sqrt{x}}$ possède un pôle à 0, l'intégrale est finie!*

4.3.4 Integrationsregeln — Règles d'intégration

Da integrieren jetzt das Auffinden einer Stammfunktion bedeutet, hat man es hier mit der Umkehropération des Differenzierens zu tun. Wenn man daher die Differentiationsregeln rückwärts liest, erhält man Integrationsregeln. Z.B. gilt daher die Linearitätsregel, woraus man sieht, dass Polynome termweise integrierbar sind. Auch sind die Regeln für einige trigonometrische Funktionen, u.s.w. direkt ablesbar, bei andern lässt sich die Stammfunktion schnell konstruieren. Nachfolgend sind einige einfachen Stammfunktionen aufgelistet. Weiter sei auf die Integrationstabellen in der Standardliteratur verwiesen oder auf Computeralgebraprogramme. Später werden wir noch z.B. die Produktenregel oder die Kettenregel für die Integration umschreiben und entsprechende Regeln erhalten.

• *Comme le fait d'intégrer signifie trouver l'antidérivée, on a à faire avec l'opération inverse de la différentiation. Si l'on lit les règles de la différentiation à l'inverse, on obtient des règles pour l'intégration. P.ex. on obtient la règle de la linéarité de laquelle on déduit que les polynômes sont intégrables terme par terme. On peut aussi lire directement les règles pour les fonctions trigonométriques etc., et pour d'autres fonctions on peut construire les antidérivées très vite. En bas on a une liste d'antidérivées simples. En outre il y a les tables d'intégration dans la littérature standard ou bien on peut utiliser des programmes d'algèbre sur l'ordinateur. Plus tard nous allons transcrire aussi la règle du produit et la règle de dérivation d'une fonction composée (de chaîne) pour le calcul intégral.*

Regeln: • Règles:

1. $\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx + C$
2. $\int x^k dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1} + C$
3. $\int a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 dx = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \dots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$
5. $\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + C$
6. $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$
7. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$
8. $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{-\ln(1-x)}{2} + \frac{\ln(1+x)}{2} + C$
9. $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arsinh}(x) + C$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C$
11. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \ln(x + \sqrt{-1+x^2}) + C$
12. $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$
13. $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$
14. $\int \tan(x) dx = -\ln(|\cos(x)|) + C$
15. $\int \cot(x) dx = \ln(|\sin(x)|) + C$
16. $\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + C$
17. $\int -\frac{1}{\sin^2(x)} dx = \cot(x) + C$
18. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{|a|}\right) + C$
19. $\int \arcsin(x) dx = x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$
20. $\int \arccos(x) dx = x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + C$
21. $\int \arctan(x) dx = x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$
22. $\int \operatorname{arccot}(x) dx = x \cdot \operatorname{arccot}(x) + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$
23. $\int \sinh(x) dx = \cosh(x) + C$
24. $\int \cosh(x) dx = \sinh(x) + C$
25. $\int \tanh(x) dx = \ln(\cosh(x)) + C$
26. $\int \coth(x) dx = \ln(|\sinh(x)|) + C$

4.3.5 Partielle Integration — Intégration partielle

Wir wollen die Produktregel der Differentialrechnung für die Integration nutzbar machen.

• *Nous voulons appliquer la règle du produit du calcul différentiel aussi pour l'intégration:*

$$\begin{aligned}
 (F(x) \cdot G(x))' &= F'(x) \cdot G(x) + F(x) \cdot G'(x) = f(x) \cdot G(x) + F(x) \cdot g(x) \\
 \Rightarrow \int_a^b (F(x) \cdot G(x))' dx &= (F(x) \cdot G(x)) \Big|_{x=a}^{x=b} = \int_a^b f(x) \cdot G(x) dx + \int_a^b F(x) \cdot g(x) dx \\
 \Rightarrow \int_a^b f(x) \cdot G(x) dx &= (F(x) \cdot G(x)) \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b F(x) \cdot g(x) dx
 \end{aligned}$$

Regel: • **Règle:****Vor.:** • **Hyp.:**

$$F'(x) = f(x), \quad G'(x) = g(x)$$

Beh.: • **Thè.:**

$$\int_a^b f(x) \cdot G(x) dx = (F(x) \cdot G(x)) \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b F(x) \cdot g(x) dx$$

1. Beispiel: • **Exemple 1:**

$$\begin{aligned} \int_a^b \sin(x) \cdot x dx &= (-\cos(x) \cdot G(x)) \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b -\cos(x) \cdot 1 dx = (-\cos(b) \cdot b) - (-\cos(a) \cdot a) + \int_a^b \cos(x) dx \\ &= \cos(a) \cdot a - \cos(b) \cdot b + \sin(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = a \cdot \cos(a) - b \cdot \cos(b) + \sin(b) - \sin(a) \end{aligned}$$

Hier haben wir ausgenutzt, dass der Faktor $G(x) = x$ beim Ableiten verschwindet. • *Ici nous avons utilisé le fait que le facteur $G(x) = x$ disparaît si l'on en fait la dérivée.*

$$\mathbf{2. Beispiel:} \quad \bullet \mathbf{Exemple 2:} \quad \int_0^\pi e^x \cdot \sin(x) dx = (e^x \cdot \sin(x)) \Big|_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi e^x \cdot \cos(x) dx =$$

$$= (e^\pi \cdot \sin(\pi)) - (e^0 \cdot \sin(0)) - (e^x \cdot \cos(x)) \Big|_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi e^x \cdot (-\sin(x)) dx =$$

$$= 0 - 0 - (e^\pi \cdot \cos(\pi) - e^0 \cdot \cos(0)) + \int_0^\pi e^x \cdot \sin(x) dx = -e^\pi \cdot (-1) + 1 \cdot 1 - \int_0^\pi e^x \cdot \sin(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi e^x \cdot \sin(x) dx = -e^\pi \cdot (-1) + 1 - \int_0^\pi e^x \cdot \sin(x) dx \Rightarrow 2 \int_0^\pi e^x \cdot \sin(x) dx = 1 + e^\pi$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi e^x \cdot \sin(x) dx = \frac{1 + e^\pi}{2}$$

Hier gelang es uns, für das unbekannte Integral eine algebraische Gleichung herzuleiten, die wir lösen konnten. • *Ici nous sommes arrivés à déduire une équation algébrique que nous avons pu résoudre.*

Diese Methode funktioniert aber nicht immer: • *Cette méthode ne fonctionne pas toujours:*

$$\mathbf{3. Beispiel:} \quad \bullet \mathbf{Exemple 3:} \quad \int_0^\pi \sin^2(x) dx = \int_0^\pi \sin(x) \cdot \sin(x) dx$$

$$= -\cos(x) \cdot \sin(x) \Big|_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi -\cos(x) \cdot \cos(x) dx$$

$$= -\cos(\pi) \cdot \sin(\pi) - (-\cos(0) \cdot \sin(0)) + \int_0^\pi \cos(x) \cdot \cos(x) dx =$$

$$0 + 0 + \sin(x) \cdot \cos(x) \Big|_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi \sin(x) \cdot (-\sin(x)) dx = 0 + 0 + \int_0^\pi \sin(x) \cdot \sin(x) dx = \int_0^\pi \sin^2(x) dx$$

$\leadsto$ Damit ist nichts gewonnen. Es entsteht hier keine algebraische Gleichung, aus der man das unbekannte Integral berechnen könnte! • *Ici on n'a rien gagné. On n'obtient pas d'équation algébrique à l'aide de laquelle on pourrait calculer l'intégrale inconnue!*

Die Sache ist aber nicht verloren: ein Trick hilft hier weiter: • *Mais la chose n'est pas perdue. Un truc nous permet de continuer:*

$$\int_0^\pi \sin^2(x) dx = \int_0^\pi \cos(x) \cdot \cos(x) dx = \int_0^\pi \cos^2(x) dx$$

Aus Gründen der Symmetrie wissen wir: • *A cause de la symétrie nous savons:*

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin^2(x) dx &= 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) dx = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \sin^2(x) dx = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx - 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx \\ \Rightarrow 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx &= 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx \Rightarrow \int_0^{\pi} \sin^2(x) dx = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = x \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

4.3.6 Substitutionen — Substitutions

Eine Regel — Une règle

Sei • *Soit* $\varphi : t \mapsto x = \varphi(t)$ bijektiv • *bijectif*.

Betrachte: • *Etudier*:

$$\begin{array}{ccccc} t = \varphi^{-1}(x) & \xrightarrow{\text{bij}} & x = \varphi(t) & \mapsto & F(x) = F(\varphi(t)) \\ \downarrow & & & & \uparrow \\ & \mapsto & \mapsto & \xrightarrow{F \circ \varphi} & \mapsto \end{array}$$

Sei • *Soit*

$$\begin{aligned} \frac{dF(x)}{dx} &= F'(x) = f(x), \\ \frac{dF(\varphi(t))}{dt} &= \frac{dF(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \Big|_{x=\varphi(t)} = f(x) \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt} = f(\varphi(t)) \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt} = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \end{aligned}$$

$\leadsto f(x)$ hat bezüglich x die Stammfunktion $F(x)$ und $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ hat bezüglich t die Stammfunktion $F(\varphi(t))$ mit $F(x) = F(\varphi(t))$. • $f(x)$ a par rapport à x l'antidérivée $F(x)$ et $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ a par rapport à t l'antidérivée $F(\varphi(t))$ avec $F(x) = F(\varphi(t))$.

$$F(x) = F(\varphi(t)) \leadsto \int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi(a)^{-1}}^{\varphi(b)^{-1}} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \leadsto$$

Regel: • *Règle*:

Substitutionsregel • *Règle de la substitution*

Vor.: • Hyp.:

$\varphi : t \mapsto x = \varphi(t)$ bij.

Beh.: • Thè.:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{\varphi(a)^{-1}}^{\varphi(b)^{-1}} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \\ \int f(x) dx &= F(x) + C \Rightarrow \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C \end{aligned}$$

Bemerkung: • *Remarque*: Formal: • *Formellement*:

$$f(x) dx = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = f(\varphi(t)) \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt} dt = f(\varphi(t)) \cdot \frac{dx}{dt} dt \leadsto dx = \frac{dx}{dt} dt$$

Bsp.: • *Exemple*: $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C$

$$\Rightarrow \int \frac{x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{1}{2} \cdot \arcsin(x^2) + C$$

Praxis — PratiqueEinige Anwendungen: • *Quelques applications:*

$$[F(\alpha \cdot x + \beta)]' = f(\alpha \cdot x + \beta) \cdot (\alpha \cdot x + \beta)' = \alpha \cdot f(\alpha \cdot x + \beta) \Rightarrow \int f(\alpha \cdot x + \beta) dx = \frac{1}{\alpha} \cdot F(\alpha \cdot x + \beta) + C$$

Korollar: • **Corollaire:****Vor.:** • **Hyp.:**

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Beh.: • **Thè.:**

$$\int f(\alpha \cdot x + \beta) dx = \frac{1}{\alpha} \cdot F(\alpha \cdot x + \beta) + C$$

Folgerungen • Conclusions

1. Beispiel: • **Exemple 1:** $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$
 $\Rightarrow \int (\alpha \cdot x + \beta)^n dx = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot (\alpha \cdot x + \beta)^{n+1} + C$

2. Beispiel: • **Exemple 2:** $\int e^x dx = e^x + C \Rightarrow \int e^{\alpha \cdot x + \beta} dx = \frac{1}{\alpha} \cdot e^{\alpha \cdot x + \beta} + C$

3. Beispiel: • **Exemple 3:** $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$
 $\Rightarrow \int \cos(\alpha \cdot x + \beta) dx = \frac{1}{\alpha} \cdot \sin(\alpha \cdot x + \beta) + C$

4. Beispiel: • **Exemple 4:** $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + C \Rightarrow \int \frac{1}{\alpha \cdot x + \beta} dx = \frac{1}{\alpha} \cdot \ln(\alpha \cdot x + \beta) + C$

Das Problem bei der Anwendung der Substitutionsregel liegt bei der Auffindung einer geeigneten Substitution, die zum Erfolg führt. Die Möglichkeiten sind hier aber oft beinahe unbegrenzt. Was also tun? — Viele Werke der mathematischen Standardliteratur bieten hier Hilfen (z.B. Stöcker, Papula), indem sie eine Trickliste anbieten. • *Le problème quant à l'application de la règle de la substitution est de trouver une substitution qui ait du succès. Les possibilités ici sont innombrables. Quoi faire alors? — Beaucoup d'oeuvres de la littérature standard des mathématiques donnent des aides (Stöcker, Papula) en offrant une liste de recettes.*

Trickliste: • **Liste de recettes (trucs):**

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[n]{ax+b} \\ f(x) &= \sqrt[n]{ax^2+bx+c} \\ f(x) &= \sqrt[n]{-ax^2+bx+c} \\ f(x) &= (\ln(x))^n \\ f(x) &= h(\sin(x), \cos(x)) \text{ration.} \end{aligned}$$

Wähle: • **Choisir:**

$$\begin{aligned} t &= \sqrt[n]{ax+b} \\ t &= x \cdot \sqrt[n]{ax^2+bx+c} \\ t &= -\sqrt[n]{-ax^2+bx+c} \\ t &= \ln(x) \\ \frac{2t}{1+t^2} &= \sin(x), \quad \frac{t^2}{1+t^2} = \cos(x) \end{aligned}$$

$$f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$f(x) = \sqrt{a^2 + x^2}$$

$$f(x) = \sqrt{-a^2 + x^2}$$

.....

$$x = a \cdot \cos(t) \vee x = a \cdot \sin(t)$$

$$\text{Z.B.} \bullet \text{ P.ex. } a \cdot \cos(t) = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$x = a \cdot \cosh(t) = \sqrt{a^2 + x^2}$$

$$x = a \cdot \sinh(t) = \sqrt{-a^2 + x^2}$$

.....

4.3.7 Partialbruchzerlegung — Décomposition en fractions partielles

Das Problem — Le problème

Geg.: • **Donné:** Polynome • *Polynômes* $P(x), Q(x)$

Problem: • **Problème:** $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = ?$

Bsp.: • **Exemple:**

$$\int \frac{27x^5 + 144x^4 - 36x^3 + 378x^2 + 162x - 81}{3x^3 - 4x^2 - 5x + 2} dx =$$

$$\int 9x^2 + 60x + 83 + \frac{992x^2 + 457x - 247}{3x^3 - 4x^2 - 5x + 2} dx = \int 9x^2 + 60x + 83 + \frac{309}{x-2} + \frac{24}{x+1} + \frac{7}{3x-1} dx$$

$$= \int 9x^2 dx + \int 60x dx + \int 83 dx + \int \frac{309}{x-2} dx + \int \frac{24}{x+1} dx + \int \frac{7}{3x-1} dx = \dots \rightsquigarrow$$

Idee: • **Idée:** Vereinfache den Bruch derart, dass nur elementare übrigbleiben. • *Simplifier la fraction tellement qu'il ne reste que des intégrales élémentaires.*

1.Schritt: • Etape 1:

Dividiere $P(x)$ durch $Q(x)$, bis $\text{pgrad}(\text{Zähler}) < \text{pgrad}(\text{Nenner})$ ist.

• *Diviser $P(x)$ par $Q(x)$, jusqu'à ce que $\text{pgrad}(\text{numérateur}) < \text{pgrad}(\text{dénominateur})$.*

Bsp.: • **Exemple:**

$$\frac{27x^5 + 144x^4 - 36x^3 + 378x^2 + 162x - 81}{3x^3 - 4x^2 - 5x + 2} = 9x^2 + 60x + 83 + \frac{992x^2 + 457x - 247}{3x^3 - 4x^2 - 5x + 2}$$

1.Schritt: • Etape 1:

Versuche den verbleibenden Bruch in elementarere Teilbrüche zu zerlegen. • *Essaie de décomposer la fraction qui reste en fractions partielles élémentaires.*

Bsp.: • **Exemple:** $\frac{992x^2 + 457x - 247}{3x^3 - 4x^2 - 5x + 2} = \frac{309}{x-2} + \frac{24}{x+1} - \frac{7}{3x-1}$

Bei Zahlenbrüchen ist dieser Vorgang die Umkehrung zum Gleichnamigmachen. • *Pour les fractions de nombres c'est l'opération inverse à l'opération d'écrire avec un seul dénominateur.*

Beispiel mit Zahlen: • **Exemple avec des nombres:** $\frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

Beispiel mit Polynomen: • **Exemple avec des polynômes:**

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x-1) \cdot (x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}, \quad A, B = ?$$

A berechnen: • *Calculer* A : Mult. mit • *Mult. avec* $(x-1)$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)}{(x-1) \cdot (x+1)} = \frac{A(x-1)}{x-1} + \frac{B(x-1)}{x+1} \Rightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{A}{1} + \frac{B(x-1)}{x+1} \quad \text{für } \bullet \text{ pour } x \neq 1$$

$$\text{Bilde } \lim_{x \rightarrow 1}: \bullet \text{ Calcule } \lim_{x \rightarrow 1}: \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{A}{1} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{B(x-1)}{x+1} \Rightarrow \frac{1}{2} = A + \frac{B \cdot 0}{2} = A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

Entsprechend für B • *Correspondant pour* B

$$(\text{mult. mit } \bullet \text{ mult. avec } (x+1), \quad \lim_{x \rightarrow -1} \rightsquigarrow A = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{B}{2(x+1)} \rightsquigarrow \text{Partialbrüche } \bullet \text{ fractions partielles } \frac{1}{2(x-1)}, \frac{B}{2(x+1)}$$

$$\rightsquigarrow \int \frac{1}{x^2-1} dx = \int \frac{1}{2(x-1)} dx + \int \frac{B}{2(x+1)} dx = \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + C = \dots$$

Hinweis zur Partialbruchzerlegung: • **Indication pour la décomposition en fractions partielles:**

Die Theorie der Partialbruchzerlegung sollte in einem Kapitel der Algebra geboten werden, wo es sachlogisch hingehört. Hier sei nur eine kurze Bemerkung angebracht: Voraussetzung zur erfolgreichen Zerlegung ist die Faktorisierung des Nennerpolynoms, die auf dem Hauptsatz der Algebra beruht. (Jedes Polynom mit nur reellen Koeffizienten lässt sich reell in lineare oder quadratische Faktoren resp. in Potenzen von solchen zerlegen.). Das Problem: Es existiert keine Methode zur allgemeinen Auffindung der Zerlegung.

• *La théorie de la décomposition en fractions partielles est traitée dans un chapitre de l'algèbre, où elle est située selon la logique des sujets. Une brève remarque: Pour avoir du succès en faisant la décomposition, il faut décomposer le polynôme dans le dénominateur qui se base sur le théorème principal de l'algèbre. (Chaque polynôme n'ayant que des coefficients réels est décomposable dans le réel en facteurs linéaires ou quadratiques resp. en puissances de tels facteurs.) Le problème: Il n'existe pas de méthode générale pour trouver la décomposition.*

$$\rightsquigarrow \text{Faktoren } \bullet \text{ facteurs } (x-x_i)^n, (x^2+b_ix+d_i)^n, n \in \mathbb{N}$$

Häufige Integrale — Intégrales fréquentes

$$\text{Sei } \bullet \text{ Soit } \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{A}{x-x_1} + \frac{Bx+D}{x^2+bx+d} dx$$

$$\rightsquigarrow \int \frac{A}{x-x_1} dx = A \cdot \ln|x-x_1| + C, \int \frac{Bx+D}{x^2+bx+d} dx = ? \quad \text{Sei } B \neq 0$$

$$\int \frac{Bx+D}{x^2+bx+d} dx = \frac{B}{2} \cdot \int \frac{2x+2\frac{D}{B}+b-b}{x^2+bx+d} dx = \frac{B}{2} \cdot \int \frac{2x+b}{x^2+bx+d} dx + \frac{B}{2} \cdot \int \frac{2\frac{D}{B}-b}{x^2+bx+d} dx =$$

$$= \ln|x^2+bx+d| + C + \frac{B}{2} \cdot (2\frac{D}{B}-b) \int \frac{1}{x^2+bx+d} dx, \quad \int \frac{1}{x^2+bx+d} dx = ?$$

$$x = t - \frac{b}{2} \Rightarrow \int \frac{1}{x^2+bx+d} dx = \int \frac{1}{(t-\frac{b}{2})^2 + b(t-\frac{b}{2}) + d} dx =$$

$$= \int \frac{1}{t^2 - 2t\frac{b}{2} + \frac{b^2}{4} + bt - \frac{b^2}{2} + d} dx = \int \frac{1}{t^2 - \frac{b^2}{4} + d} dx := \int \frac{1}{t^2 \pm \alpha^2} dx$$

$$\text{Fall } \bullet \text{ Cas } " + ": \int \frac{1}{t^2 + \alpha^2} dx = \frac{1}{\alpha} \cdot \arctan\left(\frac{t}{\alpha}\right) + C_1$$

$$\text{Fall } \bullet \text{ Cas } " - ": \int \frac{1}{t^2 - \alpha^2} dx = \int \frac{1}{(t-\alpha)(t+\alpha)} dx = \int \frac{1}{2(t-\alpha)} - \frac{1}{2(t+\alpha)} dx =$$

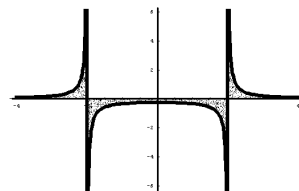
$$= \frac{1}{2} \cdot (\ln|t-\alpha| - \ln|t+\alpha|) + C_2 = \frac{1}{2} \cdot (\ln\left|\frac{t-\alpha}{t+\alpha}\right|) + C_2$$

4.4 Anwendungen, Beispiele — Applications, exemples

4.4.1 Rechenbeispiele — Exemples de calcul

Beispiel mit Polen — Exemple avec des pôles

$$\begin{aligned}
 \int_{-10}^{10} \frac{1}{x^2 - 1} dx &= \\
 &= \frac{1}{2} \left(\int_{-10}^{10} \frac{1}{x-1} dx - \int_{-10}^{10} \frac{1}{x+1} dx \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\int_{-11}^9 \frac{1}{t} dt - \int_{-9}^{11} \frac{1}{t} dt \right) = \frac{1}{2} \left(\int_{-11}^{-9} \frac{1}{t} dt + \right. \\
 &\quad \left. \int_{-9}^{-1} \frac{1}{t} dt - \int_{-1}^9 \frac{1}{t} dt - \int_9^{11} \frac{1}{t} dt \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\int_{-11}^{-9} \frac{1}{t} dt - \int_9^{11} \frac{1}{t} dt \right) = \frac{1}{2} (\ln |t| \Big|_{t=-11}^{t=-9} - \ln |t| \Big|_{t=9}^{t=11}) = \frac{1}{2} (\ln(9) - \ln(11) - \ln(11) + \ln(9)) = \\
 &= \ln(9) - \ln(11) = \ln\left(\frac{9}{11}\right)
 \end{aligned}$$



Stückweise stetige Funktionen — Fonctions continues par morceaux

Bei stückweise stetigen Funktionen integriert man erst einzeln über die Stetigkeitsbereiche. Anschließend summiert man. (Vgl. 2.4.3 Seite 60.) • *Pour intégrer une fonction continue par morceaux, on calcule d'abord les intégrales sur les intervalles où la fonction est continue. Après on fait la somme. (Voir 2.4.3 à la page 60.)*

Bsp.: • Exemple:

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x + \pi) & x \in [-2\pi, -\pi) \\ \sin(x) & x \in [-\pi, 0) \\ x^{-\frac{1}{2}} & x \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

$$\leadsto \int_{-2\pi}^{2\pi} f(x) dx = \int_{-2\pi}^{-\pi} \sin(x + \pi) dx + \int_{-\pi}^0 \sin(x) dx + \int_0^{2\pi} x^{-\frac{1}{2}} dx = -2 + (-2) + 2\sqrt{2\pi} = 2\sqrt{2\pi} - 4$$

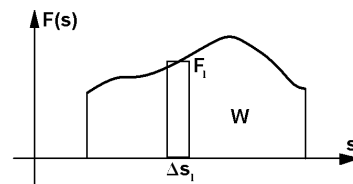
Potentielle Energie — Energie potentielle

Sei • Soit F = Kraft • Force, s = Weg • chemin, W = Arbeit • énergie.

$$F = \text{const.} \leadsto W = F \cdot s$$

Sonst: • Si non:

$$W \simeq \sum_i F_i \cdot \Delta s_i \rightarrow \int_{s_1}^{s_2} F(s) ds$$

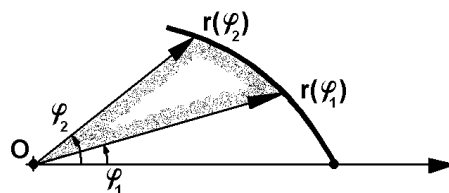


$$s = r, \quad F(r) = c \cdot \frac{q \cdot Q}{r^2}$$

$$\Rightarrow W = \int_{r_1}^{r_2} c \cdot \frac{q \cdot Q}{r^2} dr = c \cdot q \cdot Q \cdot \int_{r_1}^{r_2} r^{-2} dr = c \cdot q \cdot Q \cdot (-1) \cdot r^{-1} \Big|_{r=r_1}^{r=r_2} = c \cdot q \cdot Q \cdot (-1) \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

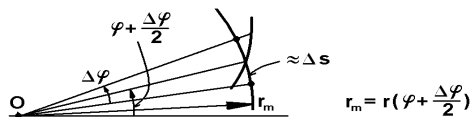
4.4.2 Kurven in Polarkoordinaten — Courbes en coordonnées polaires

Problem: • **Problème:** Was ist der Inhalt der Fläche zwischen der Kurve und zwei vom Ursprung ausgehenden Strahlen? • *Quel est la mesure de la surface entre la courbe et deux rayons qui partent de l'origine?*



$\Delta A \simeq \text{Dreieck}$ • *triangle*, $\Delta s = \Delta\varphi \cdot r_m$

$$\begin{aligned} \leadsto \Delta A &\simeq \frac{1}{2} r_m \left(\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2} \right) \cdot \Delta s = \\ &= \frac{1}{2} r_m \left(\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2} \right)^2 \cdot \Delta\varphi \end{aligned}$$



$$\leadsto A \simeq \sum_{\dots} \Delta A = \sum_{\dots} \frac{1}{2} r_m \left(\varphi + \frac{\Delta\varphi}{2} \right)^2 \cdot \Delta\varphi \rightarrow \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{2} r(\varphi + 0)^2 d\varphi$$

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$r = r(\varphi)$ (Polarkoord. • *coord. polaires*)
 $r(\varphi)$ stückweise stetig • *continue par morceaux*
 $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$

Beh.: • **Thè.:**

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{2} r(\varphi)^2 d\varphi$$

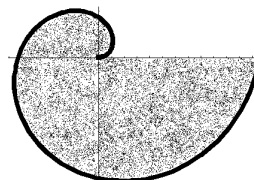
Bsp.: • **Exemple:**

Archimedische Spirale:

• *Spirale d'Archimède:*

$r = r(\varphi) = \varphi$, $I = [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \varphi^2 d\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \varphi^3 \Big|_0^{2\pi} = \\ &= \frac{1}{6} \cdot (2\pi)^3 \Big|_0^{2\pi} = \frac{4\pi^3}{3} \end{aligned}$$



Damit ist es möglich, Inhalte von Flächen zu berechnen, die z.B. von lemniskatenartigen Kurven, kardioidenartigen Kurven etc. begrenzt werden. • *Maintenant il est possible de calculer la mesure de surfaces qui sont bornées par des courbes du genre de lemniscates ou de cardioides.* (Z.B. • *P.ex.* $r(\varphi) = (\cos(2\varphi))^{\frac{1}{2}}$, $r(\varphi) = 2(1 - \cos(\varphi))$ u.s.w • *etc.*)

4.4.3 Kurvenlängen — Longueurs de courbes

Kartesische Koordinaten — Coordonnées cartésiennes

Sei • *Soit* $f : x \mapsto f(x) \in \mathcal{D}(I)$, $I = [x_1, x_2]$

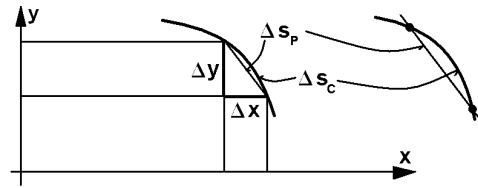
Problem: • **Problème:** Ausser für den Kreisumfang sind Längen von krummen Kurven bis jetzt nicht definiert. • *Sauf pour la circonférence du cercle la longueur de courbes non droites n'a pas été définie jusqu'ici.*

Idee: • **Idée:** Ersetze die Kurve $C(I)$ resp. C durch einen Polygonzug P . • *Remplace la courbe $C(I)$ resp. C par une courbe polygonale P .*

$\leadsto$ Längen • *Longueurs*

$\Delta s_C := \Delta l, \Delta s_P := \Delta s$

bezüglich • *par rapport à Δx*



$$\leadsto \Delta s_C \simeq \Delta s_P = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x$$

$$\leadsto \sum_{\dots} \Delta s_C \simeq \sum_{\dots} \Delta s_P \rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

Der so gewonnene Ausdruck kann benutzt werden, um die Länge einer Kurve über dem Intervall $[x_1, x_2]$ zu definieren. • *Nous pouvons utiliser l'expression ainsi obtenue pour définir la longueur d'une courbe sur l'intervalle $[x_1, x_2]$.*

Definition: • **Définition:** Länge • *Longueur* $l(C(I)) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$

Eine Nachprüfung für Streckenlängen und Kreisumfang ergibt, dass diese Definition mit der bisherigen Längenmessung verträglich ist. • *Le contrôle pour la longueur d'un segment d'une droite ou la circonférence d'un cercle montre que les résultats classiques ne sont pas touchés.*

Gerade: • **Droite:** $y = f(x) = ax + b, x \in [x_1, x_2]$

Klassisch: • *Classique:*

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + ((ax_2 + b) - (ax_1 + b))^2} = |x_2 - x_1| \cdot \sqrt{1 + a^2} = (x_2 - x_1) \cdot \sqrt{1 + a^2}$$

Neu: • *Nouveau:*

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + a^2} dx = \sqrt{1 + a^2} \cdot x \Big|_{x_1}^{x_2} = (x_2 - x_1) \cdot \sqrt{1 + a^2}$$

Viertelskreis: • **Quart d'un cercle:**

$$y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, y' = \frac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, x \in [0, r],$$

$$\text{Klassisch: } \bullet \text{ } \textit{Classique: } l = \frac{2r\pi}{4} = \frac{r\pi}{2}$$

Neu: • *Nouveau:*

$$l = \int_0^r \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \int_0^r \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2} dx = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{(\frac{x}{r})^2}{1 - (\frac{x}{r})^2}} dx$$

$$\text{Subst.: } x = r \cos(t), \frac{dx}{dt} = -r \sin(t), dx = -r \sin(t) dt$$

$$\begin{aligned} \leadsto l &= \int_{t=\arccos(0)}^{t=\arccos(1)} \sqrt{1 + \frac{\cos^2(t)}{1 - \cos^2(t)}} \cdot (-r \sin(t)) dt = -r \int_{t=\frac{\pi}{2}}^{t=0} \sqrt{\frac{1 - \cancel{\cos^2(t)} + \cancel{\cos^2(t)}}{1 - \cos^2(t)}} \cdot \sin(t) dt = \\ &= -r \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{\frac{1}{\sin^2(t)}} \cdot \sin(t) dt = -r \int_{\frac{\pi}{2}}^0 1 dt = -r t \Big|_{\frac{\pi}{2}}^0 = -r \cdot (0 - \frac{\pi}{2}) = \frac{r \cdot \pi}{2} \end{aligned}$$

Konsequenz: • **Conséquence:** Diese Längendefinition ergibt in den klassischen Fällen die gleichen Werte. • *Dans les cas classiques cette définition de la longueur donne les mêmes valeurs.*

Bsp.: • **Exemple:** Parabellänge: • *Longueur de la parabole:*

Die Parabel $f(x) = x^2$ ist nach der Geraden die einfachste Kurve. • *La courbe la plus simple, à part la droite, est la parabole $f(x) = x^2$.*

Sei • *Soit $I = [0, t] \leadsto$*

$$l = \int_0^t \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \int_0^t \sqrt{1 + x^2} dx = \frac{\operatorname{arsinh}(x)}{2} + \frac{x \cdot \sqrt{1 + x^2}}{2} \Big|_0^t = \frac{\operatorname{arsinh}(t)}{2} + \frac{t \cdot \sqrt{1 + t^2}}{2}$$

Bemerkung: • **Remarque:**

Da der Integrant $= \sqrt{1 + (y'(x))^2}$ ist, kann man im allgemeinen nicht erwarten, dass eine einfache Stammfunktion gefunden werden kann. • *Comme la fonction intégrée est $= \sqrt{1 + (y'(x))^2}$, on ne peut plus s'attendre à trouver une antiderivée simple.*

Polarkoordinaten — Coordonnées polaires

Skizze: • *Esquisse: $\Delta l \simeq \Delta s$, $(\Delta s)^2 \simeq$*

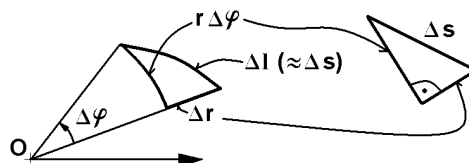
$$(r \cdot \Delta\varphi)^2 + (\Delta r)^2 = (\Delta\varphi)^2 \cdot (r^2 + (\frac{\Delta r}{\Delta\varphi})^2)$$

$$\leadsto \Delta s = \sqrt{r^2 + (\frac{\Delta r}{\Delta\varphi})^2} \cdot \Delta\varphi$$

$$\leadsto l = \sum \dots \Delta l \simeq \sum \dots \Delta s =$$

$$\sum \dots \sqrt{r^2 + (\frac{\Delta r}{\Delta\varphi})^2} \cdot \Delta\varphi$$

$$\rightarrow \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\varphi})^2} d\varphi$$



Damit haben wir vereinfacht eine Formel für die Kurvenlänge bei Polarkoordinaten hergeleitet. Es sei dem Leser überlassen, diese Formel mittels Substitution auf die Situation in kartesischen Koordinaten zurückzuführen. • *A l'aide d'une méthode simplifiée on a donc déduit une formule pour la longueur d'une courbe en coordonnées polaires. C'est un exercice pour le lecteur de déduire cette formule de la situation cartésienne à l'aide d'une substitution.*

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$r : \varphi \mapsto r(\varphi)$ Kurve in Polarkoord. • *Courbe en coord. polaires, $I = [\varphi_1, \varphi_2]$*

Beh.: • **Thè.:**

Kurvenlänge • *Longueur de la courbe*

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2(\varphi) + (\frac{dr(\varphi)}{d\varphi})^2} d\varphi$$

Bsp.: • **Exemple:**

Länge der Archimedischen Spirale • *Longueur de la spirale d'Archimède $r(\varphi) = \varphi$:*

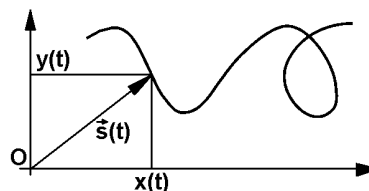
Sei • Soit $I = [0, t] \rightsquigarrow l = \int_0^t \sqrt{r^2(\varphi) + \left(\frac{dr(\varphi)}{d\varphi}\right)^2} d\varphi = \int_0^t \sqrt{\varphi^2 + \left(\frac{d\varphi}{d\varphi}\right)^2} d\varphi =$
 $= \int_0^t \sqrt{\varphi^2 + 1} d\varphi = \frac{\operatorname{arsinh}(t)}{2} + \frac{t \cdot \sqrt{1+t^2}}{2} = \text{Parabellänge} \bullet \text{Longueur de la parabole!}$

Vektorfunktionen — Fonctions vectorielles

Geg.: • **Donné:**

Kurve • *Courbe* $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

resp. • *resp.* $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} s_1(t) \\ \vdots \\ s_n(t) \end{pmatrix}$



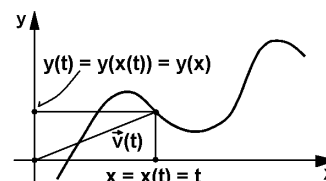
Bsp.: • **Exemple:** Kreis: • *Cercle:* $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} r \cos(t) \\ r \sin(t) \end{pmatrix}$

oder Spirale: • *... ou spirale:* $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} r \cdot t \cdot \cos(t) \\ r \cdot t \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$ u.s.w • *etc..*

Speziell: • **Spécialement:**

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} t \\ y(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow f : x \mapsto f(x) = y(x)$$



$$\Delta l \simeq \Delta s = \sqrt{(\Delta s_1(t))^2 + \dots + (\Delta s_n(t))^2}, \quad \frac{\Delta s}{\Delta t} = \sqrt{\left(\frac{\Delta s_1(t)}{\Delta t}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\Delta s_n(t)}{\Delta t}\right)^2},$$

$$\Delta s = \sqrt{\left(\frac{\Delta s_1(t)}{\Delta t}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\Delta s_n(t)}{\Delta t}\right)^2} \cdot \Delta t = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \Delta t \rightarrow ds = \frac{ds}{dt} dt = \sqrt{\left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2 + \dots + \left(\frac{ds_n}{dt}\right)^2} \cdot dt$$

$$l = \sum_{\dots} \Delta l = \sum_{\dots} \Delta s = \sum_{\dots} \sqrt{\left(\frac{\Delta s_1(t)}{\Delta t}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\Delta s_n(t)}{\Delta t}\right)^2} \cdot \Delta t \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2 + \dots + \left(\frac{ds_n}{dt}\right)^2} dt$$

Wie bei den Polarkoordinaten können wir auf Grund dieser vereinfachten Herleitung einen Satz notieren:

• *Comme sous les coordonnées polaires, il nous est possible de noter un théorème d'après cette déduction simplifiée:*

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$\vec{s} : t \mapsto \vec{s}(t)$ Vektorkurve. • *Courbe vectorielle,*
 $I = [t_1, t_2]$

Beh.: • **Thè.:**

Kurvenlänge • *Longueur de la courbe*

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2 + \dots + \left(\frac{ds_n}{dt}\right)^2} dt$$

Bsp.: • **Exemple:** (Kreis: • *Cercle:*)

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} r \cos(t) \\ r \sin(t) \end{pmatrix} \rightsquigarrow l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{d(r \cos(t))}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d(r \sin(t))}{dt}\right)^2} dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(-\sin(t))^2 + r^2(\cos(t))^2} dt = \int_0^{2\pi} r \sqrt{1} dt = r t \Big|_0^{2\pi} = r 2\pi$$

4.4.4 Elementare Linienintegrale — Intégrales curvilignes élémentaires

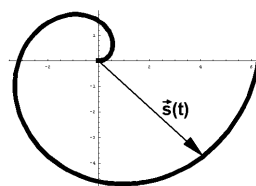
Skalare Funktionen — Fonctions scalaires

Geg.: • **Donné:** Kurve • *Courbe*

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} s_1(t) \\ \vdots \\ s_n(t) \end{pmatrix} \text{ in Parameterform } \bullet \text{ en}$$

forme paramétrique.

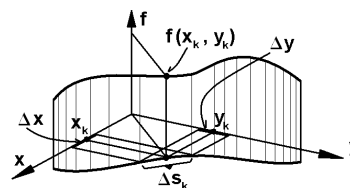
(Üblich ist $n = 2$ und $n = 3$. • *De coutume on a $n = 2$ et $n = 3$.*)



Bsp.: • **Exemple:** Spirale: • *Spirale:* $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} r \cdot t \cdot \cos(t) \\ r \cdot t \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$

Problem: • **Problème:** In der Praxis geht es oft darum, z.B. Ausdrücke nachfolgender Form zu bestimmen: • *Souvent en pratique il s'agit de calculer p.ex. des expressions comme il suit:*

$$G = \lim_{|\Delta s_k \rightarrow 0|} \sum_k f(x_k, y_k) \cdot \Delta s_k$$



$f(x_k, y_k)$ sei z.B. die Veränderung des Tankinhalts pro Wegstück Δs_k , G sei der gesamte Treibstoffverbrauch. Oder $f(x_k, y_k)$ sei eine Kraft, $G = W$ eine Arbeit u.s.w.. • *Soit $f(x_k, y_k)$ p.ex. la différence du contenu du réservoir d'essence par longueur de chemin Δs_k , soit G la consommation d'essence totale. Ou soit $f(x_k, y_k)$ une force, $G = W$ un travail (énergie) etc..*

Normalerweise ist eine Kurve in einer beliebigen Parametrisierung gegeben. • *Normalement on a donné une courbe avec une paramétrisation quelconque.*

Sei • *Soit* $n = 2$, $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}$, $t \in [a, b] \Rightarrow f(x, y) = f(\varphi(t), \psi(t)) = h(t)$

(Allgemein. • *Généralement:* $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$)

Sei • *Soit* $s = s(t) =$ Weglänge • *longueur du chemin.*

s steckt z.B. in $\sum_k f(x_k, y_k) \cdot \Delta s_k$ im Term Δs_k , t jedoch nicht. • *s apparaît p.ex. dans*

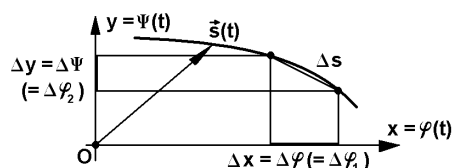
$\sum_k f(x_k, y_k) \cdot \Delta s_k$ dans le terme Δs_k , t par contre manque.

↪

Eine Umparametrisierung ist notwendig!

• *Un changement du paramètre est nécessaire!*

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta \varphi_1(t))^2 + \dots + (\Delta \varphi_n(t))^2},$$



$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \Delta t = \sqrt{\left(\frac{\Delta \varphi_1(t)}{\Delta t}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\Delta \varphi_n(t)}{\Delta t}\right)^2} \cdot \Delta t \rightarrow ds = \frac{ds}{dt} dt = \sqrt{(\varphi'_1(t))^2 + \dots + (\varphi'_n(t))^2} \cdot dt$$

Definition: • **Définition:**

$$\int_C f(x_1, \dots, x_n) ds := \lim_{|\Delta s_k| \rightarrow 0, m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m f(x_{1,k}, \dots, x_{n,k}) \Delta s_k$$

heißt **Linienintegral** von f längs C • *s'appelle intégrale curviligne de f le long de C .*

Es gilt: • *Il vaut:*

$$\sum_{k=1}^n f(x_{1,k}, \dots, x_{n,k}) \Delta s_k = \sum_{k=1}^n f(x_{1,k}, \dots, x_{n,k}) \frac{\Delta s_k}{\Delta t_k} \cdot \Delta t_k \rightarrow \int_{t_1=a}^{t_2=b} f(x_1, \dots, x_n) \frac{ds}{dt} dt,$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{(\varphi'_1(t))^2 + \dots + (\varphi'_n(t))^2}$$

Satz: • **Théorème:**

Vor.: • **Hyp.:**

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} s_1(t) \\ \vdots \\ s_n(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(I) \rightsquigarrow C \text{ über } \bullet \text{ sur } I = [a, b]$$

Beh.: • **Thè.:**

$$\int_C f(x_1, \dots, x_n) ds = \int_{t_1=a}^{t_2=b} f(x_1, \dots, x_n) \frac{ds}{dt} dt,$$

$$\frac{ds}{dt} dt = \sqrt{(\varphi'_1(t))^2 + \dots + (\varphi'_n(t))^2} dt$$

Speziell: • **Spécialement:** $s = x(t)$ oder • *ou $s = y(t)$*

$$\rightsquigarrow \int_C f(x, y) dx = \int_{t_1=a}^{t_2=b} f(x(t), y(t)) \frac{dx(t)}{dt} dt = \int_{t_1=a}^{t_2=b} f(x(t), y(t)) x'(t) dt,$$

$$\int_C f(x, y) dy = \int_{t_1=a}^{t_2=b} f(x(t), y(t)) \frac{dy(t)}{dt} dt = \int_{t_1=a}^{t_2=b} f(x(t), y(t)) y'(t) dt$$

Bsp.: • Exemple:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + y^2, \quad \vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi) \\ \Rightarrow s(t) &= x^2 + y^2 = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1, \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{-\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1 \\ \Rightarrow \int_C f(x_1, x_2) ds &= \int_0^{2\pi} 1 \cdot 1 dt = 2\pi \end{aligned}$$

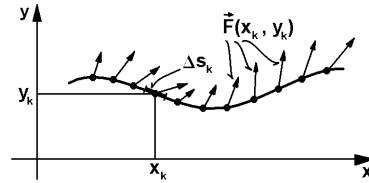
Vektorfunktionen — Fonctions vectorielles

Geg.: • Donné: Kurve • Courbe $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} s_1(t) \\ \vdots \\ s_n(t) \end{pmatrix}$ (Parameterform • forme paramétr.)
(Z.B. • P.ex. $n = 2, n = 3$.)

Problem: • Problème:

Bestimme Ausdrücke der Form: • Calculer des expressions de forme:

$$W = \lim_{|\Delta s_k \rightarrow 0|} \sum_k \vec{F}(x_{1,k}, \dots, x_{n,k}) \cdot \Delta \vec{s}_k$$



Bsp.: • Exemple: Arbeit • Energie $W = \lim_{|\Delta s_k \rightarrow 0|} \sum_{k=1}^m \Delta W_k = \lim_{|\Delta s_k \rightarrow 0|} \sum_{k=1}^m \langle \vec{F}(x_k, y_k, z_k), \Delta \vec{s}_k \rangle$

Im $\mathbb{R}^3$ gilt dann: • Alors dans le $\mathbb{R}^3$ il vaut: $\Delta W_k = \langle \vec{F}(x_k, y_k, z_k), \Delta \vec{s}_k \rangle =$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} F_1(x_k, y_k, z_k) \\ F_2(x_k, y_k, z_k) \\ F_3(x_k, y_k, z_k) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Delta x_k \\ \Delta y_k \\ \Delta z_k \end{pmatrix} \right\rangle \text{ mit } \bullet \text{ avec } x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t), \quad z = \varphi_3(t)$$

$$\leadsto \frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot \Delta t = \frac{\Delta \varphi_1}{\Delta t} \cdot \Delta t \rightarrow \frac{dF_1}{dt} dt, \quad \frac{\Delta \varphi_i}{\Delta t} \cdot \Delta t \rightarrow \frac{dF_i}{dt} dt \leadsto dx_i = \frac{dF_i}{dt} dt$$

$$W \approx \sum_{k=1}^m \Delta W_k, \quad \Delta W_k = \sum_{i=1}^n F_i(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \cdot \frac{\Delta \varphi_i}{\Delta t} \cdot \Delta t =$$

$$F_1(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \cdot \frac{\Delta \varphi_1}{\Delta t} \cdot \Delta t + \dots + F_n(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \cdot \frac{\Delta \varphi_n}{\Delta t} \cdot \Delta t =$$

$$= (F_1(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \cdot \frac{\Delta \varphi_1}{\Delta t} + \dots + F_n(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \cdot \frac{\Delta \varphi_n}{\Delta t}) \cdot \Delta t$$

$$\rightarrow \int_{t=a}^{t=b} (F_1(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} + \dots + F_n(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \cdot \frac{d\varphi_n}{dt}) dt =$$

$$= \int_{t=a}^{t=b} \left\langle \begin{pmatrix} F_1(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \\ \vdots \\ F_n(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{d\varphi_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d\varphi_n}{dt} \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_{t=a}^{t=b} \langle \vec{F}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)), \frac{d\vec{s}}{dt} \rangle dt =$$

$$= \int_{t=a}^{t=b} \langle \vec{F}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)), \vec{s}'(t) \rangle dt$$

$\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{s}'(t)$ ist dabei der **Tangentenvektor** • *est le vecteur tangentiel*.

Definition: • **Définition:** $\int_C \vec{F} d\vec{s} = \int_{t=a}^{t=b} \langle \vec{F}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)), \vec{s}'(t) \rangle dt$ heisst Linienintegral von $\vec{F}$ längs C • *s'appelle intégrale curviligne de $\vec{F}$ le long de C*

Schreibweise: • **Façon d'écrire:** Falls C eine geschlossene Kurve ist, schreiben wir:

• *Si C est une courbe fermée, nous écrivons:*

$$\oint_C \vec{F} d\vec{s}$$

Weiter zu Linienintegralen vgl. Vektoranalysis • *Quant aux intégrales curvilignes consulter aussi analyse vectorielle.*

Bsp.: • **Exemple:** $\vec{s} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 - t \\ \frac{1}{2}t^2 + t \end{pmatrix}$, $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x-y \\ x^2+y \end{pmatrix}$, $t \in [0, 1]$

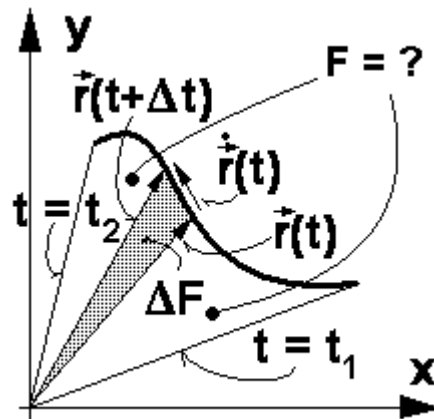
$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_C \vec{F} d\vec{s} &= \int_{t=0}^{t=1} \left\langle \begin{pmatrix} x-y \\ x^2+y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t^2-t \\ \frac{1}{2}t^2+t \end{pmatrix}' \right\rangle dt = \int_{t=0}^{t=1} \left\langle \begin{pmatrix} t^2-t - (\frac{1}{2}t^2+t) \\ (t^2-t)^2 + (\frac{1}{2}t^2+t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2t-1 \\ t \end{pmatrix} \right\rangle dt = \\ &= \int_{t=0}^{t=1} (\frac{1}{2}t^2 - 2t) \cdot (2t-1) + (t^4 - 2t^3 + \frac{3}{2}t^2 + t) \cdot (t+1) dt = \frac{t^6}{6} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{8} - \frac{2t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} \Big|_{t=0}^{t=1} = 0.925 \end{aligned}$$

4.4.5 Flächen unter Vektorkurven — Surfaces sous des courbes vectorielles

Problem: • **Problème:**

Flächeninhalt • *Surface* $F = ?$

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) \in \mathbb{R}^3 &\Rightarrow \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta F = \\ \frac{1}{2} \left(\vec{r}(t) \times \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right)_3 &= \frac{1}{2} (x y_t' - x_t' y) \\ \Rightarrow F &= \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (x y_t' - x_t' y) dt \end{aligned}$$



Satz: • **Théorème:**

Vor.: • **Hyp.:**

$\vec{r}(t)$: Kurve (stetig) • $\vec{r}(t)$: *Courbe (continue)*
 $t \in I = [t_1, t_2]$

Beh.: • **Thè.:**

$$F_{t_1, t_2} = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (x y_t' - x_t' y) dt$$

Bsp.: • **Exemple:**

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cos(t) \\ b \sin(t) \end{pmatrix}, \quad I = [t_1, t_2] = [0, 2\pi] \rightsquigarrow \text{Ellipse} \bullet \text{ellipse}$$

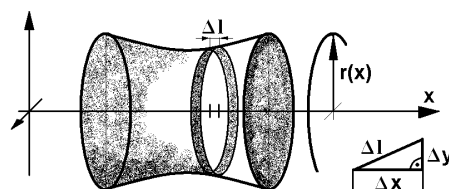
$$\begin{aligned} \rightsquigarrow F_{t_1, t_2} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x y_t' - x_t' y) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos(t) b \cos(t) - (-a \sin(t)) b \sin(t)) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a b \underbrace{(\cos^2(t) + \sin^2(t))}_{=1} dt = \frac{1}{2} a b \int_0^{2\pi} dt = \frac{2\pi a b}{2} = \pi a b \end{aligned}$$

4.4.6 Rotationskörper — corps de révolution

Mantelflächen von Rotationskörper — Périphérie de corps de révolution

Rotationsstreifeninhalt • *Aire d'une bande de révolution* $y = r(x)$

$$\Delta a \simeq 2\pi r(x) \Delta l \rightarrow da = 2\pi r(x) dl$$



$$\Delta l \simeq \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x \rightarrow dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

$$\rightsquigarrow \text{Oberfläche} \bullet \text{Aire de la périphérie } A = \int_0^L da = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

$$\text{Formel:} \bullet \text{Formule:} \quad A = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

Bsp.: • **Exemple:** $f(x) = \sqrt{x}$, $I = [0, 1]$

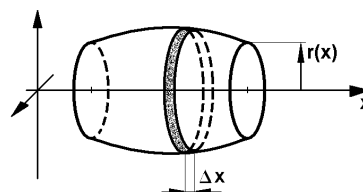
$$\Rightarrow A = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} dx = \pi \sqrt{\frac{1+4x}{x}} \left(\frac{\sqrt{x}}{6} + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \right) \simeq 5.33041$$

Volumen von Rotationskörper — Volume de corps de révolution

Rotationsscheibeneinhalt • *Volume d'un disque de révolution:*

$$\begin{aligned} \Delta V_i &\simeq A_i \Delta x = r(x_i)^2 \pi \Delta x \\ &= y(x_i)^2 \pi \Delta x \rightarrow dV = y(x_i)^2 \pi dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^V dV = \int_{x_1}^{x_2} y(x)^2 \pi dx \\ &= \pi \int_{x_1}^{x_2} y(x)^2 dx \end{aligned}$$



$$\text{Formel:} \bullet \text{Formule:} \quad V = \pi \int_{x_1}^{x_2} y(x)^2 dx$$

4.4.7 Schwerpunkte und Guldin — Centres de gravité et Guldin

Flächenschwerpunkte — Centres de gravité de surfaces

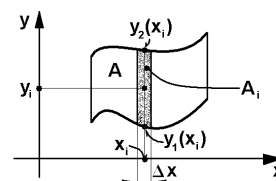
Sei • Soit $y_s :=$ Flächenschwerpunkt in y -Richtung • centres de gravité en direction y

Flächenschwerpunkt eines senkrechten Streifens: • Centre de gravité d'une bande verticale:

Sei • Soit $A_i = (y_2(x_i) - y_1(x_i)) \Delta x$,

$$y_i = \frac{y_2(x_i) + y_1(x_i)}{2}$$

Gleichgewichtsbedingung: • Condition d'équilibre: $\sum_i y_i \cdot A_i \simeq y_s \cdot A$



$$\begin{aligned} \Rightarrow y_s &\simeq \frac{1}{A} \cdot \sum_i y_i \cdot A_i = \frac{1}{A} \cdot \sum_i \left(\frac{y_2(x_i) + y_1(x_i)}{2} \right) \cdot (y_2(x_i) - y_1(x_i)) \Delta x = \\ &\frac{1}{2A} \cdot \sum_i (y_2(x_i)^2 - y_1(x_i)^2) \Delta x = \frac{1}{2 \int_{x_1}^{x_2} (y_2(x) - y_1(x)) dx} \cdot \sum_i (y_2(x_i)^2 - y_1(x_i)^2) \Delta x \\ &\rightarrow \frac{\int_{x_1}^{x_2} (y_2(x)^2 - y_1(x)^2) dx}{2 \int_{x_1}^{x_2} (y_2(x) - y_1(x)) dx} \end{aligned}$$

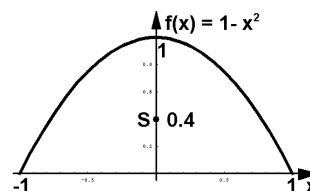
Formel: • Formule:

$$y_s = \frac{\int_{x_1}^{x_2} (y_2(x)^2 - y_1(x)^2) dx}{2 \int_{x_1}^{x_2} (y_2(x) - y_1(x)) dx}$$

Bsp.: • Exemple: Parabel • Parabole

$$f(x) = 1 - x^2, \quad I = [x_1, x_2] = [-1, 1]$$

$$y_s = \frac{\int_{-1}^1 ((1 - x^2)^2 - 0^2) dx}{2 \int_{-1}^1 ((1 - x^2) - 0) dx} = \frac{2}{5} = 0.4$$



Die Regeln von Guldin — Les règles de Guldin

1. Sei O die Oberfläche eines Rotationskörpers bezüglich der x -Achse und M_x ein betrachtetes Moment bezüglich dieser Achse. y_s sei der Schwerpunktsabstand in y -Richtung. b sei die Länge einer Kurve (Bogen).

• Soit $O =$ surface de révolution par rapport à l'axe x et M_x un moment considéré par rapport à cette axe. Soit y_s la distance du centre de gravité dans la direction y . Soit b la longueur d'une courbe.

$$\leadsto \quad b = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \Rightarrow O = 2\pi \underbrace{\int_a^b \underbrace{f(x)}_{=r} \underbrace{\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}_{=dm}}_{M_x} = 2\pi \cdot y_s \cdot b \Rightarrow O = 2\pi \cdot y_s \cdot b$$

2. Sei weiter V das Volumen eines Rotationskörpers und A die erzeugende Fläche.

• *En outre, soit $V = \text{volume de révolution}$ et A la surface génératrice.*

$$\leadsto 2\pi \cdot A \cdot y_S = 2\pi \cdot \left(\int_a^b f(x) dx \right) \cdot \frac{\int_a^b \frac{f(x)}{2} \cdot f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} = \pi \cdot \int_a^b \underbrace{f(x)^2}_{=r^2} dx = V \Rightarrow V = \pi \cdot A \cdot y_S$$

Satz: • **Théorème:** (Guldin)

Geg.: • **Donné:** Rotationskörper • *Surface et volume de révolution*

Beh.: • **Thè.:**

$$1. \quad O = 2\pi \cdot b \cdot y_S$$

$$2. \quad V = \pi \cdot A \cdot y_S$$

4.4.8 Trägheitsmoment — Moment d'inertie

Der Begriff — La notion

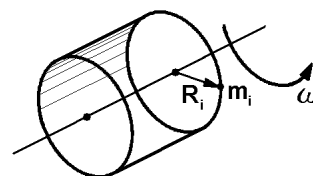
Sei • *Soit* $v = \omega \cdot R$,

$\omega =$ Winkelgeschwind. • *vitesse angulaire*

$\leadsto$ Drehbewegung • *Rotation.*

$$E_{kin}(m_i) = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i \omega^2 R_i^2,$$

$$m = \sum_i \Delta m_i,$$



$$E_{kin} = \sum_i E_{kin}(m_i) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \omega^2 R_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i R_i^2 m_i \rightarrow \frac{1}{2} \omega^2 \int_{m_1}^{m_2} R(m)^2 dm := \frac{1}{2} \omega^2 I$$

Definition: • **Définition:** $I = \int_{m_1}^{m_2} R(m)^2 dm$ heisst **Trägheitsmoment** • *s'appelle Moment d'inertie*

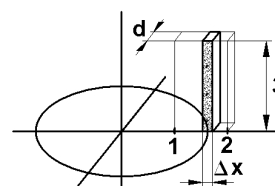
$$\text{Es gilt: } \bullet \text{ Il vaut: } \frac{dm}{dV} := \rho(V) \Rightarrow dm = \rho(V) dV \Rightarrow I = \int_{V_1}^{V_2} R(m(V))^2 \rho(V) dV$$

Bsp.: • **Exemple:** Profil: • *Profile:*

$$dV = d \cdot f(x) \cdot dx, \quad f(x) = 3,$$

$$x \in [1, 2], \quad \rho = \text{const.}, \quad R = x$$

$$\Rightarrow I = \rho \cdot d \int_1^2 3x^2 dx = \rho d (8 - 1) = 7 d \rho$$



Bemerkung: • **Remarque:**Impuls: • *Impulsion:* $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ Drehimpuls: • *Moment cinétique (d'impulsion, angulaire):*

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m \cdot \vec{v}) = m \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) = m \cdot (\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}))$$

$$= \rho \cdot V \cdot (\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})), \quad \omega \perp \vec{r} \Rightarrow |\vec{L}| = m \cdot |\vec{r}|^2 \cdot |\vec{\omega}|$$

$$|\vec{\omega}| = \omega = \text{const.} \Rightarrow |\vec{L}| = L = \underbrace{m \cdot r^2}_I \cdot \omega := I \cdot \omega$$

Trägheitsmoment und Achsen — Le moment d'inertie par rapport aux axes

1. Sei die y -Achse die Drehachse einer flächenartigen Masse M der Dicke d , welche als Funktionsfläche von $f(x)$ über $I_x = [a, b]$ beschreibbar ist.
 - Soit l'axe y identique avec l'axe de rotation de la masse M de l'épaisseur d qui est de la manière d'une surface, donnée par une fonction $f(x)$ sur $I_x = [a, b]$.

$$\Rightarrow I_y = \int_M x^2 dm = \int_a^b x^2 \cdot f(x) \cdot d \cdot \rho(x) dx \Rightarrow I_y = d \cdot \int_a^b x^2 \cdot f(x) \cdot \rho(x) dx$$

2. Sei die x -Achse die Drehachse einer flächenartigen Masse M der Dicke d , welche als Funktionsfläche von $f(x)$ über $I_x = [a, b]$ beschreibbar ist.
 - Soit l'axe x identique avec l'axe de rotation de la masse M de l'épaisseur d qui est de la manière d'une surface, donnée par une fonction $f(x)$ sur $I_x = [a, b]$.

$$\Rightarrow dI_x = \int_M y^2 dm = \int_a^b y^2 \cdot d \cdot \rho(x) dx dy \Rightarrow I_x = \frac{d}{3} \cdot \int_a^b y^3 \cdot \rho(x) dx = \frac{d}{3} \cdot \int_a^b f(x)^3 \cdot \rho(x) dx$$

3. Sei die z -Achse die Drehachse einer Masse M . $r(m)$ sei der Abstand von dm zur z -Achse.
 - Soit l'axe z identique à l'axe de rotation de la masse M . Soit $r(m)$ la distance de m à l'axe z .

$$\Rightarrow r(m)^2 := r^2 = x^2 + y^2, \quad I_z = \int_M r(m) dm = \int_M (x^2 + y^2) dm = \int_M x^2 dm + \int_M y^2 dm = I_x + I_y$$

Definition: • **Définition:** I_x und I_y heissen auch **axiale Trägheitsmomente**. I_z heisst **polares Trägheitsmoment**.• I_x et I_y s'appellent **moments d'inertie axiaux**, I_z s'appelle **moment d'inertie polaire**.**Satz:** • **Théorème:**Voraussetzungen wie oben. • *Hypothèses voir ci-dessus.*

$$I_y = d \cdot \int_a^b x^2 \cdot f(x) \cdot \rho(x) dx, \quad I_x = \frac{d}{3} \cdot \int_a^b f(x)^3 \cdot \rho(x) dx, \quad I_z = I_x + I_y$$

Der Satz von Steiner — Le théorème de SteinerWir betrachten den Fall: • *Considérons le cas:* $I_y = d \cdot \int_a^b x^2 \cdot f(x) \cdot \rho(x) dx.$

Sei x_S der Schwerpunktabstand der Masse M von der y -Achse.

- Soit x_S la distance du centre de gravité de l'axe x .

Sei • Soit

$$x = u + x_S \Rightarrow f(x) = f(u + x_S) = f_1(u), \quad f_1(u) = f_1(x - x_S), \quad \rho(x) = \rho(u + x_S) = \rho_1(u) := \rho = \text{const.}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I_y &= d \cdot \rho \cdot \int_a^b x^2 \cdot f(x) dx = d \cdot \rho \cdot \int_{x=a}^{x=b} (u + x_S)^2 \cdot f(u + x_S) d(u + x_S) = d \cdot \rho \cdot \int_{a-x_S}^{b-x_S} (u + x_S)^2 \cdot f_1(u) du \\ &= d \cdot \rho \cdot \int_{u_a}^{u_b} (u^2 + 2u x_S + x_S^2) \cdot f_1(u) du = d \cdot \rho \cdot \int_{u_a}^{u_b} u^2 \cdot f_1(u) du + 2d x_S \cdot \rho \cdot \int_{u_a}^{u_b} u \cdot f_1(u) du + d \cdot x_S^2 \cdot \rho \cdot \int_{u_a}^{u_b} f_1(u) du \end{aligned}$$

Nun ist aber $u \cdot f_1(u) = Mt(u) = \text{Moment bezüglich } x_S$. Und $\int_{u_a}^{u_b} u \cdot f_1(u) du = 0$ ist der Grenzwert der Momentensumme, welche wegen der Definition des Schwerpunktes (Gleichgewicht) null sein muss.

- Maintenant on sait que $u \cdot f_1(u) = Mt(u) = \text{moment par rapport à } x_S$. Et $\int_{u_a}^{u_b} u \cdot f_1(u) du = 0$ est la valeur limite de la somme des moments, qui doit être égal à zéro, car x_S est le centre de gravité (équilibre).

$$\Rightarrow I_y = d \cdot \rho \cdot \underbrace{\int_{u_a}^{u_b} u^2 \cdot f_1(u) du}_{=I_{yx_S}} + d \cdot x_S^2 \cdot \rho \cdot \underbrace{\int_{u_a}^{u_b} f_1(u) du}_{=A}$$

Satz: • **Théorème:** (von **Steiner**) $I_y = I_{yx_S} + d \cdot x_S^2 \cdot \rho \cdot A$

Dieser Satz gilt auch für die x und die z -Achse. Der Beweis sei dem Leser überlassen.

- Ce théorème est aussi valable par rapport à l'axe x et l'axe z . La preuve soit laissée au lecteur.

4.4.9 Physikalische Anwendungen — Applications en physique

Ausdehnungsarbeit bei Gasen — Travail d'extension concernant les gazes

$$\begin{aligned} \Delta W &= F \cdot \Delta s = \frac{F \cdot A \cdot \Delta s}{A} = p \cdot \Delta V \\ W &= \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV = \int_{V_1}^{V_2} \left. \frac{c}{V} \right|_{p \cdot V = c = \text{const.}} dV = c \cdot \ln(V) \Big|_{V_1}^{V_2} = c \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \end{aligned}$$

Elektrische Leistung — Puissance électrique

$$\text{Es gilt: } \bullet \text{ Il vaut: } P = \frac{dW}{dt} = U(t) \cdot I(t) \Rightarrow W = \int_{t_1}^{t_2} U(t) \cdot I(t) dt$$

Bsp.: • **Exemple:** $U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$, $I(t) = I_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$

$$\Rightarrow W = \frac{U_0 I_0 (2\omega t \cos(\varphi) + \sin(2\omega t + \varphi))}{4\omega} + C$$

Energie im Gravitationsfeld — Energie dans le champs de gravitation

$$F(r) = \gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}, \quad \Delta W = F \Delta r = \gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \Delta r$$

$$\Rightarrow W = \int_{r_1}^{r_2} \gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} dr = \gamma \cdot M \cdot m \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = -\gamma M m \frac{1}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} = \gamma M m \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

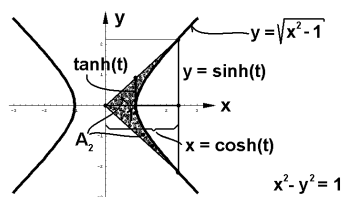
4.4.10 Die Bedeutung des arsinh — La signification de l'arsinh

Bemerkung: • **Remarque:** *arsinh* heisst *area sinus hyperbolicus*.
 • *arsinh* signifie *area sinus hyperbolicus*.

Es gilt: • *Il vaut:*

$$x^2 - y^2 = \cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$$

$$x(y) = \sqrt{1 + y^2}$$



$$\Rightarrow A_2 = 2 \left(\int_0^{y_0} \sqrt{1 + y^2} dy - \frac{x_0 y_0}{2} \right) = \operatorname{arsinh}(y) = \operatorname{arsinh}(\sinh(t)) = t = \operatorname{arsinh}(y)$$

Konsequenz: • **Conséquence:** $A_2 = t = \operatorname{arsinh}(y)$

arsinh(y) ist also ein Flächeninhalt (Area) an der Hyperbel.

• *arsinh(y)* est donc une surface (area) par rapport à l'hyperbole.

4.4.11 Die Gamma-Funktion — La fonction gamma

Die **Eulersche Gamma-Funktion** $\Gamma(x)$ bringt uns eine sinnvolle Verallgemeinerung der Fakultäten für $x \in \mathbb{R}^+$. Sie wird wie folgt definiert: • **La Fonction gamma d'Euler** $\Gamma(x)$ nous apporte une généralisation (qui a un sens) des factorielles pour $x \in \mathbb{R}^+$. On la définit comme il suit:

Definition: • **Définition:** $\Gamma(x) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0$

Problem: • **Problème:** Existiert dieses uneigentliche Integral überhaupt? • *Est-ce que cette intégrale impropre existe-t-elle enfin?*

Nach Definition muss gelten: • *Il vaut d'après la définition: $t \in (0, \infty)$, $x > 0$*

$$\text{Sei } \bullet \text{ Soit } t > 1 \vee x \geq 1 \rightsquigarrow e^{-t} t^{x-1} = \frac{t^{x+1}}{e^t \cdot t^2} < \frac{1}{t^2}$$

$$\Rightarrow \Gamma(x) := \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt + \int_1^k e^{-t} t^{x-1} dt + \int_k^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

$$\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt \rightsquigarrow t \in (0, 1). \text{ Problem nur für } \bullet \text{ Problème seulement pour } x \geq 1, \quad x - 1 > 0$$

$$\int_1^k e^{-t} t^{x-1} dt \rightsquigarrow \text{Problemlos } \bullet \text{ Pas de problème.}$$

$$0 < \int_k^\infty e^{-t} t^{x-1} dt < \int_k^\infty \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t} \Big|_k^\infty = \frac{1}{k} \rightsquigarrow \text{ existiert} \quad \bullet \text{ existe } (k > 1, t \in (k, \infty))$$

$\rightsquigarrow$ Es bleibt der Fall $\bullet$ *Il reste le cas* $t \in (0, 1], x \in (0, 1)$

$$\rightsquigarrow t \in (0, 1] \Rightarrow e^{-t} = \frac{1}{e^t} < \frac{1}{e^0} = 1 \Rightarrow e^{-t} t^{x-1} < t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}} := \frac{1}{t^p}, \quad p \in (0, 1)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt &< \int_0^1 t^{x-1} dt = \int_0^1 \frac{1}{t^p} dt = \int_0^1 t^{-p} dt = \frac{1}{1-p} t^{1-p} \Big|_0^1 = \frac{1}{1-(1-x)} t^{1-(1-x)} \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{x} t^x \Big|_0^1 = \frac{1}{x} \rightsquigarrow \Gamma(x) \text{ existiert für } x > 0 \quad \bullet \text{ Existe pour } x > 0. \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Der zweite Teil des folgenden Satzes ist noch zu beweisen: $\bullet$ *Il faut prouver encore la deuxième partie du théorème suivant:*

Satz: $\bullet$ **Théorème:** a) $\Gamma(x)$ existiert für $x > 0$ $\bullet$ *Existe pour* $x > 0$
b) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \Gamma(n) = (n-1)!$

Wir beweisen b) mit vollständiger Induktion:

$\bullet$ *Nous prouvons b) à l'aide de l'induction complète:*

Verankerung: $\bullet$ *'ancrer':* $n = k = 1$:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} t^{1-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} dt = -\frac{1}{e^t} \Big|_0^\infty = -\left(\frac{1}{e^\infty} - \frac{1}{e^0}\right) = -(0 - 1) = 1 = 0! \Rightarrow \Gamma(1) = 0!$$

Vererbung: $\bullet$ *'Conclusion de l'induction':* **Vor.:** $\bullet$ **Hyp.:** $\Gamma(k) = (k-1)!$

Beh.: $\bullet$ **Thè.:** $\Gamma(k+1) = (k)! = k \cdot (k-1)! = k \cdot \Gamma(k)$

Beweis: $\bullet$ **Preuve:** Partielle Integration $\bullet$ *Intégration partielle*

$$\rightsquigarrow \Gamma(k+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^{(k+1)-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} t_{\uparrow}^k t_{\downarrow} dt = -\frac{1}{e^t} t^k \Big|_0^\infty - \left(-\int_0^\infty e^{-t} k t^{k-1} dt\right) =$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^t} t^k - \frac{1}{e^0} 0^k + k \int_0^\infty e^{-t} t^{k-1} dt = 0 - 1 \cdot 0 + k \cdot \Gamma(k) \Rightarrow \Gamma(k+1) = k \cdot \Gamma(k)$$

4.4.12 Die Irrationalität von π ¹² — L'irrationalité de π ¹²

Annahme: • *Supposons que:* $\pi = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $a, b \in \mathbb{N}$

Definition: • *Définition:* $f(x) := \frac{x^n \cdot (a - bx)^n}{n!} \rightsquigarrow$ Polynom vom Grade $2n$, alle Terme vom Grade $\geq n$ • *Polynôme du degré $2n$, tous les termes du degré $\geq n$.*

$$F(x) := f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) - \dots + (-1)^n f^{(2n)}(x) \quad (f^{(k)}(x): k\text{-te Ableitung} \bullet k\text{-ème dérivée})$$

$$\rightsquigarrow F''(x) = -(F(x) - f(x))$$

$$\text{Betrachte: } \bullet \text{ Etudier: } f(\pi) = f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n (a - b \frac{a}{b})^n}{n!} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n (a - a)^n}{n!} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n 0}{n!} = 0$$

$$f(0) = \frac{0^n \cdot (a - b \cdot 0)^n}{n!} = \frac{0 \cdot (a)^n}{n!} = 0$$

▷ (a) $f^k(x)$ enthält Terme der Form • *contient des termes de la forme $x^s \cdot (a - bx)^r$,*
 $s + r + k = 2 \cdot n$ falls • *si $s + r = 2n - k > 0$, $2n > k$ (Produktregel) • (règle du produit).*

$$\triangleright \text{ (b) } 2n = k \rightsquigarrow f^k(x) = \text{const.} = \frac{n! n!}{n!} \cdot c \in \mathbb{Z}$$

$$\triangleright \text{ (c) } 2n < k \rightsquigarrow f^k(x) = 0 \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \triangleright \text{ (a) } \rightsquigarrow f^k(\pi) = f^k\left(\frac{a}{b}\right) &= \sum \text{const.} \cdot \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^s \cdot (a - b \left(\frac{a}{b}\right))^r}{n!} = \sum \text{const.} \cdot \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^s \cdot (a - a)^r}{n!} = \\ &= \sum \text{const.} \cdot \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^s \cdot 0}{n!} = 0 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ In allen Fällen: • *Dans tous les cas:*

$$f^k(\pi) \in \mathbb{Z} \Rightarrow F(\pi) = f(\pi) - f''(\pi) + f^{(4)}(\pi) - \dots + (-1)^n f^{(2n)}(\pi) \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ebenso: } \bullet \text{ De même: } f^k(0) = \sum \text{const.} \cdot \frac{(0)^s \cdot (a - b(0))^r}{n!} = \sum \text{const.} \cdot \frac{0}{n!} = 0 \text{ in allen Fällen}$$

$$\bullet \text{ dans tous les cas } \Rightarrow F(0) = f(0) - f''(0) + f^{(4)}(0) - \dots + (-1)^n f^{(2n)}(0) \in \mathbb{Z} \rightsquigarrow$$

Wichtig: • **Important:** (I) $F(\pi) \in \mathbb{Z}$, $F(0) \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \text{Betrachte: } \bullet \text{ Etudier: } &\frac{d}{dx}(F'(x) \sin(x) - F(x) \cos(x)) \\ &= F''(x) \sin(x) + F'(x) \cos(x) - F'(x) \cos(x) + F(x) \sin(x) \\ &= -(F(x) - f(x)) \sin(x) + F(x) \sin(x) = f(x) \sin(x) \\ \Rightarrow \int_0^\pi f(x) \sin(x) dx &= \int_0^\pi \frac{d}{dx}(F'(x) \sin(x) - F(x) \cos(x)) dx = (F'(x) \sin(x) - F(x) \cos(x)) \Big|_0^\pi \\ &= (F'(\pi) \sin(\pi) - F(\pi) \cos(\pi)) - (F'(0) \sin(0) - F(0) \cos(0)) = \\ &= (F'(\pi) \cdot 0 - F(\pi) \cdot (-1)) - (F'(0) \cdot 0 - F(0) \cdot 1) = F(\pi) + F(0) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \int_0^\pi f(x) \sin(x) dx \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

¹²Nach Lindemann • *D'après Lindemann*, 1852 – 1939

Andererseits: • *D'autre part:* $x \in (0, \pi) \Rightarrow$

$$f(x) = \frac{x^n \cdot (a - bx)^n}{n!} = \frac{x^n \cdot \left(\frac{a}{b} - x\right)^n \cdot b^n}{n!} = \frac{x^n \cdot (\pi - x)^n \cdot b^n}{n!} > 0$$

(da alle Faktoren • *comme tous les facteurs* > 0)

$$\leadsto 0 < \sin(x) \cdot f(x) \leq f(x) = \frac{x^n \cdot (a - bx)^n}{n!} < \frac{\pi^n \cdot (a - bx)^n}{n!} < \frac{\pi^n \cdot a^n}{n!}$$

$n!$ wächst stärker als • *croît plus que* a^n und • *et* π^n

$$\Rightarrow 0 < \sin(x) \cdot f(x) < \frac{\pi^n \cdot a^n}{n!} < \varepsilon \quad \text{für} \quad \bullet \quad \text{pour } n > N_0$$

$$\leadsto \text{(II)} \quad 0 < \int_0^\pi \sin(x) \cdot f(x) dx < \int_0^\pi \varepsilon dx = \varepsilon \cdot \pi < 1 \quad \text{für} \quad \bullet \quad \text{pour } n > N_0$$

Zusammen: • *Ensemble:* (I) $F(\pi) \in \mathbb{Z}$, $F(0) \in \mathbb{Z}$, (II) $0 < \int_0^\pi \sin(x) \cdot f(x) dx < 1$

für • *pour* $n > N_0 \leadsto$ Widerspruch! • *Contradiction!*

$\leadsto$ Annahme: • *Supposons que:* $\pi = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $a, b \in \mathbb{N}$ muss falsch sein • *doit être faux.*

$\leadsto \pi \notin \mathbb{Q}$

Satz: • **Théorème:** $\pi \notin \mathbb{Q}$

Bemerkung: • **Remarque:**

Angeblich sind folgende Näherungen von π verwendet worden:

• *Il paraît qu'on a utilisé les approximations suivantes de π :*

1. Babylon: • *Babylon:* $\pi \approx 3 + \frac{1}{8}$
2. Zeit von Platon: • *Temps de Platon:* $\pi \approx \sqrt{2} + \sqrt{3}$
3. Archimedes: • *Archimède:* $\pi \approx \frac{22}{7}$
4. Altes Indien: • *Indes, temps passé:* $\pi \approx 3.1416$
5. Altes China: • *Chine, temps passé:* $\pi \approx \frac{355}{113}$
6. Jahr 1865: • *Année 1865:* $\pi \approx \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} \approx 3.14153$

Korollar: • **Corollaire:**

Die Strecke π ist nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar. Der Kreis mit dem Radius 1 ist daher nicht mit Zirkel und Lineal in ein flächengleiches Quadrat verwandelbar. Die **Quadratur des Kreises** ist damit nicht möglich. • *Le segment de droite à la distance π ne peut pas être construit à l'aide du compas et la règle. Un cercle de rayon 1 ne peut donc pas être transformé en un carré de la même surface. La quadrature du cercle est donc impossible.*

Zum Beweis: • Quant à la preuve:

Eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal kann man mit Hilfe von Sätzen wie jenem von Pythagoras nachrechnen. Wenn die Strecke π mit Zirkel und Lineal konstruierbar wäre, so könnte man die Strecke π aus der Strecke 1 mit Hilfe von Wurzelausdrücken berechnen. Dann wäre π nicht transzendent.

- *Une construction à la règle et au compas peut être contrôlée par un calcul en utilisant des théorèmes comme celui de Pythagore. Si l'on pouvait construire la distance π par la règle et le compas, alors π devait être calculable à partir de 1 en utilisant des expressions avec des racines. Puis π ne serait pas transcendant.*

Kapitel • Chapitre 5

Etwas Numerik — Un peu de mathématique numérique

5.1 Algorithmen — Algorithmes

Begriff: • **Notion:** Unter einem **Algorithmus** verstehen wir heute eine Rechenvorschrift in folgendem Sinne: Ein Algorithmus ist eine endliche Beschreibung eines endlichen Verfahrens zur Ermittlung gesuchter aus gegebenen Werten. • *Sous un **algorithme** nous comprenons aujourd'hui une prescription de calcul dans le sens suivant: Un algorithme est une description finie d'une méthode finie pour trouver des valeurs cherchées sur la base de valeurs données.*

Der Begriff **Algorithmus** hat arabische Wurzeln. Es ist die lateinisierte Form des Namens „Alchwārizimi“ resp. nach einer anderen Quelle „Abu'Abdallah Muhammad ibn Nusa al-Huwarisimi al Magusi“, ca. 780–850, Bibliothekar des Kalifen Almamun. Eines seiner Werke handelt über quadratische Gleichungen. Es trägt den Titel „Hisālgabr walmukābalah“. Daraus ist das Wort **Algebra** entstanden.

• *La notion d'**algorithme** a des racines arabes. Elle est la forme latinisée de „Alchwārizimi“ resp. selon une autre source „Abu'Abdallah Muhammad ibn Nusa al-Huwarisimi al Magusi“, ca. 780–850, bibliothécaire du calif Almamun. Une de ses oeuvres traite les équations quadratiques. Le titre est „Hisālgabr walmukābalah“. De là est déduit le mot **algèbre**.*

5.2 Iterative Lösung von Gleichungssystemem — Solution de systèmes d'équation par itération

5.2.1 Ein Beispiel aus der Algebra: Das Verfahren von Gauss–Seidel — Un exemple de l'algèbre: La méthode de Gauss–Seidel

Problem: • **Problème:** Ein lineares Gleichungssystem soll rasch näherungsweise gelöst werden. Idee: Versuche eine Iteration. • *Il faut très vite résoudre un système d'équations linéaires approximativement. Idée: Essaie une itération.*

Bsp.: • **Exemple:**

$$\begin{array}{rcl} 6.25 \boxed{x_1} + 2.08x_2 - 1.44x_3 & = & 2.59 \\ 1.78x_1 - 4.61 \boxed{x_2} + 0.44x_3 & = & 5.22 \\ -1.36x_1 + 0.95x_2 + 3.75 \boxed{x_3} & = & 3.61 \end{array} \quad \rightsquigarrow A \cdot \vec{x} + \vec{b}$$

Die Koeffizienten in der Diagonalen sind hier dominant. (Matrizen, die nur in der Hauptdiagonalen oder den Nebendiagonalen nichtverschwindende Koeffizienten haben, nennt man **Bandmatrizen**.) • *Ici les*

coefficients dans la diagonale sont dominants. (Les matrices qui n'ont des éléments inégaux à zéro que dans la diagonale principale ou dans les diagonales voisines s'appellent **matrices bandes**.)

Idee: • **Idée:** Berechne x_1, x_2, x_3 in der Hauptdiagonalen und konstruiere damit eine Iteration:
 • Calculer x_1, x_2, x_3 dans la diagonale principale et construire à l'aide des équations qui en résultent une itération:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{6.25}(2.59 - 2.08x_2 + 1.44x_3) & x_{1,k+1} &= \frac{1}{6.25}(2.59 - 2.08x_{2,k} + 1.44x_{3,k}) \\ x_2 &= \frac{1}{4.16}(5.22 - 1.78x_1 - 0.44x_3) \rightsquigarrow & x_{2,k+1} &= \frac{1}{4.16}(5.22 - 1.78x_{1,k+1} - 0.44x_{3,k}) \\ x_3 &= \frac{1}{3.75}(4.61 + 1.36x_1 - 0.95x_2) & x_{3,k+1} &= \frac{1}{3.75}(4.61 + 1.36x_{1,k+1} - 0.95x_{2,k+1}) \end{aligned}$$

Bei der Iteration wird durch die grossen Zahlen der Hauptdiagonalen dividiert, was dafür sorgt, dass das Resultat nicht 'explodiert'. • A l'itération on divise par les grands nombres de la diagonale principale. Par conséquent le résultat 'n'éclate pas'.

Start: Setze z.B.: • Valeurs initiales: Mettre p.ex.: $x_{2,0} = 0$, $x_{3,0} = 0$.

Nach 12 Schritten hat man hier das Resultat auf 6 Stellen genau: • Après 12 étapes d'itération on a ici le résultat exacte à 6 places:

$$x_{1,12} \simeq 0.336807, \quad x_{2,12} \simeq 0.994393, \quad x_{3,12} \simeq 1.09957$$

Es sei dem Leser überlassen, das Verfahren allgemein in die Matrixsprache zu übersetzen und die Konvergenzbedingungen zu studieren. (In der Praxis zeigt meist die Rechnung und eine Überprüfung des Resultates sehr schnell, ob Konvergenz vorliegt.) • Il est maintenant le devoir du lecteur de traduire cette méthode en langage matriciel. (En pratique le calcul et la vérification du résultat montre presque toujours très vite si l'on a la convergence.)

5.3 Nullstellenapproximation — Approximation de zéros

5.3.1 Intervalleingrenzung (Intervallschachtelung, Gabelverfahren) — Emboîtement d'intervalle

Problem: • **Problème:** Nullstellen von Funktionen lassen sich nicht immer direkt berechnen. Man muss sich dann mit **Approximationsmethoden** begnügen. • On ne peut pas toujours calculer directement les zéros de fonctions données. Alors il faut se débrouiller avec des méthodes d'approximation.

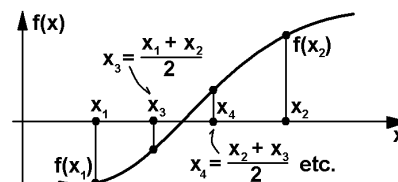
Bsp.: • **Exemple:** $f(x) = \sin(x \ln(x) + 1) - x \ln(x) = 0$, $x = ?$

Ohne viel Mathematik kann man die folgende Methode probieren: • Sans connaître la mathématique on peut essayer la méthode suivante:

Algorithmus: • **Algorithme:**

Wähle vernünftig • Choisir de façon raisonnable

x_1, x_2 mit • avec $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$



Test • Test: $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$ o.k. $\rightsquigarrow x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} \rightsquigarrow f(x_3) = \dots$

Test • Test: $f(x_1) \cdot f(x_3) < 0$ o.k. $\rightsquigarrow x_4 = \frac{x_1 + x_3}{2} \rightsquigarrow f(x_4) = \dots$

$$f(x_3) \cdot f(x_2) < 0 \text{ o.k. } \leadsto x_4 = \frac{x_3 + x_2}{2} \leadsto f(x_4) = \dots \text{ u.s.w. } \bullet \text{ etc..}$$

$\leadsto$ Die Intervalle halbieren sich, die Nullstelle wird eingeschachtelt. (Nicht sehr effizient, da man immer testen muss.) $\bullet$ *Les intervalles se divisent en deux, le zéro est emboîté. (Pas très efficace parce qu'il faut toujours faire le test.)*

Fehlerabschätzung: $\bullet$ **Quant à l'estimation de l'erreur:**

Formel: $\bullet$ **Formule:**

$$\text{Sei } \bullet \text{ Soit } f(x_0) = 0, f(x_k) < 0, f(x_{k+1}) > 0, m_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} \Rightarrow |x_0 - m_k| < |x_k - x_{k+1}|$$

5.3.2 Tangentenmethode (Newton–Raphson–Verfahren) — Méthode de la tangente (Méthode de Newton–Raphson)

Sei $\bullet$ Soit $f \in \mathcal{D}^1(I)$, $x_0, x_n, x_{n+1} \in I$

Idee: $\bullet$ **Idée:** Berechne in x_n die Tangente an die Kurve $\leadsto x_{n+1} = t_n \cap a_x$ näher bei Nullstelle x_0 als x_n . Starte mit $n = 1$, x_1 vernünftig gewählt.

$\bullet$ *Calcule la tangente à la courbe à $x_n \leadsto x_{n+1} = t_n \cap a_x$ est plus proche de x_0 que x_n . Commence avec $n = 1$ choisir x_1 raisonnablement.*

$$t_n(x) = a_n \cdot x + b_n =$$

$$= f'(x_n) \cdot x + b_n, t_n(x_n) = f(x_n)$$

$$\Rightarrow f(x_n) = f'(x_n) \cdot x_n + b_n \Rightarrow b_n = f(x_n) - f'(x_n) \cdot x_n \Rightarrow t_n(x) = f'(x_n) \cdot x + f(x_n) - f'(x_n) \cdot x_n = f'(x_n) \cdot (x - x_n) + f(x_n)$$

$$\text{NS'Z } x_{n+1}: t_n(x_{n+1}) = 0 = f'(x_n) \cdot (x_{n+1} - x_n) + f(x_n) \Rightarrow x_{n+1} = \frac{f'(x_n) \cdot x_n - f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Damit lässt sich eine Iteration⁹ machen. Damit auf dem Rechner das Verfahren einmal abbricht, braucht es eine **Abbruchbedingung**, z.B. $|x_n - x_{n+1}| < 10^{-k}$, k fix.

$\bullet$ *Avec cette formule on peut faire une itération⁹. Pour que le processus à l'ordinateur s'arrête une fois, il faut une condition d'interruption, p.ex. $|x_n - x_{n+1}| < 10^{-k}$, k fix.*

Algorithmus: $\bullet$ **Algorithme:** Start: Wähle x_1 $\bullet$ *Départ: Choisir x_1*

Formel: $\bullet$ **Formule:** Iteration $\bullet$ *Itération*

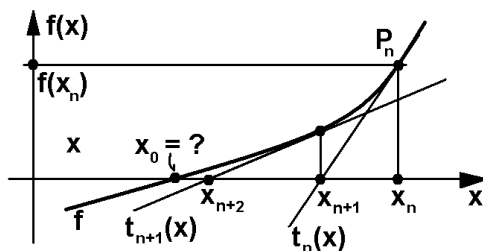
$$\leadsto x_{n+1} = \frac{f'(x_n) \cdot x_n - f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Abbruchbedingung $\bullet$ *Condition d'interruption* $\leadsto$ wählen $\bullet$ *choisir*

Achtung: $\bullet$ **Attention:** Die Methode funktioniert nicht immer (Bedingungen vgl. Skizzen). Es kann passieren, dass x_n mit n von der Nullstelle x_0 wegläuft. Es kann aber auch sein, dass eine

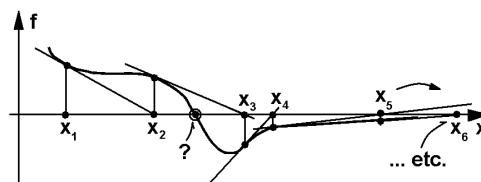
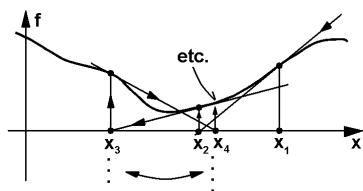
⁹„Iteration“, v.lat. Wiederholung im Gegensatz zu „Rekursion“, v.lat. zurückgehend (bis zu bekannten Werten).

$\bullet$ *‘Itération’, de lat. répétition par contre à ‘réursion’, de lat. aller en arrière (jusqu’aux valeurs connues.)*



Abbruchbedingung erfüllt ist, obwohl nur beinahe, aber nicht wirklich eine Nullstelle existiert.

• *La méthode ne fonctionne pas toujours (conditions voir esquisse). Il peut arriver que x_n s'éloigne avec n du zéro x_0 . Mais il peut aussi arriver que la condition d'interruption soit satisfaite bien que en fait il n'existe pas de vrai zéro, mais seulement un zéro approximatif.*



Bemerkung: • **Remarque:**

Zur Newton-Approximation mit mehreren Variablen vgl. Seite 280.

• *Quant à l'approximation de Newton avec plusieurs variables voir page 280.*

Fehlerabschätzung: • **Quant à l'estimation de l'erreur:**

Formel: • **Formule:** Sei • *Soit*

$$f(x_0) = 0, \quad x_1 := a, \quad b := a - \frac{2f(a)}{f'(a)}, \quad a, b \in I, \quad f \in D^{(2)}([a, b]), \quad m := \max_{x \in [a, b]} |f''(x)| \left(\leq \left| \frac{f(a)}{(b-a)} \right| \right)$$

$$\Rightarrow |x_{k+1} - x_0| \leq \frac{m}{2} \cdot \frac{|x_k - x_{k-1}|^2}{|f'(x_k)|} \quad (k = 2, 3, 4, \dots)$$

5.3.3 Eine Anwendung — Une application

Approximation des Divisionsresultats nur mit Addition, Subtraktion und Multiplikation:

• *Approximation du résultat de la division seulement avec l'addition, la subtraction et la multiplication:*

$$\text{Sei } \bullet \text{ Soit : } x = \frac{1}{q} \rightsquigarrow q = \frac{1}{x}, \quad q - \frac{1}{x} = 0 \rightsquigarrow x = \text{NS'Z von } \bullet \text{ de } f(x) = q - \frac{1}{x}$$

Start • *Départ:* x_1 wählen • *choisir* x_1 .

Iteration • *Itération:*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{q - \frac{1}{x}}{(q - \frac{1}{x})'} \Big|_{x=x_n} = x_n - \frac{q - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = 2x_n - q \cdot x^2 = x_n(2 - q \cdot x)$$

5.3.4 Sekantenmethode (Regula falsi, Sehnenverfahren) — Méthode de la sécante (lat. regula falsi, méthode de la corde)

Bei dieser Methode wird keine Differentialrechnung verwendet. f muss nur stetig sein, differenzierbar wird nicht gebraucht. • *A cette méthode le calcul différentiel n'est pas utilisé. f doit être continue, dérivable n'est pas utilisée.*

Algorithmus: • **Algorithme:**

Wähle vernünftig: • *Choisir de façon raisonnable:*

$$I_1 = [x_1, x_2] := [x_{1,1}, x_{2,1}]$$

mit • *avec* $x_0 \in [x_1, x_2]$,

$$f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$$

$$\leadsto P_1 = (x_1, f(x_1)), P_2 = (x_2, f(x_2))$$

Sekante • *Sécante* $\overline{P_1 P_2}$, $x_3 = \overline{P_1 P_2} \cap a_x$

Test • *Test:* $x_0 \in [x_1, x_3]$ ($f(x_1) \cdot f(x_3) < 0$) $\leadsto$ o.k.

Test • *Test:* $x_0 \in [x_1, x_3]$ ($f(x_1) \cdot f(x_3) < 0$) $\leadsto$ o.k., $I_2 = [x_1, x_3] := [x_{1,2}, x_{2,2}]$ sonst • *si non:*
 $x_0 \in [x_3, x_2]$ ($f(x_3) \cdot f(x_2) < 0$) $\leadsto$ o.k., $I_2 = [x_3, x_2] := [x_{1,2}, x_{2,2}]$

Verfahre mit I_2 genauso • *La même procédure pour I_2*

$\leadsto x_4$ u.s.w • *etc..* $\leadsto x_{n+1} \in I_n := [x_{1,n}, x_{2,n}]$

$\leadsto$ Ähnliche Dreiecke, z.B.: • *Triangles semblables, p.ex.:*

$$\triangle(x_{n-1}, 0), (x_{n-1}, f(x_{n-1})), (x_{n+1}, 0)$$

$$\sim \triangle(x_n, 0), (x_n, f(x_n)), (x_{n+1}, 0)$$

$$\Rightarrow \frac{x_n - x_{n+1}}{f(x_n)} = \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{-f(x_{n-1})}$$

$$\leadsto f(x_{n-1}) \cdot x_n - f(x_{n-1}) \cdot x_{n+1} = f(x_n) \cdot x_{n-1} - f(x_n) \cdot x_{n+1}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} \cdot (f(x_n) - f(x_{n-1})) = f(x_n) \cdot x_{n-1} - f(x_{n-1}) \cdot x_n$$

Formel: • **Formule:**
$$x_{n+1} = \frac{f(x_n) \cdot x_{n-1} - f(x_{n-1}) \cdot x_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Fehlerabschätzung: • **Quant à l'estimation de l'erreur:**

Formel: • **Formule:** Sei • *Soit*

$$f(x_0) = 0, I_k = [x_{k-1}, x_k], f \in D^{(2)}(I_k), \xi \in I_k \leadsto (f'(\xi) \neq 0, \xi \in I_k)$$

$$\Rightarrow |x_{k+1} - x_0| = \frac{f(x_{k-1}) \cdot f(x_k) \cdot f''(\xi)}{2(f'(\xi))^3}$$

5.3.5 Fixpunktmethode — Méthode du point fixe

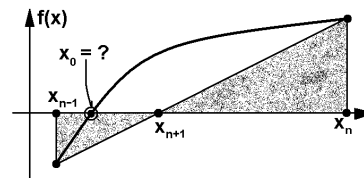
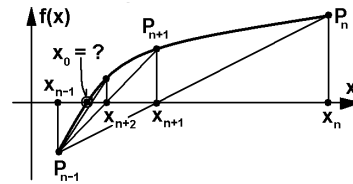
Zur Theorie — Quant à la théorie

Betrachte f über I . • *On considère f sur I .*

Problem: • **Problème:** $f(x) = 0, x = ?$ Sei • *Soit* $\varphi(x) := f(x) + x$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) := f(x) + x = x \leadsto \text{Löse: } \bullet \text{ Résoudre: } \varphi(x) = x$$

Idee: • **Idée:** Oft ist es möglich, sich längs einer Spirale (vgl. Skizze) dem Schnittpunkt der Geraden $g(x) = x$ und des Graphen von $\varphi(x)$ zu nähern. • *Souvent il est possible de s'approcher au point d'intersection de la droite $g(x) = x$ et du graphe de $\varphi(x)$ le long d'une spirale (voir esquisse).*



Definition: • **Définition:** " $\varphi(x) = x$ " heisst **Fixpunktgleichung**. x_0 heisst **Fixpunkt**, wenn x_0 die Fixpunktgleichung erfüllt.
 • " $\varphi(x) = x$ " s'appelle **équation du point fixe**. x_0 s'appelle **point fixe**, si x_0 satisfait l'équation du point fixe.

Algorithmus: • **Algorithme:**

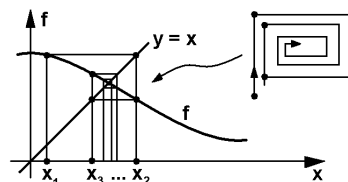
Start: • *Départ:*

Wähle • *Choisir* $x_1 \in I$

Iteration: • *Itération:* $x_2 = \varphi(x_1)$

$\leadsto x_3 = \varphi(x_2) = \varphi(\varphi(x_1)) \leadsto x_4 = \varphi(x_3)$

$= \varphi(\varphi(\varphi(x_1)))$ u.s.w • *etc..*

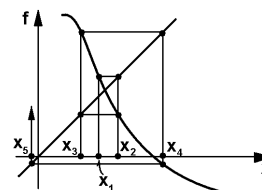


Achtung: • **Attention:** Man sieht sofort (Skizze), dass das Verfahren nur konvergiert, wenn in I gilt: • *On voit tout de suite (voir esquisse), qu'on n'a la convergence que pour $|\varphi'(x)| < 1$.*

Bei Divergenz kann man die Sache oft retten, indem man φ^{-1} benutzt. Es gilt dann:

• *S'il y a la divergence on peut sauver la chose souvent en utilisant φ^{-1} . Alors il vaut:*

$$\left| \frac{d f(x)^{-1}}{d x} \right| = \left| \frac{1}{\frac{d(f(z))}{d z} \Big|_{z=f^{-1}(x)}} \right| > 1$$



Bsp.: • **Exemple:** $\varphi(x) = \frac{\cos(x)}{3}$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = \varphi(x_1)$, ...

Nach 6 Schritten hat man $x \simeq 0.316751$ (6 Stellen exakt). • *Après 6 étapes on a $x \simeq 0.316751$ (6 places exactes).*

Fehlerabschätzung: • **Quant à l'estimation de l'erreur:**

Formel: • **Formule:** Sei • *Soit*

$f(x_0) = 0$, $\varphi(x_0) = x_0$, $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $L \in (0, 1)$, $|\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k)| \leq L \cdot |x_{k+1} - x_k|$, $x_{k+1}, x_k \in I$ ($\leadsto |\varphi(x_k)| \leq L$)

$$\Rightarrow |x_{k+1} - x_0| \leq \frac{L}{1-L} |x_{k+1} - x_k| \leq \frac{L^k}{1-L} |x_2 - x_1|, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

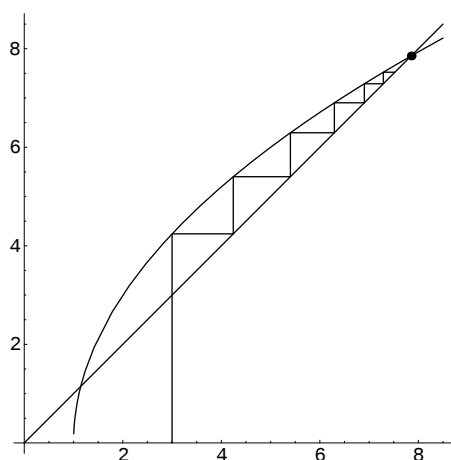
Spezialfall (speziell für $|f'(x)| \leq q < 1$): • **Cas spécial** (spécialement pour $|f'(x)| \leq q < 1$):

$\leadsto$ **Banachscher Fixpunktsatz:** • **Théorème de Banach du point fix:**

Sei • *Soit* $x_{n+1} = f(x_n) \wedge |x_{n+1} - x_{m+1}| = |f(x_n) - f(x_m)| \leq q \cdot |x_n - x_m|$
 $\Rightarrow |x_{n+k} - x_{m+k}| \leq q^k \cdot |x_n - x_m| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty$

Anwendung auf Folgen — Application pour des suites

Bsp.: • **Exemple:**



$$f(x) = 3\sqrt{x-1}$$

0	3.
1	4.242640687119286
2	5.402200124400574
3	6.294426194626891
4	6.902886045100413
5	7.288756711943657
6	7.52321808852388
7	7.662177418770393
8	7.743358235864691
9	7.790393066000085
10	7.817514796532257
11	7.833111333869212
12	7.842066182124639
13	7.847203045615791
14	7.850148241309977
15	7.851836356661401
16	7.852803780176391
17	7.853358136592748
18	7.853675778215875
19	7.85385777843875
20	7.853962057837354
21	7.854021805453318
22	7.854056038065927
23	7.854075651697871
24	7.854086889338623
25	7.854093327943564
26	7.854097016939126
27	7.854099130546554
28	7.854100341536196

Bsp.: • **Exemple:**

Wir studieren das Problem der Berechnung der Quadratwurzel:

• *Nous étudions le problème du calcul de la racine carrée:*

$$\sqrt{a} = x = ? \leadsto a = x^2$$

$$\leadsto 2x^2 = x^2 + x^2 = x^2 + a \leadsto 2x = x + \frac{a}{x} \quad (x \neq 0) \leadsto x = \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{a}{x}\right)$$

$\leadsto$ Gleichung mit Fixpunkt x . • *Equation avec point fixe x .*

Falls also der Fixpunkt ein „Attraktionspunkt“ für das folgende Verfahren ist, können wir auf der Gleichung eine Iteration aufbauen. Dass das Verfahren konvergiert, muss dabei erst noch bewiesen werden (Übung, Euler).

• *Si le point fixe est un "point d'attraction" pour la méthode suivant, nous pouvons baser une itération sur cette équation. Mais il faut encore prouver que la méthode converge (exercice, Euler).*

$$x_1 = \text{Startwert} \quad \bullet \quad \text{Valeur initiale}, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

Bsp.: • **Exemple:** $\sqrt{2} = ?$ $x_1 = 1.5$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1.5 \\ 2 & 1.41667 \\ 3 & 1.41422 \\ 4 & 1.41421 \\ 5 & 1.41421 \end{pmatrix}$$

5.3.6 Korrigierte Fixpunktmethode — Méthode corrigée du point fixe

Methode — Méthode

Sei $f(x_0) = 0$. Dann gilt:

• *Soit $f(x_0) = 0$. Alors il vaut:*

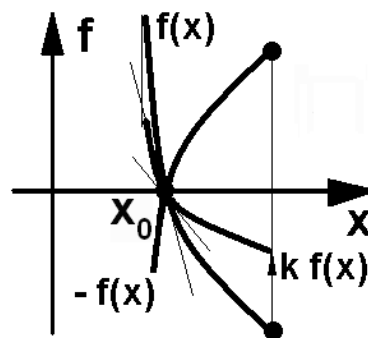
$$f(x_0) = -f(x_0) = k \cdot f(x_0)$$

Sei $k \cdot f(x) = h(x)$. Dann gilt:

• *Soit $k \cdot f(x) = h(x)$. Alors il vaut:*

$$h'(x) = (k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$$

$$\leadsto h'(x_0) = k \cdot f'(x_0)$$



Konsequenz: • **Conséquence:** Multipliziert man die Funktion f mit einer geeigneter Konstante k , so kann man es erreichen, dass die Ableitung in der Nullstelle x_0 negativ und betragsmäßig kleiner als 1 wird. Unter dieser Voraussetzung funktioniert die Fixpunktmethode²⁴.

• *Si on multiplie la fonction f avec une constante convenable k , ainsi on peut atteindre que, dans la place zéro de f , la dérivé devient négative et la pente a une valeur absolue ≤ 1 . Sous cette condition, la méthode de point fixe fonctionne²⁴.*

Bsp.: • **Exemple:** $\sqrt{2} = x = ? \leadsto$ Es ist: • *Il vaut:* $x^2 = 2$

$$\Rightarrow x^2 - 2 = 0 \Rightarrow k \cdot (x^2 - 2) = 0 \Rightarrow f(x) = k \cdot (x^2 - 2) + x = x$$

Resultate der Iterationen: • **Résultats des itérations:**

²⁴Der Autor konnte bisher nicht erfahren, ob die hier dargestellte Methode in der Literatur bereits unter einem speziellen Namen bekannt ist. Das hier verwendete Konzept ist so für die Vorlesung konstruiert worden. • *Jusqu'à maintenant, l'auteur n'a pas pu s'informer si la méthode représentée ici est déjà connue dans la littérature sous un nom spécial. Le programme appliqué ici a été construit ainsi pour le cours donné aux étudiants.*

$x_0 = 2, k = -0.5$

1	$1.19279 \times 10^{20743}$
2	$1.42275 \times 10^{41486}$
3	$2.02424 \times 10^{82972}$
4	$4.09756 \times 10^{165944}$
5	$1.67900 \times 10^{331889}$
6	$2.81905 \times 10^{663778}$
7	$7.94709 \times 10^{1327556}$
8	$6.31563 \times 10^{2655113}$
9	$3.98872 \times 10^{5310227}$
10	$1.59099 \times 10^{10620455}$
11	$2.53125 \times 10^{21240910}$
12	$6.40725 \times 10^{42481820}$
13	$4.10528 \times 10^{84963641}$
14	$1.68533 \times 10^{169927283}$
15	$2.84036 \times 10^{339854566}$
16	Overflow

 $x_0 = 2, k = 1$

1	2
2	1.0
3	1.5
4	1.375
5	1.4296875
6	1.407684326171875
7	1.4168967450968921
8	1.4130985519638084
9	1.4146747931827024
10	1.4140224079494415
11	1.4142927228578732
12	1.4141807698935047
13	1.4142271449252117
14	1.4142079362035538
15	1.4142158927929964
16	1.4142125970788504

 $x_0 = 2, k = -0.353607$

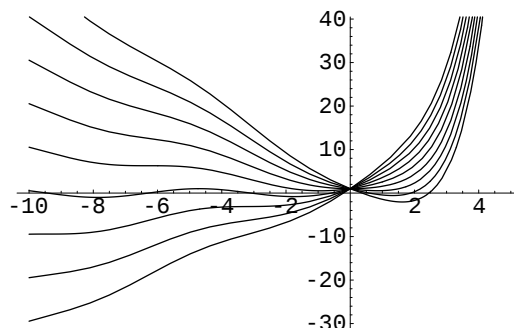
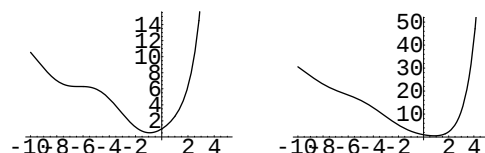
1	1.41421
2	1.41421
3	1.41421
4	1.41421
5	1.41421
6	1.41421
7	1.41421
8	1.41421
9	1.41421
10	1.41421
11	1.41421
12	1.41421
13	1.41421
14	1.41421
15	1.41421
16	1.41421

Beispiel — Exemple**Geg.: • Donné:**Funktionenschar • *Ensemble de fonctions*

$$f(x, a) = \sin(x) - ax + e^x$$

Ges.: • Trouver:

Funktion aus der Schar, welche die positive x -Achse berührt. • *La fonction de l'ensemble qui touche l'axe- x positive.*

**Bsp.: • Exemple:** $a = 1$ und • *et* $a = 3$:

Bedingung: Bei der gesuchten Funktion muss im Berührungspunkt x_0 $f(x_0, a) = 0$ und $f'_x(x_0, a) = 0$ gelten.

• **Condition:** *Pour la fonction qu'on cherche, il vaut $f(x_0, a) = 0$ et $f'_x(x_0, a) = 0$ dans le point zéro x_0 .*

$$\leadsto \sin(x) - ax + e^x = 0 \wedge \cos(x) - a + e^x = 0$$

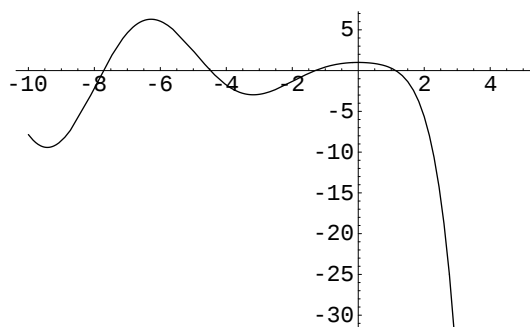
$$\Rightarrow h(x) = \sin(x) - (\cos(x) + e^x)x + e^x = 0$$

Wir suchen die Nullstelle dieser Funktion.

• *On aimerait connaître la place zéro de cette fonction.*

Schätzung: • *On estime:*

$$x_0 \approx 1.2$$

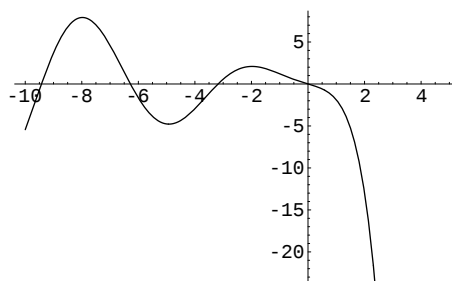
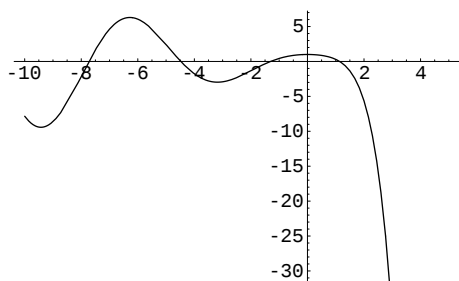
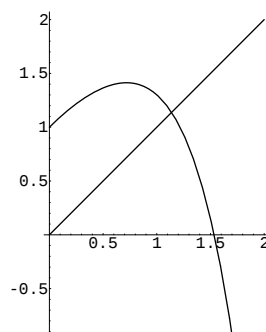


$$\varphi(x) := h(x) + x$$

$$\leadsto \varphi'(1.2) \approx -1.86569$$

Nachstehend sehen wir die Graphen von $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$.

• *Ci-dessous nous voyons les graphiques de $\varphi(x)$ et de $\varphi'(x)$.*



Es sollte sein: • *On aimerait avoir:*

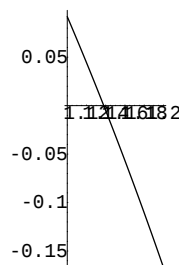
$$h_k(x) = k \cdot (\sin(x) - (\cos(x) + e^x)x + e^x) = 0 \Rightarrow \varphi_k(x) = h_k(x) + x = k \cdot (\sin(x) - (\cos(x) + e^x)x + e^x) + x = x$$

$$\leadsto (\varphi_k)'_x(x) = (k \cdot (\sin(x) - (\cos(x) + e^x)x + e^x) + x)' = 0 \Rightarrow 1 - k \cdot x(e^x - \sin(x)) = 0,$$

$$x_0 \approx 1.2 \Rightarrow k \approx 0.348956 \Rightarrow \varphi_{k_0}(x) = 0.348956 \cdot (\sin(x) - (\cos(x) + e^x)x + e^x) + x$$

Iteration: • *Itération:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1.2 \\ 2 & 1.141789 \\ 3 & 1.138402 \\ 4 & 1.138005 \\ 5 & 1.137956 \\ 6 & 1.137951 \\ 7 & 1.137950 \\ 8 & 1.137950 \end{pmatrix}$$



(Korrigierte Fixpunktmethode)

• (*Méthode corrigée du point fixe*)

5.3.7 Fixpunktmethode für Systeme — Méthode du point fixe pour systèmes

Die Fixpunktmethode ist äusserst einfach programmierbar. Dazu kann man sie auch auf Systeme ausdehnen. • *La méthode du point fixe est très facilement programmable. Et on peut aussi l'appliquer pour des systèmes.*

$$\begin{aligned} x &= f(x, y) \\ y &= g(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x, y) &\in D, \\ |f'_x| &< 1, \quad |f'_y| < 1, \quad |g'_x| < 1, \\ |g'_y| &< 1 \text{ in } D \end{aligned}$$

↪ Bsp.: • **Exemple:**

$$\begin{aligned} x &= \sin(x + y) \\ y &= \cos(x - y) \end{aligned}$$

$$(x_1, x_2) = (0, 0) \Rightarrow \dots \Rightarrow (x_7, x_7) \simeq (0.935, 0.998) \text{ exakte Stellen} \quad \bullet \text{ places exactes}$$

5.4 Interpolationspolynome — Polynômes d'interpolation

5.4.1 Probleme — Problèmes

Wir können grob folgende Problemstellungen unterscheiden:

• *Approximativement, nous pouvons distinguer les problèmes suivants:*

1. Modellierung von Kurven durch gegebene Punkte, z.B. bei Computergraphik. ↪ **Interpolation** in $[x_0, x_n]$.
• *Trouver des courbes qui passent par des points donnés, par exemple pour des graphiques par ordinateur.* ↪ **Interpolation** dans $[x_0, x_n]$.
2. Extrapolation (Fortsetzung von Kurven ausserhalb von $[x_0, x_n]$).
• *Extrapolation (continuer des courbes à l'extérieur de $[x_0, x_n]$).*
3. Kurve durch einen Punkt bei gegebenen Ableitungen.
• *Courbe par un point avec des dérivées données.*

5.4.2 Begriff — Notion

Geg.: • **Donné:**

Messpunktkurve, $n + 1$ Messpunkte oder $n + 1$ gewählte Stützpunkte auf einem Graphen. • *Courbe de points de mesure, $n + 1$ points de mesure ou points spécialement choisis dans un graphe (points d'appui).*

Wähle Polynom vom Grade n : • *Choisir un polynôme du degré n* :

$$p_n(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$\leadsto$ $n+1$ unbekannte Koeffizienten a_i , $n+1$ Gleichungen $p(x_i) = y_i$ (zu Punkt (x_i, y_i))
 • $n+1$ coefficients inconnus a_i , $n+1$ équations $p(x_i) = y_i$ (pour point (x_i, y_i)).

$\leadsto$ System: • *Système*:

$$a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 = y_0$$

$$\vdots = \vdots$$

$$a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \dots + a_1 x_n + a_0 = y_n$$

Das System ist für die Koeffizienten eindeutig lösbar $\Leftrightarrow$ Determinante $\neq 0$

• *Le système a une solution univoque $\Leftrightarrow$ déterminant $\neq 0$* :

$$D = \begin{vmatrix} x_0^n & \dots & x_0^0 = 1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^n & \dots & x_n^0 = 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

D ist eine **Vandermond**-Determinante. Da für $x_i \neq x_j$ ($i \neq j$) alle Spalten linear unabhängig sind, ist eine solche Determinante $\neq 0$. • *D est un déterminant de **Vandermond**. Comme pour $x_i \neq x_j$ ($i \neq j$) toutes les colonnes sont linéairement indépendantes, un tel déterminant est $\neq 0$.*

Konsequenz: • **Conséquence:** Durch $n+1$ verschiedene Stützpunkte lässt sich genau eine Polynomkurve vom Grade $\leq n$ legen. $\leadsto$ **Interpolationspolynom** • *A travers $n+1$ points différents on peut trouver exactement une courbe polynomiale du degré $\leq n$.* $\leadsto$ **Polynôme d'interpolation**

5.4.3 Zum Hornerschema — Quant au schéma de Horner

Problem: Finde eine Funktion f durch einen gegebenen Punkt bei gegebenen Ableitungen.

Idee: Verwende einen Potenzreihenansatz. Falls f ein Polynom vom Grade n ist, so bricht die Potenzreihe ab. Die Lösung ist ebenfalls ein Polynom vom Grade n , darstellbar nach „Horner“. Die gesuchten Koeffizienten lassen sich mit dem uralten „Vonhandrechner“(!) mit Hilfe der Verwendung einer Tabellenschreibweise nach Horner bestimmen (vgl. mathematische Literatur, Formeln und Tafeln.)

• **Problème:** *Trouver une fonction f dont les fonctions dérivées soient données et dont le graphe passe par un point aussi donné.*

Idee: *Utiliser des séries de puissances. Si f est un polynôme du degré n , la série de puissances est coupée. La solution est aussi un polynôme du degré n qu'on peut représenter d'après "Horner". On peut calculer les coefficients qu'il faut trouver par la vieille méthode de "calculer à la main"(!) en utilisant une façon d'écrire à l'aide d'un tableau d'après Horner (voir littérature mathématique, formules et tableaux.)*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!} \cdot (x - x_0)^0 + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)^1 + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \dots \\ p_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k = \frac{p^{(0)}(x_0)}{0!} \cdot (x - x_0)^0 + \frac{p^{(1)}(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)^1 + \frac{p^{(2)}(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n \\ &= ((\dots ((\frac{p^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0) + \frac{p^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}) \cdot (x - x_0) + \dots) + \frac{p^{(1)}(x_0)}{1!}) \cdot (x - x_0) + \frac{p^{(0)}(x_0)}{0!}) \end{aligned}$$

5.4.4 Darstellung von Lagrange — Représentation de Lagrange

Idee von Lagrange¹⁰: • **Idee de Lagrange**¹⁰:

¹⁰Lagrange 1736 – 1813

Geg.: • **Donné:**

$n + 1$ freie Stützstellen • *points d'appui libres* (x_i/y_i) , $i = 0, 1, \dots, n$, $x_i \neq x_j$ ($i \neq j$).

Bilde damit : • *Construire avec ces points:*

$$L_i := \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdot (x_i - x_1) \cdot \dots \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i - x_n)} \rightsquigarrow \text{pgrad}(L_i) = n$$

$$x_i \neq x_j \Rightarrow \begin{array}{l} L_i(x_j) = 0 \\ L_i(x_i) = 1 \end{array} \Rightarrow y_i \cdot L_i(x) = \begin{cases} 0 & x=x_j \\ y_i & x=x_i \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ **Symbol:** • **Symbole:** (Kronecker) $L_i(x_j) = \delta_{i,j} \Leftrightarrow L_i(x_j) = 0, L_i(x_i) = 1$

$\rightsquigarrow P_{n,L}(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot L_i(x)$ erfüllt • *satisfait* $P_{n,L}(x_i) = y_i$ und besitzt • *et possède* $P\text{Grad} = n$.

Formel: • **Formule:** Interpolationspolynom • *Polynôme d'interpolation*

$$P_{n,L}(x) := \sum_{i=0}^n y_i \cdot L_i(x), \quad L_i(x_j) = \delta_{i,j}, \quad \text{pgrad}(L_i) = n$$

$\rightsquigarrow$ eindeutig • *univoque*

5.4.5 Abschätzung und Runge-Effekt — Estimation et effect de Runge

Sei • *Soit* $f \in D^{(n+1)}[a, b]$,

$p(x)$ Lagrange-Polynom: • *polynôme de Lagrange:* $f(x_i) = y_i$, $a = x_0, \dots, b = x_n$

$$\rightsquigarrow \forall_{x \in [a,b]} \exists_{\xi \in [a,b]} : h(x) := f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \quad \text{Begründung:} \bullet \text{Vérification:}$$

$$\odot x = x_i \Rightarrow f(x_i) = y_i = p(x_i), \quad x - x_i = 0 \Rightarrow h(x_i) = 0 \rightsquigarrow \odot$$

$$\begin{aligned} \odot h(x_i) &= f(x_i) - p(x_i) = y_i - y_i = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n \\ &\Rightarrow h(x_i) \text{ hat mindestens } n \text{ Nullstellen} \bullet h(x_i) \text{ a au moins } n \text{ zéros} \\ &\rightsquigarrow h(x) = (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \cdot g(x) \end{aligned}$$

$\odot x \neq x_i$: Sei • *Soit* x' fix • *fixe*

$$\text{Sei} \bullet \text{Soit } F(x) := f(x) - p(x) - g(x') \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

$$\rightsquigarrow F(x_i) = f(x_i) - p(x_i) - g(x') \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x_i - x_i) = 0 - 0 - g(x') \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n 0 = 0, \quad F(x') =$$

$$f(x') - p(x') - g(x') \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x' - x_i) = f(x') - h(x') = 0 \rightsquigarrow F(x) \text{ hat mindestens } n + 2$$

Nullstellen • *F(x) a au moins* $n + 2$ *zéros*

• *Mit f und p ist* $F \in D^{(n+1)}[a, b]$ • *Avec f et p en* $D^{(n+1)}[a, b]$ *il vaut aussi* $F \in D^{(n+1)}[a, b]$

$\rightsquigarrow$ Rolle: $\exists_{\xi \in (a,b)} : F^{(n+1)}(\xi) = 0 \wedge p^{(n+1)}(x) = 0$ (Polynom) • *(polynôme)*

Es gilt: • *Il vaut:* $F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - g(x') \cdot (n+1)!$

$$\Rightarrow F^{(n+1)}(\xi) = 0 = f^{(n+1)}(\xi) - g(x') \cdot (n+1)! \Rightarrow g(x') = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$



Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$f \in D^{(n+1)}[a, b],$$

$p(x)$ Lagrange-Polynom: • *polynôme de Lagrange:*

$$f(x_i) = y_i, \quad a = x_0, \quad \dots, \quad b = x_n$$

Beh.: • **Thè.:**

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{\max_{\xi \in [a, b]} |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|$$

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

Problem: • **Problème:**

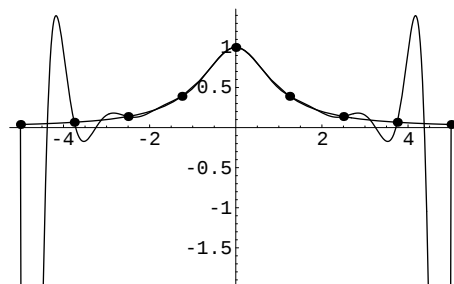
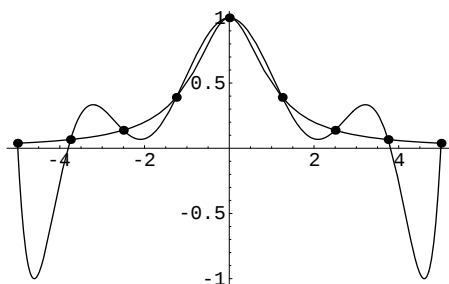
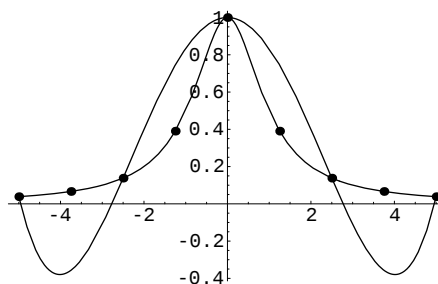
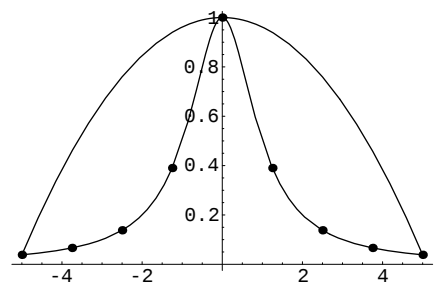
Der Teil $q(x) := \prod_{i=0}^n (x - x_i)$ ist ein Polynom, dessen Graph oszillieren kann. $|q(x)|$ kann mit grossen x sehr gross werden!

• *Le part $q(x) := \prod_{i=0}^n (x - x_i)$ est un polynôme dont le graphe peut osciller. $|q(x)|$ peut atteindre des valeurs très grandes si x atteint des valeurs très grandes!*

Bsp.: • **Exemple:** Runge, 1901

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-5, 5], \quad x_i = -5 + \frac{10}{n} \cdot i, \quad 0 \leq i \leq n$$

↪ Gewählte Punkte auf dem Graphen von f mit Graphen der Interpolationspolynome vom Grade 2, 4, 8, 16. • *Points choisis sur la courbe de f avec polynômes d'interpolation du degré 2, 4, 8, 16.*



5.4.6 Darstellung von Newton — Représentation de Newton

Ansatz: • **Mise en position (disposition):**

$$P_{n,N}(x) := c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + c_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

$P_{n,N}(x_i) = y_i \rightsquigarrow$ Unbekannte Koeffizienten c_k berechenbar • *On peut calculer les coefficients inconnus x_k . $\dots \rightsquigarrow$*

Berechnung der c_i : • **Calculer les c_i :**

$$y_0 = P_{n,N}(x_0) = c_0 \Rightarrow c_0 = y_0$$

(x_0 steckt in jedem Faktor. • x_0 apparaît dans chaque facteur.)

$$y_1 = P_{n,N}(x_1) = c_0 + c_1(x_1 - x_0) = y_0 + c_1(x_1 - x_0) \Rightarrow c_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$y_2 = P_{n,N}(x_2) = c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \text{ u.s.w.} \bullet \text{ etc.}$$

$\rightsquigarrow$ Bessere Methode, wenn mal neue Punkte dazukommen! • *C'est une meilleure méthode si une fois des nouveaux points sont ajoutés!*

Fehlerabschätzung bei Approximation einer gegebenen Funktion f durch ein Interpolationspolynom p :

• **Quant à l'estimation de l'erreur** lors de l'approximation d'une fonction donnée f par un polynôme d'interpolation p :

Formel: • **Formule:**

Sei • *Soit* $f \in D^{n+1}(I)$, $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset I$, $y_i = f(x_i)$ ($i = 0 \dots, n$), $x \in I \Rightarrow f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \cdot f^{n+1}(\xi)$, $\xi = \xi(x)$, $\xi \in [\text{Min}(x_0, x), \text{Max}(x_0, x)]$

5.4.7 Zum Aitken–Neville–Algorithmus — Quant à l'algorithme de Aitken–Neville

Für algorithmische Berechnungen kann man mit den folgenden Q -Termen arbeiten:

• *Pour des calculs à l'aide d'un algorithme on peut travailler avec les termes Q suivants:*

Definition: • **Définition:**

$$Q_k(x) := c_0 + c_1(x_1 - x_0) + c_2(x_1 - x_0)(x_2 - x_1) + \dots + c_k \prod_{0 \leq i \leq k} (x - x_i)$$

Konsequenz: • **Conséquence:**

$$1. Q_{k+1}(x) = Q_k(x) + c_{k+1} \prod_{0 \leq i \leq k+1} (x - x_i)$$

$$2. Q_{n-1}(x) = P_{n,N}(x)$$

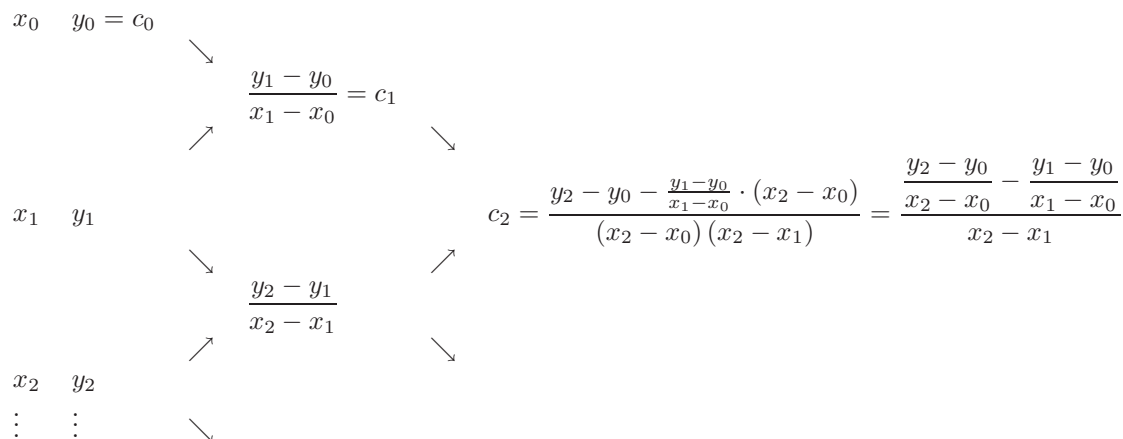
$$3. Q_{k-1}(x_k) = P_{n,N}(x_k) = y_k$$

Nachfolgend ist eine darstellerische Idee zur Berechnung der c_k angegeben.

• *En ce qui suit on voit une manière de noter pour calculer les c_k .*

Notation: • **Notation:** $c_k := f[x_0, x_1, \dots, x_k]$

x_k heisst k -te dividierende Differenz. • x_k s'appelle la k -ième différence divisante.



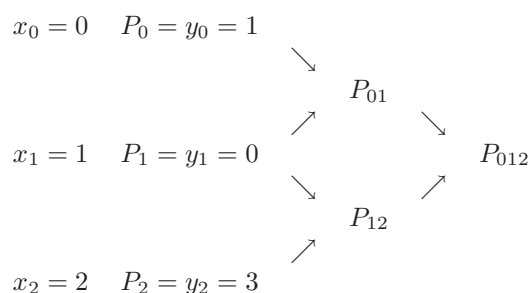
Bemerkung: • **Remarque:** $c_2 = \frac{y_2 - y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{y_2 - c_0 - c_1 \cdot (x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$

Schreibweise nach Horner: • **Notation à la manière de Horner:**

$$p(x) = c_0 + (x - x_0)(c_1 + (x - x_1)(c_2 + \dots))$$

Die Methode zur Berechnung der c_k kann auch zur Berechnung des Interpolationspolynoms verwendet werden (Aitken-Neville, Anwendung für Extrapolationen!). Hier eine Beispiel-Skizze:

• *On peut utiliser la manière de calculer les c_k aussi pour calculer le polynôme d'interpolation (Aitken-Neville, application pour extrapolations). Voilà une esquisse (exemple)*

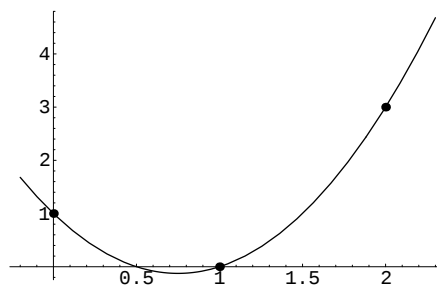


$$\begin{aligned}
 \text{Dabei ist: } & \bullet \text{ On en a: } P_{01} = \frac{(x - x_0) \cdot P_1 - (x - x_1) \cdot P_0}{x_1 - x_0} = \frac{(x - 0) \cdot 0 - (x - 1) \cdot 1}{1 - 0} = -x + 1 \\
 P_{12} &= \frac{(x - x_1) \cdot P_2 - (x - x_2) \cdot P_1}{x_2 - x_1} = \frac{(x - 1) \cdot 3 - (x - 2) \cdot 1}{2 - 1} = 3x - 3 \\
 P_{012} &= \frac{(x - x_0) \cdot P_{12} - (x - x_2) \cdot P_{01}}{x_2 - x_0} = \frac{(x - 0) \cdot (3x - 3) - (x - 2) \cdot (-x + 1)}{2 - 0} = \\
 &= \frac{3x^2 - 3x + x^2 - 3x + 2}{2} = \frac{4x^2 - 6x + 2}{2} = 2x^2 - 3x + 1
 \end{aligned}$$

Achtung: • **Attention:**

$$P'_{012}(x) = 4x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{4} \neq 1 \leadsto \text{Minimum}$$



Allgemeine Formel (vgl. Lit.): • *Formule générale (voir lit.):*

Formel: • **Formule:**

Sei • *Soit* $S = \{i_0, i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{0, 1, \dots, n\}$
(Indexmenge, paarweise verschieden) • *(Ensemble des indices, différents par paires)*

$k + 1$ Stützstellen: • $k + 1$ points donnés: (x_i, y_i) , $i \in S$

$$\leadsto I_k^* = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

$$\leadsto I_{i_0, i_1, \dots, i_k}^*(x) = \text{Interpolationspolynom zu den } k + 1 \text{ Stützstellen}$$

$$\bullet I_{i_0, i_1, \dots, i_k}^*(x) = \text{polynôme d'interpolation pour les } k + 1 \text{ points donnés}$$

$\leadsto$ Rekursionsformel: • *Formule de récurrence:*

$$I_{i_0, i_1, \dots, i_k}^*(x) = \frac{(x - x_{i_0}) I_{i_1, i_2, \dots, i_k}^*(x) - (x - x_{i_k}) I_{i_0, i_1, \dots, i_{k-1}}^*(x)}{x_{i_k} - x_{i_0}}$$

5.4.8 Hermite-Interpolation, Splines — Interpolation d'après Hermite, splines

Problem — **Problème**

Problem: • **Problème:**

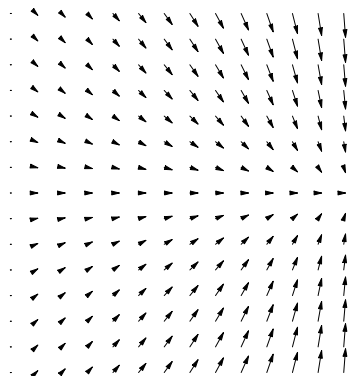
Geg.: • **Donné:** Stützunkte und Richtung der Kurve in den Punkten (Linienelement) (x_k, y_k, y'_k) .

• *Points et direction de la courbe dans les points (élément de ligne) (x_k, y_k, y'_k) .*

Ges.: • **Trouver:** Kurve(n) • *Courbe(s)*

Beispiel solcher Linienelemente (hier Darstellung mit Pfeilen)

• *Exemple d'éléments de ligne (ici représentation à l'aide des flèches)*



Hermite–Polynome — Polynôme de Hermite

Wir studieren hier nur einen Spezialfall für das Intervall $I = [0, 1]$ und zwei gegebenen Linienelementen an den Intervallenden.

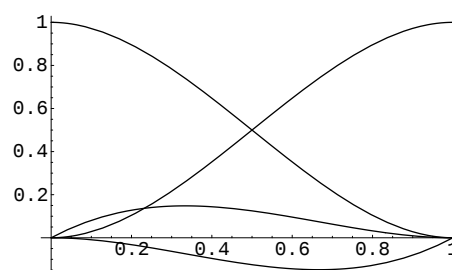
• *Ici nous n'étudions qu'un cas spécial pour l'intervalle $I = [0, 1]$ et deux éléments de ligne aux extrémités de l'intervalle.*

→ Gesucht ist daher ein Polynom $p(x)$ mit: • *Il faut donc trouver un polynôme $p(x)$ avec:*

$x_0 = 0, y_0 = p(0), m_0 = p'(0)$ und • *et $x_1 = 1, y_1 = p(1), m_1 = p'(1)$*

Für die Lösung des Problems benutzen wir folgende 4 Polynome $H_i(x)$: • *Pour résoudre ce problème, nous utilisons les 4 polynômes $H_i(x)$ suivants:*

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 2x^3 - 3x^2 + 1 \\ H_1(x) &= x^3 - 2x^2 + x \\ H_2(x) &= x^3 - x^2 \\ H_3(x) &= 1 - H_0(x) \end{aligned}$$



Definition: • **Définition:**

$H_0^3(x) := H_0(x), H_1^3(x) := H_1(x), H_2^3(x) := H_2(x), H_3^3(x) := H_3(x)$,
heissen **Hermite–Polynome** • *s'appellent polynômes de Hermite*

Man rechnet sofort nach, dass diese Polynome die folgenden Binde–Eigenschaften besitzen:

• *On peut tout de suite contrôler que ces polynômes satisfaisaient la relation suivante:*

Satz: • **Théorème:**

$$\begin{pmatrix} H_0(0) & H'_0(0) & H'_0(1) & H_0(1) \\ H_1(0) & H'_1(0) & H'_1(1) & H_1(1) \\ H_2(0) & H'_2(0) & H'_2(1) & H_2(1) \\ H_3(0) & H'_3(0) & H'_3(1) & H_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Konsequenz: • **Conséquence:** Mit $H_0(x), \dots, H_3(x)$ lässt sich auf $I = [0, 1]$ ein Interpolationsspolynom konstruieren, dessen Graph die beiden Linienelemente an den Intervallenden berührt. Mit den Binde–Eigenschaften rechnet man sofort nach:

• *A l'aide de $H_0(x), \dots, H_3(x)$ on peut construire un polynôme d'interpolation sur $I = [0, 1]$ dont le graphe touche les deux éléments de ligne aux extrémités. A l'aide des relations ci-dessus on peut contrôler tout de suite:*

Formel: • **Formule:**

$$\begin{aligned} p_H(x) &= y_0 \cdot H_0(x) + m_0 \cdot H_1(x) + m_1 \cdot H_2(x) + y_1 \cdot H_3(x) \\ \Rightarrow p_H(0) &= y_0, \quad p'_H(0) = m_0, \quad p'_H(1) = m_1, \quad p_H(1) = y_1 \end{aligned}$$

Bemerkung: • **Remarque:**

$p_H(x)$ ist eine Linearkombination von Hermite–Polynomen.

• $p_H(x)$ est une combinaison linéaire de polynômes de Hermite.

5.4.9 Splines — Splines

Spline engl., längliches, dünnes Stück Holz • *Spline angl., morceau de bois mince, de forme allongée*

Splines mit Hermite-Polynomen — Splines à l'aide de polynômes de Hermite

Idee: • Id:e:

Verbinden wir zwei Linienelemente durch Interpolationskurven $p_H(x)$, so können wir den Runge-Effekt vermeiden. Da die Tangenten an den Stützstellen oder **Knoten** beidseitig übereinstimmen, sind solche Funktionen mindestens einmal differenzierbar. • *Si nous relient deux éléments de ligne par une courbe d'interpolation $p_H(x)$, nous pouvons éviter l'effet de Runge. Comme les tangentes aux points donnés (sommets) sont conformes, ces fonctions sont dérivables aux moins une fois.*

Catmull-Rom-Splines — Splines de Catmull-Rom

Geg.: • **Donné:** n Knoten • n sommets $\leadsto$

Definition: • **Définition:**

Eine **allgemeine Splinkurve** ist gegeben durch eine zusammengesetzte stetige Funktion wie folgt:

• *Une courbe de spline générale est donnée par une fonction composée et continue comme il suit:*

$S : [x_0, x_n] \mapsto \mathbb{R}$ mit • *avec :*

S ist auf $[x_i, x_{i+1}]$ durch ein kubisches Polynom S_i gegeben.

• S est défini sur $[x_i, x_{i+1}]$ par un polynôme cubique S_i .

$\leadsto$ x : globale Koordinate auf $[x_0, x_n]$ • x : coordonnée globale sur $[x_0, x_n]$
 x : lokale Koordinate auf $[x_i, x_{i+1}]$ • x : coordonnée locale sur $[x_i, x_{i+1}]$

Da p_H nur auf dem Intervall $[0, 1]$ sinnvoll ist, müssen wir diese Funktion für den Gebrauch geeignet transformieren, um S_i zu erhalten. Naheliegender ist eine lineare Transformation:

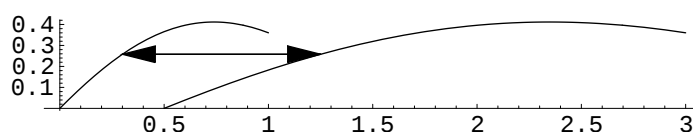
• *Comme p_H n'est satisfaisant que pour l'intervalle $[0, 1]$ il faut transformer cette fonction pour pouvoir l'utiliser et obtenir S_i . On pense tout de suite à une transformation linéaire:*

Idee: • **Idée:** Sei • *Soit $t \rightleftharpoons x$, $x = x(t) = t(b-a) + a$, $t = t(x) = \frac{x-a}{b-a} \Rightarrow x(0) = a$, $x(1) = b$*
 Dabei sei für den Moment: • *Soit pour le moment il soit: $x_i = a$, $x_{i+1} = b$*

$\leadsto t := \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \in [0, 1]$

Diese lineare Transformation verschiebt den Graphen einer Funktion in Richtung der x -Achse und streckt ihn dazu noch.

• *Cette transformation linéaire donne une translation du graphe de la fonction en direction de l'axe x et en même temps une extension.*



Weiter sei: • *En outre il soit: $S(x) := S(x(t)) := p_H(t)$, $[0, 1] \ni t \mapsto x(t) \in [a, b]$*
 (Für den Moment schreiben wir kurz $S(x)$ statt $S_i(x)$.)

- (Pour le moment nous écrivons brièvement $S(x)$ au lieu d'écrire $S_i(x)$.)

Dann gilt: • *Il vaut donc:* $p_H(0) = S(x(0)) = S(a)$, $p_H(1) = S(x(1)) = S(b)$

Es gilt aber nicht ohne weiteres: • *Mais on ne peut pas conclure:*

$$p_H'(0) = S'_x(x(0)) = S'_x(a), \quad p_H'(1) = S'_x(x(1)) = S'_x(b)$$

Denn bei der Transformation kann die Tangentensteigung ändern.

- *Car après la transformation la pente de la tangente a peut-être changée.*

Es gilt (Kettenregel): • *Il vaut (règle conjointe):* $S(x) = S(x(t)) = p_H(t) = p_H(t(x))$

$$\Rightarrow \frac{dS(x)}{dx} = \frac{dp_H(t(x))}{dx} = \frac{dp_H(t)}{dt} \cdot \frac{dt(x)}{dx} = \frac{dp_H(t)}{dt} \cdot \frac{1}{b-a} \Rightarrow \frac{dp_H(t)}{dt} = \frac{dS(x)}{dx} \cdot (b-a)$$

Konsequenz: • **Conséquence:** $y_0 = p_H(0) = S(a)$, $m_{0,H} = p_H'(0) = (b-a) \cdot S'(a) = m_{a,S}$
 $m_{1,H} = p_H'(1) = (b-a) \cdot S'(b) = m_{b,S}$, $y_1 = p_H(1) = S(b)$

Formel: • **Formule:**

$$\Rightarrow S(x) = y_0 \cdot H\left(\frac{x-a}{b-a}\right) + m_{a,S} \cdot H_1\left(\frac{x-a}{b-a}\right) + m_{b,S} \cdot H_2\left(\frac{x-a}{b-a}\right) + y_1 \cdot H_3\left(\frac{x-a}{b-a}\right), \quad S = S_i, \quad [a, b] = [x_i, x_{i+1}]$$

Bsp.: • **Exemple:** $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $x_1 = 1$, $y_1 = 1$, $x_2 = 2$, $y_2 = 0$

Möglichkeit: • *Possibilité:* $S_0(t) = t^3$, $S_1(t) = 1 - t^3$

$\leadsto$ Stetig, in $x_1 = 1$ nicht diff'bar. • *Continue, non dérivable à $x_1 = 1$.* $\leadsto$

Problem: • **Problème:** Wie die Kurve in $x_1 = 1$ glatt machen? $\leadsto$ Problem in Knoten! • *Comment lisser la courbe à $x_1 = 1$?* $\leadsto$ *Problèmes aux sommets!*

Methoden: • **Méthodes:**

1. Schätzung der Ableitung in x_i (FMILL) oder: • *Estimer la dérivée à x_i (FMILL) ou:*
2. Ersetze die Tangentensteigung in x_i durch die Sehnensteigung in $((x_{i-1}, y_{i-1}), (x_{i+1}, y_{i+1}))$. (FMILL) • *Estimer la dérivée à x_i . (FMILL)*
3. Danach Hermite-Polynome verwenden: • *Puis utiliser des polynômes de Hermite:*
 $S(x) = y_i H_0(t(x)) + m_i (x_{i+1} - x_i) H_1(t(x)) + m_{i+1} (x_{i+1} - x_i) H_2(t(x)) + y_{i+1} H_3(t(x))$
 $\leadsto$ **Catmull-Rom-Splines** • **Splines de Catmull-Rom**

Schreibe kurz: • *Notation:* $\Delta_i := (x_{i+1} - x_i)$

Formel: • **Formule:**

$$\leadsto S(x) = y_i H_0(t(x)) + m_i \Delta_i H_1(t(x)) + m_{i+1} \Delta_i H_2(t(x)) + y_{i+1} H_3(t(x))$$

Bessel-Tangenten — Tangentes de Bessel

Problem: • **Problème:** An den Endpunkten x_0, x_n versagt die Methode mit den Sehnen durch benachbarte Punkte. Eine Möglichkeit zu Rettung der Situation ist die Konstruktion der **Bessel-Tangenten**.

- Aus bords x_0, x_n la méthode de la corde ne fonctionne pas, mais on peut sauver la situation par la construction de la **tangente de Bessel**.

Konstruktion: • **Construction:** Wir legen durch die Punkte (x_{i-1}, y_{i-1}) , (x_i, y_i) , (x_{i+1}, y_{i+1}) ein quadratisches Polynom $q_i(x)$. Als Steigung in x_i verwenden wir die erste Ableitung von q_i . An den Endpunkten x_0 und x_n verwenden wir die Ableitungen in den Endpunkten von q_1 und q_{n-1} .

- Nous construisons un polynôme quadratique $q_i(x)$ par les points (x_{i-1}, y_{i-1}) , (x_i, y_i) , (x_{i+1}, y_{i+1}) . Comme pente à x_i nous utilisons la première dérivée de q_i . Aux bords x_0 et x_n nous utilisons les dérivées aux sommets de q_1 et q_{n-1} .

Konsequenz: • **Conséquence:** Man kann durch Nachrechnung zeigen, dass solche Splines in den Knoten sogar zweimal differenzierbar sind. • On peut vérifier par le calcul que ces splines sont même deux fois dérivables aux sommets.

Natürliche Splines — Des splines naturelles

Idee: • **Idée:** Willkürlich setzen wir: • Arbitrairement nous supposons: $m_0 = m_n = 0$

Das Problem der Bestimmung der Zwischenwerte m_i , $i = 1, \dots, n-1$ lösen wir folgendermassen:

- Nous résolvons le problème de l'évaluation des valeurs intermédiaires m_i , $i = 1, \dots, n-1$ de la façon suivante:

Es ist: • Nous posons:

$$S_i(x) = y_i H_0(t) + m_i \Delta_i H_1(t) + m_{i+1} \Delta_i H_2(t) + y_{i+1} H_3(t), \quad t = t(x) = \frac{x - x_i}{\Delta_i}, \quad x = t \Delta_i + x_i$$

$$\leadsto S_i(t(x)) = (t - 2t^2 + t^3) \Delta_i m_i + (-t^2 + t^3) \Delta_i m_{i+1} + (1 - 3t^2 + 2t^3) y_i + (3t^2 - 2t^3) y_{i+1}$$

Wir können nun fordern, dass zwei aneinanderstossende Splines auch in der 2. Ableitung übereinstimmen. Denn wenn wir die Polynome 3. Grades $S_i(x)$ zweimal nach x differenzieren, führt das zu linearen Gleichungen.

- Maintenant nous pouvons exiger que deux splines voisins correspondent aussi en ce qui concerne la 2ème dérivée. Car il s'agit des polynômes du degré 3 dont on calcule la 2ème dérivée. Alors on obtient des équations linéaires.

$$\leadsto \frac{d^2 S_{i-1}(x)}{dx^2} \Big|_{t=1, x=x_i} = \frac{d^2 S_i(x)}{dx^2} \Big|_{t=0, x=x_i}$$

Berechnet man diese Ableitungen, so erhält man nach einer algebraischen Vereinfachung:

- Si l'on calcule ces dérivées, on obtient après une simplification algébrique:

$$0 = -3 \Delta_{i-1}^2 (m_{i-1} + m_i) + \Delta_{i-1} (\Delta_i (m_{i-1} + 2m_i) - 6y_{i-1} + 6y_i) + \Delta_i (\Delta_i (2m_i + m_{i+1}) + 3(y_{i-1} - y_{i+1}))$$

Damit erhalten wir mit $m_0 = 0$ und $m_n = 0$ nun $n+1$ lineare Gleichungen für die $n+1$ Variablen m_{i-1} , m_i und m_{i+1} , $i = 1, \dots, n-1$. Die Lösung dieses Gleichungssystems ist ein bekanntes Problem der linearen Algebra.

- Avec $m_0 = 0$ et $m_n = 0$ nous recevons donc $n+1$ équations linéaires pour les $n+1$ variables m_{i-1} , m_i et m_{i+1} , $i = 1, \dots, n-1$. La résolution d'un tel système d'équations est un problème bien connu de l'algèbre linéaire.

Weitere Ansätze — D'autres méthodes

1. Statt mit Hermite–Polynomen zu arbeiten, kann man auf den Teilintervallen einen direkten Ansatz verwenden:

- *Au lieu de travailler avec des polynômes de Hermite, on peut utiliser une mise en équation directe:*

$$p_i(x) = a_{3,i}x^3 + a_{2,i}x^2 + a_{1,i}x + a_{0,i}$$

2. Bei Vektorfunktionen, z.B. bei $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$ hat man es hier üblicherweise mit zwei Funktionen $v_1(t)$ und $v_2(t)$ zu tun, die man nach obigem Muster behandeln kann.

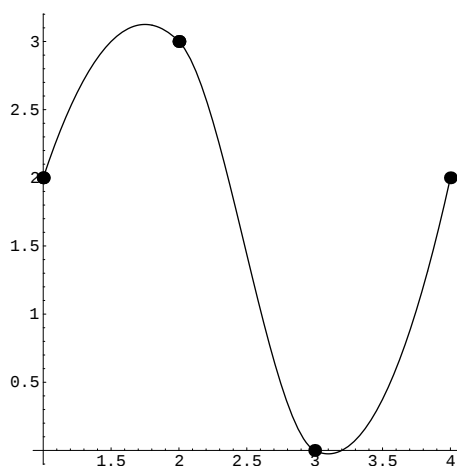
- *Quant aux fonctions vectorielles, p.ex. si l'on a une courbe $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$, on a ici deux fonctions $v_1(t)$ et $v_2(t)$ qu'on peut traiter d'après la méthode précédente.*

3. Mit Hilfe einer Basis von **Bernstein–Polynomen** kann man sogenannte **Bézier–Kurven** finden. Dabei erreicht man, dass die Koeffizienten eine nützliche geometrische Bedeutung besitzen. Eine Behandlung würde unseren Rahmen sprengen. Genauer vgl. Literatur.

- *A l'aide d'une base de **polynômes de Bernstein** on peut trouver des **courbes nommées de Bézier**. Avec cela on atteint que les coefficients ont une signification géométrique. Le traitement de ce sujet dépasse notre cadre. Détails: Consulter la littérature.*

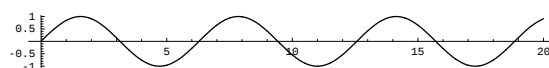
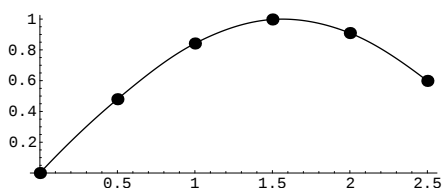
Beispiele und Probleme — Exemples et problèmes

Die folgenden Graphen sind mit *Mathematica* und der Methode der Hermite–Polynome, Bessel–Tangenten und FMILL (Sehnensteigung als Tangentensteigung) erzeugt worden. Die Resultate belegen was passieren kann, wenn die Anzahl der Teilpunkte nicht angepasst ist. • *Les graphiques suivantes ont été produites avec Mathematica et à l'aide de la méthode des polynômes de Hermite, les tangentes de Bessel et FMILL (pente de la corde comme pente de la tangente). Les résultats démontrent ce qu'il peut se passer si le nombre des points n'est pas bien adapté.*



$$P_1 = (1; 2); P_2 = (2; 3); \\ P_3 = (3; 0); P_4 = (4; 2)$$

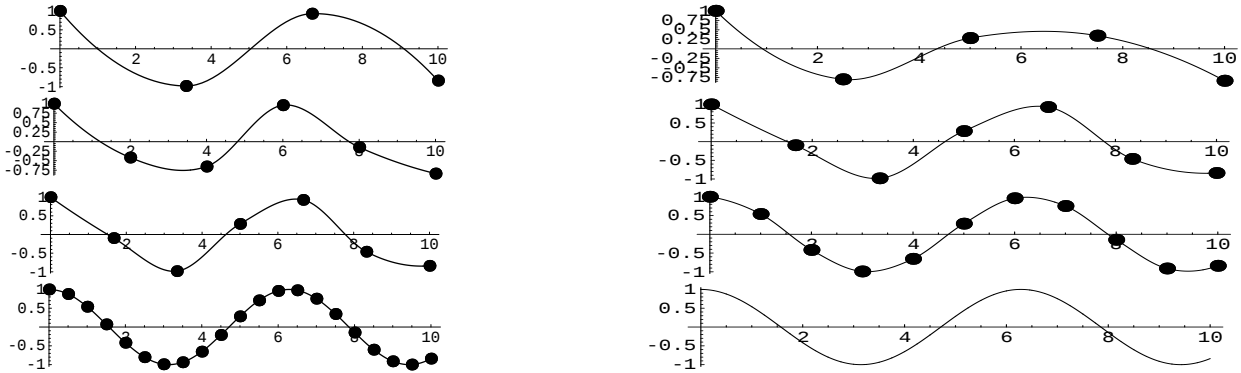
Unten: • *En bas:*
 $f(x) = \sin(x)$, $x_1 = 0$, $x_2 = 20$, $n = 40$



Nachfolgend ist $f(x) = \cos(x)$ gezeigt mit $x_1 = 0, x_2 = 10$ mit der Anzahl Teilintervalle k :

- En bas on voit $f(x) = \cos(x)$ avec $x_1 = 0, x_2 = 10$ avec le nombre des intervalles partiels k :

$$k \in \{n = 3, 4, 5, 6, 7, 10, 20, 40, \dots\}$$



5.4.10 Ausblick: Bezier-Kurven — Annexe: Courbes de Bézier

Bezier-Kurven markieren eine wichtige Präsenz der Mathematik in der Computergraphik. Die Idee dieser Kurven stammt von Casteljau (Citroen, 1959) und Bézier (Renault, 1962). Bei diesen Kurven geht man von einem Stützpolygon mit den Eckpunkten Q_i aus. Die Anzahl Seiten des Polygons entspricht dem Grad der Kurven als polynomiale Vektorkurve.

Nachfolgend ist ein Stützpolygon gezeigt. Teilt man die Seiten dieses Polygon in einem Verhältnis $t : (1 - t)$ (unten gezeigt ist $t = 1$), so entstehen neue Zwischenpunkte.

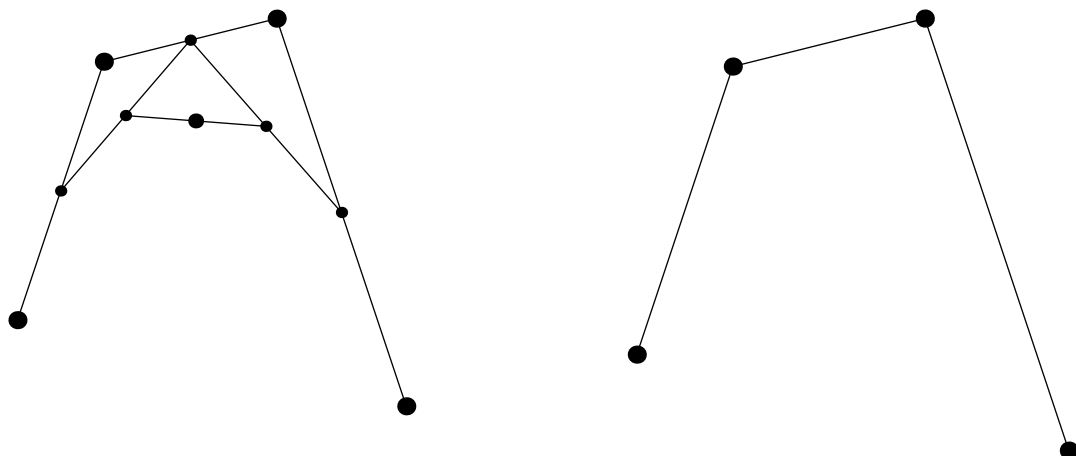
- *Les Courbes de Bézier jouent un grand rôle dans les mathématiques du graphisme d'ordinateur. L'idée de ces courbes vient de Casteljau (Citroen, 1959) et Bézier (Renault, 1962). Afin de gagner ces courbes, on utilise comme base un polygone avec ses sommets. Le nombre côtés du polygone correspond au degré de la courbe vectorielle et polynomiale.*

En bas, von voit le polygone fondamental. Si on partage les côtés du polygone dans le rapport $t : (1 - t)$ (en-dessous on voit $t = 1$) on on obtient des points intermédiaires nouveaux.

Bsp.: • Exemple:

Wir suchen eine Polynom-Vektorkurve mit minimalem Grad, die durch Q_1 und Q_4 geht und in Q_1 die Gerade $\overline{Q_1Q_2}$ als Tangente sowie in Q_4 die Gerade $\overline{Q_3Q_4}$ als Tangente hat. Dabei sei $Q_{k,k+1}$ der Mittelpunkt von $\overline{Q_kQ_{k+1}}$, $Q_{k-1,k,k+1}$ der Mittelpunkt von $\overline{Q_{k-1,k}Q_{k,k+1}}$ und $Q_{1,2,3,4}$ der Mittelpunkt von $\overline{Q_{1,2,3}Q_{2,3,4}}$. Wir konstruieren die Kurve so, dass sie durch $Q_{1,2,3,4}$ geht und dort $\overline{Q_{1,2,3}Q_{2,3,4}}$ Tangente ist.

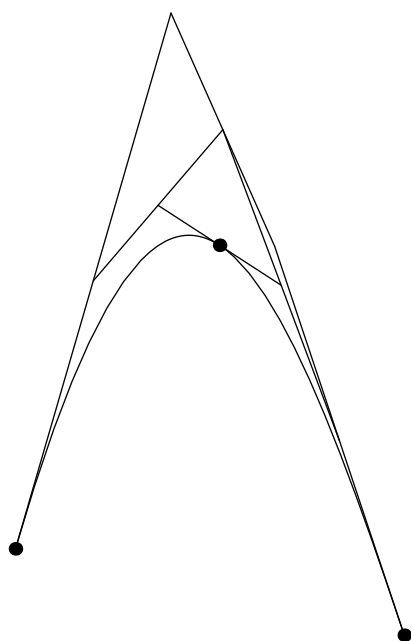
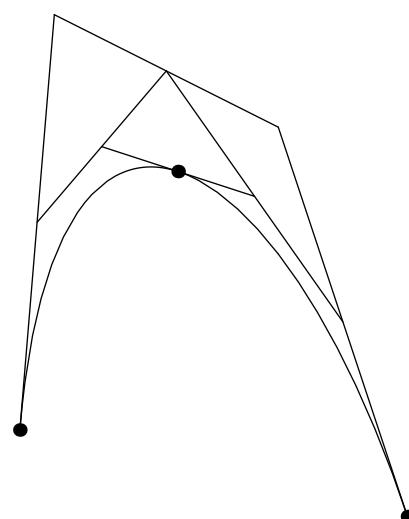
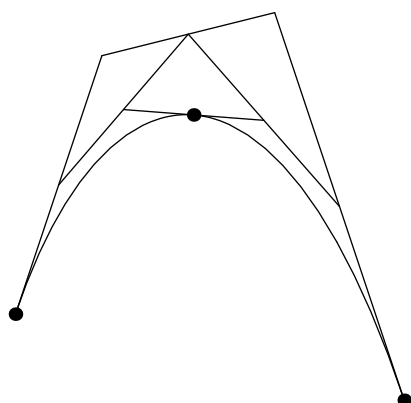
- *Nous cherchons une courbe polynomiale et vectorielle de degré minimal qui passe par Q_1 et Q_4 et qui a dans Q_1 la droite $\overline{Q_1Q_2}$ comme tangente ainsi que dans Q_4 la droite $\overline{Q_3Q_4}$ comme tangente. Soit $Q_{k,k+1}$ le centre de $\overline{Q_kQ_{k+1}}$, $Q_{k-1,k,k+1}$ le centre de $\overline{Q_{k-1,k}Q_{k,k+1}}$ et $Q_{1,2,3,4}$ le centre de $\overline{Q_{1,2,3}Q_{2,3,4}}$. Nous construisons la courbe de manière qu'elle traverse $Q_{1,2,3,4}$ et que $\overline{Q_{1,2,3}Q_{2,3,4}}$ y soit la tangente.*



Löse: • *Résoudre:*

$$\begin{aligned}
 \vec{v}(t) &= \vec{a}_0 + \vec{a}_1 \cdot t + \vec{a}_2 \cdot t^2 + \vec{a}_3 \cdot t^3 \\
 \vec{v}(0) &= \overrightarrow{OQ_1} \\
 \vec{v}(t_m) &= \overrightarrow{OQ_{1,2,3,4}} \\
 \vec{v}(1) &= \overrightarrow{OQ_4} \\
 \left. \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \right|_{t=0} &= \alpha \overrightarrow{Q_1Q_2} \\
 \left. \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \right|_{t=t_m} &= \beta \overrightarrow{Q_{1,2,3}Q_{2,3,4}} \\
 \left. \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \right|_{t=1} &= \gamma \overrightarrow{Q_3Q_4}
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Vorhanden sind 6 Vektorgleichungen, d.h. 12 Gleichungen. Unbekannt sind $\vec{a}_0, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ (8 Komponenten) sowie $t_m, \alpha, \beta, \gamma$, also total 12 Parameter. Diese lassen sich daher berechnen. On a 6 équations vectorielles à disposition, ç.v.d. 12 équations. $\vec{a}_0, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ (8 composants) ainsi que $t_m, \alpha, \beta, \gamma$ sont inconnus, donc en tout 12 parameters. Ceux-là peuvent donc être calculés.

**Bemerkung: • Remarque:**

Der Grad der Kurve ändert nicht, wenn man einen Punkt Q_i verschiebt (lineare Abbildung!).

• *Le degré de la courbe ne change pas, si on déplace un point Q_i .*

Die Idee dieser Kurven lässt sich auch auf Flächen übertragen.

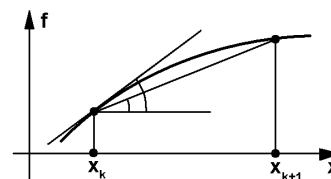
• *On peut appliquer l'idée de ces courbes aussi pour des surfaces.*

5.5 Numerische Differentiation — Différentiation numérique

5.5.1 Graphische Methode — Méthode graphique

Geg.: • **Donné:** Messpunktkurve, $n + 1$ Messpunkte oder $n + 1$ gewählte Stützpunkte auf einem Graphen $\leadsto n$ Sehnen zwischen benachbarten Punkten. • *Courbe de points de mesure, $n + 1$ points de mesure ou points spécialement choisis dans un graphe (points d'appui) $\leadsto n$ cordes (bissécantes) entre les points voisins.*

Idee: • **Idée:** Sehr grobe Methode: Nehme Sehnen– resp. Sekantensteigungen als Tangentensteigungen. • *Méthode grossière: Prendre la pente de la sécante, pour pente de la tangente.*



5.5.2 Polynommethode — Méthode polynomiale

Ableitung des Interpolationspolynom — Dérivée du polynôme d'interpolation

Es scheint jetzt naheliegend, die unbekannte Ableitung von f durch diejenige des Interpolationspolynoms p zu ersetzen. Doch die Erfahrung zeigt, dass das Interpolationspolynom bei den äusseren Punkten oft stark zu oszillieren beginnt, auch wenn f nicht oszilliert. Dem kann man versuchen abzuweichen, indem man noch weiter aussen künstlich weitere Punkte hinzunimmt und so zu einem Interpolationspolynom höheren Grades gelangt, das sich im innern, wichtigen Bereich anständig verhält. Allgemein interessiert aber doch die Frage nach der Fehlerabschätzung.

• *Maintenant on a la tendance de remplacer la dérivée inconnue de f par celle de p . Mais l'expérience nous dit que souvent le polynôme d'interpolation commence à osciller très fortement aux points extérieurs, même si f n'oscille pas. On peut corriger ce fait en prenant de façon artificielle des points auxiliaires tout à l'extérieur. Comme ça on obtient un polynôme d'interpolation de degré supérieur qui se comporte de manière propre dans la zone importante à l'intérieur. Mais ce qui nous intéresse est la question de l'estimation de l'erreur.*

Für $f(x) \approx p_n(x)$ und $f'(x) \approx p'_n(x)$ gilt dann nach dem Mittelwertsatz:

• *Pour $f(x) \approx p_n(x)$ et $f'(x) \approx p'_n(x)$ il vaut d'après le théorème des accroissements finis:*

$$f'(x) \approx \frac{p_n(x_{i+k}) - p_n(x_i)}{x_{i+k} - x_i}$$

Fehlerabschätzung — Estimation de l'erreur

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$, $x_0, x_1, \dots, x_n \in I$,
 $p(x)$ Näherungspolynom • *polynôme d'approximation*
 $\omega = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$

Beh.: • **Thè.:**

$$\forall_{x \in I} \exists_{\xi(x) \in I} : f(x) - p_n(x) = \omega(x) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Korollar: • **Corollaire:** $|f(x) - p_n(x)| \leq R \leq \max_{\xi \in I} |\omega(x) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}|$

Für interessierte Leser die Beweisidee: • *Pour le lecteur intéressé l'idée de la preuve:*

Beweis: • **Preuve:**

Sei • *Soit* $\varphi(x) = f(x) - p_n(x) \Rightarrow \varphi(x_i) = 0, i = 0, \dots, n \Rightarrow \varphi(x_i) = 0$

Ebenso: • *De même:* $\omega(x_i) = 0, i = 0, \dots, n$ (nach Konstruktion • *selon construction*)

Sei • Soit $x_s \in I$, $x_s \neq x_i$, $i = 0, \dots, n \Rightarrow \omega(x_s) \neq 0$

Studiere: • Étudier:

$$F(x) := \varphi(x) - k \cdot \omega(x) = f(x) - p_n(x) - k \cdot \omega(x) (\Leftrightarrow f(x) = F(x) + p_n(x) + k \cdot \omega(x))$$

$$\text{Sei } \bullet \text{ Soit } k = \frac{f(x_s) - p_n(x_s)}{\omega(x_s)} \Rightarrow F(x_s) = f(x_s) - p_n(x_s) - k \cdot \omega(x_s) = 0$$

$\leadsto$ Zusammen: • En tout: $\varphi(x_i) = 0$, $i = 0, \dots, n$, $\varphi(x_s) = 0$ ($x_s \neq x_i$) $\Rightarrow F(x)$ hat mindestens $n+2$ Nullstellen in I • a au moins $n+2$ zéros dans I .

$$f \in \mathcal{C}^{n+1}(I) \Rightarrow F \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$$

Satz von Rolle: • Théorème de Rolle:

$\leadsto \Rightarrow F'(x)$ hat mindestens $n+1$ Nullstellen in I • a au moins $n+1$ zéros dans I .

$\leadsto \Rightarrow F''(x)$ hat mindestens n Nullstellen in I • a au moins n zéros dans I .

...

$\leadsto \Rightarrow F^{(n+1)}(x)$ hat mindestens 1 Nullstelle in I • a au moins 1 zéro dans I .

$\leadsto \exists_{\xi \in I} F^{(n+1)}(\xi) = 0$

Zudem: • En plus:

$$\text{pgrad}(p_n(x)) = n \Rightarrow p^{n+1}(x) \equiv 0, \text{ pgrad}(\omega(x)) = n+1 \Rightarrow (k \cdot \omega(x))^{n+1} \equiv k \cdot (n+1)!$$

$$\Rightarrow F^{(n+1)}(\xi) = 0 = f^{(n+1)}(\xi) - 0 - k \cdot (n+1)! \Rightarrow k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow \forall_{x_s \in I} \exists \xi(x_s) \in I : f(x_s) - p_n(x_s) = F(x_s) + \omega(x_s) \cdot k = 0 + \omega(x_s) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow \forall_{x \in I} \exists \xi(x) \in I : f(x) - p_n(x) = \omega(x) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

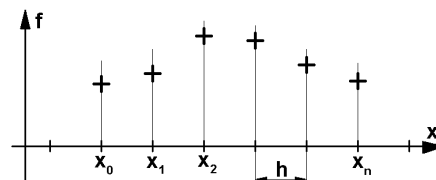
5.5.3 Methode der Binomialkoeffizienten, $f^{(n)}$ — Méthode des coefficients binomiaux, $f^{(n)}$

Geg.: • Donné: $n+1$ äquidistante

Stützstellen mit Äquidistanz h .

• $n+1$ points d'appui (noeuds d'interpolation) à distance sur l'axe x égale h .

$\leadsto x_{i+1} = x_i + h$



Untersuchung des Falles von quadratischen Funktionen: • Examen du cas d'une fonction quadratique:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c, \quad f'(x) = 2ax + b, \quad f'(x_i + \frac{h}{2}) = 2a(x_i + \frac{h}{2}) + b = 2ax_i + ah + b \\ &= \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} = \frac{(ax_i^2 + 2ax_ih + ah^2 + bx_i + bh + c) - (ax_i^2 + bx_i + c)}{h} = 2ax_i + ah + b \\ &= f'(x_i + \frac{h}{2}) \end{aligned}$$

Lemma: • Lemme: Vor.: • Hyp.: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Beh.: • Thè.: $f'(x_i + \frac{h}{2}) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}$

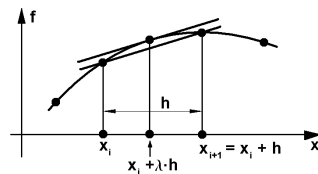
Idee: • Idée: Verwende diese Eigenschaft von quadratischen Funktionen auch bei anderen Funktionen ($\leadsto$ Fehler!):

- *Utilise cette qualité des fonctions quadratiques aussi pour les autres fonctions ($\leadsto$ Erreur!):*

Mittelwertsatz: • *Théorème des accroissements finis:*

$$f'(x_i + \lambda \cdot h) \approx f'(x_i + \frac{h}{2}) \approx \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}, \quad \lambda \in (0, 1)$$

Fehler: λ wird als $\approx \frac{1}{2}$ gesetzt. • *Erreur: On suppose $\lambda \approx \frac{1}{2}$.*



$\leadsto$ Höhere Ableitungen: • *Dérivées supérieures:*

Ersetze f durch f' und f' durch f'' : • *Remplacer f par f' et f' par f'' :*

$$\begin{aligned} f''(x_{i+1}) &\approx \frac{f'(x_{i+1} + \frac{h}{2}) - f'(x_i + \frac{h}{2})}{h} \approx \frac{\frac{f(x_{i+2}) - f(x_{i+1})}{h} - \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}}{h} = \\ &= \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} \\ f'''(x_i + \frac{h}{2}) &\approx \frac{f''(x_{i+1}) - f''(x_i)}{h} \approx \frac{\frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} - \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2}}{h} = \\ &= \frac{f(x_{i+2}) - 3f(x_{i+1}) + 3f(x_i) - f(x_{i-1}))}{h^3} \end{aligned}$$

Allgemein erhält man so: • *On obtient de façon générale ainsi:*

$$\begin{aligned} \text{Formel:} \quad & \bullet \text{ Formule:} \quad n = 2m + 1 \in \mathbb{N} \quad f^{(n)}(x_i + \frac{h}{2}) \approx \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(x_{i+m+1-j}) \cdot \frac{1}{h^n} \\ n = 2m \in \mathbb{N} \quad & f^{(n)}(x_i + \frac{h}{2}) \approx \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(x_{i+m-j}) \cdot \frac{1}{h^n} \end{aligned}$$

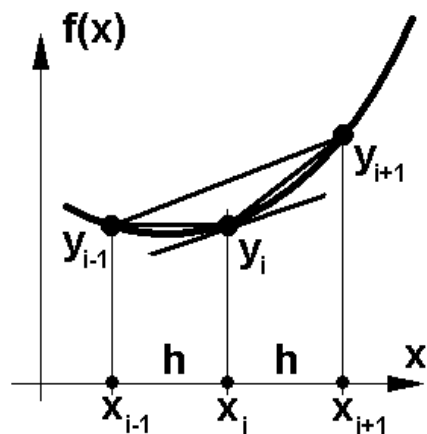
5.5.4 Methode der zentralen Differenzen — Méth. d. différences centrales

Sei $f(x)$ in I genügend oft differenzierbar,

- *Soit $f(x)$ dérivable dans I assez souvent,*
 $x_i \in I, \quad i = 0, 1, \dots, n.$

Die nebenstehende Skizze zeigt, dass die Näherung $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$ für $f'(x_i)$ besser ist als $\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$ oder $\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$.

• *L'esquisse ci-contre montre que l'approximation $\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$ est mieux pour $f'(x_i)$ que les approximations $\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$ ou $\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$.*



Definition: • *Définition:*

1. $y_k' := \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{x_{k+1} - x_{k-1}} = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}$
 heisst **zentraler Differenzenquotient** in $x_k = x_0 + k \cdot h$.
 • s'appelle **quotient de différences central** à $x_k = x_0 + k \cdot h$.
2. $(y_k')_{fw} := \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{y_{k+1} - y_k}{h}$
 heisst **Vorwärtsdifferenzenquotient** in $x_k = x_0 + k \cdot h$.
 • s'appelle **quotient de différences à droite** à $x_k = x_0 + k \cdot h$.
3. $(y_k')_{bw} := \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} = \frac{y_k - y_{k-1}}{h}$
 heisst **Rückwärtsdifferenzenquotient** in $x_k = x_0 + k \cdot h$.
 • s'appelle **quotient de différences à gauche** à $x_k = x_0 + k \cdot h$.

Mit Hilfe der Taylorreihe resp. der Taylorpolynome von f erhalten wir:

- A l'aide de la série de Taylor resp. des polynômes de Taylor de f on voit:

$$f(x_k + h) = f(x_k) + f'(x_k)h + \frac{1}{2}f''(x_k)h^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(x_k)h^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(x_k)h^4 + O(h^5)$$

$$f(x_k - h) = f(x_k) - f'(x_k)h + \frac{1}{2}f''(x_k)h^2 - \frac{1}{6}f^{(3)}(x_k)h^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(x_k)h^4 + O(h^5)$$

Speziell: • *Spécialement:*

$$f(x_k + h) = f(x_k) + f'(x_k)h + \frac{f''(x_k)}{2}h^2 + O(h^3), \quad f(x_k - h) = f(x_k) - f'(x_k)h + \frac{f''(x_k)}{2}h^2 + O(h^3).$$

$$\Rightarrow f(x_k + h) - f(x_k - h) = 2f'(x_k)h + O(h^3)$$

$$y_k' = f'(x_k) = \frac{f(x_k + h) - f(x_k - h)}{2h} + O(h) = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + O(h^2)$$

Speziell: • *Spécialement:*

$$f(x_k + h) = f(x_k) + f'(x_k)h + \frac{1}{2}f''(x_k)h^2 + \frac{1}{6}f'''(x_k)h^3 + O(h^4),$$

$$f(x_k - h) = f(x_k) - f'(x_k)h + \frac{1}{2}f''(x_k)h^2 - \frac{1}{6}f'''(x_k)h^3 + O(h^4).$$

$$\Rightarrow f(x_k + h) + f(x_k - h) = 2f(x_k) + \frac{1}{3}f''(x_k)h^2 + O(h^4)$$

$$y_k'' = f''(x_k) = \frac{f(x_k + h) - 2f(x_k) + f(x_k - h))}{h^2} + O(h^2) = \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + O(h^2)$$

Anderseits erhält man mit Hilfe eines Zwischenschritts $\frac{h}{2}$:

- D'autre part on obtient à l'aide d'une étape intermédiaire $\frac{h}{2}$:

$$y_k'' \approx \frac{y'_{k+\frac{1}{2}} - y'_{k-\frac{1}{2}}}{2 \cdot \frac{h}{2}} = \frac{y'_{k+\frac{1}{2}} - y'_{k-\frac{1}{2}}}{h} \approx \frac{\frac{y_{k+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} - y_{k+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}}{h} - \frac{y_{k-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} - y_{k-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}}{h}}{h} \approx \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2}$$

Dieses Resultat stimmt mit dem vorher erhaltenen überein.

- Ce résultat est conforme au résultat précédent.

Weiter kann man in dieser Art auch y_k''' , y_k'''' u.s.w. berechnen:

- En outre de ce manière on peut calculer y_k''' , y_k'''' etc.:

$$y_k''' = (y_k'')' \approx \left(\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} \right)' = \frac{y_{k+1}' - 2y_k' + y_{k-1}'}{h^2} = \frac{\frac{y_{k+2} - y_k}{2h} - 2 \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + \frac{y_k - y_{k-2}}{2h}}{h^2}$$

$$= \frac{y_{k+2} - y_k - 2(y_{k+1} - y_{k-1}) + y_k - y_{k-2}}{2h^3} = \frac{y_{k+2} - 2y_{k+1} + 2y_{k-1} - y_{k-2}}{2h^3}$$

$$\begin{aligned}
y_k^{(4)} &= (y_k'')'' \approx \left(\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} \right)'' = \frac{y_{k+1}'' - 2y_k'' + y_{k-1}''}{h^2} \\
&= \frac{\frac{y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k}{2h} - 2\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{2h} + \frac{y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}}{2h}}{h^2} \\
&= \frac{y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k - 2(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}) + y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}}{h^4} \\
&= \frac{y_{k+2} - 4y_{k+1} + 6y_k - 4y_{k-1} + y_{k-2}}{2h^3}
\end{aligned}$$

(Für den Fehlernachweis muss des gegebenen Rahmens wegen auf die Literatur verwiesen werden³.)

• (*Quant à la grandeur de l'erreur, dans notre situation on n'a pas la place pour présenter les calculs. Il faut donc consulter la littérature*³.)

$$y_k' = f'(x_k) = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + O(h^2), \quad y_k'' = f''(x_k) = \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + O(h^2)$$

$$y_k''' = \frac{y_{k+2} - 2y_{k+1} + 2y_{k-1} - y_{k-2}}{2h^3} + O[h^2], \quad y_k^{(4)} = \frac{y_{k+2} - 4y_{k+1} + 6y_k - 4y_{k-1} + y_{k-2}}{2h^3} + O[h^2]$$

Mit dem oben benutzten Einsetzungsverfahren findet man auch für partielle Ableitungen:

• *Avec la méthode de remplacer des termes utilisée, on trouve aussi pour les dérivées partielles:*

Sei • *Soit* $x_k = x_0 + k \cdot h_x$, $y_j = x_0 + j \cdot h_y$, $f(x, y) := w(x, y)$

$$\frac{\partial f(x_k, y_j)}{\partial x} = w'_{x|k,j} \approx \frac{w_{k+1,j} - w_{k-1,j}}{2h_x}, \quad \frac{\partial f(x_k, y_j)}{\partial y} = w'_{y|k,j} \approx \frac{w_{k,j+1} - w_{k,j-1}}{2h_y}$$

$$\frac{\partial^2 f(x_k, y_j)}{\partial x \partial y} = w''_{xy|k,j} \approx \frac{w_{k+1,j+1} - w_{k+1,j-1} - w_{k-1,j+1} + w_{k-1,j-1}}{4h_x h_y}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 f(x_k, y_j)}{\partial x^2 \partial y^2} &= w^{(4)}_{xxyy|k,j} \approx \\
&\frac{w_{k+1,j+1} + w_{k+1,j-1} + w_{k-1,j+1} + w_{k-1,j-1} - 2w_{k+1,j} - 2w_{k,j+1} - 2w_{k,j-1} - 2w_{k-1,j} + 4w_{k,j}}{h_x^2 h_y^2} \text{ u.s.w. } \bullet \text{ etc.}
\end{aligned}$$

Der Fehler ist jeweils von der Ordnung h_x^2 , h_y^2 oder $\text{Max}(h_x^2, h_y^2)$.

• *L'erreur est de l'ordre* h_x^2 , h_y^2 *ou* $\text{Max}(h_x^2, h_y^2)$.

³Siehe z.B. • *Voir p.ex.:* Becker Dreyer Haacke Nabert, numerische Mathematik

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

Sei $f(x)$, $f(x, y)$ in I genügend oft differenzierbar,
 • Soit $f(x)$, $f(x, y)$ derivable dans I assez souvent,
 $x_k = x_0 + k h_x \in I$, $k = 0, 1, \dots, n$, $h = h_x$
 $y_j = y_0 + k h_y \in I$, $k = 0, 1, \dots, n$
 $f(x) := y$ oder • ou $f(x, y) := w(x, y)$

Beh.: • **Thè.:**

$$\begin{aligned}
 1. \quad y_k' &= f'(x_k) = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + O[h^2] \\
 2. \quad y_k'' &= f''(x_k) = \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + O[h^2] \\
 3. \quad y_k''' &= \frac{y_{k+2} - 2y_{k+1} + 2y_{k-1} - y_{k-2}}{2h^3} + O[h^2] \\
 4. \quad y_k^{(4)} &= \frac{y_{k+2} - 4y_{k+1} + 6y_k - 4y_{k-1} + y_{k-2}}{2h^3} + O[h^2] \\
 5. \quad \frac{\partial f(x_k, y_j)}{\partial x} &= w'_{x|k,j} \approx \frac{w_{k+1,j} - w_{k-1,j}}{2h_x} + O[h - x^2] \\
 6. \quad \frac{\partial f(x_k, y_j)}{\partial y} &= w'_{y|k,j} \approx \frac{w_{k,j+1} - w_{k,j-1}}{2h_y} + O[h_y^2] \\
 7. \quad \frac{\partial^2 f(x_k, y_j)}{\partial x \partial y} &= w''_{xy|k,j} \approx \frac{w_{k+1,j+1} - w_{k+1,j-1} - w_{k-1,j+1} + w_{k-1,j-1}}{4h_x h_y} \\
 &\quad + O[\text{Max}(h_x^2, h_y^2)] \\
 8. \quad \frac{\partial^4 f(x_k, y_j)}{\partial x^2 \partial y^2} &= w_{xxyy|k,j}^{(4)} \approx O[\text{Max}(h_x^2, h_y^2)] + \\
 &\quad \frac{w_{k+1,j+1} + w_{k+1,j-1} + w_{k-1,j+1} + w_{k-1,j-1} - 2w_{k+1,j} - 2w_{k,j+1} - 2w_{k,j-1} - 2w_{k-1,j} + 4w_{k,j}}{h_x^2 h_y^2}
 \end{aligned}$$

Wichtige Anwendungen: Siehe Differentialgleichungen, Randwertprobleme oder partielle Differentialgleichungen.

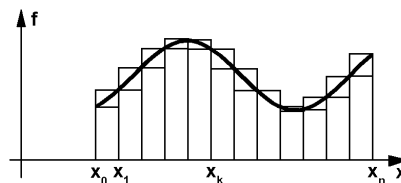
• *Applications importantes: Voir équations différentiels, problème de valeur aux limites ou équations différentiels partielles.*

5.6 Numerische Integration — Intégration numérique

5.6.1 Rechteckmethode — Méthode des rectangles

Geg.: • **Donné:** Messpunktkurve, $n + 1$ Messpunkte (äquidistante x -Werte) oder $n + 1$ gewählte Stützpunkte auf einem Graphen. • *Courbe de points de mesure, $n + 1$ points de mesure à distance égale sur l'axe x , ou points d'appui spécialement choisis dans un graphe.*

Gegeben sei eine äquidistante Intervalleinteilung. Arbeite mit „linken“ oder „rechten“ Rechtecken. Bei genügend feiner Intervallteilung bekommt man brauchbare Resultate. • *On utilise une division d'intervalle équidistante. Travaille avec des rectangles de 'gauche' ou de 'droite'. Si la division de l'intervalle est assez fine, on obtient de bons résultats.*



Formel: • **Formule:**

$$\int_{x_0=a}^{x_n=b} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \cdot h = h \cdot \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) := F_a$$

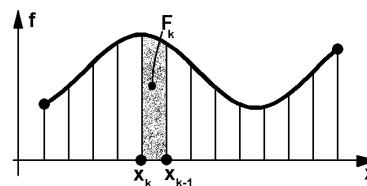
$$\approx \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot h = h \cdot \sum_{k=1}^n f(x_k) := F_b$$

5.6.2 Trapezmethode — Méthode du trapèze

Geg.: • **Donné:** Situation wie oben bei der Rechteckmethode. Wähle Trapeze statt Rechtecke.
• *Situation comme en haut à la méthode des rectangles. Choisir des trapèzes au lieu de rectangles.*

Trapezfläche: • *Surface d'un trapèze:*

$$F_k = \frac{f(x_k) + f(x_{k-1})}{2} \cdot h$$



$$\leadsto \int_{x_0=a}^{x_n=b} f(x) dx \approx \frac{h}{2} \left(\sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) + f(x_k) \right) = \frac{h}{2} \left(\sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \right) + \frac{h}{2} \left(\sum_{k=1}^n f(x_k) \right) = \frac{h}{2} (F_a + F_b)$$

Regel: • **Règle:** Trapezregel • **Formule du trapèze**

$$F_a := h \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}), \quad F_b := h \sum_{k=1}^n f(x_k)$$

$$\Rightarrow \int_{x_0=a}^{x_n=b} f(x) dx \approx \frac{h}{2} (F_a + F_b)$$

$$\leadsto \int_{x_0=a}^{x_n=b} f(x) dx := T_n \approx h \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{h}{2} \cdot (f(x_0) + f(x_n))$$

Fehlerabschätzung: • **Quant à l'estimation de l'erreur:**

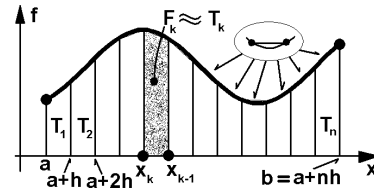
Formel: • **Formule:** Sei • *Soit* $\xi \in I = [a, b], \quad |f''(\xi)| = \max_{x \in I} |f''(x)|$

$$R(h) := \left| \int_{x_0=a}^{x_n=b} f(x) dx - T_n \right| \leq \left| \frac{b-a}{12} \cdot h^2 \cdot f''(\xi) \right|$$

Sei • Soit $h = \frac{b-a}{n}$

$$T_k = \frac{f(a + (k-1)h) + f(a + kh)}{2} \cdot h$$

$$T(h) = \sum_{k=1}^n T_k = \frac{1}{2} \cdot f(a) \cdot h + f(a+h) \cdot h + \dots + \frac{1}{2} \cdot f(b) \cdot h$$



$$T\left(\frac{h}{2}\right) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{f(a + (k-1)\frac{h}{2}) + f(a + k\frac{h}{2})}{2} \cdot \frac{h}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot f(a) \cdot \frac{h}{2} + f(a + \frac{h}{2}) \cdot \frac{h}{2} + f(a + 2\frac{h}{2}) \cdot \frac{h}{2} + \dots + \frac{1}{2} \cdot f(b) \cdot \frac{h}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot T(h) + \underbrace{f(a + \frac{h}{2}) \cdot \frac{h}{2} + f(a + \frac{3h}{2}) \cdot \frac{h}{2} + \dots + f(a + \frac{(2n-1)h}{2}) \cdot \frac{h}{2}}_{:= \frac{1}{2} M(h)}$$

Folgerung: • **Conclusion:** $T\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2} (T(h) + M(h))$

Diese Formel kann man bei numerischen Berechnungen zur Effizienzsteigerung einsetzen.

• On peut utiliser cette formule quant aux calculs numériques pour augmenter l'efficacité.

5.6.3 Polynommethode — Méthode de polynômes

Geg.: • **Donné:** Situation wie oben bei der Rechteck- und Trapezmethode. • Situation comme en haut à la méthode des rectangles ou trapèzes.

Idee: • **Idée:** Lege durch die Stützpunkte eine Polynomkurve (Interpolationspolynom) und berechne den Flächeninhalt unter der Polynomkurve. • Construisons une courbe polynomiale à travers les points donnés et calculons la mesure de la surface en dessous de cette courbe polynomiale.

Problem: • **Problème:** Das Interpolationspolynom vom Grade n zeigt oft an den Intervallenden ein unerwünschtes Oszillieren. • Le polynôme d'interpolation montre des fois une oscillation indésirable aux points terminaux de l'intervalle.

Trick: • **Truc:** Man kann das Oszillieren mindern indem man durch die Einführung neuer Punkte ausserhalb des Intervalls Polynome höheren Grades erzeugt und so das Oszillieren nach aussen treibt. Man kann z.B. dazu die innern Punkte am jeweils äussersten Punkt spiegeln.

• On peut diminuer les oscillations en introduisant des points auxiliaires en dehors de l'intervalle. On obtient ainsi des polynômes d'interpolation de degré supérieur ce qui a comme conséquence que l'oscillation passe à l'extérieur de l'intervalle. Il suffit de réfléchir des points aux deux points terminaux.

5.6.4 Simpsonmethode — Méthode de Simpson

Geg.: • **Donné:** Messpunktkurve, $n+1$ Messpunkte (äquidistante x -Werte) oder $n+1$ gewählte Stützpunkte auf einem Graphen. Wähle $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$. Bilde damit $m = \frac{n}{2}$ Paare benachbarter Intervalle. $\leadsto$ Flächeninhalte $F_1, F_2, \dots, F_m$. F_i entsteht, wenn die Kurve (Graph) über zwei Teilintervallen durch einen Parabelbogen ersetzt wird.

• Courbe de points de mesure, $n+1$ points de mesure à distance égale sur l'axe x , ou points spécialement choisis dans un graphe. Choisis $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$. Forme à l'aide de ça $m = \frac{n}{2}$ paires d'intervalles voisins. $\leadsto$ Mesures de surface $F_1, F_2, \dots, F_m$. On obtient F_i en remplaçant la courbe (graphe) sur deux

intervalles partiels par une courbe parabolique.

→ Parabelbogen zu F_i : • *Courbe parabolique pour F_i : $p_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$*

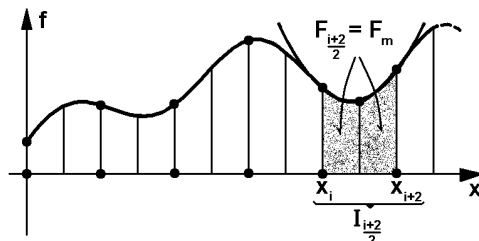
Betrachte: • *Etudier:*

$$A := F_m = F_{\frac{i+2}{2}},$$

$$I := I_{\frac{i+1}{2}} = [x_i, x_{i+2} = x_{i+2h}], \quad x_{i+1} \in I$$

$$p(x) = a x^2 + b x + c := p_{\frac{i+1}{2}}(x)$$

$$\Rightarrow A = \int_{x_i}^{x_i+2h} p(x) dx$$



$$\begin{aligned} \leadsto A &= \int_{x_i}^{x_i+2h} (a x^2 + b x + c) dx = \frac{1}{3} a x^3 + \frac{1}{2} b x^2 + c x \Big|_{x_i}^{x_i+2h} \\ &= \frac{1}{3} a ((x_i + 2h)^3 - x_i^3) + \frac{1}{2} b ((x_i + 2h)^2 - x_i^2) + c ((x_i + 2h) - x_i) \\ &= \frac{1}{3} a (3 \cdot 2 \cdot x_i^2 h + 3 \cdot 4 x_i h^2 + 8 h^3) + \frac{1}{2} b (2 \cdot 2 x_i h + 4 h^2) + c 2 \cdot h \\ &= h(a(2 x_i^2 + 4 x_i h + \frac{8}{3} h^2) + 2b(x_i + h) + 2c) \end{aligned}$$

Verwende: • *Utilise:* $y_{i+2} = p(x_i + 2h) = a(x_i^2 + 4x_i h + 4h^2) + b(x_i + 2h) + c$
 $y_{i+1} = p(x_i + h) = a(x_i^2 + 2x_i h + h^2) + b(x_i + h) + c$
 $y_i = p(x_i) = a x_i^2 + b x_i + c$

$$\leadsto \frac{h}{3}(y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2}) = \frac{h}{3}(a(6x_i^2 + 12x_i h + 8h^2) + b(6x_i + 6h) + 6c)$$

$$\Rightarrow \frac{h}{3}(y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2}) = h(a(2x_i^2 + 4x_i h + \frac{8}{3} h^2) + 2b(x_i + h) + 2c) = A = F_{\frac{i+2}{2}}$$

Diesen Flächeninhalt unter dem Parabelbogen verwenden wir jetzt als Näherung. • *Maintenant nous utilisons cette mesure de surface sous la parabole comme approximation.* →

Formel: • **Formule:**

$$F_{total} \approx \sum_{m=\frac{i+2}{2}=1}^{\frac{n}{2}} F_{\frac{i+2}{2}} = \sum_{m=1}^{\frac{n}{2}} F_m = h \cdot \sum_{m=\frac{i+2}{2}=1}^{\frac{n}{2}} \frac{y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2}}{3}$$

5.6.5 Der Rombergalgorithmus — L'algorithme de Romberg

Der Rombergalgorithmus beruht auf dem Trapezverfahren: • *L'algorithme de Romberg est basé sur la méthode du trapèze:*

Sei • *Soit* $I = [a, b]$, $h := \frac{b-a}{n}$, $T_{s0} := f(a) + f(b)$, $T_{s1} := \sum_{k=1}^{n-1} f(a + k h)$, $T(h) := \frac{h}{2} \cdot (T_{s0} + 2T_{s1})$

Setze: • *Définir:* $T_{0,0} := T(h)$,
 $T_{j,0} := T(\frac{h}{2^j}) = \frac{1}{2} T_{j-1,0} + \frac{h}{2^j} \sum_{0 < k=2^{j-1}+1 < 2^j} f(a + k \frac{h}{2^j}) \quad (j = 1, 2, 3 \dots)$

$$T_{j,s} := T_{j,s-1} + \frac{T_{j,s-1} - T_{j-1,s-1}}{4^s - 1} \quad (s = 1, 2, 3 \dots, \min(j, m))$$

Benutze Matrixschema, $j = \text{Zeilenzahl}$, $s = \text{Spaltenzahl}$.

• *Utiliser schéma matriciel, $j = \text{numéro de la ligne}$, $s = \text{numéro de la colonne}$.*

Satz: • **Théorème:** $\forall_s \lim_{j \rightarrow \infty} T_{j,s} = \int_{x_0=a}^{x_n=b} f(x) dx$

(Exakter Beweis vgl. Lit..) • *Preuve exacte voir lit..*

Fehlerabschätzung: • **Quant à l'estimation de l'erreur:**

Sei • *Soit* $\xi_{j,s} \in I = [a, b]$, $f \in D^{(2s+2)}(I)$

$B_n := n$ -te **Bernoulli-Zahl**, rekursiv definiert wie folgt:

• $B_n := n$ -ème **nombre de Bernoulli**, défini récursivement de la façon suivante:

$$B_0 = 1, \quad 0 = \sum_{\nu=1}^{n-1} \binom{n}{\nu} B_\nu, \quad \nu \geq 2$$

Formel: • **Formule:**

$$\int_{x_0=a}^{x_n=b} f(x) dx - T_{j,s} = (-1)^{j+s} \cdot \frac{B_{2s+2}}{(2s+2)!} \frac{h^{2s+1}}{2^{(s+1)(2j-s)}} f^{(2s+2)}(\xi_{j,s})$$

Bemerkung: • **Remarque:**

Als Spezialfall erscheint hier die **Keplersche Fassregel**: • *Comme cas spécial on obtient la règle de Kepler pour les tonneaux:*

Formel: • **Formule:** $\int_{x_0=a}^{x_n=b} f(x) dx \approx T_{1,1} = \frac{b-a}{6} \cdot (f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$

Beweis: • **Preuve:** Vgl. Lit.. • *Voir lit..*

5.6.6 Die Integrationsformel von Gauss — La formule d'intégration de Gauss

Wir definieren die **Legendre-Polynome** durch die folgende Rekursionsformel: • *Nous définissons les polynômes de Legendre par la formule de récurrence suivante:*

$$P_0(x) = 1, \quad P_m(x) = \frac{1}{2^m \cdot m!} \cdot \frac{d^m (x^2 - 1)^m}{dx^m}$$

Seien $x_1, \dots, x_n$ die n Nullstellen des Legendre-Polynoms vom Grade n . • *Soient $x_1, \dots, x_n$ les n zéros du polynôme de Legendre du degré n .*

Formel: • **Formule:** $\exists_{\xi \in [a,b]} : \int_{x_0=a}^{x_n=b} f(x) dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n w_i \cdot f\left(\frac{a+b+(b-a) \cdot x_i}{2}\right) + R_n,$
 $R_n := c_n \cdot (b-a)^{2n+1} \cdot f^{(2n)}(\xi)$
 w_i, c_i vgl. Lit., z.B. Formeln und Tafeln der DMK
 • w_i, c_i voir lit., p.ex. formules et tableaux de la DMK

Beweis: • **Preuve:** Vgl. Lit.. • *Voir lit..*

Kapitel • Chapitre 6

Reihen — Séries

6.1 Zahlenfolgen — Suites de nombres

6.1.1 Bekannte Begriffe — Notions connues

Wir wollen uns die bereits behandelten nachstehenden Begriffe in Erinnerung rufen, damit wir darauf aufbauen können: • *Nous nous rappelons les notions connues ci-jointes pour que nous puissions nous baser sur elles:*

Folgen sind spezielle Funktionen mit dem Definitionsbereich $\mathbb{N}$ (vgl. Seiten 8, 17). • *Les suites sont des fonctions spéciales avec domaine de définition $\mathbb{N}$. (voir pages 8, 17).*

Zugehörige Begriffe: **Allgemeines Glied** (Seite 17), **Teilfolgen** (Seite 46). • *Notions liées: Terme général (page 17), suites partielles (page 46).*

Bei Teilfolgen gibt es zu $f : n \mapsto a_n$ eine injektive und ordnungstreu Indexfunktion $g : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}$ mit $g : m \mapsto n = g(m)$. • *Aux suites partielles il existe pour $f : n \mapsto a_n$ une fonction d'indexe injective qui conserve l'ordre $g : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$ avec $g : m \mapsto n = g(m)$.*
 $\leadsto \{(g(m)/a_{g(m)})\} \subset \{(n, a_n)\}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{m \mapsto n=g(m)} & \mathbb{N} & \xrightarrow{n \mapsto a_n} & \mathbb{R}, \mathbb{C} \\ \downarrow & & & & \uparrow \\ & \xrightarrow{\quad} & m \mapsto b_m & \xrightarrow{\quad} & \end{array}$$

Folgen können **monoton wachsend**, **streng monoton wachsend**, **monoton fallend**, **streng monoton fallend**, **beschränkt**, **nach oben beschränkt**, **nach unten beschränkt** sein (vgl. Seiten 50, 50). • *Les suites peuvent être croissantes de façon monotone, croissantes de façon monotone et stricte, décroissantes de façon monotone, décroissantes de façon monotone et stricte, bornées, bornées vers en bas, bornées vers en haut (voir pages 50, 50).*

Beispiele: • **Exemples:**

$\langle a_n \rangle$ monoton wachsend • *croissant de façon monotone* $\Leftrightarrow \forall_n a_{n+1} \geq a_n$

$\langle a_n \rangle$ streng monoton wachsend • *croissant de façon monotone et stricte* $\Leftrightarrow \forall_n a_{n+1} > a_n$

$\langle a_n \rangle$ nach oben beschränkt • *borné vers en haut* $\Leftrightarrow \exists_{M \in \mathbb{R}^+} \forall_n a_n \leq M$

$\langle a_n \rangle$ beschränkt • *borné* $\Leftrightarrow \exists_{M \in \mathbb{R}^+} \forall_n |a_n| \leq M$

6.1.2 Spezielle Folgen — Suites spéciales

Polynomiale Folgen — Suites polynomiales

Die folgenden Begriffe sind selbsterklärend und brauchen nicht speziell definiert zu werden:

• *Les notions suivantes s'expliquent elles-mêmes. Il n'est pas nécessaire de les définir spécialement.*

Konstante Folge: • **Suite constante:** $\forall_n a_n = c = \text{const.}$

Lineare Folge: • **Suite linéaire:** $\forall_n a_n = a \cdot n + b$

Quadratische Folge: • **Suite quadratique:** $\forall_n a_n = a \cdot n^2 + b n + c$

Polynomiale Folge vom Grad n : • **Suite polynomiale du degré n :**

$$\forall_n p_n = a_m \cdot n^m + a_{m-1} \cdot n^{m-1} + \dots + a_1 \cdot n + a_0$$

Arithmetische Folgen — Suites arithmétiques

Lineare Folgen heißen auch **arithmetische Folgen**. • *Les suites linéaires s'appellent aussi suites arithmétiques.*

Es gilt: • *Il vaut:*

$$[a_1, a_2, a_3, a_4 \dots] = [a \cdot 1 + b, a \cdot 2 + b, a \cdot 3 + b, a \cdot 4 + b \dots] = [a_1, a_1 + a, a_1 + 2a, a_1 + 3a \dots],$$

$$a_{n+1} - a_n = a := d \text{ (Differenz • } \underline{\text{différence}}) \quad a_n = a_1 + (n-1)d$$

Man definiert daher: • *C'est pourquoi on définit:*

Definition: • **Définition:** $\langle a_n \rangle$ arithmetisch • arithmétique

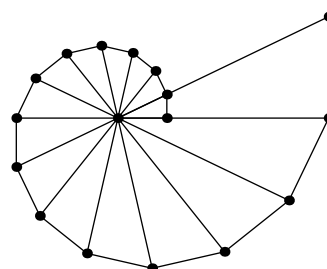
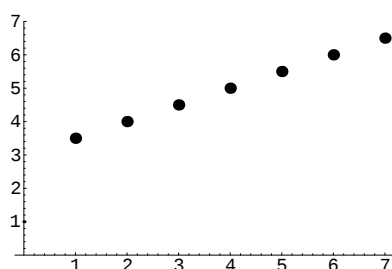
$$\Leftrightarrow \exists_d \forall_n : a_{n+1} - a_n = d$$

Formel: • **Formule:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$\langle a_n \rangle$ arithmetisch • arithmétique

Beh.: • **Thè.:**

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$$



Geometrische Folgen — Suites géométriques

Geometrische Folgen haben wir schon auf Seite 47 getroffen. • *Nous avons déjà vu des suites géométriques à la page 47.*

Allgemein definiert man: • *On définit de façon générale:*

Definition: • **Définition:** $\langle a_n \rangle$ **geometrisch** • **géométrique** $\Leftrightarrow \exists_q \forall_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$
 (q : Quotient • quotient.)

$$\leadsto a_{n+1} = q \cdot a_n, \quad a_n = q \cdot a_{n-1} \Rightarrow a_{n+1} \cdot a_{n-1} = a_n^2 \Rightarrow a_n = \pm \sqrt{a_{n+1} \cdot a_{n-1}}, \quad a_{n-1} = q \cdot a_{n-2} \Rightarrow$$

$$a_{n+1} = q^2 \cdot a_{n-1} = q^3 \cdot a_{n-2} = \dots = q^{(n-1)+1} \cdot a_{n-(n-1)} = q^n \cdot a_1 \Rightarrow a_n = q^{n-1} \cdot a_1$$

Formel: • **Formule:** **Vor.:** • **Hyp.:**
 $\langle a_n \rangle$ geometrische • *géométrique*

Beh.: • **Thè.:**
 $a_n = q^{n-1} \cdot a_1, \quad a_n = \pm \sqrt{a_{n+1} \cdot a_{n-1}}$

p-Folgen — Suites "p"

p-Folgen sind Potenzfolgen: • **Les suites "p"** sont des suites de puissances

Man definiert: • *On définit:*

Definition: • **Définition:** $\langle a_n \rangle$ **p-Folge** • **suite "p"** $\Leftrightarrow \exists_p \forall_n : a_n = a_0 \cdot n^p$

Induktiv definierte Folgen — Suites définies par induction

Verankerung: • *'ancrer':* a_1 gegeben • *donné*

Vererbung: • *'Conclusion de l'induction':* $a_{n+1} = \varphi(a_n)$
 (φ : Vererbungsfunktion • *Fonction 'pour transmettre'*)

Bsp.: • **Exemple:** $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \varphi(a_n) = a_n + n^2 \Rightarrow \langle a_n \rangle = [1, 2, 6, 15, 31, \dots]$

Differenzen- und Summenfolgen — Suites de différences et de sommes

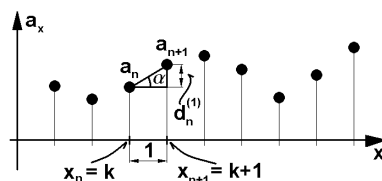
Geg.: • **Donné:** Folge • *Suite* $\langle a_n \rangle$

Für • *Pour* $\Delta x = (n+1) - n = 1$ wird der Differenzenquotient: • *le quotient de différences*

$$\text{devient:} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a_{n+1} - a_n}{1} = a_{n+1} - a_n := d_n^{(1)}$$

Wir definieren daher:

• *C'est pourquoi nous définissons:*



Definition: • **Définition:**

$\langle d_n^{(1)} \rangle := \langle a_{n+1} - a_n \rangle$ heisst **1. Differenzenfolge** von $\langle a_n \rangle$
 • *s'appelle 1-re suite de différences de $\langle a_n \rangle$*
 $\langle d_n^{(2)} \rangle := \langle d_{n+1}^{(1)} - d_n^{(1)} \rangle$ heisst **2. Differenzenfolge** von $\langle a_n \rangle$
 • *s'appelle 2-me suite de différences de $\langle a_n \rangle$*
 $\langle d_n^{(k)} \rangle := \langle d_{n+1}^{(k-1)} - d_n^{(k-1)} \rangle$ heisst **k. Differenzenfolge** von $\langle a_n \rangle$
 • *s'appelle k-me suite de différences de $\langle a_n \rangle$*

Umgekehrt: • *D'autre part:*

Definition: • **Définition:**

$\langle s_n^{(1)} \rangle := \langle \sum_{k=1}^n a_k = \langle a_1 + a_2 + \dots + a_n \rangle \rangle$ heisst **1. Summenfolge** von $\langle a_n \rangle$ • *s'appelle 1-re suite de sommes de $\langle a_n \rangle$*
 $\langle s_n^{(2)} \rangle := \langle \sum_{k=1}^n s_k^{(1)} \rangle = \langle s_1^{(1)} + s_2^{(1)} + \dots + s_n^{(1)} \rangle$ heisst **2. Summenfolge** von $\langle a_n \rangle$ • *s'appelle 2-me suite de sommes de $\langle a_n \rangle$*
 $\langle s_n^{(m)} \rangle := \langle \sum_{k=1}^n s_k^{(m-1)} \rangle = \langle s_1^{(m-1)} + s_2^{(m-1)} + \dots + s_n^{(m-1)} \rangle$ heisst **m. Summenfolge** von $\langle a_n \rangle$ • *s'appelle m-me suite de sommes de $\langle a_n \rangle$*

Man sieht sofort: • *On voit tout de suite:*

$\langle a_n \rangle = \langle a \cdot n + b \rangle$ (linear • *linéaire*) $\Rightarrow a_{n+1} - a_n = (a \cdot (n+1) + b) - (a \cdot n + b) = a = \text{const.}$

$\langle a_n \rangle = c = \text{const.}$ (konstant • *constant*) $\Rightarrow s_n^{(1)} = c + c + \dots + c = n \cdot c$ (linear • *linéaire*)

$\langle a_n \rangle = \langle a \cdot n^2 + b \cdot n + c \rangle$ (quadratisch • *quadratique*) $\Rightarrow a_{n+1} - a_n = (a \cdot (n+1)^2 + b \cdot (n+1) + c) - (a \cdot n^2 + b \cdot n + c) = (a \cdot (n^2 + 2n + 1) + b \cdot (n+1) + c) - (a \cdot n^2 + b \cdot n + c) = 2na + a + b$ (linear • *linéaire*)

$\langle a_n \rangle = \langle a \cdot n + b \rangle$ (linear • *linéaire*) $\Rightarrow s_n^{(1)} = a \cdot 1 + a \cdot 2 + b + a \cdot 3 + b + \dots + a \cdot n + b = a \cdot (1 + 2 + \dots + n) + n \cdot b = a \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n \cdot b = \frac{a \cdot n^2 + (a+2b) \cdot n}{2}$ (quadratisch • *quadratique*)

Allgemein können wir vermuten, dass Partialsummenbildung und Differenzenfolgenbildung in irgend einer Art zueinander inverse Operationen sind. • *Nous supposons généralement que former la suite de sommes et la suite de différences sont dans une certaine manière des opérations inverses.*

Seien • *Soient* $\langle s_n^{(1)} \rangle = \langle b_n \rangle$ Partialsummenfolge von • *suite de sommes partielles de $\langle a_n \rangle$*

$\leadsto$ Differenzenfolge von • *Suite de différences de $\langle b_n \rangle$* : $d_{b,n}^{(1)} = b_{n+1} - b_n = s_{n+1}^{(1)} - s_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^n a_k = a_{n+1}$
 $a_{n+1} \leadsto$ Ursprüngliche Folge mit verschobenem Index • *Suite originale avec index déplacé*

Umgekehrt berechnen wir die Summenfolge der Differenzenfolge: • *A l'inverse nous calculons la suite de sommes de la suite de différences:*

Geg.: • **Donné:**

$\langle a_n \rangle \leadsto d_n^{(1)} = a_{n+1} - a_n, d_1^{(1)} = a_2 - a_1, d_2^{(1)} = a_3 - a_2, d_3^{(1)} = a_4 - a_3, \dots$
 $\Rightarrow s_{d,n}^{(1)} = \sum_{k=1}^n d_k^{(1)} = d_1^{(1)} + d_2^{(1)} + \dots + d_n^{(1)} = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \dots +$

$+(h_n - h_{n-1}) + (a_{n+1} - h_n) = a_{n+1} - a_1 \Rightarrow \langle s_{a,n}^{(1)} \rangle = \langle a_{n+1} - a_1 \rangle$
 $\leadsto$ Um a_1 verschobene ursprüngliche Folge mit verschobenem Index • *Suite originale déplacée de a_1 avec index déplacé.*

Weiter vermuten wir, dass die Differenzenfolge einer polynomialen Folge n -ten Grades eine solche vom Grad $n - 1$ ist. • *En outre nous supposons que la suite de différences d'une suite du degré n est une suite du degré $n - 1$*

$$\begin{aligned} p_n &= a_m \cdot n^m + a_{m-1} \cdot n^{m-1} + \dots + a_1 \cdot n + a_0 \Rightarrow p_{n+1} - p_n = \\ & (a_m \cdot (n+1)^m + a_{m-1} \cdot (n+1)^{m-1} + \dots + a_1 \cdot (n+1) + a_0) - (a_m \cdot n^m + a_{m-1} \cdot n^{m-1} + \dots + a_1 \cdot n + a_0) \\ &= a_m \cdot ((n+1)^m - n^m) + a_{m-1} \cdot ((n+1)^{m-1} - n^{m-1}) + \dots + a_1 \cdot ((n+1) - n) + a_0 - a_0 \\ &= a_m \cdot (h^m - \binom{m}{1} n^{m-1} + \binom{m}{2} n^{m-2} + \dots + n^0 - h^m) + a_{m-1} \cdot (h^{m-1} + \binom{m-1}{1} n^{m-2} + \binom{m-1}{2} n^{m-3} + \dots \\ &+ n^0 - h^{m-1}) + \dots + a_1 = a_m \cdot \binom{m}{1} n^{m-1} + (\dots \cdot n^{m-2}) + \dots + a_1 \leadsto \text{Grad} \bullet \text{Degré} = m - 1 \end{aligned}$$

Satz: • **Théorème:** Die Differenzenfolge einer polynomialen Folge vom Grad n hat den Grad $n - 1$

• *La suite de différences d'une suite polynomiale de degré n a le degré $n - 1$*

Die Differenzenfolge der Summenfolge von $\langle a_n \rangle$ ist $\langle a_{n+1} \rangle$

• *La suite de différences de la suite de sommes de $\langle a_n \rangle$ est $\langle a_{n+1} \rangle$*

Die Summenfolge der Differenzenfolge von $\langle a_n \rangle$ ist $\langle a_{n+1} - a_1 \rangle$

• *La suite de sommes de la suite de différences de $\langle a_n \rangle$ est $\langle a_{n+1} - a_1 \rangle$*

Dieser Satz ermöglicht uns die Berechnung erstaunlicher Summenfolgen: • *Ce théorème nous permet de calculer des sommes étonnantes:*

Bsp.: • **Exemple:** $s_n^1 = \sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 = ? \leadsto$ Summenfolge einer quadratischen Folge muss Grad 3 haben! • *Suite de sommes d'une somme quadratique doit avoir le degré 3!*
 $\leadsto s_n^1 = a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + c \cdot n + d$

Dazu ist: • *En plus on sait:* $d_{s,n} = s_{n+1}^1 - s_n^1 = a_{n+1} \Rightarrow a_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 =$
 $(a \cdot (n+1)^3 + b \cdot (n+1)^2 + c \cdot (n+1) + d) - a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + c \cdot n + d = 3an^2 + (2b + 3a)n + a + b + c$
 $\Rightarrow 3a = 1, 3a + 2b = 2, a + b + c = 1$ (Koeffizientenvergleich • *comparer les coefficients.*)
 $\leadsto a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{6}, d = ?$

$$s_1^1 = \sum_{k=1}^1 k^2 = 1 = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + d \Rightarrow d = 0 \Rightarrow s_n^1 = \frac{1}{3} \cdot n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} \cdot n$$

Formel: • **Formule:** $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3} \cdot n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} \cdot n$

Bsp.: • **Exemple:** $\sum_{k=1}^{50} k^2 = \frac{1}{3} \cdot 50^3 + \frac{1}{2} 50^2 + \frac{1}{6} \cdot 50 = 42925$ u.s.w • *etc..*

Es ist dem Leser überlassen, auf diese Weise eine Formel zu finden für: • *C'est un devoir du lecteur de trouver ainsi une formule pour:* $\sum_{k=1}^n k^3, \sum_{k=1}^n k^4$ u.s.w • *etc.*

6.1.3 Konvergenzprobleme — Problèmes de convergence

Die Problematik — La problématique

Euler¹³ hat zur Berechnung der Quadratwurzel den folgenden Algorithmus gefunden: • *Pour calculer la racine carrée, Euler¹³ a trouvé l'algorithme suivant:*

$$\begin{aligned} \sqrt{k} &= ? \quad \text{Sei} \quad \bullet \text{ Soit } k > 0, \quad x := \sqrt{k} \\ \Rightarrow x^2 &= k, \quad 2x^2 = x^2 + x^2 = k + x^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2x}(x^2 + k) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{k}{x}\right) \\ \Rightarrow x &= \frac{1}{2}\left(x + \frac{k}{x}\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{k}{\frac{1}{2}\left(x + \frac{k}{x}\right)}\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{k}{\frac{1}{2}\left(x + \frac{k}{\frac{1}{2}\left(x + \frac{k}{\frac{1}{2}\left(x + \frac{k}{x}\right)}\right)}\right)}\right) \end{aligned}$$

$$\leadsto \text{Versuche Iteration: } \bullet \text{ Essaie l'itération: } x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{k}{x_n}\right)$$

Im Falle der Konvergenz muss dann gelten: • *En cas de convergence il vaut:*

$$\begin{aligned} x &= x_\infty = \frac{1}{2}\left(x_\infty + \frac{k}{x_\infty}\right) \\ \Rightarrow \dots x_\infty &= \sqrt{k} \quad (\text{Rechnung von oben rückwärts } \bullet \text{ calcul d'en haut dans l'autre direction.}) \end{aligned}$$

Problem: • **Problème:** Konvergiert die Folge $\langle x_n \rangle$? Jede Rechnung mit einer Maschine muss einmal abbrechen. Damit kann man keine Konvergenz beweisen. • *Est-ce que la suite $\langle x_n \rangle$ converge-t-elle? Chaque calcul à la machine doit s'arrêter une fois. Ainsi il n'est pas possible de prouver une convergence.*

Begriffe — Notions

Nachfolgend spielen schon früher definierte Begriffe eine Rolle: • *Des notions définies il y a longtemps jouent un rôle dans ce qui suit :*

Wir erwähnen sie kurz: • *Nous les mentionnons brièvement:*

Nullfolge (vgl. Seite 40, für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ liegen fast alle Folgenglieder a_n in einer Epsilon-Umgebung von 0, nur endlich viele nicht.) • **Suite vers zéro** (voir page 40, pour un $\varepsilon > 0$ quelconque, presque tous les termes de la suite a_n sont dans un voisinage epsilon de 0, il y manquent seulement un nombre fini de termes.)

Grenzwert (vgl. Seite 43) • **Valeur limite** (voir page 43)

Konvergenz (vgl. Seite 43) • **Convergence** (voir page 43)

Häufungspunkt (HP'PA, vgl. Seite 44) • **Point d'accumulation** (HP'PA, voir page 44)

Grenzwertfreie Konvergenzdefinition (**Kriterium von Cauchy**)(vgl. Seite 44) • *Définition de la convergence sans valeur limite (critère de Cauchy) (voir page 44).*

Falls der Leser Lücken entdeckt, ist eine Repetition empfohlen! • *Si le lecteur voit qu'il a des lacunes, il faut qu'il répète la matière.*

¹³1707 – 1783

Sätze über Grenzwerte — Théorèmes sur les valeurs limites

Wir wollen uns rasch noch einige wichtige Grenzwertsätze in Erinnerung rufen. • *Il est nécessaire de se rappeler certains théorèmes importants sur les valeurs limites.*

- ⊙ Jede Folge besitzt mindestens einen HP'PA, der auch $\pm\infty$ sein kann. (vgl. Seite 45).
• *Chaque suite possède au moins un HP'PA qui peut être aussi $\pm\infty$ (voir page 45).*
- ⊙ Konvergenz einer Folge $\langle a_n \rangle$ bedeutet, dass der Grenzwert eindeutig ist. • *La convergence d'une suite $\langle a_n \rangle$ signifie que la valeur limite est univoque.*
(Sonst gäbe es mindestens zwei HP'PA, dazwischen eine Distanz $d > 0$, was dem Kriterium von Cauchy widerspricht. • *Si non il y aurait au moins deux HP'PA et entre ces deux une distance $d > 0$, par contradiction au critère de Cauchy.*)
- ⊙ $a_n \rightarrow a \neq \pm\infty \Rightarrow \langle |a_n| \rangle$ beschr'borné.
(Sonst wäre ∞ HP'PA von $\langle |a_n| \rangle$, a_n ist immer definiert. • *Si non ∞ sera HP'PA de $\langle |a_n| \rangle$, a_n est toujours défini.*)
- ⊙ $a_n \rightarrow a \Rightarrow \langle b_n \rangle \rightarrow a$ für jede Teilfolge $\langle b_n \rangle$ • *pour toutes les suites partielles de $\langle b_n \rangle$.*
(Denn der Grenzwert ist eindeutig • *Car la valeur limite est univoque.*)
- ⊙ $\langle a_n \rangle$ monoton und beschränkt • *monotone et borné $\Rightarrow \langle a_n \rangle$ konvergent • convergent.* (vgl. Seite 50 • *voir page 50*)
- ⊙ Was das Rechnen mit Grenzwerten betrifft, sei auf Seite 50 verwiesen. • *En ce qui concerne les règles de calcul pour les valeurs limites, il faut consulter page 50.*

6.2 Reihen, Zahlenreihen — Séries, séries de nombres

6.2.1 Gegenstand, Motivation — Sujet, motivation

Wir betrachten eine Folge $\langle a_n \rangle$. • *Soit $\langle a_n \rangle$ une suite donnée.*

Definition: • **Définition:**

Ein Glied s_n der Partialsummenfolge $\langle s_n \rangle = \sum_{k=1}^n a_k$ heisst **endliche Reihe**.

• *Un terme s_n de la suite de sommes partielles $\langle s_n \rangle = \sum_{k=1}^n a_k$ s'appelle **série finie**.*

Der formale Ausdruck $\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty}$ heisst unendliche Reihe oder kurz **Reihe**, die aufsummierten Glieder der Folge $\langle a_n \rangle$ heissen **Reihenglieder**.

• *L'expression formelle $\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty}$ s'appelle **série infinie** ou bref **série**, les termes additionnés de la suite de sommes partielles $\langle a_n \rangle$ s'appellent **termes de la série**.*

Falls der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty}$ existiert, so heisst die Reihe **konvergent**. Andernfalls heisst sie **divergent**.

• *Si la valeur limite $\lim_{n \rightarrow \infty}$ existe, la série s'appelle **convergente**. Si non elle s'appelle **divergente**.*

Dass eine Reihe konvergiert bedeutet also, dass ihre Partialsummenfolge konvergiert. Man hat es demnach mit speziellen konvergenten Folgen zu tun. • *Qu'une série converge signifie donc que la suite des sommes partielles converge. On a donc à faire avec des suites spéciales.*

Schreibweise: • **Façon d'écriture:**

$s := \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert • *converge* $\Rightarrow s \in \mathcal{CONV}$, divergiert • *diverge* $\Rightarrow s \in \mathcal{DIV}$

Falls die Reihenglieder nicht Zahlen, sondern Funktionen sind, hat man es mit **Funktionenreihen** zu tun. Solche Reihen spielen in der Praxis bei der Approximation von transzendenten Funktionen (z.B. $f(x) = e^x$) durch Polynome oder von periodischen Funktionen durch trigonometrische Ausdrücke eine grosse Rolle (vgl. Potenzreihen und Fourierreihen). • *Si les termes de la série ne sont pas des nombres mais des fonctions, on a des séries de fonctions. De telles séries jouent un grand rôle en pratique à l'approximation de fonctions transcendentes (p.ex. $f(x) = e^x$) par des polynômes ou de fonctions périodiques par des expressions trigonométriques (voir séries de puissances et séries de Fourier).*

6.2.2 Spezielle Reihen — Séries spéciales

1. Beispiel: • Exemple 1:

Aus einer arithmetischen Folge erhalten wir durch Summation eine **arithmetische Reihe**:

• *Nous obtenons par sommation de la suite arithmétique la série arithmétique:*

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (a_1 + (k-1)d) = \sum_{k=1}^n a_1 + d \sum_{k=0}^{n-1} k = n a_1 + d \frac{(n-1)n}{2} \leadsto$$

Formel: • **Formule:**

Vor.: • **Hyp.:**

$\langle a_n \rangle$ arithmetische Folge • *suite arithmétique*

Beh.: • **Thè.:**

$$s_n = n a_1 + d \frac{(n-1)n}{2}$$

Hinweis: • **Indication:**

Geg.: • **Donné:** Arithmetische Folge $a_k = a_1 + (k-1)d$

• *Suite arithmétique* $a_k = a_1 + (k-1)d$

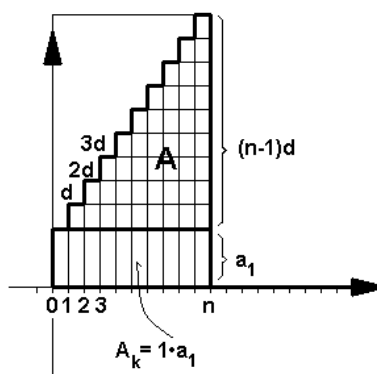
Summe: • *Somme:*

$$A = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = ?$$

$$A = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 1 + \dots + a_n \cdot 1 = n \cdot a_1 + A_{1/2}$$

$$A_{tot} = n \cdot a_1 + n \cdot (n-1) \cdot d = n \cdot a_1 + 2 \cdot A_{1/2}$$

$$\Rightarrow A = n \cdot a_1 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot d}{2}$$



2. Beispiel: • Exemple 2:

Aus einer geometrischen Folge erhalten wir durch Summation eine **geometrischen Reihe**:

• *De la suite géométrique nous obtenons par sommation la série géométrique:*

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n q^k = \sum_{k=1}^n q^{k-1} \cdot q = \sum_{k=1}^n (q^{k-1} \cdot a_1) = a_1 \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1})$$

Es gilt: • *Il vaut:* $(q \neq 1)$

$$(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) \cdot (1 - q) = (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) - (q + q^2 + q^3 + \dots + q^n) = 1 - q^n$$

$$\Rightarrow 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad q \neq 1$$

Formel: • **Formule:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$\langle a_n \rangle = \langle q^n \rangle$ geometrischen Folge • *suite géométrique*

Beh.: • **Thè.:** $s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$

$|q| < 1 \Rightarrow$ Reihe konvergent • *série convergente*
 $|q| \geq 1 \Rightarrow$ Reihe divergent • *série divergente*

Bemerkung: • **Remarque:** Arithmetische und geometrische Reihen spielen in der Finanzmathematik eine Rolle. • *Les séries arithmétiques et géométriques sont importantes dans les mathématiques des finances.*

3. Beispiel: • **Exemple 3:**

Numerische Reihe (Dezimalbruch): • **Série numérique** (*fraction décimale*):

$$N_n = \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{10^k}$$

Da unendliche Dezimalbrüche eine reelle Zahl darstellen, ist damit zu rechnen, dass numerische Reihen konvergieren. Für den exakten Beweis müssen wir uns die theoretischen Grundlagen aber erst erarbeiten.
 • *Comme les fractions décimales infinies représentent des nombres réels, on prétend que les séries numériques convergent. Pour avoir une preuve exacte, il faut d'abord élaborer les fondements théoriques.*

4. Beispiel: • **Exemple 4:** **Alternierende Reihe:** • **Série alternée:**

$$A_n = \pm \sum_{k=1}^n (-1)^k |a_k|$$

$\leadsto$ **Problem:** • **Problème:** Konvergenz? • *Convergence?*

5. Beispiel: • **Exemple 5:** **p-Reihe:** • **Série "p":**

$$P_n = a_1 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p}, \quad p \in \mathbb{Z}$$

$\leadsto$ **Problem:** • **Problème:** Konvergenz? (S. p. 54) • *Convergence?* (V. p. 54)

6. Beispiel: • **Exemple 6:** **Harmonische Reihe:** • **Série harmonique:**

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

$\leadsto$ **Problem:** • **Problème:** Konvergenz? • *Convergence?*

Konsequenz: • **Conséquence:** Um die Konvergenz beurteilen zu können, müssen wir uns erst **Konvergenzkriterien** erarbeiten. • *Pour pouvoir juger la convergence, il faut d'abord élaborer des critères de convergence.*

6.2.3 Konvergenzkriterien — Critères de convergence

Nullfolgekriterium — Critères de suite convergeant vers zéro

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:** $\sum_{k=1}^n a_k \in \mathcal{CONV}$

Beh.: • **Thè.:**

$\langle a_n \rangle$ Nullfolge • *suite convergeant vers zéro* (NF'SZ)

Idee zum Beweis: Falls $\langle a_n \rangle$ keine Nullfolge wäre, müssten die Werte von $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ mit n ständig wesentlich ändern, was bei einer Konvergenz nicht sein kann.

• *Idée quant à la preuve: Si $\langle a_n \rangle$ n'était pas une suite convergeant vers zéro, les valeurs de $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ devraient changer avec n , ce qui ne peut pas être pour une suite convergente.*

Achtung: • **Attention:** Die Umkehrung (Konversion) des Nullfolgenkriteriums gilt nicht! • La conversion de ce critère de la suite convergeant vers zéro ne vaut pas!

Das sieht man z.B. an der harmonischen Reihe $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Später werden wir beweisen, dass diese Reihe divergiert. Trotzdem bildet die Folge der Glieder $\langle a_n \rangle = \frac{1}{k}$ eine Nullfolge.

• *Ça se voit p.ex. à la série harmonique $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Plus tard nous allons prouver que cette série diverge. La suite des termes $\langle a_n \rangle = \frac{1}{k}$ forme quand même une suite convergeant vers zéro.*

Abänderung von Reihengliedern — Changement de termes d'une série

Wenn man bei einer konvergenten Reihe endlich viele Glieder verändert, so ändert man die Summe endlich viele Male um jedesmal einen Wert. Das ergibt dann einen neuen, wieder exakt definierten Wert oder Grenzwert der Reihe: Die Reihe bleibt konvergent. Genauso bei divergenten Reihen und bei Folgen. Das was das Konvergenzverhalten der Reihe wirklich bestimmt, ist somit ihr „Schwanz“ und nicht der Anfang. Weiter: Die Grenzwertsätze für Folgen gelten auch speziell für Summenfolgen oder Reihen. Falls z.B. s_n konvergiert, so konvergiert auch jede Teilfolge von s_n gegen denselben Grenzwert.

• *Si l'on change à une série convergente un nombre fini de termes, on change la somme en un nombre fini d'étapes, chaque fois par une valeur. Alors ça nous donne une valeur nouvelle de la série (valeur limite), aussi exactement définie: La série reste convergente. Analogiquement pour des séries divergentes et pour des suites. Ce qui influence essentiellement le comportement de convergence de la série est donc "la queue" de la série et non le début. En plus: les théorèmes de limites pour les suites valent spécialement pour les suites de sommes, donc pour les séries. Si p.ex. s_n converge, chaque suite partielle de s_n converge aussi vers la même valeur limite.*

Satz: • **Théorème:** Verändert man endlich viele Glieder einer Folge oder Reihe, so ändert sich die Konvergenz nicht. • *Si l'on change un nombre fini de termes d'une suite ou série, la convergence ne change pas.*

Die Grenzwertsätze für Folgen gelten auch speziell für Reihen. Z.B. konvergiert mit s_n auch jede Teilfolge von s_n gegen denselben Grenzwert.

• *Les théorèmes de limites pour les suites valent spécialement pour les séries. P.ex. si s_n converge, chaque suite partielle de s_n converge aussi vers la même valeur limite.*

Majorantenkriterium — Règle de comparaison

Die Begriffe **Majorante** (kurz: *Major*) und **Minorante** (kurz: *Minor*) haben wir schon auf Seite 46 getroffen. • *Nous avons défini les notions de majorante (bref: Major) et de minorante (bref: Minor) à la page 46.*

Zur Erinnerung: • *Rappelons: $\forall_{n>N_0} |a_n| \leq c_n \rightsquigarrow \sum_{k=1}^{\infty} c_k$ Major zu* • *pour $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$*
und • *et $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ Minor zu* • *pour $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$*

Satz: • Théorème:

1. Jede nicht negative Minorante einer konvergenten Reihe ist absolut konvergent. • *Chaque minorante non négative d'une série convergente converge de façon absolue.*
2. Jede Majorante einer divergenten Reihe mit nicht negativen Gliedern ist divergent. • *Chaque majorante d'une série divergente, dont les membres ne sont pas négatifs, est divergente.*

Zum Beweis: • *Quant à la preuve:*

(1) Eine Majorante einer nicht negativen Reihe muss lauter Glieder ≥ 0 haben, die Majorante muss also monoton wachsen. Da sie konvergent ist, muss sie beschränkt sein. Somit muss auch die nicht negative Minorante beschränkt sein. Da diese keine negativen Glieder hat, muss sie monoton wachsen. Daraus folgt die Konvergenz. • *Une majorante d'une série non-négative doit consister complètement en termes ≥ 0 , la majorante doit donc croître monotonement. Comme elle est convergente, elle doit être bornée. La minorante non-négative est donc aussi bornée. Comme elle n'a pas de membres négatifs, elle doit croître monotonement. De ces faits on déduit la convergence.*

(2) Offensichtlich wächst die Minorante hier über alle Grenzen. Dieses Verhalten überträgt sich auch auf die Majorante. • *Comme on voit, la minorante croît infiniment. Ce comportement vaut donc aussi pour la majorante.*

Bsp.: • Exemple: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{0.9^{n+1}}{n+1} \in \mathcal{CONV}$, denn die konvergente geometrische Reihe • *parce que la série géométrique convergente $\sum_{k=1}^{\infty} 0.9^n$ ist Majorante* • *est majorante.*

Bemerkung: • Remarque:

Mit Hilfe des Majorantenkriteriums lassen sich später weitere Kriterien gewinnen. (Quotientenkriterium (von d'Alembert¹⁴), Integralkriterium u.s.w.) • *Plus tard nous allons déduire d'autres critères à l'aide de la règle de comparaison. (Critère de d'Alembert¹⁴, critère de l'intégrale, etc.).*

Konsequenz: • Conséquence:

Sei • *Soit $a_n \in \{0, 1, 2, \dots, 8, 9\}$*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 9 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 9 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 9 \cdot \frac{9}{9} = 9 \Rightarrow \text{Major !}$$

¹⁴d'Alembert, 1717 – 1783

Absolute Konvergenz — Convergence absolue

Definition: • **Définition:** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heisst **absolut konvergent** • *s'appelle absolument convergent* $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent • *convergent*.

Schreibweise: • **Façon d'écrire:** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathcal{ABSCONV}$

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathcal{ABSCONV}$
Beh.: • **Thè.:** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathcal{CONV}$

Achtung: • **Attention:** Die Umkehrung (Konversion) gilt nicht! Das werden wir später z.B. wieder an der harmonischen Reihe $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ sehen. • La conversion de ce théorème ne vaut pas! *Nous allons voir ce fait p.ex. plus tard à la série harmonique $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.*

Zum Beweis: • *Quant à la preuve:* Sei • *Soit* $\langle s_{a,n} \rangle := \sum_{k=1}^n |a_k|$, $\langle s_n \rangle := \sum_{k=1}^n a_k$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathcal{ABSCONV} \Rightarrow \langle s_{a,n} \rangle$ monoton wachsend ($|a_k| \geq 0$) und beschränkt • *croissant monotonement* ($|a_k| \geq 0$) *et borné*.

$|\sum_{k=1}^n a_k| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| \Rightarrow \sum_{k=1}^n a_k$ beschränkt • *borné*.

Wäre $\langle s_n \rangle := \sum_{k=1}^n a_k \notin \mathcal{CONV}$, so existierten mindestens 2 HP'PA a und b , $a \neq b$.

• *Si* $\langle s_n \rangle := \sum_{k=1}^n a_k \notin \mathcal{CONV}$, *il existerait au moins 2 HP'PA a et b , $a \neq b$.*

$\leadsto \exists$ Teilfolgen • $\exists$ suites partielles $s_m, s_j, s_m \in U_\varepsilon(a), s_j \in U_\varepsilon(b)$,
 $|s_{a,m} - s_{a,j}| > |s_m - s_j| > |a - b| - 2\varepsilon > M > 0$ für • *pour ε genügend klein* • *assez petit*.

Andererseits gilt wegen dem Cauchy-Kriterium infolge der absoluten Konvergenz: • *D'autre part il vaut à cause du critère de Cauchy et par suite de la convergence absolue:*

$|s_{a,m} - s_{a,j}| \rightarrow 0 \Rightarrow$ Widerspruch! • *Contradiction!*

Bsp.: • **Exemple:**

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-0.9)^{n+1}}{n+1} \in \mathcal{ABSCONV}$ nach dem letzten Beispiel • *selon l'exemple dernier*.

Leibnizkriterium — Critère de Leibniz

Das Leibnizkriterium gilt für alternierende Reihen: • *Le critère de Leibniz vaut pour des séries alternantes:*

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$s_n = \pm \sum_{k=1}^n (-1)^k |a_k|$, $\langle |a_k| \rangle$ streng monoton fallende Nullfolge
 • *suite convergent vers zéro décroissant de façon monotone et stricte*

Beh.: • **Thè.:** $\langle s_n \rangle \in \mathcal{CONV}$

Zum Beweis: • *Quant à la preuve:*

Sei • *Soit* $|a_k| = a_k \geq 0$,
 $s_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \dots \pm a_n$



Programm: Zeige • Programme: montrer

- ⊙ (1.) Zeigen: • *Montrer:* $\langle s_n \rangle$ beschränkt • *borné.*
- ⊙ (2.) Zeigen: • *Montrer:* $\langle s_{2n} \rangle$ streng monoton • *strictement monotone.*
 $\leadsto 1., 2. \Rightarrow \langle s_{2n} \rangle \in \mathcal{CONV}$.
- ⊙ (3.) Zeigen: • *Montrer:* $s_{2n+1} - s_{2n} \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n}$
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} \in \mathcal{Conv} \leadsto \text{😊}$

Die Beweisarbeit: • Le travail de prouver:

- ⊙ (2) $\langle |a_k| \rangle$ streng mon. fallend • *décroissant monotonement, stricte*
 $\Rightarrow s_{2n} = \underbrace{a_1 - a_2}_{b_1 > 0} + \underbrace{a_3 - a_4}_{b_2 > 0} + \dots = b_1 + b_2 + \dots > 0 \leadsto$ streng monoton wachsend
 • *croissant, strictement monotone*
- ⊙ (1.) $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1} > s_{2n} > 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ s_n > 0$
 $s_{2n+1} = a_1 - \underbrace{(a_2 - a_3)}_{c_1 > 0} - \underbrace{(a_4 - a_5)}_{c_2 > 0} - \dots < a_1$
 $s_{2n+2} = s_{2n+1} - a_{2n+2} < s_{2n+1} < a_1$
 $s_{2n+1} < a_1, \ s_{2n+2} < a_1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ s_n < a_1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ 0 < s_n < a_1 \Rightarrow \langle s_n \rangle$ beschr'borné
- ⊙ (3.) $s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \rightarrow 0$ weil • *parce que* $\langle a_n \rangle$ Nullfolge nach Voraussetzung • *suite vers zéro selon l'hypothèse* $\leadsto \text{😊}$

Bsp.: • **Exemple:** $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots \in \mathcal{CONV}$

Quotientenkriterium — Critères de d'Alembert

Satz: • **Théorème:** $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q < 1$ für • *pour* $k \geq k_0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathcal{ABSCONV}$
 $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \geq q > 1$ für • *pour* $k \geq k_0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathcal{DIV}$

Zum Beweis: • *Quant à la preuve:*

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q \Rightarrow |a_{k+1}| \leq |a_k| q \Rightarrow |a_{k+2}| \leq |a_{k+1}| q \leq |a_k| q^2 \Rightarrow \dots \Rightarrow |a_{k+n}| \leq |a_k| q^n$$

$\Rightarrow$ geometrische Reihe ist Majorante • *série géométrique est majorante.*

Analog im Falle der Divergenz. • *Analoguement dans le cas de la divergence.*

Für das spätere Studium der Potenzreihen ist folgendes Beispiel wichtig: • *Pour les études ultérieures des séries de puissances l'exemple suivant est important:*

Bsp.: • **Exemple:** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^k}{k!} \stackrel{?}{\in} \mathcal{CONV}$?

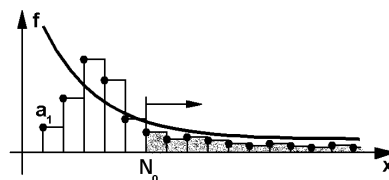
$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{c^{k+1}}{(k+1)!} \right| \cdot \left| \frac{k!}{c^k} \right| = \left| \frac{c^k}{(k)!} \right| \cdot \left| \frac{c}{(k+1)!} \right| \cdot \left| \frac{k!}{c^k} \right| = \left| \frac{c}{(k+1)} \right| \rightarrow 0 \Rightarrow \forall c \in \mathbb{R} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^k}{k!} \in \mathcal{CONV}$$

Integralkriterium — Critère de l'intégrale

Problem: • **Problème:**

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \stackrel{?}{\in} \mathcal{CONV} ?$$

Betrachte die Situation: • *Soit donné la situation:*



$$|a_k| \leq f(x) \text{ für } \bullet \text{ pour } x \in [k, k+1), k \in \mathbb{N}, k \geq N_0, \int_{N_0}^{\infty} f(x) dx \text{ ex. .}$$

$$\leadsto \sum_{k=1}^n |a_k| \text{ monoton wachsend } \bullet \text{ croissant monotonement}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |a_k| &= \sum_{k=1}^n |a_k| \cdot 1 \leq \sum_{k=1}^{N_0-1} |a_k| + \sum_{k=N_0}^n \int_k^{k+1} f(x) dx = \sum_{k=1}^{N_0-1} |a_k| + \int_{N_0}^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{N_0-1} |a_k| + \int_{N_0}^{\infty} f(x) dx \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ beschr'borné} &\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathcal{ABSCONV} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathcal{CONV} \end{aligned}$$

Analog: • *Analoguement:*

$$|a_k| \geq f(x) \text{ für } \bullet \text{ pour } x \in [k, k+1), k \in \mathbb{N}, k \geq N_0, \int_{N_0}^{\infty} f(x) dx = \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \infty$$

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$\begin{aligned} \exists_{f(x)} : |a_k| \leq f(x) \text{ für } \bullet \text{ pour } x \in [k, k+1), \\ k \geq N_0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \int_{N_0}^{\infty} f(x) dx \text{ ex. } . \end{aligned}$$

Beh.: • **Thè.:**

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathcal{ABSCONV}$$

Vor.: • **Hyp.:**

$$\begin{aligned} \exists_{f(x)} : |a_k| \geq f(x) \text{ für } \bullet \text{ pour } x \in [k, k+1), \\ k \geq N_0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \int_1^{\infty} f(x) dx = \infty \end{aligned}$$

Beh.: • **Thè.:**

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \infty$$

1. Beispiel: • **Exemple 1:** **p-Reihen** • **Séries "p"**

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^p} &= (k^{-p})|_{p \geq 1} \leq (x-1)^{-p} \text{ für } \bullet \text{ pour } x \in [k, k+1), \quad k \geq 2, \quad \int_2^{\infty} (x-1)^{-p} dx = \int_1^{\infty} (x)^{-p} dx \\ &= \frac{1}{-p+1} (x)^{-p+1} \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{(1-p)x^{p-1}} \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{(1-p)(\infty)^{p-1}} - \frac{1}{(1-p)(1)^{p-1}} = \frac{1}{p-1} \Big|_{p \geq 1} \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} &\in \mathcal{ABSCONV} \text{ für } \bullet \text{ pour } p \geq 1 \end{aligned}$$

Korollar: • **Corollaire:** **Vor.:** • **Hyp.:** $p > 1$

$$\text{Beh.} \bullet \text{Thè.} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \in \mathcal{ABSCONV}$$

2. Beispiel: • **Exemple 2:** **Harmonische Reihe** • **Série harmonique**

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^p} &= \left(\frac{1}{k}\right)^p \geq \left(\frac{1}{k}\right)|_{0 < p \leq 1} \geq \frac{1}{x} \text{ für } \bullet \text{ pour } x \in [k, k+1), \quad k \geq 1, \\ \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx &= \ln(x) \Big|_1^{\infty} = \ln(\infty) - \ln(1) = \ln(\infty) = \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \Big|_{0 < p \leq 1} = \infty \end{aligned}$$

Spezialfall: • *Cas spécial:* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$

~> Die harmonische Reihe ist divergent!

• *La série harmonique est divergente!*

Korollar: • **Corollaire:****Vor.:** • **Hyp.:**

$$0 < p \leq 1$$

Beh.: • **Thè.:**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \in \mathcal{DIV}$$

Speziell: • *Spécialement:* Die harmonische Reihe ist divergent! •
La série harmonique est divergente!

Bemerkung: • **Remarque:**

$$p = \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < p \leq 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \in \mathcal{DIV}$$

3. Beispiel: • **Exemple 3:** Sei • *Soit* $a_k \cdot k^p \rightarrow c \in \mathbb{R} \Rightarrow c - \varepsilon \leq a_k \cdot k^p \leq c + \varepsilon$

$$\Rightarrow \frac{c - \varepsilon}{k^p} \leq a_k \leq \frac{c + \varepsilon}{k^p} \Rightarrow (c - \varepsilon) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq (c + \varepsilon) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

Wegen den Korollaren gilt daher • *Par conséquent des corollaires il vaut donc:*

$$p > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathcal{CONV}, \quad p \in (0, 1] \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathcal{DIV}$$

Korollar: • **Corollaire:****Vor.:** • **Hyp.:**

$$a_k \cdot k^p \rightarrow c \in \mathbb{R}$$

Beh.: • **Thè.:**

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathcal{CONV} \quad \text{für} \quad \bullet \quad \text{pour } p > 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathcal{DIV} \quad \text{für} \quad \bullet \quad \text{pour } p \in (0, 1]$$

4. Beispiel: • **Exemple 4:** Sei • *Soit* $a_k = 2k^{-3} + 5k^{-3.5} - 6k^{-4.3}$

$$\Rightarrow k^3 \cdot a_k = 2k^0 + 5k^{-0.5} - 6k^{-1.3} = 2 + 5\frac{1}{k^{0.5}} + 5\frac{1}{k^{0.5}} - 6\frac{1}{k^{1.3}} \rightarrow 2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathcal{CONV}$$

Allgemeiner: • **Plus général:** Seien • *Soient*

$$P_r(k) = b_r k^r + b_{r-1} k^{r-1} + \dots + b_1 k^1 + b_0 \rightsquigarrow \text{Polynom} \bullet \text{Polynôme } \text{pgrad} = r$$

$$Q_s(k) = d_s k^s + d_{s-1} k^{s-1} + \dots + d_1 k^1 + d_0 \rightsquigarrow \text{Polynom} \bullet \text{Polynôme } \text{pgrad} = s$$

Problem: • **Problème:** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_r(k)}{Q_s(k)} \stackrel{?}{\in} \mathcal{CONV} ?$

$$\text{Sei} \bullet \text{Soit } p > 1. \quad a_k \cdot k^p = k^p \cdot \frac{Q_s(k)}{Q_s(k)} = \frac{b_r k^{r+p} + b_{r-1} k^{r-1+p} + \dots + b_1 k^{1+p} + b_0 k^p}{d_s k^s + d_{s-1} k^{s-1} + \dots + d_1 k^1 + d_0} \rightarrow c$$

$$\text{für} \bullet \text{pour } r+1 < r+p \leq s \rightsquigarrow \frac{b_r}{d_s} \quad \text{für} \bullet \text{pour } r+p = s, \rightarrow 0 \quad \text{für} \bullet \text{pour } r+1 < r+p < s$$

$$\rightsquigarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_r k^{r+p} + b_{r-1} k^{r-1+p} + \dots + b_1 k^{1+p} + b_0 k^p}{d_s k^s + d_{s-1} k^{s-1} + \dots + d_1 k^1 + d_0} \in \mathcal{CONV} \quad \text{für} \bullet \text{pour } r+1 < s$$

Korollar: • Corollaire: Vor.: • Hyp.: $r + 1 < s$

Beh.: • Thè.:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_r k^r + b_{r-1} k^{r-1} + \dots + b_1 k^1 + b_0}{d_s k^s + d_{s-1} k^{s-1} + \dots + d_1 k^1 + d_0} \in \mathcal{CONV}$$

5. Beispiel: • Exemple 5: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{18 k^6 - 11 k^5 + 7 k^4 + 9 k^3 + 10 k^1 + -14}{11 k^4 + 12 k^3 - 8 k^1 + 2} \notin \mathcal{CONV}$

Wurzelkriterium¹⁵ — Critères de Cauchy¹⁵

Satz: • Théorème: Vor.: • Hyp.: $\sqrt[k]{|a_k|} \rightarrow b \in \mathbb{R}$

Beh.: • Thè.:

$$b < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \in \mathcal{CONV}$$

$$b > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \in \mathcal{DIV}$$

Zum Beweis: • Quant à la preuve:

Sei • Soit $b < 1$, $k \geq N_0 \Rightarrow \sqrt[k]{|a_k|} \leq b + \varepsilon < q < 1 \Rightarrow |a_k| < q^k \leadsto$ Konvergenz, denn eine konvergente geometrische Reihe ist Majorante • *convergence, parce qu'une série géométrique convergente est majorante.*

Sei • Soit $b > 1$, $k \geq N_0 \Rightarrow \sqrt[k]{|a_k|} \leq b - \varepsilon > q > 1 \Rightarrow |a_k| > q^k \leadsto$ Divergenz, denn eine Divergente geometrische Reihe ist Minorante • *divergence, parce qu'une série géométrique divergente est minorante.*

1. Beispiel: • Exemple 1: $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^2}{3k^2 - 2}\right)^k \in \mathcal{CONV}$, $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{k^2}{3k^2 - 2} = \frac{1}{3 - \frac{2}{k^2}} \rightarrow \frac{1}{3} < 1$

2. Beispiel: • Exemple 2: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{k-1}} \in \mathcal{CONV}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{k-1}} = + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+2}$

6.2.4 Arithmetik mit Reihen und bedingte Konvergenz — Arithmétique de séries et convergence conditionnée

Bedingte Konvergenz — Convergence conditionnée

Definition: • Définition: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bedingt konvergent • semi-convergent¹⁶
 $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathcal{CONV} \wedge \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \in \mathcal{DIV}$

¹⁵Cauchy, 1789 – 1857

¹⁶franz. • semi-convergence ou convergence conditionnée

Bsp.: • Exemple:

„Leibnizreihe“ • *”Série de Leibniz”* $S := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ $S_a := \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

$\leadsto S \in \mathcal{CONV}$ nach dem Leibnizkriterium für alternierende Reihen • *d’après le théorème de Leibniz pour des séries alternantes*

$S = \ln(2)$ (Potenzreihen!) • *(Séries de puissances!)*

$S_a \in \mathcal{DIV}$ (harmonische Reihe • *série harmonique*)

Bsp.: • Exemple:

„Leibnizreihe“ • *”Série de Leibniz”* $S := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$

$\leadsto S \in \mathcal{CONV}$ nach dem Leibnizkriterium für alternierende Reihen • *d’après le théorème de Leibniz pour des séries alternantes*

$S = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ (π berechnen, Potenzreihen!) • *(Calculer π , séries de puissances!)*

Achtung: • Attention: Beim gedankenlosen Rechnen mit bedingt konvergenten Reihen können eklatante Widersprüche produziert werden! • *En calculant avec des séries semi-convergentes, on peut produire des contradictions élatantes!*

Bsp.: • Exemple: $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$
 $= (1 - \frac{1}{2}) - \frac{1}{4} + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6}) - \frac{1}{8} + (\frac{1}{5} - \frac{1}{10}) - \frac{1}{12} + \dots = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} \dots$
 $= \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots) = \frac{1}{2} S \Rightarrow S = \frac{1}{2} S \Rightarrow S = 0$

Andererseits: • *D’autre part:* $S = 1 - \underbrace{\frac{1}{2}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}}_{>0} + \dots \Rightarrow S > 0 \Rightarrow 0 > 0$

$\leadsto$ Widerspruch! • *Contradiction!*

Wo liegt das Problem? Waren nicht alle ausgeführten Schritte richtig? Oder gilt etwa doch $0 > 0$? — Eine genaue Analyse zeigt, dass doch ein Problem existiert: Wir haben hier Gesetze der Arithmetik auf unendliche Summen angewandt. Wir haben das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz unendlich oft gebraucht. Bewiesen resp. die Beweise angedeutet haben wir früher die Gesetze nur für endlich oft-malige Anwendungen! • *Où est le problème? Est-ce que les étapes n’ont pas toutes été exécutées correctement? Ou bien est-ce que $0 > 0$ vaut quand même? — Une analyse exacte montre qu’il y a quand même un problème: Nous avons appliqué les lois de l’arithmétique pour des sommes infinies. Nous avons appliqué la loi commutative et la loi associative infiniment de fois. Mais nous avons prouvé ces lois resp. donné l’idée de la preuve seulement pour des termes finis!*

Konsequenz: • Conséquence: Die Gesetze der Arithmetik sind nur für endliche Terme bewiesen worden. Bei bedingt konvergenten unendlichen Reihen dürfen wir sie nicht mehr beliebig und bedenkenlos anwenden! • *Les lois de l’arithmétique ont été prouvées pour des termes finis. Pour les séries infinies semi-convergentes, nous ne pouvons plus les appliquer de manière quelconque et sans réfléchir.*

6.2.5 Rechnen mit Reihen — Calculer avec des séries

Regeln: • Règles: (Umformung von Reihen • *Changer les termes d’une série*)

1. Setzt man in einer konvergenten Reihe S irgendwie Klammern, so nennen wir die entstehende Reihe $S_{(*)}$. Dann konvergiert $S_{(*)}$ gegen dieselbe Summe wie S . • *Si nous mettons dans une série convergente des parenthèses, nous appelons la série obtenue $S_{(*)}$. Puis cette série a la même valeur*

limite que S .

Zum Beweis: • *Quant à la preuve:*

Konvergiert S , so konvergiert auch $S_{(*)}$ nach dem Cauchy-Kriterium für konvergente Folgen. • *Si S converge, $S_{(*)}$ converge aussi d'après le critère de Cauchy pour des suites convergentes.*

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = S_n + R_n, \quad R_n \rightarrow 0$$

Analog: • *Analogiquement:*

$$S_{(*)} = S_{(),n} + R_{(),n}, \quad R_{(),n} \rightarrow 0 \Rightarrow S_n = S_{(),n} \rightarrow S, \quad S_n = S_{(),n} \rightarrow S_{(*)} \Rightarrow S = S_{(*)}$$

2. Eine Reihe, die man durch Setzen von Klammern aus einer divergenten Reihe mit positiven Gliedern erhält, divergiert. • *Une série qu'on obtient d'une série divergente aux termes positifs en mettant des parenthèses, diverge aussi.*

Zum Beweis: • *Quant à la preuve:*

Divergiert S gegen ∞ , so ist die Partialsummenfolge $\langle S_n \rangle = \langle S_{(),n} \rangle$ unbeschränkt. Daher divergiert auch $S_{(*)}$ gegen ∞ .

• *Si S diverge vers ∞ , la suite des sommes partielles $\langle S_n \rangle = \langle S_{(),n} \rangle$ n'est pas bornée. $S_{(*)}$ diverge donc aussi vers ∞ .*

3. Eine Reihe, die sich durch Setzen von Klammern aus einer divergenten Reihe mit gemischten Gliedern ergibt, kann konvergieren oder divergieren. • *Si on obtient une série d'une autre série divergente aux termes positifs et négatifs, cette nouvelle série peut converger ou diverger.*

Bsp.: • **Exemple:** $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{2k+1}{k} \Rightarrow$
 $a_k = (-1)^{k-1} \cdot \frac{2k+1}{k} = (-1)^{k-1} \left(2 + \frac{1}{k}\right) \rightarrow \pm 2 \leadsto 2 \text{ HP'PA} \Rightarrow \text{Divergenz} \quad \bullet \text{ divergence.}$

Klammern: • *Parenthèses:* $S = \left(3 - \frac{5}{2}\right) + \left(\frac{7}{3} - \frac{9}{4}\right) + \dots + \left(\frac{4m-1}{2m-1} - \frac{4m+1}{2m}\right) + \dots,$
 $\frac{4m-1}{2m-1} - \frac{4m+1}{2m} = \frac{(4m-1)2m - (4m+1)(2m-1)}{(2m-1)(2m)} = \frac{1}{4m^2 - 2m}$

$$4m^2 > 4m^2 - 2m \geq 4m^2 - 2m^2 = 2m^2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{4m^2} < \frac{1}{4m^2 - 2m} < \frac{1}{2m^2}$$

$\leadsto$ Positive Klammern, Reihe beschränkt durch konvergente Majorante (p-Reihe, $p = 2$)

• *parenthèses positives, série borné par majorante convergente ("série p", $p = 2$)*

$S \in \mathcal{CONV}$

4. **Geg.:** • **Donné:** Absolut konvergente Reihe S . Daraus erhalte man eine neue Reihe S^* durch beliebige Umordnung der Glieder (ev. unendlich oft Kommutativgesetz anwenden). • *Série S convergente de façon absolue. On transforme S en une série S^* en changeant l'ordre des termes de manière quelconque (éventuellement appliquer la loi commutative un nombre infini de fois).*

Beh.: • **Thè.:**

S^* konvergiert absolut gegen S . • *S^* converge de façon absolue vers S .*

Anschaulich zum Beweis: • *Quant à la preuve "clairement compréhensible":*

Absolute Konvergenz: Man stelle sich einen Kartonstapel, bestehend aus unendlich vielen Scheiben der jeweiligen positiven Höhe $|a_k|$ vor, dessen Gesamthöhe S beträgt. Man kann diesen Stapel beliebig neu ordnen, indem man in irgend einer Reihenfolge Scheiben herauszieht und zu einem neuen Stapel aufschichtet. Der neue Stapel kann so nicht höher werden, denn er ist während dem Umordnungsvorgang tiefer als der alte. Ordnet man dann den neuen wieder zum alten um, so gilt das gleiche Argument. Daher müssen beide Stapel gleich hoch sein.

• *Convergence absolue: On s'imagine un tas qui consiste en un nombre infini de disques de carton, chaque disque d'une hauteur $|a_k|$, avec une hauteur totale S . On peut réarranger ce tas de façon quelconque en retirant des disques dans un ordre quelconque et puis en les entassant sur un tas nouveaux. Le nouveau tas ne peut pas devenir plus haut que le vieux, parce que pendant le temps du réarrangement il est plus bas que le vieux. Si on réarrange le vieux tas, le même argument compte. Les deux tas doivent donc avoir la même hauteur.*

Zur gewöhnlichen Konvergenz: Man färbe die „negativen Scheiben“ grün, die positiven rot. Bei der absoluten Konvergenz ist die Gesamthöhe der grünen und roten endlich, bei der gewöhnlichen Konvergenz hat man vermutlich die Höhe der roten minus die der grünen. Die Stapelhöhe messen wir in einem Koordinatensystem, dessen Ursprung z.B. auf einer Tischoberfläche liegt, wobei die grünen für sich nach unten zu liegen kommen (unter die Tischoberfläche). Wenn wir nun den Ursprung verschieben auf das untere Niveau des grünen Stapels für sich, so haben wir bezüglich Umordnung die Situation wie bei der absoluten Konvergenz. • *Quant à la convergence simple: Colorons les „disques négatifs“ en vert, les positifs en rouge. Quant à la convergence absolue, la hauteur totale des verts et rouges est finie, quant à la convergence simple, la hauteur totale est probablement la hauteur des rouges moins la hauteur des verts. On mesure la hauteur du tas dans un système de coordonnées dont l'origine se trouve p.ex. sur la surface d'une table. Les verts sont à placer à part en bas (sous la surface de la table). Si l'on déplace l'origine sur le niveau bas du tas vert pris pour soi, on a par rapport à un réarrangement la même situation comme à la convergence absolue.*

5. Man kann die Glieder einer bedingt konvergenten Reihe so umordnen, dass eine divergente oder eine konvergente Reihe mit beliebiger Summe entsteht. • *On peut réarranger les termes d'une série semi-convergente de façon qu'on obtient une série divergente ou bien une série qui converge vers une somme donnée.*

Dass solche „unglaublichen“ Dinge passieren können, haben wir oben bei der Umordnung der Leibnizreihe gesehen. • *En réarrangeant la série de Leibniz nous avons vu que des choses "incroyables" peuvent arriver.*

Regeln: • **Règles:**

(Für Addition, Subtraktion und Multiplikation von Reihen. • **pour addition, soustraction et multiplication de séries.**)

Seien • *Soient* $A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

Damit lassen sich neue Reihen bilden: • *A l'aide de ces séries nous pouvons former des séries nouvelles:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k), \quad \sum_{k=1}^{\infty} v_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k = (a_1 b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \dots$$

$$1. A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathcal{CONV}, \quad B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \in \mathcal{CONV} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = A \pm B \in \mathcal{CONV}$$

Zum Beweis: • *Quant à la preuve:*

$$A \in \mathcal{CONV} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = S_{a,n} + R_{a,n}, \quad R_{a,n} \rightarrow 0$$

$$B \in \mathcal{CONV} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^n b_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k = S_{b,n} + R_{b,n}, \quad R_{b,n} \rightarrow 0 \Rightarrow$$

$$A \pm B = S_{a,n} + R_{a,n} \pm (S_{b,n} + R_{b,n}) = \sum_{k=1}^n a_k \pm \sum_{k=1}^n b_k + R_{a,n} \pm R_{b,n} = \sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k) + R_{a,n} \pm R_{b,n}$$

mit • *avec* $(R_{a,n} \pm R_{b,n}) \rightarrow 0$

$$2. A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathcal{ABSCONV}, \quad B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \in \mathcal{ABSCONV}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = A \pm B \in \mathcal{ABSCONV}$$

Zum Beweis: • *Quant à la preuve:*

Man wähle in der letzten Regel alle Terme positiv. • *Choisir dans la règle précédente tous les termes positifs.*

$$3. A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathcal{ABSCONV}, \quad B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \in \mathcal{ABSCONV} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k = (a_1 b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \dots = A \cdot B \in \mathcal{ABSCONV}$$

Anschaulich zum Beweis: • *Quant à la preuve "clairement compréhensible":*

Man stelle sich $A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ als endliche Länge vor, die in unendlich viele positive Teillängen a_k unterteilt ist. $A \cdot B$ kann als endlichen Flächeninhalt eines Rechtecks gedeutet werden, das aus unendlich vielen Teilrechtecken besteht mit dem Inhalt $a_i \cdot b_j$. Summiert man diese auf, so erhält man den gesamten Flächeninhalt. Dabei kann man die Reihenfolge der w_k wählen.

• *Imaginons que $A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ soit une longueur finie qui consiste en un nombre infini de parties de la longueur a_k . Alors on peut comprendre $A \cdot B$ comme mesure finie de l'aire d'un rectangle qui consiste en un nombre infini de rectangles partiels de la mesure $a_i \cdot b_j$. Si l'on fait la somme, on obtient le contenu total. On peut choisir l'ordre des w_k .*

$$4. A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathcal{ABSCONV}, \quad B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \in \mathcal{CONV}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} w_k = (a_1 b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \dots = A \cdot B \in \mathcal{CONV}$$

Hinweis zum Beweis: • *Indication quant à la preuve:*

$$S_n = \sum_{k=1}^n w_k = (a_1 b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \dots + (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1) =$$

$$a_1 (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n) + a_2 (b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}) + \dots + a_n (b_1)$$

Die Glieder von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ werden somit mit Partialsummen von $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ multipliziert.

• On multiplie donc les termes de $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ avec des sommes partielles de $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Sei • Soit $Max_{B,part} = \text{Maximum der Partialsummen von } \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ • *maximum des sommes partielles de* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ (ex. wegen Konvergenz • ex. à cause de la convergence),

$Min_{B,part} = \text{entspr. Minimum}$ • *minimum corresp.*

$$\leadsto Min_{B,part} \cdot A \leq Min_{B,part} \cdot \sum_{k=1}^n a_k \leq S_n \leq Max_{B,part} \cdot \sum_{k=1}^n a_k \leq Max_{B,part} \cdot A$$

$\leadsto S_n$ beschr'borné

Die Konvergenz kann man sehen, wenn man im Rechteck $(A \cdot B)$ die Restfläche geschickt aufteilt in einen Teil, dessen Inhalt mit $R_{A,n} = A - \sum_{k=1}^n a_k$ gegen 0 geht und einen Teil, wo der Inhalt entsprechend mit $R_{B,n}$ gegen 0 geht. • On peut voir la convergence quand on partage dans le rectangle $(A \cdot B)$ les surfaces qui représentent le reste en une partie dont la mesure va vers 0 avec $R_{A,n} = A - \sum_{k=1}^n a_k$ et une partie dont la mesure va vers 0 avec $R_{B,n}$.

$$5. A = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathcal{CONV}, B = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \in \mathcal{CONV} \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{\infty} w_k \in \mathcal{CONV} \vee \sum_{k=1}^{\infty} w_k \in \mathcal{DIV} \right)$$

Diese Aussage ist eine Tautologie. • Cette proposition est une tautologie.

6.2.6 Interessante Beispiele — Exemples intéressants

1. Beispiel: • Exemple 1: Eine Teleskopreihe: • Une série télescope:

Man benutze Partialbruchzerlegung! • Utiliser la décomposition en fractions partielles:

$$S = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1) \cdot (2m+1)} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m+1} \right) =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \dots \right) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

2. Beispiel: • Exemple 2: Die Eulersche Konstante C : • La constante d'Euler C :

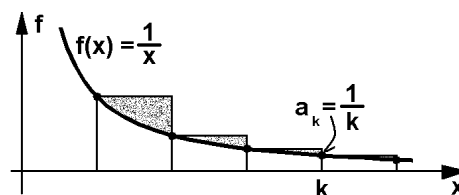
Definition: • **Définition:** $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) := C$ heisst **Eulersche Konstante**
• s'appelle **constante d'Euler**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \in \mathcal{DIV}$$

Jedoch: • Mais par contre:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) = C \simeq 0.577215665$$

$$\ln(n) = \ln(x) \Big|_{x_0}^{x=n} = \int_{x_0}^{x=n} \frac{1}{x} dx$$



$$\leadsto \frac{1}{2} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \cdot 1 - \int_{x_0}^{x=n} \frac{1}{x} dx < 1 \text{ (Flächeninhalt vgl. Skizze • Aire voir esquisse)}$$

Konsequenz: • **Conséquence:** Die harmonische Reihe divergiert gleich stark wie der $\ln$.
 • *La série harmonique diverge aussi fort que le $\ln$.*

6.2.7 Weitere Kriterien — D'autres critères

Im Quotientenkriterium ist für den Fall $|q| = 1$ nichts ausgesagt. In diese Lücke springen zwei Kriterien, die hier ohne Beweis aufgeführt sind: • *Pour le cas $|q| = 1$ rien n'est dit dans le théorème de d'Alembert. Il y a deux théorèmes qui ferment cette lacune. Nous les donnons sans preuve:*

Gegeben sei: • *Soit donné:* $\sum_{k=1}^n a_k$

Satz: • **Théorème:** **Kriterium von Raabe** • **Théorème de Raabe**

Vor.: • **Hyp.:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(1 - \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) = k$$

Beh.: • **Thè.:**

$$k > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^n a_k \in \mathcal{ABSCONV}$$

$$k < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^n a_k \in \mathcal{DTV} \text{ oder konvergiert bedingt}$$

• *ou semi-convergent*

Satz: • **Théorème:** **Kriterium von Gauss**¹⁷ • **Théorème de Gauss**¹⁷

Vor.: • **Hyp.:**

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{k}{n} + \frac{c_n}{n^2}\right) \wedge (\exists_{k_1} \forall_{n > N_0} : |c_n| < k_1)$$

Beh.: • **Thè.:**

$$k > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^n a_k \in \mathcal{ABSCONV}$$

$$k \leq 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^n a_k \in \mathcal{DTV} \text{ oder konvergiert bedingt}$$

• *ou semi-convergent*

Bemerkung: • **Remarque:** Beim Gauss-Kriterium ist die Trennung für $k = 1$ scharf. • *Pour le théorème de Gauss la séparation pour $k = 1$ est stricte.*

¹⁷Gauss, 1777 – 1855

6.3 Folgen und Reihen von Funktionen — Suites et séries de fonctions

6.4 Funktionenreihen — Séries de fonctions

Betrachte eine **Funktionenfolge**: • *Considère une suite de fonctions*:

$\langle \varphi_n(x) \rangle$, $D_{\varphi_n(x)} = I = [a, b]$ oder • *ou* $I = (a, b)$

- ▷ Wenn gilt: $x = x_0 = \text{fix}$, so hat man eine gewöhnliche Zahlenfolge.
 • *S'il vaut: $x = x_0 = \text{fixe}$, on a une suite de nombres comme nous la connaissons déjà.*
- ▷ Wenn gilt: $x = \text{variabel}$, so hängt das Konvergenzverhalten vom Wert von x ab.
 • *S'il vaut: $x = \text{variable}$, la manière de la convergence dépend de la valeur de x .*

Man hat es hier mit einer **Funktionenreihe** zu tun. • *Ici on a à faire à une série de fonctions.*

6.5 Gleichmässige Konvergenz — Convergence uniforme

6.5.1 Problem und Definition — Problème et définition

Wir definieren: • *Nous définissons*:

Definition: • **Définition:**

$\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$ auf • *sur* $I \Leftrightarrow \forall x_0 \in I \varphi_n(x_0) \rightarrow \varphi(x_0)$

$\leadsto \varphi(x)$ konvergiert gegen • *converge vers* $\varphi(x)$

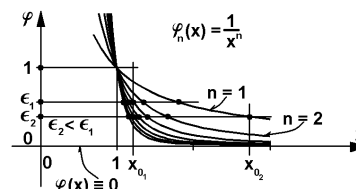
„Epsilontisch“: • *Dit avec epsilon*:

$$\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x) \Leftrightarrow \forall x_0 \in I \forall \varepsilon > 0 \exists N(x_0, \varepsilon) \forall n > N(x_0, \varepsilon) : |\varphi_n(x_0) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$$

Problem: • **Problème:**

$N(x_0, \varepsilon)$ hängt von x_0 ab • *dépend de x_0* . $\leadsto$

$N(x_0, \varepsilon)$ ist Funktion von x_0 • *est fonction de x_0* .



Daher ist vermutlich nicht garantiert, dass z.B. $N(x_0, \varepsilon)$ in $I = (a, b)$ beschränkt ist. • *par conséquent il n'est probablement pas garanti que $N(x_0, \varepsilon)$ soit borné dans $I = (a, b)$*

Z.B. • *P.ex.* $\lim_{x_0 \rightarrow a} N(x_0, \varepsilon) = \infty$ ist möglich • *est possible*.

Bsp.: • **Exemple:** $\langle \varphi_n(x) \rangle = \langle \frac{1}{x^n} \rangle$, $x \in (1, 2] = I$

$x \in I \Rightarrow \varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x) = 0$ mit • *avec $n \rightarrow \infty$* (Denn • *car $\varphi_n(x) - \varphi(x) = \frac{1}{x^n} < \varepsilon$ für*

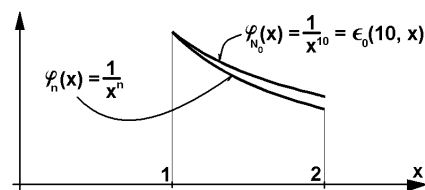
• *pour $n \geq N_0$*) $\leadsto$ d. h. • *ç. v. d.* $\frac{1}{\varepsilon} < x^n \Rightarrow 1 < \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}} < \frac{1}{N_0 \sqrt[n]{\varepsilon}} < x$

$\Rightarrow$ Bei gegebenem sehr kleinem ε muss N_0 sehr gross gewählt werden, um x nahe zu 1 rücken zu können. N_0 wächst so über alle Grenzen. • *Si ε soit donné très petit, il faut choisir N_0 très grand pour pouvoir choisir x très proche de 1. N_0 dépasse donc toutes les limites.*

Genauer: • *Plus exacte*:

Bsp.: • Exemple:Sei • *Soit* $N_0 = 10$ fix • *fixe*,

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{x^n}, \quad x \in [1, 2]. \quad |\varphi_n(x)| \leq |\varphi_{N_0}(x)| = \frac{1}{x^{10}} = \varepsilon_0(N_0, x) = \varepsilon_0(10, x)$$


 $\leadsto \varepsilon$ -Schlauch zu • *tuyau (tube)*- ε , $N_0 = 10$, $\varphi_n(x) = \frac{1}{x^{10}}$
Umgekehrt: • *D'autre part:*

$$\begin{aligned} \text{Sei } & \bullet \text{ Soit } N_0 = 10, \varepsilon_0 \text{ fix } \bullet \text{ fixe, } \frac{1}{x^{N_0}} \leq \varepsilon_0, \quad x \in [1, 2] \Rightarrow x^{N_0} \geq \frac{1}{\varepsilon_0} \Rightarrow e^{n_0 \cdot \ln(x)} \geq e^{\ln(\frac{1}{\varepsilon_0})} \\ \Rightarrow & N_0 \cdot \ln(x) \geq \ln\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\right) \end{aligned}$$

$$x \in [1, 2], \quad x \neq 1, \quad \varepsilon \ll 1 \Rightarrow \ln(x) > 0, \quad \ln\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\right) > 0$$

$$\Rightarrow N_0 \geq \frac{\ln(\frac{1}{\varepsilon_0})}{\ln(x)} \rightarrow \infty \quad \text{für } \bullet \text{ pour } x \downarrow 0, \quad \varepsilon \ll 1 \text{ fix } \bullet \text{ fixe}$$

Konsequenz: • Conséquence: Es ist nicht garantiert, dass $N(x, \varepsilon)$ in $I = (a, b)$ beschränkt ist.• *Il n'est pas garanti que $N(x_0, \varepsilon)$ soit borné dans $I = (a, b)$*
 $\leadsto \lim_{x_0 \rightarrow a} N(x_0, \varepsilon) = \infty$ ist möglich • *est possible!*

Für die Lösung dieses Problems verwenden die Mathematiker ein vielerprobtes wissenschaftliches Konzept: Sie klassifizieren die Funktionen über I und bilden zwei disjunkte Klassen: die Klasse der Funktionen, die problematisch sind und diejenigen, die nicht problematisch sind. Jede Klasse wird dann für sich untersucht. Zudem braucht es Kriterien, die über die Klassenzugehörigkeit entscheiden.

• *Pour résoudre ce problème les mathématiciens utilisent un concept bien établi dans les sciences: Ils classifient les fonctions sur I en deux classes disjointes: Les fonctions qui sont problématiques et celles qui ne le sont pas. Puis on examine chaque classe à part. En plus il faut trouver des critères pour décider à quelle classe une fonction appartient.*

Den unproblematischen Funktionen geben wir einen Namen: • *Nous donnons un nom aux fonctions non-problématiques:*

Definition: • Définition:

$\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x)$ **gleichmässig** über • **uniformément** sur I
 $\Leftrightarrow N_0(\varepsilon, x) = N_0(\varepsilon)$ unabhängig von x (global) wählbar
 • *peut être choisi indépendamment de x (globalement)*

Begriff: • Notion:

Statt „gleichmässig“ sagen wir auch **uniform**. • *(Ne concerne que l'allemand)*

Schreibweise: • Façon d'écrire:

$\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x) \in \text{UNIFORM}(I)$ (gleichmässig konv. über I • *conv. uniformément sur I*)

Bsp.: • Exemple: $\langle \varphi_n(x) \rangle = \langle \frac{1}{x^n} \rangle$, $x \in [2, 3] = I$, $\varepsilon \ll 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^{N_0}} \leq \varepsilon_0 \Rightarrow N_0 \cdot \ln(x) \geq \ln\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\right) \Rightarrow N_0 \geq \frac{\ln(\frac{1}{\varepsilon_0})}{\ln(x)}$$

Das ist erfüllt für • *C'est en ordre pour* $N_0 \geq \frac{\ln(\frac{1}{\varepsilon_0})}{\ln(2)} = m(\varepsilon_0) \in \mathbb{R}$.

Bei der gleichmässigen Konvergenz ist die spezielle Wahl von $x \in I$ ohne Einfluss auf das Konvergenzverhalten. • *Pour la convergence uniforme, une valeur spéciale de x n'influence pas la manière de converger.*

Konsequenz: • **Conséquence:** Bei gleichmässig konvergenten Funktionenfolgen sind die Definitionen und Aussagen von den Zahlenfolgen übertragbar. • *On peut traiter les séries de fonctions qui convergent uniformément comme de simples séries de nombres.*

6.5.2 Gleichmässige Konvergenz von Funktionenreihen — Convergence uniforme de séries de fonctions

Definition und Bedeutung der gleichmässigen Konvergenz — Définition et importance de la convergence uniforme

Reihen sind spezielle Folgen. • *Les séries sont des suites spéciales.*

Konsequenz: • **Conséquence:** Speziell sind gleichmässig konvergente Funktionenreihen wie gewöhnliche Zahlenreihen behandelbar. • *Spécialement on peut traiter les séries de fonctions qui convergent uniformément comme de simples séries de nombres.*

Definition: • **Définition:** „Epsilontisch“ für Reihen : • *Dit avec epsilon pour des séries:*

Sei • *Soit* $R_n(x) := S_n(x) - S(x)$

$S_n(x) \rightarrow S(x)$ **gleichmässig** über • **uniformément** *sur* I

$$\Leftrightarrow \forall_{x \in I} \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq N_0(\varepsilon)} |R_n(x)| < \varepsilon$$

Die gleichmässige Konvergenz ist bei Operationen mit Reihen von grosser Wichtigkeit. Während man zwei absolut konvergente Reihen gliedweise addieren darf, kann man gleichmässig konvergente Reihen gliedweise integrieren und in einem gewissen Rahmen auch gliedweise differenzieren. Diese Konvergenz spielt später eine grosse Rolle bei Potenzreihen und bei Fourierreihen. • *La convergence uniforme est très importante quant aux opérations avec des séries. Deux séries convergentes de façon absolue peuvent être additionnées terme par terme, tandis qu'on peut intégrer et aussi dans un certain cadre différencier les séries convergentes de façon uniforme terme par terme. Cette convergence joue un grand rôle plus tard pour les séries de puissances et de Fourier.*

Sätze über gleichmässig konvergente Funktionenreihen — Théorèmes sur des séries de fonctions convergentes de façon uniforme

Satz: • **Théorème:** Majorantenkriterium von Weierstrass¹⁸ • **Théorème de la majorante de Weierstrass¹⁸**

Vor.: • **Hyp.:**

$$\exists_{M, \langle M_k \rangle} \sum_{k=1}^{\infty} M_k \rightarrow M \in \mathbb{R}, \quad \forall_{k \in \mathbb{N}, x \in I} |\varphi_k(x)| \leq M_k$$

Beh.: • **Thè.:**

$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)$ konv. absolut und gleichmässig in I • *conv. de façon absolue et uniforme dans I*

Zum Beweis: • *Quant à la preuve:* $\leadsto$ Folgerung aus dem gewöhnlichen Majorantenkriterium
 • *Conséquence du théorème de la majorante simple.*

Bsp.: • **Exemple:** Sei • *Soit* $g : (x, k) \mapsto y = g(x, k)$, $g : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$

$0 < \frac{\cos^2(g(x, k))}{k^2} < \frac{1}{k^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2(g(x, k))}{k^2}$ konv. absolut und gleichmässig in $\mathbb{R}$ • *conv. de façon absolue et uniforme dans $\mathbb{R}$*

Satz: • **Théorème:** Dirichlet–Kriterium¹⁹ • **Théorème de Dirichlet**¹⁹

Vor.: • **Hyp.:**

$\langle a_k \rangle$ NF'SZ,
 $\langle |a_k| \rangle$ monoton fallend • *décroissant de façon monotone*
 $\forall_{n \in \mathbb{N}, x \in I} : |S_n(x)| = \left| \sum_{k=1}^n \varphi_k(x) \right|$ beschr'borné

Beh.: • **Thè.:**

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \cdot \varphi_k(x) \in \mathcal{UNIFCONV}(I)$$

$$\forall_{n \in \mathbb{N}, x \in I} |S_n| = \left| \sum_{k=1}^n \varphi_k(x) \right| \text{ beschr'borné} \leadsto \exists_{m \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{N}, x \in I} |S_n| = \left| \sum_{k=1}^n \varphi_k(x) \right| < m$$

Zum Beweis: • *Quant à la preuve:* $\leadsto$ Verallgemeinerung des Leibnizkriterium • *Généralisation du théorème de Leibniz.*

Bsp.: • **Exemple:** Sei • *Soit* $\varphi_k(x) = \sin(x + k\pi)$,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n \sin(x + k\pi) \right| &= |\sin(x) + \sin(x + \pi) + \sin(x + 2\pi) + \dots + \sin(x + n\pi)| = \\ &= |\sin(x) - \sin(x) + \sin(x) - \dots \pm \sin(x)| = \left| \frac{1}{2} (1 - (-1)^n) \cdot \sin(x) \right| \leq 1 \\ a_k &= \frac{1}{\sqrt{k}} (-1)^k \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \sin(x + k\pi) \in \mathcal{UNIFCONV}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

¹⁸Weierstrass, 1815 – 1897

¹⁹Dirichlet, 1805 – 1859

Satz: • **Théorème:** **Kriterium von Abel**²⁰ • **Théorème d'Abel**²⁰
Vor.: • **Hyp.:**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \in \mathcal{UNIFCONV}(I),$$

$\langle a_n \rangle$ monoton und beschränkt • *monotone et borné*,
 $[a, b] \subseteq I$

Beh.: • **Thè.:**

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \varphi_k(x) \in \mathcal{UNIFCONV}([a, b])$$

Zum Beweis: • *Quant à la preuve:* $\langle a_n \rangle$ monoton und beschränkt • *monotone et borné*
 $\Rightarrow \exists_a : a_n \rightarrow a \Rightarrow \langle a_n - a \rangle = \langle b_n \rangle$ NF'SZ und monoton • *et monotone*.

Betrachte: • *Etudier:* $\sum_{k=1}^{\infty} a \cdot \varphi_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} b_n \cdot \varphi_k(x)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a \cdot \varphi_k(x) = a \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \in \text{Unifconv}(I) \text{ (Vor.!) • (hyp.!)}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} b_n \cdot \varphi_k(x)$ erfüllt die Voraussetzungen des Dirichlet-Kriteriums • *satisfait les hypothèses du théorème*

$$\text{de Dirichlet} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_n \cdot \varphi_k(x) \in \mathcal{UNIFCONV}(I)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a \cdot \varphi_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} b_n \cdot \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (a + b_n) \cdot \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_n) \cdot \varphi_k(x) \in \mathcal{UNIFCONV}(I)$$

Bsp.: • **Exemple:** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \in \mathcal{UNIFCONV}([a, b] \subset \mathbb{R})$

(Quotientenkriterium, vgl. Seite 207) • (*Critères de d'Alembert, voir page 207*)

$$a_k = \sum_{j=1}^k \frac{1}{2^j} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{2^j} \right) \cdot \frac{x^k}{k!} \in \mathcal{UNIFCONV}([a, b])$$

Weitere Kriterien, z.B. für Doppelreihen, vgl. Literatur. • *Autres critères, p.ex. pour des séries doubles, voir littérature.*

²⁰ Abel, 1802 – 1829

6.5.3 Gleichmässige Konvergenz und Vertauschungssätze — Convergence uniforme et théorèmes d'échange

Limesvertauschung, Stetigkeit — Echange des limites, continuité

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \in \mathcal{UNIFCONV}(I)$$

$$\forall_{k \in \mathbb{N}} \varphi_k(x) \in \text{stet}'\text{cont}(I) \quad (\text{d. h. } \bullet \text{ } \zeta. \text{ v. d. } \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi_k(x) = \varphi_k(x_0))$$

Beh.: • **Thè.:**

$$S(x) \in \text{stet}'\text{cont}(I)$$

Konsequenz: • **Conséquence:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=1}^n \varphi_k(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi_k(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \varphi_k(x) \right)$$

Zum Beweis: • *Quant à la preuve:*

Ansonst: • *Si non:* $\exists_{\langle x_i \rangle} : x_i \rightarrow x_0, |S(x_i) - S(x_0)| \geq a > 0$ für • *pour* $x_i \neq x_0$

$$\Rightarrow |S(x_i) - S(x_0)| = |S_n(x_i) + R_n(x_i) - (S_n(x_0) + R_n(x_0))|$$

$$= |(S_n(x_i) - S_n(x_0)) + (R_n(x_i) - R_n(x_0))| \geq a \quad \text{für } \bullet \text{ } \textit{pour } x_i \neq x_0$$

Nach Vor. gilt aber: • *Mais selon l'hyp. il vaut:*

$$S_n(x_i) \rightarrow S_n(x_0) \wedge |R_n(x_i)| < \varepsilon_1, |R_n(x_0)| < \varepsilon_2 \quad \text{für } \bullet \text{ } \textit{pour } n \geq N_0$$

$$\Rightarrow (R_n(x_i) - R_n(x_0)) \rightarrow 0 \quad \text{für } \bullet \text{ } \textit{pour } n \rightarrow \infty \text{ Gleichmässige Konvergenz } \bullet \text{ } \textit{Convergence uniforme}$$

$$\leadsto N_0 \text{ unabh. von } \bullet \text{ } \textit{indépendant de } x_0$$

$$\Rightarrow |S(x_i) - S(x_0)| = |(S_n(x_i) - S_n(x_0)) + (R_n(x_i) - R_n(x_0))|_{n \geq N_0} \not\geq a > 0$$

für • *pour* $x_i - x_0$ genügend klein • *assez petit.*

Bsp.: • **Exemple:**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \in \mathcal{UNIFCONV}([a, b] \subset \mathbb{R}), \quad \forall_{k \in \mathbb{N}} \frac{x^k}{k!} \in \text{stet}'\text{cont}(I) \leadsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \in \text{stet}'\text{cont}(I)$$

Mit diesem Satz werden wir später die Stetigkeit von Potenzreihen untersuchen können.

• *A l'aide de ce théorème nous allons examiner la continuité de séries de puissances.*

Vertauschung von Summation und Integration — Echange de somme infinie et intégrale

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

Seien • *Soient* $\varphi_n(x), \varphi(x) \in \mathcal{INT}$

$$\varphi_n(x) \rightarrow \varphi(x) \in \mathcal{UNIFCONV}(I), I = [a, b]$$

Beh.: • **Thè.:**

$$\int_I \varphi_n(x) dx \rightarrow \int_I \varphi(x) dx$$

Zum Beweis: • *Quant à la preuve:* $|\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ für • *pour* $n \geq N_0(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| \int_I \varphi_n(x) dx - \int_I \varphi(x) dx \right| &= \left| \int_I (\varphi_n(x) - \varphi(x)) dx \right| \leq \int_I |\varphi_n(x) - \varphi(x)| dx \leq \int_a^b \varepsilon(N_0) dx \\ &= \varepsilon(b-a) \rightarrow 0 \text{ für } \bullet \text{ pour } \varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \int_I \varphi_n(x) dx \rightarrow \int_I \varphi(x) dx \end{aligned}$$

Bsp.: • **Exemple:**

Sei • *Soit* $\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n \psi_k(x) \rightarrow \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) \in \mathcal{UNIFCONV}(I)$, $I = [a, b]$

$$\Rightarrow \int_I \varphi_n(x) dx = \int_I \sum_{k=1}^n \psi_k(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_I \psi_k(x) dx \rightarrow \int_I \varphi(x) dx = \int_I \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) dx$$

Andererseits gilt aus formalen Gründen: • *D'autre part il vaut pour des raisons formelles:*

$$\int_I \varphi_n(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_I \psi_k(x) dx \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \int_I \psi_k(x) dx$$

(Für die Zweifler an der Existenz der unendlichen Summe etwas genauer: • *Pour ceux qui doutent de l'existence de la somme infinie un peu plus exactement:*)

$$\sum_{k=1}^n \psi_k(x) \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^n \psi_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) \right| < \varepsilon$$

(gleichmässig $\leadsto$ unabh. von x • *uniformément $\leadsto$ indep. de x*)

$$\Rightarrow \left| \int_I \left(\sum_{k=1}^n \psi_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) \right) dx \right| \leq \int_I \left| \sum_{k=1}^n \psi_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) \right| dx < \int_a^b \varepsilon dx = \varepsilon(b-a) \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \int_I \sum_{k=1}^n \psi_k(x) dx \rightarrow \int_I \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) dx \Rightarrow \int_I \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_I \psi_k(x) dx$$

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= \sum_{k=1}^n \psi_k(x) \rightarrow \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) \in \mathcal{UNIFCONV}(I), \\ I &= [a, b], \varphi_n, \psi_k(x) \in \mathcal{INT} \end{aligned}$$

Beh.: • **Thè.:**

$$\int_I \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_I \psi_k(x) dx$$

Die Integration ist also gliedweise möglich. • *On peut donc intégrer terme par terme.*

1. Beispiel: • **Exemple 1:**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \in \mathcal{UNIFCONV}([a, b] \subset \mathbb{R})$$

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b \frac{x^k}{k!} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \frac{x^{k+1}}{k!} \Big|_a^b = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^{k+1}}{(k+1)!} - \frac{a^{k+1}}{(k+1)!}$$

2. Beispiel: • **Exemple 2:**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} \in \mathcal{UNIFCONV}([0, 2\pi] \subset \mathbb{R})$$

$$\int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(kx)}{k^2} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-\sin(kx)}{k^3} \Big|_0^{2\pi} = \sum_{k=1}^{\infty} 0 - 0 = 0$$

Vertauschung von Ableitung und Summation — Echangeement de somme infinie et dérivée

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &\rightarrow \varphi(x) \in \mathcal{UNIFCONV}(I), \quad I = [a, b] \\ \varphi_n(x), \varphi(x) &\in \mathcal{D}(I) \text{ (diff'bar • dérivable)} \end{aligned}$$

Beh.: • **Thè.:** $\frac{d\varphi_n(x)}{dx} \rightarrow \frac{d\varphi(x)}{dx}$

Zum Beweis: • *Quant à la preuve:*

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &\rightarrow \varphi(x) \in \mathcal{UNIFCONV}(I) \\ \Rightarrow \frac{d\varphi_n(x)}{dx} - \frac{d\varphi(x)}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi_n(x + \Delta x) - \varphi_n(x)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi_n(x + \Delta x) - \varphi_n(x) - (\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x))}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\varphi_n(x + \Delta x) - \varphi(x + \Delta x)) + (\varphi(x) - \varphi_n(x))}{\Delta x} \end{aligned}$$

Wegen der gleichmässigen Konvergenz kann unabhängig von x dann $|\varphi_n(x + \Delta x) - \varphi(x + \Delta x)| < \varepsilon$ und $|\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ gewählt werden für $n > N_0$ (bei gegebenem ε). • *A cause de la convergence uniforme nous pouvons choisir $|\varphi_n(x + \Delta x) - \varphi(x + \Delta x)| < \varepsilon$ et $|\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ indépendamment de x pour $n > N_0$ (ε donné).*

Wir wählen speziell: • *Choisir spécialement:* $\varepsilon = (\Delta x^2)$

$$\begin{aligned} \leadsto & \left| \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\varphi_n(x + \Delta x) - \varphi(x + \Delta x)) + (\varphi(x) - \varphi_n(x))}{\Delta x} \right| \leq \\ & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\varphi_n(x + \Delta x) - \varphi(x + \Delta x)| + |\varphi(x) - \varphi_n(x)|}{|\Delta x|} \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon + \varepsilon}{|\Delta x|} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x^2) + (\Delta x^2)}{|\Delta x|} \\ & = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2|\Delta x| = 0 \Rightarrow \frac{d\varphi_n(x)}{dx} \rightarrow \frac{d\varphi(x)}{dx} \end{aligned}$$

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$\begin{aligned} \varphi_n(x), \varphi(x) &\in \mathcal{D}(I) \text{ (diff'bar • dérivable)}, \quad I = [a, b] \\ \varphi_n(x) &= \sum_{k=1}^n \psi_k(x), \quad \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) \in \mathcal{D} \text{ (diff'bar • dérivable)} \\ \varphi_n(x) &\in \mathcal{UNIFCONV}(I) \end{aligned}$$

Beh.: • **Thè.:**

$$\frac{d}{dx} \varphi(x) = \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d\psi_k(x)}{dx}$$

Zum Beweis: • *Quant à la preuve:* Nach dem letzten Satz gilt: • *D'après le dernier théorème il vaut:*

$$\frac{d\varphi_n(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^n \psi_k(x) = \sum_{k=1}^n \frac{d\psi_k(x)}{dx} \rightarrow \frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x)$$

Andererseits gilt aus formalen Gründen: • *D'autre part il vaut pour des raisons formelles:*

$$\sum_{k=1}^n \frac{d\psi_k(x)}{dx} \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d\psi_k(x)}{dx} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d\psi_k(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x)$$

1. Beispiel: • **Exemple 1:**

$$\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \in \mathcal{UNIFCONV}([a, b] \subset \mathbb{R}) \\
\frac{dS(x)}{dx} &= \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{x^k}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = S(x) \\
\Rightarrow \frac{dS(x)}{dx} &= S(x) \\
\text{Andererseits gilt: } \bullet \text{ D'autre part il vaut: } \frac{d}{dx} e^{x+c} &= e^{x+c}
\end{aligned}$$

$\leadsto$ **Vermutung:** • **Supposition:**

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \stackrel{?}{=} e^{x+c} \leadsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = 0^0 = 1 = e^0 = e^{0+c} = e^c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \stackrel{?}{=} e^x$$

2. Beispiel: • **Exemple 2:** (Dieses Beispiel zeigt, wie man einen Ausdruck in verschiedenen Varianten darstellen kann. • *Cet exemple montre comme on peut représenter une expression de manières différentes.*)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(kx)}{2^k} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{\ln(kx)}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(kx) 2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x 2^k} = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{x} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \\
&= \frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2 - \frac{2}{2}} = \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

$$\leadsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(kx)}{2^k} = \int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + C, \quad C = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \quad (x = 0 \leadsto C)$$

$$\Rightarrow \ln(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(kx) - \ln(k)}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln\left(\frac{kx}{k}\right)}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(x)}{2^k} = \ln(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \ln(x)$$

3. Beispiel: • **Exemple 3:**

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \quad x = -1 \leadsto \text{Konvergiert (Leibniz)}. \bullet \text{ Converge (Leibniz)}.$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot x^{(k-1)}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} x^{(k-1)}, \quad x = -1 \leadsto \text{Konvergiert nicht.} \bullet \text{ Ne converge pas.}$$

6.6 Potenzreihen — Séries de puissances

6.6.1 Theorie: Begriffe, Sätze — Théorie: Notions, théorèmes

Der Begriff — La notion

Wir wollen im Moment unter **Potenztermen** Terme der Form $a_n x^n$ oder bei Koordinatenverschiebung $a_n (x - c)^n$ verstehen, $a_n \in \mathbb{R}$. • **des Les termes de puissances** soient pour le moment des termes de la forme $a_n x^n$ ou si le système de coordonnées est déplacé: $a_n (x - c)^n$, $a_n \in \mathbb{R}$.

Definition: • **Définition:**

Eine Funktionenreihe, deren Glieder alle Potenzterme sind, nennen wir **Potenzreihe**. • *Nous appelons une série de fonctions, dont tous les termes sont des termes de puissances, une série de puissances.*

$$\text{Bsp.:} \bullet \text{ Exemple: } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots, \quad h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - c)^n$$

Konvergenzbereich — domaine de convergence**Satz:** • **Théorème:** von • de Abel**Vor.:** • **Hyp.:**

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - c)^n \in \mathcal{CONV} \text{ für } \bullet \text{ pour } x = x_0, |c - x_0| = d$$

$$I = (c - d, c + d)$$

Beh.: • **Thè.:**

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - c)^n \in \mathcal{UNIFCONV}(I)$$

Zum Beweis: • *Quant à la preuve:*

Wende das Dirichlet-Kriterium an auf

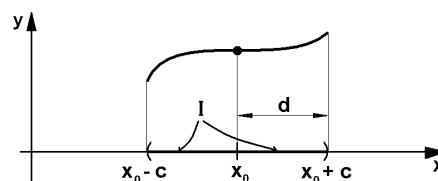
• *Appliquer le théorème de Dirichlet pour*

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x_0 - c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(x_0)$$

$$a_n = \left(\frac{x - c}{x_0 - c}\right)^n, |a_n| = \left|\left(\frac{x - c}{x_0 - c}\right)^n\right| \rightarrow 0 \text{ für}$$

• *pour* $x \in I$

(Dirichlet: Seite 221) • (Dirichlet: Page 221)

Alternative: Wurzelkriterium. • *Autre possibilité: Critère de Cauchy.*

Mit der nachfolgenden Definition können wir jetzt ein denkwürdiges Korollar formulieren:

• *A l'aide de la définition suivante nous sommes capables de formuler un corollaire intéressant:***Definition:** • **Définition:****Konvergenzbereich** einer Funktionenreihe $S(x)$:• **Domaine de convergence** d'une série de fonctions $S(x)$: $\{x \in \mathbb{R} \mid S(x)\} \in \mathcal{CONV}$ **Korollar:** • **Corollaire:**

Der Konvergenzbereich einer Potenzreihe ist ein Intervall.

• *Le domaine de convergence d'une série de puissances est un intervalle.***Symbol:** • **Symbole:** $[(a, b)] := [a, b]$ oder • $ou = (a, b]$ oder • $ou = [a, b)$ oder • $ou = (a, b)$ **Definition:** • **Définition:**Sei • *Soit* $[(a, b)]$ = Konvergenzintervall einer Potenzreihe• *intervalle de convergence d'une série de puissances,* $a = c - d, b = c + d$ $\leadsto r = |d|$ heisst **Konvergenzradius** • *s'appelle rayon de convergence***Berechnung des Konvergenzradius — Calculer le rayon de convergence**Sei • *Soit* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - c)^n := S$

Quotientenkriterium: • *Critère de d'Alembert*:

$$q_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}(x-c)^{n+1}}{b_n(x-c)^n} \right| = |(x-c)| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| < 1 \Rightarrow S \in \mathcal{CONV}, \quad q_\infty > 1 \\ \Rightarrow S \in \mathcal{DIV}, \quad q_\infty = 1 \Rightarrow |x-c| := r = \text{Konvergenzradius} \quad \bullet \text{ rayon de convergence} \\ \Rightarrow r \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = 1, \quad r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right|$$

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$r = \text{Konvergenzradius von}$ • *rayon de convergence de*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-c)^n$$

Beh.: • **Thè.:** $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{b_n}{b_{n+1}} \right|$

1. **Beispiel:** • **Exemple 1:** $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$

2. **Beispiel:** • **Exemple 2:** $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x-c)^n \Rightarrow r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$

3. **Beispiel:** • **Exemple 3:**

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{(2x)^n}{n} \Rightarrow r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^n}{n}}{\frac{2^{n+1}}{(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Sätze über Potenzreihen — Théorèmes sur les séries de puissances

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

Geg.: • **Donné:**

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n, \quad H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-c)^n$$

Konvergenzintervalle • *intervalles de convergence*
 $I_S, I_H, \quad I = I_S \cap I_H$

Beh.: • **Thè.:**

Dann gelten die folgenden **wichtigen** Aussagen: • *Les propositions importantes suivantes sont justes:*

1. **Wichtig:** • **Important**

$$[a, b] \subset I_S \Rightarrow S(x) \in \mathcal{ABSCONV}([a, b]) \wedge S(x) \in \mathcal{UNIFCONV}([a, b]).$$

Ebenso für • *De même pour* $H(x)$

(Bew.: • *Pr'v.:* Direkte Folgerung aus dem Quotientenkriterium • *Conséquence du critère de d'Alembert.*)

2. **Grenzwertsatz von Abel:** • **Théorème limite d'Abel**

Eine Potenzreihe ist im Konvergenzintervall stetig: • *Une série de puissances est continue dans l'intervalle de convergence:*

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \cdot (x - c)^k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lim_{x \rightarrow x_0} a_k \cdot (x - c)^k \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \cdot (x_0 - c)^k = f(x_0)\end{aligned}$$

(Bew.: • *Pr'v.*: Direkte Folgerung aus Satz über die Limesvertauschung und Stetigkeit von Funktionenreihen, denn $\varphi_k(x) = a_k \cdot (x - c)^k \in \text{stet'cont}$ (vgl. Seite 223). • *Conséquence directe du théorème sur l'échange de la limite et la continuité de séries de fonctions*, car $\varphi_k(x) = a_k \cdot (x - c)^k \in \text{stet'cont}$ (voir page 223).)

3. Differenzierbarkeit: • Dériver une série de puissances:

Eine Potenzreihe ist im Konvergenzintervall gliedweise differenzierbar: • *Une série de puissances peut être dérivée dans l'intervalle de convergence terme par terme:*

Stellt eine Potenzreihe eine differenzierbare Funktion dar, so ist sie im Konvergenzintervall gliedweise differenzierbar: • *Si une série de puissances représente une fonction dérivable, on peut calculer la dérivée dans l'intervalle de convergence terme par terme:*

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot (x - c)^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (x - c)^{k-1}$$

(Bew.: • *Pr'v.*: Der Differenzenquotient z.B. von $S(x)$ ist für $x \neq c$ stetig. ($S(x)$ in I_S stetig!) Summation und Differenzenquotientbildung kann hier somit vertauscht werden, was eine Reihe der Ableitungen der Terme ergibt. Man rechnet sofort nach, dass diese den Konvergenzradius beibehält. Daher lässt sich jetzt der Limes des Differenzenquotienten auch für $S(x)$ bilden. (Vgl. auch Seite 225.) • *Le quotient des différences p.ex. de $S(x)$ est continue pour $x \neq c$. ($S(x)$ continue dans I_S !) On peut donc échanger la sommation et la formation du quotient des différences, ce qui nous donne une série de dérivées. On calcule tout de suite que celle-ci garde le rayon de convergence. La limite du quotient des différences se laisse donc former aussi pour $S(x)$. (Voir aussi page 225).)*

4. Gliedweise Integrierbarkeit: • Intégrer une série de puissances:

Eine Potenzreihe ist im Konvergenzintervall gliedweise integrierbar: • *Une série de puissances peut être intégrée dans l'intervalle de convergence terme par terme:*

$$\int_I \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot (x - c)^k dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \frac{1}{k+1} \cdot (x - c)^{k+1} |_I$$

(Bew.: • *Pr'v.*: Potenzreihen sind im Konvergenzintervall stetig. $\leadsto$ Direkte Folgerung aus entsprechendem Satz für Funktionenreihen (vgl. Seite 223). • *Les séries de puissances sont continues dans l'intervalle de convergence.* $\leadsto$ *Conséquence directe du théorème sur les séries de fonctions* (voir page 223).)

5. Gliedweise Addition: • Addition terme par terme:

$$S(x) \pm H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot (x - c)^k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot (x - c)^k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) \cdot (x - c)^k$$

in • dans $I = I_S \cap I_H$

(Bew.: • *Pr'v.*: Direkte Folgerung aus entsprechendem Satz für Funktionenreihen (vgl. Seite 214)
 • *Conséquence directe du théorème sur les séries de fonctions* ((voir page 214).)

6. Multiplikation nach dem Distributivgesetz: • Multiplication selon la loi distributive:

$$S(x) \cdot H(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_n \cdot (x-c)^n \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_n \cdot (x-c)^n \right) = \sum_{k=1}^{\infty} g_n \cdot (x-c)^n, \quad g_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$$

in • dans $I = I_S \cap I_H$

(Bew.: • *Pr'v.*: Direkte Folgerung aus entsprechendem Satz für Funktionenreihen (vgl. Seite 215).
 • *Conséquence directe du théorème sur les séries de fonctions* (voir page 215).)

7. Division: • Division:

$$H(c) \neq 0 \Rightarrow G(x) = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} a_n \cdot (x-c)^n}{\sum_{k=1}^{\infty} b_n \cdot (x-c)^n} \text{ wieder Potenzreihe, jedoch in der Regel mit eingeschränktem}$$

Konvergenzintervall • *de nouveau série de puissances, mais normalement avec un intervalle de convergence restreint.*

(Bew.: • *Pr'v.*: $S(x), H(x) \in \mathcal{D}^{\infty} \Rightarrow \frac{S(x)}{H(x)} \in \mathcal{D}^{\infty}$ ($\mathcal{D}^{\infty}$: unendlich oft diff'bar

• *infinitement dérivable*)

↪ Koeffizienten der Potenzreihe, vgl. später Satz über die Berechnung der Koeffizienten einer Potenzreihe • *Coefficients calculables, voir plus tard théorème sur le calcul des coefficients d'une série de puissances.*)

8. Umkehrfunktion: • Fonction inverse:

$S(x) = f(x)$ lokal bijektiv in • *bijjective localement dans $U_{\varepsilon}(c) \Rightarrow f^{-1}(x)$ wieder als Potenzreihe*
 schreibbar • *peut être écrit aussi comme série de puissances*

(Bew.: • *Pr'v.*: Wegen: • *A cause de:* $\frac{d f(x)^{-1}}{d x} = \frac{1}{\frac{d(f(z))}{d z} \Big|_{z=f^{-1}(x)}}$, späterer Satz über die Berech-

nung der Koeffizienten einer Potenzreihe • *théorème sur le calcul des coefficients d'une série de puissances, voir plus tard.*)

Damit wissen wir einiges über den Umgang mit Potenzreihen. Wie man aber zu sinnvollen Potenzreihen kommt und wie ihr Graph verläuft, ist nach wie vor unklar. Noch interessanter aber ist folgende Frage: Lässt sich eine klassische, einfache transzendente Funktion wie z.B. $f(x) = \ln(x)$ auch als Potenzreihe schreiben? • *Nous savons donc beaucoup de choses concernant les séries de puissances. Mais comment obtient-on des séries de puissances intéressantes, quel est le comportement du graphe? – Nous ne le savons pas encore. Et encore plus intéressante est la question suivante: Peut-on écrire une fonction simple et classique comme p.ex. $f(x) = \ln(x)$ aussi en forme de série de puissances?*

6.6.2 Praxis: Potenzreihenentwicklung — Pratique: Développement en séries de puissances

Problem: • **Problème:**

Geg.: • **Donné:** $f: x \mapsto f(x)$

Ges.: • **Trouver:** $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_n \cdot (x-c)^n$, I mit • *avec $f(x) = S(x)$ in • dans I*

Potenzreihenentwicklung des Logarithmus — Développement du logarithme en séries de puissances

Sei • Soit $f(x) = \ln(x)$

Bekannt: • Nous savons: $|\tau| < 1 \Rightarrow \frac{1}{1-\tau} = 1 + \tau + \tau^2 + \dots + \tau^{n-1} + \tau^n + r_n$,

$$r_n = \tau^{n+1} + \tau^{n+2} + \dots = \tau^{n+1}(1 + \tau + \tau^2 + \dots) = \tau^{n+1}\left(\frac{1}{1-\tau}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\tau} = 1 + \tau + \tau^2 + \dots + \tau^{n-1} + \tau^n + \tau^n\left(\frac{1}{1-\tau}\right)$$

$$\Rightarrow \int_1^{x+1} \frac{1}{t} dt = \ln(t) \Big|_1^{x+1} = \ln(x+1) - \ln(1) = \ln(x+1) \wedge \int_1^{x+1} \frac{1}{t} dt = \int_0^x \frac{1}{t^*+1} dt^*$$

$$= \int_{|t^*=-\tau}^{-x} \frac{1}{-\tau+1} (-1) d\tau = - \int_{-\tau}^{-x} \frac{1}{-\tau+1} (-1) d\tau = \int_{-x}^0 \frac{1}{1-\tau} d\tau = \ln(x+1)$$

$$\Rightarrow \ln(x+1) = \int_{-x}^0 \frac{1}{1-\tau} d\tau = \int_{-x}^0 1 + \tau + \tau^2 + \dots + \tau^{n-1} + \tau^n + r_n d\tau =$$

$$\tau + \frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^3}{3} + \dots + \frac{\tau^n}{n} \Big|_{-x}^0 + \int_{-x}^0 r_n d\tau = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n,$$

$$R_n = \int_{-x}^0 r_n d\tau = \int_{-x}^0 \frac{\tau^n}{1-\tau} d\tau = \int_{|t=-\tau}^0 \frac{(-t)^n}{1+t} (-1) dt = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt$$

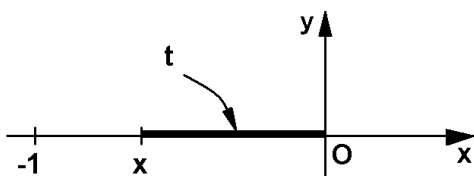
$$\Rightarrow \ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n, \quad R_n = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt$$

$\leadsto$ Potenzreihe, falls Restglied $R_n \rightarrow 0$ • Série de puissances, si terme qui reste $R_n \rightarrow 0$.

$\leadsto$ Restglied untersuchen! • Examiner le terme qui reste!

$$1. \ x \in [0, 1) \quad |R_n| = \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^x t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} \Big|_0^x = \frac{x^{n+1}}{n+1} < \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \Rightarrow R_n \rightarrow 0$$

$$2. \ x \in (-1, 0] \quad |R_n| = \left| \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt \right| \leq \left| \int_0^x \left| \frac{t^n}{1+t} \right| dt \right| \leq \left| \int_0^x \left| \frac{t^n}{1+x} \right| dt \right| \leq$$



$$\begin{aligned} &\leq \left| \frac{1}{1+x} \right| \left| \int_0^x |t^n| dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{1+x} \right| \left| \frac{|t^{n+1}|}{n+1} \Big|_0^x \right| \\ &= \left| \frac{1}{1+x} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow R_n \rightarrow 0$ für • pour $x \in (-1, 1)$

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$x \in (-1, 1)$$

Beh.: • **Thè.:**

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n \quad \text{mit} \quad \bullet \quad \text{avec}$$

$$x \in [0, 1) \Rightarrow |R_n| \leq \frac{1}{n+1}$$

$$x \in (-1, 0] \Rightarrow |R_n| \leq \left| \frac{1}{1+x} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right|$$

Konvergenzradius: • *Rayon de convergence:*

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$

$\leadsto x \in (-1, 1)$ wie vorausgesetzt • *comme dans l'hypothèse.*

Potenzreihenentwicklung von Polynomen — Développement des polynômes en séries de puissances

Um eine allgemeine Entwicklungsformel zu gewinnen, mit der sich die erwähnten Funktionen als Potenzreihe schreiben lassen, ist es ratsam, die Sachlage erst für die einfache Klasse der Polynome zu studieren. • *Pour obtenir une formule de développement générale à l'aide de laquelle on peut écrire des fonctions mentionnées comme séries de puissances, il est utile d'étudier d'abord la chose pour une classe simple: les polynômes.*

Geg.: • **Donné:** Polynom • *Polynôme* $p(x)$

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

$$p'(x) = a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1}$$

$$p''(x) = 2 a_2 + 3 \cdot 2 a_3 x + 4 \cdot 3 a_4 x^2 + \dots + n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2}$$

$$p^{(3)}(x) = 3 \cdot 2 a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 a_4 x + \dots + n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot a_n \cdot x^{n-3}$$

$\vdots$

$\dots$

$$p(0) = a_0$$

$$p'(0) = a_1 = 1 a_1$$

$$p''(0) = 2 a_2$$

$$p^{(3)}(0) = 3 \cdot 2 \cdot a_3 = 3! \cdot a_3$$

$\vdots$

$$p^{(n)}(0) = n! \cdot a_n$$

Lemma: • **Lemme:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

Beh.: • **Thè.:**

$$a_n = \frac{p^{(n)}(0)}{n!}$$

$$\Rightarrow p(x) = \frac{p^{(0)}(0)}{0!} + \frac{p^{(1)}(0)}{1!} x + \frac{p^{(2)}(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{p^{(n)}(0)}{(n)!} x^n$$

Ausdehnung auf andere Funktionen — Généralisation pour autres fonctions

Nun wollen wir den Versuch wagen, dieses Lemma auch auf andere Funktionen auszudehnen.

• *Maintenant nous voulons essayer d'étendre ce lemme aussi à d'autres fonctions.*

Gegeben sei: • *Soit donné: $f \in \mathcal{D}^{(n+1)}(I)$, $x_0 \in I$, $x = x_0 + h \in I$*

Ansatz: • **Disposition:**

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + a_n(x - x_0)^n + R_n(x, x_0) =$$

$$\underbrace{\frac{f^{(0)}(x_0)}{0!} + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n)!}(x - x_0)^n}_{T_n(x, x_0)} + R_n(x, x_0)$$

Dieser Ansatz ist eigentlich bloß eine Definition von $R_n(x, x_0) := f(x) - T_n(x, x_0)$ und somit immer richtig.

• *Cette disposition est enfin seulement une définition de $R_n(x, x_0) := f(x) - T_n(x, x_0)$ et donc juste.*

Definition: • **Définition:** $R_n(x, x_0) := f(x) - T_n(x, x_0)$ heisst **Taylorpolynom** oder „**Schmiegeparabel**“ n -ter Ordnung • *s'appelle polynôme de Taylor ou "parabole" d'ordre n qui s'approche de la courbe f .*

$\leadsto$ **Problem:** • **Problème:** Abschätzung des Restgliedes $R_n(x, x_0)$ • *Estimation de l'erreur ou reste $R_n(x, x_0)$. $\leadsto R_n(x, x_0) \xrightarrow{?} 0$ für • *pour $n \rightarrow \infty$**

Trick: • **Truc:** Sei • *Soit $R_n(x, x_0) = f(x) - T_n(x, x_0)$. Halte x als Parameter fest, verändere jedoch $x_0 := t$ • *Tiens x fixe comme paramètre, $x_0 := t$ soit variable.**

$\triangleright$ $x = x_0 := t$: $R_n(x, t) = f(t) - T_n(t, t) = f(t) - f(t) = 0$
 $x \in U_\delta(t)$, $x \rightarrow t = x_0 \leadsto f(x), T_n(t, t)$ stet'cont $\Rightarrow R_n(x, t)$ stet'cont
 $\Rightarrow R_n(x, t) \rightarrow 0$ für • *pour $x \rightarrow t$*

$\triangleright$ $R_n(x, t)$

$$f(x) - (f(t) + f'(t)(x - t) + \frac{f''(t)}{2!}(x - t)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}(x - t)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(t)}{(n)!}(x - t)^n)$$
 (Produktenregel • *Règle du produit*)

$$\leadsto \frac{d}{dt} R_n(x, t) = 0 - f'(t) + f'(t) - f''(t)(x - t) + \frac{f''(t)}{2!} \cdot 2 \cdot (x - t) - \frac{f^{(3)}(t)}{2!} \cdot (x - t)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!} \cdot (n-1) \cdot (x - t)^{n-2} - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} (x - t)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(t)}{(n)!} \cdot n \cdot (x - t)^{n-1} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n)!} (x - t)^n$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} R_n(x, t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n)!} (x - t)^n, \quad \int_x^{x_0} \frac{d}{dt} R_n(x, t) dt = R_n(x, t) \Big|_{t=x}^{t=x_0} = R_n(x, x_0) - \underbrace{R_n(x, x)}_{=0}$$

$$\Rightarrow R_n(x, x_0) = \int_x^{x_0} \frac{d}{dt} R_n(x, t) dt = - \int_x^{x_0} \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n)!} (x - t)^n dt$$

Lemma: • **Lemme:** $R_n(x, x_0) = \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n)!} (x - t)^n dt$

Sei • *Soit* $x = x_0 + h$, $t \in [x_0, x_0 + h]$, $t = x_0 + v$

$$\begin{aligned} \Rightarrow R_n(x, x_0) &= \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n)!} (x_0 + h - t)^n dt = \\ &= \int_{x_0+v=x_0}^{x_0+v=x_0+h} \frac{f^{(n+1)}(x_0+v)}{(n)!} (x_0 + h - (x_0 + v))^n dv = \int_0^h \frac{f^{(n+1)}(x_0+v)}{(n)!} (h-v)^n dv \end{aligned}$$

Mittelwertsatz: • *Théorème des accroissements finis:*

$$\exists_{\lambda \in [0,1]} : R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \lambda h)}{(n)!} (h - \lambda h)^n h = \frac{(1 - \lambda \cdot 1)^n h^{n+1} f^{(n+1)}(x_0 + \lambda h)}{(n)!}$$

$\leadsto$ Abschätzung von Cauchy • *Estimation de Cauchy*

Eine andere Abschätzung hat Lagrange gegeben. • *Une autre estimation à été donnée par Lagrange* $\leadsto$

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$f \in \mathcal{D}^{(n+1)}(I), \quad x_0 \in I, \quad x = x_0 + h \in I \\ R_n(x, x_0) = f(x) - T_n(x, x_0)$$

Beh.: • **Thè.:**

$$\exists_{\lambda \in [0,1]} : R_n(x, x_0) = \frac{(1 - \lambda)^n h^{n+1} f^{(n+1)}(x_0 + \lambda h)}{(n)!} \quad (\text{Cauchy})$$

$$\exists_{\mu \in [0,1]} : R_n(x, x_0) = \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(x_0 + \mu h)}{(n+1)!} \quad (\text{Lagrange})$$

Konsequenz: • **Conséquence:** Will man $f(x)$ durch Taylorpolynome $T_n(x, x_0)$ approximieren, so ist der Fehler von der Grössenordnung $C(x_0, h) \cdot \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$. Bekanntlich gilt: $\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Ist $|f^{(n+1)}(x_0 + \mu h)| < M$ in I , so gilt auch $R_n(x, x_0) \rightarrow 0$ mit $x \rightarrow x_0$.

• *Si l'on veut approximer $f(x)$ par des polynômes de Taylor $T_n(x, x_0)$, l'erreur est de l'ordre $C(x_0, h) \cdot \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$. On sait qu'il vaut: $\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow \infty$. S'il vaut $|f^{(n+1)}(x_0 + \mu h)| < M$ dans I , il vaut aussi $R_n(x, x_0) \rightarrow 0$ avec $x \rightarrow x_0$.*

1. Beispiel: • **Exemple 1:** $(\sin(x))^{(n)} = \pm \sin(x)$ oder • *ou* $= \pm \cos(x)$

$$\Rightarrow \forall_{n \in \mathbb{N}} |(\sin(x))^{(n)}| \leq 1 \Rightarrow \forall_{x \in \mathbb{R}} \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots (\in \mathcal{CONV})$$

2. Beispiel: • **Exemple 2:** Sei • *Soit* $M \in \mathbb{R}^+$ beliebig • *quelconque* $(e^x)^{(n)} = e^x \in (0, M)$

$$\text{für} \bullet \text{ pour } x < \ln(M) \Rightarrow \forall_{n \in \mathbb{N}} |(e^x)^{(n)}| \leq M \Rightarrow \forall_{x \in \mathbb{R}} e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots (\in \mathcal{CONV})$$

Analytische Funktionen — Fonctions analytiques

Sei f eine reelle Funktion • *Soit f une fonction réelle.*

Definition: • **Définition:** $f(x)$ heisst **analytisch** • *s'appelle analytique* (analyt, $f \in \text{analyt}$) $\Rightarrow \exists_{\delta \in \mathbb{R}^+} : R_n(x, x_0) \rightarrow 0$ für • *pour* $n \rightarrow \infty$, $x \in U_\delta(x_0)$

Konsequenz: • **Conséquence:** Analytische Funktionen besitzen in $U_\delta(x_0)$ eine konvergente Potenzreihendarstellung: • *Les fonctions analytiques possèdent dans $U_\delta(x_0)$ une représentation en séries de puissances qui converge:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

Definition: • **Définition:**

Die Potenzreihe einer analytischen Funktion heisst auch **Taylorreihe** • *La série de puissances d'une fonction analytique s'appelle*

aussi **série de Taylor** $\rightsquigarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$

Für $x_0 = 0$ redet man auch von einer **Mac Laurin-Reihe**.

• *Pour $x_0 = 0$ on appelle cette série aussi série de Mac Laurin.*

Problem: • **Problème:** Konvergenzintervall = ? D.h. wo ist $R_n(x, x_0) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$?

• *Intervalle de convergence, ç.v.d. où est $R_n(x, x_0) \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow \infty$?*

Beispiele analytischer Funktionen — Exemples de fonctions analytiques

1. Beispiel: • **Exemple 1:** $f(x) = p(x) = x^2$, $x_0 = 1$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 = p(1) + \frac{p'(1)}{1!} (x - 1) + \frac{p''(1)}{2!} (x - 1)^2 + 0 = 1 + 2(x - 1) + \frac{2}{2} (x - 1)^2$$

2. Beispiel: • **Exemple 2:** $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$, $x = h \Rightarrow f(x) = e^0 + \frac{e^0}{1!} x + \frac{e^0}{2!} x^2 + \frac{e^0}{3!} x^3 + \dots +$

$$\frac{e^0}{n!} x^n + R_n(x, 0), \quad |R_n(x, 0)| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\mu \cdot x} \right|_{\mu \in [0,1]} \leq \left| \frac{x^{n+1} \cdot e^x}{(n+1)!} \right| \leq \left| \frac{x^{n+1} \cdot c(x)}{(n+1)!} \right| \rightarrow 0$$

für • *pour $n \rightarrow \infty$*

$$\Rightarrow f(x) = 1 + \frac{1}{1!} x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

3. Beispiel: • **Exemple 3:** $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$

$$\Rightarrow f(x) = 1 + \frac{1}{1!} x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} e^x = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{1}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!} x^{k-1} = 0|_{k=0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} x^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = e^x \Rightarrow (e^x)' = e^x$$

4. Beispiel: • **Exemple 4:** $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$

$$\Rightarrow f(x) = 1 + \frac{1}{1!} x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

$$\Rightarrow \int_0^x e^t dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x \frac{1}{k!} t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \cdot (k+1)} x^{k+1} \Big|_0^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = -1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = e^x - 1 = e^x - e^0 \Rightarrow \int_0^x e^t dt = e^x - e^0$$

5. Beispiel: • **Exemple 5:**

$$f(x) = \sin(x) \quad f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^n \cdot \cos(x) & n = 2k+1, \quad k \in \mathbb{N} \\ (-1)^n \cdot \sin(x) & n = 2k \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
x_0 = 0 &\Rightarrow \sin(x_0) = 0, \quad \cos(x_0) = 1 \Rightarrow f(x) = 0 + \frac{1}{1!}x - \frac{0}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots = \\
&\frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \dots, \quad |f^{(n)}(x)| \leq 1 \text{ (sin, cos)} \Rightarrow |R_n(x, 0)| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 \forall x \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow f(x) = \sin(x) = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \dots
\end{aligned}$$

6. Beispiel: • **Exemple 6:** $f(x) = \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-x)^k\right)$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k + (-x)^k}{k!} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1 + (-1)^k) \cdot x^k}{k!} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2) \cdot x^{2k}}{(2k)!} \Rightarrow \cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

7. Beispiel: • **Exemple 7:** Binomische Reihe • Série binomiale

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^r, \quad r \in \mathbb{R}, \quad x_0 = 0, \quad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} = ? \\
&\leadsto f^{(k)}(x_0) = r \cdot (r-1) \cdot (r-2) \cdot \dots \cdot (r-k+1) \cdot (1+x)^{r-k} = r \cdot (r-1) \cdot (r-2) \cdot \dots \cdot (r-k+1), \\
\binom{n}{k} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&\Rightarrow \text{Def.:} \bullet \text{Déf.:} \binom{r}{k} := \frac{r \cdot (r-1) \cdot (r-2) \cdot \dots \cdot (r-k+1)}{k!} \Rightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} = \binom{r}{k} \\
&\Rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} \cdot x^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x \in (0, 1) &\Rightarrow |R_n(x, 0)| = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot r \cdot (r-1) \cdot (r-2) \cdot \dots \cdot (r-n) \cdot (1+\mu x)^{r-n-1} = \\
&(1+\mu x)^r \cdot x^{n+1} \cdot \frac{r \cdot (r-1) \cdot (r-2) \cdot \dots \cdot (r-n)}{(n+1)! \cdot (1+\mu x)^{n+1}} \leq c(x) \cdot x^{n+1} \quad \text{für} \bullet \text{pour } n > r \Rightarrow |R_n(x, 0)| \rightarrow 0
\end{aligned}$$

8. Beispiel: • **Exemple 8:** $f(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^x \frac{1}{t} \cdot \left(t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}t^7 + \frac{1}{9!}t^9 - \dots\right) dt =$

$$\int_0^x \left(1 - \frac{1}{3!}t^2 + \frac{1}{5!}t^4 - \frac{1}{7!}t^6 + \frac{1}{9!}t^8 - \dots\right) dt = t - \frac{1}{3 \cdot 3!}t^3 + \frac{1}{5 \cdot 5!}t^5 - \frac{1}{7 \cdot 7!}t^7 + \frac{1}{9 \cdot 9!}t^9 - \dots \Big|_0^x$$

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt = x - \frac{1}{3 \cdot 3!}x^3 + \frac{1}{5 \cdot 5!}x^5 - \frac{1}{7 \cdot 7!}x^7 + \frac{1}{9 \cdot 9!}x^9 - \dots$$

9. Beispiel: • **Exemple 9:** $\frac{\pi}{4} = \arctan(1)$, Rechnung • calcul

$$\begin{aligned}
&\leadsto \arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad (\text{für} \bullet \text{pour } |x| \leq 1) \\
&\leadsto \pi = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right)
\end{aligned}$$

10. Beispiel: • **Exemple 10:** $\int_0^x e^{-t^2} dt = ?$

(keine elementare Stammfunktion • pas d'antidérivée élémentaire)

$$\begin{aligned}
&\leadsto \int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-t^2)^k dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-1)^k t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x \frac{1}{k!} (-1)^k t^{2k} dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \cdot (2k+1)} (-1)^k t^{2k+1} \Big|_0^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \cdot (2k+1)} (-1)^k x^{2k+1}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \cdot (2k+1)} (-1)^k x^{2k+1}$$

11. Beispiel: • **Exemple 11:** Ein Problemfall: • *Un cas problématique*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$$

$$f''(x) = \frac{4e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^6} - \frac{6e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = 0$$

$$f'''(x) = \frac{24e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^5} - \frac{36e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^7} + \frac{8e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^9}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f'''(x) = 0$$

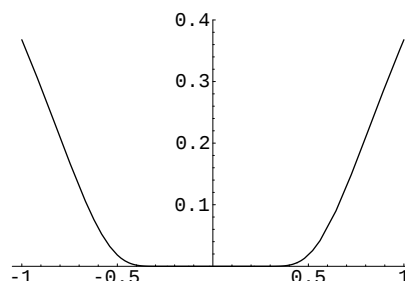
$$f^{(4)}(x) = -\frac{120e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^6} + \frac{300e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^8} - \frac{144e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{10}} + \frac{16e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{12}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f^{(4)}(x) = 0$$

$$f^{(n)}(x) = \dots, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) = 0$$

$$\leadsto f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0}{n!} x^n \equiv 0 \leadsto \text{Widerspruch!} \quad \bullet \text{ Contradiction!}$$

$$\text{Grund} \quad \bullet \text{ La raison: } R_n(x, \xi) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \gg 1, \quad |\xi| \in (0, x), \quad x < 1$$

$\leadsto$ Potenzreihe konvergiert nicht! • *La série de puissances ne converge pas.*



Anwendungen — Applications

Potenzreihen sind zweifellos wichtig zur approximativen Berechnung numerischer Funktionswerte irrationaler und transzendenter Funktionen. • *Sans doute on utilise les séries de puissances pour calculer numériquement des valeurs approximatives de fonctions non-rationnelles et transcendentes.*

$$\text{Bsp.:} \quad \bullet \text{ Exemple: } \sin(0.5) = \frac{1}{1!} 0.5 - \frac{1}{3!} 0.5^3 + \frac{1}{5!} 0.5^5 - \frac{1}{7!} 0.5^7 + \frac{1}{9!} 0.5^9 - \dots \approx 0.479426$$

Eine andere Anwendung ist die **Linearisation**: • *Une autre application est la linéarisation:*

$$x \in U_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \approx \frac{f(x_0)}{0!} \cdot (x - x_0)^0 + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)^1 = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Allgemein versucht man also, eine Funktion durch die Anfangsterme ihrer Potenzreihe zu ersetzen. Die Genauigkeit nimmt dann in der Regel ab mit $|x - x_0|$. • *Généralement on essaye donc de remplacer une fonction par les termes initiaux d'une série de puissances. L'exactitude baisse en général avec $|x - x_0|$.*

Bsp.: • **Exemple:** $|x| < 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \approx 1 + x, \quad \frac{1}{1-0.0001} = \frac{1}{0.9999} \approx 1 + 0.0001 = 1.0001$$

Hier ist eine Potenzreihenentwicklung allerdings nicht notwendig, da es sich um eine geometrische Reihe handelt. • *Ici un développement en séries de puissances n'est pas nécessaire parce qu'il s'agit d'une série géométrique.*

Bsp.: • Exemple: $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-q} \in \mathcal{CONV}$, $|q| = |x| < 1$

Sei • Soit $a \neq 0$, $\frac{1}{1+x} = \frac{a}{a(1+x)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-a+1}{a}}$, $\frac{1}{1+\frac{x-a+1}{a}} \in \mathcal{CONV}$,
 $|q| = |\frac{x-a+1}{a}| < 1$, $|x-a+1| < a$, $x \in (-1, 2a-1)$

Bsp.: • Exemple: $\int_0^x t^3 \sin t^2 dt = ?$

Aufgabe: Berechne 8 zählende Glieder der Potenzreihenentwicklung.

• **Problème:** Calculer 8 termes de la série de puissances.

$$\begin{aligned} \sin t &\approx -\frac{t^{15}}{1307674368000} + \frac{t^{13}}{6227020800} - \frac{t^{11}}{39916800} + \frac{t^9}{362880} - \frac{t^7}{5040} + \frac{t^5}{120} - \frac{t^3}{6} + t \\ &\leadsto t^3 \sin t^2 \approx -\frac{t^{33}}{1307674368000} + \frac{t^{29}}{6227020800} - \frac{t^{25}}{39916800} + \frac{t^{21}}{362880} - \frac{t^{17}}{5040} + \frac{t^{13}}{120} - \frac{t^9}{6} + t^5 \\ &\leadsto \int_0^x t^3 \sin t^2 dt \approx -\frac{x^{34}}{44460928512000} + \frac{x^{30}}{186810624000} - \frac{x^{26}}{1037836800} + \frac{x^{22}}{7983360} - \frac{x^{18}}{90720} + \frac{x^{14}}{1680} - \frac{x^{10}}{60} + \frac{x^6}{6} \end{aligned}$$

Landaus 'O'-Symbol — Le symbole 'O' de Landau

In der Praxis setzt man zur Berechnung von Werten transzendenter Funktionen mittels Potenzreihen üblicherweise Computer ein. Dabei ist es notwendig, die unendlichen Reihen durch endliche Reihen (Taylorpolynome) zu ersetzen. Für den Verweis auf die weggelassenen Terme verwendet man in der Literatur üblicherweise das **Symbol 'O'** von **Landau**:

• *En pratique, on utilise normalement des ordinateurs pour le calcul des valeurs de fonctions transcendentes au moyen de séries de puissances. Quant à cela, il est nécessaire de remplacer les séries infinies par des séries finies de polynômes de Taylor. Pour faire la référence aux termes omis, dans la littérature on applique normalement le symbole 'O' de Landau:*

Symbol: • Symbole:
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + R_n(x, x_0) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + O[x-x_0]^{n+1}, \quad R_n(x, x_0) := O[x-x_0]^{n+1}$$

'O' steht dabei für „Ordnung“ ($O[x-x_0]^{n+1} \leadsto$ Potenzen der Ordnung (Polynom vom Grad!) mindestens $n+1$).

• 'O' signifie "Ordre" ($O[x-x_0]^{n+1} \leadsto$ puissances de l'ordre (polynome de degré!) au moins $n+1$).

Gegeben seien zwei Folgen $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$. Allgemeiner definieren wir:

• Soient données deux suites $\langle a_n \rangle$ et $\langle b_n \rangle$. De façon plus générale nous définissons:

Definition: • Définition: $\langle a_n \rangle = O(\langle b_n \rangle) \Leftrightarrow (\exists M \in \mathbb{R}^+ : |\frac{a_n}{b_n}| \leq M)$

$$\langle a_n \rangle = o(\langle b_n \rangle) \Leftrightarrow (\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0)$$

Bsp.: • Exemple:

1. $\langle n^3 - 4n^2 + 5n + 9 \rangle = O(n^3)$

2. $\langle n^3 - 4n^2 + 5n + 9 \rangle = o(e^n)$

Wichtig: • **Important:**

Z.B. *Mathematica* verwendet auch dieses Symbol! Für die Rechnung mit Reihen muss es unterdrückt werden. Dafür existiert der Befehl „Normal“ .

• *p.ex. Mathematica utilise aussi ce symbole! Pour le calcul il faut supprimer cet ordre. Pour ça il existe l'ordre "Normal" .*

Kapitel • Chapitre 7

Differentialrechnung im n-dimensionalen Raum — Calcul différentiel dans l'espace à dimens. n

7.1 Funktionen mit mehreren Veränderlichen — Fonctions à plusieurs variables

7.1.1 Beispiele — Exemples

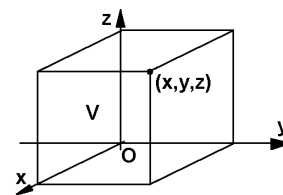
Funktionen mit mehreren Variablen sind uns schon öfters begegnet. Eine Belegung der Variablen mit Werten entspricht hier einem Punkt $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. • *On a rencontré déjà plusieurs fois des fonctions avec plusieurs variables. Un ensemble de valeurs adjoint aux variables correspond à un point $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.*

1. Beispiel: • Exemple 1: $E_{\text{pot}}(m, h) = g \cdot m \cdot h$

2. Beispiel: • Exemple 2:

Volumen: • Volume:

$$V(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$$

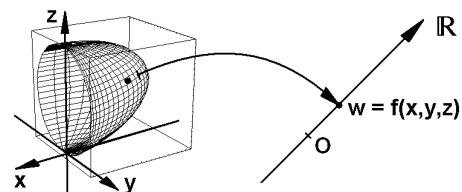


3. Beispiel: • Exemple 3: Lokale Temperatur beim Erwärmen eines Körpers: • *Température locale à l'occasion du réchauffement d'un volume: $T = T(x, y, z, t, \rho)$*

4. Beispiel: • Exemple 4:
$$f(x, y, z, w) = \frac{x e^y + (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 + w^2)^{\frac{1}{2}} \cdot x y^{\frac{y+z}{|x+w|}}}$$

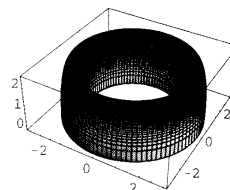
5. Beispiel: • Exemple 5:

$$w = f(x, y, z) = \sqrt{\sin(e^{x+y^2} - z)} \cdot \cos(z - x)$$



6. Beispiel: • Exemple 6:

$$f(x, y) = z = \sqrt{(9 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)}$$



Offensichtlich ist im letzten Beispiel $f(x, y) \in \mathbb{R}$, wenn $r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 3 \wedge r = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 2$, d.h. $r \in [2, 3]$. Der Definitionsbereich ist somit ein Kreisring um den Ursprung. Man kann nachrechnen, dass das Intervall $[0, 2.5]$ der Wertebereich ist. Bei Standardfunktionen mit nur einer Variablen hatten wir normalerweise Intervalle als Definitionsbereich. Diese einfache Situation ist hier nicht mehr gegeben.

• Dans l'exemple dernier on voyait $f(x, y) \in \mathbb{R}$ pour $r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 3 \wedge r = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 2$, c.v.d. $r \in [2, 3]$. Le domaine de définition est donc un anneau avec l'origine comme centre. Le calcul montre que l'intervalle $[0, 2.5]$ est le domaine de valeurs. Quant aux fonctions standard avec une seule variable nous avons eu normalement des intervalles comme domaines de définition. Ici cette situation simple n'apparaît plus.

Bei den Wertebereichen hingegen ist die Situation nicht anders als bei Funktionen mit nur einer Variablen. Wir treffen hier wieder Teilmengen $\subseteq \mathbb{R}$.

• Quant aux domaines de valeurs la situation est ici la même que pour les fonctions avec une seule variable. Nous avons des sous-ensembles $\subseteq \mathbb{R}$.

7.1.2 Definitionsbereiche — Domaines de définition

Normalerweise wollen wir Funktionen betrachten, deren Definitionsbereich Gebiete $\subseteq \mathbb{R}^n$ oder Vereinigungen von solchen sind. Den recht anschauliche Begriff „Gebiete“ schränken wir wie folgt ein:

• Normalement nous considérons les fonctions dont les domaines de définition sont des régions $\subseteq \mathbb{R}^n$ ou bien de réunions de régions dans le sens qui suit:

Definition: • Définition:

Eine Menge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst **offen**, wenn es zu jedem Punkt $P \in G$ eine ganze Umgebung gibt, die ebenfalls ganz in G drin liegt.

• Un ensemble $G \subseteq \mathbb{R}^n$ s'appelle **ouvert**, quand pour chaque point $P \in G$ il existe un voisinage qui est aussi situé entièrement dans G .

Zur Erinnerung: n -dimensionale Umgebungen sind n -dimensionale Kugeln ohne Rand (offene Kugeln):

• On se rappelle: Un voisinage à dimension n est une boule à dimension n sans le bord (boules ouvertes):

$$U_r(P_0) = \{P(x, y, \dots) \in \mathbb{R}^n \mid |PP_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \dots} < r\}$$

Definition: • Définition:

Eine Menge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst **zusammenhängend**, wenn sich zwei verschiedene Punkte $\in G$ immer durch eine Kurve verbinden lassen, die ganz innerhalb von G verläuft. • Un ensemble $G \subseteq \mathbb{R}^n$ s'appelle **connexe** quand on peut toujours relier deux points différents $\in G$ par une courbe qui est située entièrement dans G .

Definition: • Définition:

Eine offene und zusammenhängende Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst **Gebiet**. Der Einfachheit halber wollen wir hier für $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $n > 2$ ebenfalls „Gebiet“ sagen. • *Un sous-ensemble $G \subseteq \mathbb{R}^n$ qui est ouvert et connexe s'appelle **région**. Pour simplifier nous disons pour $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $n > 2$ aussi "région".*

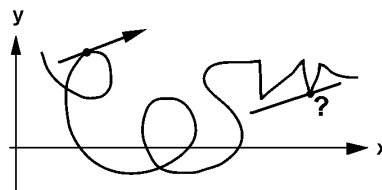
Ein Gebiet heisst **endlich**, falls es ganz in einer n -dimensionalen Kugel mit Radius $r \in \mathbb{R}$ Platz hat. Andernfalls heisst es **unendlich**. • *Une région s'appelle **finie**, si elle peut être totalement emboîtée dans une sphère de dimension n avec un rayon $\in \mathbb{R}$. Si non elle s'appelle **infinie**.*

Für das weitere Verständnis der Sache betrachten wir endliche Gebiete $G \subseteq \mathbb{R}^2$. „endlich“ bedeutet, dass ein solches Gebiet berandet sein muss. Wegen der Offenheit kann aber der **Rand** ∂G nicht zu G gehören. Der Rand wird uns nun Probleme bereiten, falls wir keine Einschränkungen machen. Man denke z.B. an den Fall, dass ein Stück des Randes aus einem „unendlich dichten Kamm“ besteht, d.h. eine Funktion, die in den rationalen Punkten 0 und in den irrationalen 1 ist. Sowas ist sehr unbequem beim Arbeiten. Wir betrachten daher immer nur Gebiete mit „vernünftigem Rand“, d.h. Randkurven, die sich durch vernünftige Vektorfunktionen beschreiben lassen. Daher sagen wir hier: • *Pour comprendre mieux la chose nous considérons des régions finies $G \subseteq \mathbb{R}^2$. "Finie" signifie qu'une telle région doit avoir un bord ∂G . Comme la région est ouverte, le bord ne peut pas appartenir à G . Le bord va nous causer des soucis si nous ne faisons pas de restrictions. Pensons p.ex. au cas où une pièce du bord consiste en un "peigne de densité infinie", ç.v.d. une fonction qui est 0 dans les points rationnels et 1 dans les points irrationnels. Ce n'est pas pratique pour travailler. Nous considérons donc toujours des régions avec un bord raisonnable, ç.v.d. des courbes de bord qu'on peut décrire à l'aide de fonctions vectorielles raisonnables. C'est pourquoi nous disons chez nous.*

Definition: • Définition:

Eine Kurve heisst **glatt**, wenn die zugehörige Vektorfunktion differenzierbar ist und gilt: $\vec{v}'(t) \neq \vec{0}$. • *Une courbe s'appelle **lisse**, si la fonction vectorielle qui décrit la courbe est dérivable de façon continue et s'il vaut: $\vec{v}'(t) \neq \vec{0}$.*

Eine Kurve heisst somit **glatt**, wenn der Tangentenvektor existiert und nicht abrupt die Richtung ändert. Das Profil eines Igels wäre demnach nicht **glatt**. • *Une courbe s'appelle donc **lisse**, si le vecteur tangentiel existe et ne change pas abruptement sa direction. Le profil d'un hérisson n'est donc pas lisse.*

**Definition: • Définition:**

Wir nennen hier ein Gebiet endliches $G \subseteq \mathbb{R}^2$ „**vernünftig**“, wenn die Randkurve stückweise **glatt** ist. • *Nous appelons une région $G \subseteq \mathbb{R}^2$ "**raisonnable**", si le bord est lisse par morceaux.*

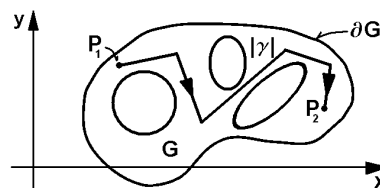
Wir wollen fortan hier in unserem Rahmen unter „Gebieten“ immer vernünftige Gebiete verstehen, wenn wir das nicht ausdrücklich sagen. • *Nous voulons ici dans ce cadre comprendre une "région" toujours comme une région raisonnable, si cela n'est pas explicitement exigé différemment.*

Analog gehen wir vor im $\mathbb{R}^n$, $n > 2$ oder wenn sich das Gebiet in irgend einer Weise zum Teil ins Unendliche ausdehnt. Im $\mathbb{R}^3$ z.B. sind dann die Ränder im endlichen „vernünftigen“ Fall geschlossene Flächen. • *Nous agissons de façon analogue dans le $\mathbb{R}^n$, $n > 2$ ou si la région s'étend dans une certaine manière partiellement vers l'infini. P.ex. dans le $\mathbb{R}^3$ les bords sont dans le cas raisonnable et fini des surfaces fermées..*

Definition: • Définition:

Falls man in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2$ zu zwei Punkten alle Verbindungskurven ineinander deformieren kann, ohne das Gebiet zu verlassen, so nennen wir das Gebiet **einfach zusammenhängend**. Andernfalls heisst es **mehrfach zusammenhängend**. Analog für $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $n > 2$ • Si dans une région $G \subseteq \mathbb{R}^2$ on peut toujours déformer une courbe de jonction entre deux points dans toutes les autres courbes de ce genre, nous appelons cette région **connexe de manière simple**. Dans l'autre cas elle s'appelle **multiconnexe** (multiplement connexe). Analogiquement pour $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $n > 2$

Im mehrfach zusammenhängenden Fall gibt es Löcher im Gebiet! • Dans le cas multiconnexe il existe des trous dans la région.

**7.1.3 Funktionstypen — Types de fonctions**

Bei den Funktionen mit nur einer Variablen sind die Funktionstypen ausführlich beschrieben worden. Wir wollen hier dieselben Bezeichnungen verwenden. Da kaum Missverständnisse möglich sind, wollen wir darauf verzichten, die Klassen explizit zu definieren. Zur Erklärung der Klassen lassen wir Beispiele wirken:

• Pour les fonctions à une seule variable nous avons largement décrit les types de fonctions. Ici nous voulons utiliser les mêmes notions. Comme il n'est pratiquement pas possible de mal comprendre la chose, nous renonçons de définir explicitement les classes. Pour expliquer les classes nous donnons des exemples:

1. Lineare Funktionen im $\mathbb{R}^n$: • Fonctions linéaires dans le $\mathbb{R}^n$:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n + \alpha_0$$

Speziell im $\mathbb{R}^3$: • Spécialement dans le $\mathbb{R}^3$:

$$f(x, y, z) = Ax + By + Cz + D$$

$$f(x, y, z) = Ax + By + Cz + D = \text{const.} \leadsto \text{Ebene} \quad \bullet \text{ plan!}$$

2. Quadratische Funktionen im $\mathbb{R}^n$: • Des fonctions quadratiques dans le $\mathbb{R}^n$:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2 + \beta_1 x_1 x_2 + \dots + \beta_j x_{n-1} x_n + \gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_n x_n + \delta_0$$

Speziell im $\mathbb{R}^2$: • Spécialement dans le $\mathbb{R}^2$:

$$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$$

3. **Polynome** mit mehreren Variablen: • **Polynômes** à plusieurs variables:

Z.B. ein Polynom mit zwei Variablen vom Grad n :

• *P.ex. un polynôme à deux variables au degré n :*

$$f(x, y) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} y + \dots + \alpha_0 y^n + \beta_{n-1} x^{n-1} + \beta_{n-2} x^{n-2} y + \dots + \beta_0 y^{n-1} + \dots \\ \dots + \mu_1 x + \mu_2 y + \nu$$

Kürzer geschrieben mit Doppelindizes: • *Écrit de façon plus courte avec double index:*

$$f(x, y) = \sum_{\substack{i, k=0 \\ i+k \leq n}}^n \alpha_{i, k} x^i y^k$$

Allgemeiner: • *Plus général:*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_j) = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_j=0 \\ k_1 + \dots + k_j \leq n}}^n \alpha_{k_1, \dots, k_j} \cdot x_1^{k_1} \cdot \dots \cdot x_j^{k_j}$$

4. **Gebrochen rationale** Funktionen im $\mathbb{R}^n$:

• **Fonctions rationnelles fractionnaires** dans le $\mathbb{R}^n$:

Z.B. mit zwei Variablen: • *P.ex. à deux variables:*

$$f(x, y) = \frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{\delta x + \varepsilon y + \zeta}$$

5. **Beliebig zusammengesetzte** Funktionen im $\mathbb{R}^n$: • **Fonctions composées de manière quelconque** dans le $\mathbb{R}^n$:

Z.B. mit zwei Variablen: • *P.ex. à deux variables:*

$$f(x, y) = \sin(x \cdot y) - \ln(\sin(x^2) - y^2 \cdot \cos(\frac{x+y+1}{x-y+2}))$$

7.1.4 Aspekte der Darstellung — Aspects de la représentation

„Vernünftige Funktionen“ mit zwei Variablen — „Fonctions raisonnables“ à deux variables

Sei • *Soit $f : (x, y) \mapsto z = f(x, y)$* „vernünftige Funktion“ • **”fonction raisonnable”**

$\leadsto$ Definitionsbereich: vernünftiges Gebiet. Keine Sprünge, keine Pole, keine Definitionslücken, glatt, wie es schon von Funktionen mit eindimensionalen Definitionsbereichen bekannt ist (für n -dimensionale angepasste exakte Definitionen vgl. später).

• $\leadsto$ *Domaine de définition: Région raisonnable. Pas de sauts, pas de pôles, pas de lacunes de définition, lisse, comme c'est connu déjà des fonctions avec domaine de définition de dimension 1 (pour les définitions adaptées à des domaines de définition à dimension n : voir plus bas).*

$n = 2$

$\leadsto$ Das Bild des Graphen ist eine Fläche im $\mathbb{R}^3$. • *L'image du graphe est une surface dans le $\mathbb{R}^3$*

Begriffe: • Notions:

Allfällige durch $z = f(x, y) = \text{const.}$ definierte Linien heissen **Höhenlinien** oder **Niveaulinien**

• *Les courbes qui sont définies par $z = f(x, y) = \text{const.}$ s'appellent courbes de niveau*

Entsprechend reden wir bei $f(x, y, z)$ von **Niveauflächen** und bei $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ von **Niveauhyperflächen**. • *Correspondamment quant à $f(x, y, z)$ nous disons surfaces de niveau et quant à $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ hyper-surfaces de niveau.*

Schreibweise: • Façon d' écrire:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) := f(P), \quad P = P(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D_f \subseteq \mathbb{R}^n$$

Die Projektion der Höhenlinien auf die xy -Ebene ergibt die **Höhenlinienkarte** (Contour-Plot). • *La Projection des lignes de niveau sur le plan xy nous donne la carte de courbes de niveau (Contour-Plot).*

Beispiele — Exemples

⊙ **1. Beispiel: • Exemple 1:** $f(x, y) = 4x - 2y + 6 = z = \text{const.} = c$

$$\Rightarrow y = \frac{4x + 6 - c}{2} = 2x + \left(3 - \frac{c}{2}\right) \leadsto \text{Geraden} \quad \bullet \text{Droites}$$

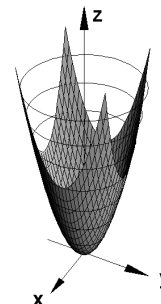
⊙ **2. Beispiel: • Exemple 2:**

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2$$

Höhenlinien: Kreise • *courbes de niveau: Cercles*

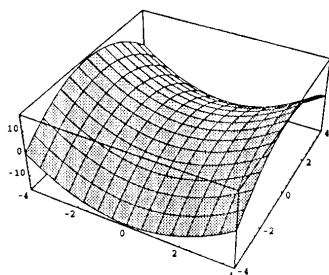
$$x = c = \text{const.} \Rightarrow z = c + y^2$$

$\leadsto$ Parabel • *Parabole*

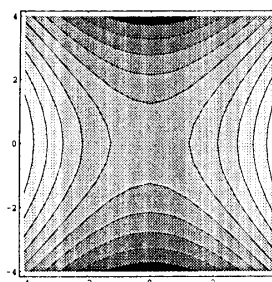


⊙ **3. Beispiel: • Exemple 3:** $z = f(x, y) = x^2 - y^2$

`Plot3D[x^2-y^2, {x, -4, 4}, {y, -4, 4}];`



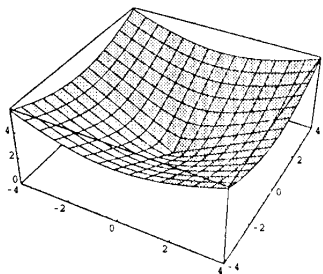
`ContourPlot[x^2-y^2, {x, -4, 4}, {y, -4, 4}];`



⊙ 4. Beispiel: • Exemple 4:

$$z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

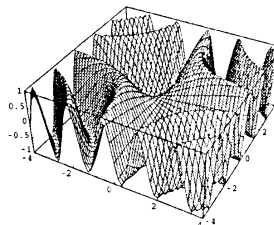
```
Plot3D[Sqrt[x^2+y^2], {x, -4, 4}, {y, -4, 4}];
```



5. Beispiel: • Exemple 5:

$$f(x, y) = \sin(xy)$$

```
Plot3D[Sin[x y], {x, -4, 4}, {y, -4, 4}, PlotPoints->50];
```



- ⊙ 6. Beispiel: • Exemple 6: $z = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = \text{const.} \leadsto$ Die Hyperflächen sind konzentrische Kugeln. • *Les hypersurfaces de niveau sont des sphères concentriques.*

7.2 Stetigkeit — Continuité

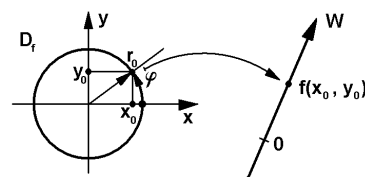
7.2.1 Das neue Problem — Le problème nouveau

Bsp.: • Exemple:

Sei • Soit $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

Es ist: • Il vaut:

$$\begin{aligned} \frac{xy}{x^2 + y^2} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{x}{r} \cdot \frac{y}{r} = \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot \sin(2\varphi) \leadsto \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \cdot \sin(2\varphi) := g(\varphi) \end{aligned}$$



Sei • Soit $x = x_0 \neq 0 \Rightarrow f(x_0, y) = f_1(y) = y \cdot \frac{x_0}{x_0^2 + y^2} \rightarrow 0$ für • pour $y \rightarrow 0$

Sei • Soit $y = y_0 \neq 0 \Rightarrow f(x, y_0) = f_2(x) = x \cdot \frac{y_0}{x^2 + y_0^2} \rightarrow 0$ für • pour $x \rightarrow 0$

Sei • Soit $x = x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0, y) = g(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \sin(\pi) \rightarrow 0$ für • pour $y \rightarrow 0$

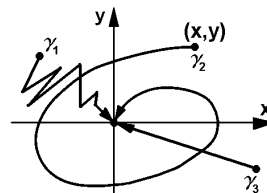
Sei • Soit $y = y_0 = 0 \Rightarrow f(x, y_0) = g(0) = \frac{1}{2} \cdot \sin(0) \rightarrow 0$ für • pour $x \rightarrow 0$

Jedoch: • Mais par contre:

Sei • Soit $x = y \Rightarrow f(x, y) = g(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0$ für • pour $x = y \rightarrow 0$

Konsequenz: • Conséquence:

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)}$ hängt vom Weg ab, auf dem (x, y) gegen $(0, 0)$ geht • dépend du chemin sur lequel (x, y) va vers $(0, 0)$.

Entsprechend im $\mathbb{R}^n$ für • Correspondant dans $\mathbb{R}^n$ pour

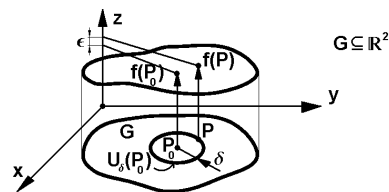
$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow P_0(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0})$$

7.2.2 Stetigkeitsdefinition — Définition de la continuité

In einem Punkt — Dans un point

Daher wollen wir eine Funktion mit $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ **stetig** nennen, wenn $\lim_{P \rightarrow P_0}$ existiert und nicht vom Weg γ abhängt, auf dem P gegen P_0 strebt.

• *Nous appelons donc une fonction avec $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ **continue**, quand $\lim_{P \rightarrow P_0}$ existe indépendamment du chemin γ sur lequel P va vers P_0 .*



Definition: • **Définition:** $f(P)$ stetig in • continue à P_0

$$\Leftrightarrow \forall_{\gamma(P, P_0)} : \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$$

„Epsilontisch“: • *Dit avec epsilon: ...* $\Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{P \in U_\delta(P_0)} : f(P) \in U_\varepsilon(f(P_0))$
oder • *ou* $|f(P) - f(P_0)| < \varepsilon$

Bemerkung: • **Remarque:** Falls nur $\lim_{P \rightarrow P_0}$ existiert, jedoch $f(P) \neq f(P_0)$, so ist f nicht stetig, obwohl der Grenzwert für $P \rightarrow P_0$ existiert.
• *Si $\lim_{P \rightarrow P_0}$ existe, mais $f(P) \neq f(P_0)$, f n'est donc pas continue, bien que la limite existe pour $P \rightarrow P_0$.*

Schreibweise: • **Façon d'écrire:** $f \in \text{stet'cont}(P_0)$, $f \in \mathcal{C}(P_0)$

In einem Gebiet — Dans une région

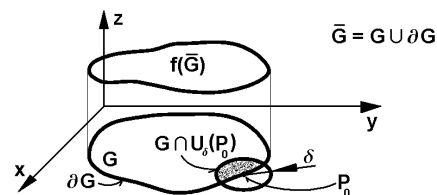
Definition: • **Définition:** f stetig in • continue dans $G \subseteq \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \forall_{P_0 \in G} f \in \mathcal{C}(P_0)$

Bemerkung: • **Remarque:** (Zu abgeschlossenen Gebieten • *(Quant aux régions fermées)*)

Sei • *Soit* $\bar{G} = G \cup \partial G$

f stetig auf • continue sur $\bar{G}$

$\Leftrightarrow$ stetig in • continue dans $G \wedge f$ stetig auf • continue sur ∂G



d. h. • *ç.* v. d. $P_0 \in \partial G \Rightarrow \lim_{\substack{P \rightarrow P_0 \\ P \in U_{P_0} \cap \bar{G}}} f(P) = f(P_0)$

Bsp.: • **Exemple:** $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} = \sqrt{1 - r^2}$

$\Rightarrow D_f = \text{Kreis}$ • *cercle* $K_{r=1}((0, 0)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

Formal hat sich hier gegenüber der Stetigkeitsdefinition von Funktionen mit nur einer Variablen nichts geändert. Nur die Bedeutung von P sowie die Abstandsdefinition ($\overline{PP_0}$) ist jetzt eine andere ($P \in \mathbb{R}^o$).

Daher lassen sich die Stetigkeitssätze von Funktionen mit einer Variablen formal übertragen. Bei den Beweisen ändert sich nur die Art der Distanzbestimmung sowie die Umgebungen, die jetzt n -dimensionale Kugeln statt Intervalle sind. • *Par rapport à la définition de la continuité d'une fonction avec une seule variable, formellement rien n'a changé. Seulement la signification de P ainsi que la définition de la distance $\overline{PP_0}$ est maintenant une autre ($P \in \mathbb{R}^n$). C'est pourquoi on peut copier formellement les théorèmes sur la continuité. Pour les preuves seulement la manière de calculer la distance change ainsi que les voisinages qui sont maintenant des sphères ouvertes de dimension n au lieu d'intervalles.*

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$f(P), g(P) \in \mathcal{C}(P) \text{ resp. } \in \mathcal{C}(G)$$

Beh.: • **Thè.:**

$$1. f(P) \pm g(P) \in \mathcal{C}(P) \text{ resp. } \in \mathcal{C}(G)$$

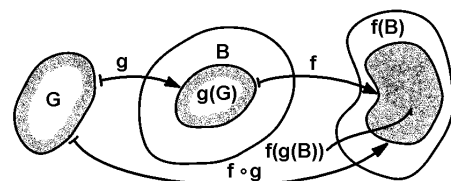
$$2. f(P) \cdot g(P) \in \mathcal{C}(P) \text{ resp. } \in \mathcal{C}(G)$$

$$3. \text{Speziell:} \quad \bullet \text{Spécialement:} \\ f(P) \cdot \lambda \in \mathcal{C}(G), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$4. g(P_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{f(P)}{g(P)} \in \mathcal{C}(P_0) \text{ resp. } \in \mathcal{C}(G)$$

Sei • Soit

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{g} & H = g(G) & \longmapsto & R = f(H) = f(g(G)) \\ P & \xrightarrow{g} & Q = g(P) & \longmapsto & S = f(Q) = f(g(P)) \\ \downarrow & & & & \uparrow \\ & \xrightarrow{f \circ g} & & & \end{array}$$



Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$g \in \mathcal{C}(P_0) \text{ resp. } \in \mathcal{C}(G), \\ f \in \mathcal{C}(Q_0), \quad Q_0 = g(P_0), \quad g \in \mathcal{C}(H), \quad H = g(G)$$

Beh.: • **Thè.:**

$$f \circ g \in \mathcal{C}(P_0) \text{ resp. } \in \mathcal{C}(G)$$

Seien • Soient $g(x) = p_1(x)$, $h(x) = p_2(x)$ Polynome mit einer Variablen • *polynômes à une variable.*

Bekannt: • On sait: $g(x), h(x) \in \mathcal{C}$

↪ Wegen obigem Satz: • A cause du théorème ci-dessus: $g(x) \pm h(x), g(x) \cdot h(x) \in \mathcal{C}.$

Weiter: • *En plus:* $h(y_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{g(x)}{h(x)} \in \mathcal{C}, \quad y = y_0, \quad x \in \mathbb{R}$

Als Konsequenz ergibt sich dann das folgende Korollar: • *En tant que conséquence on a le corollaire suivant:*

Korollar: • **Corollaire:**

Vor.: • **Hyp.:**

$p(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ Polynome • *polynômes*
 $q(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ in • *dans* G

Beh.: • **Thè.:**

$\triangleright \quad p(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad q(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{C}(G)$
 $\triangleright \quad F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{p(x_1, x_2, \dots, x_n)}{q(x_1, x_2, \dots, x_n)} \in \mathcal{C}(G)$

Beispiele: • **Exemples:** Unstetigkeiten entstehen oft durch Definitionslücken, wie die folgenden Beispiele zeigen. Wie bei Funktionen mit nur einer Variablen sind diese Unstetigkeiten manchmal **hebbar**, manchmal aber sind sie es nicht (Pole oder Funktionswerte unbestimmt): • *Souvent les places, où les fonctions sont discontinues sont des lacunes de définition, comme le montrent les exemples suivants. Comme pour les fonctions avec une seule variable ces discontinuités sont des fois supprimables par une définition, des fois elles ne le sont pas (pôles ou valeurs de fonctions indéfinissables):*

1. **1. Beispiel:** • **Exemple 1:** $f_1(x, y) = \frac{1}{x+y} \notin \mathcal{C}$ für • *pour* $x = -y$
2. **2. Beispiel:** • **Exemple 2:** $f_2(x, y) = \sin(\frac{1}{x^2+y^2}) \notin \mathcal{C}(0, 0)$ (für • *pour* $x = y = 0$)
3. **3. Beispiel:** • **Exemple 3:** $f_3(x, y) = \sin(\frac{x+y}{x^4+y^4}) \notin \mathcal{C}(0, 0)$
4. **4. Beispiel:** • **Exemple 4:** $f_4(x, y) = \frac{1}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}} \notin \mathcal{C}(0, 0)$

Beispiel einer stetigen Fortsetzbarkeit: • **Exemple d'une discontinuité supprimable:**

$f_5(x, y) = \frac{\sin(x \cdot y)}{x \cdot y}$ ist nicht definiert für • *n'est pas défini pour* $x \cdot y = 0$.

Die Substitution $z := x \cdot y$ zeigt aber die stetige Fortsetzbarkeit für $z := x \cdot y \rightarrow 0$: • *La substitution $z := x \cdot y$ montre que la fonction a une discontinuité supprimable pour $z := x \cdot y \rightarrow 0$:*

$f_5(x, y) = \frac{\sin(x \cdot y)}{x \cdot y} := g(z) = \frac{\sin(z)}{z} \rightarrow 1$ für • *pour* $z \rightarrow 0$ (Funktion mit nur einer Variablen.
 • *Fonction avec une seule variable.*)

Dabei spielt es keine Rolle, auf welchem Weg $x \cdot y$ gegen 0 geht. • *$x \cdot y$ peut aller vers 0 sur n'importe quel chemin.*

Konsequenz: • **Conséquence:** Seien • *Soient* :

$p(P) = p(x_1, x_2, \dots, x_n), q(P) = q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ Polynome • *polynômes*

$p(P) = p_1(P) \cdot h(P), q(P) = q_1(P) \cdot h(P), p_1(P), h(P), q(P)$ Polynome mit • *polynômes avec*
 $p_1(P_0) \neq 0, q_1(P_0) \neq 0, h(P_0) = 0$

Dann gilt: • *Alors il vaut:* $f(P) = \frac{p(P)}{q(P)} = \frac{p_1(P) \cdot h(P)}{q_1(P) \cdot h(P)} = \frac{p_1(P)}{q_1(P)} \Big|_{P \neq P_0}$

$\Rightarrow \lim_{P \rightarrow P_0} = \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{p_1(P)}{q_1(P)} = \frac{p_1(P_0)}{q_1(P_0)}$ existiert • *existe*

$\leadsto f(P)$ in P_0 stetig fortsetzbar • *f(P) peut être défini de façon continue à P_0*

Falls also gebrochen rationale Funktionen in Zähler und Nenner eine Nullstelle in P_0 derselben Vielfachheit haben, so ist die Unstetigkeit dort hebbar. • *Si donc des fonctions rationnelles fractionnaires dans le numérateur et dans le dénominateur ont à P_0 un zéro de la même multiplicité, la discontinuité peut être supprimée par définition.*

Bsp.: • **Exemple:** $f(x, y) = \frac{x^2 y^2 - x y^3 + x y^2}{x^2 y^2 + 2x y^2} \notin \mathcal{C}((0, 0))$

$f(x, y) = \frac{x^2 y^2 - x y^3 + x y^2}{x^2 y^2 + 2x y^2} = \frac{x y^2 (x - y + 1)}{x y^2 (x + 2)} = \frac{x - y + 1}{x + 2}, \frac{x - y + 1}{x + 2} \in \mathcal{C}((0, 0)) \leadsto f(x, y)$ stetig in $(0, 0)$ fortsetzbar • *f(x, y) peut être défini de façon continue à $(0, 0)$.*

Stetigkeit in den Koordinaten — Continuité dans les coordonnées

Dass eine in P_0 stetige Funktion mit $D_f \in \mathbb{R}^n$ insbesondere stetig ist, wenn man auf den speziellen Wegen parallel zu den Koordinatenachsen gegen P_0 geht, ist unumstritten. Man mag sich aber fragen, ob auch umgekehrt eine in den einzelnen Koordinaten für sich stetige Funktion dann auch generell stetig ist. Dazu gilt der folgende Satz: • *Il est incontesté qu'une fonction continue à P_0 est spécialement continue avec $D_f \in \mathbb{R}^n$, quand on va vers P_0 sur des chemins spéciaux parallèles aux coordonnées. On peut donc se demander si, inversement, une fonction continue dans toutes les coordonnées (mais une à la fois) est aussi généralement continue. Voici le théorème en question:*

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$\bar{G} \subset D_f \subset \mathbb{R}^n$$

$P_0 = (x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0}) \in \bar{G}$ beliebig • *quelconque*

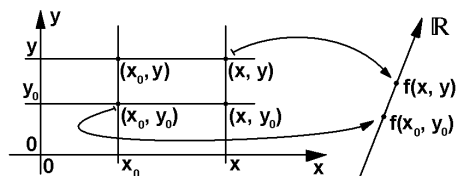
$$f_1(x_1) := f(x_1, x_{2_0}, \dots, x_{n_0}), \dots, f_n(x_n) := f(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_n)$$

Beh.: • **Thè.:**

$$f \in \mathcal{C}(P_0) \Leftrightarrow \forall_{k=1}^n : f_k(x_k) \in \mathcal{C}(x_{k_0})$$

Zum Beweis: • *Quant à la preuve:* $\Rightarrow$: nichts zu beweisen • *rien à prouver.*

⇐: Sei • *Soit* $n = 2$, $P_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$
 Seien • *Soient* $|x - x_0| < \delta_1$, $|y - y_0| < \delta_2$
 Da $\bar{G}$ betrachtet wird, sind x und y Variablen
 über abgeschlossenen Intervallen $\bar{I}_x, \bar{I}_y$.
 • *Comme on étudie $\bar{G}$, x et y sont des variables sur des intervalles fermés $\bar{I}_x, \bar{I}_y$.*



~> $f_1(x) := f(x, y_0)$, $f_2(x) := f(x_0, y)$ $\in \text{UNIFCONV}$

~> $|x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow \forall_{x_0 \in \bar{I}_x} |f(x, y) - f(x_0, y)| < \varepsilon_1(y)$,

~> $|y - y_0| < \delta_2 \Rightarrow \forall_{y_0 \in \bar{I}_y} |f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon_2(x)$

$\Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |f(x, y) - f(x, y_0) + f(x, y_0) - f(x_0, y_0)|$
 $\leq |f(x, y) - f(x, y_0)| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon_2(x) + \varepsilon_1(y) \rightarrow 0$ für • *pour* $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$

Entsprechend für mehr als zwei Variablen. • *Correspondant pour plus de deux variables.*

Konsequenz: • **Conséquence:** Um die Stetigkeit zu untersuchen, genügt es somit, die Stetigkeit nur in den einzelnen Koordinaten zu untersuchen. • *Pour étudier la continuité il ne suffit donc d'étudier la continuité que pour les coordonnées.*

Bsp.: • **Exemple:** $\sin(x \cdot y) \in \mathcal{C}$ denn • *car* $\sin(x_0 \cdot y) \in \mathcal{C} \wedge \sin(x \cdot y_0) \in \mathcal{C}$

7.3 Partielle Ableitungen — Dérivées partielles

7.3.1 Ableitungsarten — Manières de définir une dérivée

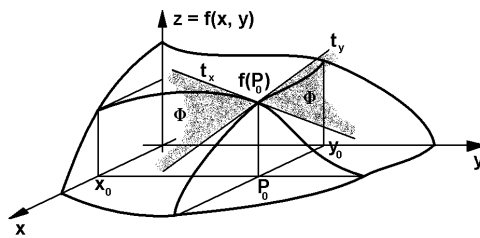
Problem: • **Problème:**

Wir betrachten die Funktion • *Nous étudions la fonction* $f(x, y) = x^3 - x \cdot y^2 + y$.

Sei • *Soit* $P_0 = (x_0, y_0) = (2, 4)$, $f_1(x) = f(x, y_0) = x^3 - x \cdot 16 + 4$, $f_2(y) = f(x_0, y) = 8 - 2 \cdot y^2 + y$

$f'_1(x) = 3x^2 - 16$ ist dann die Steigung auf der Funktionsfläche in x -Richtung mit $y = 4$
 • *est la pente de la surface de la fonction en direction de x avec $y = 4$.*

$f'_2(y) = -4x + 1$ ist entsprechend die Steigung auf der Funktionsfläche in y -Richtung mit $x = 2$ • *est la pente de la surface de la fonction en direction d' y avec $x = 2$.*



Dieses Beispiel zeigt die allgeieine Situation bei differenzierbaren Funktionen. • *Cet exemple nous montre la situation générale pour des fonctions dérivables.*

Sei • *Soit* $\gamma: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \sin(x) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow f_\gamma(x) = x^3 - x \cdot \sin^2(x) + \sin(x) \Rightarrow f'_\gamma(x) = 3x^2 - \sin^2(x) - x \cdot 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) + \cos(x)$

Das ist die z -Komponente der Ableitung des Vektors (~> Tangentenvektor!):

• *C'est la composante z de la dérivée du vecteur (~> vecteur tangentiel!):* $\begin{pmatrix} x \\ \sin(x) \\ f'_\gamma(x) \end{pmatrix}$

~> Kein einfacher Vektor mehr. • *Ce n'est plus un vecteur simple.*

Konsequenz: • **Conséquence:** Bei Funktionen mit mehreren Variablen können Ableitungen nach einer fixen Variablen auf verschiedene Arten gebildet werden. Die Bedeutung einer solchen Ableitung hängt von der Art ab, wie sie definiert worden ist. • *Quant aux fonctions à plusieurs variables les dérivées d'après une variable fixe peuvent être formées de manières différentes. La signification d'une telle dérivée dépend de la manière d'après laquelle elle a été formée.*

7.3.2 Partielle Ableitungen — Dérivées partielles

Geg.: • **Donné:** $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $P_0 = (x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0}) = (c_1, c_2, \dots, c_n)$

$\leadsto f_1(x_1) := f(x_1, x_{2_0}, \dots, x_{n_0}) = f(x_1, c_2, \dots, c_n), \dots$

$\dots, f_n(x_n) := f(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_n) = f(c_1, c_2, \dots, x_n)$ sind Funktionen mit nur einer Variablen

• *sont des fonctions à une seule variable.*

$\leadsto (f_k(x_k))'_{x_k} = \frac{d}{dx_k} f_k(x_k)$ ist die Steigung der Tangente an den Graphen von f_k als Funktion von x_k

• *est la pente de la tangente au graphe de f_k comme fonction de x_k .*

Ebenso ist es die Steigung der Tangente an die Funktionshyperfläche von f als Funktion von x_k , $x_i = c_i$ fix für $i \neq k$. • *De même c'est la pente de la tangente à la hypersurface de f comme fonction de x_k , $x_i = c_i$ fixe pour $i \neq k$.*

Definition: • **Définition:**

$$(f_k(x_k))'_{x_k} = \frac{d}{dx_k} f_k(x_k) := \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

heißt **partielle Ableitung** von f nach x_k • *s'appelle dérivée partielle de f d'après x_k .*

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ heißt **partiell differenzierbar** nach x_k (für $x_k = x_{k_0} \dots$) • *s'appelle partiellement dérivable d'après x_k*

(pour $x_k = x_{k_0} \dots$) $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_k}$ existiert • *existe*

Bemerkung: • **Remarque:**

Man spricht hier auch von der 1. partiellen Ableitung.

• *On dit aussi 1-ère dérivée partielle.*

1. Beispiel: • **Exemple 1:** $f(x, y) = \sin(x \cdot y) + x^3 - x e^y - y$

$$(f(x, y_0))'_x = \frac{d}{dx} f(x, y_0) := \frac{\partial f(x, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial (\sin(x \cdot y_0) + x^3 - x e^{y_0} - y_0)}{\partial x} = \cos(x \cdot y_0) \cdot y_0 + 3x^2 - 1 e^{y_0} - 0$$

$$(f(x_0, y))'_y = \frac{d}{dy} f(x_0, y) := \frac{\partial f(x_0, y)}{\partial y} = \frac{\partial (\sin(x_0 \cdot y) + x_0^3 - x_0 e^y - y)}{\partial y} = \cos(x_0 \cdot y) \cdot x_0 + 0 - x_0 e^y - 1$$

2. Beispiel: • **Exemple 2:** $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 5xy + 3y + 4$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 5y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 5x + 3, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z$$

7.3.3 Höhere partielle Ableitungen — Dérivées partielles supérieures

Sei • *Soit* $\frac{\partial}{\partial f} x_k := g(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$ wieder eine nach x_k differenzierbare Funktion • *de nouveau*

une fonction dérivable d'après $x_k \leadsto \frac{\partial}{\partial g} x_i$ ist bildbar • peut être formée.

Definition: • Définition: $\frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} f \right) = (f'_{x_k})'_{x_i} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} := f''_{x_k x_i} := D^2_{x_k x_i} f$

heisst **partielle Ableitung 2-ter Ordnung** von f nach x_k und x_i • s'appelle **dérivée partielle d'ordre 2** de f d'après x_k et x_i .

Entsprechend bildet man partielle Ableitungen n -ter Ordnung.

• Correspondamment on forme les dérivées partielles d'ordre n .

Speziell: • Spécialement: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_k} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$ u.s.w • etc.

Bsp.: • Exemple: $f(x, y) = \sin(x^2 y)$

$$f'_x(x, y) = \cos(x^2 y) \cdot 2xy, \quad f'_y(x, y) = \cos(x^2 y)$$

$$f''_{xx}(x, y) = -\sin(x^2 y) \cdot 4x^2 y^2 + \cos(x^2 y) \cdot 2y$$

$$f''_{xy}(x, y) = -\sin(x^2 y) \cdot 2x^3 y + \cos(x^2 y) \cdot 2x$$

$$f''_{yx}(x, y) = -\sin(x^2 y) \cdot 2x^3 y + \cos(x^2 y) \cdot 2x$$

$$f''_{yy}(x, y) = -\sin(x^2 y) \cdot x^4 y + \cos(x^2 y) \cdot 0 = -\sin(x^2 y) \cdot x^4 y$$

7.3.4 Eigenschaften partieller Ableitungen — Qualités de dérivées partielles

Die folgenden Sätze formulieren wir für Funktionen mit zwei Variablen. Sie gelten entsprechend auch für Funktionen mit mehreren Variablen. • Nous formulons les théorèmes suivants pour des fonctions à deux variables. Ils valent correspondamment aussi pour des fonctions à plusieurs variables.

Satz: • Théorème: **Vor.: • Hyp.:**

$$D_f = G \subset \mathbb{R}^2, \quad f'_x, f'_y \in \text{beschr'borné}(G)$$

Beh.: • Thè.: $f(x, y) \in \mathcal{C}(G)$

Zum Beweis: • Quant à la preuve:

Sei • Soit $P_0 = (x_0, y_0) \in \bar{G}_k \subset G \Rightarrow f(x, y_0) \in \mathcal{C}(x_0), f(x_0, y) \in \mathcal{C}(y_0)$. Differenzierbare Funktionen mit einer Variablen sind stetig. • Les fonctions dérivables à une variable sont continues.

$$\Rightarrow \forall_{(x_0, y_0) \in \bar{G}_k} f(x, y) \in \mathcal{C}(x_0, y_0)$$

(Stetigkeit in den Koordinaten bedeutet Stetigkeit gemeinhin • Continuité dans les coordonnées signifie continuité en général.)

$$\leadsto \forall_{\bar{G}_k \in G} f \in \mathcal{C}(\bar{G}_k) \Rightarrow f \in \mathcal{C}(G)$$

Satz: • Théorème: **Vor.: • Hyp.:**

$$\bar{G} \subseteq D_f \subset \mathbb{R}^2, \quad f'_x, f'_y \text{ existieren in } \bullet \text{ existent dans } \bar{G}$$

Beh.: • Thè.: $f(x, y) \in \text{beschr'borné}(\bar{G})$

Zum Beweis: • Quant à la preuve:

Konsequenz aus dem entsprechenden Satz über Funktionen mit nur einer Variablen.

- *Conséquence du théorème correspondant pour les fonctions à une seule variable.*

Satz: • **Théorème:** **Vertauschbarkeitssatz der partiellen Ableitungen**
 • **Théorème de l'échange des dérivées partielles**

Vor.: • **Hyp.:**

$$f \in \mathcal{C}(\bar{G}), \quad f''_{xy}, f''_{yx} \in \mathcal{C}(G)$$

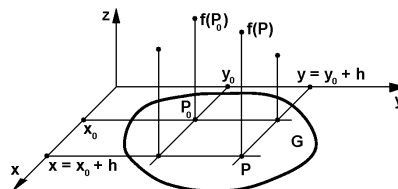
Beh.: • **Thè.:**

$$f''_{xy} = f''_{yx}$$

Zum Beweis: • *Quant à la preuve:*

Sei • *Soit*

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= f(x, y) - f(x, y_0) \\ &= f(x, y_0 + k) - f(x, y_0) \\ \psi(y) &= f(x, y) - f(x_0, y) \\ &= f(x_0 + h, y) - f(x_0, y) \end{aligned}$$



Sei • *Soit* $A := f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$

▷ (1) $A = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x) =_{|(*)} h \cdot \varphi'(x_0 + \lambda_1 h), \quad \lambda_1 \in [0, 1] \wedge \varphi'(x) = f'(x, y_0 + k) - f'(x, y_0)$
 (*) $\leadsto$ Mittelwertsatz • *Théorème des accroissements finis*

$$\begin{aligned} \Rightarrow A &= h \cdot (f'_x(x_0 + \lambda h, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \lambda h, y_0)) \\ &=_{|(*)} k \cdot (h \cdot f''_{xy}(x_0 + \lambda_1 h, y_0 + \mu_1 k)), \quad \mu_1 \in [0, 1], \quad h \neq 0 \end{aligned}$$

▷ (2) $A = \psi(y_0 + k) - \psi(y_0) =_{|(*)} k \cdot \psi'(y_0 + \mu_2 k), \quad \mu_2 \in [0, 1], \quad \psi'(y) = f'_y(x_0 + h, y) - f'_y(x_0, y)$
 $\Rightarrow A = k \cdot (f'_y(x_0 + h, y_0 + \mu_2 k) - f'_y(x_0, y_0 + \mu_2 k))$
 $=_{|(*)} k \cdot (h \cdot f''_{yx}(x_0 + \lambda_2 h, y_0 + \mu_2 k)), \quad \lambda_2 \in [0, 1], \quad k \neq 0$

▷ (3) $\Rightarrow A =_{|(*)} h \cdot k \cdot f''_{xy}(x_0 + \lambda_1 h, y_0 + \mu_1 k) =_{|(*)} k \cdot h \cdot f''_{yx}(x_0 + \lambda_2 h, y_0 + \mu_2 k), \quad h, k \neq 0$
 $\Rightarrow f''_{xy}(x_0 + \lambda_1 h, y_0 + \mu_1 k) = f''_{yx}(x_0 + \lambda_2 h, y_0 + \mu_2 k), \quad \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in [0, 1]$

Nach Voraussetzung sind: • *D'après l'hypothèse il vaut:* $f''_{xy}, f''_{yx} \in \mathcal{C}$

Für • *Pour* $h, k \rightarrow 0$ folgt daher: • *on déduit donc:* $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$



Falls die gemachten Stetigkeitsvoraussetzungen zutreffen, so folgt jetzt: • *Si les hypothèses concernant la continuité sont exactes, on déduit maintenant:*

Ableitungen 0-ter Ordnung: • *Dérivées d'ordre 0:* $\leadsto f(x, y)$ $\leadsto 1$
 Ableitungen 1-ter Ordnung: • *Dérivées d'ordre 1:* $\leadsto f'_x, f'_y$ $\leadsto 2$
 Ableitungen 2-ter Ordnung: • *Dérivées d'ordre 2:* $\leadsto f''_{xx}, f''_{xy} = f''_{yx}, f''_{yy}$ $\leadsto 3$
 Ableitungen 3-ter Ordnung: • *Dérivées d'ordre 3:*
 $\leadsto f'''_{xxx}, f'''_{xxy} = f'''_{xyx} = f'''_{yxx}, f'''_{xyy} = f'''_{yyx} = f'''_{yyy}, f'''_{yyx}$ $\leadsto 4$

⋮

Ableitungen n -ter Ordnung: • *Dérivées d'ordre n : $\leadsto \dots$*

$\leadsto n+1$

Konsequenz: • **Conséquence:** $f(x, y)$ hat unter den Voraussetzungen des Vertauschungssatzes $n+1$ Ableitungen n -ter Ordnung. • *Etant donnée l'hypothèse du théorème d'échange, $f(x, y)$ possède $n+1$ dérivées d'ordre n .*

7.4 Differential — Différentielle

7.4.1 Situation bei Funktionen mit nur einer Variablen — Situation pour les fonctions à une seule variable

Ein grosser Teil der komplexen Situation im Zusammenhang mit dem Begriff des Differentials lässt sich schon bei Funktionen mit nur einer Variablen verstehen. Daher studieren wir zuerst diese Situation. • *On peut comprendre une grande partie de la situation complexe en rapport à la notion de la différentielle déjà pour les fonctions à une seule variable. C'est pourquoi nous étudions d'abord cette situation-ci.*

Sei gegeben: • *Soit donné:*

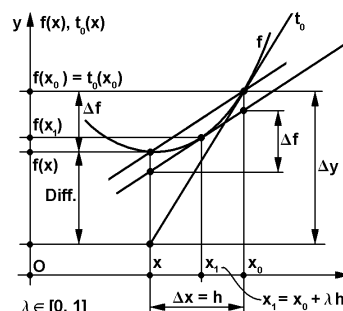
$x_0 \in I \subseteq \mathbb{R}, f: I \rightarrow \mathbb{R}, U_\delta(x_0) \subseteq I$

Sei • *Soit f' existiert in I • existe dans I , $f' \in \mathcal{C} \Rightarrow$ die Tangentenrichtung ändert sich stetig • la direction de la tangente change continûment.*

Tangente in x_0 : • *Tangente à x_0 :*

$$t_0(x) = t_0(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0) \\ = f(x_0) + \Delta x \cdot f'(x_0)$$

$$\Rightarrow \Delta y := t_0(x) - t_0(x_0) = \Delta x \cdot f'(x_0)$$



$\leadsto f(x)$ lässt sich in $U_\delta(x_0)$ durch $t_0(x)$ annähern.

• *On peut approximer $f(x)$ dans $U_\delta(x_0)$ par $t_0(x)$.*

Die Differenz resp. der Fehler ist • *La différence resp. l'erreur est:*

$$D = D(\Delta x) := \Delta f - \Delta y = f(x) - t_0(x) = f(x) - (f(x_0) + \Delta x \cdot f'(x_0)) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - \Delta x \cdot f'(x_0)$$

Wegen der Stetigkeit von f gilt: • *A cause de la continuité de f il vaut:*

$$\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow D(\Delta x) \rightarrow 0$$

D anders geschrieben: • *D écrit différemment:* $D = \underbrace{(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0))}_{\Delta f} - \underbrace{\Delta x \cdot f'(x_0)}_{\Delta y}$

Mittelwertsatz: • *Théorème des accroissements finis:*

$$\Rightarrow f(x) - t_0(x) = D = \Delta f - \Delta y = \Delta x \cdot f'(x_0 + \lambda \Delta x) - \Delta x \cdot f'(x_0) = \Delta x \cdot (f'(x_0 + \lambda \Delta x) - f'(x_0)) = \Delta x \cdot \Delta f'$$

Man sieht unmittelbar: • *On voit immédiatement:* $\Delta y = \Delta x \cdot f'(x_0)$ ist der lineare Anteil des Fehlers D • *est la partie linéaire de l'erreur D .*

Denn: • *Car:* $\Delta f = \Delta x \cdot f'(x_0 + \lambda \Delta x)$ ist allgemein nicht linear in Δx • *n'est généralement pas linéaire dans Δx .*

Falls f'' in I existiert, gilt nach dem Mittelwertsatz: • *Si f'' existe dans I , il vaut d'après le théorème des accroissements finis:*

$$f(x) - t_0(x) = \Delta x \cdot \Delta f' = \Delta x \cdot (f'(x_0 + \lambda \Delta x) - f'(x_0)) = \Delta x \cdot (\lambda \Delta x) \cdot f''(x_0 + \mu \cdot (\lambda \Delta x))$$

$$= (\Delta x)^2 \cdot \lambda \cdot f''(x_0 + \mu \cdot (\lambda \Delta x)), \quad \lambda, \mu \in [0, 1]$$

Sei • *Soit*

$$|\lambda \cdot f''(x_0 + \mu \cdot (\lambda \Delta x))| = |\lambda \cdot f''(x)| := |\varphi(x)| < M, \quad x \in U_\delta(x_0) \\ \Rightarrow |D| = (\Delta x)^2 \cdot |\lambda \cdot f''(x_0 + \mu \cdot (\lambda \Delta x))| = (\Delta x)^2 \cdot \varphi(x) < (\Delta x)^2 \cdot M, \quad x \in U_\delta(x_0)$$

Wenn • *Si* $f''(x)$ existiert in • *existe dans* $(\bar{U}_\delta(x_0))$

so existiert ein • *il existe un* M mit • *avec* $|f''(x)| < M$

(Differenzierbar bedeutet stetig. Stetig auf einem abgeschlossenen Gebiet bedeutet beschränkt.)

• *Dérivable signifie continu. Continu sur une région fermée signifie borné.*

Konsequenz: • **Conséquence:**

⊙ Bei der Annäherung von f durch die Tangente ist der Fehler: • *Quant à l'approximation de f par la tangente l'erreur D est:*

$$D = f(x) - t_0(x) = \Delta x \cdot \Delta f'$$

⊙ $\Delta y = \Delta x \cdot f'(x_0)$ ist der lineare Anteil des Fehlers D • *est la partie linéaire de l'erreur D*

⊙ Falls f'' in $\bar{U}_\delta$ existiert und stetig ist, gilt: • *Si f'' existe dans $\bar{U}_\delta$ et est continue, il vaut:*
 $\exists_{M \in \mathbb{R}^+} |D| = (\Delta x)^2 \cdot |\varphi(x)| < (\Delta x)^2 \cdot M, \quad x \in U_\delta(x_0)$

Wichtig: • **Important:**

Der Fehler $|D|$ geht mit $(\Delta x)^2$ gegen 0. • *L'erreur $|D|$ va vers 0 avec $(\Delta x)^2$.*

⊙ Wenn • *Si* f'' beschränkt in • *borné dans* $U_\delta((x_0))$:

$$\Delta y = \underbrace{\Delta x \cdot f'(x_0)}_{\text{lin. in } \bullet \text{ lin. dans } \Delta x} = \Delta f - \underbrace{D}_{\text{quadr. in } \bullet \text{ quadr. dans } \Delta x}$$

Der lineare Anteil von Δf ist daher durch denjenigen von Δy gegeben. • *La partie linéaire de Δf est donc donnée par celle de Δy .*

$$\odot \Delta f = f(x) - f(x_0) = \Delta y + D = \Delta x \cdot f'(x_0) + \Delta x^2 \varphi(x) \Rightarrow f(x) = f(x_0) + \underbrace{\Delta x \cdot f'(x_0)}_{\Delta y} + \underbrace{(\Delta x)^2 \cdot \varphi(x)}_D$$

$\varphi(x)$ beschränkt, falls $f(x)$ beschränkt • $\varphi(x)$ borné, si $f(x)$ borné.

Δy ist der lineare und somit für kleine Δx der wesentliche Teil des Zuwachses von $f(x)$. • *Δy est la partie linéaire de l'accroissement de $f(x)$ et donc pour des Δx petits la partie principale.*

Daher benennen wir Δy speziell: • *C'est pourquoi nous appelons Δy comme il suit:*

Begriff: • **Notion:**

$\Delta y = \Delta x \cdot f'(x_0)$ heisst **Differential** von f in $x = x_0$ (Genauer: „Endlich kleines“ Differential, im Gegensatz zum infinitesimalen Differential.)

• $\Delta y = \Delta x \cdot f'(x_0)$ s'appelle **différentielle** de f dans $x = x_0$. (Plus exactement: "Différentielle finiment petite", contrairement à la différentielle infinitésimale.)

Klassisch, d.h. im Sinne der modernen Standard-Analyse, sind infinitesimale Ausdrücke nur als Symbole verstehbar. Im Umfeld der Nicht-Standard-Analyse jedoch sind solche Ausdrücke sinnvolle Größen. In

diesem Sinne können wir daher definieren: • *Classiquement, ç.v.d. dans le sens de l'analyse standard moderne, on ne peut comprendre les expressions infinitésimales que comme des symboles. Par contre dans l'environnement de l'analyse non-standard, ces expressions sont des entités raisonnables. Dans ce sens, nous pouvons donc définir:*

Definition: • **Définition:** $dy = dx \cdot f'(x_0)$ heisst **Differential** von f in $x = x_0$ • *s'appelle différentielle de f dans $x = x_0$.*

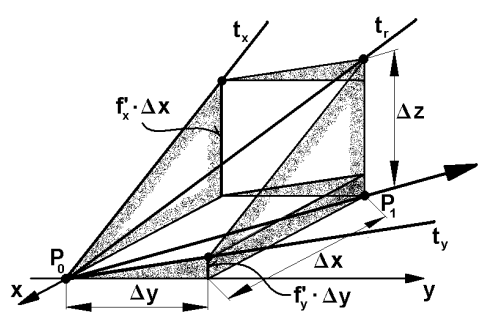
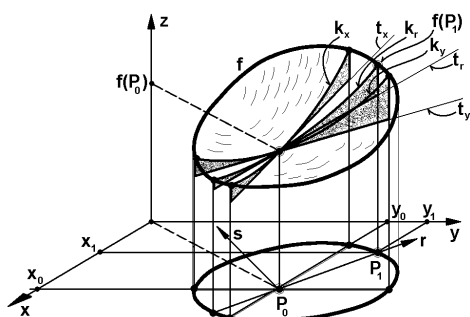
Bemerkung: • **Remarque:** Sei • *Soit f analytisch • analytique*

$\leadsto$ In $U_\delta(x_0)$ ist f in eine Potenzreihe entwickelbar: • *On peut développer f en une série de puissances dans $U_\delta(x_0)$:*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 + \dots \\ &= f(x_0) + \underbrace{\frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0)}_{\Delta y = \Delta x \cdot f'(x_0)} + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 + \dots}_{(x-x_0)^2 \cdot (\frac{f''(x_0)}{2!} + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x-x_0) + \dots) = (\Delta x)^2 \cdot \varphi(x)} \\ &= f(x_0) + \Delta x \cdot f'(x_0) + \Delta x^2 \cdot \varphi(x) \end{aligned}$$

7.4.2 Situation bei Funktionen mit zwei und mehr Variablen — Situation pour les fonctions à deux et plus variables

Richtungsableitung, Differenzierbarkeit — Dérivée suivant une direction, dérivabilité



- ▷ Betrachte: • *Etudier:* $f(x, y)$ in • *dans* $P_0 = (x_0, y_0)$, $D_f \in \mathbb{R}^2$, $P_0 \in D_f$
- ▷ Sei • *Soit* $f \in \mathcal{D}(U_\delta(x_0, y_0)) \leadsto f'_x, f'_y \in \mathcal{C}(U_\delta(x_0, y_0))$ (stetig) • (continue)
- ▷ Seien • *Soient* t_x, t_y Tangenten an die Funktionsfläche in (x_0, y_0) • *Tangentes à la surface de fonction à (x_0, y_0)*
 $t_x \leadsto$ Steigung • *pente* $= f'_x(x_0, y_0)$, $t_y \leadsto$ Steigung • *pente* $= f'_y(x_0, y_0)$
 Steigung von t_r : • *Pente de t_r :* $\Delta t_r = \Delta x \cdot f'_x + \Delta y \cdot f'_y$ (vgl. Skizze) • (voir esquisse),
 $\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \Rightarrow$ Steigung • *pente* $\approx \frac{\Delta t}{\Delta r}$
- ▷ Sei • *Soit* $P_1 = (x_1, y_1) \in U_\delta(x_0, y_0) \in D_f$
- ▷ Sei • *Soit* t_r = Tangente in P_0 an die Funktionsfläche mit der Projektion $\overline{P_0 P_1}$ in der Grundebene xy • *Tangente à P_0 à la surface de fonction avec projection $\overline{P_0 P_1}$ dans le plan principal xy .*

Durch $P_0, f(P_0), t_x, t_y$ ist im $\mathbb{R}^3$ eine Ebene Φ durch $P_0^* = (x_0, y_0, f(P_0))$ bestimmt.

- Par $P_0, f(P_0), t_x, t_y$ un plan Φ est défini dans le $\mathbb{R}^3$ par $P_0^* = (x_0, y_0, f(P_0))$.

Wenn nun Φ eine Tangentialebene im geometrischen Sinne an die Funktionsfläche ist, existiert in P_0^* in jeder xy -Richtung die Tangente an die Funktionsfläche. Dass das nicht unbedingt bei allen Funktionen immer so schön sein muss, zeigen einfache Beispiele. (Man braucht nur die Funktionsfläche von $f(x, y) = x^2 + y^2$ entlang der Geraden $y = x$ einzuknicken, so dass sie für $t > 0$ die Gerade $(x(t), y(t), z(t))^T = (t, t, t)^T$ berührt, für $t < 0$ aber die Gerade $(x(t), y(t), z(t))^T = -(t, t, t)^T$, so hat man schon einen derart üblen Fall, wenn wir die Fläche noch entlang der Koordinatenachsen beibehalten.)

• *Maintenant, quand Φ est un plan tangentiel à la surface de la fonction dans la signification géométrique, il existe à P_0^* la tangente à la surface de la fonction dans toutes les directions xy . Que cela n'est pas toujours aussi élégant que pour la fonction qu'on vient de voir, on peut vérifier par de simples exemples. (Il suffit de plier un peu la surface de la fonction de $f(x, y) = x^2 + y^2$ le long de la droite $y = x$ pour qu'elle touche la droite $(x(t), y(t), z(t))^T = (t, t, t)^T$ pour $t > 0$, mais par contre pour $t < 0$ la droite $(x(t), y(t), z(t))^T = -(t, t, t)^T$, voici donc déjà un cas terrible, si nous conservons la surface comme elle était le long des axes des coordonnées.)*

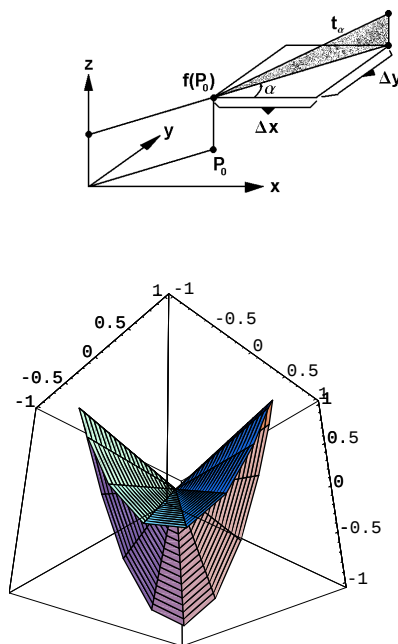
Bsp.: • Exemple:

Man betrachte die durch die folgende Parameterdarstellung gegebene Fläche:

- *Etudions la surface qui est donnée par la représentation paramétrique suivante:*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ r \sin(2\varphi) \end{pmatrix},$$

$$r \in [0, 1], \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad P_0 = (0, 0, 0)$$



Es sei dem Leser überlassen, diese Funktion in der Form $z = f(x, y)$ zu schreiben. • *C'est un exercice pour le lecteur d'écrire cette fonction dans la forme $z = f(x, y)$. ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctan(\frac{y}{x})$...)*

Die Darstellung zeigt, dass die Tangenten in P_0 alle Mantellinien sind, mit φ die Richtung stetig ändern, jedoch keinesfalls in einer Ebene liegen. Ebenso sieht man anschaulich geometrisch, dass hier f'_x und f'_y in $U_\delta(0, 0)$ nicht stetig sein können. • *La représentation montre que les tangentes à P_0 sont toutes des droites sur la périphérie, qui changent la direction continûment avec φ mais ne sont pas situées dans un plan. En plus on voit clairement de façon géométrique qu'ici f'_x et f'_y ne peuvent pas être continues dans $U_\delta(0, 0)$.*

Wir nehmen an, dass in P_0 die Tangente in allen Richtungen existiert.

- Soit donné la situation que à P_0 la tangente existe dans toutes les directions.

$$\rightsquigarrow f_1(r, \alpha) := f(r \cos(\alpha), r \sin(\alpha)) \rightsquigarrow \frac{\partial f_1}{\partial r} \text{ bestimmt} \quad \bullet \text{ définie.}$$

Wir definieren: • *Nous définissons:*

Definition: • **Définition:** Die Steigung der Tangente in P_0 in irgend eine Richtung $\vec{r}$ der xy -Ebene nennen wir Ableitung in Richtung $\vec{r}$ oder **Richtungsableitung**. • *La pente de la tangente à P_0 vers une direction quelconque $\vec{r}$ du plan xy s'appelle dérivée en direction $\vec{r}$ ou dérivée suivant une direction.*

Formel: • **Formule:**

$$D_{\vec{e}_r}(f) = D^\alpha(f) := \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta r \cos(\alpha), y + \Delta r \sin(\alpha)) - f(x, y)}{\Delta r}, \quad \vec{r} = r \cdot \vec{e}_r = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

Definition: • **Définition:** f heisst **differenzierbar** in P_0 , wenn in P_0 die Richtungsableitungen zu allen Richtungen existieren.
• *f s'appelle **dérivable** à P_0 , si à P_0 toutes les dérivées suivant une direction (pour toutes les directions) existent.*

Um die Richtungsableitung nicht auf schwierige Weise mit obigem Limes berechnen zu müssen, suchen wir nun einen anderen Weg.

• *Pour éviter de devoir calculer la pente de la tangente vers la direction donnée de cette façon difficile à l'aide de la définition susdite, nous cherchons maintenant une autre méthode.*

↪ Siehe Seite 263 • *Voir page 263*

Berechnung der Richtungsableitung — Calculer la dérivée suivant une direction

Die Berechnung der Tangentensteigung ist ein Problem, das sich auf Funktionen mit nur einer Variablen zurückführen lässt, wie die folgende Betrachtung zeigt: • *Calculer la montée de la tangente est un problème qu'on peut réduire aux fonctions à une variable, comme montre la déduction suivante:*

Trick: • **Truc:** Verwende ein neues Koordinatensystem, das durch Verschiebung und Drehung entsteht. • *Utilise un système de coordonnées nouveau qu'on obtient par translation et révolution:*

Neuer Ursprung P_0 . • *Nouvelle origine P_0*

r -Achse in Richtung $\overrightarrow{P_0 P_1}$. • *Axe r en direction $\overrightarrow{P_0 P_1}$.*

s -Achse entstanden aus der r -Achse durch positive Drehung um P_0 , senkrecht auf der r -Achse.

• *Axe s obtenu de l'axe r par rotation en direction positive autour de P_0 , perpendiculaire sur l'axe r .*

Dadurch geht $f(x, y)$ über in eine neue Funktion $\Psi(r, s)$: • *Ainsi $f(x, y)$ est transformée en une nouvelle fonction $\Psi(r, s)$:*

↪ Es gilt: • *Il vaut:*

$$f(x_0, y_0) = f(P_0) = \Psi(0, 0), \quad f(x_1, y_1) = f(P_1) = \Psi(r_1, 0),$$

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = D_\alpha \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

$$\leadsto \Psi(r_1, 0) =: \Psi^*\left(\begin{pmatrix} r_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \Psi^*\left(D_\alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix}\right) = f^*\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) = f^*\left(D_\alpha^{-1} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right)$$

Damit sind alle Substitutionen als lineare Transformationen erkannt, durch die sich $f(x_1, y_1)$ und $\Psi(r_1, 0) := h(r_1)$ ineinander umrechnen lassen. • *Ainsi toutes les transformations, par lesquelles on peut substituer $f(x_1, y_1)$ et $\Psi(r_1, 0) := h(r_1)$, sont reconnues comme transformations linéaires.*

Tangentialebenen — Plans tangents

Oben (beim Differential) haben wir vorausgesetzt, dass $f'_x(x, y) = f'_x(P)$, $f'_y(x, y) = f'_y(P)$ in ganz $U_\delta(x_0, y_0)$ stetig sein sollen. ($\leadsto$ Steigungen der Tangenten t_x, t_y an die Funktionsfläche in (x_0, y_0) .) $\leadsto f'_x(P)$, $f'_y(P)$ stetig in $U_\delta(P_0)$.

• *Précédemment nous sommes partis de l'hypothèse (voir différentielle) que $f'_x(x, y) = f'_x(P)$, $f'_y(x, y) = f'_y(P)$ en tout $U_\delta((x_0, y_0))$ soient continues. ($\leadsto$ Pentes des tangentes t_x, t_y à la surface de fonction à (x_0, y_0) .)*

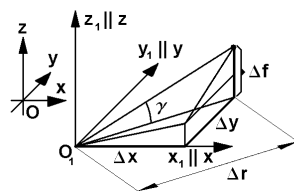
$\leadsto f'_x(P)$, $f'_y(P)$ continues dans $U_\delta(P_0)$.

Würden nun die Tangenten in P_0 keine Tangentialebene bilden, so gäbe es eine Tangente, die nicht in der von t_x, t_y aufgespannten Ebene liegt und diese in einem Winkel γ schneidet. Daher müssten $f'_x(x, y)$ oder $f'_y(x, y)$ irgendwo in einem Punkt $P_i = (x_i, y_i)$ beliebig nahe bei $P_0 = (x_0, y_0)$ den Wert mit x oder y markant ändern, was im Widerspruch zur Stetigkeit von f'_x und f'_y steht. (Um dies anschaulich einzusehen, genügt es, $f(x_i, y)$ und $f(x, y_i)$ zu skizzieren.)

• *Si les tangentes à P_0 ne formaient pas un plan tangentiel, il existerait une tangente qui ne serait pas située dans le plan donné par t_x, t_y . Cette tangente passerait par ce plan en formant un angle γ . $f'_x(x, y)$ ou $f'_y(x, y)$ devraient donc dans un certain point $P_i = (x_i, y_i)$ à une distance quelconque (petite) de $P_0 = (x_0, y_0)$, changer la valeur avec x ou y de façon considérable, par contradiction à la continuité de f'_x et f'_y . (Pour voir ceci de façon claire il suffit de faire une esquisse de $f(x_i, y)$ et $f(x, y_i)$.)*

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x \cdot f'_x(x_i, y_i) + \Delta y \cdot f'_y(x_i, y_i)}{\Delta r} &= \\ \frac{\Delta r \cdot f'_r(x_i, y_i)}{\Delta r} &= \tan(\gamma) \not\approx \\ \frac{\Delta x f'_x(x_0, y_0) + \Delta y f'_y(x_0, y_0)}{\Delta r} & \\ \approx \cos(\alpha) f'_x(x_0, y_0) + \sin(\alpha) f'_y(x_0, y_0) & \end{aligned}$$

Widerspruch! • *Contradiction!*



Konsequenz: • **Conséquence:** Die Stetigkeit von f'_x und f'_y in ganz $U_\delta(x_0, y_0)$ bedeutet, dass in P_0 eine Tangentialebene im anschaulich-geometrischen Sinne existiert, in der alle Tangenten in P_0 liegen. Daher existieren alle Richtungsableitungen in P_0 . f ist somit in P_0 differenzierbar. • *La continuité de f'_x et f'_y dans tout $U_\delta(x_0, y_0)$ signifie, qu'il existe à P_0 un plan tangentiel dans le sens géométrique et clair, dans lequel sont situées toutes les tangentes par P_0 . Toutes les dérivées suivant une direction existent donc à P_0 . f est donc dérivable à P_0 .*

Lemma: • **Lemme:** **Vor.:** • **Hyp.:** $f'_x, f'_y \in \mathcal{C}(U_\delta(P_0))$

Beh.: • **Thè.:** $f \in \mathcal{D}(P_0)$

Daher gilt nun (vgl. Differential von Funktionen mit einer Variablen): • *Maintenant il vaut donc (voir différentielle de fonctions à une variable):*

$$\Delta f = f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = \Psi(r_1, 0) - \Psi(0, 0) = \Delta \Psi = \Delta r \cdot \Psi'_r(0, 0) + (\Delta r)^2 \cdot R(r), \quad |R(r)| < M$$

in • *dans $U_\delta((P_0))$*

Aus der Skizze der Tangentialebenen auf Seite 258 lesen wir ab: • *L'esquisse du plan tangentiel de page 258 nous montre:*

$$\Delta z := \Delta r \cdot \Psi'_r(0, 0) = \Delta x \cdot f'_x(x_0, y_0) + \Delta y \cdot f'_y(x_0, y_0) = \left\langle \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f'_x(x_0, y_0) \\ f'_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \right\rangle =: \langle \Delta \vec{x}, \text{grad} f \rangle$$

Gradient und totales Differential — Gradient et différentielle totale

$\begin{pmatrix} f'_x(x_0, y_0) \\ f'_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ hängt nur von x_0, y_0 und nicht von $\Delta x, \Delta y$ ab • *ne dépend que de x_0, y_0 et non de $\Delta x, \Delta y$.*

Daher benennen wir diesen Vektor: • *C'est pourquoi nous donnons à ce vecteur un nom:*

Definition: • **Définition:** $\begin{pmatrix} f'_x(x_0, y_0) \\ f'_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} := \text{grad}(f)|_{x=x_0, y=y_0}$ heisst **Gradient** von f in (x_0, y_0) • *s'appelle gradient de f à (x_0, y_0)*

Allgemeiner: • *Plus généralement:*

Definition: • **Définition:** $\begin{pmatrix} f'_{x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f'_{x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} := \text{grad}(f)$ heisst **Gradient** von f • *s'appelle gradient de f*

Bekannt: • *On sait:* $(\Delta r)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$

Wir setzen: • *Nous définissons:* $R(r) = R(r(x, y)) := \varphi(x, y)$ ($|R(r)| = |\varphi(x, y)| < M$ in • *dans $U_\delta((P_0))$*)

$\leadsto \Delta f = f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = \langle \Delta \vec{x}, \text{grad} f \rangle|_{\vec{x}=\vec{x}_0} + ((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2) \cdot \varphi(x, y)$ ($|\varphi(x, y)| < M$ in • *dans $U_\delta((P_0))$*)

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$\begin{aligned} f'_x, f'_y &\in \mathcal{C}(U_\delta(P_0)) \\ (x, y) &\in U_\delta(P_0) \end{aligned}$$

Beh.: • **Thè.:**

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \langle \Delta \vec{x}, \text{grad} f \rangle|_{\vec{x}=\vec{x}_0} + \\ &+ ((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2) \cdot \varphi(x, y) \quad (|\varphi(x, y)| < M \text{ in } \bullet \text{ dans } U_\delta((P_0))) \end{aligned}$$

Vergleich mit der Tangente: • *Comparer avec la tangente:*

$$t_r(x, y) = f(x_0, y_0) + \langle \Delta \vec{x}, \text{grad} f \rangle|_{\vec{x}=\vec{x}_0}, \quad \Delta \vec{x} = \vec{x} - \vec{x}_0$$

Konsequenz: • **Conséquence:**

- $\langle \Delta \vec{x}, \text{grad} f \rangle|_{\vec{x}=\vec{x}_0}$ ist der lineare Anteil des Zuwachses $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ in $U_\delta(P_0)$ • $\langle \Delta \vec{x}, \text{grad} f \rangle|_{\vec{x}=\vec{x}_0}$ est la partie linéaire de l'accroissement $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ dans $U_\delta(P_0)$
- Die Tangentialebene ist somit durch die folgende Formel gegeben: • *Le plan tangentiel est donc donné par la formule suivante:* $t(x, y) = f(x_0, y_0) + \langle \Delta \vec{x}, \text{grad} f \rangle|_{\vec{x}=\vec{x}_0}$
 $= f(x_0, y_0) + (x - x_0) f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0) f'_y(x_0, y_0)$

3. Im Falle • *Dans le cas* $\Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0) = \langle \Delta \vec{x}, \text{grad} f \rangle|_{\vec{x}=\vec{x}_0} + (\Delta \vec{x})^2 \cdot \varphi(x, y)$
 $:= \Delta z + |\Delta \vec{x}|^2 \cdot \varphi(x, y), |\varphi(x, y)| < M$ in • *dans* $U_\delta((P_0))$
 existiert die Richtungsableitung in alle Richtungen: f ist differenzierbar in $U_\delta((P_0))$
 • *la dérivée de direction existe dans toutes les directions: f est dérivable dans $U_\delta((P_0))$.*
4. Der Fehler bei der Annäherung von f durch die Tangentialebene ist • *L'erreur quant à l'approximation de f par le plan tangentiel est*
 $f(x, y) - t_r(x, y) = ((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2) \cdot \varphi(x, y), |\varphi(x, y)| < M$ in • *dans* $U_\delta((P_0))$

Analog zu den Funktionen mit nur einer Variablen nennen wir den linearen Zuwachs $\langle \Delta \vec{x}, \text{grad} f \rangle$ auch bei n Variablen „endlich kleines totales Differential“, total, weil für alle Richtungen gültig. Damit definieren wir: • *Analogiquement aux fonctions avec une seule variable, nous appelons l'accroissement linéaire $\langle \Delta \vec{x}, \text{grad} f \rangle$ "différentielle totale finiment petite", de même si l'on a n variables, et totale, parce qu'elle vaut pour toutes les directions. Nous définissons donc:*

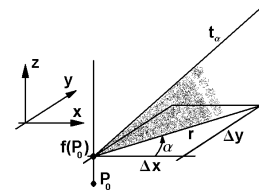
Definition: • **Définition:** $df = \langle d\vec{x}, \text{grad} f \rangle$ heisst **totales Differential** • *s'appelle différentielle totale.*

Formel für die Richtungsableitung — formule pour la dérivée suivant une direction

Schreibweise: • **Façon d'écrire:**

Sei • *Soit* $D^\alpha f(x, y)$ = Steigung der Tangente in Richtung α • *pente de la tangente en direction α .*

→ **Richtungsableitung** • **Dérivée suivant une direction**



Seien • *Soient*

$$\Delta x = \Delta r \cdot \cos(\alpha), \quad \Delta y = \Delta r \cdot \sin(\alpha)$$

$$\begin{aligned} \leadsto D^\alpha f(x, y)|_{(x, y)=(x_0, y_0)} &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta r} \\ &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta x \cdot f'_x(x_0, y_0) + \Delta y \cdot f'_y(x_0, y_0) + ((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2) \cdot \varphi(x, y)}{\Delta r} \\ &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta r \cdot \cos(\alpha) \cdot f'_x(x_0, y_0) + \Delta r \cdot \sin(\alpha) \cdot f'_y(x_0, y_0) + (\Delta r)^2 \cdot \varphi(x, y)}{\Delta r} \\ &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \cos(\alpha) \cdot f'_x(x_0, y_0) + \sin(\alpha) \cdot f'_y(x_0, y_0) + \Delta r \cdot \varphi(x, y) = \cos(\alpha) \cdot f'_x(x_0, y_0) + \sin(\alpha) \cdot f'_y(x_0, y_0) \\ &(|\varphi(x, y)| < M \text{ in } \bullet \text{ dans } U_\delta((P_0))) \end{aligned}$$

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:** $f'_x, f'_y \in \mathcal{C}(U_\delta(x_0, y_0))$

Beh.: • **Thè.:**

$$\begin{aligned} D^\alpha f(x, y)|_{(x, y)=(x_0, y_0)} &= \cos(\alpha) \cdot f'_x(x_0, y_0) + \sin(\alpha) \cdot f'_y(x_0, y_0) \\ &= \langle \vec{e}_\alpha, \text{grad} f \rangle|_{(x, y)=(x_0, y_0)} \end{aligned}$$

Bsp.: • **Exemple:**

$f(x, y) = x^2 + \sin(x \cdot y) + x y^2, P_0 = (1, 3)$ Steigung in Richtung • *Pente en direction de $\alpha = \frac{\pi}{6} = ?$*

$$\begin{aligned}
D^{\frac{\pi}{6}} f(x, y)|_{(x, y)=(1, 3)} &= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot (2x + \cos(xy) \cdot y + y^2) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot (\cos(xy) \cdot x + 2xy)|_{(x, y)=(1, 3)} \\
&= \frac{6 + \cos(3)}{2} + \frac{\sqrt{3} (11 + 3 \cos(3))}{2} \approx 9.45921
\end{aligned}$$

Weiter folgt aus dem vorhin Gesagten: • *En outre voilà ce qui suit des considérations précédentes:*

Weiter folgt aus der Herleitung der Formel für die Richtungsableitung: • *En outre, de la déduction de la formule pour la dérivée suivant une direction il suit:*

Konsequenz: • **Conséquence:**

▷ Sei • *Soit* $\Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0) = \langle \Delta \vec{x}, \text{grad} f \rangle + (\Delta \vec{x})^2 \cdot \varphi(x, y)|_{\vec{x}=\vec{x}_0}$
 $:= \Delta z + |\Delta \vec{x}|^2 \cdot \varphi(x, y), |\varphi(x, y)| < M$ in • *dans* $U_\delta((P_0))$
 $\leadsto$ Die Richtungsableitung existiert in alle Richtungen: f ist differenzierbar in $U_\delta((P_0))$ • *La dérivée suivant une direction existe dans toutes les directions:*
 f est dérivable dans $U_\delta((P_0))$.

7.4.3 Verallgemeinerung der Differenzierbarkeit — Généralisation de la dérivabilité

Für $G \subseteq D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ dehnen wir nun die Differenzierbarkeitsdefinition wie folgt aus: • *Pour* $G \subseteq D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ *nous extendons la définition pour la dérivabilité de façon suivante:*

Sei • *Soit* $P_0 = (x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0}), P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Definition: • **Définition:** $f(P)$ differenzierbar in G • $f(P)$ dérivable dans G
 $\Leftrightarrow \forall P_0 \in G :$
 $f(P) = f(P_0) + \langle \Delta \vec{x}, \text{grad} f \rangle + (\Delta \vec{x})^2 \cdot \varphi_{P_0}(P)|_{\vec{x}=\vec{x}_0=\vec{OP}_0},$
 $|\varphi_{P_0}(P)| < M$ in • *dans* $U_\delta((P_0))$

Der lineare Anteil der Zunahme von $f(P)$ ist somit: • *La partie linéaire de l'accroissement de $f(P)$ est donc:*

$$\langle \Delta \vec{x}, \text{grad} f \rangle|_{\vec{x}=\vec{x}_0} = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k_0}) f'_{x_k}(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0})$$

Statt von einer Tangentialebene sprechen wir jetzt von einer **Tangentialhyperebene**. Sie ist gegeben durch die folgende Formel: • *Au lieu de parler d'un plan tangentiel, on parle maintenant d'un hyperplan tangentiel. Il est donné par la formule suivante:*

Formel: • **Formule:** **Tangentialhyperebene** • **hyperplan tangentiel**

$$\begin{aligned}
t(P) &= f(P_0) + \langle \Delta \vec{x}, \text{grad} f \rangle|_{\vec{x}} \\
t(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0}) + \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k_0}) f'_{x_k}(x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0})
\end{aligned}$$

1. Beispiel: • **Exemple 1:**

$f(x, y) = 2x^2 + xy - 3x + 2$ Tangentialebene in • *Plan tangentiel à* $(2, 1)$?

$$\begin{aligned}
t(x, y) &= f(x_0, y_0) + (x - x_0) f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0) f'_y(x_0, y_0) = \\
&= f(x_0, y_0) + (x - x_0)(4x_0 + y_0 - 3) + (y - y_0)x_0 = 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 2 + (x - 2)(4 \cdot 2 + 1 - 3) + (y - 1)2
\end{aligned}$$

$$= 6 + (x - 2)6 + (y - 1)2 = 6x + 2y - 8$$

2. Beispiel: • Exemple 2:

$\Psi \rightsquigarrow$ Spannflächen

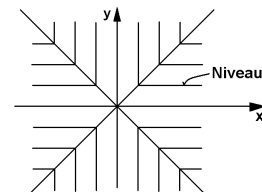
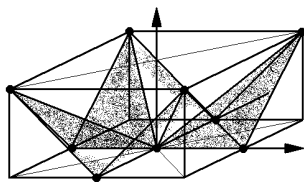
• Surfaces étendues $\rightsquigarrow$

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & x = 0 \vee y = 0 \\ |x| & |x| = |y| \\ \Psi & \text{sonst} \end{cases} \quad \bullet \text{ autres } P$$

Es gilt: • Il vaut: $\frac{\partial}{\partial x} f(x, 0) = 0$, $\frac{\partial}{\partial y} f(0, y) = 0 \Rightarrow$ Tangente existiert längs der Achsen

• Tangente existe le long des axes.

Jedoch: • Par contre: $f'_x(x, y), f'_y(x, y) \notin C(0, 0)$ (vgl. Skizze • Voir esquisse)



7.4.4 Zum Gradienten — Quant au gradient

Nablaoperator — Opérateur naba

Die Gradientenbildung kann als Operation auf einer Funktionenmenge aufgefasst werden, denn man hat hier die folgende Zuordnung: • La formation du gradient peut être comprise comme opération sur un ensemble de fonctions, car on a l'application suivante:

$$f \mapsto \text{grad } f = \begin{pmatrix} f'_{x_1} \\ \vdots \\ f'_{x_n} \end{pmatrix}$$

Einer **skalaren Funktion** wird also hier eine **Vektorfunktion** zugeordnet. • Ici on applique donc une fonction scalaire à une fonction vectorielle.

Mit Hilfe des Operators • A l'aide de l'opérateur $\nabla := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$ können wir schreiben: • Nous pouvons écrire:

Symbol: • **Symbole:** $\text{grad } f = \begin{pmatrix} f'_{x_1} \\ \vdots \\ f'_{x_n} \end{pmatrix} := \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

Manchmal sieht man auch Schreibweisen wie: • Des fois on voit des symboles de ce genre:

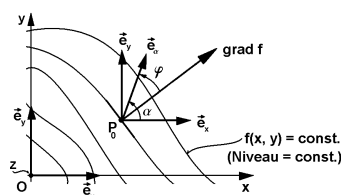
$$\text{grad } f := \partial_{\vec{v}} f \quad \rightsquigarrow \quad f \mapsto \nabla f = \text{grad } f$$

Bedeutung des Gradienten — Signification du gradient

Wir führen hier die Betrachtung anhand von Funktionen mit zwei Variablen. Bei Funktionen mit mehr als zwei Variablen trifft man analoge Verhältnisse. • Ici nous considérons la chose à l'aide de fonctions

à deux variables. Pour des fonctions à plus de deux variables on a des circonstances analogues.

$$\begin{aligned} \text{Sei } & \bullet \text{ Soit } f(x, y) = z, \\ & \chi(\vec{e}_\alpha, \text{grad} f) := \varphi \\ \leadsto & D^\alpha f(x, y) = \langle \vec{e}_\alpha, \text{grad} f \rangle = \\ & |\vec{e}_\alpha| \cdot |\text{grad} f| \cdot \cos(\varphi) = \\ & 1 \cdot |\text{grad} f| \cdot \cos(\varphi) = \cos(\varphi) \cdot |\text{grad} f| \end{aligned}$$



Dabei ist $\vec{e}_\alpha$ von α abhängig, $\text{grad} f$ jedoch nicht. • $\vec{e}_\alpha$ dépend de α , mais $\text{grad} f$ ne dépend pas de α . Allgemein gilt: • Généralement il vaut:

Lemma: • **Lemme:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$\chi(\vec{e}_\alpha, \text{grad} f) := \varphi$$

Beh.: • **Thè.:**

$$\begin{aligned} D^\alpha f(x, y) &= \langle \vec{e}_\alpha, \text{grad} f \rangle = |\text{grad} f| \cdot \cos(\varphi) \\ |D^\alpha f(x, y)| &\leq |\text{grad} f| \\ |\text{grad} f| &= \text{Max}_\alpha |D^\alpha f| \end{aligned}$$

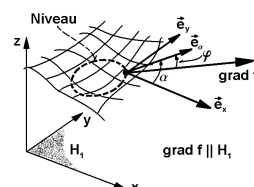
Wir studieren die Situation für einzelne, spezielle φ : • Nous étudions la situation pour des φ spéciaux:

- (1) Sei • Soit $\varphi = 0 \vee \varphi = \pi \vee \varphi = 2\pi \vee \dots \Rightarrow |\cos(\varphi)| = 1 \Rightarrow D^\alpha f(x, y) = \pm 1 \cdot |\text{grad} f|$
- (2) Sei • Soit $\varphi = \frac{\pi}{2} \vee \varphi = \frac{3\pi}{2} \vee \dots \Rightarrow \cos(\varphi) = 0 \Rightarrow D^\alpha f(x, y) = 0$

Interpretation: • **Interprétation:**

$\Rightarrow D^\alpha f(x, y) = 0$ bedeutet:

Die Tangente an die Funktionsfläche in Richtung α ist horizontal, sie steigt nicht und fällt auch nicht. Die Tangente im betrachteten Punkt ist also parallel zur Höhenkurve.



• $\Rightarrow D^\alpha f(x, y) = 0$ signifie: La tangente à la surface de la fonction est horizontale en direction de α , elle ne monte pas et elle ne descend pas. La tangente dans le point considéré est donc parallèle à la courbe de niveau.

$\Rightarrow D^\alpha f(x, y) = |\text{grad} f|$ bedeutet: • signifie:

Der Betrag der Richtungsableitung in dieser Richtung α ist maximal. Hier ist der Betrag der Steigung maximal. • La valeur absolue de la dérivée suivant une direction est maximale en cette direction α . Ici la valeur absolue de la pente est maximale.

Im ersten Fall war $\Rightarrow D^{\alpha_1} f(x, y) = |\text{grad} f|$. α_1 ist somit gerade die Richtung von $\pm \text{grad} f$. Dazu gehört $\varphi = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. φ ist der Winkel zur fixen Richtung von $\text{grad} f$. Im zweiten Fall war $\Rightarrow D^{\alpha_2} f(x, y) = 0$. α_2 ist somit gerade die Richtung der Höhenkurve. Dazu gehört $\varphi = n\pi + \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. Daraus folgt: $|\alpha_1 - \alpha_2| = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. D.h. der $\text{grad} f$ steht senkrecht zur Höhenkurve. Und in Richtung $\text{grad} f$ ist der Betrag der Steigung maximal. Die Komponenten von $\text{grad} f$ sind die Steigungen in den

Koordinatenrichtungen. Sind sie z.B. positiv, so steigt mit den Tangenten auch die Fläche in den positiven Koordinatenrichtungen. Daraus folgt, dass der Gradient „hangaufwärts“ zeigt.

• *Dans le premier cas on avait $\Rightarrow D^{\alpha_1} f(x, y) = |\text{grad} f|$. α_1 est donc la direction de $\pm \text{grad} f$. $\varphi = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ en font partie. φ est l'angle à la direction fixe de $\text{grad} f$. Dans le deuxième cas on avait $\Rightarrow D^{\alpha_2} f(x, y) = 0$. α_2 est donc la direction de la courbe de niveau. $\varphi = n\pi + \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ en font partie. On déduit donc: $|\alpha_1 - \alpha_2| = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. C.v.d. le $\text{grad} f$ est perpendiculaire à la courbe de niveau. Et en direction de $\text{grad} f$ la valeur absolue de la pente est maximale. Les composantes de $\text{grad} f$ sont les pentes en directions des axes de coordonnées. Si elles sont p.ex. positives, avec les tangentes aussi la surface croît en direction des coordonnées positives. Il en suit que le gradient pointe vers le haut.*

Bsp.: • **Exemple:** $f(x, y) = x^2 + y^2 \rightsquigarrow$ Minimum in • *Minimum dans $(0, 0)$*

$\text{grad} f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$, $P_0 = (1, 1) \Rightarrow \text{grad} f_{(x,y)=(1,1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ „hangaufwärts“ • *vers le haut.*

$\rightsquigarrow$ Im Punkte $(1, 1)$ nimmt die Steigung in Richtung $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ maximal zu.

• *Dans le point $(1, 1)$ la pente augmente de façon maximale dans la direction $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.*

Verallgemeinerung — Généralisation

Sei • *Soit $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightsquigarrow$ Hyperfläche im $\mathbb{R}^{n+1}$* • *hypersurface dans le $\mathbb{R}^{n+1}$*

$\rightsquigarrow \text{grad} f = \begin{pmatrix} f'_{x_1} \\ \vdots \\ f'_{x_n} \end{pmatrix}$. Sei • *Soit $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ Kurve C in D_f* • *courbe dans D_f*

Betrachte: • *Etudie:* $\frac{df}{dt}(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} =$
 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x_1} \cdot \frac{\Delta x_1}{\Delta t} + \dots + \frac{\Delta f}{\Delta x_n} \cdot \frac{\Delta x_n}{\Delta t} = f'_{x_1} \cdot x'_{1t} + \dots + f'_{x_n} \cdot x'_{nt} = \langle \text{grad} f, \vec{r}'_t \rangle$

Auf einer Niveauperfläche muss die Höhenzunahme 0 sein, d.h. es gilt: • *Sur une hypersurface de niveau l'accroissement de niveau doit être 0, donc il vaut:*

$$\frac{df}{dt}(x_1(t), \dots, x_n(t)) = 0 \Rightarrow \langle \text{grad} f, \vec{r}'_t \rangle = 0$$

Falls gilt • *S'il vaut: $\text{grad} f \neq \vec{0}$ (d.h. die Tangentialhyperebene steigt an* • *c.v.d. l'hyperplan tangentiel monte)*

und • *et $\vec{r}'_t \neq \vec{0}$ (die Kurve C besitzt einen Tangentialvektor $\neq \vec{0}$* • *La courbe C a un vecteur tangentiel $\neq \vec{0}$),*

so folgt: • *on déduit: $\langle \text{grad} f, \vec{r}'_t \rangle = 0 \Rightarrow \text{grad} f \perp \vec{r}'_t \parallel$ Niveauperfläche* • *$\parallel$ hypersurface de niveau.*

Weiter sehen wir: • *En plus on voit: $\Rightarrow \frac{df}{dt}(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \langle \text{grad} f, \vec{r}'_t \rangle = |\text{grad} f| \cdot |\vec{r}'_t| \cdot \cos(\varphi)$*

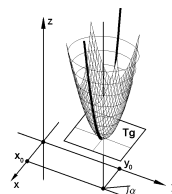
Parametrisiere C so dass gilt: • *Paramétrisons C de façon qu'il vaut: $|\vec{r}'_t| = 1$*

$\rightsquigarrow$ Wähle dazu die Kurvenlänge λ als Parameter: • *En cette intention choisir la longueur de la courbe λ comme paramètre:*

$$|\vec{r}'_\lambda| = \lim_{\Delta \lambda \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta \lambda} \right| = \lim_{\Delta \lambda \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{|\Delta \lambda|} = \lim_{\Delta \lambda \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k(\lambda + \Delta \lambda) - x_k(\lambda))^2}}{|\Delta \lambda|} = \lim_{\Delta \lambda \rightarrow 0} \frac{|\Delta \lambda|}{|\Delta \lambda|} = 1$$

Es gilt: • *Il vaut:*

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k(\lambda + \Delta\lambda) - x_k(\lambda))^2} \approx \Delta\lambda$$



$$\Rightarrow \frac{df}{dt}(x_1(t), \dots, x_n(t)) = |\text{grad}f| \cdot \cos(\varphi) \rightsquigarrow \frac{df}{dt}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \text{ maximal für } \bullet \text{ maximale pour } \varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$$

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{C}^{(1)}(D_f), \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Kurve C mit Kurvenlänge als Parameter • *Courbe C avec longueur de la courbe comme paramètre:*

Beh.: • **Thè.:**

1. $\text{grad}f \perp$ Niveauhyperfläche • *hypersurface de niveau*
2. $|\text{grad}f| =$ maximaler Wert des Betrags der Steigung $\frac{df}{dt}$ der Kurve auf der Hyperfläche über C • *valeur maximale de la valeur absolue de la pente $\frac{df}{dt}$ de la courbe sur la hypersurface sur C .*
3. $\text{grad}f =$ Richtung der maximalen zunehmenden Steigung
• *direction de la pente augmentante maximale.*

7.4.5 Bemerkungen zu Tangentialebenen und Potenzreihenentwicklung — Remarques quant aux plans tangentiels et au développement en séries de puissances

1. Die Tangentialhyperebene wird: • *L hyperplan tangentiel devient:*

$$t(\vec{x}) = t(\vec{x}_0 + \Delta\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \langle \Delta\vec{x}, \nabla f \rangle = f(\vec{x}_0) + \Delta\vec{x} \cdot \text{grad}f$$

Bsp.: • **Exemple:** $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow t(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \Delta\vec{x} \cdot \text{grad}f =$
 $1^2 + 2^2 + \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \end{pmatrix} = 5 + \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = -5 + 2x + 4y \Rightarrow z = 2x + 4y - 5$

2. **Taylorentwicklung** von Funktionen mit mehreren Variablen:
• *Développement en série de Taylor de fonctions à plusieurs variables:*

Beispiel mit $n = 2$: • *Exemple avec $n = 2$:*

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} \cdot \frac{1}{(k-j)!} \left(\frac{\partial^k}{\partial x^j \partial y^{k-j}} f \right)(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)^j \cdot (y - y_0)^{k-j}$$

Trick: • **Truc:** Erst Potenzreihe z.B. nach x bilden, y als Parameter beibehalten. Anschliessend Potenzreihen in den entstandenen Gliedern nach y bilden... • *D'abord calculer la série de puissances p.ex. pour la variable x , tenir y comme paramètre. Ensuite calculer les séries de puissances pour y dans les termes qu'on vient d'obtenir...*

Bsp.: • **Exemple:**

$$\sin(x^2 + y^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + \left(1 - \frac{x^4}{2}\right) y^2 + \left(\frac{-x^2}{2} + \frac{x^6}{12}\right) y^4 + \left(-\frac{1}{6} + \frac{x^4}{12}\right) y^6 + \dots = x^2 - \frac{x^6}{6} + y^2 - \frac{x^4 y^2}{2} \pm \dots$$

7.4.6 Weitere Bemerkungen zum totalen Differential, Verallgemeinerung — Autres remarques quant à la différentielle totale, généralisation

Schreibweisen — Façons d'écrire

1. Sei • *Soit* $f \in \mathcal{D}(G)$, $p, p_0 \in G$, $P = P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,
 $f(P) := f(x_1, \dots, x_n) := f(\vec{x})$

Schreibweise: • **Façon d'écrire:** (Gradient: • *Gradient:*) $\text{grad} f = \nabla f := \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}$

Für $\Delta f \rightarrow df$ ist es üblich, wie folgt zu schreiben: • *Pour $\Delta f \rightarrow df$ on écrit de coutume:*

Schreibweise: • **Façon d'écrire:** $df = d\vec{x} \cdot \text{grad} f = \langle d\vec{x}, \text{grad} f \rangle$

(Glieder höherer Ordnung werden vernachlässigt.

• *Négliger les termes d'ordre supérieur.*)

2. Mit dem totalen Differential Δf von f kann man schreiben: • *Avec la différentielle totale Δf de f on peut écrire:*

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta t} &= \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} \cdot \text{grad} f + \frac{(\Delta \vec{x})^2}{\Delta t} \cdot \varphi(\vec{x}) \\ \Rightarrow \frac{df}{dt} &= \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \text{grad} f + \frac{d\vec{x} \cdot d\vec{x}}{dt} \cdot \varphi(\vec{x}) = \left\langle \frac{d\vec{x}}{dt}, \text{grad} f \right\rangle + \left\langle \frac{d\vec{x}}{dt}, \underbrace{d\vec{x}}_{\rightarrow 0} \right\rangle \cdot \varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x}'_t, \nabla f \rangle \end{aligned}$$

3. Die folgende, etwas weniger exakte Schreibweise führt kaum zu Missverständnissen: • *La façon d'écrire suivante moins exacte ne mène point à des confusions:*

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0 + \Delta \vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \Delta \vec{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + (\Delta \vec{x})^2 \cdot \varphi(\vec{x}) \quad \text{oder} \quad \bullet \quad \text{ou}$$

$$\Delta f = f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) = \Delta \vec{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + (\Delta \vec{x})^2 \cdot \varphi(\vec{x})$$

$$\Delta \vec{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} \text{ ist hier der lineare Zuwachs} \quad \bullet \quad \text{voici l'accroissement linéaire}$$

$\rightsquigarrow$ **totales Differential** • **Différentielle totale**

$(\Delta \vec{x})^2 \cdot \varphi(\vec{x}) \rightsquigarrow$ höhere Glieder • *Termes d'ordre supérieur.*

$$\rightsquigarrow \Delta f \rightarrow df = d\vec{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \underbrace{(\Delta \vec{x})^2 \cdot \varphi(\vec{x})}_* = d\vec{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}$$

* $\rightsquigarrow$ in erster Ordnung vernachlässigbar • *négligeable au premier ordre.*

$\rightsquigarrow$ Definition des totalen Differentials auf dieser Grundlage:

• *Définition de la différentielle totale sur cette base:*

Definition: • **Définition:** $df = d\vec{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} = dx_1 \cdot f'_{x_1} + \dots + dx_n \cdot f'_{x_n}$ heisst **totales Differential**
• *s'appelle différentielle totale.*

Bsp.: • **Exemple:** $f(x, y, z) = x \cdot y + x^2 + y \sin(z)$, $f'_x = y + 2x$, $f'_y = x + \sin(z)$, $f'_z = y \cdot \cos(z)$
 $\Rightarrow df = dx(y + 2x) + dy(x + \sin(z)) + dz(y \cdot \cos(z))$

Verallgemeinerungen — Généralisations

Totale Differentiale **höherer Ordnung** definieren wir wie folgt: • *Nous définissons les différentielles totales d'ordre supérieur comme il suit:*

Definition: • **Définition:** $d^2f := d(df) := \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \right) dx_1 + \dots$
 $\dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \right) dx_n$

Spezialfall $n = 2$: • **Cas spécial $n = 2$:**

$$d^2f = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) dy = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (dy)^2$$

Verallgemeinerung der Ordnung für $n = 2$: • *Généralisation de l'ordre pour $n = 2$:*

$$d^m f = \frac{\partial^m f}{\partial x^m} (dx)^m + \binom{m}{1} \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-1} \partial y} (dx)^{m-1} dy + \dots + \frac{\partial^m f}{\partial y^m} (dy)^m$$

Schreibweise: • **Façon d'écrire:** $d^m f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right)^{(m)}$

Verallgemeinerung der Dimension n bei der Ordnung m : • *Généralisation de la dimension n pour l'ordre m :*

Schreibweise: • **Façon d'écrire:** $d^m f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \right)^{(m)}$

Regeln — Règles

Mit Hilfe der Regeln für partielle Ableitungen gewinnt man sofort die folgenden Regeln:

• *A l'aide des règles pour les dérivées partielles, on obtient tout de suite les règles suivantes:*

Regeln: • **Règles:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$f, g \in \mathcal{D} \dots, \quad k \in \mathbb{R}$$

Beh.: • **Thè.:**

1. $d(k \cdot f) = k \cdot df$
2. $d(f \pm g) = df \pm dg$
3. $d(f \cdot g) = f \cdot dg + df \cdot g$
4. Kettenregel • Règle conjointe
 $\leadsto$ Wird weiter unten speziell besprochen • sera discutée en bas plus en détail.

Bsp.: • **Exemple:** $d(\sin(x \cdot y) \cdot \cos(x + y)) =$
 $\sin(x \cdot y) \cdot (-\sin(x + y) dx - \sin(x + y) dy) + \cos(x + y) \cdot (\cos(x \cdot y) \cdot y dx + \cos(x \cdot y) \cdot x dy) =$
 $(-\sin(x \cdot y) \cdot \sin(x + y) + \cos(x + y) \cdot \cos(x \cdot y) \cdot y) dx + (-\sin(x \cdot y) \cdot \sin(x + y)$
 $+ \cos(x + y) \cdot \cos(x \cdot y) \cdot x) dy$

7.4.7 Die Kettenregel — La règle conjointe

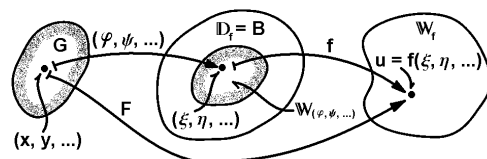
Um die Situation, auf die sich die Kettenregel bezieht, einigermaßen zu begreifen, ist es notwendig, die Herleitung der Regel etwas zu verfolgen. • *Pour comprendre un peu la situation à laquelle la règle conjointe se rapporte, il est nécessaire de suivre un peu la déduction de cette règle.*

Sei • Soit $u = f(\xi, \eta, \dots)$,

$\xi = \varphi(x, y, \dots), \eta = \psi(x, y, \dots), \dots$

Sei • Soit $D_f = B, W_{\varphi, \psi, \dots} \subseteq B = D_f$

Sei • Soit $(\xi, \eta, \dots) \in W_{\varphi, \psi, \dots}$



$$\Rightarrow u = f(\xi, \eta, \dots) = f(\varphi(x, y, \dots), \psi(x, y, \dots), \dots) := F(x, y, \dots), \quad D_F = G$$

Seien • Soient $f, \varphi, \psi, \dots \in \mathcal{D}$ über den jeweiligen Definitionsbereichen • sur les domaines de définition concernées.

Problem: • **Problème:** $\leadsto F \in \mathcal{D}$?

$\leadsto$ Untersuche die Existenz von • Examine l'existence de $dF = F'_x dx + F'_y dy + \dots$

Was passiert mit dem Rest • Que se passe-t-il avec le reste $(d\vec{x})^2 \cdot R(\vec{x})$?

Studiere dazu: • Etudie donc:

$$\begin{aligned}
& (f'_\xi \cdot \varphi'_x + f'_\eta \cdot \psi'_x + \dots) dx + (f'_\xi \cdot \varphi'_y + f'_\eta \cdot \psi'_y + \dots) dy + \dots = \\
& f'_\xi \cdot (\varphi'_x dx + \varphi'_y dy + \dots) + f'_\eta \cdot (\psi'_x dx + \psi'_y dy + \dots) + \dots = \\
& f'_\xi \cdot d\varphi + f'_\eta \cdot d\psi + \dots = f'_\xi \cdot d\xi + f'_\eta \cdot d\eta + \dots = df
\end{aligned}$$

$df, d\varphi, d\psi, \dots$ können wegen der vorausgesetzten Differenzierbarkeit gebildet werden, die verbleibenden Reste sind "quadratischer Natur,,. • *On peut composer $df, d\varphi, d\psi, \dots$ car on part de la dérivabilité des fonctions en question. Les restes qui restent sont de "nature quadratique".*

($\leadsto$ Form • *Forme "d $\vec{x} \cdot R(\vec{x})$ "*)

Damit kann man df von B nach G verpflanzen. Wegen der Verpflanzung muss man somit das totale Differential dF der verpflanzten Funktion F erhalten: • *Ainsi on peut transposer df de B à G . A cause de cette transposition on doit donc obtenir la différentielle totale dF de la fonction transposée F :*

$$\underbrace{df}_{D_f=B} = \underbrace{(f'_\xi \cdot \varphi'_x + f'_\eta \cdot \psi'_x + \dots) dx + (f'_\xi \cdot \varphi'_y + f'_\eta \cdot \psi'_y + \dots) dy + \dots}_{D_{\dots=G}} = dF$$

Wegen $dF = F'_x dx + f'_y dy + \dots$ muss gelten: • *A cause de $dF = F'_x dx + f'_y dy + \dots$ il vaut:*

$$F'_x = f'_\xi \cdot \varphi'_x + f'_\eta \cdot \psi'_x + \dots, \quad F'_y = f'_\xi \cdot \varphi'_y + f'_\eta \cdot \psi'_y + \dots, \quad \dots$$

Satz: • **Théorème:** **Kettenregel** • **Règle conjointe**

Vor.: • **Hyp.:**

$$\begin{aligned}
& \varphi, \psi, \dots \in \mathcal{D}(G), \quad f \in \mathcal{D}(B) \\
& D_f = B, \quad W_{\varphi, \psi, \dots} \subseteq B = D_f \\
& \xi = \varphi(x, y, \dots), \eta = \psi(x, y, \dots), \dots, \quad (\xi, \eta, \dots) \in W_{(\varphi, \psi, \dots)} \\
& u = f(\xi, \eta, \dots) = f(\varphi(x, y, \dots), \psi(x, y, \dots), \dots) = F(x, y, \dots)
\end{aligned}$$

Beh.: • **Thè.:**

$$\begin{aligned}
& F \in CD(G) \\
& dF = F'_x dx + f'_y dy + \dots = \\
& = (f'_\xi \cdot \varphi'_x + f'_\eta \cdot \psi'_x + \dots) dx + (f'_\xi \cdot \varphi'_y + f'_\eta \cdot \psi'_y + \dots) dy + \dots = \\
& = f'_\xi \cdot d\xi + f'_\eta \cdot d\eta + \dots = df \\
& F'_x = f'_\xi \cdot \varphi'_x + f'_\eta \cdot \psi'_x + \dots, \quad F'_y = f'_\xi \cdot \varphi'_y + f'_\eta \cdot \psi'_y + \dots, \quad \dots
\end{aligned}$$

Bemerkung: • **Remarque:** Sei • *Soit $f(x, y) = x^2 y^3 \Rightarrow \frac{df(x, y)}{dt} = 2xy^2 \frac{dx}{dt} + 3x^2 y^2 \frac{dy}{dt}$*

Definition: • **Définition:** $\frac{df(x, y)}{dt}$ heisst **totale Ableitung** von $f(x, y)$ nach t .
 • $\frac{df(x, y)}{dt}$ s'appelle **dérivée totale** de $f(x, y)$ d'après t .

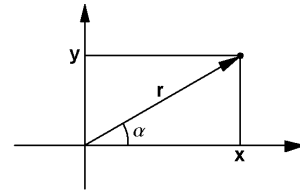
7.5 Anwendungen — Applications

7.5.1 Verpflanzung von Differentialoperatoren in andere Koordinatensysteme — Transposition d'opérateurs différentiels en d'autres systèmes de coordonnées

Bsp.: • **Exemple:** Sei • *Soit* $u = f(x, y)$,
 $|\text{grad}f|^2 = \langle \text{grad}f, \text{grad}f \rangle = \text{grad}f \cdot \text{grad}f = \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f'_x \\ f'_y \end{pmatrix} = (f'_x)^2 + (f'_y)^2$
 $\leadsto$ Kartesische Koordinaten! • *Coordonnées cartésiennes!*

Problem: • **Problème:** Schreibe $|\text{grad}f|^2$ in Polarkoordinaten! (Grösste Steigung im Quadrat)
 • *Ecrire $|\text{grad}f|^2$ en coordonnées polaires! (Pente maximale au carré.)*

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos(\alpha) \\ y &= r \cdot \sin(\alpha) \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \alpha &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$



Vergleich zum letzten Satz: • *Comparaison au théorème dernier:*
 $(x, y) \mapsto (r, \alpha), (\xi, \eta) \mapsto (x, y)$

Damit bekommen wir: • *Ainsi nous obtenons:*

$$r'_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos(\alpha), \quad r'_y = \frac{1}{2} \cdot \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r} = \sin(\alpha)$$

Sei • *Soit* $w = \frac{y}{x} \Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan(w) = \arctan(\tan(\alpha))$

Kettenregel • *Règle conjointe*

$$\leadsto \frac{d\alpha}{d\alpha} = 1 = (\arctan(\tan(\alpha)))'_\alpha = (\arctan(w))'_w \cdot (\tan(\alpha))'_\alpha,$$

$$(\tan(\alpha))'_\alpha = \left(\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right)'_\alpha = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$$

$$\Rightarrow 1 = (\arctan(w))'_w \cdot \frac{1}{\cos^2(\alpha)} \Rightarrow (\arctan(w))'_w = \cos^2(\alpha)$$

Zudem gilt: • *En plus il vaut:*

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)) = \arctan(w)'_w \cdot \frac{-y}{x^2} = \cos^2(\alpha) \cdot \frac{-y}{x^2} = -\frac{x^2}{r^2} \cdot \frac{y}{x^2} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{1}{r} \cdot \sin(\alpha)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)) = \arctan(w)'_w \cdot \frac{1}{x} = \cos^2(\alpha) \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^2}{r^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{r^2} = \frac{1}{r} \cdot \cos(\alpha)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad u'_x &= u'_r \cdot r'_x + u'_\alpha \cdot \alpha'_x = u'_r \cdot \cos(\alpha) + u'_\alpha \cdot \frac{-\sin(\alpha)}{r} \\ u'_y &= u'_r \cdot r'_y + u'_\alpha \cdot \alpha'_y = u'_r \cdot \sin(\alpha) + u'_\alpha \cdot \frac{\cos(\alpha)}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow |\operatorname{grad} f|^2 &= (u'_x)^2 + (u'_y)^2 = (u'_r \cdot \cos(\alpha) + u'_\alpha \cdot \frac{-\sin(\alpha)}{r})^2 + (u'_r \cdot \sin(\alpha) + u'_\alpha \cdot \frac{\cos(\alpha)}{r})^2 \\
&= (u'_r)^2 \cdot \cos^2(\alpha) + 2 u'_r \cdot \cos(\alpha) \cdot u'_\alpha \cdot \frac{-\sin(\alpha)}{r} + (u'_\alpha)^2 \cdot \left(\frac{-\sin(\alpha)}{r}\right)^2 + \\
&\quad (u'_r)^2 \cdot \sin^2(\alpha) + 2 u'_r \cdot \sin(\alpha) \cdot u'_\alpha \cdot \frac{\cos(\alpha)}{r} + (u'_\alpha)^2 \cdot \left(\frac{\cos(\alpha)}{r}\right)^2 \\
&= (u'_r)^2 \cdot \cos^2(\alpha) + (u'_\alpha)^2 \cdot \frac{\sin^2(\alpha)}{r^2} + (u'_r)^2 \cdot \sin^2(\alpha) + (u'_\alpha)^2 \cdot \frac{\cos^2(\alpha)}{r^2} \\
&= (u'_r)^2 \cdot (\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)) + (u'_\alpha)^2 \cdot \frac{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)}{r^2} \\
&= (u'_r)^2 \cdot 1 + (u'_\alpha)^2 \cdot \frac{1}{r^2} = (u'_r)^2 + \frac{1}{r^2} \cdot (u'_\alpha)^2
\end{aligned}$$

7.5.2 Totale Ableitung — Dérivée totale

Wir wollen hier an einem Beispiel zeigen, wie das totale Differential direkt zur Steigungsberechnung eingesetzt werden kann. • *Ici nous allons montrer comme on peut appliquer la différentielle totale directement pour calculer des pentes.*

Sei z.B. gegeben eine Funktion • *P.ex soit donné une fonction* $f(x, y) = z = \cos(xy) + x + y^2$
sowie eine Kurve • *ainsi qu'une courbe* $C: \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ \ln(t) \end{pmatrix}$

Problem: • **Problème:** Was ist die Steigung der Tangente an die Kurve auf der Funktionsfläche über C in $P_0 = (E^1, \ln(1)) = (e, 0)$, $t = 1$? • *Trouver la pente à la tangente à la courbe dans la surface de fonction sur C à $P_0 = (E^1, \ln(1)) = (e, 0)$, $t = 1$!*

Lösung: • **Solution:** Totales Differential: différentielle totale:

$$\begin{aligned}
df &= f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy = -\sin(xy) \cdot (y dx + x dy) + dx + 2y dy \\
&= (-\sin(xy) \cdot y + 1) dx + (-\sin(xy) \cdot x + 2y) dy
\end{aligned}$$

Daraus die Ableitung: • *Par conséquence la dérivée:*

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dt} \Big|_{t=1} &= (-\sin(xy) \cdot y + 1) \frac{dx}{dt} + (-\sin(xy) \cdot x + 2y) \frac{dy}{dt} \Big|_{t=1} \\
&= (-\sin(e^t \ln(t)) \cdot \ln(t) + 1) \frac{d e^t}{dt} + (-\sin(e^t \ln(t)) \cdot e^t + 2 \ln(t)) \frac{d \ln(t)}{dt} \Big|_{t=1} \\
&= (-\sin(e \cdot 0) \cdot 0 + 1) e + (-\sin(e 0) \cdot e + 2 \cdot 0) \frac{d 1}{d 1} = e
\end{aligned}$$

7.5.3 Anwendung auf implizite Funktionen — Application aux fonctions implicites

Sei • *Soit* $f(x, y) = f(x, y(x)) = 0$, $y = y(x)$ Funktion • *fonction.*

$\leadsto$ Kettenregel: • *Règle conjointe:*

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = f'_x + f'_y \cdot y'_x = \frac{d 0}{d x} = 0 \Rightarrow f'_x + f'_y \cdot y'_x = 0 \Rightarrow y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$y = y(x)$ sei implizit gegeben: • *soit donné implicitement:*
 $f(x, y) = f(x, y(x)) = 0, \quad f, y \in \mathcal{D}$

Beh.: • **Thè.:** $y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y}$

Bsp.: • **Exemple:**

Sei • *Soit* $f(x, \lambda) = x^3 + 2x(1 + \lambda^2) + 2\sqrt{6}\lambda \Rightarrow f'_x(x, \lambda) = 3x^2 + 2(1 + \lambda^2) > 0 (\forall x)$
 $\leadsto f(x, \lambda)$ streng monoton wachsend. $f(x, \lambda)$ besitzt somit genau eine Nullstelle $x_0(\lambda) \in \mathbb{R}$. • $f(x, \lambda)$ croissant de façon strictement monotone. $f(x, \lambda)$ possède donc exactement un zéro $x_0(\lambda) \in \mathbb{R}$.

Ges.: • **Trouver:** λ so dass $x_0(\lambda) \in \mathbb{R}$ maximal wird! • λ que $x_0(\lambda) \in \mathbb{R}$ devienne maximal!

Es gilt: • *Il vaut:* $f(x_0(\lambda), \lambda) = 0$

$\leadsto$ Maximum: • *Maximum:* $0 = (x_0)'_{\lambda} = -\frac{f'_{\lambda}}{f'_{x_0}} \Rightarrow f'_{\lambda} = 0 = 4x_0\lambda + 2\sqrt{6} \Rightarrow \lambda_m = \frac{-2\sqrt{6}}{4x_0}$

$\Rightarrow f(x, \lambda_m) = x^3 + 2x \left(1 + \left(\frac{-2\sqrt{6}}{4x_0}\right)^2\right) + 2\sqrt{6} \frac{-2\sqrt{6}}{4x_0} = 0$

$\Rightarrow$ Lösungen: • *Solutions:* $x_{01,2,3,4} = 1, -1, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3} \Rightarrow x_{0max} = 1 \in \mathbb{R}$

7.5.4 Extremalprobleme — Problèmes d'extréma

Notwendige Bedingung für Extrema — Condition nécessaire pour l'extrémum

Sei • *Soit* $f \in \mathcal{D}(P_0), \quad f'_{x_k} \in \mathcal{C}(P_0),$

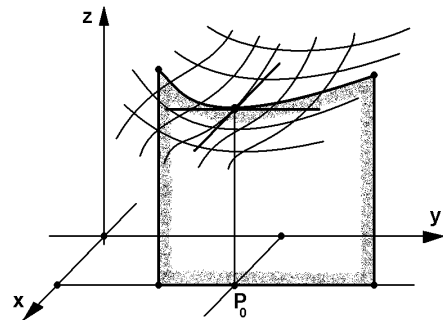
Wir nehmen an, dass f in $P=0$ ein lokales Extremum besitze. • *Soit donnée la situation que f possède à P_0 un extrémum local.*

Sei • *Soit* $P_0 \in \mathbb{R}^2.$

In P_0 muss die Schnittkurve der Funktionsfläche mit einer erstprojizierenden Ebene eine horizontale Tangente besitzen: • *A P_0 la courbe d'intersection de la surface de fonction avec un plan qui est perpendiculaire sur le plan xy doit posséder une tangente horizontale.*

Analog schliesst man für $P_0 \in \mathbb{R}^n$. • *On obtient la même conséquence pour $P_0 \in \mathbb{R}^n$.*

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_k}(P_0) = 0, \quad k = 1, \dots, n$



Wir verwenden nun die folgende Schreibweise: • *Nous utilisons la façon d'écrire suivante:*

Schreibweise: • **Façon d'écrire:** $f \in \mathcal{D}(x_k, P_0) \leadsto f$ stetig differenzierbar nach x_k in P_0

• f dérivable de façon continue d'après x_k à P_0

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$\forall_{k=1}^n f \in \mathcal{D}(x_k, P_0)$
 f besitze in P_0 ein lokales Extremum
 • f possède à P_0 un extrémum local

Beh.: • **Thè.:** $\forall_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(P_0) = 0 \leadsto \text{grad} f = \vec{0}$

Bsp.: • **Exemple:** $f(x, y) = x^2 + y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x = 0$
 $\Rightarrow x = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow P_0 = (0, 0)$
 (Bekannt: • *On sait: $x^2 + y^2 \geq 0, \quad x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$*)

Bemerkung: • **Remarque:** Die Umkehrung des Satzes gilt schon für $n = 1$ nicht. • *La conversion de ce théorème ne vaut pas. On le voit déjà pour $n = 1$.*

Hinreichende Bedingung für Extrema — Condition siffisante pour des extrém

Sei • *Soit $n = 2, \quad f''_{yx} = f''_{xy}$*

Wir definieren: • *Nous définissons:*

Definition: • **Définition:** $H(f) := D = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2$
 heisst Determinante der **Hess-Matrix** (Diskriminante)
 • *s'appelle determinant de la **matrice de Hess** (discriminant)*

Man stellt unmittelbar fest: • *On saisit aussitôt:*

Lemma: • **Lemme:** $H(f) = [(\text{grad} f)'_x, (\text{grad} f)'_y]$ (Flächenprodukt • *Produit de surface*)

$$\leadsto [(\text{grad} f)'_x, (\text{grad} f)'_y] = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} = |(\text{grad} f)'_x| \cdot |(\text{grad} f)'_y| \cdot \sin(\varphi),$$

$$\varphi = \angle((\text{grad} f)'_x, (\text{grad} f)'_y)$$

Es gilt der folgende Satz: • *On peut déduire le théorème suivant:*

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$f \in \mathcal{D}(x, P_0) \wedge f \in \mathcal{D}(y, P_0) \\ f'_x(P_0) = f'_y(P_0) = 0$$

Beh.: • **Thè.:**

$D = H(f) > 0 \Rightarrow f$ hat in P_0 ein relatives Extremum

• f possède à P_0 un extrémum relatif

$f''_{xx} > 0$: Minimum • *minimum*

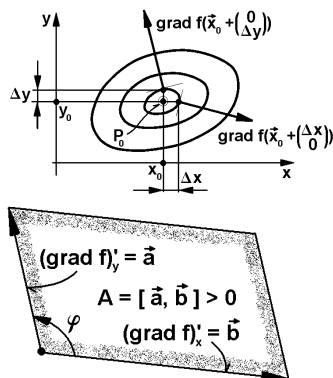
$f''_{xx} < 0$: Maximum • *maximum*

$D = H(f) < 0 \Rightarrow f$ hat in P_0 einen Sattelpunkt • f possède à P_0 un point de col (point-selle)

$D = H(f) = 0 \Rightarrow$ so nicht entscheidbar • *on ne peut pas encore décider*

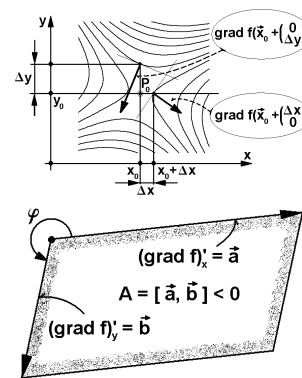
Anschauliche Begründung: • *Vérification clairement visible:*

$P_0 \rightsquigarrow$ Z.B. Minimum • *P.ex Minimum*



$$(\nabla f)'_x(x_0 + \Delta x, y_0) \uparrow (\nabla f)(x_0 + \Delta x, y_0) \\ (\nabla f)'_y(x_0, y_0 + \Delta y) \uparrow (\nabla f)(x_0, y_0 + \Delta y) \\ \Rightarrow A = |\nabla f'_x| \cdot |\nabla f'_y| \cdot \sin(\varphi) > 0 \\ (\nabla f = \text{grad} f)$$

$P_0 \rightsquigarrow$ Sattelpunkt (Beispiel) • *P.ex point col (exemple)*



$$(\nabla f)'_x(x_0 + \Delta x, y_0) \uparrow (\nabla f)(x_0 + \Delta x, y_0) \\ (\nabla f)'_y(x_0, y_0 + \Delta y) \downarrow (\nabla f)(x_0, y_0 + \Delta y) \\ \Rightarrow A = |\nabla f'_x| \cdot |\nabla f'_y| \cdot \sin(\varphi) < 0$$

1. Beispiel: • **Exemple 1:** $f(x, y) = x \cdot y$, $f'_x = y$, $f'_y = x$, $P_0 = (0, 0)$

$$\Rightarrow f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0, f''_{xx} = 0, f''_{yy} = 0, f''_{xy} = f''_{yx} = 1 \Rightarrow D = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 < 0$$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt in P_0 • *point col à P_0 .*

2. Beispiel: • **Exemple 2:** $f(x, y) = x^2 + y^2$, $f'_x = 2x$, $f'_y = 2y$, $P_0 = (0, 0)$

$$\Rightarrow f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0, f''_{xx} = f''_{yy} = 2 > 0, f''_{xy} = f''_{yx} = 0 \Rightarrow D = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 4 > 0$$

$\Rightarrow$ Minimum in P_0 • *minimum à P_0 .*

7.5.5 Anwendung auf die Klassifikation von Kegelschnitten — Application pour la classifications des sections de cônes

Im Rahmen der Vektoralgebra werden die Kegelschnitte besprochen. In der Ebene handelt es sich dabei um algebraische Kurven, die durch eine Polynomgleichung in zwei Variablen vom Grade 2 von folgender Form gegeben sind: • *Dans le cadre de l'algèbre vectorielle on discute les sections des cônes. Dans le*

plan, il s'agit ici de courbes algébriques, qui sont données par des équations polynomiales du degré 2 en deux variables de la forme suivante:

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Andererseits ist durch $f(x, y) = z$ im $\mathbb{R}^3$ eine Fläche Φ definiert. • D'autre part $f(x, y) = z$ définit une surface Φ dans le $\mathbb{R}^3$

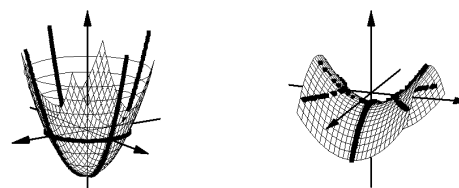
$$\begin{aligned} f'_x(x_0, y_0) &= 2ax_0 + by_0 + d = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 2cy_0 + bx_0 + e = 0 \\ \Rightarrow x_0 &= \frac{2cd - be}{b^2 - 4ac}, \quad y_0 = -\frac{bd - 2ae}{b^2 - 4ac}, \quad D = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 4ac - b^2 \end{aligned}$$

Sei • Soit $D \neq 0 \Rightarrow$ Auf Φ gibt es genau ein Extremum oder Sattelpunkt (in (x_0, y_0)) • Sur Φ il existe exactement un extrémum ou point col (à (x_0, y_0)).

Geometrisch sieht man unmittelbar ein:

• On voit clairement géométriquement:

Im Falle der Ellipse muss Φ ein „korbartiges Gebilde“ sein und irgendwo ein Extremum haben. • Au cas de l'ellipse Φ doit avoir la forme d'un panier et doit posséder à un certain point un extrémum.



Im Falle der Hyperbel muss Φ ein „sattelartiges Gebilde“, d.h. irgendwo einen Sattelpunkt haben. • Au cas de l'hyperbole Φ doit avoir la forme d'un col et doit posséder à un certain point un point col.

Bemerkung: • **Remarque:**

Ein Kegelschnitt entsteht allerdings nur, wenn Φ die xy -Ebene ($= H_{xy}$) schneidet. Die Bedingung $f(x_0, y) = 0$ ist eine quadratische Gleichung in $x_0(y)$. Die Bedingung, dass die Diskriminante ≥ 0 sein muss, führt auf eine quadratische Ungleichung in y , die lösbar ist. • On obtient une section de cône seulement quand Φ a une intersection avec le plan xy ($= H_{xy}$). La condition $f(x_0, y) = 0$ est une équation quadratique en $x_0(y)$. La condition que le discriminant doit être ≥ 0 mène à une équation quadratique en y qu'on peut résoudre.

Konsequenz: • **Conséquence:** Die Frage, ob $\Phi \cap H_{xy} \neq \{\}$ gilt, ist elementar algebraisch entscheidbar. • La question s'il vaut $\Phi \cap H_{xy} \neq \{\}$ peut être décidée de manière algébrique élémentaire.

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \quad \Phi \cap H_{xy} \neq \{\}$$

Beh.: • **Thè.:**

$$D = 4ac - b^2 > 0 \Rightarrow \text{Ellipse} \quad \bullet \text{ ellipse}$$

$$D = 4ac - b^2 < 0 \Rightarrow \text{Hyperbel} \quad \bullet \text{ hyperbole}$$

$$\text{Parabel} \quad \bullet \text{ Parabole} \Rightarrow D = 0$$

Bsp.: • **Exemple:** $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 4y^2 - x + y - 1 = 0$

$$f(0, 0) = -1, \quad f(0, 1) = 4 \Rightarrow \Phi \cap H_{xy} \neq \{\}$$

$$D = 4 \cdot 2 \cdot 4 - (-3)^2 = 32 - 9 = 23 > 0 \Rightarrow \text{Ellipse} \quad \bullet \text{ Ellipse.}$$

7.5.6 Extremalprobleme mit Nebenbedingungen — Problèmes d'extréma avec conditions secondaires

Einsetzungsmethode — Méthode par substitution

1. Beispiel: • **Exemple 1:** Sei • Soit $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 4y^2 - x + y - 1$

Problem: • **Problème:** Extremum von $f(x, y)$ unter der Nebenbedingung $x - y = 1$?

• *Extrémum de $f(x, y)$ sous la condition $x - y = 1$?*

$$x - y = 1 \Rightarrow y = x - 1 \Rightarrow f(x, y) = f(x, x - 1) = 3x^2 - 5x + 1 = g(x), \\ g'_x(x) = 6x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{6}, y = -\frac{1}{6}, g''_{xx}(x) = 6 > 0 \Rightarrow \text{Minimum} \bullet \text{Minimum.}$$

Konsequenz: • **Conséquence:** Solche einfache Extremalprobleme mit Nebenbedingungen lassen sich durch Einsetzen der Nebenbedingung in die zu betrachtende Funktion lösen. • *Les problèmes d'extrémum simples avec condition secondaire comme on vient de voir se laissent résoudre par substitution de la condition secondaire dans la fonction considérée.*

2. Beispiel: • Exemple 2:

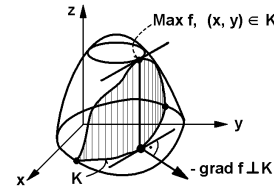
Sei • Soit $f(x, y) = x \cdot y$, Nebenbedingung • condition secondaire $g(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4 = 0$
 $\leadsto$ Extremum? • *Extrémum?*

Hier hat man es mit der Einsetzungsmethode nicht mehr so leicht. Besser zu handhaben ist hier die nachfolgend gezeigte **Methode der Multiplikatoren von Lagrange**. Sie ist oft erfolgreich bei implizit gegebenen Kurven $g(x, y) = 0$. • *Ici il n'est plus tellement facile d'opérer avec la méthode de substitution. On est mieux servi avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange, qu'on va démontrer. Elle nous porte souvent du succès quand on traite des courbes implicites $g(x, y) = 0$.*

Methode der Multiplikatoren von Lagrange — Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Seien • Soient $f(x, y), g(x, y) \in \mathcal{D}(G)$,
 $f, g \in \mathcal{C}^1(G)$ Ableitungen stetig
 • *dérivées continues*

f hat in P_0 ein Extremum mit der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ • *f a à P_0 un extrémum avec la condition secondaire $g(x, y) = 0$*



Durch $g(x, y) = 0$ sei eine Kurve C definiert: • Soit défini une courbe C par $g(x, y) = 0$:

$$C : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Sei • Soit $h(t) := f(x(t), y(t))|_{(x(t), y(t)) \in C} := f(\vec{r}(t))$

Extremum für $t = t_0$: • *Extrémum pour $t = t_0$:*

$$\Rightarrow h'_t(t) = f'_x(x, y) \cdot x'_t + f'_y(x, y) \cdot y'_t = \text{grad} f \cdot \vec{r}'_t(t)|_{t=t_0} \Rightarrow \text{grad} f \perp \vec{r}'_t(t)|_{t=t_0}$$

In P_0 ($t = t_0$) ist somit: • A P_0 ($t = t_0$) il vaut donc:
 $\text{grad} f \perp (\text{Tangente} \bullet \text{Tangente}) \parallel \vec{r}'_t(t)|_{t=t_0}$

Weil C selbst eine Höhenkurve von g ist, gilt in P_0 : • *Comme C lui-même est une courbe de niveau de g , il vaut à P_0 : $\text{grad} g \perp \text{Tangente} \bullet \text{Tangente} \parallel \vec{r}'_t(t)|_{t=t_0}$*

Sei • Soit $\text{grad} g \neq \vec{0} \Rightarrow \text{grad} f \parallel \text{grad} g$ in • dans $P_0 \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \text{grad} f = \lambda \cdot \text{grad} g$

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$f(x, y), g(x, y) \in \mathcal{D}(G), \in \mathcal{C}^1(G)$$

$$\text{grad } g \neq \vec{0}$$

f hat in P_0 ein Extremum mit der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$

• f a un extrémum à P_0 avec la condition secondaire $g(x, y) = 0$

Beh.: • **Thè.:** $\exists_{\lambda \in \mathbb{R}} : \text{grad } f = \lambda \cdot \text{grad } g$

Definition: • **Définition:** λ heisst **Multiplikator von Lagrange** • λ s'appelle **multiplificateur de Lagrange**

Bemerkung: • **Remarque:** Analog argumentiert man bei Funktionen mit mehr als 2 Variablen.
• On utilise des arguments analogues pour des fonctions avec plus de 2 variables

Bsp.: • **Exemple:** Sei • Soit $f(x, y) = x \cdot y$, Nebenbedingung • condition secondaire
 $g(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4 = 0 \leadsto$ Extremum? • extrémum?

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \lambda \cdot \text{grad } g = \lambda \cdot \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 8x \\ 2y \end{pmatrix} \Rightarrow y = \lambda \cdot 8x, \quad x = \lambda \cdot 2y, \quad 4x^2 + y^2 - 4 = 0$$

Mit der Nebenbedingung erhält man somit ein System von 3 Gleichungen mit den Unbekannten x, y, λ .
• Y compris la condition secondaire on obtient un système de 3 équations avec les inconnues x, y, λ .

$$\leadsto x = \lambda \cdot 2 \cdot (\lambda \cdot 8x) = 16x \cdot \lambda^2 \Rightarrow x = 0 \vee \lambda = \pm \frac{1}{4}$$

$$y = \lambda \cdot 8 \cdot (\lambda \cdot 2y) = 16y \cdot \lambda^2 \Rightarrow y = 0 \vee \lambda = \pm \frac{1}{4}$$

$$(0, 0) \notin C \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{4}, \quad y = \lambda \cdot 8x = \frac{1}{4} \cdot 8x = 2x \Rightarrow$$

$$4x^2 + y^2 - 4 = 4x^2 + (2x)^2 - 4 = 8x^2 - 4 = 0, \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y = \lambda \cdot 8x = \frac{1}{4} \cdot 8 \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \pm \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\leadsto \text{Extremumwerte nur in } \bullet \text{ Valeurs extrêmes seulement à } \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{2}{\sqrt{2}}$$

Es ist dem Leser überlassen zu untersuchen, welche Extremwerttypen wo vorliegen. • C'est un exercice pour le lecteur de décider quels types d'extréma on a et où il sont.

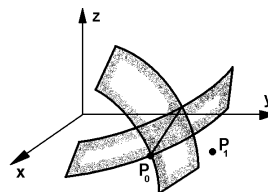
7.5.7 Newton–Approximation bei mehreren Variablen — Approximation de Newton pour plusieurs variables

Wir studieren das Verfahren für den Fall von zwei Funktionen mit zwei Variablen: • Nous étudions la méthode pour le cas de deux fonctions avec deux variables:

Zu lösen: • *A résoudre:*

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

$$P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{L} \quad ?$$



Sei P_1 nahe P_0 : • *Soit P_1 près de P_0 :*

$$\begin{aligned} \leadsto \quad \Delta f_1 &:= f(x_0, y_0) - f(x_1, y_1) = 0 - f(x_1, y_1) \approx \Delta x_1 f'_x + \Delta y_1 f'_y \big|_{P=P_1} \\ \Delta g_1 &:= g(x_0, y_0) - g(x_1, y_1) = 0 - g(x_1, y_1) \approx \Delta x_1 g'_x + \Delta y_1 g'_y \big|_{P=P_1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -f(x_1, y_1) \\ -g(x_1, y_1) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} f'_x(x_1, y_1) & f'_y(x_1, y_1) \\ g'_x(x_1, y_1) & g'_y(x_1, y_1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \end{pmatrix} := A(P_1) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \end{pmatrix}$$

Sei $A(P_1)$ regulär • *$A(P_1)$ soit régulier*

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_0 - x_1 \\ x_0 - y_1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = -A(P_1)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f(x_1, y_1) \\ g(x_1, y_1) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow P_2 = (x_2, y_2) &\hat{=} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = -A(P_1)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f(x_1, y_1) \\ g(x_1, y_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wenn wir Glück haben, liegt P_2 näher bei P_0 als P_1 . Dann lässt sich auf diesem Vorgehen eine Iteration aufbauen. Durch den Verlauf der Rechnung und eine Überprüfung des Resultates lässt sich beurteilen, ob das Verfahren gegen brauchbare Werte konvergiert oder nicht. ($f(x_n, y_n)$ und $g(x_n, y_n)$ müssen mit n immer kleiner werden. Theoretische Konvergenzkriterien wollen wir hier nicht behandeln.)

• *Si nous avons de la chance, P_2 est situé plus près de P_0 que de P_1 . A partir de cette idée on peut donc construire une itération. Par le développement du calcul et l'examen des résultats on peut juger si la méthode converge vers des valeurs utilisables ou non. ($f(x_n, y_n)$ et $g(x_n, y_n)$ doivent devenir de plus en plus petits avec n . Nous ne voulons pas traiter ici des critères de convergence théoriques.*

$$\text{Bsp.:} \quad \bullet \text{ Exemple: } \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ y - \sin(x) = 0 \end{cases} \quad \text{Start:} \quad \bullet \text{ Départ: } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

In 4 Schritten erhalten wir: • *Après 4 étapes nous obtenons: $x_5 = 0.73908513$, $y_5 = 0.67361203$, $f(x_5, y_5) = 0.00000000 \dots$, $g(x_5, y_5) = 0.00000000 \dots$*

7.6 Fehlerrechnung (Abhängigkeit) — Calcul de l'erreur (dépendance)

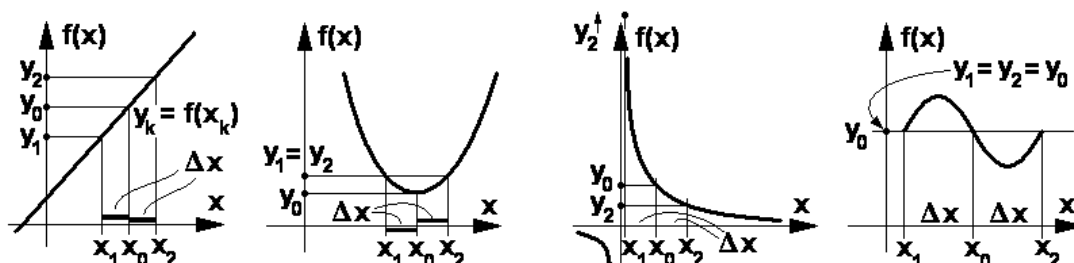
Unter dem Begriff „Fehlerrechnung“ werden in der Literatur zwei verschiedene Problemtypen behandelt: Erstens das Problem der Verpflanzung von Messfehlern bei der Anwendung von Funktionen auf fehlerbehaftete Messgrößen. Und zweitens das Problem der Fehler von statistischen Kenngrößen (z.B. Mittelwert), welche meistens von einer grossen Datenmenge abhängen. Hier wollen wir den ersten Fehler-typ behandeln. Der zweite wird im getrennt herausgegebenen Anhang zu diesem Skript besprochen.

• *Sous la notion de calcul d'erreur, deux types de problèmes différents sont traités dans la littérature: Premièrement le problème de la transplantation d'erreurs de mesure à l'application de fonctions lors de grandeurs mesurées inexacts. Et deuxièmement le problème des erreurs de grandeurs qui marquent des données statistiques (p.ex. la moyenne) qui dépend d'ordinaire d'une grande quantité de données. Ici, nous voulons traiter le premier type d'erreur. Le deuxième est traité dans l'appendice (édition séparée) à ce script.*

7.6.1 Das Problem der Verpflanzung — Le problème de la dépendance

Situation: • **Situation:** (a): $y = f(x)$

Gemessen wird • *On mesure* $x \pm \Delta x \rightsquigarrow y \pm \Delta y = ?$



$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2), \quad \Delta y_1 = |y_1 - y_0| = ?, \quad \Delta y_2 = |y_2 - y_0| = ?$$

Situation: • **Situation:** (b): $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Gemessen werden die Werte $x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0}$ der Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$. Bei kontinuierlichen Messwerten gibt es immer Ablesungenauigkeiten, die aber abschätzbar sind. Diese zugehörigen „Messfehler“ betragen $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$. Die „exakten Werte“ x_k^* , $k = 1, \dots, n$ liegen daher in den Intervallen $[x_{k_0} - \Delta x_k, x_{k_0} + \Delta x_k]$. Zudem sei eine Funktion $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ gegeben, mit deren Hilfe eine weitere Grösse berechnet werden muss. • *On mesure les valeurs $x_{1_0}, x_{2_0}, \dots, x_{n_0}$ des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$. Pour les valeurs de mesures non-discrètes il y a toujours des inexactitudes quand on lit les échelles, mais elles sont estimables. Les erreurs de mesure qui en résultent sont $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$. Les "valeurs exactes" x_k^* , $k = 1, \dots, n$ sont donc situées dans les intervalles $[x_{k_0} - \Delta x_k, x_{k_0} + \Delta x_k]$. En plus on a donné une fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ à l'aide de laquelle on doit calculer une valeur en plus.*

Problem: • **Problème:** In welchem Intervall liegt der „wahre“ Wert $f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$?

• *Dans quel intervalle la valeur "exacte" $f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ est-elle située ?*

7.6.2 Verwendung des totalen Differentials — Appliquer la différentielle totale

Sei • *Soit* $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{1_0} \\ \vdots \\ x_{n_0} \end{pmatrix}$, $f(\vec{x}) := f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $D_k \geq |\Delta x_k|$ (D_k ist eine bezifferbare Schranke. • *D_k est une borne connue.*)

Aus der Theorie des **totalen Differentials** weiss man: • *De la théorie de la différentielle totale on sait:*

$$\Delta f = f(\vec{x}_0 + \Delta \vec{x}) - f(\vec{x}_0) = \Delta x_1 f'_{x_1}(\vec{x}_0) + \dots + \Delta x_n f'_{x_n}(\vec{x}_0) + O[2]$$

(O : Glieder höherer Ordnung • *Termes d'ordre supérieur*)

$$\rightsquigarrow \Delta f \approx \Delta x_1 f'_{x_1}(\vec{x}_0) + \dots + \Delta x_n f'_{x_n}(\vec{x}_0)$$

$$\rightsquigarrow |\Delta f| \leq |\Delta x_1| |f'_{x_1}(\vec{x}_0)| + \dots + |\Delta x_n| |f'_{x_n}(\vec{x}_0)| \leq D_1 |f'_{x_1}(\vec{x}_0)| + \dots + D_n |f'_{x_n}(\vec{x}_0)| := \Delta f_{\max}$$

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

Messsituation wie oben beschrieben • *Situation de mesure comme décrit en haut,*
 $f \in \mathcal{D}^{(1)}$

Beh.: • **Thè.:**

$$|\Delta f| \leq D_1 |f'_{x_1}(\vec{x}_0)| + \dots + D_n |f'_{x_n}(\vec{x}_0)| := \Delta f_{\max}$$

Konsequenz: • **Conséquence:**

$$f(\vec{x}^*) = f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in [f(\vec{x}_0) - \Delta f_{\max}, f(\vec{x}_0) + \Delta f_{\max}]$$

Definition: • **Définition:**

$|\Delta f|$ heisst **absoluter Fehler** • *s'appelle erreur absolue,*
 $|\frac{\Delta f}{f(\vec{x}_0)}|$ heisst **relativer Fehler** • *s'appelle erreur relative.*

1. Beispiel: • **Exemple 1:** $f(x, y) = x \pm y \Rightarrow \Delta f_{\max} = D_x |1| + D_y |\pm 1| = D_x + D_y$

2. Beispiel: • **Exemple 2:** $f(x, y) = x \cdot y \Rightarrow \Delta f_{\max} = D_x |y_0| + D_y |x_0|$

3. Beispiel: • **Exemple 3:** $f(x, y) = \frac{x}{y} \Rightarrow \Delta f_{\max} = D_x |\frac{1}{y_0}| + D_y |\frac{x_0}{y_0^2}|$

4. Beispiel: • **Exemple 4:** $f(x, y) = x^y \Rightarrow \Delta f_{\max} = D_x |y_0 \cdot x_0^{y_0-1}| + D_y |x_0^{y_0} \ln(x_0)|$

5. Beispiel: • **Exemple 5:**

$$f(x) = x^2 - 2x + 4 - \sin(x) + \ln(x) \Rightarrow \Delta f_{\max} = D_x |2x_0 - 2 - \cos(x_0) + \frac{1}{x}|$$

Bemerkung: • **Remarque:**

Diese Beispiele zeigen, dass die oft geäußerte Meinung, es genüge mit den extremen Werten zu rechnen, wohl äusserst falsch sein muss. • *Ces exemples démontrent que l'opinion souvent communiquée, qu'il suffit de calculer avec les valeurs extrêmes, doit être complètement fausse.*

6. Beispiel: • **Exemple 6:**Messwerte: • *Valeurs de mesure:*

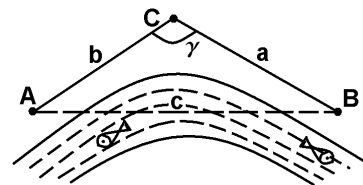
$$a = 364.76 \pm 0.05m$$

$$b = 402.35 \pm 0.05m$$

$$\gamma \hat{=} 68^\circ 14' \pm 4'$$

$$\leadsto \gamma \approx 1.1909 \pm 0.002$$

$$c = ?$$



$$\leadsto c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)} \approx 431.38$$

$$\Rightarrow \Delta c_{\max} = D_a \cdot \left| \frac{\partial c}{\partial a} \right| + D_b \cdot \left| \frac{\partial c}{\partial b} \right| + D_\gamma \cdot \left| \frac{\partial c}{\partial \gamma} \right| =$$

$$= 0.05 \cdot \left| \frac{2a - 2b \cos(\gamma)}{2\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)}} \right| + 0.05 \cdot \left| \frac{2b - 2a \cos(\gamma)}{2\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)}} \right| + 0.002 \cdot \left| \frac{2ab \sin(\gamma)}{2\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)}} \right|$$

$$\approx 0.02498 + 0.03096 + \underbrace{0.36762}_{!!!} \approx 0.424 \Rightarrow c \pm \Delta c_{max} = 431.38 \pm 0.424$$

$$\text{Achtung:} \quad \bullet \text{ Attention:} \quad \gamma \approx 1.1909 \pm 0.002 \Rightarrow c \pm \Delta c_{max} = 431.38 \pm 0.424 \quad !!!!!$$

7.6.3 Linearisierungen — Linéarisations

$$\begin{aligned} \text{Idee:} \quad \bullet \text{ Idée:} \quad \Delta f &= f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) = f(\vec{x}_0 + \Delta \vec{x}) - f(\vec{x}_0) \approx \Delta x_1 f'_{x_1}(\vec{x}_0) + \dots + \Delta x_n f'_{x_n}(\vec{x}_0) \\ &\Rightarrow f(\vec{x}) \approx f(\vec{x}_0) + \Delta x_1 f'_{x_1}(\vec{x}_0) + \dots + \Delta x_n f'_{x_n}(\vec{x}_0) \end{aligned}$$

$$\text{Lemma:} \quad \bullet \text{ Lemme:} \quad \underline{\text{Vor.:}} \quad \bullet \text{ Hyp.:} \quad f \in \mathcal{D}^1$$

$$\underline{\text{Beh.:}} \quad \bullet \text{ Thè.:}$$

$$f(\vec{x}) \approx f(\vec{x}_0) + \Delta x_1 f'_{x_1}(\vec{x}_0) + \dots + \Delta x_n f'_{x_n}(\vec{x}_0)$$

1. Beispiel: • Exemple 1:

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f(\varepsilon) = \frac{1}{1+\varepsilon} \approx f(0) + f'(0) \cdot \varepsilon = 1 + \frac{-1}{(1+\varepsilon)^2} \Big|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon = 1 - \varepsilon$$

$$\text{Z.B.} \quad \bullet \text{ P.ex.} \quad \frac{1}{1.000'000'37} \approx 1 - 0.000'000'37 = 0.999'999'63$$

2. Beispiel: • Exemple 2:

$$f(x) = (1+x)^n \Rightarrow f(\varepsilon) = (1+\varepsilon)^n \approx f(0) + f'(0) \cdot \varepsilon = 1 + n \cdot (1+\varepsilon)^{n-1} \Big|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon = 1 + n \cdot \varepsilon$$

$$\text{Z.B.} \quad \bullet \text{ P.ex.} \quad (1.000'000'000'1)^{54} \approx 1 - 0.000'000'054$$

7.7 Regression — Régression

7.7.1 Der Begriff — La notion

Geg.: • **Donné:**

Stichprobe von Beobachtungen • *Epreuve au hasard d'observations* $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$
 x_k z.B. Maschineneinstellung • *p.ex. réglage (positionnement) de la machine*,
 $y_k = f(x_k)$ Messung • *measurement*.

Problem: • **Problème:** Interpretation des Verhaltens der Messwerte (Gesetz)?

• *Intérpretation du comportement des mesures (lois)?*

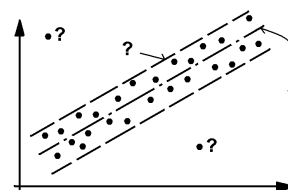
Z.B. Vermutung: Die Messwerte liegen auf einer passenden Geraden oder sonstigen Kurve.

• *P.ex. supposition: Les points mesures sont situés sur une droite qui convient ou sur une autre courbe.*

Problem: • **Problème:**

Wie findet man die „beste“ Gerade (resp. Kurve)? • *Comment trouver la "meilleure" droite (resp. courbe)?*

↪ **Probleme:** • **Problèmes:**



1. Berechnung der Parameter der hypothetischen Kurve. • *Calculer les paramètres de la courbe hypothétique.*
2. Beurteilung der Zuverlässigkeit der getroffenen Wahl. • *Juger l'authenticité du choix qu'on a fait.*

Die so gefundene Kurve trägt den etwas unverständlichen Namen **Regressionskurve**.

• *La courbe ainsi trouvée porte le nom un peu incompréhensible de courbe de régression.*

Wieso dieser Name? Der Name stammt aus einer Beschreibung von Beobachtungen von F. Galton²¹ zum Grössenwachstum von Menschen. Galton hat festgestellt: • *Pourquoi ce nom? Le nom vient d'une description d'observations de F. Galton²¹ quant à la croissance de l'être humain. Galton a observé:*

- 1 Grössere Väter haben grössere Söhne. • *Les pères plus grands ont des fils plus grands.*
- 2 Jedoch beobachtet man die Tendenz, dass grosse Väter grosse Söhne haben, die aber im Mittel kleiner sind als die genannten Väter selbst. Es ist also ein **Rückschritt** $\leadsto$ **Regress** vorhanden.
• *Mais par contre on observe la tendance que les pères plus grands ont des fils grands mais qui sont en moyenne plus petits que les pères dont on parle. Il s'agit donc d'un régression.*

Sei • Soit x = Grösse der Väter • *grandeur des pères*,
 y = Grösse der Söhne • *grandeur des fils*.
 $y(x) = ax + b$ Gerade • *droite*
 $\leadsto$ „Regressionsgerade“ • *„droite de régression“*

Der Begriff *Regressionsgerade* ist also historisch verankert, hat aber inhaltlich nichts mit der Mathematik zu tun. • *La notion de droite de régression est donc fondée par l'histoire. La signification de cette notion n'a rien à faire avec les mathématiques.*

7.7.2 Methode der kleinsten Quadrate — Méthode des carrés minimaux

Das Problem — Le problème

Problem: • **Problème:** Welche Kurve ist die „beste“ Kurve? – Wie ist das Kriterium „beste“ definitorisch am vernünftigsten zu fassen? • *Quelle est la „meilleure“ des courbes? – Comment est-ce qu'il faut définir le critère „meilleur“ dans ce cadre de façon raisonnable?*

Da wir Menschen selbst entscheiden müssen, was unsere „Vernunft“ sein soll, können wir hier „vernünftig“ mit „ökonomisch“ und daher mit „pragmatisch“ und „einfach“ gleichsetzen. Wir wählen daher hier ein pragmatisches Vorgehen. (In der Literatur ist eine etwas fundiertere Begründung üblich, auf der Grundlage des „Maximum-likelihood-Prinzips.“) • *Comme nous, êtres humains, devons décider nous-mêmes ce qui est notre „raison“, nous pouvons remplacer ici „raisonnable“ par „économique“, donc par „pragmatique“ et „simple“. C'est pourquoi nous choisissons ici un chemin pragmatique. (Il est de coutume dans la littérature de présenter une explication un peu plus étoffée, basée sur le principe de „maximum-likelihood“.)*

Wichtig: • **Important:** Dass die gesuchte Kurve eine Gerade oder sonst irgend eine Kurve ist, lässt sich theoretisch nicht exakt entscheiden. Man kann nur zu Aussagen kommen wie „die eine Kurve ist wahrscheinlicher als die andere“. Denn dass die gefundenen Messwerte überhaupt auf einer stetigen Kurve liegen, beruht auf einer Arbeitshypothese, die wir nach Descartes mit dem Argument der Erfahrung und der Arbeitsökonomie begründen. • *On ne peut pas décider de façon théorique que la courbe cherchée est une droite ou n'importe quelle autre courbe. On peut seulement affirmer que „l'une des courbes est plus propable que l'autre“. C'est une hypothèse que les valeurs mesurées sont situées sur une courbe continue, hypothèse que nous faisons d'après Descartes, nous basant sur l'expérience et l'économie du travail.*

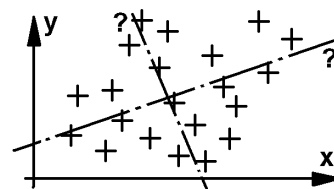
²¹Engl. Naturforscher • *Naturaliste anglais*, 1822 – 1911

Die Begründung der Methode — La déduction de la méthode

Problem: • **Problème:** Durch eine „Punktwolke“ von Messwerten soll eine „beste“ Gerade gelegt werden. Wie ist vorzugehen? • *Il faut tracer la "meilleure" droite à travers un "nuage de points mesures". Comment faut-il procéder?*

Idee 1: • Idée 1:

Versuche g so festzulegen, dass die Summe der Abstände zu g gleich 0 wird. • *Essaie de déterminer g de façon que la somme des distances à g devienne 0.*

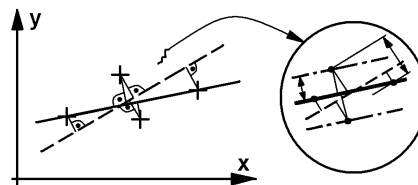


Problem: • **Problème:** Diese Methode funktioniert nicht, da offensichtlich (Skizze) mehrere passende „beste“ Geraden möglich sind. • *Cette méthode ne fonctionne pas car visiblement (esquisse) plusieurs droites du type "meilleure" sont possibles.*

Idee 2: • Idée 2:

Lege die Gerade so, dass die Summe der Beträge der Abstände minimal wird.

• *Choisis la droite de façon que la somme des valeurs absolues des distances à g soit minimale.*

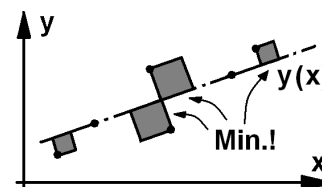


Problem: • **Problème:** Diese Methode funktioniert praktisch schlecht, da beim Berechnen der Abstände im $\mathbb{R}^2$ Wurzeln vorkommen, was die Rechnung sehr kompliziert. • *Cette méthode fonctionne mal en pratique, car en calculant les distances dans le $\mathbb{R}^2$ on obtient des racines carrées ce qui complique passablement le calcul.*

Idee 3: • Idée 3:

Nimm statt der Summe der Beträge der Abstände die Summe der Quadrate der Abstände zu g . Dadurch fallen bei der Rechnung die Quadratwurzeln weg.

• *Choisis au lieu de la somme des valeurs absolues des distances à g la somme des carrés des valeurs absolues des distances. Par conséquent on élimine de cette manière les racines carrées.*

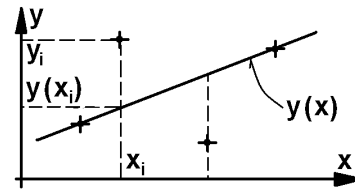


Problem: • **Problème:** Praktisch ist zu einem gegebenen Wert x_i der Messwert y_i gegeben $\leadsto P_i$. Die Gerade soll so bestimmt werden, dass für die nächstgelegenen Punkte $P_i^* \in g$ die Summe der Distanzquadrate $|\overline{P_i P_i^*}|$ minimal ist. Man hat das Problem der Minimalisierung unter der Bedingung, dass $\overline{P_i P_i^*} \perp g$ gilt, was die Rechnung wieder sehr kompliziert. Einfacher wird es, hier einen Fehler in Kauf zu nehmen und $x_i^* = x_i$ zu setzen. • *En pratique on a pour une valeur x_i donnée une valeur de mesure y_i donnée $\leadsto P_i$. La droite doit être déterminée de manière que pour les points les plus proches $P_i^* \in g$ la somme des carrés de distance $|\overline{P_i P_i^*}|$ soit minimale. Le problème de la minimalisation est lié à la condition suivante: $\overline{P_i P_i^*} \perp g$. Cela complique le calcul. Il est plus simple d'accepter une erreur et de mettre $x_i^* = x_i$.*

Idee 4: • **Idée 4:**

Nimm statt Summe der Quadrate der Abstände zu g nur die Summe der Δy_i .

• *Choisis, au lieu de la somme des carrés des valeurs absolues des distances à g , seulement la somme des Δy_i .*



Problem: • **Problème:** Unter der Hypothese, dass die Kurve eine Gerade $y = g(x) = a \cdot x + b$ ist, gilt es nun, a und b zu berechnen. Analog geht man bei andern Kurven vor, z.B. $y = h(x) = a \sin(bx + c)$.

• *Sous l'hypothèse que la courbe soit une droite $y = g(x) = a \cdot x + b$, il faut maintenant calculer a et b . On procède de façon analogue pour d'autres courbes, p.ex. $y = h(x) = a \sin(bx + c)$ etc..*

Lösung: • **Solution:**

$$(1) \sum_{i=1}^n (\Delta y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - g(x))^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax + b))^2 := f(a, b) \rightarrow \text{Min}$$

$$(2) \sum_{i=1}^n (\Delta y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - h(x))^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - (a \sin(bx + c)))^2 := f(a, b) \rightarrow \text{Min}$$

Bedingung: • *Condition:* $\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial b} = 0 \quad \leadsto$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial a} &= \sum_{i=1}^n 2(y_i - ax_i - b) \cdot (-x_i) = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) \cdot x_i = -2 \sum_{i=1}^n y_i \cdot x_i - a \sum_{i=1}^n x_i^2 - b \sum_{i=1}^n x_i \\ &= -2 \sum_{i=1}^n y_i \cdot x_i - a \sum_{i=1}^n x_i^2 - b \sum_{i=1}^n x_i = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial b} &= \sum_{i=1}^n 2(y_i - ax_i - b) \cdot (-1) = -2 \sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i - b \sum_{i=1}^n 1 = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n ax_i - \sum_{i=1}^n b = \sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i - nb = 0 \end{aligned}$$

Sei • *Soit* $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ (Mitterwert der x_i • *valeur moyenne des x_i*), $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad &\triangleright \sum_{i=1}^n x_i y_i = a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i \\ &\triangleright \cancel{n \bar{y}} = \cancel{n a \bar{x}} + \cancel{n b} \Rightarrow y(\bar{x}) = a \bar{x} + b = \bar{y} \end{aligned}$$

$b = \bar{y} - a \bar{x}$ einsetzen: • *substituer:* ($\Rightarrow \bar{y} = a \bar{x} + b$)

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = a \sum_{i=1}^n x_i^2 + (\bar{y} - a \bar{x}) n \bar{x} = a \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2 \right) + n \bar{x} \bar{y}$$

Hinweis: • **Indication:**

$$\text{Sei} \quad \bullet \quad \text{Soit} \quad \vec{d}_e := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} := \vec{1}, \quad \vec{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i y_i = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle, \quad \sum_{i=1}^n x_i = \langle \vec{x}, \vec{d}_1 \rangle, \quad \sum_{i=1}^n y_i = \langle \vec{y}, \vec{d}_1 \rangle \quad \leadsto$$

Formel: • **Formule:****Vor.:** • **Hyp.:**Sei • *Soit* $y = a \cdot x + b$ Regressionsgerade g • *Droite de régression g* **Beh.:** • **Thè.:**

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle - n \bar{x} \bar{y}}{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle - n \bar{x}^2}$$

$$b = \bar{y} - \bar{x} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} = \bar{y} - \bar{x} \cdot \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle - n \bar{x} \bar{y}}{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle - n \bar{x}^2}$$

$$y(\bar{x}) = a \bar{x} + b = \bar{y} \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \in g$$

Schreibweise mit Varianz und Kovarianz — Façon d'écrire à l'aide de la variance et de la covarianceBetrachtung: • *Considération:*

$$s_x^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i \bar{x} + \bar{x}^2) \right) = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \bar{x}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} n \bar{x} + n \bar{x}^2 \right) = \frac{1}{n-1} \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - n \bar{x}^2 \right) = \frac{1}{n-1} \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right)$$

$$= \frac{1}{n-1} (\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle - n \bar{x}^2)$$

In der mathematischen Statistik ist es üblich, die **Varianzen** s_x^2 , s_y^2 und die **Kovarianz** s_{xy} wie folgt zu definieren: • *Dans la statistique mathématique on a la coutume de définir les **variances** s_x^2 , s_y^2 et la **covariance** s_{xy} comme il suit:*

Definition: • **Définition:**

$$s_x^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) = \frac{1}{n-1} (\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle - n \bar{x}^2)$$

$$s_y^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right) = \frac{1}{n-1} (\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle - n \bar{y}^2)$$

$$s_{xy} := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y} \right)$$

$$= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) \right) = \frac{1}{n-1} (\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle - n \bar{x} \bar{y})$$

Es gilt: • *Il vaut:* $\bar{x} = \frac{1}{n} \langle \vec{x}, \vec{1} \rangle$, $\bar{y} = \frac{1}{n} \langle \vec{y}, \vec{1} \rangle$.

Mit Hilfe der Varianz und der Kovarianz lässt sich die Regressionsgerade einfacher schreiben. Dabei benutzen wir: • *A l'aide de la variance et de la covariance on peut simplifier la formule pour la droite de régression. Pour cela nous utilisons:*

Lemma: • **Lemme:** $a = \frac{s_{xy}}{s_x^2}, \quad b = \bar{y} - \bar{x} \cdot \frac{s_{xy}}{s_x^2}$

(Durch ausmultiplizieren verifiziert man leicht: • *En multipliant les termes des deux côtés on vérifie facilement:* $s_{xy} = s_x^2 \cdot a$)

Korollar: • **Corollaire:**

Vor.: • **Hyp.:**

Sei • *Soit*

$y = a \cdot x + b$ Regressionsgerade • *Droite de régression*

Beh.: • **Thè.:** $y = \frac{s_{xy}}{s_x^2} \cdot x + \bar{y} - \bar{x} \cdot \frac{s_{xy}}{s_x^2}$

Bemerkung: • **Remarque:**

Für die Summe der quadratischen Abstände gilt: • *Pour la somme des distances au carré il vaut:*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\Delta y_i)^2 &= \sum_{i=1}^n (y_i - a x_i - b)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y} - a(x_i - \bar{x}))^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 - 2a \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) + a^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\ &= (n-1) \cdot (s_y^2 - 2a s_{xy} + a^2 s_x^2) = (n-1) \cdot (s_y^2 - 2a a s_x^2 + a^2 s_x^2) = (n-1) \cdot (s_y^2 - a^2 s_x^2) \end{aligned}$$

$$\leadsto \sum_{i=1}^n (\Delta y_i)^2 = 0 \Leftrightarrow s_y^2 = a^2 s_x^2 = \left(\frac{s_{xy}}{s_x^2}\right)^2 s_x^2 = \frac{s_{xy}^2}{s_x^2} \Leftrightarrow (s_x \cdot s_y)^2 = s_{xy}^2$$

Satz: • **Théorème:** $\sum_{i=1}^n (\Delta y_i)^2 = 0 \Leftrightarrow (s_x \cdot s_y)^2 = s_{xy}^2$

7.7.3 Korrelation — Corrélation

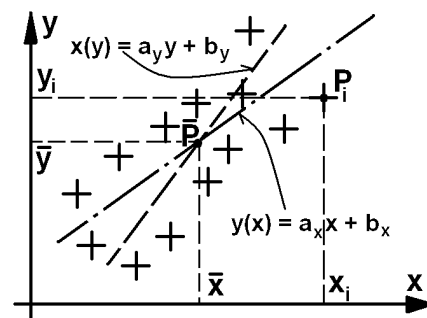
Vorhin haben wir die Gerade $g_x : y(x) = a \cdot x + b$ untersucht. • *Nous venons d'examiner la droite $g_x : y(x) = a \cdot x + b$.*

Da y die abhängige und x die unabhängige Variable war, schreiben wir präziser: • *Comme y était la variable dépendante et x la variable indépendante, nous écrivons de manière plus précise:*

$$y(x) = a_x \cdot x + b_x,$$

$$a_x = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Wir vertauschen nun alle Wertepaare (x_i, y_i) . D.h. wir betrachten y als die abhängige und x als die unabhängige Variable. Dann lässt sich mit der Methode der kleinsten Quadrate wieder die „beste“ Gerade $g_y : x(y) = a_y \cdot y + b_y$ durch die Messpunkte finden. • *Nous échangeons maintenant les paires de valeurs (x_i, y_i) . C.v.d. nous considérons y comme variable indépendante et x comme variable dépendante. Par conséquent on peut de nouveau trouver la droite la "meilleure" $g_y : x(y) = a_y \cdot y + b_y$ par les points de mesure à l'aide de la méthode des carrés minimaux.*



a_y und b_y erhält man aus a_x und b_x durch Rollenvertauschung der $x_i, \bar{x}$ und $y_i, \bar{y}$:

• *On obtient a_y et b_y de a_x et b_x par échangeement des rôles de $x_i, \bar{x}$ et $y_i, \bar{y}$:*

$$a_y = \frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i - n \bar{y} \bar{x}}{\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2} = \frac{s_{yx}}{s_y^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}) \cdot (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2},$$

$$b_y = \bar{x} - \bar{y} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i - n \bar{y} \bar{x}}{\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2}$$

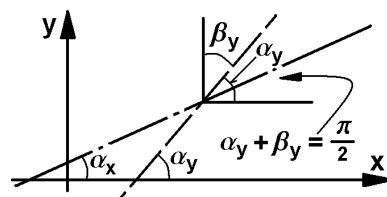
Wenn man g_x und g_y in dasselbe Koordinatensystem einzeichnet, ist zu erwarten, dass zwei verschiedene Geraden entstehen. • *Si on dessine g_x et g_y dans le même système de coordonnées, on peut s'attendre à deux droites différentes.*

Ideal wäre allerdings, wenn g_x und g_y zusammenfallen würden. Dann hätte man: • *Il serait idéal si les deux droites étaient les mêmes. Alors on aurait:*

$$a_x = \tan(\alpha_x),$$

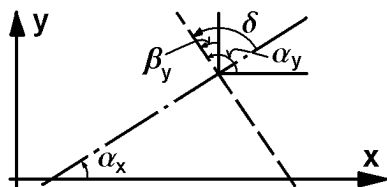
$$a_y = \tan(\beta_y) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_x\right) = \frac{1}{\tan(\alpha_x)}$$

$$\Rightarrow a_x \cdot a_y = \tan(\alpha_x) \cdot \frac{1}{\tan(\alpha_x)} = 1$$



Andernfalls ist: • *Autrement on obtient:*

$$\begin{aligned} a_x \cdot a_y &= \tan(\alpha_x) \cdot \tan(\beta_y) \\ &= \frac{\tan(\alpha_x)}{\tan(\frac{\pi}{2} - \beta_y)} = \frac{\tan(\alpha_x)}{\tan(\alpha_y)} \\ &= \frac{\tan(\alpha_x)}{\tan(\alpha_x + \delta)} \neq 1 \end{aligned}$$



$a_x \cdot a_y = \frac{\tan(\alpha_x)}{\tan(\alpha_x + \delta)}$ ist umso verschiedener von 1, je verschiedener δ von 0 ist • *est plus différent de 1, plus δ est différent de 0.* ~

$a_x \cdot a_y$ ist ein Mass für den Zusammenhang der beiden Geraden, d.h. für die **Korrelation**.

• *$a_x \cdot a_y$ est une mesure pour le rapport entre les deux droites, c.v.d. pour la **corrélation**.*

Es gilt: • *On consatate:* $(s_x, s_y \geq 0)$

$$a_x \cdot a_y = \frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i - n \bar{y} \bar{x}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2} = \frac{(\sum_{i=1}^n y_i x_i - n \bar{y} \bar{x})^2}{(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2) \cdot (\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2)},$$

$$\sqrt{a_x \cdot a_y \cdot \operatorname{sgn}(a_x \cdot a_y)} = \frac{|\sum_{i=1}^n y_i x_i - n \bar{y} \bar{x}|}{\sqrt{(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2) \cdot (\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2)}} = \frac{|s_{xy}|}{\sqrt{s_x^2 \cdot s_y^2}} := |r_{xy}|$$

Definition: • **Définition:**

$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_x^2 \cdot s_y^2}}$ heisst **Korrelationskoeffizient**

• $r_{xy} = \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_x^2 \cdot s_y^2}}$ s'appelle **coefficient de corrélation**

7.7.4 Korrelationskoeff.: Bedeutung — Coeff. de corrélation: Signification

Untersuchung: • *Etude:*

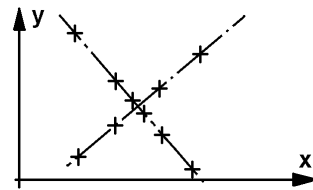
$$\leadsto r_{xy} = 0 \Leftrightarrow 0 = s_{xy} := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\Delta x_i) \cdot (\Delta y_i) =$$

$$\frac{1}{n-1} ((\sum_{i=1}^n x_i y_i) - n \bar{x} \bar{y}) \Leftrightarrow \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i = \overline{\vec{x}, \vec{y}} = \bar{x} \cdot \bar{y}, \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T, \quad \vec{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$$

Konsequenz: • **Conséquence:**

$$r_{xy} = 0 \Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \vdots \\ \Delta y_n \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \vdots \\ \Delta y_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overline{\vec{x}, \vec{y}} = \bar{x} \cdot \bar{y}$$

Diese Situation tritt auf, wenn die Punkte „wolkenartig“ verteilt sind, wie man schon mit vier Punkten sieht, die die Ecken eines achsenparallelen Rechtecks bilden. • *On a cette situation si les points sont distribués en forme de nuage, comme on voit déjà avec quatre points qui sont situés dans les sommets d'un rectangle.*



Detailliertere Untersuchung: • *Etude détaillée:*

Seien • *Soient*

Hier ist: • *Ici, on utilise:*

$\varphi = \Delta(\Delta \vec{x}, \Delta \vec{y})$.

$$\Delta \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \bar{x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \vdots \\ \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix},$$

$$\Delta \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \bar{y} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \vdots \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta y_1 \\ \vdots \\ \Delta y_n \end{pmatrix}$$

Es gilt: • Il vaut:

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_x^2 \cdot s_y^2}} = \frac{\frac{1}{n-1} \cdot \langle \Delta \vec{x}, \Delta \vec{y} \rangle}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \langle \Delta \vec{x}, \Delta \vec{x} \rangle \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \langle \Delta \vec{y}, \Delta \vec{y} \rangle}} = \frac{\frac{1}{n-1} \cdot |\Delta \vec{x}| \cdot |\Delta \vec{y}| \cdot \cos(\varphi)}{\frac{1}{n-1} \cdot |\Delta \vec{x}| \cdot |\Delta \vec{y}|} = \cos(\varphi)$$

$$r_{xy} = 0 \Leftrightarrow \langle \Delta \vec{x}, \Delta \vec{y} \rangle = 0 \Leftrightarrow \Delta \vec{x} \perp \Delta \vec{y} \Leftrightarrow \cos(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$r_{xy} = 1 \Leftrightarrow \langle \Delta \vec{x}, \Delta \vec{y} \rangle = |\Delta \vec{x}| \cdot |\Delta \vec{y}| \Leftrightarrow \Delta \vec{x} \parallel \Delta \vec{y} \Leftrightarrow |\cos(\varphi)| = 1 \Leftrightarrow \varphi = n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Korollar: • Corollaire:

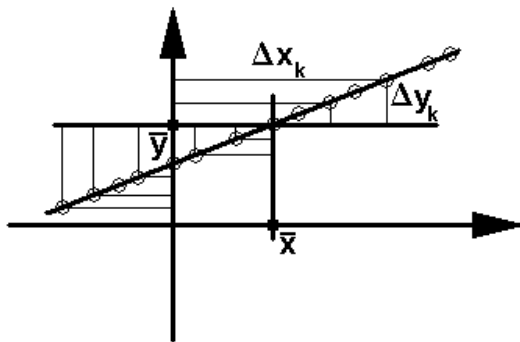
Vor.: • Hyp.:

$$\varphi = \angle(\Delta \vec{x}, \Delta \vec{y}), \quad \Delta \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \bar{x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \bar{y} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

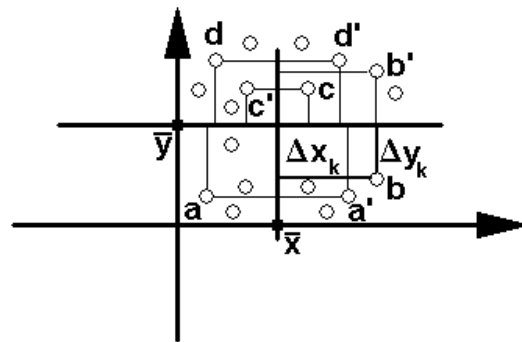
Beh.: • Thè.:

$$r_{xy} = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$|r_{xy}| = 1 \Leftrightarrow \varphi = n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$



$$\varphi = n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$



$$\varphi = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Bsp.: • Exemple:

1. $x = \{2, 3, 4, 6, 8, 12\}$, $y = \{4, 6, 8, 12, 16, 24\}$ ($y = 2x$) $\Rightarrow r = 1$
2. $x = \{-2.1, -2.1, 0, 0, 2, 2.1\}$, $y = \{4, -4, 3, -3, 4, -4\}$ $\Rightarrow r = -0.0106422$
3. $x = \{-2.1, -2, 2, 2.1\}$, $y = \{4, -4, 4, -4\}$ $\Rightarrow r = -0.024383$

Kapitel • Chapitre 8

Integrale von Funktionen mit mehreren Veränderlichen — Intégrales de fonctions à plusieurs variables

8.1 Integration von Integralen — Intégration d'intégrales

8.1.1 Gewöhnliche Integrale als Funktionen eines Parameters — Intégrales simples comme fonctions d'un paramètre

Fall 1: Rechtecksgebiete — Cas 1: Régions rectangulaires

Sei • Soit $z = f(x, y)$ $f : (x, y) \xrightarrow{\text{stet'cont}} z$ resp. • resp. $f : G \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

Sei • Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ fix • fixe
(x „eingefrohren“ • x „gelée“)

$$F(x_0) := \int_{y_1}^{y_2} f(x_0, y) dy$$

→ Allgemeiner: • Plus généralement:

$$F(x) := \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy, \quad x \in [x_1, x_2]$$

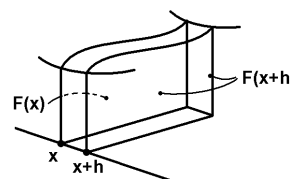
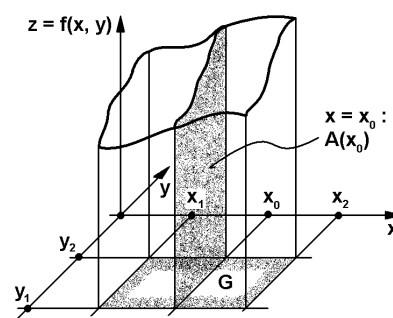
ist ein klassisches Riemann'sches Integral, das noch von einem Parameter x abhängt • est une intégrale de Riemann classique qui dépend encore du paramètre x .

$f(x, y)$ stetig • continue

⇒ $|f(x+h, y) - f(x, y)|$ klein,

falls h klein • petite, si h petit

⇒ $F(x)$ stetig • continue



Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$\begin{aligned} f(x, y) &\in \text{stet'cont}(G) \\ (x, y_1), (x, y_2) &\in G \end{aligned}$$

Beh.: • **Thè.:**

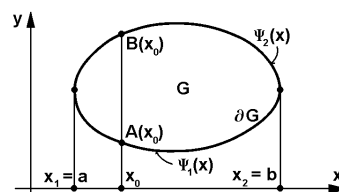
$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy \in \text{stet'cont} \\ \leadsto F(x) &\text{ wieder integrierbar} \quad \bullet \text{ aussi intégrable} \end{aligned}$$

Bsp.: • **Exemple:**

$$F(x) = \int_0^1 \frac{x dy}{\sqrt{1-x^2 y^2}} = \Big|_{x \cdot y = u}^{1 \cdot x} \int_0^x \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin(x) - \arcsin(0) = \arcsin(x)$$

Fall 2: Allgemeine Gebiete — Cas 2: Régions générales

Sei G so, dass ∂G durch zwei stetige Funktionen $\Psi_1(x)$ und $\Psi_2(x)$ oder dazu noch durch vertikale Geradenstücke $\{(x_i, y) \mid y \in [y_1, y_2]\}$ einfach beschrieben werden kann. • *Soit G de façon que ∂G puisse être décrit de manière simple par deux fonctions continues $\Psi_1(x)$ und $\Psi_2(x)$ ou encore par des segments de droites verticales $\{(x_i, y) \mid y \in [y_1, y_2]\}$.*



Begriffe: • **Notions:** Solche Gebiete mit derart einfach beschreibbarem Rand wollen wir hier **einfach beschreibbare Gebiete** nennen. • *Nous appelons ici ces régions, qui ont un bord qu'on peut décrire de manière simple, comme nous venons de mentionner, des **régions facilement descriptibles**.*

Bsp.: • **Exemple:** Konvexe Gebiete sind einfach beschreibbar. • *Des régions convexes sont facilement descriptibles.*

Allgemein kann man „vernünftige Gebiete“ betrachten, die einen vernünftig beschreibbaren Rand (vgl. Seite 243) haben, d. h. keine fraktalen Gebilde. Man sieht unmittelbar geometrisch ein, dass sich solche Gebiete immer in einfach beschreibbare Teilgebiete zerschneiden lassen. Wir können hier auch umgekehrt vorgehen und Gebiete „**vernünftig**“ nennen, wenn sie sich in abzählbar viele einfach beschreibbare Teilgebiete zerschneiden lassen: • *Généralement on peut considérer des „régions raisonnables“, qui ont un bord qu'on peut décrire de manière raisonnable. (Voir page 243) (ç.v.d. pas de constructions fractales.) On voit tout de suite géométriquement qu'on peut toujours découper ces régions en des régions facilement descriptibles. Ici nous pouvons aussi tourner la chose et appeler des régions „raisonnables“, si elles sont découpables en des régions facilement descriptibles:*

Begriffe: • **Notions:** G heisst hier „**vernünftig**“, wenn sich G in abzählbar viele einfach beschreibbare Teilgebiete zerschneiden lässt. Ici G s'appelle „**raisonnable**“, si G est découpable en des régions facilement descriptibles.

Da Integrale unendliche Summen sind und sich solche addieren lassen, genügt es somit, einfach beschreibbare Teilgebiete zu studieren: • *Comme les intégrales sont des sommes infinies qu'on peut additionner, il suffit d'étudier des régions facilement descriptibles:*

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$f(x, y) \in \text{stet'cont}(G), \quad \Psi_1(x), \Psi_2(x) \in \text{stet'cont}([x_1, x_2]) \quad (\in \mathcal{C}([x_1, x_2])), \\ x \in [x_1, x_2]$$

Beh.: • **Thè.:**

$$F(x) = \int_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} f(x, y) dy \in \text{stet'cont}([x_1, x_2]) \quad (\in \mathcal{C}([x_1, x_2]))$$

Das Gegenteil führt sofort zu einem Widerspruch! • *Le contraire mène tout de suite à une contradiction!*

Bsp.: • **Exemple:** Sei • *Soit* :

$G = K_r(x_0, y_0)$ = Kreis um (x_0, y_0) mit Radius r • *Cercle autour de (x_0, y_0) avec rayon r .*

$$F(x) = \int_{y_0 - \sqrt{r^2 - (x-x_0)^2}}^{y_0 + \sqrt{r^2 - (x-x_0)^2}} x \cdot y dy = \frac{1}{2} x \cdot y^2 \Big|_{y=y_0 - \sqrt{r^2 - (x-x_0)^2}}^{y=y_0 + \sqrt{r^2 - (x-x_0)^2}} \\ = \frac{1}{2} x \cdot ((y_0 + \sqrt{r^2 - (x-x_0)^2})^2 - (y_0 - \sqrt{r^2 - (x-x_0)^2})^2) = \dots$$

8.1.2 Übergang zu Doppelintegralen — Passage aux intégrales doubles

Im Fall wo $F(x)$ stetig ist, lässt sich mühelos bilden: • *Dans le cas où $F(x)$ est continue, on peut construire sans problème:*

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b \left(\int_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

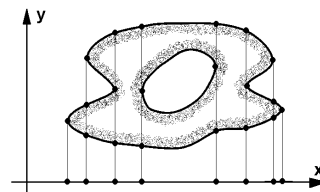
Definition: • **Définition:** $\int_a^b F(x) dx = \int_a^b \left(\int_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$ heisst **Doppelintegral**
• *s'appelle intégrale double*

Bsp.: • **Exemple:** Z.B. im konvexen Fall: • *P.ex. dans le cas convexe:*

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 x \cdot y dy \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x \cdot 1^2 \right) dx = \frac{1}{4}$$

Bemerkung: • **Remarque:** Die „geometrische Bedeutung“ wollen wir in einem späteren Abschnitt besprechen, vgl. Seite 299. • *Nous allons discuter la „signification géométrique“ des intégrales doubles dans une section en bas, voir page 299.*

Im Falle dass G nicht einfach beschreibbar ist, zerschneiden wir G in einfach beschreibbare Teilgebiete und addieren die Integrale über den Teilgebieten. • *Dans le cas où G n'est pas facilement descriptible, nous découpons G en des régions partielles qui sont facilement descriptibles. Ensuite nous additionnons les intégrales sur les régions partielles.*



Bsp.: • **Exemple:** In der Physik ist die Geschwindigkeit $v(t)$ die Ableitung des Weges $s(t)$ und die Beschleunigung $a(t)$ die Ableitung der Geschwindigkeit. • *En physique la vitesse $v(t)$ est la dérivée du chemin $s(t)$ et l'accélération $a(t)$ est la dérivée de la vitesse.*

Umgekehrt ist somit; • *D'autre part on déduit donc:*

$$v(t) = \int_{\tau=t_0}^t a(\tau) d\tau \quad \text{und} \quad \bullet \quad \text{et} \quad s(t) = \int_{\tau=t_0}^t v(\tau) d\tau = \int_{\tau=t_0}^t \left(\int_{\lambda=\tau_0}^{\tau} a(\lambda) d\lambda \right) d\tau$$

$\leadsto$ Doppelintegral • *intégrale double*

Bsp.: • **Exemple:** $t_0 = 0$, $\tau_0 = 0$, $a(t) = a = \text{const.}$

$$\Rightarrow s(t) = \int_{\tau=0}^t v(\tau) d\tau = \int_{\tau=0}^t \left(\int_{\lambda=0}^{\tau} a d\lambda \right) d\tau = \int_{\tau=0}^t a \tau d\tau = \frac{1}{2} a t^2$$

8.1.3 Zur Vertauschbarkeit von Integration und Differentiation — Quant à l'échange de l'intégration et de la différentiation

Fall 1: Rechtecksgebiete — Cas 1: Régions rectangulaires

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

Sei • *Soit $\bar{G} = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$*
 $f(x, y)$ diff'bar nach x in G • *$f(x, y)$ dérivable d'après x dans G*
 $f'_x(x, y)$ stetig in G • *$f'_x(x, y)$ continue dans G*
 f integrierbar nach y • *L'intégrale de f d'après y existe*

Beh.: • **Thè.:**

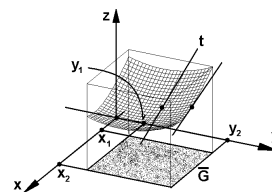
$$1. \quad F(x) = \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy \text{ diff'bar nach } x \quad \bullet \quad \text{dérivable d'après } x$$

$$2. \quad \frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx} \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy$$

$$= \int_{y_1}^{y_2} \frac{d}{dx} f(x, y) dy = \int_{y_1}^{y_2} f'_x(x, y) dy$$

$\leadsto$ Differentiation und Integration sind vertauschbar • *On peut échanger le calcul de la dérivée et de l'intégrale*

Zum Beweis: • *Quant à la preuve:*



$$\begin{aligned}
 F(x+h) - F(x) &= \int_{y_1}^{y_2} f(x+h, y) dy - \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy = \int_{y_1}^{y_2} (f(x+h, y) - f(x, y)) dy \\
 &= \int_{y_1}^{y_2} h \cdot f'_x(x + \lambda \cdot h, y) dy, \quad \lambda \in [0, 1] \text{ (Mittelwertsatz • } \textit{théorème des accroissements finis}) \\
 \Rightarrow \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \int_{y_1}^{y_2} f'_x(x, y) dy \right| &= \left| \int_{y_1}^{y_2} \frac{h}{h} \cdot f'_x(x + \lambda \cdot h, y) dy - \int_{y_1}^{y_2} f'_x(x, y) dy \right| = \\
 &= \left| \int_{y_1}^{y_2} (f'_x(x + \lambda \cdot h, y) - f'_x(x, y)) dy \right| \leq \int_{y_1}^{y_2} |f'_x(x + \lambda \cdot h, y) - f'_x(x, y)| dy \leq_{(*)} \left| \int_{y_1}^{y_2} \varepsilon dy \right| = \varepsilon \cdot |y_2 - y_1| \\
 (*) : f'_x(x, y) \text{ stetig in } G \quad &\bullet \textit{ continue dans } G, \quad |\lambda \cdot h| \leq \delta \Rightarrow |f'_x(x + \lambda \cdot h, y) - f'_x(x, y)| \leq \varepsilon \\
 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= F'_x(x) = \int_{y_1}^{y_2} f'_x(x, y) dy \quad \text{☺}
 \end{aligned}$$

Bsp.: • **Exemple:** $\frac{d}{dx} \int_0^1 \frac{\sin(x \cdot y)}{y} dy = \int_0^1 \frac{d}{dx} \frac{\sin(x \cdot y)}{y} dy$

$$= \int_0^1 \frac{\cos(x \cdot y) \cdot \cancel{y}}{\cancel{y}} dy = \int_0^1 \cos(x \cdot y) dy = \frac{1}{x} \cdot \sin(x \cdot y) \Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{\sin(x)}{x}$$

Fall 2: Allgemeine Gebiete — Cas 2: Régions générales

Sei G ein vernünftiges Gebiet. • *Soit G une région raisonnable.*

Aus Gründen der Zusammensetzbarkeit genügt es hier auch wieder, Teilgebiete mit einem vernünftig beschreibbaren Rand zu untersuchen. • *Quant à la possibilité de composer les régions, il suffit ici de nouveau d'examiner des régions partielles qui ont un bord qu'on peut décrire de manière raisonnable.*

Sei ∂G gegeben durch differenzierbare Funktionen $\Psi_1(x), \Psi_2(x)$ sowie eventuell vertikale äussere Begrenzungen. • *Soit donné ∂G par des fonctions dérivables $\Psi_1(x), \Psi_2(x)$ ainsi qu'éventuellement des bords extérieurs verticaux.*

Sei • *Soit $f \in \mathcal{D}(G)$*

Sei • *Soit $F(x) = \int_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} f(x, y) dy =: \int_u^v f(x, y) dy := \Phi(x, u, v)$ (f stetig in • *continue dans G*)*

Φ ist partiell diff'bar nach x ($u, v = \text{const.}$, vgl. oben), aber auch nach u und v (Fundamentalsatz der Infinitesimalrechnung). • *Φ est partiellement dérivable d'après x ($u, v = \text{const.}$, voir en haut), mais aussi d'après u et v (théorème fondamental du calcul infinitésimal).*

$\leadsto$ Kettenregel: • *Règle conjointe:* $F'_x(x) = \Phi'_x \cdot x'_x + \Phi'_u \cdot u'_x + \Phi'_v \cdot v'_x = \Phi'_x + \Phi'_u \cdot u'_x + \Phi'_v \cdot v'_x$

Fundamentalsatz der Infinitesimalrechnung: • *Théorème fondamental du calcul infinitésimal:*

$$H(x) = \int_y^x h(t) dt \Leftrightarrow H'_x(x) = h(x) \quad \text{oder} \quad \bullet \quad \text{ou}$$

$$H(\varphi(x)) = \int_y^{\varphi(x)} h(t) dt \Leftrightarrow H'_x(\varphi(x)) = h(\varphi(x)) \cdot \varphi'_x(x) \quad (\varphi'_x(x) \text{ ist die innere Ableitung} \quad \bullet \text{ est la dérivée intérieure.})$$

$$\Rightarrow F'_x(x) = \Phi'_x + \Phi'_u \cdot u'_x + \Phi'_v \cdot v'_x = \int_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} f'_x(x, y) dy - f(x, \Psi_1(x)) \cdot \Psi'_1(x) + f(x, \Psi_2(x)) \cdot \Psi'_2(x)$$

$(f, \Psi_1, \Psi_2 \text{ diff'bar nach } x \text{ in } G \quad \bullet \quad f, \Psi_1, \Psi_2 \text{ dérivable d'après } x \text{ dans } G)$

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

Sei G wie beschrieben • *Soit G comme décrit*
 f diff'bar nach x und stetig in G • *f dérivable d'après x et continue dans G*

Ψ_1, Ψ_2 diff'bar • *dérivable*

$$F(x) = \int_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} f(x, y) dy$$

Beh.: • **Thè.:**

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} F(x) &= F'_x(x) = \\ &= \int_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} f'_x(x, y) dy + f(x, \Psi_2(x)) \cdot \Psi'_2(x) - f(x, \Psi_1(x)) \cdot \Psi'_1(x) \end{aligned}$$

1. Beispiel: • **Exemple 1:** $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin(x \cdot y)}{y} dy =$

$$\begin{aligned} &= \int_{x^2}^{x^3} \cos(x \cdot y) dy + \frac{\sin(x \cdot x^3)}{x^3} \cdot 3x^2 - \frac{\sin(x \cdot x^2)}{x^2} \cdot 2x = \\ &= \frac{1}{x} \cdot \sin(x \cdot y) \Big|_{y=x^2}^{y=x^3} + \frac{3 \sin(x \cdot x^3)}{x} - \frac{2 \sin(x \cdot x^2)}{x} = \frac{1}{x} \cdot (4 \sin(x^4) - 3 \sin(x^3)) \end{aligned}$$

Man beachte hier, dass $\frac{\sin(x \cdot y)}{y}$ keine elementare Stammfunktion hat ($\leadsto$ „Integralsinus“).

• *Notons ici que $\frac{\sin(x \cdot y)}{y}$ n'a pas d'antidérivée élémentaire ($\leadsto$ "sinus intégral").*

2. Beispiel: • **Exemple 2:**

$$\text{Sei} \quad \bullet \quad \text{Soit} \quad F_n(x) = \int_0^x f(y) \cdot \frac{(x-y)^n}{n!} dy \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} F_n(x) = F'_n(x) = F_{n-1}(x)$$

Der Nachweis dieser Formel ist dem Leser als Übung überlassen. • *C'est un exercice pour le lecteur de vérifier cette formule.*

8.2 Doppel — und Mehrfachintegrale: Begriffsfassung — Intégrales doubles et multiples: Déduire la notion

8.2.1 Konzept — Concept

Wir wollen versuchen, die Ideen bei der Herleitung des Integralbegriffs bei Funktionen mit nur einer Variablen zu übersetzen auf den Fall mehrerer Variablen. Bei Funktionen mit einer Variablen ging es um Flächeninhaltsberechnungen. Somit muss es bei Funktionen mit zwei Variablen um Volumeninhaltsberechnungen und bei Funktionen mit mehr als zwei Variablen um höherdimensionale Volumeninhaltsberechnungen gehen. • *Nous voulons essayer de transposer les idées de la déduction de la notion d'intégrale pour des fonctions à une variable aussi aux fonctions à plusieurs variables. Quant aux fonctions à une variable, il s'agissait de calculer les contenus de surfaces. Quant aux fonctions à deux variables, il doit donc s'agir de calculer les contenus de volumes. Quant aux fonctions à plus de deux variables, il doit donc s'agir de calculer les contenus de volumes de dimension supérieure.*

Wir wollen zuerst das Problem anhand von Funktionen mit zwei Variablen studieren. Die Übersetzung auf den Fall von Funktionen mit mehr als zwei Variablen wird dann nicht schwierig sein. • *Nous voulons d'abord étudier le problème pour des fonctions à deux variables. La trasposition après pour des fonctions à plus de deux variables ne sera pas difficile.*

Sei $G = D_f$ ein beschränktes, vernünftiges Gebiet. • *Soit $G = D_f$ une région bornée et raisonnable.*
(Zur Erinnerung: Beschränkte Gebiete haben in einem endlichen Kreis Platz. • *A rappeler: Les régions bornées peuvent être inscrites dans un cercle fini.*)

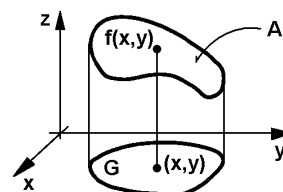
Sei f vorerst stetig. • *Soit f continue pour le moment.*

Sei • *Soit $A_f = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in G\} \subset \mathbb{R}^3$ ($\leadsto$ erzeugte Fläche • *surface pruduite*)*

Problem: • **Problème:**

Ges.: • **Trouver:**

Volumeninhalt zwischen der xy -Ebene und A_f ? • *Mesure du volume entre le plan xy et A_f ?*



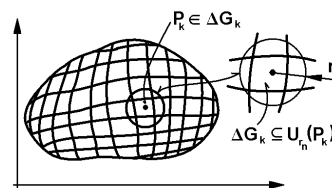
Wichtig: • **Important:** Bevor wir praktisch Beispiele lösen, d.h. wirtschaften können, müssen wir die „neue Landschaft erkunden“, d.h. einen Begriffsapparat aufbauen und diesen studieren.

• *Avant d'être capables de résoudre des exemples pratiques, nous devons connaître "le nouveau paysage", ç.v.d. élaborer et étudier un appareil de notions.*

8.2.2 Gebietszerlegungen — Partition d'une région

Bei Funktionen mit einer Variablen sind wir von Intervallteilungen ausgegangen. Analog gehen wir hier von einer **Gebietszerlegung** aus. • *Quant aux fonctions à une variable nous sommes partis de partitions d'intervalles. Analogiquement nous partons ici d'une **partition de région**.*

$$\leadsto G = \bigcup_{k=1}^n \Delta G_k, \quad \Delta G_i \cap \Delta G_k = \{\}, \\ i \neq j, \quad \forall_k : \Delta G_k \subseteq U_{r_n}(P_k), \quad P_k \in \Delta G_k$$



r_n sei unabhängig von k gewählt, d.h. zu gegebenem n global. • r_n soit choisit indépendamment de k , ç.v.d. globalement pour un n donné.

Begriffe: • **Notions:** Wir nennen r_n hier die **Feinheit** der Zerlegung. • r_n s'aplle ici la **finesse** de la décomposition.

Bsp.: • **Exemple:** Sei ΔG_k Rechteck, $r_n = d_n =$ maximale halbe Diagonallänge bezüglich k .
• Soit ΔG_k rectangle, $r_n = d_n =$ moitié de la longueur maximale de la diagonale par rapport à k .

8.2.3 Verfeinerungen von Gebietszerlegungen — Raffinements de partitions de régions

Bei den Intervallen haben wir von Intervallteilungen, regelmässigen Intervallteilungen und Verfeinerungen von solchen gesprochen. Diese Begriffe lassen sich problemlos unmittelbar ins Mehrdimensionale übersetzen, falls ΔG dieselbe Form zulässt wie G . (Wir reden hier vom **problemlosen Fall**. Der andere Fall ist in einem späteren Abschnitt behandelt, vgl. Seite 303.) Wir erhalten dann z.B. im $\mathbb{R}^2$ Gebietsteilungen, regelmässige Gebietsteilungen und Verfeinerungen von solchen. Dabei soll für eine Folge von Gebietszerlegungen $r_n \rightarrow 0$ gelten, z.B. $r_n = \frac{c}{2^n}$. Gebietszerlegungen, die $r_n \rightarrow 0$ erfüllen, wollen wir **zulässig** nennen.

• Quant aux intervalles, nous avons discuté les partitions d'intervalles, les partitions d'intervalles réguliers et les raffinements de ces partitions. On peut adapter ces notions sans problèmes pour plusieurs dimensions, si l'on peut choisir la même forme pour ΔG comme pour G . (Nous parlons ici du **cas sans problèmes**. L'autre cas est traité plus bas dans une autre section, voir page 303.) Nous obtenons donc p.ex. dans le $\mathbb{R}^2$ des partitions de régions, des partitions de régions régulières et des raffinements de ces partitions. Pour une suite de partitions d'intervalles il faut exiger $r_n \rightarrow 0$, p.ex. $r_n = \frac{c}{2^n}$. Nous appelons les partitions de régions qui ont la propriété $r_n \rightarrow 0$ des partitions **admissibles**.

Reguläre Gebietsteilungen müssen bei bestimmten Translationen in sich selbst übergehen. Man denke z.B. an Rechtecke oder Parallelogramme — oder Steinformen, die heute bei Pflasterungen von Plätzen verwendet werden. • Les partitions de régions régulières doivent s'appliquer en elles-même pour certaines translations. Pensons p.ex. à des rectangles ou bien à des parallélogrammes — ou à des formes de pavés qu'on utilise aujourd'hui pour couvrir les rues.

8.2.4 Riemannsche Summen für problemlose Gebiete — Les sommes de Riemann pour des régions sans problèmes

Wie bei Funktionen mit einer Variablen kann man auch hier bei Funktionen mit zwei Variablen versuchen, den ideal oder auch physikalisch denkbaren Volumeninhalt durch stabförmige Quader über einer regulären Gebietsteilung anzunähern. Der Inhalt wird so mittels Ober- und Untersummen approximiert.

• Comme pour les fonctions à une variable on peut aussi essayer pour les fonctions à deux variables d'approximer le volume, qu'on se représente idéalement ou physiquement, par des rectangles cuboïdes sur une partition de régions régulières. Le contenu est alors approximé par des sommes de rectangles cuboïdes inscrits et circonscrits.

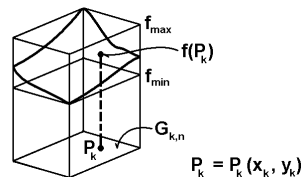
Sei • Soit $f \in \text{beschr'borné}(G)$

Sei • Soit $M_{k,n} = f_{\max}$ in • dans $\Delta \bar{G}_{k,n}$

$\leadsto f_{\max}(\Delta \bar{G}_{k,n})$,

$m_{k,n} = f_{\min}(\Delta \bar{G}_{k,n})$

$|\Delta G_{k,n}| = \text{Inhalt von } \bullet \text{ contenu de } \Delta G_{k,n}$



Es ist geometrisch klar, dass gilt: • C'est une conséquence de la géométrie qu'il vaut:

$$m_{k,n} \cdot |\Delta G_{k,n}| \leq f(x_{k,n}, y_{k,n}) \cdot |\Delta G_{k,n}| \leq M_{k,n} \cdot |\Delta G_{k,n}|$$

Wie bei Funktionen mit einer Variablen definiert man: • Comme pour les fonctions à une variable on définit:

Definition: • **Définition:**

Untersumme • somme de volumes de rectangles cuboïdes inscrits

$$S_n^{in} = \sum_{k_1}^n m_{k,n} \cdot |\Delta G_{k,n}|$$

Obersumme • somme de volumes de rectangles cuboïdes circonscrits

$$S_n^{Gr} = \sum_{k_1}^n M_{k,n} \cdot |\Delta G_{k,n}|$$

Für eine Zwischensumme muss daher gelten: • Pour une somme intermédiaire on doit donc obtenir:

Lemma: • **Lemme:**
$$S_n^{in} \leq \sum_{k_1}^n f(x_{k,n}, y_{k,n}) \cdot |\Delta G_{k,n}| \leq S_n^{Gr}$$

Wie bei Funktionen mit einer Variablen kann man auch hier zu einer brauchbaren Definition des Volumeninhaltes gelangen, falls gilt: • Comme pour les fonctions à une variable on peut dans ce cas aussi obtenir une bonne définition de la mesure du volume, si on a:

$$\sum_{k_1}^n \Delta V_{k,n} = \sum_{k_1}^n (M_{k,n} - m_{k,n}) \cdot |\Delta G_{k,n}| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

$n \rightarrow \infty$ bedeutet Feinheit: $r_n \rightarrow 0$. • $n \rightarrow \infty$ signifie finesse: $r_n \rightarrow 0$.

Und wie bei Funktionen mit einer Variablen ist eine Obersumme S_n^{Gr} zu einer beliebigen Zerlegung immer eine obere Schranke für eine Untersumme S_m^{in} einer beliebigen andern Zerlegung u.s.w.: • Et comme pour les fonctions à une variable une somme supérieure (de volumes de rectangles cuboïdes circonscrits) S_n^{Gr} pour une partition de région quelconque est toujours une borne supérieure pour une somme inférieure (de volumes de rectangles cuboïdes inscrits) S_m^{in} d'une autre partition de régions quelconque etc.:

Lemma: • **Lemme:**

Vor.: • **Hyp.:**

Gegeben seien zwei beliebige Gebietszerlegungen • Soient données deux partitions de régions quelconque $\leadsto G_{k,n}, G_{j,m}$

Beh.: • **Thè.:**

$$S_n^{in} \leq S_m^{Gr}, \quad S_m^{in} \leq S_n^{Gr}$$

Sei nun $f(x, y)$ stetig. • *Soit maintenant $f(x, y)$ continue.*

Wegen $r_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ geht die Distanz zwischen den Punkten, an denen $M_{k,n}$ und $m_{k,n}$ gemessen wird, gegen 0 mit $n \rightarrow \infty$. • *A cause de $r_n \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow \infty$, la distance entre les points où on mesure $M_{k,n}$ et $m_{k,n}$, va vers 0 avec $n \rightarrow \infty$.*

$$\leadsto f(x, y) \in \text{stet'cont} \Rightarrow \forall_k : M_{k,n} - m_{k,n} \rightarrow 0 \Rightarrow \text{Max}(|M_{k,n} - m_{k,n}|) \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \left| \sum_{k_1}^n \Delta V_{k,n} \right| \leq \sum_{k_1}^n |\Delta V_{k,n}| = \sum_{k_1}^n |(M_{k,n} - m_{k,n})| \cdot |\Delta G_{k,n}| \leq \sum_{k_1}^n \text{Max}(|M_{k,n} - m_{k,n}|) \cdot |\Delta G_{k,n}| \\ &= \text{Max}(|M_{k,n} - m_{k,n}|) \cdot \sum_{k_1}^n |\Delta G_{k,n}| = \text{Max}(|M_{k,n} - m_{k,n}|) \cdot |G| \rightarrow 0 \quad (\text{wegen } \bullet \text{ à cause de} \\ &\text{Max}(|M_{k,n} - m_{k,n}|) \text{ und } \bullet \text{ et } |G| \in \mathbb{R}.) \end{aligned}$$

In diesen Fällen gilt nun: • *Dans ces cas on obtient:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{\text{in}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k_1}^n f(x_{k,n}, y_{k,n}) \cdot |\Delta G_{k,n}| = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{\text{Gr}} := V$$

$\leadsto V$ ist so definierbar! • *On peut ainsi définir V !* $\leadsto$

Lemma: • **Lemme:** **Vor.:** • **Hyp.:**

Sei G problemlos und vernünftig • *Soit G sans problème et raisonnable*
 $f \in \text{stet'cont}(\bar{G})$, $G \in \text{beschr'borné}$
 k, n gehören zu einer zulässigen Gebietszerlegung • *k, n sont liés à une*
partition de région admissible

Beh.: • **Thè.:**

- ▷ (1) $\sum_{k_1}^n \Delta V_{k,n} \rightarrow 0$ für • *pour $n \rightarrow \infty$*
 ▷ (2) $V := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k_1}^n f(x_{k,n}, y_{k,n}) \cdot |\Delta G_{k,n}|$ existiert • *existe*

(1) besagt: • *signifie:* $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k_1}^n f(x_{k,n}, y_{k,n}) \cdot |\Delta G_{k,n}|$ unabhängig von der Wahl von

• *indépendant du choix de $P_{k,n}(x_{k,n}, y_{k,n}) \in \bar{G}_{k,n}$*

Zur Begründung von (2): • *Quant à la preuve de (2):*

$$\begin{aligned} &\left| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k_1}^n f(x_{k,n}, y_{k,n}) \cdot |\Delta G_{k,n}| \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k_1}^n |f(x_{k,n}, y_{k,n})| \cdot |\Delta G_{k,n}| \leq \\ &\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k_1}^n \text{Max}(|f(x_{k,n}, y_{k,n})|) \cdot |\Delta G_{k,n}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k_1}^n c \cdot |\Delta G_{k,n}| = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k_1}^n |\Delta G_{k,n}| = c \cdot |G| \end{aligned}$$

$\leadsto$ Majorante! • *Majorante!*

Bemerkung: • **Remarque:** Zur „Epsilonantik“ • *Quant à la façon d'écrire avec ε :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k_1}^n \Delta V_{k,n} \right| = 0 \text{ bedeutet: } \bullet \text{ signifie: } \quad 0 < r_n < \delta \Rightarrow \left| \sum_{k_1}^n \Delta V_{k,n} \right| < \varepsilon$$

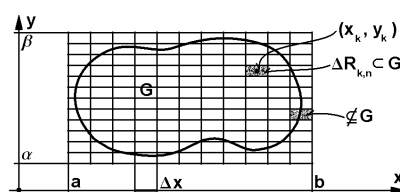
Definition: • **Définition:**Sei • *Soit* $V := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k_1}^n f(x_{k,n}, y_{k,n}) \cdot |\Delta G_{k,n}|$ Im Falle der Existenz von $V \in \mathbb{R}$ nennen wir V **Volumeninhalt** des Körpers zwischen der xy -Ebene und der Funktionsfläche A_f .• *Dans le cas de l'existence de* $V \in \mathbb{R}$ *nous appelons* V **mesure du volume** du corps entre le plan xy et la surface A_f de la fonction.**Symbol:** • **Symbole:** $V := \iint_G f(x, y) dG := \int_G f(x, y) dG := \int_G f(x, y)$

Falls $f(x, y)$ auf G positiv ist, kann man vom **Körper unter der Fläche** A_f reden. Entsprechend für $f(x, y)$ negativ. Im gemischten Fall entstehen negative und positive Inhalte und damit Differenzen. • *Si* $f(x, y)$ *est positive sur* G , *on peut parler du* **volume sous la surface** A_f . *Correspondamment si* $f(x, y)$ *est négative. Dans le cas "mixte" on obtient des contenus positifs et négatifs et donc des différences.*

8.2.5 Riemannsche Summen bei beliebigen vernünftigen Gebieten — Les sommes de Riemann pour des régions quelconques mais raisonnables

Sei • *Soit* G endlich • *fini*. Wir verwenden einen Trick: • *Nous utilisons un truc:*

Packe G in ein Rechteck R ein und erweitere f und D_f wie folgt: • *Inscrivons* G *dans un rectangle* R *et élargissons* f *et* D_f *comme il suit:*



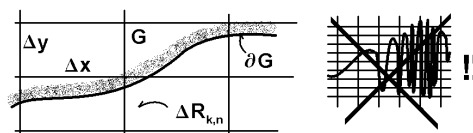
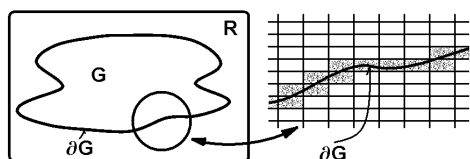
$$f_R(x, y) : = \begin{cases} f(x, y) & (x, y) \in G \\ 0 & (x, y) \notin G \end{cases}$$

Seien • *Soient* $\Delta x = \frac{b-a}{m}$, $\Delta y = \frac{\beta-\alpha}{m}$, $n = m^2$, $(x_{k,n}, y_{k,n}) \in \Delta R_{k,n}$ beliebig • *quelconque*

$\leadsto$ Jetzt können wir mit einer Rechteck-Gebietszerlegung und f_R arbeiten. Ausserhalb G liefert f_R keinen Beitrag. Die Riemannsche Summe erstreckt sich nur über die Punkte $\in G$.

• *Maintenant nous pouvons travailler avec une partition de région en rectangles et avec* f_R . *En dehors de* G , f_R *ne contribue à rien. La somme de Riemann compte seulement pour les points* $\in G$.

$$\leadsto \int_G f(x, y) dG \approx \sum_{k_1}^n f(x_{k,n}, y_{k,n}) \cdot \frac{(b-a)(\beta-\alpha)}{m^2} = \frac{(b-a)(\beta-\alpha)}{m^2} \cdot \sum_{k_1}^n f(x_{k,n}, y_{k,n})$$

 $\leadsto$ **Problem:** • **Problème:**

In der Randzone um ∂G kann zufällig $f_R(x_{k,n}, y_{k,n}) = 0$ werden — oder aber $f_R(x_{k,n}, y_{k,n}) = f(x_{k,n}, y_{k,n}) \neq 0$

- Dans la zone autour du bord ∂G , $f_R(x_{k,n}, y_{k,n})$ peut devenir par hasard $= 0$ — ou bien $f_R(x_{k,n}, y_{k,n}) = f(x_{k,n}, y_{k,n}) \neq 0$
- $\leadsto$ Die Berechnung einer ganzen Zone kann also fehlerhaft sein. • Le calcul de toute une zone peut être donc faux.

Nach Voraussetzung ist G vernünftig, d.h. also ∂G genügend „glatt“. Sei nun die Gebietszerlegung genügend fein, sodass sich innerhalb der Problemzone nie 4 Rechtecke $R_{k,n}$ in einem Punkt berühren. Dann kann man die Problemzone in ein Band der Länge von ∂G und der Breite gleich 2 mal die Diagonallänge der Rechtecke $R_{k,n}$ legen. • D'après l'hypothèse G est raisonnable, ç.v.d. assez "lisse". Soit maintenant la partition de région assez fine telle que jamais 4 rectangles $R_{k,n}$ ne se touchent dans un point à l'intérieur de la zone problématique. Puis on peut inscrire la zone problématique dans une bande de la longueur de ∂G et de la largeur correspondant à la double longueur de la diagonale des rectangles $R_{k,n}$.

- $\leadsto$ Inhalt der Problemzone • Contenu de la zone problématique $\leq |\partial G| \cdot 2 \cdot \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$
- $\leadsto$ |Fehler| • |Erreur| $\leq \text{Max}(|f(x_{k,n}, y_{k,n})|) \cdot |\partial G| \cdot 2 \cdot \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0$ für • pour $n \rightarrow \infty$
- (wegen • à cause de $\text{Max}(|f(x_{k,n}, y_{k,n})|), |\partial G| \in \mathbb{R}, \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0$)

Wenn $f_R = f$ in $\bar{G}$ stetig ist und $f_R = 0$ in $R \setminus \bar{G}$, so gilt für ganz R und für f_R : • Si $f_R = f$ est continue dans $\bar{G}$ et $f_R = 0$ dans $F \setminus \bar{G}$ on déduit donc pour tout R et pour f_R :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k_1}^n \Delta V_{k,n} \right| &\leq \sum_{k_1}^n |\Delta V_{k,n}| = \sum_{k_1}^n |(M_{k,n} - m_{k,n})| \cdot |\Delta R_{k,n}| \leq \sum_{k_1}^n \text{Max}(|M_{k,n} - m_{k,n}|) \cdot |\Delta R_{k,n}| = \\ &= \text{Max}(|M_{k,n} - m_{k,n}|) \cdot \sum_{k_1}^n |\Delta R_{k,n}| = \text{Max}(|M_{k,n} - m_{k,n}|) \cdot |G| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Denn in G ist: • Car dans G il vaut: $\text{Max}(|M_{k,n} - m_{k,n}|) \rightarrow 0$
und ausserhalb von G gilt: • Et en dehors de G il vaut: $M_{k,n} = m_{k,n} = 0$

Daher gilt der Satz: • C'est pourquoi nous avons le théorème:

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

Sei • Soit G vernünftig • Soit G raisonnable
 $f \in \text{stet'cont}(\bar{G})$, $G \in \text{beschr'borné}$
 k, n gehören zu einer zulässigen Gebietszerlegung • k, n sont liés à une partition de région admissible

Beh.: • **Thè.:**

- $\triangleright$ (1) $\int_G f(x, y) dG$ existiert • existe
- $\triangleright$ (2) $\int_G f(x, y) dG = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k_1}^n f(x_{k,n}, y_{k,n}) \cdot |\Delta G_{k,n}|$

Damit können wir auch die vorhin gegebene Definition des Volumeninhalts auch bei beliebigen vernünftigen Gebieten übernehmen. • Nous pouvons donc utiliser la définition de la mesure du volume que nous avons donné en haut aussi pour des régions raisonnables quelconques.

8.2.6 n-dimensionale Volumenintegrale — Intégrales de volume à dim. n

Statt $P_{k,n} \in G \subset \mathbb{R}^2$ zu wählen, kann man auch $P_{k,n} \in G \subset \mathbb{R}^m$ wählen. • *Au lieu de choisir $P_{k,n} \in G \subset \mathbb{R}^2$, on peut aussi choisir $P_{k,n} \in G \subset \mathbb{R}^m$.*

$\leadsto$ $P_{k,n}$ wird durch m Koordinaten bestimmt: • *$P_{k,n}$ est défini par m coordonnées:*

$$P_{k,n} = (x_{k,n_1}, \dots, x_{k,n_m})$$

Entsprechend ist $|\Delta G_{k,n}|$ ein Volumeninhalt im $\mathbb{R}^m$. • *En conséquence $|\Delta G_{k,n}|$ est un volume dans le $\mathbb{R}^m$.*

Dabei gehen wir immer von einem kartesischen Koordinatensystem aus, wenn wir nicht explizit ein anderes Koordinatensystem fordern! r_n ist dann der Radius einer m -dimensionalen Kugel. Wenn $|\Delta G_{k,n}|$ ein m -dimensionaler Quader ist, kann man für r_n die halbe Diagonallänge nehmen: $r_n = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_m)^2}$. Man erhält dann wie bei $m = 2$: • *Nous partons toujours d'un système de coordonnées cartésien, si nous n'exigeons pas explicitement un autre système! r_n est alors le rayon d'une sphère de dimension m . Si $|\Delta G_{k,n}|$ est un rectangle cuboïde de la dimension m , on peut prendre pour r_n la moitié de la longueur de la diagonale: $r_n = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_m)^2}$. Alors on obtient comme pour $m = 2$:*

$$\begin{aligned} V &:= \iint_G \dots \int f(x_{k,n_1}, \dots, x_{k,n_m}) dG := \int_G f(x_{k,n_1}, \dots, x_{k,n_m}) dG \\ &:= \int_G f(x_{k,n_1}, \dots, x_{k,n_m}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k_1}^n f(x_{k,n}, y_{k,n}) \cdot |\Delta G_{k,n}| \end{aligned}$$

$\leadsto$ **Schreibweise:** • **Façon d'écrire:**

$$\iint_G \dots \int f(x_{k,n_1}, \dots, x_{k,n_m}) dG := \int_G f(x_{k,n_1}, \dots, x_{k,n_m}) dG := \int_G f$$

Bsp.: • **Exemple:** $P_{k,n} = f(x_{k,n_1}, \dots, x_{k,n_m}) := f(P_{k,n}) = c$

$$\Rightarrow \int_G f(x_{k,n_1}, \dots, x_{k,n_m}) dG = \int_G c dG = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k_1}^n c \cdot |\Delta G_{k,n}| = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k_1}^n |\Delta G_{k,n}| = c \cdot |G|$$

8.2.7 Integrationseregeln — Règles pour l'intégration

Analog zum Fall von Funktionen mit nur einer Variablen kann man hier entsprechende Integrationsregeln herleiten. Der bei der Herleitung der Regeln einzuschlagende Weg geht meist analog zum Fall von Funktionen mit nur einer Variablen. Was anders ist, ist die Art der Berechnung von Abständen: Im $\mathbb{R}^1$ sind es Beträge von Differenzen, z.B. $x_1 - x_2$, im $\mathbb{R}^m$ sind es allgemeiner euklidische Distanzen, z.B. $\sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_m)^2}$. Auf die expliziten Beweise verzichten wir hier aus Raumgründen. Sie sind Sache des Lesers. Oft kann man die Regel auch geometrisch direkt einsehen. • *Analogiquement au cas de fonctions à une variable on peut déduire ici des règles d'intégration correspondantes. Le chemin qui mène au résultat de ces règles est pratiquement le même qu'au cas des fonctions avec une variable. Ce qui est différent est la manière de calculer les distances: Dans le $\mathbb{R}^1$ on a les valeurs absolues de différences, p.ex. $x_1 - x_2$, dans le $\mathbb{R}^m$ ce sont de manière plus générale des distances euclidiennes, p.ex. $\sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_m)^2}$. On renonce ici aux preuves explicites pour des raisons de place. Elles sont l'affaire du lecteur. Souvent on peut comprendre la règle aussi directement de façon géométrique.*

Regeln: • **Règles:**

Vor.: • **Hyp.:**

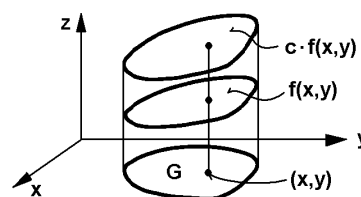
Die verwendeten Gebiete seien vernünftig und die Funktionen integrierbar.

• *Les régions soient raisonnables et les fonctions intégrables.*

Beh.: • **Thè.:**

$$\oslash \int_G (c \cdot f) = c \cdot \int_G f$$

~> Streckung • *Allongement*



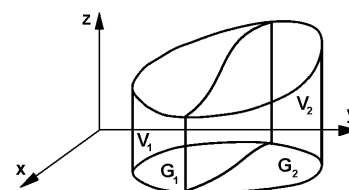
$$\oslash \int_G (f_1 + f_2) = \int_G f_1 + \int_G f_2$$

~> „Addition“ von Volumina • *„Addition de volumes“*

Das Integral ist ein **linearer Operator**. • *L'intégrale est un opérateur linéaire.*

$$\oslash \int_{\substack{G_1 \cup G_2 \\ G_1 \cap G_2 = \{\} }} f = \int_{G_1} f + \int_{G_2} f$$

~> Zusammenzug von Gebieten
• *Réunir des régions*



$$\oslash f \geq g \text{ in } G \bullet \text{ dans } G \Rightarrow \int_G f \geq \int_G g$$

Speziell: • *Spécialement:*

$$|f| \geq f \text{ in } G \bullet \text{ dans } G \Rightarrow \int_G |f| \geq \left| \int_G f \right| \geq \pm \int_G f = \int_G \pm f$$

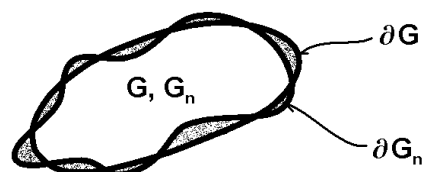
$$\text{Sei} \bullet \text{ Soit } f_m = \min_{P \in G} f(P), f_M = \max_{P \in G} f(P) \Rightarrow |G| \cdot f_m \leq \int_G f \leq |G| \cdot f_M$$

$\oslash$ **Konsequenz:** • **Conséquence:** Mittelwertsatz: • *théorème de la valeur moyenne:*

$$\text{Sei} \bullet \text{ Soit } f \in \mathcal{C}(G), f \in \text{beschr'borné}(G) \Rightarrow \exists P \in G : |G| \cdot f(P) = \int_G f$$

$$\oslash \text{ Sei } \bullet \text{ Soit } \langle f_n \rangle \in \text{UNIFCONV}(G)^{22} \Rightarrow \int_G f_n \rightarrow \int_G f$$

$$\begin{aligned} \oslash \int_R f dG \text{ definiert } \bullet \text{ défini,} \\ \bar{G}_n, \bar{G} \subseteq R, |G \triangle G_n| = \\ = |(G \setminus G_n) \cup (G_n \setminus G)| \rightarrow 0 \\ \text{für } \bullet \text{ pour } n \rightarrow \infty \\ \Rightarrow \int_{G_n} f \rightarrow \int_G f \end{aligned}$$



$\oslash$ Das Problem der Übertragung des Hauptsatzes der Infinitesimalrechnung („Gebietsdifferen-
tiation“: • *Le problème de la transcription du théorème fondamental du calcul infinitésimal:*
„dérivation par rapport à une domaine“:)

~> Die Situation bei Funktionen mit nur einer Variablen: • *La situation pour les fonctions à une seule variable:*

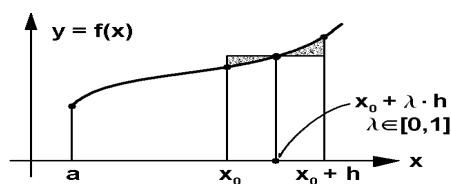
²²UNIFCONV vergleiche Seite 219 • voir page 219

Sei • Soit $F(x) = \int_a^{x_0} f(t) dt$

$$F'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot f(x_0 + \lambda h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + \lambda h) = f(x_0) \Rightarrow F'(x_0) = f(x_0) \text{ (Mittelwertsatz • théorème des accroissements finis)}$$



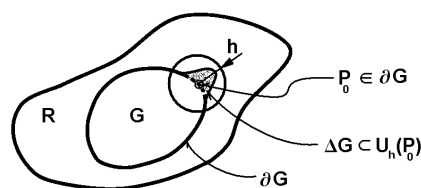
Die Situation bei Funktionen mit zwei Variablen: • La situation pour les fonctions à deux variables:

Sei • Soit $f(x) \in \text{stet}'\text{cont}(R)$,
 $\bar{G}_n, \bar{G} \subseteq R$, $\Delta G \subseteq U_h(P_0)$, $P_0 \in \partial G$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{G \cup \Delta G} f dG - \int_G f dG}{|\Delta G|} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{\Delta G} f dG}{|\Delta G|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P) \cdot |\Delta G|}{|\Delta G|} \Big|_{P \in \Delta G}$$

$$= f(P_0) \text{ (Mittelwertsatz • théorème des accroissements finis, } P \rightarrow P_0 \text{ für } h \rightarrow 0 \text{)}$$



Problem: • **Problème:** Unbestimmte Integrale von Funktionen mit nur einer Veränderlichen sind Stammfunktionen und als solche Funktionen der oberen Intervallgrenze. $\int_G f$ ist ein bestimmtes Integral, das nicht nur von der Grösse von G , sondern auch von der **Form** von G abhängt. Intervalle im $\mathbb{R}^1$ haben alle dieselbe Form, Gebiete aber jedoch nicht. • Les intégrales indéfinies de fonctions avec une seule variable sont des fonctions antidérivées et donc des fonctions de la limite supérieure de l'intervalle. $\int_G f dG$ est une intégrale définie, qui ne dépend pas seulement de la grandeur de G , mais aussi de la forme de G . Les intervalles dans le $\mathbb{R}^1$ ont tous la même forme par contre aux régions.

Konsequenz: • **Conséquence:** Daher lässt sich der Begriff Stammfunktionen nicht direkt auf Integrale über Gebieten mit verschiedener Form übertragen. • La notion de l'antidérivée ne se laisse donc pas transcrire directement pour des intégrales sur des domaines à forme quelconque.

8.3 Berechnung von Doppel- und Mehrfachintegralen — Calculer des intégrales doubles et multiples

8.3.1 Gebietsintegrale, allgemeine Situation — Intégrales de région, situation générale

Sei G ein vernünftiges, beschränktes Gebiet, f stetig und beschränkt auf G . • Soit G une région raisonnable et bornée, f continue et bornée sur G .

Sei • Soit $G \in R$ (Rechteck • Rectangle.)

Falls eine Funktion über G integrierbar ist, d.h. die Riemannsche Summen konvergieren, so folgt aus dem ersten Lemma (Seite 301), dass der Wert des Integrals nicht von der Art der Gebietszerlegung abhängen kann. Man darf somit für die $\Delta G_{k,n}$ die denkbar vernünftigste Form wählen. Bei kartesischen Koordinaten drängen sich natürlich achsenparallele Rechtecke auf. Dabei ist folgender Begriff üblich: • Si une fonction sur G est intégrable, ç.v.d. les sommes de Riemann convergent, alors on déduit du premier lemme (à la page 301) que la valeur de l'intégrale ne peut pas dépendre de la manière de la

partition de la région. On peut donc choisir la forme la plus raisonnable pour les $\Delta G_{k,n}$. Pour les coordonnées cartésiennes il est utile de choisir des rectangles parallèles aux axes. En ce cadre la notion suivante est utile:

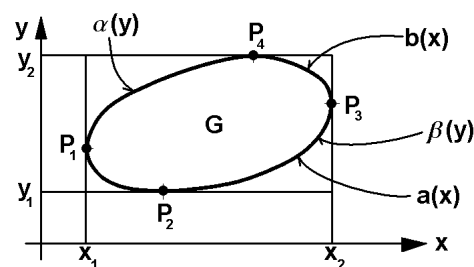
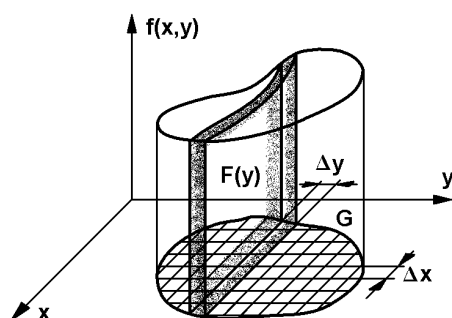
Definition: • Définition:

Für $\Delta G \subset \mathbb{R}^2$ heisst ΔG **Flächenelement**, für $\Delta G \subset \mathbb{R}^3$ heisst ΔG **Volumenelement**, für $\Delta G \subset \mathbb{R}^m$ heisst ΔG **m-dimensionales Volumenelement**. • Pour $\Delta G \subset \mathbb{R}^2$, ΔG s'appelle **élément de surface**, pour $\Delta G \subset \mathbb{R}^3$, ΔG s'appelle **élément de volume**, pour $\Delta G \subset \mathbb{R}^m$, ΔG s'appelle **élément de volume à dimension m**.

Im Falle einer Rechteckzerlegung erhalten wir für das Flächenelement bei einer Zerlegung in je m Streifen in x und in y -Richtung: • Au cas de la partition en rectangles nous obtenons pour l'élément de surface pour une décomposition en m bandes en direction de x et m bandes en direction d' y :

$$\Delta G_{k,n=m^2} = \Delta G_m = \Delta R_m = \Delta x \cdot \Delta y = \frac{x_1 - x_1}{m} \cdot \frac{y_1 - y_1}{m} = \frac{(x_1 - x_1)(y_1 - y_1)}{m^2}$$

(1) Konvexe Gebiete — Des régions convexes



Sei • Soit $\partial G = \{(x, a(x))\} \cup \{(x, b(x))\} = \{(\alpha(y), y)\} \cup \{(\beta(y), y)\}$

Unten: • En bas: $\{(x, a(x))\}$ von • de P_1 bis • jusqu'à P_3 über • par P_2

Oben: • En haut: $\{(x, b(x))\}$ von • de P_1 bis • jusqu'à P_3 über • par P_4

Links: • A gauche: $\{(\alpha(y), y)\}$ von • de P_4 bis • jusqu'à P_2 über • par P_1

Rechts: • A droite: $\{(\beta(y), y)\}$ von • de P_4 bis • jusqu'à P_2 über • par P_3

Sei • Soit $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m f_R(x_{i,m}, y) \Delta x_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m f(x_{i,m}, y) \Delta x_m = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx := F(y)$

Ohne hier in die „Tiefen der Theorie der Doppelreihen“ hinauszusteigen, können wir bei Volumeninhalten doch durch die Anschauung motiviert nachvollziehen (Umstellungen zulässig für stetige, positive Funktionen wegen der absoluten Konvergenz): • Sans étudier à fond la théorie des séries doubles, nous pouvons pour des mesures de volumes, motivé par la clarté géométrique, accepter quand-même (transformations admissibles pour des fonctions continues et positives à cause de la convergence absolue):

$$\begin{aligned} & \leadsto \int_G f(x, y) dG = \int_R f_R(x, y) dR = \\ & = \lim_{n=m^2 \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n=m^2} f_R(x_{k,n}, y_{k,n}) \Delta R_m = \lim_{n=m^2 \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n=m^2} f_R(x_{k,n}, y_{k,n}) \Delta x_m \cdot \Delta y_m \\ & = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m f_R(x_{i,m}, y_{j,m}) \Delta x_m \cdot \Delta y_m = \lim_{m_2 \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{m_2} \left(\lim_{m_1 \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{m_1} f_R(x_{i,m_1}, y_{j,m_2}) \Delta x_{m_1} \right) \cdot \Delta y_{m_2} \end{aligned}$$

$$= \lim_{m_2 \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{m_2} F(y) \Delta y_{m_2} = \int_{x_1}^{x_2} F(y) dy = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

Da $\Delta R_m = \Delta x_m \cdot \Delta y_m = \Delta y_m \cdot \Delta x_m$ gilt, schliesst man ebenso durch Vertauschung der Summationsreihenfolge: • *Parce qu'il vaut $\Delta R_m = \Delta x_m \cdot \Delta y_m = \Delta y_m \cdot \Delta x_m$, on déduit de la même façon par échangeement de l'ordre de sommation:*

$$\int_G f(x, y) dG = \dots = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

Seien • *Soient* : G vernünftig, beschränkt, konvex • G raisonnable, bornée, convexe,
 f stetig und beschränkt auf G • f continue et bornée sur G

Beh.: • **Thè.:**

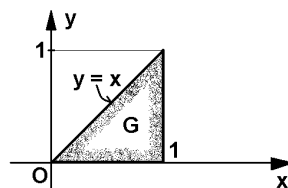
$$\int_G f(x, y) dG = \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx \right) dy = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

1. Beispiel: • **Exemple 1:**

$$f(x, y) = x \cdot y^2,$$

G Dreieck wie gezeigt

• G Triangle comme dans l'esquisse



$$\int_G f(x, y) dG = \int_0^1 \left(\int_0^x x \cdot y^2 dy \right) dx = \int_0^1 \left(x \cdot \frac{1}{3} y^3 \Big|_0^x \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{3} x^4 dx = \frac{1}{3 \cdot 5} x^5 \Big|_0^1 = \frac{1}{15}$$

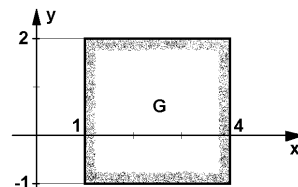
oder • *ou* :

$$\begin{aligned} \int_G f(x, y) dG &= \int_0^1 \left(\int_y^1 x \cdot y^2 dx \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x^2 \cdot y^2 \Big|_y^1 \right) dy = \int_0^1 \frac{1}{2} (1 - y^2) \cdot y^2 dy = \int_0^1 \frac{1}{2} (y^2 - y^4) dy = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 3} y^3 \Big|_0^1 - \frac{1}{2 \cdot 5} y^5 \Big|_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{5-3}{30} = \frac{1}{15} \end{aligned}$$

2. Beispiel: • **Exemple 2:**

$$f(x, y) = 2x + 6x^3y, \quad G \text{ Rechteck wie gezeigt}$$

• *Rectangle comme dans l'esquisse*



$$\int_G f(x, y) dG = \int_{-1}^2 \left(\int_1^4 2x + 6x^3y dx \right) dy = \int_{-1}^2 \left(2 \frac{x^2}{2} + 6 \frac{x^4}{4} y \Big|_1^4 \right) dy = \int_{-1}^2 (15 + 38.25y) dy = 618.75$$

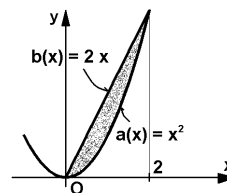
3. Beispiel: • Exemple 3:

$$f(x, y) = x^3 + 4y,$$

G Figur wie gezeigt

• G Figure comme dans l'esquisse

$$a(x) = x^2, \quad b(x) = 2x, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 2$$



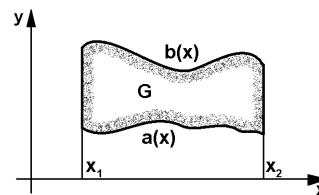
$$\begin{aligned} \int_G f(x, y) dG &= \int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2x} (x^3 + 4y) dy \right) dx = \int_0^2 \left(x^3 y + \frac{4}{2} y^2 \Big|_{x^2}^{2x} \right) dx = \int_0^2 (2x^4 + 8x^2 - (x^5 + 2x^4)) dx = \\ &= \frac{8}{3} x^3 - \frac{1}{6} x^6 \Big|_0^2 = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

(2) Gebiete begrenzt durch Vertikalen — Des régions bornées par des verticales

Sei die Situation wie bei konvexen Gebieten, ausser dass G links und rechts durch vertikale Geradenstücke begrenzt ist. Oben sei der Rand gegeben durch $b(x)$ und unten durch $a(x)$.

• Soit la situation la même que pour les régions convexes, sauf qu'à gauche et à droite G est bornée par des segments de droites verticales. En haut le bord est donné par $b(x)$ et en bas par $a(x)$.

Wie im Falle (1) steht auch hier zuerst einer Summation in y -Richtung und darauf in x -Richtung nichts im Wege. Umgekehrt kann man jedoch nicht vorgehen. Das zeigt die Form von G . • Comme dans le cas (1) ici aussi on peut d'abord calculer la somme en direction d' y et après en direction de x . Mais on ne peut pas inverser cet ordre! C'est clairement visible par la forme de G .



~> **Konsequenz: • Conséquence:**

Formel: • Formule:

Vor.: • Hyp.:

Seien • Soient: G wie beschrieben • G comme décrit
 f stetig und beschränkt auf G • f continue et bornée sur G

Beh.: • Thè.:

$$\int_G f(x, y) dG = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dy \right) dx$$

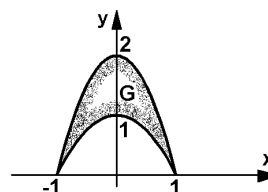
Bsp.: • Exemple:

$$f(x, y) = x + y,$$

G Figur wie gezeigt

• G Figure comme dans l'esquisse

$$\Psi_1(x) = -x^2 + 1, \quad \Psi_2(x) = -2x^2 + 2$$

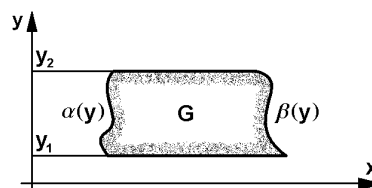


$$\begin{aligned} \int_G f(x, y) dG &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-x^2+1}^{-2x^2+2} x + y dy \right) dx = \int_{-1}^1 \left(y \cdot x + \frac{1}{2} y^2 \Big|_{-x^2+1}^{-2x^2+2} \right) dx = \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2} + x - 3x^2 - x^3 + \frac{3x^4}{2} \right) dx = \frac{8}{5} \end{aligned}$$

(3) Gebiete begrenzt durch Horizontale — Des régions bornées par des horizontales

Sei die Situation wie im Falle (2), ausser dass G oben und unten von Geradenstücke resp. Horizontalen (zwei Horizontale) begrenzt ist. Links sei der Rand gegeben durch $\alpha(x)$ und rechts durch $\beta(x)$. • *Soit la situation la même qu'au cas (2), sauf que en haut et en bas G est bornée par des segments de droites horizontales. A gauche le bord est donné par $\alpha(x)$ et à droite par $\beta(x)$.*

Wie im Falle (2) steht hier zuerst einer Summation in x -Richtung und darauf in y -Richtung nichts im Wege. Umgekehrt kann man jedoch nicht vorgehen. Das zeigt wieder die Form von G . • *Comme dans le cas (2) ici aussi on peut d'abord calculer la somme en direction de x et après en direction d' y . Mais on ne peut pas invertir cet ordre! C'est de nouveau clairement visible par la forme de G .*



→ **Konsequenz:** • **Conséquence:**

Formel: • **Formule:**

Vor.: • **Hyp.:**

Seien • *Soient*: G wie beschrieben • G comme décrit
 f stetig und beschränkt auf G • f continue et bornée sur G

Beh.: • **Thè.:**

$$\int_G f(x, y) dG = \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

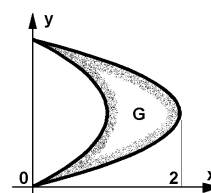
Bsp.: • **Exemple:**

$$f(x, y) = x \cdot y,$$

G Figur wie gezeigt

• G Figure comme dans l'esquisse

$$\Psi_1(y) = \sin(y), \quad \Psi_2(y) = 2 \sin(y)$$



$$\int_G f(x, y) dG = \int_0^\pi \left(\int_{\sin(y)}^{2 \sin(y)} x \cdot y dx \right) dy = \int_0^\pi \left(\frac{3y \sin(y)^2}{2} \right) dy = \frac{3\pi^2}{8}$$

8.3.2 Anwendung auf Volumenberechnungen — application pour calculer des volumes

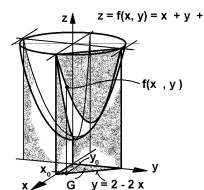
1. Beispiel: • Exemple 1:

Berechne den Volumeninhalt von V unterhalb des Rotationsparaboloids • *Calculer la mesure du volume de V en dessous du paraboloïde de révolution*

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$$

V ist beschränkt durch die Koordinatenebenen sowie die Ebene $2x + y = 2$.

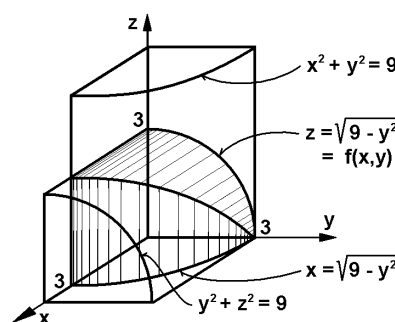
• V est borné par les plans de coordonnées et le plan $2x + y = 2$.



$$\begin{aligned} V &= \int_G f(x, y) dG = \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=0}^{y=2-2x} x^2 + y^2 + 1 dy \right) dx = \int_{x=0}^{x=1} \left(x^2 y + \frac{1}{3} y^3 + y \right) \Big|_{y=0}^{y=2-2x} dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \left(\frac{14}{3} - 10x + 10x^2 - \frac{14}{3} x^3 \right) dx = \frac{14}{3} x - 5x^2 + \frac{10}{3} x^3 - \frac{7}{6} x^4 \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{11}{16} \end{aligned}$$

2. Beispiel: • Exemple 2:

Berechne den Volumeninhalt des Körpers, der im ersten Oktanten liegt und begrenzt ist durch die Koordinatenebenen und die Zylinder $x^2 + y^2 = 9$ sowie $y^2 + z^2 = 9$ • *Calculer la mesure du volume du corps qui est situé dans le premier octante et est borné par les plans de coordonnées et les cylindres $x^2 + y^2 = 9$ et $y^2 + z^2 = 9$*



$$\begin{aligned} V &= \int_G f(x, y) dG = \int_{y=0}^{y=3} \left(\int_{x=0}^{x=\sqrt{9-y^2}} \sqrt{9-y^2} dx \right) dy = \int_{y=0}^{y=3} \left(x \cdot \sqrt{9-y^2} \Big|_{x=0}^{x=\sqrt{9-y^2}} \right) dy = \\ &= \int_{y=0}^{y=3} (\sqrt{9-y^2} \cdot \sqrt{9-y^2}) dy = \int_{y=0}^{y=3} (9-y^2) dy = 9y - \frac{1}{3} y^3 \Big|_{y=0}^{y=3} = 9 \cdot 3 - \frac{1}{3} 3^3 = 27 - 9 = 18 \end{aligned}$$

Interessant! π kommt nicht von im Resultat! • *Intéressant! π n'apparaît pas dans le résultat!*

8.3.3 Uneigentliche Gebietsintegrale, Anwendung — Intégrales de région impropres, application

Beispiel der Berechnung eines gewöhnlichen Integrals via Gebietsintegral — Exemple: Calculer une intégrale simple par une intégrale de région

Betrachten wir zuerst: • *D'abord nous étudions:*

$$\begin{aligned} \int_c^\infty \left(\int_a^b f(x, y) dy \right) dx &:= \lim_{d \rightarrow \infty} \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dy \right) dx = \lim_{d \rightarrow \infty} \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dx \right) dy = \\ &= \lim_{d \rightarrow \infty} \int_a^b F(d, y) dy = \int_a^b \lim_{d \rightarrow \infty} F(d, y) dy \end{aligned}$$

(falls $F(d, y)$ mit $d \rightarrow \infty$ in $[a, b]$ gleichmäßig konvergiert, vgl. Seite 223 • *si $F(d, y)$ converge uniformément avec $d \rightarrow \infty$ dans $[a, b]$, voir page 223*)

$$\leadsto \int_c^\infty \left(\int_a^b f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \lim_{d \rightarrow \infty} \int_c^d f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^\infty f(x, y) dx \right) dy \quad \leadsto$$

Lemma: • **Lemme:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$F(d, y) = \int_c^d f(x, y) dx \in \mathcal{UNIFCONV}$$

für • *pour* $x \in [a, b]$, $d \rightarrow \infty$

Die verwendeten Integrale existieren • *les intégrales utilisées existent*

Beh.: • **Thè.:**

$$\int_c^\infty \left(\int_a^b f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_c^\infty f(x, y) dx \right) dy$$

Bsp.: • **Exemple:** Sei • *Soit* $a, b > 0$

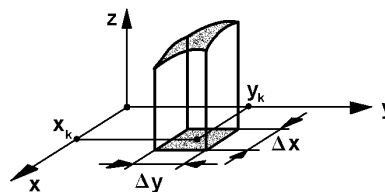
$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx &= \int_0^\infty \left(\int_a^b e^{-xy} dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_0^\infty e^{-xy} dx \right) dy = \int_a^b \left(\frac{-e^{-xy}}{y} \Big|_0^\infty \right) dy = \\ &= \int_a^b \left(\frac{+e^{-xy}}{y} \Big|_\infty^0 \right) dy = \int_a^b \left(\frac{1}{y} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{+e^{-xy}}{y} \right) dy = \Big|_{a, b > 0 \Rightarrow y > 0} \int_a^b \left(\frac{1}{y} - 0 \right) dy = \ln(y) \Big|_a^b = \\ &= \ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right) \end{aligned}$$

8.3.4 Gebietsintegrale in Polarkoordinaten — Intégrales de région en coordonnées polaires

In kartesischen Koordinaten war das Flächenelement $\Delta x \cdot \Delta y$, infinitesimal $dx dy$, und der „infinitesimale Quader $f(x, y) dx dy$ “.

• *En coordonnées cartésiennes l'élément de surface était*

$\Delta x \cdot \Delta y$, infinitésimalement $dx dy$, et le „rectangle cuboïde infinitésimale“ était $f(x, y) dx dy$.



Nun gibt es aber Probleme, die sich einfacher in Polarkoordinaten beschreiben lassen. Man denke z.B. an ein Gebiet, das von einer Spirale begrenzt ist. Dann muss man konsequenterweise hier eine Gebietszerlegung benutzen, die diesem Koordinatensystem angepasst ist. Das führt dann zu einem andern Flächenelement (vgl. Skizze). • *Or, il y a des problèmes qui se laissent mieux décrire en coordonnées polaires. Pensons à une région bornée par une spirale. Par conséquent on doit donc utiliser une partition de région qui est mieux adaptée à cette situation. Cela mène à un autre élément de surface (voir esquisse.)*

Sektor: • *Secteur:*

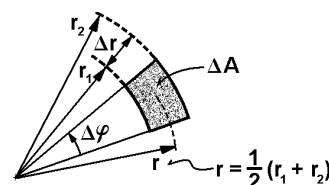
$$A = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\Delta \varphi}{2\pi},$$

$$r_1 = r, \quad r_2 = r + \Delta r$$

$$\Delta G = \Delta A \approx \frac{r_2 \cdot (r_2 \cdot \Delta \varphi)}{2} - \frac{r_1 \cdot (r_1 \cdot \Delta \varphi)}{2} =$$

$$\frac{\Delta \varphi}{2} \cdot (r_2^2 - r_1^2) = \frac{\Delta \varphi}{2} \cdot (r_2 - r_1) \cdot (r_2 + r_1)$$

$$= \frac{\Delta \varphi}{2} \cdot (\Delta r) \cdot (2r + \Delta r) = \Delta \varphi \cdot \Delta r \cdot \left(r + \frac{\Delta r}{2} \right) \rightarrow d\varphi dr r$$



Lemma: • **Lemme:** In Polarkoordinaten ist das Flächenelement: • *En coordonnées polaires l'élément de surface est:* $r \varphi dr$

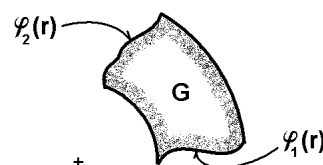
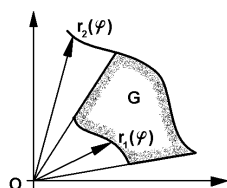
Wir können sinnvollerweise die folgenden beiden Fälle unterscheiden: • *Nous pouvons distinguer la différence entre les deux cas suivants:*

(1) Veränderliche Radien: • *Des rayons variables:*

$$r_1 = g_1(\varphi), \quad r_2 = g_2(\varphi)$$

(2) Veränderliche Winkel: • *Des angles variables:*

$$\varphi_1 = h_1(r), \quad \varphi_2 = h_2(r)$$



Damit können wir analog zu den kartesischen Koordinaten die folgenden Formeln notieren:

• *Nous pouvons donc noter les formules suivantes, analoguement aux coordonnées cartésiennes:*

Formel: • **Formule:**

Vor.: • **Hyp.:**

Seien • *Soient:* G vernünftig, beschränkt, konvex

• G raisonnable, bornée, convexe

f stetig und beschränkt auf G • f continue et bornée sur G

Beh.: • **Thè.:**

$$\text{Fall } \bullet \text{ Cas (1): } \int_G f(r, \varphi) dG = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\int_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} f(r, \varphi) \cdot r dr \right) d\varphi$$

$$\text{Fall } \bullet \text{ Cas (2): } \int_G f(r, \varphi) dG = \int_{r_1}^{r_2} \left(\int_{h_1(r)}^{h_2(r)} f(r, \varphi) \cdot r d\varphi \right) dr$$

Bemerkung: • **Remarque:**

Im Spezialfall $f(r, \varphi) \equiv 1$ erhalten wir den Flächeninhalt!

• *Dans le cas spécial $f(r, \varphi) \equiv 1$ nous obtenons la mesure de la surface.*

1. Beispiel: • **Exemple 1:**

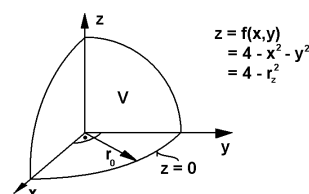
$$z = f(x, y) = 4 - x^2 - y^2 = 4 - r^2 = f_p(r)$$

$$V = \int_{\varphi_1=0}^{\varphi_2=\frac{\pi}{2}} \left(\int_{r_1=0}^{r_2=2} (4 - r^2) \cdot r dr \right) d\varphi$$

$$= \int_{\varphi_1=0}^{\varphi_2=\frac{\pi}{2}} \left(2r^2 - \frac{r^4}{4} \Big|_0^2 \right) d\varphi$$

$$= \int_{\varphi_1=0}^{\varphi_2=\frac{\pi}{2}} 4 d\varphi = 4 \varphi \Big|_{\varphi_1=0}^{\varphi_2=\frac{\pi}{2}}$$

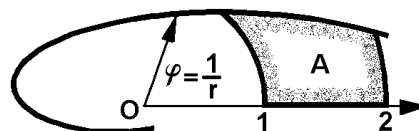
$$= 4 \frac{\pi}{2} = 2\pi$$



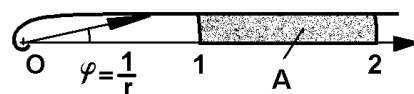
2. Beispiel: • Exemple 2:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &\equiv 0, \quad \varphi_2 \equiv \frac{1}{r} \quad A = \int_G dG \\
&= \int_{r_1=1}^{r_2=2} \left(\int_{\varphi_1=0}^{\varphi_2=\frac{1}{r}} r \, d\varphi \right) dr = \int_{r_1=1}^{r_2=2} \left(r \varphi \Big|_{\varphi_1=0}^{\varphi_2=\frac{1}{r}} \right) dr \\
&= \int_{r_1=1}^{r_2=2} \left(r \frac{1}{r} \right) dr = \int_{r_1=1}^{r_2=2} 1 \, dr \\
&= r \Big|_{r_1=1}^{r_2=2} = 2 - 1 = 1
\end{aligned}$$

Massstäblich: • *A l'échelle:*

Skizze / Esquisse

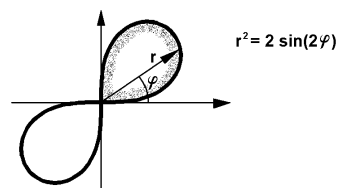
$$x : y = 1 : 1$$

**3. Beispiel: • Exemple 3:**

Lemniskate: • *Lemniscate:*

$$r^2 = 2 \sin(2\varphi)$$

$$\begin{aligned}
A &= \int_G dG = \int_{\varphi_1=0}^{\varphi_2=\frac{\pi}{2}} \left(\int_{r_1=0}^{r_2=\sqrt{2 \sin(2\varphi)}} r \, dr \right) d\varphi = \\
&= \int_{\varphi_1=0}^{\varphi_2=\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} r^2 \Big|_{r_1=0}^{r_2=\sqrt{2 \sin(2\varphi)}} \right) d\varphi = \\
&= \int_{\varphi_1=0}^{\varphi_2=\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \sin(2\varphi) \right) d\varphi = \frac{1}{2} \cos(2\varphi) \Big|_{\varphi_1=0}^{\varphi_2=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} (-1 - (1)) = \frac{1}{2} 2 = 1
\end{aligned}$$

**8.4 Oberflächenintegrale — Intégrales superficielles****8.4.1 Inhalte krummer Flächen — Mesures de surfaces courbes et tordues**

Problem: • **Problème:** Gegeben sei $f(x, y)$ stetig differenzierbar (d.h. die Tangentenrichtung ändert stetig) und beschränkt über einem vernünftigen endlichen Gebiet G . Was ist der Inhalt der durch f erzeugten Fläche Φ im $\mathbb{R}^3$? • *Soit donnée $f(x, y)$ continûment dérivable (c.v.d. la direction de la tangente change continûment) et bornée sur une région raisonnable et finie G . Quelle est la valeur de la mesure de la surface Φ qui est donnée par f dans le $\mathbb{R}^3$?*

Idee: • **Idée:** Man wähle sich ein beliebiges kleines Flächenstück ΔA_k , das in einer Kugel mit Radius r_n Platz hat. Je kleiner man den Ausschnitt wählt, d.h. je kleiner r_n ist, desto mehr nähert sich das gewählte Flächenstück einem Ausschnitt einer Ebene. Das wird sichtbar, wenn man die Sache vergrößert. Approximiere nun solche kleine parallelogrammartige Flächenstücke durch passende ebene Parallelogramme ΔT_k und berechne deren Inhalt mittels des Vektorprodukts. So kann man durch Summation zu einer Approximation des ganzen Flächeninhaltes gelangen. ΔA_k und ΔT_k können so gewählt werden, dass sie z.B. über achsenparallelen Flächenelementen ΔG_k in der Grundebene liegen.

• *Choisir un élément de surface quelconque et assez petit ΔA_k qui peut être inscrit dans une sphère du rayon r_n . Plus petit choisit-on ce segment, c.v.d. plus petit est r_n , plus on s'approche avec le segment de surface choisi d'un segment d'un plan. C'est rendu visible par un agrandissement de la chose. Approxime maintenant de tels segments petits et semblables à un parallélogramme par un parallélogramme*

plan ΔT_k convenable et calcule la mesure à l'aide du produit vectoriel. Ainsi on peut arriver à une approximation de la mesure de la surface entière par sommation. ΔA_k et ΔT_k peuvent être choisis de manière qu'ils soient situés sur les éléments de surface parallèles aux axes ΔG_k dans le plan fondamental.

Sei • Soit $\{\Delta G_k\}$ eine zulässige Gebietszerlegung • une partition de région admissible.

Sei • Soit $f(x_k, y_k) = z_k$, $(x_k, y_k) \in G_k$, $(x_k, y_k, z_k) \in A_k$.

$$\leadsto |A| = \sum_{k=1}^n |\Delta A_k| \approx \sum_{k=1}^n |\Delta T_k|$$

Sei d_k = Diagonallänge von ΔG_k (Rechteck). • Soit d_k = longueur de la diagonale de ΔG_k (rectangle).

Sei • Soit $d = \max_k d_k$, $\vec{a}_k, \vec{b}_k$ Seitenvektoren von • vecteurs latéraux de ΔT_k

$\leadsto \vec{a}_k, \vec{b}_k$ sind natürlich Tangentialvektoren an die Funktionsfläche. • $\vec{a}_k, \vec{b}_k$ sont naturellement des vecteurs tangentiels à la surface de fonction.

Wir stehen nun vor dem Problem, dass bisher Inhalte allgemeiner gekrümmter Flächen gar nie definiert worden sind. Es ist aber wohl intuitiv einsichtig, dass sich solche Inhalte sinnvoll wie folgt definieren lassen: • Maintenant nous avons le problème que nous n'avons jamais défini les mesures de surfaces courbées et tortues. Mais on voit clairement et de façon intuitive que de telles mesures peuvent être définies comme il suit:

Definition: • **Définition:** Inhalt • Mesure $A := \lim_{d_n \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n |\Delta T_{k,n}|$, $|\Delta T_{k,n}| = |\vec{a}_{k,n} \times \vec{b}_{k,n}|$

$\lim_{d_n \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n |\Delta T_{k,n}|$ führt offensichtlich zu einem Riemannschen Integral • nous mène clairement à une intégrale de Riemann.

Bei solchen Integralen kann bekanntlich der Punkt $P_k P(x_k, y_k) \in \Delta G_{x_k, y_k}$, in dem $\Delta T_{k,n}$ innerhalb der zulässigen Gebietszerlegung bestimmt wird, beliebig gewählt werden. • Quant à ces intégrales le point $P_k = P(x_k, y_k) \in \Delta G_{x_k, y_k}$ peut être choisi ce façon quelconque dans le $\Delta T_{k,n}$ pour une partition de région qui convient, comme nous savons.

Nun gilt es, über $\Delta G_{k,n}$ das $\Delta T_{k,n}$ zu bilden. $\Delta T_{k,n}$ wird durch die Seitenvektoren $\vec{a}$ über Δx und $\vec{b}$ über Δy bestimmt: • Maintenant il faut construire sur $\Delta G_{k,n}$ le $\Delta T_{k,n}$. $\Delta T_{k,n}$ est donnée par les vecteurs latéraux $\vec{a}$ sur Δx et $\vec{b}$ sur Δy .

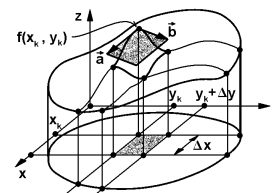
Z.B. ist die y -Komponente von $\vec{a}$ gleich 0, die z -Komponente jedoch ist Δx mal Steigung von f in y -Richtung. f muss demnach differenzierbar sein! • P.ex. le composant y de $\vec{a}$ est égal à 0, le composant z par contre est Δx fois la pente de f en direction d' y . f doit donc être dérivable.

$\leadsto$ Das ergibt: • Nous obtenons:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ 0 \\ f'_x(P_k) \cdot \Delta x \end{pmatrix}$$

Entsprechend: • Correspondant:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta y \\ f'_y(P_k) \cdot \Delta y \end{pmatrix}$$



Dann wird der Inhalt $|\Delta T_{k,n}|$: • Puis on obtient pour le contenu de $|\Delta T_{k,n}|$:

$$|\Delta T_{k,n}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = \left| \begin{pmatrix} -f'_x(P_k) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \\ -f'_y(P_k) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \\ \Delta x \cdot \Delta y \end{pmatrix} \right| = |\Delta x \cdot \Delta y| \cdot \sqrt{(f'_x(P_k))^2 + (f'_y(P_k))^2 + 1} =$$

$$= |\Delta G_k| \cdot \sqrt{(f'_x(P_k))^2 + (f'_y(P_k))^2 + 1}$$

Wir erhalten somit: • *Nous obtenons donc:*

Formel: • **Formule:**

Vor.: • **Hyp.:**

Seien • *Soient*: G vernünftig, beschränkt • G raisonnable, bornée
 f stetig differenzierbar und beschränkt auf $\bar{G}$ • f dérivable continûment
 et bornée sur $\bar{G}$

Beh.: • **Thè.:**

$$\begin{aligned} A &= \int_G dA = \int_G \sqrt{(f'_x(P_k))^2 + (f'_y(P_k))^2 + 1} dG \\ &= \iint_G \sqrt{(f'_x(P_k))^2 + (f'_y(P_k))^2 + 1} dx dy \end{aligned}$$

Definition: • **Définition:**

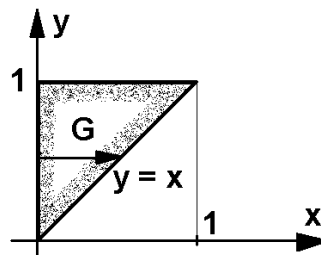
$\int_G dA$ heisst **Oberflächenintegral** • *s'appelle intégrale de sur-*
face

Es ist dem Leser überlassen, die Formel an bekannten Beispielen (Parallelogramme) zu überprüfen. Die Kugel zeigt, dass die Rechnungen mit dieser Formel umständlich werden (vgl. Seite 320). Da im Integranden eine Wurzel steht, ist allgemein nicht zu erwarten, dass man auf einfache Weise bekannte Stammfunktionen finden kann. Für die numerische Integration ist die Formel jedoch geeignet. • *Nous laissons au lecteur d'examiner la formule aux exemples connus (parallélogramme). La sphère montre que les calculs deviennent compliqués à l'aide de cette formule (voir page 320). Comme il y a une racine carrée dans la fonction intégrée on ne peut pas s'attendre à trouver facilement une antiderivée. Mais pour l'intégration numérique la formule est convenable.*

1. Beispiel: • **Exemple 1:**

$$f(x, y) = 3x + y^2$$

G vgl. Skizze • G voir esquisse



$$\begin{aligned} A &= \iint_G \sqrt{(f'_x(P_k))^2 + (f'_y(P_k))^2 + 1} dx dy = \iint_G \sqrt{(3)^2 + (2y)^2 + 1} dx dy = \int_0^1 \int_0^y \sqrt{10 + 4y^2} dx dy \\ &= \int_0^1 x \cdot \sqrt{10 + 4y^2} \Big|_0^y dy = \int_0^1 y \cdot (10 + 4y^2)^{\frac{1}{2}} dy = \frac{1}{12} (10 + 4y^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{14^{\frac{3}{2}} - 10^{\frac{3}{2}}}{12} \end{aligned}$$

Bemerkung: • **Remarque:**

Mit solchen Integralen kann man z.B. das Gewicht von Blech- oder Plastic-Flächen berechnen.

• *A l'aide d'intégrales de ce type on peut p.ex. calculer le poids de surfaces en tôle ou en plastic.*

2. Beispiel: • **Exemple 2:**

Inhalt der Oberfläche einer „Eierschachtel“: • *Mesure de la surface d'un carton à oeufs:*

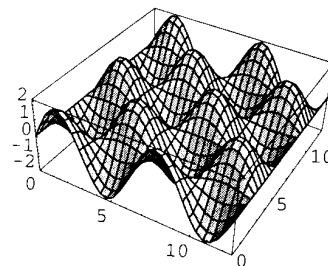
$$f(x, y) := \sin(x + y) + \sin(x - y),$$

$$x, y \in [0, 4\pi]$$

Numerisch mit *Mathematica*:

• *Numériquement avec Mathematica:*

$$A \approx 269.357$$



8.4.2 Ausdehnung des Begriffs für beliebige Koordinatensysteme — Extension de la notion pour des systèmes de coordonnées quelconques

Kompliziert im Raum gewundene Flächen Φ können allgemein nicht als Funktionsflächen in einem kartesischen Koordinatensystem gegeben werden. • *En général on ne peut pas donner des surfaces Φ qui se dressent de manière compliquée dans l'espace comme surfaces de fonctions dans un système de coordonnées cartésiennes*

Analog zu Kurven kann man jedoch Flächen in **Parameterdarstellung** geben. D.h. mit andern Worten: als Vektorfunktionen mit zwei Variablen, die man hier üblicherweise „Parameter“ nennt.

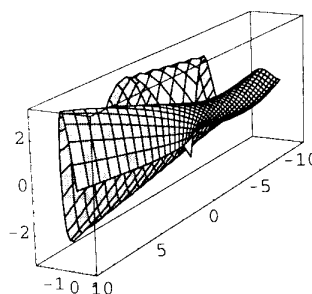
• *Mais aloguement aux courbes on peut donner les surfaces par **représentation paramétrique**. En d'autres mots ç.v.d.: comme fonctions vectorielles avec deux variables qu'on appelle dans ce cas de coutume des "paramètres".*

Bsp.: • **Exemple:**

$$u \in [0, \pi], \quad v \in [0, \pi],$$

$$\Phi: \vec{\sigma}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u^2 - v^2 \\ \ln(1 + u + v) \sin(u + v) \\ u \sin(uv) \end{pmatrix}$$



Dabei seien $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ stetig differenzierbare Funktionen über einem Definitionsbereich $D_x = D_y = D_z = \bar{G}$. Dann wird die durch $\vec{\sigma}(u, v)$ im Raum definierte Fläche Φ glatt, d.h. die Tangentenvektoren $\vec{\sigma}'_u$ und $\vec{\sigma}'_v$ können sich nicht sprunghaft ändern. • *Soient $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ des fonctions dérivables de façon continue sur une domaine de définition $D_x = D_y = D_z = \bar{G}$. Puis la surface Φ définie dans l'espace par $\vec{\sigma}(u, v)$ devient lisse, ç.v.d. les vecteurs tangentiels $\vec{\sigma}'_u$ et $\vec{\sigma}'_v$ ne peuvent pas abruptement changer de direction.*

Eine hinreichende Bedingung für die Existenz zwei verschiedener Tangentialvektoren in verschiedene Richtungen ist $\vec{\sigma}'_u \nparallel \vec{\sigma}'_v$, d.h.: • *Une condition suffisante pour l'existence de deux vecteurs tangentiels en des directions différentes est $\vec{\sigma}'_u \nparallel \vec{\sigma}'_v$, ç.v.d.:*

$$\vec{\sigma}'_u \times \vec{\sigma}'_v \neq \vec{0} \quad \text{oder} \quad \bullet \quad \text{ou} \quad M = (\vec{\sigma}'_u, \vec{\sigma}'_v) = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang}(M) = 2$$

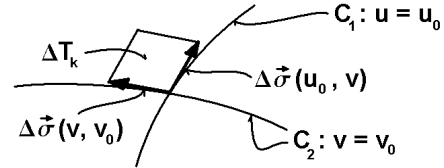
Wir betrachten nun zwei Kurven in Φ : • *Nous considérons maintenant deux courbes dans Φ :*
 $C_1 = \{\vec{\sigma}(u, v) \mid u = u_0\}$ und • *et $C_2 = \{\vec{\sigma}(u, v) \mid v = v_0\}$*

Sei • *Soit $\vec{\sigma}(u_0, v_0) := \vec{\sigma}_{P_0}$*

Für die Tangentenvektoren an C_1 und C_2 gilt: • *Pour les vecteurs tangentiels à C_1 et C_2 on a la condition:*

$$C_1 : \frac{\Delta \vec{\sigma}(u, v)}{\Delta u} \rightarrow \frac{\partial \vec{\sigma}(u, v)}{\partial u} = \vec{\sigma}'_u$$

$$C_2 : \frac{\Delta \vec{\sigma}(u, v)}{\Delta v} \rightarrow \frac{\partial \vec{\sigma}(u, v)}{\partial v} = \vec{\sigma}'_v$$



$\leadsto \vec{\sigma}'_u$ und $\vec{\sigma}'_v$ spannen in P_0 in der Tangentialebene an die betrachtete Fläche ein Parallelogramm auf.
 • $\vec{\sigma}'_u$ et $\vec{\sigma}'_v$ tendent à P_0 dans le plan tangentiel un parallélogramme à la surface considérée.

Damit hat man die folgende Situation gegeben: • *On a donc donnée la situation suivante:*



Auf G haben wir damit ein kartesisches Koordinatensystem (Gitternetz) mit den Koordinaten u, v , den Maschenweiten $\Delta u, \Delta v$ und dem Flächenelement $|\Delta G| = |\Delta u \cdot \Delta v|$. Das Gitternetz in G wird durch $\vec{\sigma}$ in ein Gitternetz auf Φ abgebildet. Dort sei das zu $|\Delta G|$ gehörige Flächenelement mit $|\Delta A|$ bezeichnet.
 • *Sur G nous avons donc un système de coordonnées (réseau quadrillé) avec les coordonnées u, v , les distances de coordonnées $\Delta u, \Delta v$ et l'élément de surface $|\Delta G| = |\Delta u \cdot \Delta v|$. Le réseau quadrillé dans G est appliqué par $\vec{\sigma}$ dans un réseau quadrillé sur Φ . Là, nous appelons l'élément de surface qui appartient à $|\Delta G|$ donc $|\Delta A|$.*

Z.B. auf C_2 gilt dann: • *P. ex sur C_2 nous avons le fait:*

$$\Delta \vec{\sigma}(u, v_0) \approx \vec{\sigma}'_u(u_0, v_0) \cdot \Delta u, \quad \Delta \vec{\sigma}(u_0, v) \approx \vec{\sigma}'_v(u_0, v_0) \cdot \Delta v$$

(Definition der Ableitung oder auch Mittelwertsatz der Differentialrechnung • *Définition de la dérivée ou aussi théorème des accroissements finis*)

Damit kann $|\Delta A|$ approximiert werden: • *Ainsi nous pouvons approximer $|\Delta A|$:*

$$|\Delta A| \approx |\Delta \vec{\sigma}(u, v_0) \times \Delta \vec{\sigma}(u_0, v)|$$

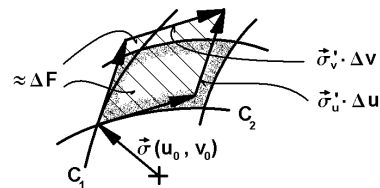
$$\approx |(\vec{\sigma}'_u(u_0, v_0) \cdot \Delta u) \times (\vec{\sigma}'_v(u_0, v_0) \cdot \Delta v)|$$

$$= |\Delta u \cdot \Delta v| \cdot |\vec{\sigma}'_u(u_0, v_0) \times \vec{\sigma}'_v(u_0, v_0)|$$

z.B. • *p.ex.*

$$\Delta \vec{\sigma}(u, v_0) = \vec{\sigma}(u + \Delta u, v_0) - \vec{\sigma}(u, v_0) =$$

$$\frac{\vec{\sigma}(u + \Delta u, v_0) - \vec{\sigma}(u, v_0)}{\Delta u} \cdot \Delta u \approx \vec{\sigma}'_u(u, v_0) \cdot \Delta u$$



Sei • Soit $P_{k,n} = (u_{0_{k,n}}, v_{0_{k,n}})$, $\Delta G_{k,n} \subseteq U_{r_{k,n}}(P_{k,n})$, $r_n =: \max_k r_{k,n} \rightarrow 0$ mit • avec $n \rightarrow \infty$
 Damit wird bei beliebig $P_{k,n} \in \Delta G_{k,n}$: • Nous obtenons donc pour des $P_{k,n} \in \Delta G_{k,n}$ quelconques:

$$\begin{aligned} \leadsto \sum_{k=1}^n |\Delta A_{k,n}| &= \sum_{k=1}^n |\Delta A_{k,n}| = \sum_{k=1}^n |\vec{\sigma}'_u(P_{k,n}) \times \vec{\sigma}'_v(P_{k,n})| \cdot |\Delta u \cdot \Delta v| \rightarrow \\ &\rightarrow \iint_G |\vec{\sigma}'_u(P_{u,v}) \times \vec{\sigma}'_v(P_{u,v})| du dv = \int_G |\vec{\sigma}'_u(P_{u,v}) \times \vec{\sigma}'_v(P_{u,v})| dG := \int_G dA \end{aligned}$$

Damit lässt sich der Flächeninhalt einer durch $\vec{\sigma}(u, v)$ gegebenen Fläche im $\mathbb{R}^3$ definieren. Ein solcher ist ja bis jetzt nie definiert worden: • Nous pouvons donc définir la mesure d'une surface quelconque donnée par $\vec{\sigma}(u, v)$ dans le $\mathbb{R}^3$. On n'a encore jamais défini de telle mesure::

Definition: • Définition:

$$\begin{aligned} |A| &= \int_G dA := \int_G |\vec{\sigma}'_u(P_{u,v}) \times \vec{\sigma}'_v(P_{u,v})| dG \\ &= \iint_G |\vec{\sigma}'_u(P_{u,v}) \times \vec{\sigma}'_v(P_{u,v})| du dv \end{aligned}$$

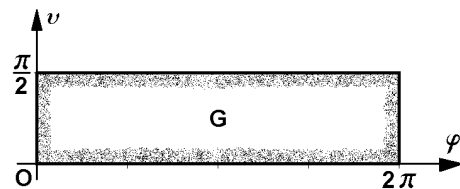
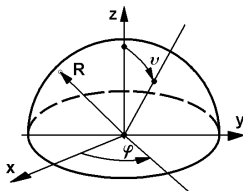
Kontrolle: • Contrôle:

Sind u, v speziell kartesische Koordinaten, so muss wieder die dort hergeleitete Formel herauskommen:
 • Si u, v sont des coordonnées cartésiennes spéciales, on doit obtenir dans ce cas la formule qu'on a déduit plus haut:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(u, v) &= \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \Big|_{x=u, y=v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow |\vec{\sigma}'_u(u, v) \times \vec{\sigma}'_v(u, v)| &= \left| \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y)'_x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y)'_y \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x, y) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f'_y(x, y) \end{pmatrix} \right| = \\ &= \left| \begin{pmatrix} -f'_x \\ -f'_y \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-f'_x)^2 + (-f'_y)^2 + 1} \Rightarrow dG = \sqrt{(-f'_x)^2 + (-f'_y)^2 + 1} dx dy \end{aligned}$$

Wir finden also hier das schon bekannte Flächenelement. • Ici nous trouvons donc l'élément de surface déjà connu.

Bsp.: • Exemple: Nachrechnung der Kugeloberfläche: • Contrôle du résultat pour la surface de la sphère:



Kugelkoordinaten: • coordonnées sphériques:

$u := \varphi$, $v := \vartheta$, $R := \text{const.}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}] \leadsto$ halbe Sphäre. • demi-sphère

$$\vec{\sigma}(u, v) = \vec{\sigma}(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} R \cos(\varphi) \sin(\vartheta) \\ R \sin(\varphi) \sin(\vartheta) \\ R \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \vec{\sigma}'_{\varphi}(\varphi, \vartheta) &= \begin{pmatrix} -R \sin(\varphi) \sin(\vartheta) \\ R \cos(\varphi) \sin(\vartheta) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\sigma}'_{\vartheta}(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} R \cos(\varphi) \cos(\vartheta) \\ R \sin(\varphi) \cos(\vartheta) \\ -R \sin(\vartheta) \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \vec{\sigma}'_{\varphi}(\varphi, \vartheta) \times \vec{\sigma}'_{\vartheta}(\varphi, \vartheta) &= R \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \sin(\vartheta) \\ \cos(\varphi) \sin(\vartheta) \\ 0 \end{pmatrix} \times R \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cos(\vartheta) \\ \sin(\varphi) \cos(\vartheta) \\ -\sin(\vartheta) \end{pmatrix} = \\
&= R^2 \begin{pmatrix} -\cos(\varphi) \sin^2(\vartheta) \\ -\sin(\varphi) \sin^2(\vartheta) \\ -\sin^2(\varphi) \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) - \cos^2(\varphi) \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \end{pmatrix} = \\
&= -R^2 \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sin^2(\vartheta) \\ \sin(\varphi) \sin^2(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \end{pmatrix} = -R^2 \sin(\vartheta) \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sin(\vartheta) \\ \sin(\varphi) \sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \\
\Rightarrow |\vec{\sigma}'_{\varphi}(\varphi, \vartheta) \times \vec{\sigma}'_{\vartheta}(\varphi, \vartheta)| &= R^2 |\sin(\vartheta)| \sqrt{\cos^2(\varphi) \sin^2(\vartheta) + \sin^2(\varphi) \sin^2(\vartheta) + \cos^2(\vartheta)} \\
&= R^2 |\sin(\vartheta)| \sqrt{\sin^2(\vartheta) + \cos^2(\vartheta)} = R^2 |\sin(\vartheta)| \sqrt{1} = R^2 |\sin(\vartheta)| = R^2 \sin(\vartheta), \quad \vartheta \in [0, \pi]
\end{aligned}$$

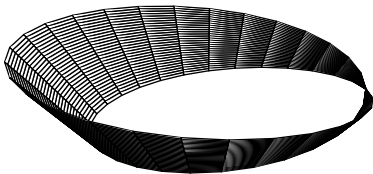
$$\begin{aligned}
\Rightarrow A &= 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} |\vec{\sigma}'_{\varphi}(\varphi, \vartheta) \times \vec{\sigma}'_{\vartheta}(\varphi, \vartheta)| d\varphi d\vartheta = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} R^2 \sin(\vartheta) d\varphi d\vartheta = 2 R^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \sin(\vartheta) \Big|_0^{\pi} d\vartheta = \\
&= 2 R^2 \cdot 2\pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\vartheta) d\vartheta = 4 R^2 \pi \cdot (-\cos(\vartheta)) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4 \cdot R^2 \cdot \pi
\end{aligned}$$

Bsp.: • **Exemple:** (Numerisch) • (Numériquement)

$$u \in [0, \pi], \quad v \in [0, \pi], \quad \Phi : \vec{\sigma}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2 - v^2 \\ \ln(1 + u + v) \sin(u + v) \\ u \sin(uv) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = \int_G dA := \int_G |\vec{\sigma}'_u(P_{k,n}) \times \vec{\sigma}'_v(P_{k,n})| dG = \iint_G |\vec{\sigma}'_u(P_{k,n}) \times \vec{\sigma}'_v(P_{k,n})| du dv \approx 185.967 \quad (\text{Mathematica})$$

Bsp.: • **Exemple:** (Numerisch) • (Numériquement)



$$\vec{v}(\alpha, r) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \left(\frac{1}{2} r \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 1 \right) \\ \sin(\alpha) \left(\frac{1}{2} r \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 1 \right) \\ \frac{1}{2} r \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix}$$

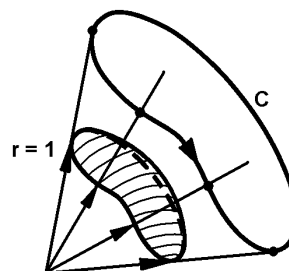
$\leadsto$ Möbiusband • Ruban de Möbius

$$\leadsto A \approx 5.65685 \quad (\text{Mathematica})$$

8.4.3 Anwendung Raumwinkel — Application angle solide

Gegeben sei ein Punkt S im Raum (die „Spitze“) und eine geschlossene Kurve C im Raum. • *Soit donné un point S dans l'espace (la „pointe“) et une courbe fermée C dans l'espace.*

Wir lassen nun einen Strahl l , der von S aus geht, C entlang gleiten. Durch die von l erzeugte Fläche wird der Raum in zwei Teile geteilt. • *Maintenant nous faisons glisser un rayon l qui a l'origine à S le long de C . L'espace est ainsi partagé en deux parties.*



Ein Teil des Raumes wird so von der Kurve eingeschlossen, der andere ausgeschlossen. Der eingeschlossene Teil entspricht auch dem Sehwinkel der Kurve. • *Une partie de l'espace est donc inclus de la courbe, l'autre est exclus. La partie incluse correspond aussi à l'angle sous lequel l'on voit la courbe.*

Definition: • **Définition:**

Die Punktmenge des so eingeschlossenen Teiles des Raumes nennen wir **Raumwinkel**. • *L'ensemble de points de la partie de l'espace ainsi inclus s'appelle angle solide.*

Das **Mass des Raumwinkels** ist der Flächeninhalt auf der Einheitskugel mit Zentrum in S , den der Raumwinkel ausschneidet.

• *La mesure de l'angle solide est la mesure de la surface de la sphère unité avec le centre à S , qui est coupée par l'angle solide.*

Bsp.: • **Exemple:** Berechne das Mass des Raumwinkels eines Kreiskegels mit dem Öffnungswinkel $2\alpha = \frac{2\pi}{3} \hat{=} 120^\circ$. • *Calculer la mesure de l'angle solide d'un cône circulaire avec l'angle d'ouverture de $2\alpha = \frac{2\pi}{3} \hat{=} 120^\circ$.*

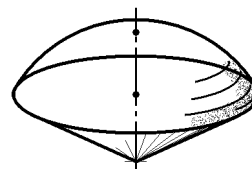
Bsp.: • **Exemple:** Nach dem Beispiel im letzten Abschnitt ist: • *D'après l'exemple de la dernière section on conclut:*

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} |\vec{\sigma}'_\varphi(\varphi, \vartheta) \times \vec{\sigma}'_\vartheta(\varphi, \vartheta)| d\varphi d\vartheta = \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} R^2 \sin(\vartheta) d\varphi d\vartheta = R^2 \cdot \int_0^\alpha \varphi \sin(\vartheta) \Big|_0^{2\pi} d\vartheta \\ &= R^2 \cdot 2\pi \cdot \int_0^\alpha \sin(\vartheta) d\vartheta = 2R^2 \pi \cdot (-\cos(\vartheta) \Big|_0^\alpha) = 2R^2 \pi \cdot (-\cos(\alpha) + \cos(0)) = 2R^2 \pi \cdot (1 - \cos(\alpha)) \\ &:= 2R^2 \pi \cdot h \end{aligned}$$

Lemma: • **Lemme:**

Inhalt einer Kugelhaube • *Mesure d'une calotte sphérique*

$$A = 2R^2 \pi \cdot (1 - \cos(\alpha)) := 2R^2 \pi \cdot h$$



Für $\alpha = \frac{\pi}{3}$ bekommt man dann: • *Pour $\alpha = \frac{\pi}{3}$ on obtient:*

$$A = 2 \cdot 1^2 \pi \cdot (1 - \cos(\frac{\pi}{3})) = \pi$$

8.4.4 Ausdehnung des Begriffs für Funktionen auf Oberflächen — Extension de la notion pour des fonctions sur les surfaces

Einen Punkt der Oberfläche Φ können wir weiterabbilden und somit eine Funktion auf der Oberfläche betrachten: • *Nous pouvons appliquer un point de la surface Φ plus loin et donc considérer une fonction sur la surface:*

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\quad f_G \quad} \\ G \xrightarrow{\quad \vec{\sigma} \quad} \Phi \xrightarrow{\quad f_\Phi \quad} M \subseteq \mathbb{R} \end{array} \quad \text{oder} \quad \bullet \quad \text{ou}$$

$$P = (u, v) \mapsto \vec{\sigma}(u, v) \mapsto f(\vec{\sigma}(u, v)) := f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) := f_\Phi(x, y, z) := f_G(P)$$

Statt des Flächenelements dA kann man nun das Volumenelement $dV := f_G(P) dG = f_G(\vec{\sigma}(u, v)) dG = f_\Phi(x, y, z) dA$ verwenden und so „das Integral von f über Φ berechnen. So etwas macht z.B. in der Physik Sinn, wenn es z.B. darum geht, die farbabhängige Wärmeabstrahlung pro Flächeneinheit über die Oberfläche aufzusummieren. • *Au lieu de prendre l'élément de surface dA on peut prendre l'élément de volume $dV := f_G(P) dG = f_G(\vec{\sigma}(u, v)) dG = f_\Phi(x, y, z) dA$ pour calculer „l'intégrale de f sur Φ . Une telle chose a un sens p.ex. en physique où il s'agit p.ex. de calculer la somme du rayonnement de la chaleur par unité de surface, qui dépend de la couleur, sur toute la surface.*

Wir können so die Definition des Oberflächenintegrals verallgemeinern: • *Nous pouvons ainsi généraliser la définition de l'intégrale de surface:*

Definition: • **Définition:**

$$\begin{aligned} \int_A f_\Phi(x, y, z) dA &:= \int_G f_G(P) dG = \\ &= \int_G f(\vec{\sigma}(u, v)) \cdot |\vec{\sigma}'_u(P_{k,n}) \times \vec{\sigma}'_v(P_{k,n})| dG = \\ &= \iint_G f_G(u, v) \cdot |\vec{\sigma}'_u(P_{k,n}) \times \vec{\sigma}'_v(P_{k,n})| du dv \quad \text{heisst} \quad \textbf{Ober-} \\ &\quad \textbf{flächenintegral} \quad \bullet \text{ s'appelle intégrale de surface} \end{aligned}$$

Bsp.: • **Exemple:** **Geg.:** • **Donné:**

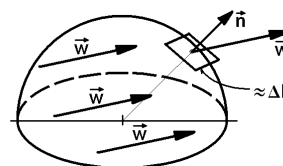
Halbkugel • *Demi-sphère:*

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$$

Parallelströmung • *Courant parallèle:*

$$(x, y, z) \mapsto \vec{w}(x, y, z) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \text{const.}$$

$\vec{n}$ Normalenvektor auf $S = \Phi$ • *Vecteur normal sur $S = \Phi$*



Ges.: • **Trouver:** Durchströmung • *Courant qui traverse* $D = \iint_S \langle \vec{w}, \vec{n} \rangle dA$

Lösung: • **Solution:**

Verwende Parameterdarstellung: • *Utilise représentation paramétrique:* $U := x, v := y$

$$\leadsto G = \text{Kreis} \quad \bullet \quad \text{Cercle} = K := \{(u, v) \mid 0 \leq u^2 + v^2 \leq R^2\}$$

$$\begin{aligned} \leadsto \vec{\sigma} &= \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{\sigma}}{R} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \end{pmatrix} \\ \leadsto \vec{\sigma}'_u &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -u \end{pmatrix}, \quad \vec{\sigma}'_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -v \end{pmatrix}, \quad \vec{\sigma}'_u \times \vec{\sigma}'_v = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow |\vec{\sigma}'_u \times \vec{\sigma}'_v| &= \left(\frac{u^2}{R^2 - u^2 - v^2} + \frac{v^2}{R^2 - u^2 - v^2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{u^2 + v^2 + R^2 - u^2 - v^2}{R^2 - u^2 - v^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\frac{R^2}{R^2 - u^2 - v^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \end{aligned}$$

$$f(\vec{\sigma}(u, v)) = \langle \vec{w}, \vec{n} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \frac{1}{R} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{R} (a u + b v + c \sqrt{R^2 - u^2 - v^2})$$

$$\begin{aligned} D &= \iint_S \langle \vec{w}, \vec{n} \rangle dA = \iint_S \frac{1}{R} (a u + b v + c \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}) \cdot |\vec{\sigma}'_u \times \vec{\sigma}'_v| du dv = \\ &= \iint_S \frac{1}{R} (a u + b v + c \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}) \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} du dv = \\ &= \iint_S \left(\frac{a u + b v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} + c \right) du dv = \iint_S \frac{a u + b v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} du dv + \iint_S c du dv = I_1 + I_2 \end{aligned}$$

$$I_2 = c \iint_S du dv = c \cdot R^2 \cdot \pi \quad (S: \text{Kreis} \quad \bullet \text{ sphère})$$

$$I_1 = \iint_S \frac{a u + b v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} du dv \leadsto \text{Verwende Polarkoordinaten!} \quad \bullet \text{ Utilise coordonnées polaires!}$$

$u := r \cdot \cos(\varphi), \quad v := r \cdot \sin(\varphi), \quad du dv = r \cdot dr d\varphi$
(bekanntes Flächenelement $\bullet$ élément de surface connu.)

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{a r \cdot \cos(\varphi) + b r \cdot \sin(\varphi)}{\sqrt{R^2 - (r \cdot \cos(\varphi))^2 - (r \cdot \sin(\varphi))^2}} \cdot r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \cdot \frac{a \cdot \cos(\varphi) + b \cdot \sin(\varphi)}{\sqrt{R^2 - r^2}} dr d\varphi \\ &= \int_0^R \frac{a \cdot r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} \cdot \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \cos(\varphi) d\varphi \right)}_{=0} dr + \int_0^R \frac{b \cdot r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} \cdot \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \sin(\varphi) d\varphi \right)}_{=0} dr = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_1 + I_2 = 0 + c \cdot R^2 \cdot \pi = c \cdot R^2 \cdot \pi$$

8.5 Mehrfachintegrale — Intégrales multiples

8.5.1 Allgemeines — Généralités

Bei den Integralen von Funktionen über Gebieten haben wir z.B. das Volumen unter der Funktionsfläche von $f(x, y)$ berechnet durch: $\bullet$ Quant aux intégrales de fonctions sur des régions nous avons p.ex. calculé le volume sous la surface de la fonction $f(x, y)$ comme il suit:

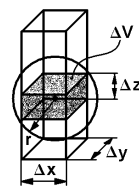
$$\int_G f(x, y) dG = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dy \right) dx$$

Dabei sind wir von zulässigen Gebietszerlegungen ausgegangen. $\bullet$ Pour arriver au but nous avons utilisé des partitions de régions admissibles.

Falls man statt Funktionen $f(x, y)$ über einem Gebiet G nun Funktionen $f(x, y, z)$ über einem Volumen V betrachtet — oder etwa Funktionen $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ über einem n -dimensionalen Volumen $V^{(n)}$, entsteht kein grundsätzlich neues Problem. • *Si nous considérons maintenant des fonctions $f(x, y, z)$ sur un volume V — ou bien des fonctions $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sur un volume $V^{(n)}$ de dimension n , au lieu de considérer des fonctions $f(x, y)$ sur une région G , le problème ne change pas de façon fondamentale.*

Man muss dann an Stelle einer Gebietszerlegung in analoger Weise eine n -dimensionale **Volumenzerlegung** benützen. Und statt Flächenelemente wie z.B. $\Delta x \cdot \Delta y$ für $G \subseteq \mathbb{R}^2$ treten dann z.B. für $V \subseteq \mathbb{R}^3$ Volumenelemente $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ auf u.s.w. • *Alors on doit utiliser au lieu d'une partition de région de façon analogue une **partition de volume** de dimension n . Et au lieu des éléments de surface comme p.ex. $\Delta x \cdot \Delta y$ pour $G \subseteq \mathbb{R}^2$ on a donc pour $V \subseteq \mathbb{R}^3$ des éléments de volume $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ etc..*

Z.B. im $\mathbb{R}^3$ muss dann ein solches Volumenelement ΔV in einer Kugel vom Radius r_m Platz haben und wir lassen dann wieder $r_m \rightarrow 0$ gehen. • *P.ex. dans le $\mathbb{R}^3$ on doit pouvoir inscrire un tel élément de volume ΔV dans une sphère avec le rayon r_m et nous faisons aller $r_m \rightarrow 0$.*



Entsprechend im $\mathbb{R}^m$ sind es n -dimensionale Kugeln. • *Par correspondance on a dans le $\mathbb{R}^n$ des sphères de dimension n .*

Das führt dann in kartesischen Koordinaten auf:

• *En coordonnées cartésiennes cela mène donc à:*

$$\int_V f(x, y, z) := \int_V f(x, y, z) dV := \iiint_V f(x, y, z) dV := \lim_{r_m \rightarrow 0} \sum_{k=1}^m f(x_{k,m}, y_{k,m}, z_{k,m}) \Delta V$$

Dabei ist: • *On a donc:*

$$\sum_{k=1}^m f(x_{k,m}, y_{k,m}, z_{k,m}) \Delta V = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t f(x_{k,t}, y_{j,s}, z_{i,q}) \Delta x_{k,t} \Delta y_{j,s} \Delta z_{i,q} \quad \text{z.B. mit:} \quad \bullet \text{ p.ex. avec:}$$

$$\Delta x_{k,t} \Delta y_{j,s} \Delta z_{i,q} = \Delta x_t \Delta y_s \Delta z_q, \quad \text{u.s.w.} \quad \bullet \text{ etc.}$$

Im Falle, wo V ein Quader ist, erhalten wir: • *Dans le cas où V est un rectangle cuboïde on obtient:*

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

Seien • *Soient:* V Quader • *Rectangles cuboïdes*
 f stetig und beschränkt auf V • *f continue et bornée sur V*

Beh.: • **Thè.:**

$$\int_V f(x, y, z) dV = \int_{z_1}^{z_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, z) dx dy dz$$

Wichtig: • **Important:** In den andern Fällen, wo V durch irgendwelche Funktionsflächen beschränkt ist, muss man sich eine günstige Integrationsreihenfolge überlegen. Dabei gibt es $3! = 6$ Möglichkeiten. Eventuell muss man den Körper erst günstig zerlegen. • *Dans les autres cas où V est*

borné par des surfaces de fonctions quelconques, on doit bien réfléchir l'ordre d'intégration. Il y a $3! = 6$ possibilités. Eventuellement il faut d'abord décomposer le corps de manière favorable.

Beispiel einer Möglichkeit: • *Exemple d'une possibilité:*

V : Grundfläche • *Surface à base*

$$z = \Phi_1(x, y)$$

Deckfläche • *Surface à haut*

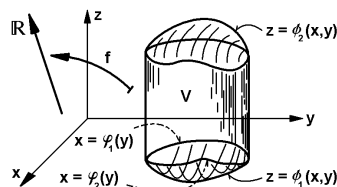
$$z = \Phi_2(x, y)$$

Nach der Integration über z • *après l'intégration sur z :*

Unterer Rand: • *Bord inférieur:* $x = \varphi_1(y)$

Oberer Rand: • *Bord supérieur:*

$$x = \varphi_2(y)$$



Formel: • **Formule:**

Vor.: • **Hyp.:**

V vernünftig, wie beschrieben • *V raisonnable, comme décrit*

f stetig und beschränkt auf V • *f continue et bornée sur V*

Beh.: • **Thè.:**

$$\int_V f(x, y, z) dV = \int_{z_1}^{z_2} \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} \int_{\Phi_1(x, y)}^{\Phi_2(x, y)} f(x, y, z) dx dy dz$$

Analog geht man vor bei Vierfachintegralen und höheren. • *On agit de façon analogue quand il s'agit d'intégrales quadruples et plus.*

Bemerkung: • **Remarque:**

In der Praxis taucht sehr oft das Problem auf, die Funktionen, die die Integrationsgrenzen beschreiben, richtig zu finden. Dabei handelt es sich um ein **geometrisches Problem**. Dazu gibt es kein allgemeines Rezept. • *En pratique on a souvent le problème de trouver les fonctions qui donnent correctement les limites de l'intégration. Il s'agit ici d'un problème géométrique. Pour cela il n'y a pas de recette générale.*

8.5.2 Beispiele in kartesischen Koordinaten — Exemples en coordonnées cartésiennes

1. Beispiel: • **Exemple 1:**

Gesucht: Volumeninhalt?

- *Trouver: Mesure du volume?* $\leadsto V$?

$$V = \int_{y=0}^{y=4} \left(\int_{x=-\sqrt{y}}^{x=+\sqrt{y}} \left(\int_{z=0}^{z=4-y} 1 \, dz \right) dx \right) dy$$

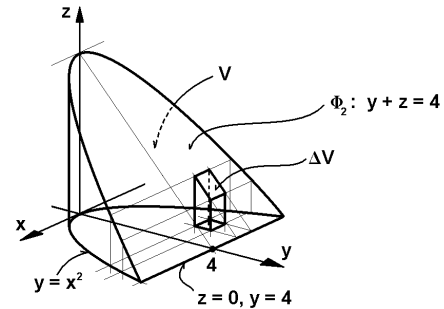
$$= \int_{y=0}^{y=4} \left(\int_{x=-\sqrt{y}}^{x=+\sqrt{y}} (z|_{z=0}^{z=4-y}) dx \right) dy$$

$$= \int_{y=0}^{y=4} \left(\int_{x=-\sqrt{y}}^{x=+\sqrt{y}} (4-y) dx \right) dy$$

$$= \int_{y=0}^{y=4} ((4-y) \cdot x|_{x=-\sqrt{y}}^{x=+\sqrt{y}}) dy$$

$$\int_{y=0}^{y=4} (4-y) \cdot \sqrt{y} \cdot 2 \, dy$$

$$= 2 \cdot \int_{y=0}^{y=4} (4y^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{3}{2}}) dy = 2 \cdot \left(4 \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} \right) \Big|_{y=0}^{y=4} = 2 \cdot \left(4 \frac{2}{3} 4^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} 4^{\frac{5}{2}} \right) = \frac{256}{15}$$



2. Beispiel: • Exemple 2:

Bei einer andern Integrationsreihenfolge wird die Rechnung einfacher: • *Si l'on choisit un ordre d'intégration différent, le calcul devient plus simple:*

$$\begin{aligned} V &= \int_{x=-2}^{x=2} \left(\int_{y=x^2}^{y=4} \left(\int_{z=0}^{z=4-y} 1 \, dz \right) dy \right) dx = \int_{x=-2}^{x=2} \left(\int_{y=x^2}^{y=4} (z|_{z=0}^{z=4-y}) dy \right) dx = \\ &= \int_{x=-2}^{x=2} \left(\int_{y=x^2}^{y=4} (4-y) dy \right) dx = \int_{x=-2}^{x=2} \left(4y - \frac{1}{2} y^2 \Big|_{y=x^2}^{y=4} \right) dx = \int_{x=-2}^{x=2} \left(8 - 4x^2 + \frac{1}{2} x^4 \right) dx = \\ &= 8x - \frac{4}{3} x^3 + \frac{1}{10} x^5 \Big|_{x=-2}^{x=2} = \frac{256}{15} \end{aligned}$$

3. Beispiel: • Exemple 3:

Der eben behandelte Körper habe die Massendichte $f(x, y, z) = x + 1$. Was ist seine totale Masse?:

- *Le corps qu'on vient de traiter ait la densité de masse $f(x, y, z) = x + 1$. Quelle est sa masse totale?*

$$\begin{aligned} m &= \int_{x=-2}^{x=2} \left(\int_{y=x^2}^{y=4} \left(\int_{z=0}^{z=4-y} (x+1) \, dz \right) dy \right) dx = \int_{x=-2}^{x=2} \left(\int_{y=x^2}^{y=4} ((x+1) \cdot z|_{z=0}^{z=4-y}) dy \right) dx = \\ &= \int_{x=-2}^{x=2} \left(\int_{y=x^2}^{y=4} (x+1) \cdot (4-y) dy \right) dx = \int_{x=-2}^{x=2} (x+1) \cdot \left(4y - \frac{1}{2} y^2 \Big|_{y=x^2}^{y=4} \right) dx = \\ &= \int_{x=-2}^{x=2} (x+1) \cdot \left(8 - 4x^2 + \frac{1}{2} x^4 \right) dx = \int_{x=-2}^{x=2} \left(\frac{1}{2} x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 16x^2 + 8x + 32 \right) dx = \\ &= 32x + 4x^2 - \frac{16x^3}{3} - x^4 + \frac{2x^5}{5} + \frac{x^6}{12} \Big|_{x=-2}^{x=2} = \frac{1024}{15} \end{aligned}$$

8.5.3 Integrale in Zylinderkoordinaten — Intégrales en coordonnées cylindriques

Wie wir bereits wissen, bietet es beim Rechnen Vorteile, wenn wir das verwendete Koordinatensystem dem vorhandenen Problem anpassen und nicht umgekehrt. In der Elektrizitätslehre z.B. hat man es oft mit Leitern zu tun, die man als achsensymmetrische, radialsymmetrische Zylinder annehmen kann. Hier verwenden wir beim Integrieren mit Vorteil Zylinderkoordinaten. • *Comme nous savons déjà, pour le calcul c'est un avantage, si nous adaptons le système de coordonnées utilisé au problème qu'on traite*

et non pas le contraire. En électrophysique p.ex. on a souvent des fils électriques qu'on traite comme des cylindres symétriques par rapport à l'axe et des cylindres à symétrie radiale. Ici il est avantageux d'utiliser des coordonnées cylindriques.

Zylinderkoordinaten sind wie folgt definiert: On définit les **coordonnées cylindriques** de la façon suivante:

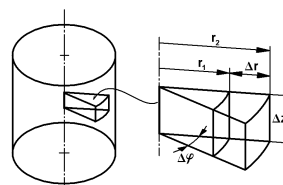
Statt x, y, z (kartesisch) verwenden wir:

• Au lieu de x, y, z (cartésien) nous utilisons:

Radius: • Rayon: r

Winkel: • Angle: φ

Achse: • Axe: z



Damit erhalten wir: • Nous obtenons donc:

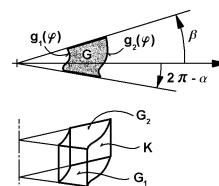
$$\Delta V = V_2 - V_1 = r_2^2 \cdot \pi \cdot \frac{\Delta \varphi}{2 \cdot \pi} \cdot \Delta z - r_1^2 \cdot \pi \cdot \frac{\Delta \varphi}{2 \cdot \pi} \cdot \Delta z = (r_2^2 - r_1^2) \cdot \pi \cdot \frac{\Delta \varphi}{2 \cdot \pi} \cdot \Delta z =$$

$$(r_2 + r_1) \cdot \frac{(r_2 - r_1)}{2} \cdot \Delta \varphi \Delta z = \frac{(2r_1 + \Delta r)}{2} \cdot \Delta r \cdot \Delta \varphi \Delta z = \left(r_1 + \frac{\Delta r}{2}\right) \cdot \Delta r \cdot \Delta \varphi \Delta z$$

$$\rightarrow dV = r \cdot dr d\varphi dz$$

Beim Integrieren hat man bei 3 Koordinaten wieder $3! = 6$ Möglichkeiten für die Reihenfolge. Ein **Beispiel** ist in der Skizze gezeigt.

• Pour l'intégration avec 3 coordonnées on a, quant à l'ordre, de nouveau $3! = 6$ possibilités. L'esquisse montre un **exemple**.



Formel: • **Formule:**

Beispiel einer Möglichkeit • **Exemple** d'une possibilité

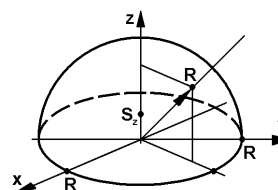
Vor.: • **Hyp.:**

V vernünftig, Zylinderkoordinaten wie beschrieben • V raisonnable, coordonnées cylindriques comme décrit,
 f stetig und beschränkt auf V • f continue et bornée sur V

Beh.: • **Thè.:**

$$\int_V f(r, \varphi, z) dV = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{R_1(\varphi)}^{R_2(\varphi)} \int_{h_1(r, \varphi)}^{h_2(r, \varphi)} f(r, \varphi, z) r dz dr d\varphi$$

Man bestimme den Schwerpunkt einer homogenen Halbkugel, die mit der Schnittfläche auf der xy -Ebene liegt mit der z -Achse als Symmetrieachse! • Calculer le centre de gravitation d'une demi-sphère homogène qui est placée avec la surface de section sur le plan xy ! L'axe z est l'axe de symétrie.



Sei • *Soit* $V \hat{=} m$ (Masse • *masse*).

Man hat hier nur das Problem, die z -Koordinate z_s des Schwerpunktes S zu bestimmen.

• *Ici on a le problème de calculer la coordonnée z (symbole z_s) du centre de gravitation S .*

Hebelgesetz: • *Lois du levier:*

$$\begin{aligned}
 z_s \cdot V &\approx \sum_i z_i \Delta V_i \Rightarrow z_s \cdot V = \int_V z dV \Rightarrow z_s = \frac{\int_V z dV}{V} & V &= \frac{2}{3} \cdot R^3 \cdot \pi \\
 \int_V z dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} z r dz dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{2} z^2 r \Big|_{z=0}^{z=\sqrt{R^2-r^2}} dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{2} (R^2 - r^2) r dr d\varphi = \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(\frac{-r^4}{4} + \frac{r^2 R^2}{2} \right) \Big|_{r=0}^{r=R} \frac{1}{2} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{R^4}{8} d\varphi = \frac{R^4}{8} \cdot \varphi \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = \frac{R^4}{8} \cdot 2\pi = \frac{R^4}{4} \cdot \pi \\
 &\Rightarrow z_s = \frac{\int_V z dV}{V} = \frac{3}{8} \cdot R
 \end{aligned}$$

8.5.4 Integrale in Kugelkoordinaten — Intégrales en coordonnées sphériques

Bekannt sind die Kugelkoordinaten: • *Nous connaissons les coordonnées sphériques:*

$$x = r \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\vartheta)$$

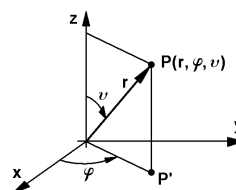
$$y = r \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\vartheta)$$

$$z = r \cdot \cos(\vartheta)$$

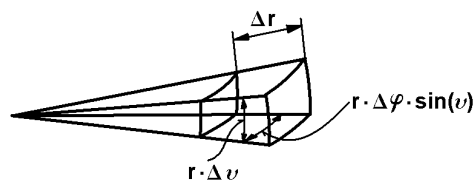
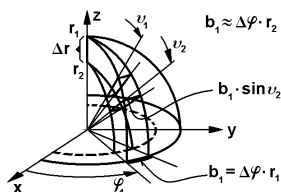
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\vartheta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$



Das Volumenelement entnehmen wir der Geometrie, hier „etwas heuristisch“: (Eine genauere Herleitung wird später (Seite 335) mit Hilfe der Funktionaldeterminante möglich sein.) • *Nous déduisons l'élément de volume de la géométrie, ici par l'expérience: (Plus tard (page 335) nous serons capables de faire une déduction plus exacte à l'aide du déterminant fonctionnel.)*



$$\Delta V \approx (r \cdot \Delta \varphi \cdot \sin(\vartheta)) \cdot (r \cdot \Delta \vartheta) \cdot (\Delta r) = r^2 \cdot \sin(\vartheta) \cdot \Delta r \Delta \varphi \cdot \Delta \vartheta \rightsquigarrow dV = r^2 \cdot \sin(\vartheta) dr d\varphi d\vartheta$$

Beim Integrieren hat man wieder $3! = 6$ Möglichkeiten für die Reihenfolge. • *Pour l'intégration on a, quant à l'ordre, de nouveau $3! = 6$ possibilités.*

Formel: • **Formule:****Beispiel** der Möglichkeit (konstanter Grenzen) • **Exemple** de la possibilité de limites constantes**Vor.:** • **Hyp.:**

V vernünftig, Kugelkoordinaten wie beschrieben • V raisonnable, coordonnées sphériques comme décrit,
 f stetig und beschränkt auf V • f continue et bornée sur V

Beh.: • **Thè.:**

$$\int_V f(r, \varphi, \vartheta) dV = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{R_1}^{R_2} f(r, \varphi, \vartheta) \cdot r^2 \cdot \sin(\vartheta) dr d\varphi d\vartheta$$

1. Beispiel: • **Exemple 1:**

Man berechne den Volumeninhalt des gezeigten Abschnittes eines „Schnittes“ S .

• *Calculer la mesure du volume d'une tranche de sphère S comme on voit dans l'esquisse.*

Gewinne daraus das Volumenelement ΔV zurück!

• *Reconstitue en calculant l'élément de volume ΔV !*

$$\begin{aligned} V &= \int_S dV = \int_0^{\vartheta_1} \int_{\varphi_1}^{\varphi_1 + \Delta\varphi} \int_0^{R_1} r^2 \cdot \sin(\vartheta) dr d\varphi d\vartheta \\ &= \frac{1}{3} r^3 \Big|_{r=0}^{r=R_1} \cdot (-\cos(\vartheta)) \Big|_{\vartheta=0}^{\vartheta=\vartheta_1} \cdot \varphi \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_1 + \Delta\varphi} = \\ &= \frac{1}{3} (R_1)^3 \cdot (1 - \cos(\vartheta_1)) \cdot \Delta\varphi \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{3} (R_1)^3 \cdot \Delta\varphi \cdot (1 - \cos(\vartheta_1)) \end{aligned}$$

Sei • *Soit* $R_m = \frac{R_2 + R_1}{2}$

$$\begin{aligned} \Delta S(\vartheta) &= \frac{1}{3} (R_2^3 - R_1^3) \cdot \Delta\varphi \cdot (1 - \cos(\vartheta_1)) = \frac{1}{3} \cdot (R_2 - R_1) \cdot (R_2^2 + R_2 \cdot R_1 + R_1^2) \cdot \Delta\varphi \cdot (1 - \cos(\vartheta_1)) \approx \\ &\approx \frac{1}{3} \cdot (\Delta R) \cdot (3 \cdot R_m^2) \cdot \Delta\varphi \cdot (1 - \cos(\vartheta_1)) = \Delta R \cdot R_m^2 \cdot \Delta\varphi \cdot (1 - \cos(\vartheta_1)) \end{aligned}$$

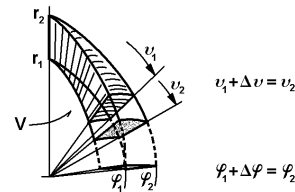
$$\begin{aligned} \Delta V &= \Delta S(\vartheta_2) - \Delta S(\vartheta_1) = \Delta R \cdot R_m^2 \cdot \Delta\varphi \cdot ((1 - \cos(\vartheta_2)) - (1 - \cos(\vartheta_1))) \\ &= \Delta R \cdot R_m^2 \cdot \Delta\varphi \cdot (\cos(\vartheta_1) - \cos(\vartheta_2)) \end{aligned}$$

Benütze die Potenzreihenentwicklung • *Utilise de développement en série de puissance:*

$$\begin{aligned} \cos(\vartheta_2) &= \cos(\vartheta_1) + \frac{\cos'_{\vartheta}(\vartheta_1)}{1!} \cdot \Delta\vartheta + \text{Rest}(\vartheta) = \cos(\vartheta_1) - \sin(\vartheta_1) \cdot \Delta\vartheta + \text{Rest}(\vartheta) \\ \Rightarrow \cos(\vartheta_1) - \cos(\vartheta_2) &= \cos(\vartheta_1) - \cos(\vartheta_1) + \sin(\vartheta_1) \cdot \Delta\vartheta - \text{Rest}(\vartheta) \approx + \sin(\vartheta_1) \cdot \Delta\vartheta \end{aligned}$$

(Hier sind nun die höheren Glieder $(\Delta\vartheta)^2$, $(\Delta\vartheta)^3$, ... weggelassen. • *Ici les termes d'ordre supérieur $(\Delta\vartheta)^2$, $(\Delta\vartheta)^3$, ... manquent.*)

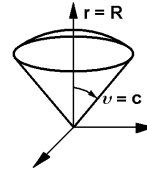
$$\Rightarrow \Delta V \approx \Delta R \cdot R_m^2 \cdot \Delta\varphi \cdot \sin(\vartheta_1) \cdot \Delta\vartheta = R_m^2 \cdot \sin(\vartheta_1) \cdot \Delta R \cdot \Delta\varphi \cdot \Delta\vartheta$$



2. Beispiel: • Exemple 2:

Man berechne den Volumeninhalt der gezeigten Kugelkalotte (Haube). • *Calculer la mesure de volume de la calotte qu'on voit dans l'esquisse.*

(Kegel $\cap$ Kugel • Cône $\cap$ sphère)



$$V = \int_K dV = \int_0^{2\pi} \int_0^c \int_0^R r^2 \cdot \sin(\vartheta) dr d\vartheta d\varphi = \frac{1}{3} r^3 \Big|_{r=0}^{r=R} \cdot (-\cos(\vartheta)) \Big|_{\vartheta=0}^{\vartheta=c} \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} =$$

$$\frac{1}{3} (R_1)^3 \cdot (1 - \cos(c)) \cdot 2 \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad V = \frac{2 \cdot \pi}{3} (R)^3 \cdot (1 - \cos(c))$$

3. Beispiel: • Exemple 3:

Sei • *Soit* $f(r, \varphi, \vartheta) = k \cdot r^2$, $\int_K f(r, \varphi, \vartheta) dV = ?$ (K wie oben • K comme en haut.)

$$\int_K f(r, \varphi, \vartheta) dV = \int_K dV = \int_0^{2\pi} \int_0^c \int_0^R k \cdot r^2 \cdot r^2 \cdot \sin(\vartheta) dr d\vartheta d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^c \int_0^R k \cdot r^4 \cdot \sin(\vartheta) dr d\vartheta d\varphi =$$

$$= k \cdot \frac{1}{5} r^5 \Big|_{r=0}^{r=R} \cdot (-\cos(\vartheta)) \Big|_{\vartheta=0}^{\vartheta=c} \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5} (R)^5 \cdot (1 - \cos(c))$$

8.6 Substitutionsregel: Transformation von Gebietsintegralen — Règle: Transformation d'intégrales de domaine

8.6.1 Der Fall mit zwei Variablen — Le cas avec deux variables

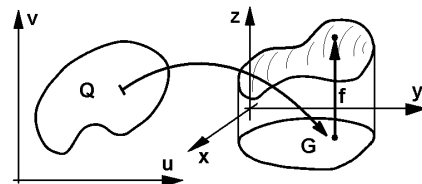
Sei gegeben: • *Soit donné:* $f(x, y)$, $D_f = G \subseteq \mathbb{R}^2$

Dazu sei eine bijektive Abbildung $\vec{\Phi}$ gegeben, die ein Gebiet Q in G abbildet und für unsere Zwecke stetig differenzierbar ist. • *Soit en plus donnée une application bijective $\vec{\Phi}$, qui applique une région (ç.v.d. une domaine) Q dans G et qui est dérivable de façon continue.*

Situation: • *Situation:*

$$Q \xrightarrow{\vec{\Phi}} G \xrightarrow{f} \mathbb{R} \quad \text{oder} \quad \bullet \quad \text{ou}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \xrightarrow{\vec{\Phi}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix} = \vec{\Phi}(u, v) \xrightarrow{f} z$$



Wir benutzen jetzt, dass der Wert eines Integrals nicht von der Gebietszerlegung abhängt. Dabei habe ein Flächenelement $\Delta G_{k,n}$ in einer Umgebung mit dem Radius $r_{k,n}$ Platz: • *Nous utilisons le fait que la valeur d'une intégrale ne dépend pas de la partition de région. Un élément de surface $\Delta G_{k,n}$ puisse être inscrit dans un voisinage avec le rayon $r_{k,n}$:*

Sei • *Soit* $r_n = \text{Max}(r_{k,n})$

$$\int_G dG = \lim_{r_n \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_{k,n}, y_{k,n}) \cdot |\Delta G_{k,n}| = \lim_{r_n^* \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_{k,n}^*, y_{k,n}^*) \cdot |\Delta G_{k,n}^*|$$

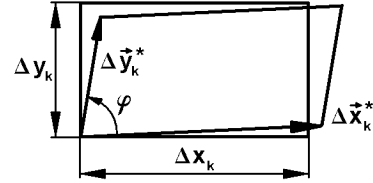
Dabei sind $\Delta G_{k,n}$ und $\Delta G_{k,n}^*$ die Flächenelemente zu zwei verschiedenen Zerlegungen.

• $\Delta G_{k,n}$ et $\Delta G_{k,n}^*$ sont les éléments de surface pour deux patitions différentes.

Sei nun: • *Soit maintenant:*

$$|\Delta G_{k,n}| = \Delta x_{k,n} \cdot \Delta y_{k,n} := \Delta x \cdot \Delta y$$

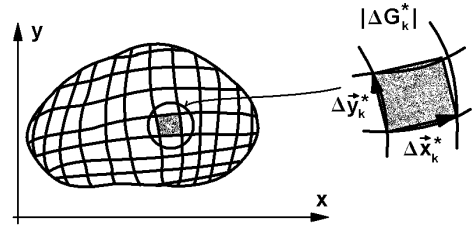
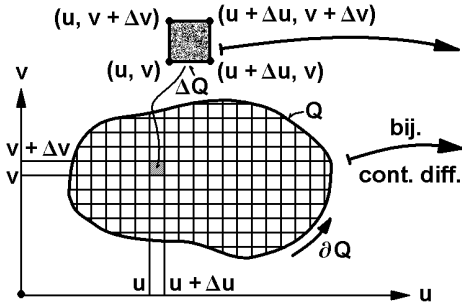
$$\begin{aligned} |\Delta G_{k,n}^*| &= |\Delta \vec{x}_{k,n}^* \times \Delta \vec{y}_{k,n}^*| = \\ &= |\Delta \vec{x}_{k,n}^*| \cdot |\Delta \vec{y}_{k,n}^*| \cdot \sin(\varphi_{k,n}) := \\ &:= |\Delta \vec{x}^*| \cdot |\Delta \vec{y}^*| \cdot \sin(\varphi) \end{aligned}$$



$\leadsto |\Delta G_{k,n}^*| := |\Delta G^*|$ ist ein Parallelogramminhalt • *est donc la mesure de la surface d'un parallélogramme.*

(Der Kürze wegen lassen wir die Indices weg, behalten sie aber in Erinnerung. • *Pour pouvoir écrire plus brièvement, nous laissons tomber les index, mais nous nous les rappelons.*)

Wir beziehen nun die erwähnte Abbildung $\vec{\Phi}(u, v)$, $(u, v) \in Q$ in die Betrachtung ein und benutzen, dass für differenzierbare Funktionen gilt: $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'_x(x) \cdot \Delta x$. • *Nous incluons maintenant l'application $\vec{\Phi}(u, v)$, $(u, v) \in Q$ mentionnée dans nos considérations et nous tenons compte qu'elles valent pour des fonctions dérivables: $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'_x(x) \cdot \Delta x$.*



$$\begin{aligned} |\Delta G^*| &\approx |\Delta \vec{x}^* \times \Delta \vec{y}^*| \\ &= |(\vec{\Phi}(u + \Delta u, v) - \vec{\Phi}(u, v)) \times (\vec{\Phi}(u, v + \Delta v) - \vec{\Phi}(u, v))| \\ &= \left| \begin{pmatrix} \varphi(u + \Delta u, v) \\ \psi(u + \Delta u, v) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \\ 0 \end{pmatrix} \right| \times \left| \begin{pmatrix} \varphi(u, v + \Delta v) \\ \psi(u, v + \Delta v) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \\ 0 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} \varphi(u + \Delta u, v) - \varphi(u, v) \\ \psi(u + \Delta u, v) - \psi(u, v) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \varphi(u, v + \Delta v) - \varphi(u, v) \\ \psi(u, v + \Delta v) - \psi(u, v) \\ 0 \end{pmatrix} \right| \\ &\approx \left| \begin{pmatrix} \varphi'_u(u, v) \cdot \Delta u \\ \psi'_u(u, v) \cdot \Delta u \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \varphi'_v(u, v) \cdot \Delta v \\ \psi'_v(u, v) \cdot \Delta v \\ 0 \end{pmatrix} \right| \\ &= |\varphi'_u(u, v) \cdot \psi'_v(u, v) \cdot \Delta v \cdot \Delta u - \psi'_u(u, v) \cdot \varphi'_v(u, v) \cdot \Delta v \cdot \Delta u| = \left| \begin{vmatrix} \varphi'_u(u, v) & \psi'_u(u, v) \\ \varphi'_v(u, v) & \psi'_v(u, v) \end{vmatrix} \right| \cdot |\Delta u| \cdot |\Delta v| \\ &= \left| \begin{vmatrix} \varphi'_u(u, v) & \varphi'_v(u, v) \\ \psi'_u(u, v) & \psi'_v(u, v) \end{vmatrix} \right| \cdot |\Delta u| \cdot |\Delta v| \end{aligned}$$

Daraus folgt: • *Nous déduisons donc:*

Lemma: • **Lemme:** $|\Delta G^*| \rightarrow dG^* = \pm \begin{vmatrix} \varphi'_u(u, v) & \psi'_u(u, v) \\ \varphi'_v(u, v) & \psi'_v(u, v) \end{vmatrix} du dv$

Problem: • **Problème:** $|\Delta G_{k,n}^*| = |\Delta \vec{x}^*| \cdot |\Delta \vec{y}^*| \cdot \sin(\varphi)$ kann negativ sein, denn $\sin(\varphi)$ kann als Winkelmass negativ werden. • *Peut devenir négatif comme mesure de surface car $\sin(\varphi)$ peut devenir*

négalif comme mesure d'angle.

Wenn wir annehmen, dass Δu und Δv positive Differenzen sind, gilt aber immer noch:

- *Si nous admettons que Δu et Δv sont des différences positives, on a quand-même encore:*

$$\begin{vmatrix} \varphi'_u(u, v) & \varphi'_v(u, v) \\ \psi'_u(u, v) & \psi'_v(u, v) \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \varphi'_v(u, v) & \varphi'_u(u, v) \\ \psi'_v(u, v) & \psi'_u(u, v) \end{vmatrix}$$

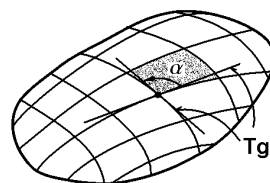
Das heisst, das Vorzeichen hängt einerseits von der Reihenfolge der gewählten Funktionen $x = \varphi(u, v)$ und $y = \psi(u, v)$ ab. Andererseits sollte zu wachsendem x und y auch gleichzeitig wachsende oder gleichzeitig fallende $x = \varphi(u, v)$ und $y = \psi(u, v)$ gehören, sonst kehrt sich bei der einen Variablen die Integrationsrichtung um, bei der andern nicht, was zu einem Vorzeichenwechsel führt. • *Ç.v.d. que le signe dépend d'une part de l'ordre des fonctions choisies $x = \varphi(u, v)$ et $y = \psi(u, v)$. D'autre part on devrait avoir pour des x et y croissants des $x = \varphi(u, v)$ et des $y = \psi(u, v)$ croissants ou décroissants en même temps, sinon la direction d'intégration d'une des variables s'invertit, pour l'autre variable cela n'a pas lieu, c'est pourquoi il y a changement de signe.*

Um die Sache hier etwas zu klären, definieren wir den **Umlaufsinn** der Randkurve ∂G eines Gebietes G .

- *Pour clarifier un peu la chose nous définissons la sens de parcours du contour ∂G d'une domaine G .*

Definition: • **Définition:**

In G sei ein Koordinatengitter gegeben. Wenn darin die zweite Achse (Koordinatenlinie) aus der ersten Achse (Koordinatenlinie) durch Rechtsdrehung um einen Winkel $\alpha \in (0, \pi)$ gewonnen werden kann, sagen wir, die Randkurve resp. damit das Gebiet habe **positiven Umlaufsinn**. Ansonst ist der **Umlaufsinn negativ**.



- *Soit donné dans G un système de coordonnées. Si l'on peut obtenir le deuxième axe (ligne de coordonnée) du premier (ligne de coordonnée) par une rotation à droite d'un angle $\alpha \in (0, \pi)$, nous disons que le contour resp. la région a un sens de parcours positif. Si non il est négatif.*

Ein Koordinatensystem orientiert also die Ebene resp. das Gebiet im Sinne der Vektorrechnung.

- *Un système de coordonnées oriente donc le plan resp. la région comme on l'utilise pour le calcul vectoriel.*

Aus dem bisher Gesagten geht nun hervor, dass das Flächenelement $|\Delta G_{k,n}^*|$ genau dann positiv ist, wenn Q und G denselben Umlaufsinn haben. • *De ce qu'on vient de dire on peut déduire que l'élément de surface $|\Delta G_{k,n}^*|$ est positif exactement quand Q et G ont le même sens de parcours.*

Weiter definieren wir: • *En outre nous définissons:*

Definition: • **Définition:**

$$\det M = \begin{vmatrix} \varphi'_u(u, v) & \varphi'_v(u, v) \\ \psi'_u(u, v) & \psi'_v(u, v) \end{vmatrix} =: \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

heisst **Funktionaldeterminante** oder **Jacobische Determinante**²³

- *s'appelle déterminant fonctionnel ou déterminant de Jacobi*²³.

²³Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804 – 1851

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$Q \xrightarrow{\vec{\Phi}} G, \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \xrightarrow{\vec{\Phi}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix} = \vec{\Phi}(u, v),$$

Φ stetig diff'bar, bijektiv • *dérivable de façon continue, bijective,*

$$D = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}$$

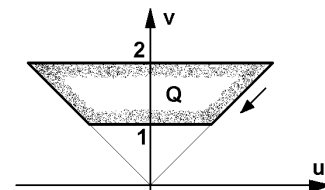
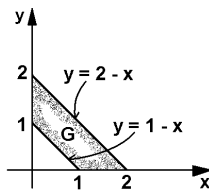
Beh.: • **Thè.:**

$$\int_G f(x, y) dG = \pm \int_Q f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \cdot \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} dQ, \quad dQ = du dv$$

+: G, Q haben gleichen Umlaufsinn • *G, Q ont le même sens de parcours*
 -: Sonst • *Autrement*

Schreibweise: • **Façon d'écrire:** Die Schreibweise $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv$ ist analog zur Schreibweise $dx = \frac{dx}{dt} dt$ bei der gewöhnlichen Substitutionsregel. • *La façon d'écrire $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv$ est analogue à la façon d'écrire $dx = \frac{dx}{dt} dt$ pour la règle de substitution simple.*

Bsp.: • **Exemple:** $\int_G e^{\frac{y-x}{y+x}} dG = ?$



Sei • *Soit* $u = y - x, \quad v = y + x \Rightarrow x = \frac{1}{2}(-u + v), \quad y = \frac{1}{2}(u + v)$

$$\Rightarrow \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

$\leadsto$ **Achtung:** • **Attention:** Bei der Abbildung $(u, v) \mapsto (x, y)$ kehrt sich der Umlaufsinn um!
 • *A l'application $(u, v) \mapsto (x, y)$ le sens de parcours s'invertit!*

$$\begin{aligned} \frac{y-x}{y+x} = \frac{u}{v} &\Rightarrow \int_G e^{\frac{y-x}{y+x}} dG = - \int_Q e^{\frac{u}{v}} \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv = - \int_Q e^{\frac{u}{v}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du dv = \frac{1}{2} \cdot \int_1^2 \left(\int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} du \right) dv \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_1^2 (v e^{\frac{u}{v}} \Big|_{u=-v}^{u=v}) dv = \frac{1}{2} \cdot \int_1^2 v (e^1 - e^{-1}) dv = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot v^2 \cdot (e^1 - e^{-1}) \Big|_1^2 = \frac{3}{4} \cdot (e^1 - e^{-1}) \end{aligned}$$

8.6.2 Verallgemeinerung — Généralisation

Im Falle von mehr als zwei Variablen führt man eine analoge Betrachtung. Im Falle von drei Variablen tritt an die Stelle eines Parallelogrammes ΔQ ein Spat und an Stelle des durch $\pm$ den Betrag eines Vektorprodukts gegebenen Parallelogramminhalts das Spatprodukt, also wieder eine Determinante. An Stelle der Orientierung der Ebene tritt hier die Orientierung des Raumes. Im $\mathbb{R}^m$ hat man dann den

Volumeninhalt eines m -dimensionalen Spates. • *Dans le cas où il y a plus de deux variables on procède de façon analogue. Si l'on a trois variables, on a au lieu d'un parallélogramme ΔQ un parallélépipède et au lieu de $\pm$ la valeur absolue du produit vectoriel qui livre la mesure de la surface du parallélogramme, on a le produit mixte, donc de nouveau le déterminant. Ici on a au lieu de l'orientation du plan l'orientation de l'espace. Dans le $\mathbb{R}^m$ on a par conséquent la mesure du volume du parallélépipède de dimension m .*

Unter analogen Voraussetzungen wie bei zwei Variablen erhalten wir danach die Formeln:

• *Sous les hypothèses analogues comme dans le cas avec deux variabl. nous obtenons les formules:*

Formel: • **Formule:**

$$\begin{aligned} \int_V f(x, y, z) dV &= \int_V f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \pm \int_M f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)) \cdot \frac{\partial(\varphi, \psi, \chi)}{\partial(u, v, w)} du dv dw \\ \int_V f(x_1, \dots, x_m) dV &= \dots = \\ &\pm \int_M f(\varphi_1(u_1, \dots, u_m), \dots, \varphi_m(u_1, \dots, u_m)) \cdot \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{\partial(u_1, \dots, u_m)} du_1 \dots du_m \end{aligned}$$

Bsp.: • **Exemple:** Das Volumenelement in Kugelkoordinaten: • *L'élément de volume en coordonnées sphériques:*

Kugelkoordinaten: • *Coordonnées sphériques:*

$$\begin{aligned} u &= r, \quad v = \varphi, \quad w = \vartheta \\ x &= r \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\vartheta), \quad y = r \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\vartheta), \quad z = r \cdot \cos(\vartheta) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(\varphi, \psi, \chi)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) \sin(\vartheta) & -r \sin(\varphi) \sin(\vartheta) & r \cos(\varphi) \cos(\vartheta) \\ \sin(\varphi) \sin(\vartheta) & r \cos(\varphi) \sin(\vartheta) & r \sin(\varphi) \cos(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) & 0 & -r \sin(\vartheta) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &-r^2 \sin^3(\vartheta) \cos^2(\varphi) - r^2 \sin^2(\varphi) \sin(\vartheta) \cos^2(\vartheta) - r^2 \cos^2(\varphi) \sin(\vartheta) \cos^2(\vartheta) - r^2 \sin^2(\varphi) \sin^3(\vartheta) \\ &= -r^2 \sin^3(\vartheta) (\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)) - r^2 \sin(\vartheta) \cos^2(\vartheta) (\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)) \\ &= -r^2 \sin^3(\vartheta) - r^2 \sin(\vartheta) \cos^2(\vartheta) = -r^2 \sin(\vartheta) (\sin^2(\vartheta) + \cos^2(\vartheta)) = -r^2 \sin(\vartheta) \end{aligned}$$

Das System (r, φ, ϑ) bildet aber ein Linkssystem, was zu einem negativen Vorzeichen führt. (Ein Rechtssystem wäre z.B. (φ, r, ϑ)) Damit ist das Volumenelement von 8.5.4 bestätigt.

• *Le système (r, φ, ϑ) est un système de sens indirect, ce qui cause le signe négatif. (Un système de sens indirect serait p.ex. (φ, r, ϑ)). Alors l'élément de volume de 8.5.4 est confirmé.*

Korollar: • **Corollaire:**

Vor.: • **Hyp.:**

Kugelkoordinaten • *coordonnées sphériques*

Beh.: • **Thè.:**

Funktionaldeterminante • *Déterminant de Jacobi:*

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\varphi, r, \vartheta)} = r^2 \sin(\vartheta)$$

8.6.3 Beispiel — Exemple

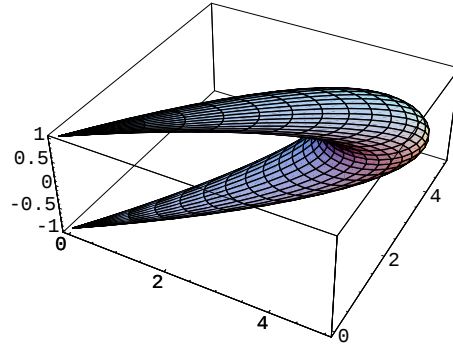
$$\vec{w}(u, v, r) = \begin{pmatrix} (r \cdot \cos(u) + 4) \sin(v) \\ (r \cdot \sin(u) + 4) \sin(v) \\ \cos(v) \end{pmatrix}$$

$$x(u, v, r) = (r \cdot \cos(u) + 4) \sin(v),$$

$$y(u, v, r) = (r \cdot \sin(u) + 4) \sin(v),$$

$$z(u, v, r) = \cos(v),$$

$$\Rightarrow |V| = \left| \int_V \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, r)} du dv dr \right| = ?$$



$$\leadsto \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, r)} = -r \cos^2(u) \sin^3(v) - r \sin^2(u) \sin^3(v),$$

$$\leadsto |V| = \left| \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 -r \cos^2(u) \sin^3(v) - r \sin^2(u) \sin^3(v) dr dv du \right| = \frac{4\pi}{3} \approx 4.18879$$

Kapitel • Chapitre 9

Differentialgeometrie: Kurven — Géométrie différentielle: Courbes

9.1 Grundlagen — Bases

9.1.1 Kurvendefinitionen — Définitions de courbes

Allgemeine Kurve — Courbe générique

Wir betrachten eine **vektorwertige Funktion**: • *Considérons une fonction à valeurs vectorielles*:

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}, \quad \varphi_i(t) \text{ stet'cont } (i = 1, 2, \dots, n)$$

Definition: • **Définition:** $\{\overrightarrow{OP} = \vec{v}(t) \mid t \in I, O = \text{Ursprung} \bullet \text{Origine}\}$
heisst **Kurve im $\mathbb{R}^n$** • *s'appelle courbe dans le $\mathbb{R}^n$.*

Beispiele: • **Exemples:**

1. $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \cos(10t) \\ \sin(10t) \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ Zyklode im $\mathbb{R}^2$ • *cycloïde dans le $\mathbb{R}^2$*

2. $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ Schraubenlinie im $\mathbb{R}^3$ • *Hélice circulaire dans le $\mathbb{R}^3$*

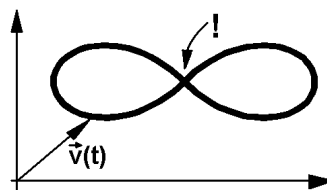
Geschlossene Kurve — Courbe fermée

Sei • *Soit* $\vec{v}(t)$ definiert auf • *défini sur* $I = [t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$

Definition: • **Définition:** Die Kurve heisst **geschlossen**, falls gilt: • *La courbe est une courbe fermée, s'il vaut: $\vec{v}(t_1) = \vec{v}(t_2)$*

$$P_0: \vec{v}(t_1) = \vec{v}(t_2)$$

$\leadsto$ Kreuzungspunkt • *Point de croisement*



Definition: • **Définition:**

Eine Kurve heisst **einfach geschlossen**, wenn sie keinen Kreuzungspunkt hat. • *La courbe s'appelle fermée de façon simple, si elle est libre de points de croisement.*

9.1.2 Gebiete — Régions

Von der Analysis I her wissen wir: • *De l'analyse I nous savons:*

Im $\mathbb{R}^2$ umschliesst eine einfach geschlossene Kurve ein **zusammenhängendes Gebiet**. • *Dans le $\mathbb{R}^2$ une courbe fermée de façon simple contourne une région connexe.*

Offenes Gebiet: Ohne Rand ∂G • **Région**

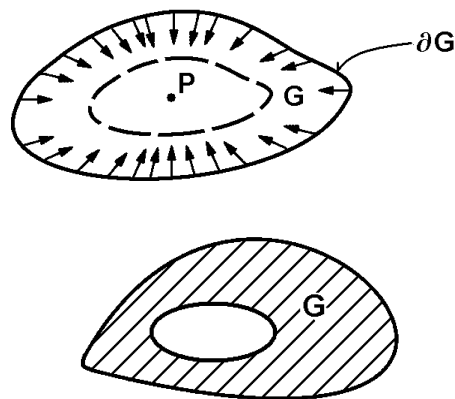
ouverte: *Sans le bord ∂G*

Abgeschlossenes Gebiet:

Mit Rand $\bar{G} = G \cup \partial G$

• **Région fermée:**

Avec le bord $\bar{G} = G \cup \partial G$



In einem einfach zusammenhängenden Gebiet G lässt sich die Randkurve innerhalb von G stetig zu einem Punkt zusammenziehen. In einem mehrfach zusammenhängenden Gebiet gelingt das nicht immer wegen den Löchern.

• *Dans une région connexe de façon simple une courbe de bord se laisse déformer à l'intérieur de la région de façon continue jusqu'à ce qu'on n'ait qu'un point. Dans une région connexe de façon multiple on n'y arrive pas toujours à cause des trous.*

9.1.3 Tangentenvektor, Tangentialebene — Vecteur tangent, plan tangent

Ausgangslage — **Situation départ**

Sei • *Soit* $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$ Kurve • *courbe.* — Sei • *Soit* $\varphi_i(t)$ stetig diff'bar • *dérivable de façon continue* ($i = 1, 2, \dots, n$)

$\leadsto$ Die Koordinatenfunktionen $\varphi_i(t)$ haben keinen **Knick**. (Die Graphen der $\varphi_i(t)$ nannten wir **glatt**.)
• *Les fonctions de coordonnées n'ont pas de pli (coude, genou). (Nous avons appelé les graphes de ces courbes $\varphi_i(t)$ lisses.)*

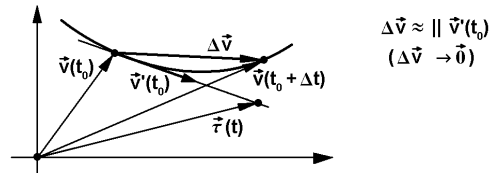
Idee des Tangentenvektors — Idée du vecteur tangent

Wir gehen hier davon aus, dass die Tangente an eine Flugkurve eine physikalische Realität ist, die wir noch mathematisch beschreiben müssen. • *Ici nous partons du fait que la tangente à une courbe de vol représente une réalité physique qu'il faut encore décrire de façon mathématique.*

Sei • *Soit* $\Delta \vec{v} = \vec{v}(t_0 + \Delta t) - \vec{v}(t_0)$

Für $\Delta t \rightarrow 0$ nähert sich die Richtung von $\Delta \vec{v}$ immer mehr der Tangentenrichtung ($\pm \vec{\tau}$).

• *Pour* $\Delta t \rightarrow 0$ *la direction de* $\Delta \vec{v}$ *s'approche de plus en plus à la direction de la tangente* ($\pm \vec{\tau}$).



Für $\Delta t > 0$ hat $\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ dieselbe Richtung wie $\vec{v}$. (Für $\Delta t < 0$ ist die Richtung entgegengesetzt.)

• *Pour* $\Delta t > 0$, $\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ *possède la même direction que* $\vec{v}$. (*Pour* $\Delta t < 0$ *la direction est opposée.*)

$\leadsto$ Parallelität: • *Parallelisme:*

$$\frac{\vec{v}(t_0 + \Delta t) - \vec{v}(t_0)}{\Delta t} \parallel \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \parallel \vec{v}$$

$\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ ist eine Annäherung an die Richtung von $\pm \vec{\tau}$. • $\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ *est une approximation de la direction de* $\pm \vec{\tau}$.

Für $|\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}| \neq 0$ können wir daher die Tangentenrichtung durch die Richtung von $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ definieren.

• *Pour* $|\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}| \neq 0$ *nous pouvons donc définir la direction de la tangente par* $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$.

Definition: • **Définition:**

$$\vec{\tau} := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \begin{pmatrix} \Delta \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \Delta \varphi_n(t) \end{pmatrix} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{\Delta \varphi_1(t)}{\Delta t} \\ \vdots \\ \frac{\Delta \varphi_n(t)}{\Delta t} \end{pmatrix} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \Delta \varphi_1(t)' \\ \vdots \\ \Delta \varphi_n(t)' \end{pmatrix} := \vec{v}(t_0)$$

Bemerkung: • **Remarque:** Falls das Koordinatensystem so gelegt ist, dass in t_0 die 1.

Koordinatenachse parallel zu $\vec{\tau}$ ist so gilt: • *Si le système de coordonnées est situé de façon que la première axe de coordonnées est parallèle à* $\vec{\tau}$, *il faut:*

$$\vec{v}'(t_0) = \begin{pmatrix} \varphi_1'(t_0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. (\leadsto \varphi_2'(t_0) = \dots = \varphi_n'(t_0) = 0. \text{ Horizontale Tangenten an die Graphen der } \\ \text{Koordinatenfunktionen.} \bullet \text{ Tangentes horizontales aux graphes des fonctions de coordonnées.})$$

Die Kenntnisse aus der Vektorgeometrie erlauben uns nun sofort die Parametergleichung für die Tangente aufzuschreiben: • *Les connaissances provenant de la géométrie vectorielle nous permettent maintenant tout de suite de noter l'équation paramétrique pour la tangente:*

Formel: • **Formule:** $\vec{\tau}_0(t) = \vec{v}(t_0) + t \cdot \vec{v}'(t_0)$

Singuläre Punkte — Des points clos

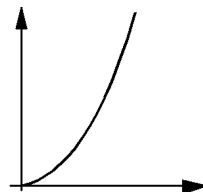
Für $\vec{v}'(t_0) = \vec{0}$ existiert kein Tangentenvektor (Länge 0). Die Kurve kann hier einen singulären Punkt besitzen. • *Pour $\vec{v}'(t_0) = \vec{0}$ le vecteur tangent n'existe pas. (Longueur 0). Ce point de la courbe peut être un point solide singulier ou clos.*

Beispiele: • **Exemples:**

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^4 \end{pmatrix}, \quad t \in [-a, a] = I$$

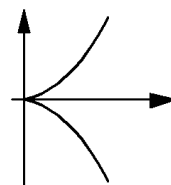
$$\leadsto \vec{v}(t) = \vec{v}(-t)$$

$t = 0 \leadsto$ Umkehrpunkt. • *Poit de rebroussement*



$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, \quad t \in [-a, a] = I$$

$t = 0 \leadsto$ Spitze. • *Pointe.*



Im Falle $\vec{v}'(t) \neq \vec{0}$ existiert ein endlich langer Tangentenvektor und daher eine Tangentenrichtung. Daher sagen wir: • *Dans le cas $\vec{v}'(t) \neq \vec{0}$ il existe un vecteur tangent et donc une direction de la tangente. Nous disons donc:*

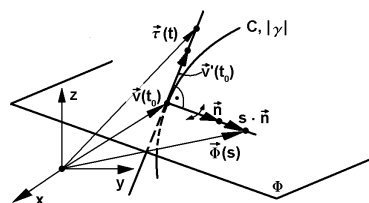
Definition: • **Définition:**

Im Falle $\vec{v}'(t) \neq \vec{0}$ heisst die Kurve **glatt** • *Dans le cas $\vec{v}'(t) \neq \vec{0}$ la courbe s'appelle lisse*

Die Normalenebene — Le plan des normales

Für einen Vektor $\vec{\Phi}(s)$, der in die Ebene Φ zeigt, muss gelten: • *Pour un vecteur $\vec{\Phi}(s)$ qui pointe dans le plan Φ , la formule suivante doit s'appliquer:*

$$\langle \vec{\Phi}(s) - \vec{v}(t_0), \vec{v}'(t_0) \rangle = \langle s \cdot \vec{n}, \vec{v}'(t_0) \rangle = 0 \quad (\perp)$$



Die Normalenebene Φ wird somit durch den Vektor $\vec{\Phi}(s)$ in der folgenden Gleichung beschrieben:

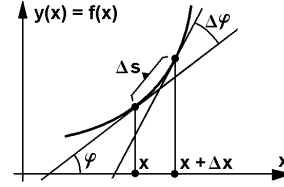
• *Le plan des normales Φ est donc décrit par le vecteur $\vec{\Phi}(s)$ dans l'équation suivante:*

Formel: • **Formule:** $\langle \vec{\Phi}(s) - \vec{v}(t_0), \vec{v}'(t_0) \rangle = 0$

9.2 Krümmung von Kurven — Courbure de courbes

9.2.1 Ebene Kurven — Définition de la courbure

Wir definieren die **Krümmung** einer Kurve in einem Punkt P als die Änderung der Tangentenrichtung pro Weglänge in diesem Punkt. Dieses Verhältnis kann auch als Änderungsgeschwindigkeit der Tangentenrichtung verstanden werden, wenn man die Kurve mit gleichbleibender Geschwindigkeit durchfährt. Grosse Krümmung bedeutet daher rasche Richtungsänderung.



• *Nous définissons la **courbure** d'une courbe dans un point P comme changement de la direction de la Tangente par longueur de chemin dans ce point. Ce rapport peut être compris aussi comme vitesse du changement de la direction de la tangente, si l'on glisse le long de la courbe avec une vitesse constante. Une courbure grande signifie donc un changement de direction rapide.*

Definition: • **Définition:** **Krümmung:** • **Courbure:** $\kappa_0 = \left| \frac{d\varphi}{ds} \right|$, $\kappa = \frac{d\varphi}{ds}$

Bemerkung: • **Remarque:**

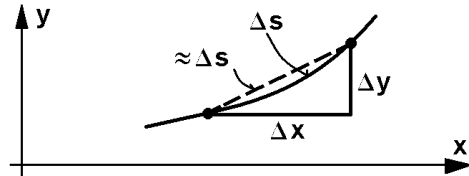
$\text{sgn}(\kappa)$ hängt von der Richtung ab, in der die Kurve durchlaufen wird. • *$\text{sgn}(\kappa)$ dépend de la direction, dans laquelle on parcourt la courbe.*

9.2.2 Ebene Kurven — Des courbes planes

Kartesische Koordinaten — **Coordonnées cartésiennes**

$$\Delta s \approx \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \Rightarrow \frac{\Delta s}{\Delta x} \approx \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

$$\rightarrow \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (y'(x))^2}$$



Nun gilt: • *Il vaut:*

$$y' = \tan(\varphi) \Rightarrow \varphi = \arctan(y') \Rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = \varphi'_x = (\arctan(y'))'_x = \frac{1}{1 + (y'(x))^2} \cdot (y'(x))' = \frac{y(x)''}{1 + (y'(x))^2}$$

Andererseits gilt: • *D'autre part, il vaut:*

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi(s)}{ds} \cdot \frac{ds(x)}{dx} = \text{sgn}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right) \cdot \kappa \cdot \frac{ds}{dx} \Rightarrow \kappa = \left| \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{ds}{dx}} \right| = \frac{y(x)''}{1 + (y'(x))^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}} = \frac{y(x)''}{(1 + (y'(x))^2)^{3/2}}$$

Formel: • **Formule:** $\kappa = \frac{y(x)''}{(1 + (y'(x))^2)^{3/2}}$

Bsp.: • **Exemple:**

$$1. \ y(x) = f(x) = x^2, \ x = 0, \ y'(x) = f'(x) = 2x, \ y''(x) = f''(x) = 2 \Rightarrow \kappa = \frac{2}{(1 + (2 \cdot 0)^2)^{3/2}} = 2$$

$$2. \ y(x) = f(x) = \sin(x), \ x = \frac{\pi}{2}, \ y'(\frac{\pi}{2}) = f'(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} = 0), \ y''(x) = f''(x) = -\sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow$$

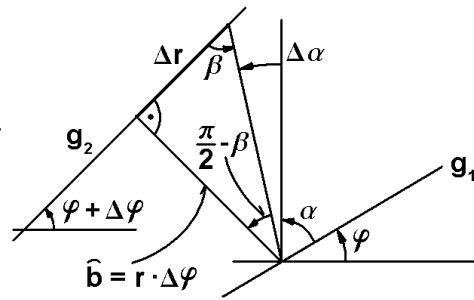
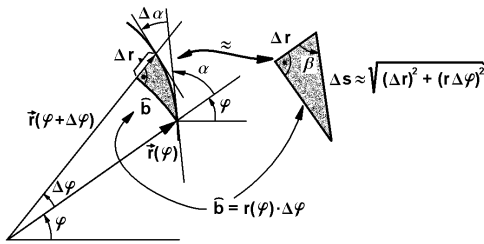
$$\kappa_0 = \left| \frac{1}{(1 + (0)^2)^{3/2}} \right| = 1$$

Bemerkung: • **Remarque:** $\leadsto$ **Korollar:** • **Corollaire:** (!!!!)

$$f(x) = y(x) \rightarrow \{Min, Max\} \Rightarrow f'(x) = y'(x) = 0 \Rightarrow \kappa = \frac{y(x)''}{(1 + (y'(x))^2)^{3/2}} = \frac{y(x)''}{(1 + (0)^2)^{3/2}} = y(x)''$$

Speziell: • **Spécialement:** $y(x)' = y(x)'' = 0 \Rightarrow \kappa = 0$

Polarkoordinaten — Coordonnées polaires



$$\check{b} = r(\varphi) \cdot \Delta(\varphi)$$

$$\Delta s \approx \sqrt{(\Delta r)^2 + (\check{b})^2} = \sqrt{(\Delta r)^2 + r^2 \cdot (\Delta \varphi)^2}, \quad \frac{\Delta s}{\Delta \varphi} = \sqrt{\left(\frac{\Delta r}{\Delta \varphi}\right)^2 + r^2} \rightarrow \frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{(r'_\varphi)^2 + r^2} = s'_{F_i}$$

Für $\Delta \alpha \rightarrow 0$ geht auch $\Delta \varphi \rightarrow 0$ • *Pour $\Delta \alpha \rightarrow 0$ il vaut aussi $\Delta \varphi \rightarrow 0$*
 $(\leadsto g_1 \sim \|g_2)$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} - \beta + \alpha \approx \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta \approx \alpha$$

$$\arctan \beta \approx \frac{\check{b}}{\Delta r} = \frac{r \cdot \Delta(\varphi)}{\Delta r} = \frac{r}{(\frac{\Delta r}{\Delta \varphi})} \rightarrow \frac{r}{r'_\varphi}$$

$$\Rightarrow \alpha \approx \beta \approx \arctan\left(\frac{r}{r'_\varphi}\right)$$

Krümmung (nach Definition): • *Courbure (d'après la définition):* $\kappa = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta(\varphi + \alpha)}{\Delta s}$

$$\Rightarrow \kappa = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta(\varphi + \alpha)}{\Delta \varphi} \cdot \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \varphi}{\Delta \varphi} + \frac{\Delta \alpha}{\Delta \varphi} \right) \cdot \frac{1}{\frac{\Delta s}{\Delta \varphi}} = (1 + \alpha'_\varphi) \cdot \frac{1}{s'_\varphi} =$$

$$(1 + (\arctan(\frac{r}{r'_\varphi}))'_\varphi) \cdot \frac{1}{\sqrt{(r'_\varphi)^2 + r^2}} = (1 + \frac{1}{1 + (\frac{r}{r'_\varphi})^2} \cdot \frac{r'_\varphi \cdot r'_\varphi - r \cdot r''_{\varphi\varphi}}{(r'_\varphi)^2}) \cdot \frac{1}{\sqrt{(r'_\varphi)^2 + r^2}} =$$

$$(1 + \frac{(r'_\varphi)^2}{(r'_\varphi)^2 + r^2} \cdot \frac{r'_\varphi \cdot r'_\varphi - r \cdot r''_{\varphi\varphi}}{(r'_\varphi)^2}) \cdot \frac{1}{((r'_\varphi)^2 + r^2)^{1/2}} = \frac{(r'_\varphi)^2 + r^2 + (r'_\varphi)^2 - r \cdot r''_{\varphi\varphi}}{((r'_\varphi)^2 + r^2) \cdot ((r'_\varphi)^2 + r^2)^{1/2}} =$$

$$\frac{r^2 + 2 \cdot (r'_\varphi)^2 - r \cdot r''_{\varphi\varphi}}{((r'_\varphi)^2 + r^2)^{3/2}} \leadsto$$

Formel: • **Formule:** $\kappa = \frac{r^2 + 2 \cdot (r'_\varphi)^2 - r \cdot r''_{\varphi\varphi}}{((r'_\varphi)^2 + r^2)^{3/2}}$

Bsp.: • Exemple:

$$1. r(\varphi) = \varphi \Rightarrow \kappa = \frac{\varphi^2 + 2 \cdot 1^2 - \varphi \cdot 0}{((1)^2 + \varphi^2)^{3/2}} = \frac{\varphi^2 + 2}{(1 + \varphi^2)^{3/2}} \quad \varphi = 0 \Rightarrow \kappa = 2$$

$$2. r(\varphi) = e^\varphi \Rightarrow \kappa = \frac{e^{2\varphi} + 2 \cdot e^{2\varphi} - e^\varphi \cdot e^\varphi}{(e^{2\varphi} + e^{2\varphi})^{3/2}} = \frac{2 \cdot e^{2\varphi}}{(2e^{2\varphi})^{3/2}} = 2^{-1/2} e^{-\varphi} \quad \varphi = 0 \Rightarrow \kappa = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vektorfunktionen — Fonctions vectorielles

Sei • Soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

Von den kartesisch definierten Funktionen her wissen wir: • Des fonctions définies dans les systèmes cartésiens nous savons:

$$\kappa = \left| \frac{y(x)''}{(1 + (y'(x))^2)^{3/2}} \right|, \quad y'(x) = y'_x = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t} (*) \cdot \rightsquigarrow \quad \text{Kurz: • Bref: } \frac{y'}{x'}$$

$$\rightsquigarrow y''_{xx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d \frac{dy}{dx}}{dx} \stackrel{\text{subst}}{=} \frac{d \frac{dy}{dx}}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy'_x}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \stackrel{(*)}{=} \frac{d \frac{y'_t}{x'_t}}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_t}{(x'_t)^2} \cdot \frac{1}{x'_t},$$

$$\text{Kurz: • Bref: } y''_{xx} = \frac{y'' \cdot x' - y' \cdot x''}{(x'')^3}$$

$$\rightsquigarrow \kappa = \left| \frac{y(x)''}{(1 + (y'(x))^2)^{3/2}} \right| = \left| \frac{y'' \cdot x' - y' \cdot x''}{(x'')^3} \right| \cdot \left| \frac{1}{(1 + (\frac{y'}{x'})^2)^{3/2}} \right|, \quad (1 + (\frac{y'}{x'})^2)^{3/2} = ((y')^2 + (x')^2)^{3/2} \cdot \frac{1}{(x')^3}$$

$$\rightsquigarrow \kappa = \left| \frac{y'' \cdot x' - y' \cdot x''}{((y')^2 + (x')^2)^{3/2}} \right| \rightsquigarrow$$

Formel: • Formule:

Vor.: • Hyp.:

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\vec{t}(t)| \neq \vec{0}, \quad x(t), y(t) \in \mathcal{D}^{(2)}(I)$$

Beh.: • Thè.:

$$\kappa = \frac{|\vec{v}''(t) \times \vec{v}'(t)|}{|\vec{v}'(t)|^3} = \left| \frac{y'' \cdot x' - y' \cdot x''}{((y')^2 + (x')^2)^{3/2}} \right|$$

$$\text{Bsp.: • Exemple: } \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \kappa = \left| \frac{6t \cdot 2t - 3t^2 \cdot 2}{((2t)^2 + (3t^2)^2)^{3/2}} \right| = \left| \frac{6t^2}{(4t^2 + 9t^4)^{3/2}} \right| = \frac{6}{|t \cdot (4 + 9t^2)^{3/2}|}, \quad t \neq 0$$

9.2.3 Krümmungsradius — Rayon de courbure

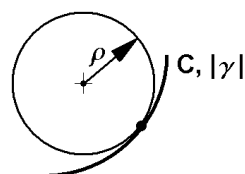
Problem: • Problème:

Geg.: • **Donné:**

Punkt P einer Kurve C , Krümmung $\kappa_0(P)$. • *Point P d'une courbe C , courbure $\kappa_0(P)$.*

Ges.: • **Trouver:** Kreis mit gleicher Krümmung $\kappa_0(P)$ (Schmiegekreis in P , am besten passender Kreis). • *Cercle avec la courbure $\kappa_0(P)$ (Cercle qui s'approche de la courbe à P , cercle qui convient le mieux).*

$$\Delta s \approx \rho \Delta \varphi \Rightarrow \rho \approx \frac{\Delta s}{\Delta \varphi}, \quad \rho = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{1}{\frac{d\varphi}{ds}} = \frac{1}{\kappa}$$



Formel: • **Formule:** $(\pm \text{Krümmungsradius} \quad \bullet \quad \pm \text{Rayon de courbure}) \quad \rho = \frac{1}{\kappa}$

Bsp.: • **Exemp.:** $f(x) = \sin(x), \quad x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \kappa = 1$

(Vgl. Seite 342 • Voir page 342)

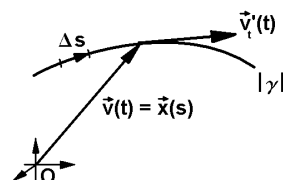
$$\Rightarrow \rho \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

9.2.4 Kurven im Raum — Courbes dans l'espace

Geg.: • **Donné:** Kurve • *Courbe γ*

$$t \mapsto \vec{v}(t), \quad t \in [a, b], \quad \gamma = \{\vec{v}(t)\}$$

$$\text{Sei} \quad \bullet \quad \text{Soit } \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$



Idee: • **Idée:** Führe die **Bogenlänge** s als neuen Parameter ein. • *Introduire la longueur de l'arc s comme nouveau paramètre.*

Normalerweise ist die Kurve vernünftig parametrisiert gegeben mit irgend einem Parameter t . Für die Kurvenlänge muss dann gelten: $s = h(t)$, h streng monoton und bijektiv. • *Normalement la courbe est donnée en forme paramétrisée de façon raisonnable avec un paramètre quelconque t . Pour la longueur de l'arc il vaut donc $s = h(t)$, h strictement monotone et bijective.*

$$\leadsto t = h^{-1}(s) = h^{-1}(h(t)), \quad \vec{v}(t) = \vec{v}(h^{-1}(s)) = \vec{x}(s) = \vec{x}(h(t))$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{x}(h(t)) = \frac{d\vec{x}(s)}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \vec{x}_s' \cdot s_t' = \frac{d}{dt} \vec{v}(t) = \vec{v}_t'(t) \quad \leadsto$$

Lemma: • **Lemme:** **Vor.:** • **Hyp.:** Wie beschrieben die Kurve durch $\vec{v}(t)$ und $\vec{x}(s)$

• *Comme décrit la courbe par $\vec{v}(t)$ et $\vec{x}(s)$*

Beh.: • **Thè.:**

$$\vec{x}_s' = \frac{\vec{v}_t'(t)}{s_t'}$$

Wir stellen uns jetzt einige nützlichen Formeln bereit:

• *Nous déduisons maintenant quelques formules utiles:*

$$\Delta \vec{s} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta s = |\Delta \vec{s}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

$$\leadsto \text{Formal: } \bullet \text{ Formellement: } ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

$$\leadsto s_t' = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt} = \sqrt{\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}}$$

$$\Rightarrow s_t' = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2} = \left| \begin{pmatrix} x_t' \\ y_t' \\ z_t' \end{pmatrix} \right| = |\vec{v}_t'|$$

$$\text{Lemma } \bullet \text{ Lemme } \Rightarrow \vec{x}_s' = \frac{\vec{v}_t'(t)}{s_t'} = \frac{\vec{v}_t'(t)}{|\vec{v}_t'|} = \vec{e}_{\vec{v}_t'}$$

$\leadsto$ Einheitsvektor in Tangentenrichtung! • *Vecteur unité en direction de la tangente!*

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$\vec{v}(t) = \vec{x}(s)$ differenzierbare Kurve

• $\vec{v}(t) = \vec{x}(s)$ courbe dérivable,

t = vernünftiger Parameter,

• t = paramètre raisonnable,

s = Bogenlänge

• s = longueur de l'arc

Beh.: • **Thè.:**

$$1) s_t' = |\vec{v}_t'|$$

$$2) \vec{x}_s' = \vec{e}_{\vec{v}_t'}, \quad |\vec{e}_{\vec{v}_t'}| = 1$$

$\vec{x}_s'$ Einheitsvektor in Tangentenrichtung!

• $\vec{x}_s'$ vecteur unité en direction de la tangente!

Dann gilt: • *Conséquence:*

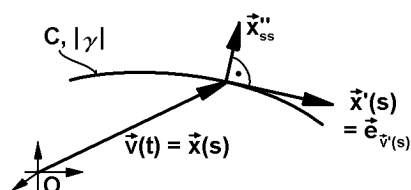
$$|\vec{x}_s'|^2 = \langle \vec{x}_s', \vec{x}_s' \rangle = \langle \vec{e}_{\vec{v}_t'}, \vec{e}_{\vec{v}_t'} \rangle = 1,$$

$$\langle \vec{e}, \vec{e} \rangle = |\vec{e}|^2 = 1$$

$$(|\vec{x}_s'|^2)'_s = \langle \vec{x}_s', \vec{x}_s' \rangle'_s = 2 \cdot \langle \vec{x}_s', \vec{x}_{ss}'' \rangle =$$

$$(1)'_s = 0$$

$$\Rightarrow \vec{x}_s' \perp \vec{x}_{ss}''$$

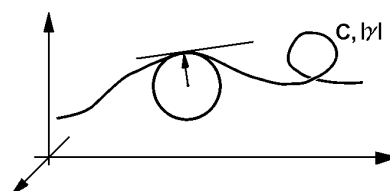
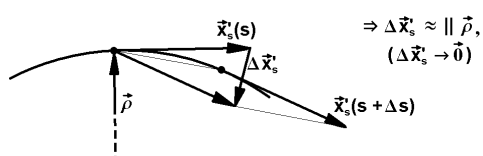


Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

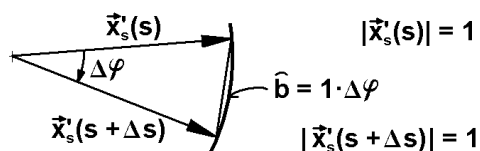
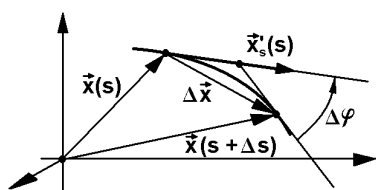
$\vec{v}(t) = \vec{x}(s)$ differenzierbare Kurve
 • $\vec{v}(t) = \vec{x}(s)$ *courbe dérivable*,
 t = vernünftiger Parameter,
 • t = *paramètre raisonnable*,
 s = Bogenlänge • s = *longueur de l'arc*

Beh.: • **Thè.:**

$$\vec{x}_s' \perp \vec{x}_{ss}''$$



Betrachte: • *Etudier:*



$$\Rightarrow |\Delta \vec{x}_s'| = |\vec{x}_s'(s + \Delta s) - \vec{x}_s'(s)| \approx \Delta \varphi$$

$$\leadsto \text{Krümmung} \quad \bullet \text{ Courbure } \kappa_0 := \left| \frac{d\varphi}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}_s'}{\Delta s} = \left| \frac{d}{ds} \vec{x}_s' \right| = |\vec{x}_{ss}''|$$

Lemma: • **Lemme:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$\vec{v}(t) = \vec{x}(s)$,
 s = Bogenlänge als Parameter
 • s = *longueur de l'arc comme paramètre*

Beh.: • **Thè.:**

$$\kappa_0 = |\vec{x}_{ss}''|, \quad \kappa^2 = \langle \vec{x}_{ss}'', \vec{x}_{ss}'' \rangle$$

Problem: • **Problème:** Die ungewöhnliche Parametrisierung $\vec{x}(s)$ muss berechnet oder aber umgangen werden. • *La paramétrisation inhabituelle doit être calculée ou contournée.*

Rechnung: • **Calcul:** Sei $\vec{x}(s)$ eine zulässige Umparametrisierung von $\vec{v}(t)$. • *Soit $\vec{x}(s)$ une autre paramétrisation valable de $\vec{v}(t)$.*

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{|\Delta \vec{v}(t)|}{\Delta t} = \frac{\sqrt{\langle \Delta \vec{v}(t), \Delta \vec{v}(t) \rangle}}{\Delta t} = \sqrt{\left\langle \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t}, \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t} \right\rangle} = \sqrt{\left(\frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t} \right)^2} \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \sqrt{(\vec{v}_t')^2} = s_t'$$

$$s_{tt}'' = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d \sqrt{(\vec{v}_t')^2}}{dt} = \frac{d((\vec{v}_t')^2)^{1/2}}{dt} = \frac{1}{2} \cdot ((\vec{v}_t')^2)^{-1/2} \cdot 2 \cdot \langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle = \frac{\langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle}{|\vec{v}_t'|} = \frac{\langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle}{s_t'}$$

$$\Rightarrow s_{tt}'' = \frac{d^2 t}{ds^2} = \frac{\langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle}{s_t'}$$

$$\begin{aligned} \text{Weiter: } \bullet \text{ En outre: } \vec{v}_{tt}'' &= \frac{d^2 \vec{v}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \vec{v}_t' = \frac{d}{dt} (\vec{x}_s' \cdot s_t') = \frac{d}{dt} \vec{x}_s' \cdot s_t' + \vec{x}_s' \cdot \frac{d}{dt} s_t' \\ &= \frac{d}{ds} (\vec{x}_s') \cdot \frac{d}{dt} (s_t') \cdot s_t' + \vec{x}_s' \cdot \frac{d}{dt} s_t' = \vec{x}_{ss}'' \cdot (s_t')^2 + \vec{x}_s' \cdot s_{tt}'' \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Mit Lemma von Seite 345: $\bullet$ Avec le lemme de page 345:

$$\begin{aligned} \vec{x}_{ss}'' &= \frac{\vec{v}_{tt}'' - \vec{x}_s' \cdot s_{tt}''}{(s_t')^2} = \frac{1}{(s_t')^2} \cdot (\vec{v}_{tt}'' - \frac{\vec{v}_t'}{s_t'} \cdot s_{tt}'') = \frac{1}{(s_t')^2} \cdot (\vec{v}_{tt}'' - \frac{\vec{v}_t'}{s_t'} \cdot \frac{\langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle}{s_t'}) \\ (\text{vgl. oben } \bullet \text{ voir en haut}) &= \frac{1}{(s_t')^2} \cdot (\vec{v}_{tt}'' - \frac{\vec{v}_t' \cdot \langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle}{(s_t')^2}) \end{aligned}$$

Mit dem Satz von Seite 345: $\bullet$ Avec le théorème de la page 345:

$$s_t' = |\vec{v}_t'| \Rightarrow (s_t')^2 = |\vec{v}_t'|^2 = \langle \vec{v}_t', \vec{v}_t' \rangle \Rightarrow \vec{x}_{ss}'' = \frac{1}{\langle \vec{v}_t', \vec{v}_t' \rangle} \cdot (\vec{v}_{tt}'' - \frac{\vec{v}_t' \cdot \langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle}{\langle \vec{v}_t', \vec{v}_t' \rangle}), \quad \kappa_0 = |\vec{x}_{ss}''| \leadsto$$

$$\begin{aligned} \text{Formel: } \bullet \text{ Formule: } \quad \kappa_0 &= |\vec{x}_{ss}''| = \frac{1}{|\vec{v}_t'|^2} \cdot |\vec{v}_{tt}'' - \frac{\vec{v}_t' \cdot \langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle}{|\vec{v}_t'|^2}| = \\ &= \frac{1}{|\vec{v}_t'|^4} \cdot |\vec{v}_{tt}'' \cdot |\vec{v}_t'|^2 - \vec{v}_t' \cdot \langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle| \end{aligned}$$

In dieser Formel wird eine beliebige zulässige Parametrisierung der Kurve verwendet!

$\bullet$ Dans cette formule on utilise une paramétrisation quelconque de la formule!

Eine Umrechnung: $\bullet$ Un calcul pour changer la formule:

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= (\frac{1}{|\vec{v}_t'|^4} \cdot |\vec{v}_{tt}'' \cdot |\vec{v}_t'|^2 - \vec{v}_t' \cdot \langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle|)^2 = (\frac{1}{|\vec{v}_t'|^3} \cdot |\vec{v}_{tt}'' \cdot |\vec{v}_t'| - \frac{\vec{v}_t'}{|\vec{v}_t'|} \cdot \langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle|)^2 = \\ &= \frac{1}{|\vec{v}_t'|^6} \cdot \langle \vec{v}_{tt}'' \cdot |\vec{v}_t'| - \frac{\vec{v}_t'}{|\vec{v}_t'|} \cdot \langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle, \vec{v}_{tt}'' \cdot |\vec{v}_t'| - \frac{\vec{v}_t'}{|\vec{v}_t'|} \cdot \langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle \rangle = \\ &= \frac{1}{|\vec{v}_t'|^6} \cdot (|\vec{v}_{tt}''|^2 \cdot |\vec{v}_t'|^2 - 2 \cdot \langle \vec{v}_{tt}'' \cdot |\vec{v}_t'|, \frac{\vec{v}_t'}{|\vec{v}_t'|} \cdot \langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle \rangle + \frac{|\vec{v}_t'|^2}{|\vec{v}_t'|^2} \cdot (\langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle)^2) = \\ &= \frac{1}{|\vec{v}_t'|^6} \cdot (|\vec{v}_{tt}''|^2 \cdot |\vec{v}_t'|^2 - 2 \cdot \langle \vec{v}_{tt}'', \vec{v}_t' \cdot \langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle \rangle + (\langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle)^2) = \\ &= \frac{1}{(|\vec{v}_t'|^2)^3} \cdot (\langle \vec{v}_{tt}'', \vec{v}_{tt}'' \rangle \cdot \langle \vec{v}_t', \vec{v}_t' \rangle - (\langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle)^2) \end{aligned}$$

$$\text{Sei } \bullet \text{ Soit } \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_t' = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_{tt}'' = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \Rightarrow \leadsto$$

$$\begin{aligned} \text{Formel: } \bullet \text{ Formule: } \quad \kappa^2 &= \frac{1}{(|\vec{v}_t'|^2)^3} \cdot (\langle \vec{v}_{tt}'', \vec{v}_{tt}'' \rangle \cdot \langle \vec{v}_t', \vec{v}_t' \rangle - (\langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle)^2) \\ &= \frac{(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2) \cdot (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - (\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z})^2}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^3} \end{aligned}$$

Bsp.: $\bullet$ Exemple: Schraubenlinie: $\bullet$ Hélice circulaire:

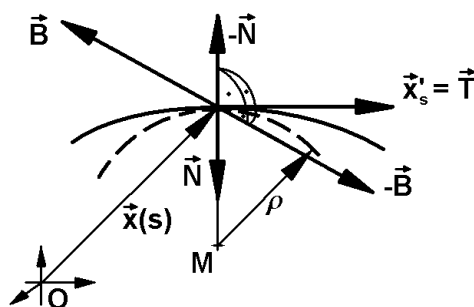
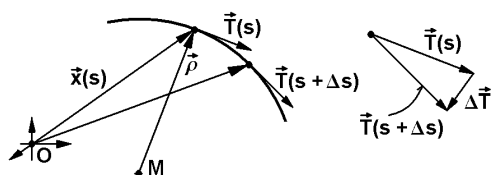
$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_t' = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_{tt}'' = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ -\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \kappa^2 = \\ &= \frac{(\sin^2(t) + \cos^2(t) + 0) \cdot (\cos^2(t) + \sin^2(t) + 1^2) - ((-\sin(t)) \cdot (-\cos(t)) + \cos(t) \cdot (-\sin(t)) + 1 \cdot 0)^2}{(\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1^2)^3} \end{aligned}$$

$$= \frac{1 \cdot 2 - (0 + 0)^2}{(1 + 1)^3} = \frac{2}{2^3} = \frac{1}{4} \Rightarrow \kappa = \frac{1}{2}, \quad \rho = \frac{1}{\kappa} = 2$$

9.3 Das begleitende Dreibein — Le trièdre attaché à la courbe (mobile)

9.3.1 Das lokale Koordinatensystem — Le système de coordonnées locales

Betrachte • *Etudier*:



Definition: • **Définition:**

Tangentenvektor: • *Vecteur tangent*: $\vec{T} := \vec{x}_s'$ (bekannt • *connu*)

Normalenvektor: • *Vecteur normal*: $\vec{N} := \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds}$

Binormalenvektor: • *Vecteur binormal*: $\vec{B} := \vec{T} \times \vec{N}$

Wir wissen: • *Nous savons*: $|\vec{x}_s'| = 1$

Problem: • **Problème:**

Wie berechnet man auf einfache Weise $\vec{N}$? • *Comment est-ce qu'on calcule $\vec{N}$ de façon simple?*

$$\leadsto \vec{N} := \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{|\vec{x}_{ss}''|} \cdot \frac{d\vec{x}_s'}{ds} = \frac{1}{|\vec{x}_{ss}''|} \cdot \vec{x}_{ss}'' \Rightarrow |\vec{N}| = 1$$

$\leadsto \vec{N}$ ist der Einheitsvektor in Richtung Krümmungsmittelpunkt.

• $\vec{N}$ est le vecteur unité en direction du centre de courbure.

$\leadsto \vec{B}$ ist ebenfalls Einheitsvektor. • $\vec{B}$ est aussi vecteur unité.

Berechnung von $\vec{N}$ (vgl. Seite 347): • *Calcul de $\vec{N}$ (voir page 347)*:

$$\begin{aligned} \vec{x}_{ss}'' &= \frac{1}{\langle \vec{v}_t', \vec{v}_t' \rangle} \cdot (\vec{v}_{tt}'' - \frac{\vec{v}_t' \cdot \langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle}{\langle \vec{v}_t', \vec{v}_t' \rangle}) \\ \Rightarrow \vec{N} &= \frac{1}{|\vec{x}_{ss}''|} \cdot \vec{x}_{ss}'' = \frac{1}{|\vec{x}_{ss}''|} \cdot \frac{1}{\langle \vec{v}_t', \vec{v}_t' \rangle} \cdot (\vec{v}_{tt}'' - \frac{\vec{v}_t' \cdot \langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle}{\langle \vec{v}_t', \vec{v}_t' \rangle}) \end{aligned}$$

Weiter: • *En outre*:

$$\begin{aligned}\vec{x}_s' &= \frac{\vec{v}_t'}{s_t'} = \frac{\vec{v}_t'}{|\vec{v}_t'|} \Rightarrow \vec{v}_t' = \vec{x}_s' \cdot |\vec{v}_t'|, \quad (\vec{x}_s')_t' = (\vec{x}_s')_s' \cdot s_t' = \vec{x}_{ss}'' \cdot s_t' = \vec{x}_{ss}'' \cdot |\vec{v}_t'| \\ \Rightarrow \vec{x}_{ss}'' &= \frac{1}{s_t'} \cdot (\vec{x}_s')_t' = \frac{1}{s_t'} \cdot \left(\frac{\vec{v}_t'}{|\vec{v}_t'|} \right)_t'\end{aligned}$$

Formel: • **Formule:**
$$\vec{N} = \frac{1}{|\vec{x}_{ss}''|} \cdot \vec{x}_{ss}'' = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{1}{|\vec{v}_t'|} \cdot \left(\frac{\vec{v}_t'}{|\vec{v}_t'|} \right)_t'$$

Bemerkung: • **Remarque:** Mit Hilfe von $\vec{N}$ und κ lässt sich der Krümmungsmittelpunkt berechnen. (Mathematica-Übung.) • *A l'aide de $\vec{N}$ et de κ l'on peut calculer le centre de la courbure. (Exercice avec Mathematica.)*

Eigenschaft: • **Qualité:** Zu einem Punkt P auf der Kurve bildet $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ ein lokales Koordinatensystem. • *Pour un point P de la courbe, $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ forme un système de coordonnées locales.*

Definition: • **Définition:** $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ heisst das **begleitende Dreibein** • *s'appelle le trièdre attaché à la courbe.*

9.3.2 Fernet–Serret'sche Gleichungen — Equations de Fernet–Serret

Ohne Beweis seien hier die Fernet–Serret'sche Gleichungen gegeben: • *Nous donnons ici les équations de Fernet–Serret sans preuve:*

Formel: • **Formule:**

$$\begin{aligned}1. \quad \frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa \cdot \vec{N} \\ 2. \quad \frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa \cdot \vec{T} + \tau \cdot \vec{B} \\ 3. \quad \frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau \cdot \vec{N}\end{aligned}$$

Analog zu κ definiert man die **Torsion** τ : • *Analogiquement à κ , on définit la torsion τ :*

Definition: • **Définition:** $\tau = \frac{ds}{d\epsilon}$
 ϵ = Änderung des Binormalenwinkels.
 • ϵ = *Changement de l'angle de la binormale.*
 $\sigma = \frac{1}{\tau}$ heisst **Torsionsradius**. • *s'appelle rayon de la torsion.*

Bemerkung: • **Remarque:**

Die Torsion ist ein Mass für die **Verdrehung der Kurve**.

• *La "torsion" est une mesure pour la torsion de la courbe.*

Ähnlich wie für κ gilt für τ : • *Ce qui vaut pour κ , vaut analogiquement aussi pour τ :*

Formel: • **Formule:**
$$\tau = \rho^2 \cdot \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^3} = \rho^2 \cdot \frac{[\vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'', \vec{v}_{ttt}''']}{((\vec{v}_t')^2)^3}$$

9.3.3 Konstruktion eines Schlauches — Construction d'un tube

Zusammenfassung: • **Résumé:**

1. Kurve • *Courbe* $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \vec{x}(s), \quad s = \text{Kurvenlänge} \quad \bullet \text{ longueur de la courbe}$

2. Tangentenvektor: • *Vecteur de la direction de la tangente:*

$$\vec{T} = \vec{x}_s' = \frac{\vec{v}_t'(t)}{s_t'} = \frac{\vec{v}_t'(t)}{|\vec{v}_t'(t)|}$$

3. Krümmung: • *Courbure:*

$$\vec{x}_s'(s) \perp \vec{x}_{ss}''(s), \quad \kappa = |\vec{x}_{ss}''(s)| = \sqrt{\frac{1}{(|\vec{v}_t'|^2)^3} \cdot (\langle \vec{v}_{tt}'', \vec{v}_{tt}'' \rangle \cdot \langle \vec{v}_t', \vec{v}_t' \rangle - (\langle \vec{v}_t', \vec{v}_{tt}'' \rangle)^2)}$$

4. Normalenvektor: • *Vecteur normal:*

$$\vec{N} = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{|\vec{x}_{ss}''|} \cdot \vec{x}_{ss}'' = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{1}{|\vec{v}_t'|} \cdot \left(\frac{\vec{v}_t'}{|\vec{v}_t'|} \right)'_t$$

5. Binormalenvektor: • *Vecteur binormal:*

$$\vec{B} := \vec{T} \times \vec{N}$$

6. Begleitendes Dreibein • *Trièdre mobile* $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$

Schlauchkonstruktion: • **Construction d'un tube:**

1. Kurve mit gestrecktem Dreibein: • *Courbe avec trièdre mobile étendu étendre:*

$$\vec{w}(t) = \vec{v}(t) + \lambda \vec{T} + \mu \vec{N} + \nu \vec{B}$$

2. Schlauch rund: • *Tube rond:*

$$\lambda = 0, \quad \mu = r_0 \cos(\varphi), \quad \nu = r_0 \sin(\varphi)$$

3. Schlauch beliebig: • *Tube quelconque:*

$$\lambda = 0, \quad \mu = a(t, \varphi) \cos(\varphi), \quad \nu = b(t, \varphi) \sin(\varphi)$$

```

Remove["Global`*"];

(* Schlauchdefinitionen *)
x[t_]:=4 Cos[t]; y[t_]:=4 Sin[t]; z[t_]:=t;
a[t_,f_]:= 1;    b[t_,f_]:= 1;

(* Rechnung *)
v[t_]:={x[t],y[t],z[t]};
kp[t_]:=Sqrt[((v'[t].v'[t])(v'[t].v'[t])-(v'[t].v''[t])^2)/((v'[t]).(v'[t]))^3];
tT[t_]:= v'[t]/Sqrt[v'[t].v'[t]];
nN[t_]:= 1/kp[t] 1/Sqrt[v'[t].v'[t]] D[v'[t]/Sqrt[v'[t].v'[t]],t];
bB[t_]:= Cross[tT[t],nN[t]];
w[t_,f_]:= v[t]+a[t,f] Cos[f] nN[t]+b[t,f] Sin[f] bB[t];
(* Plot *)
ParametricPlot3D[Evaluate[w[t,f]],{t,0,2Pi},{f,0,2Pi}];

```

→ Output 1

Neue Schlauchdefinitionen:

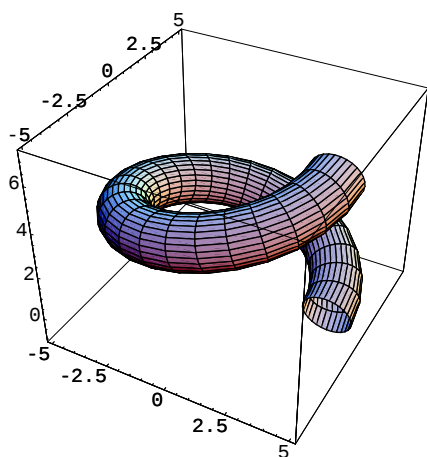
```

Remove["Global`*"];

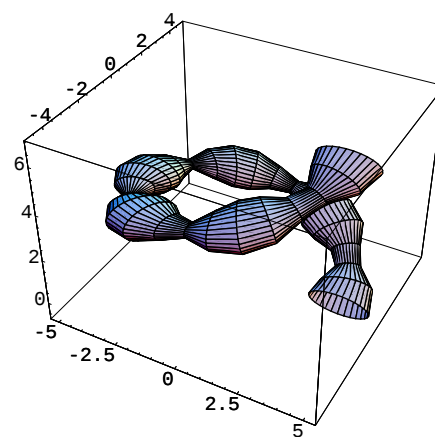
(* Schlauchdefinitionen *)
x[t_]:=4 Cos[t]; y[t_]:=4 Sin[t]; z[t_]:=t;
a[t_,f_]:= (Abs[Cos[3t]]+0.2);    b[t_,f_]:= (Abs[Cos[3t]]+0.2)/2;

```

→ Output 2



Output 1



Output 2

9.4 Evolute und Evolvente — Développée et développante

9.4.1 Einführung — Introduction

Gegeben sei der Graph C einer Kurve $t \mapsto \vec{v}(t)$ im $\mathbb{R}^2$, bei der in jedem Punkt der Krümmungsmittelpunkt M existiert. Wir betrachten derart „vernünftige“ Kurven, bei denen die Krümmungsmittelpunkte wieder eine Kurve C_M bildet ($t \mapsto \vec{w}(t)$). • Soit donnée une courbe $t \mapsto \vec{v}(t)$ dans le $\mathbb{R}^2$ dont le graphe soit C et qui possède pour chaque point le centre de courbure M . Nous considérons des courbes „raisonnables“ dont les centres de courbure forment de nouveau une courbe C_M ($t \mapsto \vec{w}(t)$).

Definition: • **Définition:**

Die Kurve C_M der Krümmungsmittelpunkte zu C heisst **Evolute** zu C . Umgekehrt heisst C **Evolvente** zu C_M . • La courbe C_M des centres de courbure de C s'appelle **développée** de C . D'autre part C s'appelle **développante** de C_M .

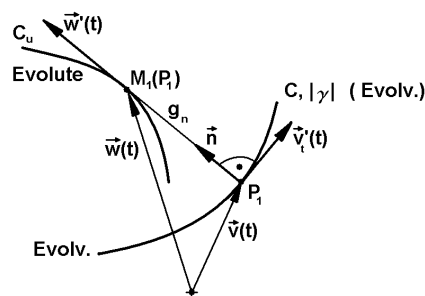
Sei • Soit $\vec{n} \perp \vec{v}'(t)$
 ($\vec{n}$ normiert, • normé, $\vec{v}'(t)$ Tangentenvektor.
 • vecteur tangent.)

$$\leadsto \vec{w}(t) = \vec{v}(t) + \rho \cdot \vec{n} = \vec{v}(t) + \frac{1}{\kappa} \cdot \vec{n}$$

$$\vec{n} = D_{\pm\pi/2} \cdot \frac{\vec{v}'(t)}{|\vec{v}'(t)|} = D_{\pm\pi/2} \cdot \vec{e}_v,$$

$$\kappa_0 = \frac{|\vec{v}''(t) \times \vec{v}'(t)|}{|\vec{v}'(t)|^3} \quad (\mathbb{R}^3, z=0)$$

(vgl. Seite 343 • voir page 343)



$$\leadsto \vec{w}(t) = \vec{v}(t) + \frac{|\vec{v}'(t)|^3}{|\vec{v}''(t) \times \vec{v}'(t)|} \cdot D_{\pm\pi/2} \cdot \frac{\vec{v}'(t)}{|\vec{v}'(t)|} = \vec{v}(t) + \frac{|\vec{v}'(t)|^2}{|\vec{v}''(t) \times \vec{v}'(t)|} \cdot D_{\pm\pi/2} \cdot \vec{v}'(t)$$

Die Rechnung (Übung!) zeigt, dass gilt: • Le calcul (exercice!) montre que: $\vec{w}'(t) \perp \vec{v}'(t)$

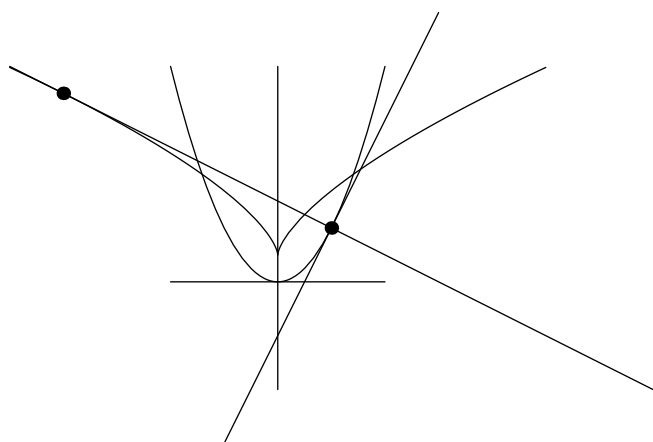
Satz: • **Théorème:** $\vec{w}'(t) \parallel \vec{n}$ (Tangente an C_M • Tangente à C_M)

Weiter kann man zeigen, dass für die Evolvente gilt: • En outre on peut montrer pour la développante il vaut: $\frac{\Delta s}{\Delta t} \approx \frac{\Delta \rho}{\Delta t}$, $\frac{ds}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \leadsto$

Satz: • **Théorème:** Die Bogenlänge Δs zwischen zwei Punkten der Evolute ist gleich der Differenz der Krümmungsradien $\Delta \rho$ der entsprechenden Punkte der Evolvente.
 • La longueur de l'arc Δs entre deux points de la développée est égal à la différence des rayons de courbure $\Delta \rho$ des points correspondants de la développante.

Konsequenz: • **Conséquence:** Die Evolvente ist die Abwicklungskurve der Evolute.
 • La développante est le développement de la développée.

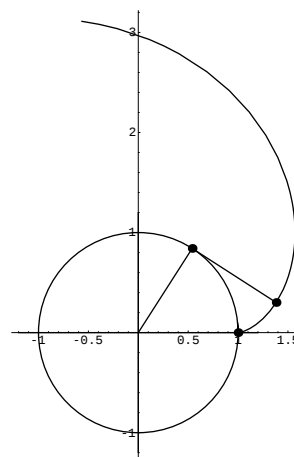
9.4.2 Beispiele — Exemples



Evolute an $f(x) = x^2$.

- Développée de $f(x) = x^2$.

$$w(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{2|2^{2/3}x^{2/3} + 1|^{3/2}}{\sqrt{2^{2/3}|x|^{2/3} + 1}} + 2^{2/3}x^{2/3} \right)$$



Evolute an den Einheitskreis.

- Développante du cercle unité.

$$\vec{z}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) + t \sin(t) \\ \sin(t) - t \cos(t) \end{pmatrix}$$

Mathematica-Code Evolute: • Code de Mathematica, développée:

```
Remove["Global`*"]
a=1;
x[t_]:=t;
y[t_]:=t^2;
v[t_]:={x[t],y[t]};
tang[t_,t0_]:= Evaluate[(v[u] + D[v[u],u] t)/.u->t0];
n[t_,t0_]:= Evaluate[(v[u] + {-D[v[u],u][[2]],D[v[u],u][[1]]} t)/.u->t0];
p1=ParametricPlot[v[t],{t,-2,2},AspectRatio->Automatic,DisplayFunction->Identity];
p2[a_]:=ParametricPlot[tang[t,a],{t,-2,2},AspectRatio->Automatic,DisplayFunction->Identity];
p3[a_]:=ParametricPlot[n[t,a],{t,-3,3},AspectRatio->Automatic,DisplayFunction->Identity];
k[t_]:=Abs[D[x[t],{t,1}] D[y[t],{t,2}]-D[y[t],{t,1}] D[x[t],{t,2}]]/Abs[(D[x[t],{t,1}]^2
+D[y[t],{t,1}]^2)^(3/2)];
r[t_]:=Evaluate[1/k[t]];
m[t0_]:=v[t0]+(n[1,t0]-v[t0])*r[t0]/Norm[(n[1,t0]-v[t0])];
sh[a_]:=Show[Graphics[{PointSize[0.03],Point[m[a]],
Point[v[a]]
}],p1,p2[a],p3[a],DisplayFunction->$DisplayFunction,AspectRatio->Automatic];
c1=(s-m[s][[1]])/s;
xX == s-c1 s //InputForm;
solv=Solve[xX == s - (s*Abs[1 + 4*s^2]^(3/2))/Sqrt[1 + 4*Abs[s]^2],{s}][[1]];
f[xX_]:=Evaluate[m[s][[2]]/.solv];
p4=Plot[f[xX],{xX,0,5},AspectRatio->Automatic,DisplayFunction->Identity];
p5=Plot[f[-xX],{xX,-5,0},AspectRatio->Automatic,DisplayFunction->Identity];
Show[Graphics[{PointSize[0.03],Point[m[a]],
Point[v[a]],Line[{{-2,0},{2,0}}],Line[{{0,-2},{0,4}}]}],p1,p2[a],p3[a],p4,p5,
DisplayFunction->$DisplayFunction,AspectRatio->Automatic];
Print["f[x] = ",f[x]]
```

Mathematica-Code Evolute: • Code de Mathematica, développante:

```

Remove["Global`*"]
aa = 1;
r0=1;
r[t_,a_]:= t r0{Cos[a],Sin[a]};
n[t_,a_]:= r[1,a]+ t r0 {Sin[a],-Cos[a]};
evol[a_]:= r[1,a]+ a r0 {Sin[a],-Cos[a]};
p1[a_]:=ParametricPlot[r[t,a],{t,0,1},AspectRatio->Automatic,DisplayFunction->Identity];
p2[a_]:=ParametricPlot[n[t,a],{t,0,1},AspectRatio->Automatic,DisplayFunction->Identity];
p3=ParametricPlot[evol[a],{a,0,3},AspectRatio->Automatic,DisplayFunction->Identity];
Show[p1[aa],p2[aa],p3,Graphics[{Circle[r0{0,0},1],Line[{r0{-1.2,0},r0{1.2,0}}],
Line[{r0{0,-1.2},r0{0,1.2,0}}], PointSize[0.02],Point[r[1,aa]],Point[n[aa,aa]],Point[r[1,0]]}],
AspectRatio->Automatic,DisplayFunction->$DisplayFunction];
D[evol[u],u]

```

9.4.3 Evolute (Vertiefung) — Développée (approfondissement)

Wir studieren die Evolute β zu einer gegebenen Kurve α in $\mathbb{R}^2$:

- *Nous étudions la développée β à une courbe donnée α dans $\mathbb{R}^2$:*

Definition: • **Définition:**

Die Kurve $\vec{v}(t)$, $t \in I = [a, b]$ heisst **regulär** $\Leftrightarrow$

- *La courbe $\vec{v}(t)$, $t \in I = [a, b]$ s'appelle régulière $\Leftrightarrow$*

1. $\vec{v}'(t)$ existiert in I • $\vec{v}'(t)$ existe dans I
2. $|\vec{v}'(t)| > 0$

Symbol: • **Symbole:** $\vec{v}(t) \in \mathcal{REG}$

Definition: • **Définition:**

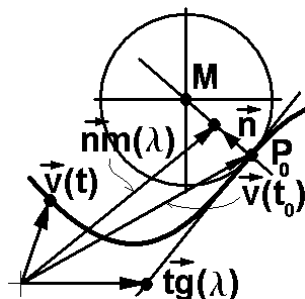
$\vec{v}'(t)$ nennen wir **Geschwindigkeit** der Kurve.

- *Nous appelons $\vec{v}'(t)$ la vitesse de la courbe.*

Wir verwenden weiter: • *En outre nous utilisons:*

$$J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow J^2 := J \cdot J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E, \quad \vec{v}(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$\leadsto$



$$\overrightarrow{OP_0} = \vec{v}(t_0)$$

$M := M(t_0) :=$ Krümmungsmittelpunkt

- $M := M(t_0) :=$ centre de courbure

$$\vec{tg}(\lambda) = \vec{v}(t_0) + \lambda \vec{v}'(t_0)$$

$$\vec{n} := \vec{n}(t_0) = \begin{pmatrix} -y(t_0) \\ x(t_0) \end{pmatrix} = J \cdot \vec{v}(t_0)$$

$$\vec{nm}(\lambda) = \vec{v}(t_0) + \lambda \vec{n}(t_0) = \vec{v}(t_0) + \lambda \cdot (J \cdot \vec{v}(t_0))$$

Über die Krümmung wissen wir: • *Quant à la courbure nous savons:*

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{x'(t) \cdot y''(t) - x''(t) \cdot y'(t)}{(\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2})^3} = \frac{\langle \vec{v}''(t), J \cdot \vec{v}'(t) \rangle}{|\vec{v}(t)|^3}, \quad \rho_\alpha(t) = \frac{1}{\kappa_\alpha(t)}$$

Definition: • **Définition:** **Evolute zu α :** • **Développée quant à α :**

$$\beta(t) := \beta_\alpha(t) := \overrightarrow{OM}(t) := \vec{w}(t) := \vec{v}(t) + \rho_\alpha(t) \cdot \vec{e}_{n,\alpha}$$

mit • avec $\vec{e}_{n,\alpha} = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n}$, $\vec{w}(t) := \vec{w}(\vec{v}(t))$

$$\begin{aligned} \leadsto \beta(t) = \vec{w}(t) = \vec{v}(t) + \rho_\alpha(t) \cdot \vec{e}_{n,\alpha} &= \vec{v}(t) + \rho_\alpha(t) \cdot \frac{J \cdot \vec{v}'(t)}{|J \cdot \vec{v}'(t)|} = \vec{v}(t) + \frac{|\vec{v}(t)|^3}{\langle \vec{v}''(t), J \cdot \vec{v}'(t) \rangle} \cdot \underbrace{\frac{J \cdot \vec{v}'(t)}{|J \cdot \vec{v}'(t)|}}_{=|\vec{v}'(t)|} \\ &= \vec{v}(t) + \frac{|\vec{v}(t)|^2}{\langle \vec{v}''(t), J \cdot \vec{v}'(t) \rangle} \cdot J \cdot \vec{v}'(t) := \vec{v}(t) + f(t) \cdot J \cdot \vec{v}'(t), \quad f(t) = \frac{|\vec{v}(t)|^2}{\langle \vec{v}''(t), J \cdot \vec{v}'(t) \rangle}, \quad t \in I \end{aligned}$$

Lemma: • **Lemme:** $\beta(t) = \beta_\alpha(t) = \vec{w}(t) = \vec{v}(t) + f(t) \cdot J \cdot \vec{v}'(t)$,

$$f(t) = \frac{|\vec{v}(t)|^2}{\langle \vec{v}''(t), J \cdot \vec{v}'(t) \rangle}, \quad t \in I = [a, b]$$

Sei • Soit $h: t \mapsto s := h(t)$, mit • avec $h: I \xrightarrow{bij} \{h(t) \mid t \in I\}$, $\vec{v}(t) = \alpha(t)$, $\vec{w}(t) = \beta(t)$.

$$\leadsto \beta(\alpha(t)) = (\beta \circ \alpha)(t) = (\beta \circ \alpha)(h^{-1}(s)) = (\beta \circ (\alpha \circ h^{-1}))(s), \quad \text{mit} \bullet \text{ avec } t = h^{-1}(s).$$

Sei • Soit $s =$ Kurvenlänge: • *longueur de la courbe:* $s = h(t) = \int_{t_0}^t |\vec{v}'(t)| dt$.

$|\vec{v}'(t)| > 0 \Rightarrow s = h(t)$ monoton wachsend • $s = h(t)$ croissante de façon monotone

$$\Rightarrow \frac{ds}{dt} > 0 \Rightarrow \frac{dt}{ds} = \frac{d(h^{-1}(s))}{ds} > 0$$

$$\leadsto s = \int_{t_0}^t |\vec{v}'(t)| dt = \int_{h(t_0)}^{h(t)} |\vec{v}'(t)| \cdot \frac{dt}{ds} ds = \int_{h(t_0)}^{h(t)} |\vec{v}'(t)| \cdot \underbrace{(h^{-1}(s))'_s}_{=\frac{dt}{ds}, > 0} ds = \int_{h(t_0)}^{h(t)} \underbrace{|\vec{v}'_t(t)| \cdot \frac{dt}{ds}}_{=|\vec{v}'_s(h^{-1}(s))|} ds$$

$$\leadsto s = \int_{h(t_0)}^{h(t)} |\vec{v}'_s(h^{-1}(s))| ds \leadsto 1 = \frac{ds}{ds} = \frac{d}{ds} \int_{h(t_0)}^{h(t)} |\vec{v}'_s(h^{-1}(s))| ds = |\vec{v}'_s(h^{-1}(h(t)))| = |\vec{v}'_s(h^{-1}(s))|$$

$$\leadsto \hat{\alpha}(s) := \alpha(h^{-1}(s)), \quad |\hat{\alpha}(s)|'_s = |(\alpha(h^{-1}(s)))'_s| = 1$$

Lemma: • **Lemme:** Bei einer regulären Kurve (z.B. α) kann die Weglänge s als Parameter benutzt werden. Dann ist für $\alpha = \alpha(s)$ die absolute Geschwindigkeit $= 1$.
 • Quant à une courbe régulière on peut utiliser la longueur comme paramètre. Alors la courbe a une vitesse absolue $= 1$.

$\leadsto$ Sei • Soit $\alpha(s) = \vec{v}(s)$, $|\vec{v}'(s)| = 1$

$$\Rightarrow \langle \vec{v}'(s), \vec{v}'(s) \rangle = |\vec{v}'(s)|^2 = 1 \Rightarrow (\langle \vec{v}'(s), \vec{v}'(s) \rangle)'_s = 2 \langle \vec{v}'(s), \vec{v}''(s) \rangle = (1)'_s = 0$$

$$\Rightarrow \vec{v}'(s) \perp \vec{v}''(s) \Rightarrow \vec{v}''(s) \parallel J \cdot \vec{v}'(s)$$

Lemma: • **Lemme:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$\vec{v}(s) \in \mathcal{REG}, \quad |\vec{v}'(s)| = 1$$

Beh.: • **Thè.:**

$$\vec{v}'(s) \perp \vec{v}''(s) \parallel J \cdot \vec{v}'(s)$$

$\leadsto$ Es gilt: • *Il vaut:* $\exists \mu : \vec{v}''(s) = \mu(s) \cdot J \cdot \vec{v}'(s)$

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= \frac{\langle \vec{v}''(s), J \cdot \vec{v}'(s) \rangle}{|\vec{v}'(s)|^3} = \langle \vec{v}''(s), J \cdot \vec{v}'(s) \rangle = \langle \mu(s) \cdot J \cdot \vec{v}'(s), J \cdot \vec{v}'(s) \rangle = \mu(s) \cdot \langle J \cdot \vec{v}'(s), J \cdot \vec{v}'(s) \rangle \\ &= \mu(s) \cdot |J \cdot \vec{v}'(s)|^2 = \mu(s) \cdot |\vec{v}'(s)|^2 = \mu(s) \Rightarrow \mu(s) = \kappa(s) \end{aligned}$$

Lemma: • **Lemme:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$\vec{v}(s) \in \mathcal{REG}, \quad |\vec{v}'(s)| = 1$$

Beh.: • **Thè.:**

$$\vec{v}''(s) = \kappa(s) \cdot J \cdot \vec{v}'(s)$$

Sei • *Soit* $|\vec{v}'(t)| = 1$, $\beta(t) = \vec{w}(t) = \vec{v}(t) + \rho \cdot \frac{J \cdot \vec{v}'(t)}{|\vec{v}'(t)|} = \vec{v}(t) + \frac{1}{\kappa} \cdot J \cdot \vec{v}'(t)$

$$\begin{aligned} \leadsto \beta(t)' &= \vec{w}'(t) = \vec{v}'(t) + \left(\frac{1}{\kappa} \cdot J \cdot \vec{v}'(t) \right)' = \vec{v}'(t) + \left(\frac{1}{\kappa} \right)' \cdot J \cdot \vec{v}'(t) + \frac{1}{\kappa} \cdot J \cdot \vec{v}''(t) \\ &= \vec{v}'(t) + \frac{-\kappa'(t)}{(\kappa(t))^2} \cdot J \cdot \vec{v}'(t) + \underbrace{\frac{1}{\kappa} \cdot J \cdot (\kappa \cdot J \cdot \vec{v}'(t))}_{J^2 = -E} = \vec{v}'(t) - \frac{\kappa'(t)}{(\kappa(t))^2} \cdot J \cdot \vec{v}'(t) - \vec{v}'(t) = -\frac{\kappa'(t)}{(\kappa(t))^2} \cdot J \cdot \vec{v}'(t) \\ \Rightarrow \beta(t)' &= \vec{w}'(t) \parallel \vec{n}_\alpha \end{aligned}$$

Lemma: • **Lemme:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &\in \mathcal{REG}, \quad |\vec{v}'(t)| = 1 \\ \beta(t) &= \vec{w}(t) = \vec{v}(t) + \rho \cdot \frac{J \cdot \vec{v}'(t)}{|\vec{v}'(t)|} \\ (\text{Evolute}) &\bullet (\text{Développée}) \end{aligned}$$

Beh.: • **Thè.:**

$$\beta(t)' = \vec{w}'(t) = -\frac{\kappa'(t)}{(\kappa(t))^2} \cdot J \cdot \vec{v}'(t) \parallel \vec{n}_\alpha$$

Konsequenz: • **Conséquence:** Die Tangente von β ist parallel zur Normalen von α .

• *La tangente de β est parallèle à la normale de α .*

Problem: • **Problème:** Sei • *Soit* $\vec{w}_q(t) = \vec{v}(t) + q(t) \cdot J \cdot \vec{v}'(t)$, $|\vec{v}'(t)| = 1$.

Gibt es andere Kurven der Form $\vec{w}_q(t) \neq \vec{w}(t)$, deren Tangente parallel zur Normalen von α ist?

• *Est-ce qu'il y a d'autres courbes $\vec{w}_q(t) \neq \vec{w}(t)$ dont la tangente soit parallèle à α ?*

Sei • *Soit* $\vec{w}_q(t) \neq \vec{w}(t)$, $\vec{w}_q(t) = \vec{v}(t) + q(t) \cdot J \cdot \vec{v}'(t)$, $|\vec{v}'(t)| = 1$

$$\leadsto \vec{w}_q'(t) = \vec{v}'(t) + (q(t) \cdot J \cdot \vec{v}'(t))' = \vec{v}'(t) + q(t)' \cdot J \cdot \vec{v}'(t) + q(t) \cdot J \cdot \underbrace{\vec{v}''(t)}_{= \kappa_\alpha \cdot J \cdot \vec{v}'(t)}$$

$$\begin{aligned}
&= \vec{v}'(t) + q(t)' \cdot J \cdot \vec{v}'(t) + q(t) \cdot \kappa_\alpha \cdot \underbrace{J^2}_{=-E} \cdot \vec{v}'(t) = \vec{v}'(t) + q(t)' \cdot J \cdot \vec{v}'(t) - q(t) \cdot \kappa_\alpha \cdot \vec{v}'(t) \\
&= \vec{v}'(t) \cdot (1 - q(t) \cdot \kappa_\alpha) + q(t)' \cdot J \cdot \vec{v}'(t) \parallel \vec{n}(t) = J \cdot \vec{v}'(t) \Rightarrow \vec{v}'(t) \cdot (1 - q(t) \cdot \kappa_\alpha) = \vec{0} \\
&\Rightarrow q(t) = \frac{1}{\kappa_\alpha} = \rho_\alpha \Rightarrow \vec{w}_q(t) = \vec{w}(t) \rightsquigarrow \text{Widerspruch!} \bullet \text{Contradiction!}
\end{aligned}$$

Satz: • **Théorème:**

Vor.: • **Hyp.:**

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= \vec{v}(t) \in \mathcal{RE}\mathcal{G} \\
|\vec{v}'(t)| &= 1 \\
\beta(t) &= \vec{w}_q(t) = \vec{v}(t) + q(t) \cdot J \cdot \vec{v}'(t)
\end{aligned}$$

Beh.: • **Thè.:**

1. $\beta(t)$ Evolute • $\beta(t)$ Développée $\Rightarrow q(t) = \rho_\alpha(t)$
2. $\beta(t)$ Evolute • $\beta(t)$ Développée $\Leftrightarrow \text{Tangente}_\beta = \text{Normale}_\alpha$

9.4.4 Evolvente (Vertiefung) — Développante (approfondissement)

Sei • Soit $\beta : I = [a, b] \mapsto \mathbb{R}^w$, mit • avec $t \xrightarrow{\text{bij.}} \vec{w}(t)$, $|\vec{w}'(t)| = 1$, $c \in I$,
 $(s = \text{Kurvenlänge})$ • $(s = \text{longueur de la courbe})$

Definition: • **Définition:**

Evolvente zu β : • **Développante quant à β :**

$$\begin{aligned}
\gamma_{\beta,c}(s) &:= \gamma(s) := \vec{z}(s) = \vec{w}(s) + (c - s) \vec{w}'(s), \\
|\vec{w}'(t)| \neq 1 &\Rightarrow \gamma_{\beta,c}(t) := \gamma(t) := \vec{z}(t) = \vec{w}(t) + (s(c) - s(t)) \frac{\vec{w}'(t)}{|\vec{w}'(t)|}
\end{aligned}$$

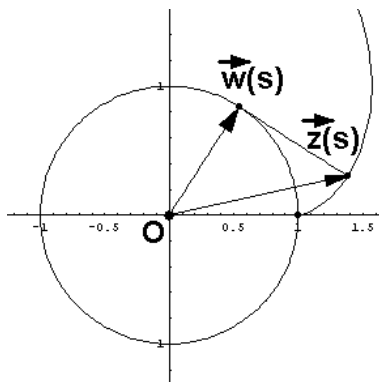
Es gilt: • Il vaut: $s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{w}'(t)| dt$

Satz: • **Théorème:**

Die Evolute einer regulären ebenen Kurve β wird durch die Abwicklungskurve einer um β gewickelten gestreckten Fadens gegeben.

• La développante d'une courbe régulière β est donnée par la courbe de débobinage (dévidage) d'un fil (aiguillée) étendu qui est enroulé autour de β .

Beweis: • **Preuve:**



Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir setzen:

• Sans restreindre la situation générale, nous pouvons admettre: $|\vec{w}'(s)| = 1$

$\rightsquigarrow$ Tangentenlänge: • Longueur de la tangente:

$$\begin{aligned}
|\vec{z}(s) - \vec{w}(s)| &= |(\vec{w}(s) + (c - s) \vec{w}'(s)) - \vec{w}(s)| \\
&= (c - s) \underbrace{|\vec{w}'(s)|}_{=1} = |c - s|
\end{aligned}$$

Lemma: • **Lemme:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$\beta : I = [a, b] \mapsto \mathbb{R}^w, s \xrightarrow{bij} \vec{w}(s) \\ \gamma_{\beta, c}(s) = \gamma(s): \text{Evolvente} \bullet \text{Développante}$$

Beh.: • **Thè.:**

$$\kappa_{\gamma}(s) = \frac{\text{sgn}(\kappa_{\beta}(s))}{|c - s|}$$

Beweis: • **Preuve:**

$$\vec{z}(s) = \vec{w}(s) + (c - s) \vec{w}'(s), \quad |\vec{w}'(s)| = 1$$

$$\leadsto \vec{z}'(s) = \vec{w}'(s) + (-1) \vec{w}'(s) + (c - s) \vec{w}''(s) = (c - s) \vec{w}''(s) = (c - s) \cdot \kappa_{\beta}(s) \cdot J \cdot \vec{w}'(s)$$

$$\Rightarrow J \cdot \vec{z}'(s) = (c - s) \cdot \kappa_{\beta}(s) \cdot \underbrace{J^2}_{=-E} \cdot \vec{w}'(s) = -(c - s) \cdot \kappa_{\beta}(s) \cdot \vec{w}'(s)$$

$$\leadsto \vec{z}''(s) = (-1) \cdot \kappa_{\beta}(s) \cdot J \cdot \vec{w}'(s) + (c - s) \cdot \kappa_{\beta}'(s) \cdot J \cdot \vec{w}'(s) + (c - s) \cdot \kappa_{\beta}(s) \cdot J \cdot \underbrace{\vec{w}''(s)}_{=\kappa_{\beta}(s) \cdot J \cdot \vec{w}'(s)}$$

$$= (-\kappa_{\beta}(s) \cdot J \cdot \vec{w}'(s) + (c - s) \cdot \kappa_{\beta}'(s)) \cdot J \cdot \vec{w}'(s) + (c - s) \cdot (\kappa_{\beta}(s))^2 \cdot \underbrace{J^2}_{=-E} \cdot \vec{w}'(s)$$

$$\Rightarrow \vec{z}''(s) = (-\kappa_{\beta}(s) \cdot J \cdot \vec{w}'(s) + (c - s) \cdot \kappa_{\beta}'(s)) \cdot J \cdot \vec{w}'(s) + (c - s) \cdot (\kappa_{\beta}(s))^2 \cdot (-\vec{w}'(s))$$

$$\leadsto \langle \vec{r}, J \cdot \vec{r} \rangle = 0 \forall \vec{r} \Rightarrow \langle \vec{z}''(s), J \cdot \vec{z}'(s) \rangle =$$

$$= \langle (-\kappa_{\beta}(s) \cdot J \cdot \vec{w}'(s) + (c - s) \cdot \kappa_{\beta}'(s)) \cdot J \cdot \vec{w}'(s) + (c - s) \cdot (\kappa_{\beta}(s))^2 \cdot (-\vec{w}'(s)), -(c - s) \cdot \kappa_{\beta}(s) \cdot \vec{w}'(s) \rangle$$

$$= 0 + 0 + (c - s) \cdot (-(c - s)) \cdot (\kappa_{\beta}(s))^3 \cdot \underbrace{\langle \vec{w}'(s), \vec{w}'(s) \rangle}_{=|\vec{w}'(s)|^2=1} = -(c - s)^2 \cdot (\kappa_{\beta}(s))^3$$

$$\leadsto \kappa_{\gamma}(s) = \frac{\langle \vec{z}''(s), J \cdot \vec{z}'(s) \rangle}{|\vec{z}'(s)|^3} = \frac{-(c - s)^2 \cdot (\kappa_{\beta}(s))^3}{|\vec{z}'(s)|^3} \Rightarrow \kappa_{\gamma}(s) \cdot |\vec{z}'(s)|^3 = -(c - s)^2 \cdot (\kappa_{\beta}(s))^3$$

$$J \cdot \vec{z}'(s) = -(c - s) \cdot \kappa_{\beta}(s) \cdot \vec{w}'(s) \Rightarrow |\vec{z}'(s)|^3 = |J \cdot \vec{z}'(s)|^3 = |-(c - s) \cdot \kappa_{\beta}(s) \cdot \vec{w}'(s)|^3$$

$$= |c - s|^3 \cdot |\kappa_{\beta}(s)|^3 \cdot \underbrace{|\vec{w}'(s)|^3}_{=1} \Rightarrow |\vec{z}'(s)|^3 = |c - s|^3 \cdot |\kappa_{\beta}(s)|^3$$

$$\leadsto \kappa_{\gamma}(s) \cdot |\vec{z}'(s)|^3 = \kappa_{\gamma}(s) \cdot |c - s|^3 \cdot |\kappa_{\beta}(s)|^3 = -(c - s)^2 \cdot (\kappa_{\beta}(s))^3$$

$$\Rightarrow \kappa_{\gamma}(s) = \frac{-(c - s)^2 \cdot (\kappa_{\beta}(s))^3}{|c - s|^3 \cdot |\kappa_{\beta}(s)|^3} = \frac{-\text{sgn}((\kappa_{\beta}(s))^3)}{|c - s|}$$



Bemerkung: • **Remarque:**

Wir haben zudem gezeigt: • *On vient de démontrer:*

$$\vec{z}'(s) = (c - s) \vec{w}''(s) = (c - s) \cdot \kappa_{\beta}(s) \cdot J \cdot \vec{w}'(s)$$

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$\beta : I = [a, b] \mapsto \mathbb{R}^w, s \xrightarrow{bij.} \vec{w}(s), |\vec{w}'(s)| = 1$
 $\gamma_{\beta, c}(s) = \gamma(s)$: Evolvente • *développante*

Beh.: • **Thè.:**

β Evolute zu γ .
 • β *développée* de γ .

Beweis: • **Preuve:**

Evolute zu γ : • *Développée* de γ : $\xi(s) := \vec{u}(s) = \vec{z}(s) + \frac{1}{\kappa_\gamma(s)} \cdot \frac{J \cdot \vec{z}'(s)}{|\vec{z}'(s)|}, \quad \kappa_\gamma(s) = \frac{\text{sgn}(\kappa_\beta(s))}{|c-s|}$

Es gilt: • *Il vaut:* $\vec{z}(s) = \vec{w}(s) + (c-s) \vec{w}'(s), \quad \vec{z}'(s) = (c-s) \vec{w}''(s) = (c-s) \cdot \kappa_\beta(s) \cdot J \cdot \vec{w}'(s)$

$$\begin{aligned} \leadsto \vec{u}(s) &= \vec{z}(s) + \frac{|c-s|}{\text{sgn}(\kappa_\beta(s))} \cdot \frac{J \cdot ((c-s) \cdot \kappa_\beta(s) \cdot J \cdot \vec{w}'(s))}{|(c-s) \cdot \kappa_\beta(s) \cdot J \cdot \vec{w}'(s)|} \\ &= \vec{w}(s) + (c-s) \vec{w}'(s) + \frac{|c-s|}{\text{sgn}(\kappa_\beta(s))} \cdot \frac{(-1) \cdot ((c-s) \cdot \kappa_\beta(s) \cdot \vec{w}'(s))}{|(c-s)| \cdot |\kappa_\beta(s)| \cdot \underbrace{|\vec{w}'(s)|}_{=1}} \\ &= \vec{w}(s) + (c-s) \vec{w}'(s) - ((c-s) \cdot \vec{w}'(s)) = \vec{w}(s) \Rightarrow \xi(s) = \vec{u}(s) = \vec{w}(s) = \beta(s) \end{aligned} \quad \odot$$

Kapitel • Chapitre 10

Anhang 1: Komplexe Funktionen, konforme Abbildungen — Annexe 1: Fonctions complexes, applications conformes

Bemerkung: • **Remarque:**

Dieser Teil ist dem Skript „Algebra“ des Autors entnommen. Dort werden die komplexen Zahlen eingeführt.

• *Cette partie est prise du script "Algèbre" (de l'auteur). On y trouve une introduction dans les nombres complexes.*

10.1 Differenzierbarkeit, Wege — Dérivés, chemins

10.1.1 Grundlagen, Stetigkeit — Fondements, continuité

Wir verwenden einige Begriffe, die schon von früher bekannt sein sollten, also nicht mehr neu definiert werden müssen. • *Nous utilisons quelques notions que nous avons déjà définies et que nous pouvons donc utiliser.*

Kurven, Wege • **Des courbes, chemins:** Stetige Funktionen

• *Fonctions continues* $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$, z.B. • *p.ex.* $t \in \mathbb{R}$, $f: t \mapsto f(t) = \cos(t) + i \sin(t) \in \mathbb{C}$

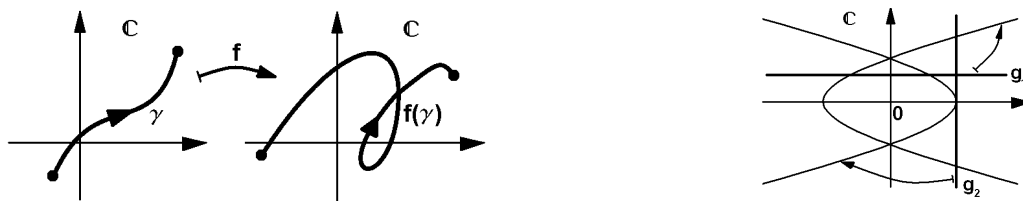
Gebietsabbildungen • **Applications de domaines:** Funktionen

• *Fonctions* $\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$, z.B. • *p.ex.* $z \in \mathbb{C}$, $f: z \mapsto f(z) = z^2 \in \mathbb{C}$

Allgemein: • *Généralement* $f: G = D_f \mapsto G^* = W_f$, $f: z \mapsto f(z) = w$

oder • *ou* $f: z = x + iy \mapsto w = f(z) = u(z) + iv(z) = u(x + iy) + iv(x + iy)$

mit • *avec* $u(z) = \operatorname{Re}(f(z))$, $v(z) = \operatorname{Im}(f(z))$



Wichtig: • **Important:** Stetige Funktionen. • *Fonctions continues.*

Definition: • **Définition:** f stetig in • continue à $z_0 \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$
 oder • ou $\lim_{z \rightarrow z_0} w = w_0$

„Epsilontisch“ • A l'aide des quantificateurs: $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z \in U_\delta(z_0) :$

$$w = f(z) \in U_\epsilon(f(z_0)) = U_\epsilon(w_0)$$

Anschaulich: Nahe z haben nahe $f(z) = w$ zur Folge.

• *Explicite:* Des z tout près l'un de l'autre ont comme images des $f(z) = w$ tout près l'un de l'autre.

Folgerung: • **Conclusion:** f (stetig in • continue à) $z_0 \Leftrightarrow u(z)$ (und • et) $v(z)$
 (stetig in • continue à) z_0

Konsequenz: • **Conséquence:**
 $u(x + iy)$ (und • et) $v(x + iy)$ (stetig in • continue à) x (und • et) y (notwendig • nécessaire).

Folgende Aussagen beweist man wie in $\mathbb{R}$, indem man den Abstand in $\mathbb{R}$ durch den in $\mathbb{C}$ ersetzt:

• *On prouve les thèses qui suivent comme celles dans $\mathbb{R}$ en remplaçant la distance dans $\mathbb{R}$ par celle dans $\mathbb{C}$:*

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$f_1(z), f_2(z) \text{ (stetig in • continue à) } z_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$$

Beh.: • **Thè.:**

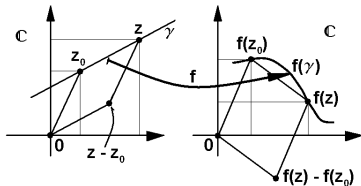
1. $\lambda_1 f_1(z) + \lambda_2 f_2(z)$ (stetig in • continue à) z_0
2. $f_1(z) \cdot f_2(z)$ (stetig in • continue à) z_0
3. $f_2(z_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ (stetig in • continue à) z_0
4. $f_1(z_0) = w_0, f_2(z)$ (stetig in • continue à) $w_0 \Leftrightarrow f_2(f_1(z))$ (stetig in • continue à) z_0

Folgerung: • **Conclusion:** Polynome • *Polynômes:* $p(z) = c_n z^n + \dots + c_1 z + c_0$
 (stetig in • continu à) $\mathbb{C}$ ($\forall z \in \mathbb{C}$)

Stetigkeit in einem Gebiet: • *Continu dans un domaine:*

Definition: • **Définition:** f (stetig in • *continue à*) $G \Leftrightarrow f$ (stetig in • *continu à*)
 $\forall z \in G$

10.1.2 Differenzierbarkeit — Dérivabilité (différentiabilité)



Sei • *Soit* $\dot{U}_\delta(z_0) = \{z \mid 0 < |z - z_0| < \delta\}$

Betrachte • *Etudier*

$$D(z) := \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{in } \bullet \text{ dans } \dot{U}_\delta(z_0)$$

($D(z)$): Differenzenquotient • *Quotient des différences*)

Definition: • **Définition:**

1. f **komplex differenzierbar** (in z_0)
 • f **dérivable de manière complexe** (dans z_0)
 $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} D(z)$ existiert • *existe*.
2. f **komplex differenzierbar mit der Ableitung a**
 • f **dérivable de manière complexe avec le dérivé a**
 $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} D(z) = a := f'(z_0)$
3. f **holomorph**² (regulär analytisch) in G
 • f **holomorphe**² dans G
 $\Leftrightarrow f'(z)$ existiert • *existe* $\forall z \in G$

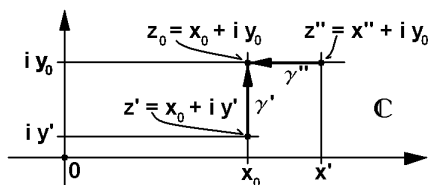
Bsp.: • **Exemple:**

$$1. f(z) = a \cdot z + b, \quad D(z) = \frac{az + b - (az_0 + b)}{z - z_0} = \frac{a(z - z_0)}{z - z_0} = a \Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} D(z) = a$$

$$2. f(z) = z^2, \quad D(z) = \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \frac{(z + z_0)(z - z_0)}{z - z_0} = (z + z_0) \Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} D(z) = 2z_0$$

$$3. f(z) = \operatorname{Re}(z) + 2i \operatorname{Im}(z) = x + 2iy, \quad D_f = \mathbb{C}, \quad d(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{(x - x_0) + 2i(y - y_0)}{(x - x_0) + i(y - y_0)}$$

Betrachte zwei verschiedene Wege: • *Considérer deux chemins différents:*



Sei • *Soit* $z_0 = x_0 + iy_0$,
 $z' = x_0 + iy'$, $z'' = x'' + iy_0$

$$\odot z' \rightarrow z_0 : \lim_{z' \rightarrow z_0} D(z') = \lim_{z' \rightarrow z_0} \frac{(x_0 - x_0) + 2i(y' - y_0)}{(x_0 - x_0) + i(y' - y_0)} = \lim_{z' \rightarrow z_0} \frac{2i(y' - y_0)}{i(y' - y_0)} = 2$$

$$\odot z'' \rightarrow z_0 : \lim_{z'' \rightarrow z_0} D(z'') = \lim_{z'' \rightarrow z_0} \frac{(x'' - x_0) + 2i(y_0 - y_0)}{(x'' - x_0) + i(y_0 - y_0)} = \lim_{z'' \rightarrow z_0} \frac{(x'' - x_0)}{(x'' - x_0)} = 1 \neq 2$$

²Griech. • *gréc* holo: ganz, völlig, unversehrt • *entier*, morphe: Gestalt • *forme*

$$\Rightarrow \lim_{z' \rightarrow z_0} D(z') \neq \lim_{z'' \rightarrow z_0} D(z''), \quad \lim_{z \rightarrow z_0} D(z) \text{ existiert nicht} \quad \bullet \text{ n'existe pas.}$$

$\leadsto$ Schon die einfache Funktion $f(z) = \operatorname{Re}(z) + 2i \operatorname{Im}(z)$ ist nicht holomorph. Holomorph ist also etwas Spezielles. $\bullet$ *Déjà la fonction simple $f(z) = \operatorname{Re}(z) + 2i \operatorname{Im}(z)$ n'est pas holomorphe. Holomorphe signifie donc quelque chose de spécial.*

10.1.3 Differenzierbarkeitsregeln — Règles pour dérivabilité

Wenn nichts bemerkt ist, gehen die Beweise wie im Reellen (indem man den Abstand in $\mathbb{R}$ durch den in $\mathbb{C}$ ersetzt). $\bullet$ *S'il n'y a pas de remarques, les preuves fonctionnent comme avec les nombres réels (en remplaçant la distance dans $\mathbb{R}$ par celle dans $\mathbb{C}$).*

Satz: $\bullet$ **Théorème:** **Vor.:** $\bullet$ **Hyp.:**

$$f(z), g(z) \quad (\text{holomorph in } \bullet \text{ holomorphe dans }) G, \quad a, b \in \mathbb{C}$$

Beh.: $\bullet$ **Thè.:**

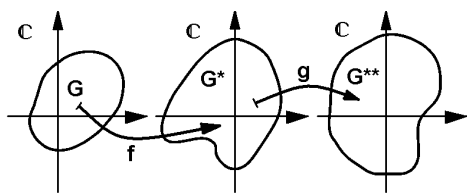
1. f, g (stetig in $\bullet$ continue à) G
2. Linearität: $\bullet$ *Linéarité*
 $F(z) = a \cdot f(z) + b \cdot g(z)$ holomorph in $\bullet$ holomorphe dans $G \wedge$
 $F'(z) = a \cdot f'(z) + b \cdot g'(z)$
3. Produktenregel: $\bullet$ *Règle du produit*
 $F(z) = f(z) \cdot g(z)$ holomorph in $\bullet$ holomorphe dans $G \wedge$
 $F'(z) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$
4. Quotientenregel: $\bullet$ *Règle du quotient*
 Sei $\bullet$ Soit $F(z) = \frac{f(z)}{g(z)}, g(z_0) \neq 0 \Rightarrow F(z)$ holomorph in
 $\bullet$ holomorphe dans $G \wedge F'(z) = \frac{f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)}{(g(z))^2}$

Satz: $\bullet$ **Théorème:** **Vor.:** $\bullet$ **Hyp.:**

$$\begin{aligned} f(z) &\text{ holomorph in } \bullet \text{ holomorphe dans } G, f : G \mapsto f(G) \subseteq G^*, f : \\ &z \mapsto f(z) = w \\ g &\text{ holomorph in } \bullet \text{ holomorphe dans } G^*, g : G^* \mapsto g(G^*) = G^{**} \\ F &= f \circ g, f(z) = f(g(z)) \end{aligned}$$

Beh.: $\bullet$ **Thè.:**

$$\begin{aligned} \text{Kettenregel: } \bullet &\text{ Règle conjointe:} \\ F(z) &\text{ holomorph in } \bullet \text{ holomorphe dans } G \wedge \\ F'(z) &= f'(g(z)) \cdot g'(z) = f'(w) \cdot g'(z) = \frac{df}{dw} \cdot \frac{dg}{dz} \\ \text{oder } \bullet &\text{ ou } F'(z) = \frac{d}{dz} f(z) \cdot \frac{d}{dz} g(z) \end{aligned}$$



Folgerung: • **Conclusion:**

1. Polynomfunktionen sind holomorph in $\mathbb{C}$. • *Les fonctions polynomiales sont holomorphes dans $\mathbb{C}$.*
2. Rationale Funktionen sind holomorph in $\mathbb{C}$, wenn der Nenner $\neq 0$ ist. • *Les fonctions rationnelles sont holomorphes dans $\mathbb{C}$, si le dénominateur est $\neq 0$.*

Problem: • **Problème:** Beim Differenzieren im Reellen hat die Ableitung die Bedeutung einer Tangentensteigung. Aus Dimensionsgründen lässt sich diese Bedeutung bei der komplexen Differenzierbarkeit nicht gebrauchen. Was ist dann der Sinn komplexer Ableitungen? Eine Interpretation werden wir später bei den **konformen Abbildungen** gewinnen können.

• *Quant aux dérivés au réel, le dérivé a la signification de la montée de la tangente. Pour des raisons de la dimension on ne peut plus utiliser cette signification pour les dérivés complexes. Qu'est-ce qui est donc la signification des dérivés complexes? On obtiendra une interprétation quand on traitera les applications conformes.*

10.1.4 Wege in $\mathbb{C}$ — Chemins dans $\mathbb{C}$

Betrachte • *Considérer* $I = [a, b] = \{t \in \mathbb{R} \mid a \leq t \leq b\}$ sowie • *ainsi que* $x(t), y(t)$ diff'bar in • *dérivable dans* I .

Sei • *Soit* $z(t) = x(t) + iy(t)$, $I \mapsto \mathbb{C}$

Bsp.: • **Exemple:** $I = [0, 2\pi]$, $z(t) = \sin(t) + i \cos(t)$ (Abbildung von I auf den Einheitskreis in $\mathbb{C}$).
• *Application de I sur le cercle unité dans $\mathbb{C}$*

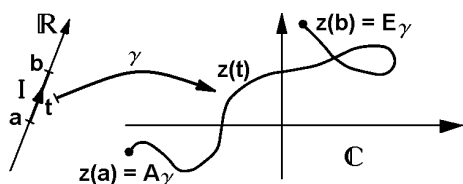
Definition: • **Définition:**

Eine stetige Abbildung • *Une application continue*

$\gamma: I \mapsto \mathbb{C}$ mit • *avec* $t \mapsto \gamma(t)$

heißt **Weg in $\mathbb{C}$** • *s'appelle chemin dans $\mathbb{C}$,*

$|\gamma| = \{z(t) \mid t \in I\}$ heißt **Spur** v. γ • *s'appelle trace d. γ*



$$z(a) = A_\gamma :=$$

Anfangspunkt • **Point initial**

$z(b) = E_\gamma :=$ **Endpunkt** • **Point final**

Geschlossene Wege • **Chemins fermés:** $A_\gamma = E_\gamma$

Inverser Weg $(-\gamma)$ zu γ • **Chemins inverses** $(-\gamma)$ à γ :

Sei • *Soit* $t = b + a - t'$, $t' = b + a - t$, $-\gamma: t' \mapsto w(t') (= z(t))$, $(t' \in [a, b] \Leftrightarrow t \in [a, b])$.

Läuft t von a nach b , so läuft t' von b nach a . • *Si t passe de a à b , t' passe de b à a .*

Definition: • **Définition:**

Differenzierbarer Weg • **Chemin dérivable:**

$\gamma: t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t)$ differenzierbar • *dérivable*

$\Leftrightarrow x(t), y(t)$ diff'bar • *dérivable.*

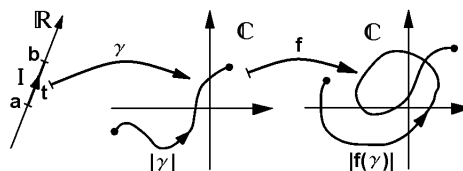
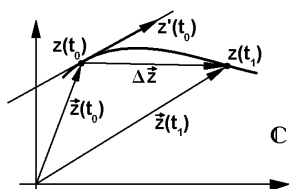
$z'(t) = x'(t) + iy'(t) \rightsquigarrow$ **Ableitung.** • *Dérivé.*

- Regeln:** • **Règles:**
1. $A_{-\gamma} = E_{\gamma}$, $A_{\gamma} = E_{-\gamma}$
 2. $|\gamma| = |-\gamma|$
 3. $-(-\gamma) = \gamma$

(Wie man sofort sieht... • *Comme on voit tout de suite...*)

10.1.5 Differenzierbare Wege in $\mathbb{C}$ — Chemins dérivables dans $\mathbb{C}$

Wir wissen: • *On sait:* γ diff'bar • *dérivable* $\Rightarrow$ Ableitung • *dérivé*: $z'(t) = x'(t) + i y'(t)$
 $\leadsto$ Tangentenvektor an den Weg γ • *vecteur tangentiel du chemin* γ : $\dot{z}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$



Definition: • **Définition:** Bildweg von γ • **Chemin image** de γ :

$$f \circ \gamma := f(\gamma) : t \mapsto w(t) = f(z(t)), \quad t \in I$$

- Eigenschaften:**
- **Qualités:**
1. $f(\gamma)$ ist wieder Weg • *est de nouveau chemin*
 2. $|f(\gamma)| = f(|\gamma|)$
 3. $A_{f(\gamma)} := A_{f(|\gamma|)} = f(A_{\gamma})$
 4. $E_{f(\gamma)} := E_{f(|\gamma|)} = f(E_{\gamma})$

Weiter gilt die **Kettenregel** (Beweis analog im Reellen):

• *En outre la règle conjointe est valable (preuve analogue au réel):*

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

f holomorph in • *holomorphe dans* G ,
 γ diff'barer Weg • *chemin dérivable*: $t \mapsto z(t)$, $|\gamma| \subset G$, $t \in I$

Beh.: • **Thè.:**

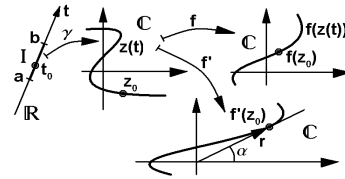
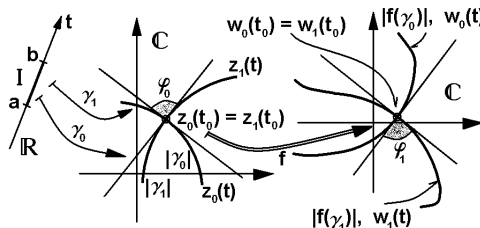
Für den Bildweg gilt • *Pour le chemin image on constate:*

1. $w(t) = f(z(t))$ ist diff'bar in I • *est dérivable dans* I
2. $\frac{d}{dz} w(t) = w'(t) = f'(z(t)) \cdot z'(t) = \frac{d}{dz} f(z) \cdot \frac{d}{dt} z(t)$
 (Komplexe und reelle Ableitungen gemischt! • *Dérivés complexes et réels mélangés*)

Bsp.: • Exemple: $I = [0, 1]$, $\gamma: t \mapsto z(t) = t^2 + i(t+1)$, $f: z \mapsto z^2$
 $\leadsto f(\gamma): t \mapsto (t^2 + i(t+1))^2 = w(t) \Rightarrow w'(t) = 2z \cdot z'(t) = 2(t^2 + i(t+1)) \cdot (2t + i)$

Bemerkung: • Remarque: $z'(t) = \frac{d}{dt}z(t) = \frac{d}{dt}x(t) + i\frac{d}{dt}y(t) = x'(t) + iy'(t)$
 $\leadsto$ Integral • *Intégrale:*
 $z(t) + C = \int z'(t) dt = \int x'(t) dt + i \int y'(t) dt = x(t) + iy(t) + C$

10.2 Konforme Abbildungen — Applications conformes



Sei • *Soit* $f'(z_0) \neq 0$,
 $f'(z_0) = |f'(z_0)| \cdot (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)) = r \cdot e^{i\alpha}$
 mit • *avec* $|f'(z_0)| = r$, $\alpha = \text{Arg}(f'(z_0))$

Betrachte: • Considérer: γ diff'bar in • *dérivable dans* G , $I \ni t \mapsto z(t) \in \mathbb{C}$,

Speziell: • *Spécialement:* $z(t_0) = z_0$, $z'(t_0) \neq 0$.

Nach Voraussetzung ist: • *Selon la hypothèse on trouve:* $z'(t_0) \neq 0$

$\leadsto$ Tangentenvektor existiert, die Kurve (Weg) ist **glatt**.

• *Vecteur tangentiel existe, la courbe (chemin) est lisse.*

Untersuchung von • Examen de $f \circ \gamma := f(\gamma)$:

$$w(t) = f(z(t)) \Leftrightarrow w'(t) = f'(z(t)) \cdot z'(t), \quad w'(t_0) = f'(z(t_0)) \cdot z'(t_0) = \underbrace{f'(z_0)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{z'(t_0)}_{\neq 0}.$$

Bei der Multiplikation in $\mathbb{C}$ addieren sich die Argumente:

• *A la multiplication dans $\mathbb{C}$ les arguments s'additionnent:*

$$\text{Arg}(w'(t_0)) = \underbrace{\text{Arg}(f'(z_0)) + \text{Arg}(z'(t_0))}_{:=\alpha}, \quad \text{speziell: } \bullet \text{ spécialement:}$$

$\leadsto$ Für • *Pour* γ_0 , $f(\gamma_0)$: $\text{Arg}(w'_0(t_0)) = \alpha + \text{Arg}(z'_0(t_0))$.

$\leadsto$ Für • *Pour* γ_1 , $f(\gamma_1)$: $\text{Arg}(w'_1(t_0)) = \alpha + \text{Arg}(z'_1(t_0))$.

$$\Rightarrow \varphi_1 = \text{Arg}(w'_0(t_0)) - \text{Arg}(w'_1(t_0)) = (\alpha + \text{Arg}(z'_0(t_0))) - (\alpha + \text{Arg}(z'_1(t_0))) \\ = (\text{Arg}(z'_0(t_0))) - (\text{Arg}(z'_1(t_0))) = \varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 = \varphi_1$$

Definition: • Définition:

Eine Abbildung heisst **winkeltreu** oder **konform**, wenn sich der Schnittwinkel zweier differenzierbarer Wege ($\nexists$ zwischen Tangentenvektoren $\neq \vec{0}$) bei der Abbildung nicht ändert. • *Une application s'appelle conforme, si pour deux chemins dérivables l'angle d'intersection ($\nexists$ entre les vecteurs tangentiels $\neq \vec{0}$) ne change pas à l'application.*

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

f holomorph • *holomorphe*, $f'(z) \neq 0$ in • *dans* G

Beh.: • **Thè.:**

f konform in • *conforme dans* G

10.3 Möbius–Transformationen — Transformations de Möbius

10.4 Definitionen — Définitions

Definition: • **Définition:** $f_M(z) := \frac{az+b}{cz+d}$, $c \neq 0$ heisst Möbiustransformation.
• *s'appelle transformation de Möbius.*

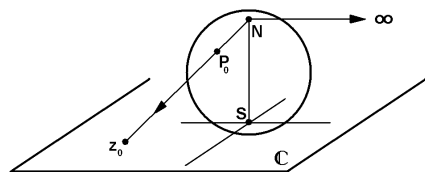
Solche Abbildungen spielen in der technischen Praxis eine Rolle. • *Ces applications jouent un certain rôle dans la pratique technique.*

Klassisch gilt: • *On prétend classiquement:* $D_f = \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.

Um eine geschlossene Theorie zu erhalten, ist es aber hier notwendig, den Definitionsbereich für den Fall $-\frac{d}{c}$ auszudehnen: • *Pour obtenir une théorie fermée, il est nécessaire d'élargir le domaine de définition aussi pour le cas $-\frac{d}{c}$.*

Betrachtung: • *On trouve:*

Sei • *Soit* $f_M(z) = u(z) + i v(z)$, $z \rightarrow -\frac{d}{c} \Rightarrow r = |f_M(z)| = (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \infty$.



$\mathbb{C}$ erweitern: • *Elargir* $\bar{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$,
 $\infty \hat{=}$ Nordpol der Gauss'schen Zahlenkugel.
• $\infty \hat{=}$ pôle nord de la sphère des nombres de Gauss.

Definition: • **Définition:** $f_M(-\frac{d}{c}) := \infty$, $f_M(\infty) := \frac{a}{c}$

$(z \rightarrow \infty \Rightarrow f_M(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{z + \frac{b}{z}}{z + \frac{d}{z}} \rightarrow \frac{a}{c})$. Man sieht unmittelbar: • *On voit tout de suite:*

Satz: • **Théorème:** $f_M : \bar{\mathbb{C}} \xrightarrow{\text{bij.}} \bar{\mathbb{C}}$
 f_M konform für • *conforme pour* $c \cdot b \neq d \cdot a$, $z \neq \infty$, $z \neq -\frac{d}{c}$

(Kontrolle der Bijektivität: Algebraische Umformung. • *Contrôle de la bijectivité: Transcription algébrique:* $f_M^{-1}(w) = z = -\frac{dw-b}{cw-a}$, $f'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$)

Korollar: • **Corollaire:**

f_M^{-1} ist auch Möbiustransformation, speziell:
 • f_M^{-1} est aussi transformation de Möbius, spécialement:
 $-\frac{d}{c} \xrightarrow{f} \infty, \quad \infty \xrightarrow{f} \frac{a}{c},$
 $+\frac{a}{c} \xrightarrow{f^{-1}} \infty, \quad \infty \xrightarrow{f^{-1}} -\frac{d}{c}$

10.4.1 Eigenschaften — Qualités

Betrachte: • *considérer*: $f: z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} \cdot \left(1 + \frac{\frac{b}{a} - \frac{d}{c}}{z + \frac{d}{c}}\right)$

Sei • *Soit*: Trans. :> (Verschiebung • *Translation*), Inv. :> (Kehrwert bilden • *calculer l'inverse*), Rot. :> (Drehstreckung • *rotation et allongement*).

Dann kann man f wie folgt zusammensetzen: • *Alors on peut composer f comme il suit*:

$$\begin{aligned} z &\xrightarrow{\text{Trans.}} w = z + \frac{d}{c} \xrightarrow{\text{Inv.}} \frac{1}{w} = \frac{1}{z + \frac{d}{c}} \xrightarrow{\text{Rot.}} \frac{a}{c} \cdot \left(\frac{b}{a} - \frac{d}{c}\right) \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}} = \left(\frac{b}{c} - \frac{a \cdot d}{c^2}\right) \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}} \xrightarrow{\text{Trans.}} \\ &\xrightarrow{\text{Trans.}} \frac{a}{c} + \frac{a}{c} \cdot \left(\frac{b}{a} - \frac{d}{c}\right) \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} \left(1 + \frac{\frac{b}{a} - \frac{d}{c}}{z + \frac{d}{c}}\right) = \frac{az+b}{cz+d} \end{aligned}$$

$\leadsto$ Eine Möbiustransformation lässt sich aus Drehstreckungen, Verschiebungen und einer Inversion $w \mapsto \frac{1}{w}$ zusammensetzen. • *On peut composer les transformations de Möbius par des translations, des rotations et allongements et des inversions $w \mapsto \frac{1}{w}$.*

Problem: • **Problème:** Drehstreckungen und Verschiebungen sind Ähnlichkeitsabbildungen, führen also Geraden in Geraden und Kreise in Kreise über. Was aber macht die Inversion?

• *Translations, rotations et allongements sont des applications qui appliquent les figures géométriques à des figures semblables. Mais qu'est-ce que font les inversions?*

Durch $z(t)$ sei eine Gerade in $\mathbb{C}$ gegeben. • *Soit donné une droite par $z(t)$.*

Es gilt: • *On constate*: $z(t) = e^{i\varphi} z_0(t)$: $\leadsto$

Gerade durch Drehung entstanden aus $z_0(t)$ ($\{z_0(t)\}$ in spezieller Lage $\perp$ x -Achse.)

• *Droite qui est obtenue par rotation de $z_0(t)$ ($\{z_0(t)\}$ en situation spéciale $\perp$ axe x .)*

$$z(t) = e^{i\varphi} z_0(t) \mapsto \frac{1}{z(t)} = e^{-i\varphi} \cdot \frac{1}{z_0(t)}, \quad z_0(t) = x_0 + it = x_0 \cdot \left(1 + i \frac{t}{x_0}\right) = x_0 \cdot (1 + i\lambda)$$

($x_0 \neq 0$: Streckung • *allongement*).

($x_0 = 0$: $z_0(t) = it \rightarrow \frac{1}{x_0} = \frac{1}{it} = -i \frac{1}{t}$, d.h. Gerade $\rightarrow$ Gerade • *ç.v.d. droite $\rightarrow$ droite.*)

$\leadsto$ Reduziertes Problem: • *problème réduit*: Gerade • *Droite* $1 + i\lambda \mapsto \frac{1}{1 + i\lambda} = ?$

Es gilt: • *On constate*: $1 \mapsto 1$ und • *et* $\infty \mapsto 0$. $\frac{1}{2}$ bildet die Mitte zwischen 0 und 1 • *est le milieu entre 0 et 1.*

Daher betrachten wir das Bild in einem Koordinatensystem, dessen Ursprung in $(0, \frac{1}{2})$ verschoben ist.

• *A cause de ça nous considérons un système de coordonnées dont l'origine est déplacée à $(0, \frac{1}{2})$.*

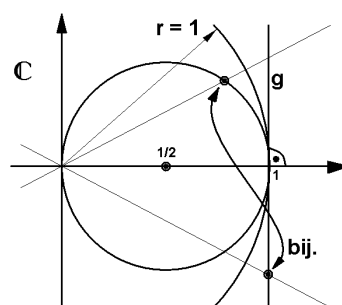
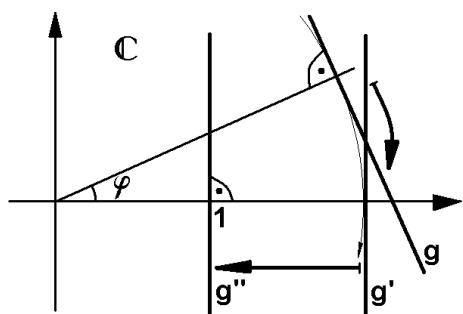
Somit müssen wir die folgende Abbildung studieren: • *Ainsi nous devons étudier l'application suivante:*

$1 + i\lambda \mapsto \frac{1}{1 + i\lambda} - \frac{1}{2}$. Wir formen um: • *Transcription:*

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{1 + i\lambda} - \frac{1}{2} \right| &= \left| \frac{1 - i\lambda}{1 + \lambda^2} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{1 - i\lambda - \frac{1}{2}(1 + \lambda^2)}{1 + \lambda^2} \right| = \left| \frac{-i\lambda + \frac{1}{2}1 - \frac{1}{2}\lambda^2}{1 + \lambda^2} \right| = \left| \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 2i\lambda - \lambda^2}{1 + \lambda^2} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{1 - 2i\lambda - \lambda^2}{1 + \lambda^2} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{(1 - i\lambda)^2}{1 + \lambda^2} \right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \lambda^2}{1 + \lambda^2} = \frac{1}{2} \\ \leadsto \quad \left| \frac{1}{1 + i\lambda} - \frac{1}{2} \right| &= \frac{1}{2} = \text{const.} \end{aligned}$$

$\leadsto$ Das Bild der Gerade ist ein Kreis • *L'image de la droite est un cercle.*

Setzt man die Abbildungen wieder zusammen, so folgt, dass eine Gerade in jedem Fall entweder auf eine Gerade oder auf einen Kreis abgebildet wird. • *Si l'on compose les applications on voit qu'une droite est appliquée dans tous les cas sur une droite ou bien sur un cercle.*



Für die Umkehrabbildung h^{-1} von $h : z \mapsto \frac{1}{z}$ gilt $h = h^{-1}$. Aus obiger Betrachtung folgt, dass unter h eine nicht zentrisch liegende Gerade in einen nicht zentrisch liegenden Kreis, umgekehrt also ein nicht zentrisch liegender Kreis in eine nicht zentrisch liegende Gerade abgebildet wird. Ein zentrisch liegender Kreis wird unter h bekanntlich auf einen ebensolchen Kreis abgebildet.

• *Pour l'application inverse h^{-1} de $h : z \mapsto \frac{1}{z}$ on constate $h = h^{-1}$. Comme on vient de voir il résulte que sous h une droite non-centrale est appliquée sur un cercle non-central et d'autre part un cercle non-central est appliqué sur une droite non-centrale. Un cercle central est appliqué sous h sur un cercle pareil, comme on sait.*

Konsequenz • *Conséquence:*

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$f =$ Möbiustransformation • *transformation de Möbius,*
 $K = \{ \text{Kreise, Geraden, } \bullet \text{ cercles, droites} \}$

Beh.: • **Thè.:**

$f : K \mapsto K$ bijektiv • *bijectif*

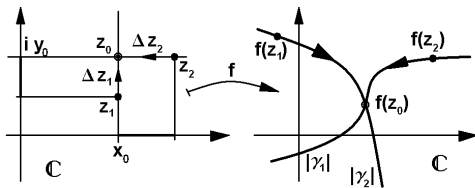
10.5 Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen — Equations différentielles de Cauchy-Riemann

10.5.1 Herleitung — Dédution

Sei • Soit $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ holomorph • holomorphe ,

$$\operatorname{Re}(f(z)) = u(z) = u(x, y), \quad \operatorname{Im}(f(z)) = v(z) = v(x, y)$$

$$\Rightarrow f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} D(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$



Betrachte • Etudier:

$$z_0 = x_0 + i y_0$$

$$z_1 = z_0 + \Delta z_1 = x_0 + i (y_0 + \Delta y) = z_0 + i \Delta y$$

$$z_2 = z_0 + \Delta z_2 = (x_0 + \Delta x) + i y_0 = z_0 + \Delta x$$

Auf • Sur γ_1 :

$$D(z) = \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{u(z_0 + \Delta x) - u(z_0)}{\Delta x} + i \frac{v(z_0 + \Delta x) - v(z_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + i \frac{\Delta v}{\Delta x} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Auf • Sur γ_2 :

$$D(z) = \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{u(z_0 + i \Delta y) - u(z_0)}{i \Delta y} + i \frac{v(z_0 + i \Delta y) - v(z_0)}{i \Delta y} = \frac{\Delta u}{i \Delta y} + i \frac{\Delta v}{i \Delta y}$$

$$\rightarrow \frac{\partial u}{i \partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

$\lim_{z \rightarrow z_0} D(z) = f'(z_0)$ darf nicht vom Weg γ_k abhängen • ne doit pas dépendre du chemin γ_k . Daher gilt:

$$\bullet \text{ Ainsi on constate: } f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{i \partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

Diese Betrachtung lässt sich auch umkehren. • Cette déduction se laisse aussi inverser. $\leadsto$

Satz: • **Théorème:**

Cauchy–Riemann'sche Differentialgleichungen

• **Equations différentielles de Cauchy–Riemann:**

$$f \text{ holomorph in } \bullet \text{ holomorphe dans } G \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

in • dans G

Mit diesen Differentialgleichungen lässt sich oft rasch entscheiden, ob eine gegebene Funktion holomorph ist. • A l'aide de ces équations différentielles on peut souvent vérifier rapidement si une fonction donnée est holomorphe.

10.5.2 Harmonische Funktionen — Fonctions harmoniques

Sei • Soit $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, (allgemeiner • généralement: $\Delta := \sum_{k=0}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$)

Definition: • **Définition:**

f heisst harmonisch in • s'appelle harmonique dans G :

$$\Leftrightarrow \Delta f = 0 \text{ in } \bullet \text{ dans } G$$

Aus der Analysis ist bekannt, dass für einigermaßen „anständige“ Funktionen f gilt:

- *De l'analyse on sait que pour des fonctions "convenables" f on a:* $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}$.

In der sogenannten „Funktionentheorie“ wird bewiesen, dass eine in einem Gebiet holomorphe Funktion immer in eine Potenzreihe entwickelt werden kann, also mindestens zweimal differenzierbar ist.

- *Dans la théorie des fonctions complexes on prouve qu'une fonction holomorphe dans un domaine G peut toujours être développée dans une série de puissances. Par conséquent elle est au moins deux fois dérivable.*

Wir definieren nun: • *Nous utilisons la définition suivante:*

Definition: • **Définition:** f harmonisch in • harmonique dans G
 $\Leftrightarrow \Delta f = 0$ in • dans G

Daher sieht man durch einfache Rechnung mit Hilfe von Cauchy–Riemann:

- *Alors on voit par un calcul simple à l'aide de Cauchy–Riemann:*

Satz: • **Théorème:** Vor.: • Hyp.:

f holomorph in • holomorphe dans G

Beh.: • Thè.:

f harmonisch in • harmonique dans G

Konsequenz: • **Conséquence:**

$f(z) = u(z) + i v(z)$ holomorph in • holomorphe dans G

$\Leftrightarrow u(z), v(z)$ holomorph in • holomorphe dans G

Damit haben wir das Rüstzeug für die Diskussion wichtiger **transzendenter** komplexer Funktionen: Exponentialfunktion, Logarithmusfunktion, trigonometrische Funktionen, Arcusfunktionen u.s.w..

- *A l'aide de ce matériel la discussion d'importantes fonctions complexes **transcendantes** nous est facilitée: la fonction exponentielle, le logarithme, les fonctions trigonométriques, les fonctions circulaires inverses etc..*

10.6 Komplexe Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion — Fonctions exponentielle et logarithme complexes

Im Reellen kann die Eulersche Exponentialfunktion durch folgende drei Eigenschaften definiert werden:

- *Dans les nombres réels on peut définir la fonction exponentielle d'Euler par les trois qualités suivantes:*

1. f diff'bar in $\mathbb{R}$ • f dérivable dans $\mathbb{R}$
2. $\forall_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f'(x)$
3. $f(0) = 1$

In der Theorie der Differentialgleichungen wird gezeigt, dass eine Lösung f existiert und auch eindeutig bestimmt ist als Lösung des gegebenen Anfangswertproblems.

- *Dans la théorie des équations différentielles on démontre que la solution f existe et qu'elle est univoque comme solution du problème des valeurs initiales.*

Diese Problemstellung lässt sich samt Lösungskonzept ins Komplexe übertragen. Dabei spielt Cauchy–Riemann eine wichtige Rolle. • *Ce problème se laisse transférer dans le complexe. Le concept pour la solution est le même. Cauchy–Riemann joue ici un rôle important.* Vdist

Sei • *Soit* $z = x + iy$. Bekannt: • *Nous connaissons déjà:* e^x , $e^{iy} := \cos(y) + i \sin(y)$.

Bemerkung: • **Remarque:**

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad i^6 = -1, \quad i^7 = -i, \quad i^8 = 1, \quad \dots$$

Benutze die Potenzreihenentwicklung • *Utiliser les séries de puissances:* $\leadsto$

$$\cos(\varphi) = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \frac{\varphi^8}{8!} - \frac{\varphi^{10}}{10!} + \dots = 1 + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^6}{6!} + \frac{(i\varphi)^8}{8!} + \frac{(i\varphi)^{10}}{10!} + \dots$$

$$i \sin(\varphi) = i\varphi - \frac{i\varphi^3}{3!} + \frac{i\varphi^5}{5!} - \frac{i\varphi^7}{7!} + \frac{i\varphi^9}{9!} - \dots = i\varphi + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} + \frac{(i\varphi)^7}{7!} + \frac{(i\varphi)^9}{9!} + \dots$$

$$\cos(\varphi) + i \sin(\varphi) = 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \frac{(i\varphi)^3}{3!} + \frac{(i\varphi)^4}{4!} + \frac{(i\varphi)^5}{5!} + \frac{(i\varphi)^6}{6!} + \frac{(i\varphi)^7}{7!} + \frac{(i\varphi)^8}{8!} + \frac{(i\varphi)^9}{9!} + \dots = e^{i\varphi}$$

$$\Rightarrow \cos(\varphi) + i \sin(\varphi) = e^{i\varphi}$$

Wir definieren damit: • *Nous définissons donc:*

Definition: • **Définition:** $f(z) := e^z = e^{x+iy} := e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos(y) + i \sin(y))$
(**Exponentialfunktion** • **Fonction exponentielle**)

Die rechte Seite ist bekannt • *On connaît déjà le côté droite.*

$$\leadsto u(x, y) = e^x \cdot \cos(y), \quad v(x, y) = e^x \cdot \sin(y).$$

Für u und v gilt: • *Pour* u *et* v *on calcule:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cdot \cos(y) \quad \wedge \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cdot \sin(y).$$

Damit ist f holomorph. • *Donc* f *est holomorphe.*

Daher ist der Differentialquotient wegunabhängig.

• *Alors le quotient différentiel ne dépend pas du chemin.*

Wir können daher rechnen: • *Alors on peut calculer:*

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta x) - f(z_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{z_0 + \Delta x} - e^{z_0}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x + iy_0} - e^{x_0 + iy_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} \cdot e^{iy_0} - e^{x_0} \cdot e^{iy_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} \cdot e^{iy_0} = \\ &= e^{x_0} \cdot e^{iy_0} = e^{x_0 + iy_0} = e^{z_0} \end{aligned}$$

$\leadsto f(z) = e^z$ erfüllt die Differentialgleichung • $f(z) = e^z$ satisfait l'équation différentielle:
 $f(z) = f'(z)$ in • dans $\mathbb{C}$.

Zudem gilt: • En plus on voit: $f(0) = e^{0+i0} = e^0 = 1$.

Weiter folgt aus der Theorie der Differentialgleichung die Eindeutigkeit der Lösung.

• En outre on peut déduire de la théorie des équations différentielles que la solution est univoque.

Satz: • Théorème: $f(z) = e^z$ ist die einzige Funktion, die folgende Bedingungen erfüllt
 • $f(z) = e^z$ est la seule fonction qui satisfasse les conditions suivantes:

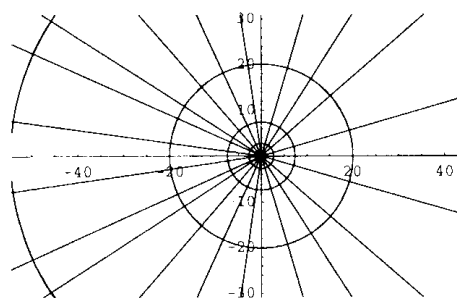
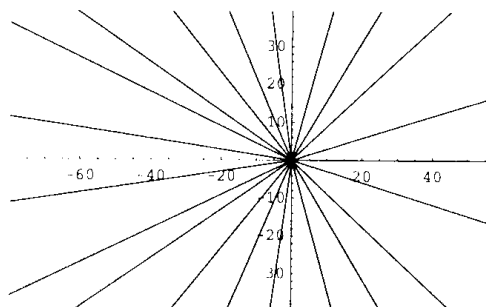
1. f diff'bar in $\mathbb{R}$ • f dérivable dans $\mathbb{R}$
2. $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f'(x)$
3. $f(0) = 1$

Die folgenden Regeln lassen sich einfach nachprüfen mit Hilfe von: • Les règles suivantes se laissent vérifier à l'aide de: $e^z = e^x \cdot (\cos(y) + i \sin(y))$.

Dabei benutzen wir folgende Bezeichnung: • Nous y utilisons la notation suivante:

$S_n := \{z = x + i(y + 2n\pi) \mid y \in (-\pi, \pi]\}$ heisst **Periodenstreifen** • s'appelle **bande de période**,
 $\dot{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- Regeln: • Règles:**
1. $|e^z| = e^x = e^{\operatorname{Re}(z)}$
 2. $\operatorname{Arg}(e^z) = y = \operatorname{Im}(z)$
 3. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$
 4. $e^z = e^{z+i2n\pi} = e^z = e^z \cdot e^{i2n\pi}$
 5. $S_n \xrightarrow{\text{bji.}} \dot{\mathbb{C}}$
 {Horizontale Geraden • Droites horizontales} $\mapsto$ {zentrische Strahlen
 • rayons centraux}
 {Vertikale Geraden • Droites verticales} $\mapsto$ {zentrische Kreise • cer-
 cles centraux}



Wegen der Bijektivität von $f(z) = e^z = w$ auf $(S_n \times \dot{\mathbb{C}})$ existiert jeweils die Umkehrfunktion $f_n^{-1}(w) = z$, allerdings abhängig von n (Standard in der Literatur: $n = 0$). • *A cause de la bijectivité de $f(z) = e^z = w$ sur $(S_n \times \dot{\mathbb{C}})$ la fonction inverse $f_n^{-1}(w) = z$ existe, mais elle dépend de n . (Standard dans la littérature: $n = 0$).*

Bemerkung: • **Remarque:**

Mit Hilfe des Begriffs der **Riemannschen Fläche** gelingt es, die Umkehrfunktion eindeutig zu machen. Dazu Unterscheiden wir verschiedene komplexe Bildebenen $\dot{\mathbb{C}}_n$ mit $f: S_n \mapsto \dot{\mathbb{C}}_n$. Da der Rand der Streifen S_n auf $\mathbb{R}^{(-)}$ abgebildet wird, denkt man sich alle diese $\dot{\mathbb{C}}_n$ längs der negativen reellen Achse aufgeschnitten und dort mit den beiden Nachbarn $\dot{\mathbb{C}}_{n-1}$ und $\dot{\mathbb{C}}_{n+1}$ verklebt. Das entstehende Gebilde R (eine Riemannsche Fläche) gleicht dann einer Wendeltreppe (nahe beim Ursprung hinkt der Vergleich aber). Für $(\mathbb{C} \times R)$ ist dann f bijektiv.

• *A l'aide de la notion de la surface de Riemann on arrive à rendre univoque la fonction inverse. Pour cela nous distinguons différents plans images complexes $\dot{\mathbb{C}}_n$: $f: S_n \mapsto \dot{\mathbb{C}}_n$. Comme le bord de la bande S_n est appliqué sur $\mathbb{R}^{(-)}$, on s'imagine tous ces $\dot{\mathbb{C}}_n$ coupés le long de l'axe réel négatif et collés aux deux voisins $\dot{\mathbb{C}}_{n-1}$ et $\dot{\mathbb{C}}_{n+1}$. La construction obtenue R (une surface de Riemann) ressemble à un escalier tournant (à proximité de l'origine la comparaison est mauvaise). Sur $(\mathbb{C} \times R)$ f est bijectif.*

Definition: • **Définition:** Die eben besprochene Umkehrfunktion $f^{-1}: \dot{\mathbb{C}}_n \mapsto S_n$ heisst **natürliche Logarithmusfunktion** • *La fonction inverse $f^{-1}: \dot{\mathbb{C}}_n \mapsto S_n$ dont on vient de parler s'appelle logarithme naturel.*
 $f^{-1}(w) = \ln(w) \mapsto z$

Üblicherweise werden wir $\ln$ auf dem Standardstreifen S_0 betrachten.

• *Normalement nous allons considérer le $\ln$ sur la bande standard S_0 .*

Es ist: • *On trouve: $f: z = x + iy \mapsto f(z) = e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) = u(x, y) + iv(x, y) = w$, $r = |w| = e^x$, $\text{Arg}(w) = y$.*

$\leadsto f^{-1}: w = u + iv \mapsto f^{-1}(w) = \ln(w) = z = x + iy$

mit • *avec $x = \ln|w|$, $y = \text{Arg}(w) = \arctan(\frac{v}{u})$* $\leadsto$

Satz: • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$f(z) = e^z = w, \quad z \in S_0$$

Beh.: • **Thè.:**

$$f_0^{-1}(w) = \ln(w) = \ln|w| + i\text{Arg}(w) = \ln|e^z| + i\text{Arg}(e^z) = z$$

Bsp.: • **Exemple:** Sei • *Soit $x \in \mathbb{R}^+$. $f_0^{-1}(-x) = \ln_0(-x) = \ln(x) + i\text{Arg}(-x) = \ln(x) + i\pi$,
 Speziell: • *Spécialement: $f_0^{-1}(-1) = \ln_0(-1) = \ln(1) + i\text{Arg}(-1) = 0 + i\pi = i\pi$.**

10.7 Trigonometrische Funktionen, Arkusfunktionen — Fonctions trigonométriques, fonctions circulaires inverses

Bekannt sind die Eulerschen Identitäten: • *Nous connaissons les identités d'Euler:*

$$e^{\pm i\varphi} = \cos(\varphi) \pm i\sin(\varphi)$$

Damit lässt sich Sinus und Cosinus rein analytisch definieren, also losgelöst von Geometrie.

• *A l'aide de ces identités on peut définir les fonctions sinus et cosinus de manière pure analytique, ç.v.d. indépendamment de la géométrie.*

$$\leadsto \sin(x) := \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos(x) := \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Diese Formeln lassen sich jetzt für komplexe z verallgemeinern. • *Maintenant nous pouvons généraliser ces formules pour des z complexes.* $\leadsto$ Sei • *Soit $z \in \mathbb{C}$*

Definition: • **Définition:**

$$\begin{aligned} \sin(z) &:= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \\ \tan(z) &= \frac{\sin(z)}{\cos(z)}, \quad \cot(z) = \frac{1}{\tan(z)}, \\ \arcsin(w) &= z \quad \text{für} \quad \bullet \text{ pour } w = \sin(z) \quad \text{u.s.w.} \quad \bullet \text{ etc.} \end{aligned}$$

Bemerkung: • **Remarque:**

Die im Reellen geltenden Regeln bleiben erhalten.
• *Les règles connues du réel restent valables:*

1. Differentiationsregeln • *Règles pour les dérivés:*
Z.B. • *P.ex. $(\sin(z))'_z = \cos(z)$*
2. Additionstheoreme • *Théorèmes de l'addition*
3. Regeln für Nullstellen • *Règles pour les zéros*
4. ... u.s.w. • *etc.*

Ein Beispiel • *Un exemple:*

Problem: • **Problème:** Was ist das Bild des kartesischen Koordinatengitters unter der Cosinusfunktion? • *Quel est l'image de la grille des coordonnées cartésiennes sous la fonction cosinus?*

$$\begin{aligned} \cos(z) &= \cos(x + iy) = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} = \frac{e^{ix} \cdot e^{-y} + e^{-ix} \cdot e^y}{2} \\ &= \frac{(\cos(x) + i \sin(x)) \cdot e^{-y} + (\cos(-x) + i \sin(-x)) \cdot e^y}{2} \\ &= \frac{(\cos(x) + i \sin(x)) \cdot e^{-y} + (\cos(x) - i \sin(x)) \cdot e^y}{2} = \frac{\cos(x) \cdot (e^y + e^{-y}) - i(\sin(x) \cdot (e^y - e^{-y}))}{2} \\ &= \cos(x) \cdot \cosh(y) - i \sin(x) \sinh(y). \quad \leadsto \quad \cos(z) \hat{=} \begin{pmatrix} \cos(x) \cdot \cosh(y) \\ \sin(x) \sinh(y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In der Regel sind somit die Bilder der horizontalen Geraden Ellipsen, die Bilder der vertikalen Geraden Hyperbeln. • *Donc normalement les images des droites horizontales sont des ellipses, les images des droites verticales sont des hyperboles.*

10.8 Anwendungen — Applications

10.8.1 Idee — Idée

Oft gelingt es Probleme zu lösen, indem man die gegebene geometrisch komplizierte Situation konform in eine einfachere Situation abbildet. Wenn sich bei einer solchen bijektiven Abbildung die Problembedingungen einfach auf die neue Situation übertragen, kann man das Problem in der neuen Situation

lösen und dann die Lösung zurückabbilden.

• *Souvent on arrive à résoudre le problème en appliquant la situation compliquée donnée de façon conforme en une situation plus simple. Quand, pour une telle application bijective, les conditions du problème sont les mêmes que pour la nouvelle situation, on peut résoudre le problème là et après appliquer la solution à l'inverse.*

Z.B. soll der Potentialverlauf zwischen einem Fahrleitungsdraht und einer Brücke studiert werden. Nimmt man im Querschnitt die Brücke als Gerade und den Draht als Kreis an, so kann man eine konforme Abbildung konstruieren, die diese Situation auf zwei konzentrische Kreise abbildet. Dort ist der Potentialverlauf offensichtlich (Zentralfeld).

• *Par exemple il faut étudier la différence de potentiel entre un pont et le caténaire (ligne de contact) d'un train. Dans la coupe on prend le pont comme droite et le fil comme cercle. Alors on peut construire une application conforme qui transforme cette situation en deux cercles concentriques. Là la différence du potentiel est bien claire (champs centrale).*

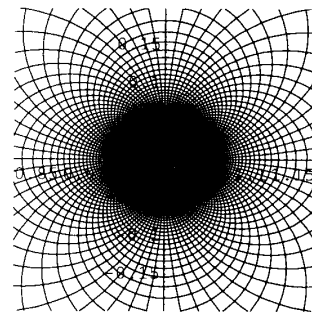
10.8.2 Smith-Diagramm — Diagramme de Smith

In der Elektrotechnik spielt die Möbiustransformation $\mathbb{C} \ni z \mapsto w = f(z) = \frac{z-1}{z+1} \in \mathbb{C}$ eine wichtige Rolle. Das Bild des rechtwinkligen Koordinatennetzes der z -Ebene in der w Ebene heisst **Smith-Diagramm** (Smith-Chart).

• *En électronique la transformation de Möbius $\mathbb{C} \ni z \mapsto w = f(z) = \frac{z-1}{z+1} \in \mathbb{C}$ joue un rôle important. L'image du système de coordonnées du plan z dans le plan w s'appelle **diagramme de Smith** (Smith-Chart).*

f erzeugt vom rechtwinkligen Koordinatennetzes der z -Ebene in der w Ebene folgendes Bild (vgl. Fig.):

• *f crée dans le plan w l'image suivante du système de coordonnées du plan z (voir fig.):*



Das Bild der vertikalen Geraden der z -Ebene mit den Realanteilen $x = 0$ ist der Einheitskreis. Die Bilder aller andern Vertikalen sind Kreise, die im Einheitskreis drin liegen, diesen in $w = 1$ berühren und mit wachsendem $\operatorname{Re}(z)$ kleiner werden. Die horizontalen Halbgeraden gehen in Kreislinien über, die die erwähnten Kreise senkrecht schneiden. • *L'image de la droite verticale avec la partie réelle $x = 0$ du plan z est le cercle unité. Les images des autres droites verticales sont des cercles, qui sont situés dans le cercle unité et qui touchent celui à $w = 1$ et qui deviennent de plus en plus petit avec $\operatorname{Re}(z)$ s'agrandissant. Les demi-droites horizontales deviennent des parties de cercle qui sont perpendiculaires aux cercles mentionnés aux points d'intersection.*

Es gilt: • *Il vaut:*
$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\frac{1}{z}-1}{\frac{1}{z}+1} = \frac{1-z}{1+z} = -\frac{z-1}{1+z} = -f(z)$$

Konsequenz: • **Conséquence:** Im Smith-Diagramm kann man die Inversen einer komplexen Zahl z graphisch einfach durch Spiegelung an den Ursprung bestimmen. Es gilt: $f\left(\frac{1}{z}\right) = -f(z)$.

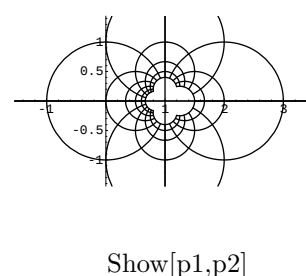
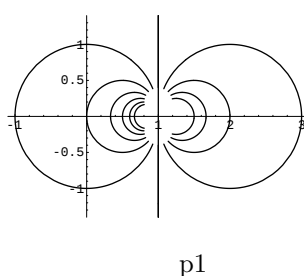
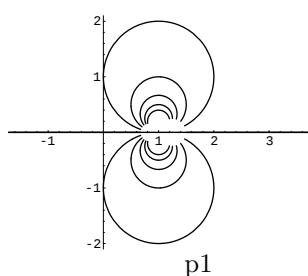
• *Dans le diagramme de Smith on peut trouver l'inverse d'un nombre complexe de façon simple: Graphiquement par la réflexion à l'origine. Il vaut: $f\left(\frac{1}{z}\right) = -f(z)$.*

Konstruktion — Construction

Mit *Mathematica*: • *A l'aide de Mathematica*:

```
f[z_]:= (z-1)/(z+1);
z1[t_,a_]:= t + a I;
z2[t_,b_]:= b + t I;
u[z_]:= {Re[f[z]], Im[f[z]]};

p1=ParametricPlot[Evaluate[Table[u[z1[t,a]],{a,-5,5}]],{t,-5,5}, AspectRatio->Automatic];
p2=ParametricPlot[Evaluate[Table[u[z2[t,b]],{a,-5,5}]],{t,-5,5}, AspectRatio->Automatic];
Show[p1,p2];
```

**10.8.3 Joukowski-Profil — Profil de Joukowski**

Wir studieren ein konkretes Beispiel: Nous étudions un exemple concret:

Gegeben sei in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ der Kreis: • *Soit donné le cercle dans le plan complexe:*
 $t \mapsto z(t) = \sqrt{0.97} \cdot e^{it} + (-0.1 + 0.4i)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Betrachte dazu noch die komplexe Abbildung: • *Etudions en plus l'application complexe:*

$$\varphi : z \mapsto \varphi(z) = z + \frac{1}{z}.$$

Hiermit wird folgendes Bild der Kurve $z(t)$ definiert:

• *Ainsi on a défini l'image suivante de la courbe $z(t)$:*

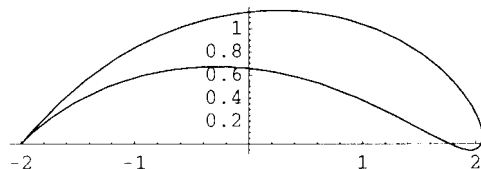
$$\varphi(z(t)) := w(t) = z(t) + \frac{1}{z(t)}$$

Die Kurve $w(t)$ in $\mathbb{C}$ zeigt ein stromlinienförmiges Profil.

Dieses Kurvenprofil spielt in der Aerodynamik (z.B. beim Tragflügel) oder bei Turbinenschaufeln eine Rolle. Es heisst *Joukowski-Profil*.

• *Cette courbe $w(t)$ dans $\mathbb{C}$ montre un profil 'aérodynamique'.*

Ce profil joue un rôle important dans l'aérodynamique (p.ex. à l'aile d'avion) ou l'aube de turbine. Il s'appelle profil de Joukowski.



10.8.4 Zeigerdiagramme — diagrammes-vecteurs

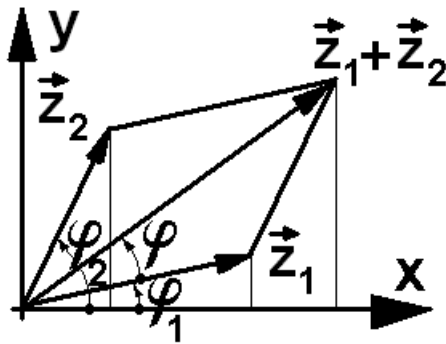
In der Elektrotechnik ist es im Zusammenhang mit Wechselstrom üblich, den Strom I und die Spannung U mit Hilfe von **Zeigern** (Vektoren) in Form von komplexen Zahlen zu schreiben. Auf diese Weise lassen sich verschiedene Ströme und Spannungen einfach addieren.

• *Dans l'électrotechnique, à propos de courant alternatif, il est usuel d'écrire le courant I et la tension U à l'aide de vecteurs ou de rayons comme nombres complexes. De cette manière il est plus simple d'additionner des courants ou des tensions.*

Bsp.: • **Exemple:** $I = I_0 \cos(\omega \cdot t + \varphi_I)$, $U = U_0 \cos(\omega \cdot t + \varphi_U)$

$\leadsto$ Allgemein: • *Généralement:*

$$z_{Re} = z_0 \cos(\omega \cdot t + \varphi_0), \quad z_{Im} = z_0 \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) \leadsto \vec{z} = \begin{pmatrix} z_0 \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) \\ z_0 \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) \end{pmatrix} \hat{=} z_0 \cdot e^{I \omega t + \varphi_0}$$



Zeiger / Vektoren ou rayons

Sei • *Soit*

$$\vec{z}_1 \hat{=} A_1 \cdot e^{I \omega t + \varphi_1}$$

$$\vec{z}_2 \hat{=} A_2 \cdot e^{I \omega t + \varphi_2}$$

$$\vec{z} \hat{=} A \cdot e^{I \omega t + \varphi}$$

$\leadsto$ Es gilt: • *Il vaut:*

$$A = |\vec{z}_1 + \vec{z}_2|,$$

$$\varphi = \varphi_1 + \arccos\left(\frac{\langle \vec{z}_1, \vec{z}_1 + \vec{z}_2 \rangle}{|\vec{z}_1| \cdot |\vec{z}_1 + \vec{z}_2|}\right)$$

$$\leadsto A_1 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_1) + A_2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_2) =$$

$$= |A_1 \begin{pmatrix} \cos(\omega \cdot t + \varphi_1) \\ \sin(\omega \cdot t + \varphi_1) \end{pmatrix} + A_2 \begin{pmatrix} \cos(\omega \cdot t + \varphi_2) \\ \sin(\omega \cdot t + \varphi_2) \end{pmatrix}| \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_1 + \arccos(\frac{\langle \vec{z}_1, \vec{z}_1 + \vec{z}_2 \rangle}{|\vec{z}_1| \cdot |\vec{z}_1 + \vec{z}_2|}))$$

10.9 Darstellung komplexer Funktionen — Représentation de fonctions complexes

10.9.1 Beispiel einer Kurve — Exemple d'une courbe

Geg.: • **Donné:**

$$z(t) := \frac{1}{1 + i t}, \quad g(t) = 1 + i t, \quad z(t) := \frac{1}{g(t)}$$

Code: (*Mathematica*)

```
z[t_] := 1/(1 + I t);
ParametricPlot[{Re[z[t]], Im[z[t]]}, {t, -5, 5}, AspectRatio -> Automatic];
amplitude[t_] := Norm[z[t]];
Plot[amplitude[t], {t, -5, 5}];
Plot[Arg[z[t]], {t, -5, 5}];
```

Output: (*Mathematica*)

Rechts: Die Funktionskurve im Komplexen.

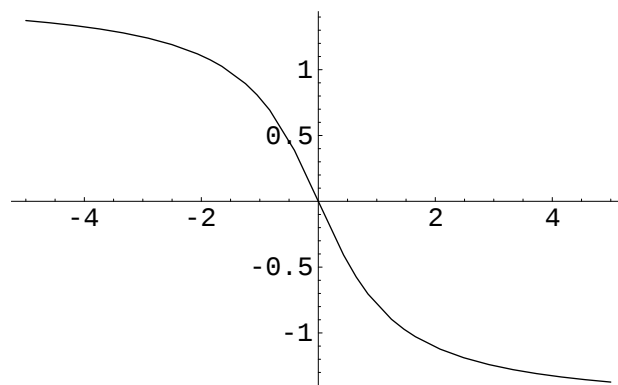
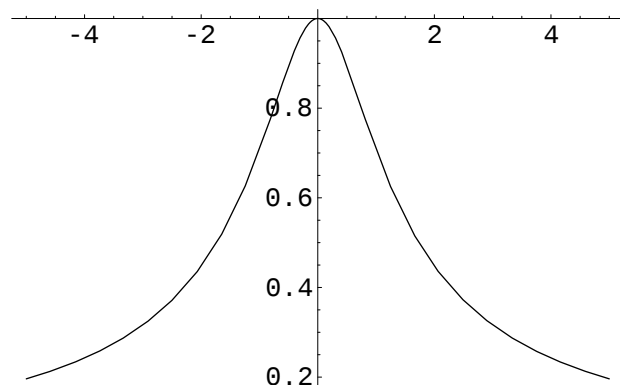
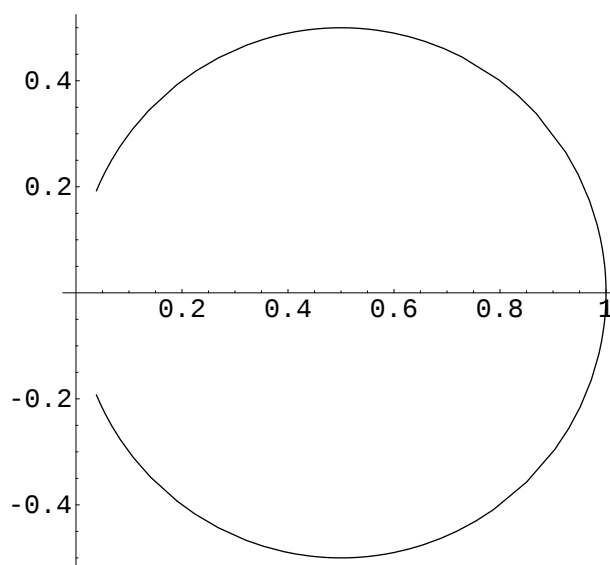
- *A droite: La courbe de la fonction dans le complexe.*

Unten links: Der Betrag des Funktionswerts.

- *En bas à gauche: La valeur absolue de la valeur de la fonction.*

Unten rechts: Das Argument des Funktionswerts.

- *En bas à droite: La valeur de l'argument de la fonction.*



10.9.2 Beispiel einer rationalen Funktion — Exemple: Fonction rationnelle

Geg.: • **Donné:**

$$f(z) := \frac{2z^2 - z}{z^3 - z^2 + 1}$$

Code: (*Mathematica*)

```
f[z_] := (2 z^2 - z)/(z^3 - z^2 + 1)
z[s_, t_] := s + I t;
u[s_, t_] := Norm[f[z[s, t]]];
w[s_, t_] := Arg[f[z[s, t]]];
Plot3D[u[s, t], {s, -2, 2}, {t, -2, 2},
  PlotPoints -> 50, PlotRange -> {0, 15}, ViewPoint -> {-1.3, +2.4, 2.};
Plot3D[w[s, t], {s, -2, 2}, {t, -2, 2},
  PlotPoints -> 50, PlotRange -> {-5, 5}, ViewPoint -> {-1.3, +2.4, 2.};
Plot3D[Re[f[z[s, t]]], {s, -2, 2}, {t, -2, 2},
  PlotPoints -> 50, PlotRange -> {-5, 5}, ViewPoint -> {-1.3, +2.4, 2.};
Plot3D[Im[f[z[s, t]]], {s, -2, 2}, {t, -2, 2},
  PlotPoints -> 50, PlotRange -> {-5, 5}, ViewPoint -> {-1.3, +2.4, 2.};
```

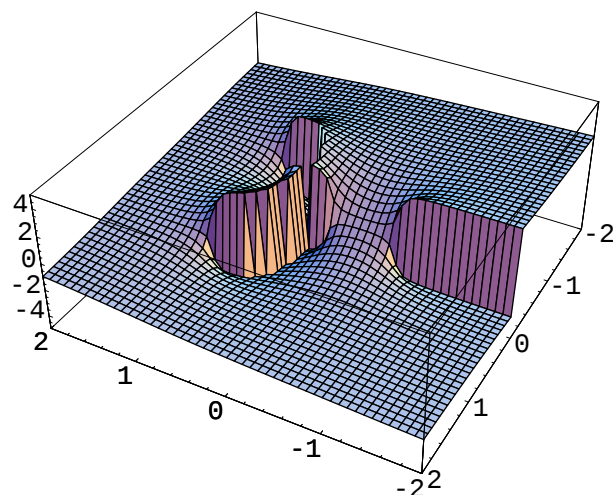
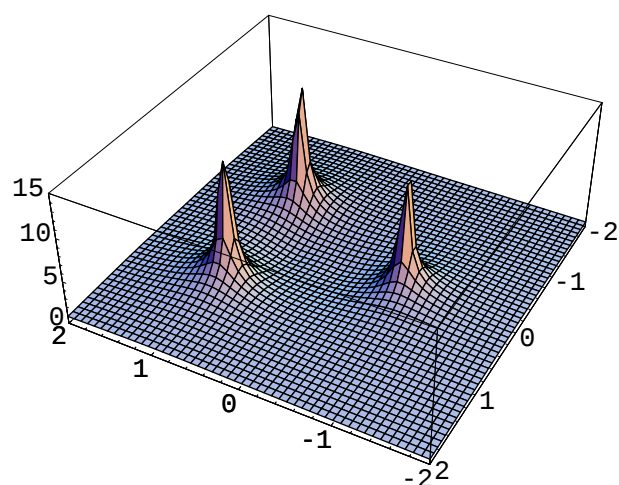
Output: (*Mathematica*)

Unten links: Der Betrag des Funktionswerts.

- *En bas à gauche: La valeur absolue de la valeur de la fonction.*

Unten rechts: Das Argument des Funktionswerts.

- *En bas à droite: La valeur de l'argument de la fonction.*

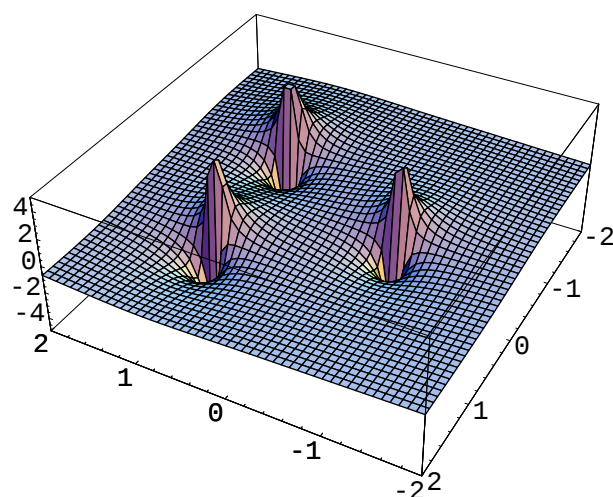
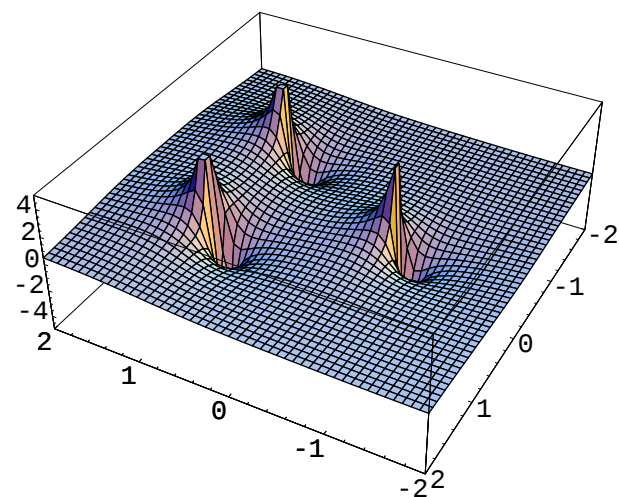


Unten links: Der Realanteil des Funktionswerts.

- *En bas à gauche: La valeur réelle de la valeur de la fonction.*

Unten rechts: Der Imaginäranteil des Funktionswerts.

- *En bas à droite: La valeur imaginaire la valeur de la fonction.*



Kapitel • Chapitre 11

Anhang 2 : Komplexe Weg– oder Kurvenintegrale — Annexe 2: Intégrales curvilignes complexes

Bemerkung: • Remarque:

Dieser Teil ist einem andern Skript des Autors entnommen, das bisher nur in deutscher Sprache vorhanden ist.

• *Cette partie est prise d'un autre script de l'auteur. Jusqu'à maintenant ce script n'a été préparé qu'en allemand.*

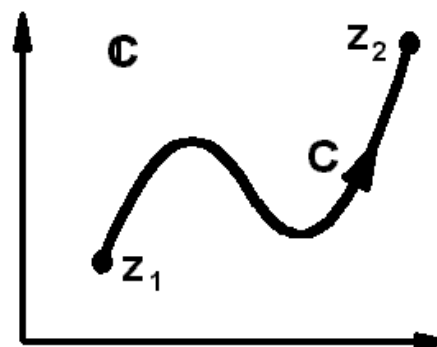
11.1 Grundlagen aus der Funktionentheorie — Bases de la théorie de fonctions

Die Kapitel über die Einführung in die komplexen Zahlen und die Einführung in die holomorphen Funktionen (Funktionentheorie) sind im Algebra-Skript des Autors wiedergegeben. Des Umfangs wegen werden sie daher hier nicht nochmals aufgeführt. Der Leser ist gebeten, im Algebra-Skript nachzuschlagen.

11.1.1 Definition des Kurvenintegrals — Définition de l'intégrale curviligne

C : Einfach geschlossene Kurve, doppelpunktfrei, einmal durchlaufen, $z_1 = z(a)$, $z_2 = z(b)$, $z(t)$ stetig diff'bar

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u(x, y) + i v(x, y)) (dx + i dy) := \int_a^b f(z) z'(t) dt$$



11.1.2 Sätze, Eigenschaften — Théorèmes, propriétés, qualités

Abschätzung

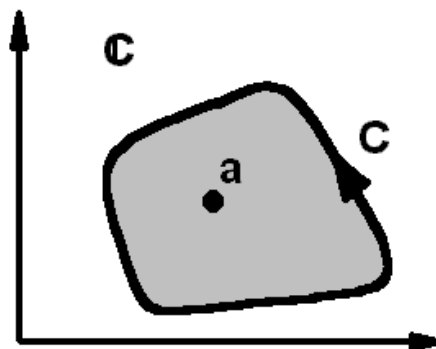
Sei $L = \text{Weglänge von } C$, $M = \max_{z \in C} (|f(z)|)$ ($\leadsto |f(z)| \leq M, z = z(t), t \in [a, b]$)

$$\Rightarrow \left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz| \leq M \cdot L$$

Stammfunktionseigenschaft

Sei f holomorph in G , $\partial G = C$, $F(z)$ ist Stammfunktion von $f(z)$ in $\bar{G} = G \cup \partial G$

$$\Rightarrow \int_C f(z) dz = F(z_1) - F(z_2)$$



Integralsatz von Cauchy

Sei C einfach geschlossen, f holomorph auf $\bar{G} = G \cup \partial G$

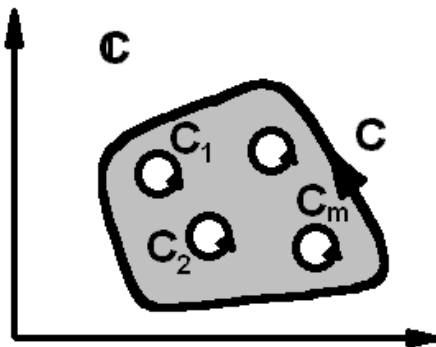
$$\Rightarrow \oint_C f(z) dz = 0$$

Umkehrung des Integralsatzes von Cauchy: Satz von Morera

Seien $\dots, C_k, \dots$ geschlossene Kurve in G .

Sei f stetig in G und $\forall C_k \subset G: \oint_{C_k} f(z) dz = 0$

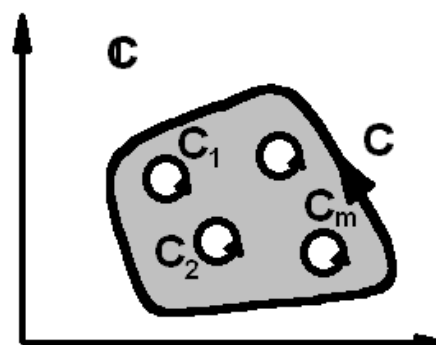
$$\Rightarrow f \text{ holomorph in } G$$



Summensatz der Randintegrale

G_k sei ein „Loch“ in G mit Rand ∂G_k ,
 $k = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$
 f sei holomorph in $G \setminus \bigcup_{k=1}^n G_k$
(in G_k kann die Holomorphie verletzt sein)
 $\partial G_k = C_k$

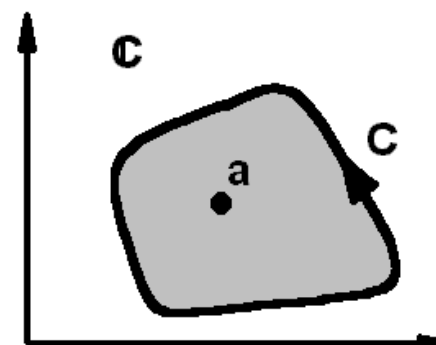
$$\Rightarrow \oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z) dz$$

**Integralformel von Cauchy**

Sei f holomorph auf $\bar{G} = G \cup \partial G$
 $C = \partial G$ sei einfach geschlossen, $a = z_0 \in G$

$$\Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

**Abschätzungsformel von Cauchy**

Sei f holomorph auf einem Kreis K , $\bar{K} = K \cup \partial K$ mit Mittelpunkt $a = z_0$ und dem Radius r .
 f sei beschränkt auf $C = \partial K$: $|f(z)| \leq M$, $z \in C = \partial K$

$$\Rightarrow |f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{M \cdot n!}{r^n}$$

Satz von Liouville

Sei f holomorph und $|f(z)|$ beschränkt in $\mathbb{C}$

$$\Rightarrow f(z) = \text{const.}, \quad z \in \mathbb{C}$$

11.1.3 Residuenrechnung — Méthode des résidus**Laurent-Entwicklung**

Sei z_0 = Zentrum eines Kreises K mit dem Radius R , $\dot{K} = K \setminus \{z_0\}$, $\dot{K} \subseteq G$.
Sei f holomorph in G resp. auf dem Rand ∂K von K . (In z_0 braucht f nicht holomorph zu sein.)

$$\Rightarrow \text{Laurent-Entwicklung: } f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

$$c_n = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial K} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

Residuum

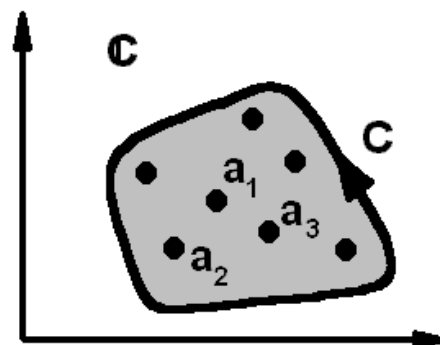
Das Residuum von $f(z)$ in $z = z_0$ ist der Koeffizient $c_{-1} = (z - z_0)^{-1} = \frac{1}{z - z_0}$ in der Laurent-Entwicklung von $f(z)$ um $z = z_0$, wobei die Laurent-Reihe für $z \in (0, R)$, d.h. für $0 < |z - z_0| < R$ konvergiert. ($R =$ Kreisradius von K .)

$$\operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) := c_{-1}$$

Residuensatz

Sei f holomorph in G mit Ausnahme endlich vieler Punkte $z_1, z_2, \dots, z_n \in K \subseteq G$, $C = \partial G$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z)$$

**Methoden zur Residuenberechnung**

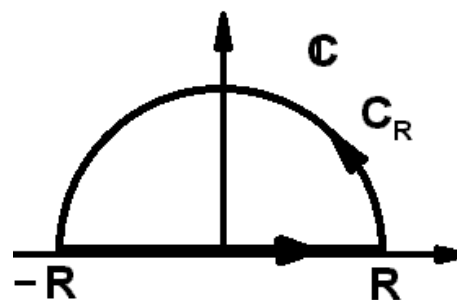
1. Beschaffe die Laurent-Reihe von $f(z)$ um $z = z_0$. $\leadsto$ Lese $c_1 = \operatorname{Res}_{z=z_k}$ ab.
2. Fall wo $f(z)$ in z_0 einen Pol 1. Ordnung hat: Benutze die Regel von Bernulli

$$\leadsto \operatorname{Res}_{z=z_k} = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot (z - z_0)$$

3. Sei $f(z) := \frac{g(z)}{h(z)}$, $g(z)$ und $h(z)$ holomorph in U_{z_0} , $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0 \leadsto \operatorname{Res}_{z=z_k} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$

4. Fall wo $f(z)$ in z_0 einen Pol m-ter Ordnung hat: $\operatorname{Res}_{z=z_k} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{m-1} ((z - z_0)^m f(z))$

5. ...



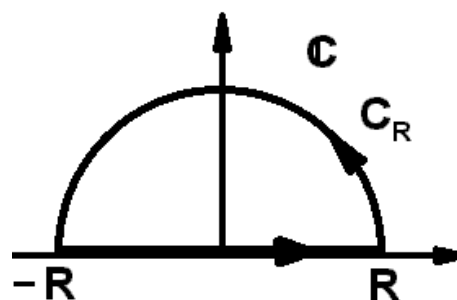
11.2 Berechnung bestimmter Integrale — Calculer des intégrales définies

Zur Methode

Sei $f(z)$ holomorph, z.B. für $\Im(z) \geq 0$ (obere Halbebene H) mit Ausnahme der Punkte $z_1, z_2, \dots, z_n \in H$. Es gelte dort zudem $|z \cdot f(z)| \rightarrow 0$ für $z \rightarrow \infty$. (D.h. $|f(z)|$ wächst schwächer als $|z|$.) Dann gilt wegen der Abschätzungsformel von Cauchy für Halbkreisurven C_H in H um den Ursprung O mit Radius R :

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_H} f(z) dz \right| &\leq \int_{C_H} |f(z)| |dz| \leq M \cdot L = M \cdot R \cdot \pi = \underbrace{\max_{\substack{z \in C_H \\ \rightarrow 0, |z| \rightarrow \infty}} f(z)} \cdot R \cdot \pi \rightarrow 0. \\ &\leadsto \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx}_{z=x \in \mathbb{R}} + \underbrace{\int_{C_H} f(z) dz}_{=0} = \oint_{\partial K} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) \\ &\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Residuensatzes gelingt nun die Berechnung von reellen Integralen, deren direkte Integration im Reellen oft nicht möglich ist. (Das geschieht jetzt via komplexe Wege, Veranschaulichung der Idee vergleiche nebenstehende Skizze.)



Beispiele von Resultaten

Leider zeigt es sich, dass die Berechnung praktischer Beispiele oft Seiten füllt. Daher sei für die Umsetzung auf die Literatur verwiesen, z.B. auf die von François Fricker verfasste Ausgabe der Vorlesung „Einführung in die Funktionentheorie“ von Prof. Heinz Huber.

Einige mit der Residuenmethode gewonnene Resultate seien hier angefügt:

1. Sei R eine rationale Funktion der reellen Funktionen $\sin(t)$ und $\cos(t) \leadsto R(\sin(t), \cos(t))$. Daraus lassen sich folgende Formeln gewinnen:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sin^4(t) + \cos^4(t)} = 2\pi \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (\sin(t))^{2n} dt = \frac{\pi}{2^{2n-1}} \binom{2n}{n}$$

2. Seien $P(x)$ und $Q(x)$ reelle Polynome in x . Wie oben erwähnt können wir nun über grosse Halbkreise integrieren und verwenden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{P(x)}{Q(x)} dx.$$

Sei nun $\text{pgrad}(Q) \geq 2 + \text{pgrad}(P)$. Nun lässt sich herleiten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im}(z_k) > 0} \text{Res}_{z=z_k} \frac{P(z)}{Q(z)}$$

Damit kann man z.B. die folgenden Formeln gewinnen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}}{x^{2n} + 1} dx = \frac{\pi}{n} (\sin(\frac{2m+1}{2n} \pi))^{-1}$$

3. Sei $P(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0$, $Q(z) = z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0$ ($b_n = 1$). Sei dabei $n > m$ und $Q(t) \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$. Sei weiter $\lambda \in \mathbb{R}$. Damit lässt sich errechnen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} \cdot e^{i\lambda t} dt = 2\pi i \cdot \sum_{\text{Im}(z_k) > 0} (\text{Res}_{z=z_k} \frac{P(z)}{Q(z)} \cdot e^{i\lambda z})$$

Sei $\forall_k : |a_k| < C$, $|b_k| < C \leadsto C \in \mathbb{R}^+$. Weiter kann man für $a < -2(C+1)$ und $b > 2(C+1)$ abschätzen ($a \in \mathbb{R}^-$, $b \in \mathbb{R}^+$):

$$|\int_a^b \frac{P(t)}{Q(t)} \cdot e^{i\lambda t} dt - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} \cdot e^{i\lambda t} dt| \leq \frac{4C}{\lambda} \cdot (\frac{1}{|a|} + \frac{1}{b})$$

Z.B. lässt sich damit das folgende Integral berechnen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda t}}{t^4 + 1} dt = \pi \cdot e^{|\lambda| \frac{-\sqrt{2}}{2}} \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} |\lambda|)$$

In Real- und iMaginäranteil aufgespalten ergibt das:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\lambda t)}{t^4 + 1} dt = \pi \cdot e^{|\lambda| \frac{-\sqrt{2}}{2}} \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} |\lambda|)$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{t^4 + 1} dt = 0$$

Die letzte Gleichung ist trivial (ungerade Funktion).

4. Mit der Residuenmethode kann man nun auch die folgenden **Fresnelschen Integrale** berechnen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2(t) dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$



Kapitel • Chapitre 12

Anhang 3 — Annexe 3

12.1 Hinweise – Indications

12.1.1 Häufig verwendete Abkürzungen – Abréviations fréquemment utilisées

Vor. • *Hyp.*

Beh. • *Thèse*

Bew. • *Pre.*

Voraussetzung • *Hypothèse*

Behauptung • *Thèse*

Beweis • *Preuve*

12.1.2 Literatur — Littérature

Hier eine kleine Auswahl, die jeweils den grössten Teil des gesamten Stoffes abdeckt:

Leupold u.a., Mathematik 1, 2

Swobowsky, Analyse

Swobowsky, Calculus

Glyn James, Modern Engineering Mathematics,

Advanced Modern Engineering Mathematics

• *Voilà un choix limité qui concerne la plus grande partie de la matière:*

Leupold u.a., Mathematik 1, 2

Swobowsky, Analyse

Swobowsky, Calculus

Glyn James, Modern Engineering Mathematics,

Advanced Modern Engineering Mathematics

Ende • Fin