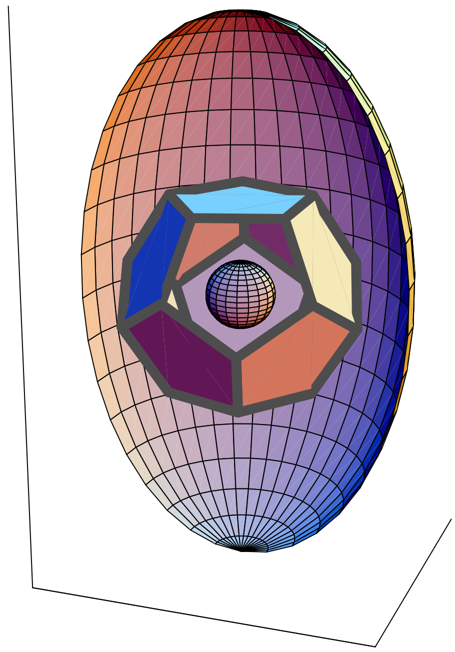
Script ◇ Math ◇ Arch
◇ Grundlagen ◇ Übungen ◇
◇ kurz & bündig ◇



Scripta bilingua

von

Rolf Wirz

Berner Fachhochschule BFH ◇ HSB und HTI

V.1.0.5 d / 26. Oktober 2006

WIR/WinXP/KursArchUebBachelor.tex

Produziert mit LaTeX/PCTEX auf XP.
Einige Graphiken sind auch mit *Mathematica* entstanden.

Das ursprüngliche Zielpublikum dieser Materialsammlung waren Studierende aus dem Fachbereich Architektur der Berner Fachhochschule. Der vorhandene Rahmen war sehr begrenzt: 8 Lektionen pro Jahr. Gewisse Teile sind auch für den übrigen Bausektor von Interesse.

Arithmetik und Geometrie geben die Wahrheit über die Dinge . . .

. . . Lasst keinen meine Werke lesen, der nicht Mathematiker ist . . .

Leonardo da Vinci

Adressen:

Berner Fachhochschule
Hochschule für Technik und Informatik HTI sowie Bau HSB
Hochschule für Technik und Informatik Biel, früher Ingenieurschule Biel)
Quellgasse 21
Postfach 1180
CH-2501 Biel-Bienne
Tel. (..41) (0)32 / 3216 111

HTA Burgdorf
Pestalozzistrasse 20
3400 Burgdorf/BE
Tel. 034 426 42 30

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Organisatorisches bei Bedarf

Kurze Übersicht

1. Organisation, Rahmen
2. Stoff
3. Ziel, Weg, Methoden, Feedback, Team
4. Übungen, Selbststudium
5. Lerntechnik, Arbeitstechnik, Selfmanagement
6. Rechte und Pflichten des Studenten und der Schule
7. Prinzipien, Grundsätze
8. Rechner, Computer, Mathematiksoftware
9. Semesterorganisation Mathematik (Anzahl Noten, Prüfungsreglement, Prüfungsplan, Prüfungsrahmen, erlaubte Unterlagen, formale Anforderungen, Benotungskriterien, Benotung der Übungen und Projekte, Arbeitsnachweismappe, Klassensprecher, Klassenbetreuer, Kopierchef, Sprechstunden)
10. Hilfsmittel (Bibliothek, Taschenrechner, Mathematiksoftware, Literatur)
11. Zeitplanung
12. Einführung: Über das Wesen der Mathematik
    (a) Beispielhafte Beweise
    (b) Wieso beweisen?
    (c) Modell und Wirklichkeit
    (d) Geschichtlicher Rahmen und Auftrag

Kapitel 2

Kurs 1 (1. Jahr)

2.1 ◇ Eintrittstest ◇ Math. ◇ Arch. ◇

2.1.1 ◇ Eintrittstest ◇ Math. ◇ Arch. ◇ Entscheid . . . . ◇

Name: ______________________, ______________________ Datum: ______________________

Ich möchte sowieso den Stützkurs besuchen und verzichte daher auf diesen Test: ◯

Hinweis: Der Stützkurs zielt auf das Niveau der technischen Berufsmatur. Am Semesterende findet **für alle** Studierenden des Moduls „Gestalten und Modellieren“ ein **Abschlusstest in Mathematik** statt, der im Rahmen des für den Stützkurs anfallenden Aufwandes anteilmässig zur **Modulnote beiträgt**. Studierende des genannten Moduls, welche vom Stützkurs befreit werden, machen diesen Schlusstest ebenfalls. Alle diese Studierende haben heute schon automatisch die Verrechnungsnote 1 eingetragen. Diese Verrechnungsnote kann durch den Abschlusstest nach eigenem Ermessen verbessert werden. Andernfalls bleibt sie 1.

Befreiung vom Stützkurs: Dieser Eintrittstest ergibt die Grundlage für den Entscheid betreffend Befreiung vom Sützkurs: Wer sehr gute Resultate erzielt, bekommt vom Dozenten den Vorschlag zur Befreiung. Der bzw. die Studierende muss auf dieser Grundlage über die Nichtteilnahme am Unterricht selbst entscheiden. Wer vom Dozenten keine Empfehlung zur Befreiung bekommt und mit ihm auch keine persönlichen Abmachungen betr. Unterrichtsbesuch getroffen hat, gilt für die Schlussprüfung als abgemeldet. Die Note bleibt damit 1 (Diese Anordnung ist Voraussetzung für eine geordnete Durchführung eines Stützkurses.)

Testpraxis: Bei den nachstehenden Fragen werden für richtige Ankreuzungen positive Punkte erteilt und für falsche Ankreuzungen negative Punkte. Nach dem gleichen Muster werden die Punkte bei selbst berechneten Resultaten erteilt.

2.1.2 ◇ Zur Orientierung: Kursunterlagen Stützkurs ◇

Als Unterlagen sowie Studienliteratur für den Stützkurs werden die für die BMS geschaffenen und anerkannten Werke von Peter Frommer/ Kurt Studer verwendet:

1. Peter Frommer/ Kurt Studer: Mathematik für Mittelschulen, Algebra, Sauerländer-Verlag 2005, ISBN 3-0345-0169-2
   (Zugehörige Lösungen: ISBN 3-0345-0170-6)

2. Peter Frommer/ Kurt Studer: Mathematik für Mittelschulen, Geometrie, Sauerländer-Verlag 2006, ISBN-10: 3-0345-0034-3 / ISBN-13: 978-3-0345-0034-0
   Zugehörige Lösungen: ISBN-10: 3-0345-0150-1 / ISBN-13: 978-3-0345-0150-7

Literaturliste siehe unter: *http://rowicus.ch/Wir/TutoringCoaching/LiteraturAktuell.html*
(**Diese Internet–Adresse bitte notieren!**)

2.1.3 ◇ Beispiele zu Beantwortung der Testfragen ◇

Hier einige Beispiele:

1. $\otimes$ $3 + 4 = 7$ (Aussage **richtig**, Antwort: **Kreuz** im Kreislein!)
2. $\bigcirc$ $3 + 4 = 2$ (Aussage **falsch**, **kein Kreuz** anbringen!)
3. $\otimes$ $3^2 + 4^2 = 5^2$ (Aussage richtig, Kreuz!)
4. $\bigcirc$ $3^2 + 4^2 \neq 5^2$ (Aussage falsch, kein Kreuz!)

2.1.4 ◇ Testfragen Eintrittstest Architektur ◇

Kreuze die richtigen Aussagen so wie in den obigen Beispielen im jeweiligen Kringel resp. Kreislein an: (Korrektur mit Schablone $\leadsto$ Kreuz in den Kreis setzen!!!)

Die Testfragen werden aus organisatorischen Gründen nicht herausgegeben.

Der Dozent gibt den Studierenden im Anschluss an den Test gerne mündlich zu speziellen Anliegen Auskunft.

%

⊘ **Notizen:**

WIR1

Wird erst bei der Korrektur ausgefüllt:

Anzahl Kreuze:.........

Richtige Kreuze:.........

Falsche Kreuze:.........

2.2 Bemerkungen zu Zahlendarstellung in Computern, Datenformaten und Vektorgrundlagen

---

Nach den Grundlagen des ECTS–Systems muss man bei uns auf eine Unterrichtslektion ca. eine bis vier Stunden Selbststudium rechnen. Damit sind Übungen, eigenständige Erarbeitung von Teilen des Stoffes, Prüfungsvorbereitungen, Arbeit mit Computerprogrammen u.s.w. gemeint. (1 ECTS entspricht 30 Stunden Arbeit. Bei 7 Lektionen z.B. entstehen so pro Lektion zusätzlich drei bis dreieinhalb Stunden Arbeit.)

Aufgabe: Bearbeite dieses Blatt 1, indem du dir dafür einen Studienplan bis zur nächsten Lektion machst. Halte diesen Studienplan dann auch ein.

Wichtig: Die Lösungen der folgenden Aufgaben sind aufzubewahren und an die Schlussprüfung mitzubringen. Sie werden da gebraucht!

1. Stoffgruppe 1: Zahlendarstellung in Computern, Speicheraufwand, p-adische Zahlensysteme. . .

   (a) Ein heute üblicher Computer speichert die Daten intern im Arbeitsspecher flüchtig durch Schalterstellungen (Transistoren als Schalter verwendet) oder in Festspeichern (Festplatten und anderen Speichermedien, z.B. durch Magnetisierung von kleinen Bereichen, durch Lasermarkierungen u.s.w.). Dadurch sind jeweils zwei Zustände möglich: „Strom fliesst oder nicht“, „magnetisiert oder nicht“ u.s.w.. Diese Zustände kann man durch die Zahlen 0 und 1 symbolisieren. Damit ist eine Übersetzung der physikalischen Situation in Zahlen möglich. Wegen den beiden möglichen Ziffern kommt hier das Dualzahlensystem (Binärsystem) im Gegensatz zum üblichen Dezimalsystem zur Anwendung (Positionssysteme, Ziffern erhalten ihren Wert durch ihre Position).
   Beispiele:

   $$\begin{aligned}54362 &= 5\cdot 10^5+4\cdot 10^3+3\cdot 10^2+6\cdot 10^1+2\cdot 10^0\\ &= 1\cdot 2^{15}+1\cdot 2^{14}+0\cdot 2^{13}+1\cdot 2^{12}+0\cdot 2^{11}+1\cdot 2^{10}+0\cdot 2^9+0\cdot 2^8+0\cdot 2^7+1\cdot 2^6\\ &\qquad +0\cdot 2^5+1\cdot 2^4+1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+1\cdot 2^1+0\cdot 2^0 = 1101010001011010_2\end{aligned}$$

   $$1.3 = 1\cdot 10^0+3\cdot 10^{-1} = 1\cdot 2^0+0\cdot 2^{-1}+1\cdot 2^{-2}+\ldots = 1.010011001100110011_2$$

   Ein Speicherplaz im Computer, der eine der beiden Ziffern 0 oder 1 aufnehmen kann, nennen wir **Bit**. In 8 Bits können wir daher $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 2^8 = 256$ verschiedene Schriftzeichen abspeichern (ASCII-System). Um die Ziffern 0, 1 bis 9 mit Vorzeichen und eventuell den Dezimalpunkt abzuspeichern genügen 4 Bits, was dann $2^6 = 16$ Speichermöglichkeiten entpricht. 4 Bits nennen wir ein **Halbbyte**, 8 Bits ein **Byte**. In 2 Bytes haben wir 65536 Speichermöglichkeiten, etwa die ganzen Zahlen von -32767 bis 32767 (Datentyp Integer in diversen Programmiersprachen). Für reelle Gleitkommezahlen (Datentyp Real) werden oft 8 Bytes, d.h. 16 Halbbytes verwendet, was dann etwa 15 Ziffern Platz bietet. Wichtig sind diese Überlegungen hier für die Speicherung grosser grahisch erzeugter Datenmengen, etwa bei Fotos und zum Verständnis der verschiedenen Graphikformate.

   (b) In einer **Pixelgraphik** (z.B. Photo) werden zu jedem Pixel in der formatabhängigen Art Farbwerte abgespeichert, was normalerweise zu sehr grossen Datenmengen führt, die beim Übermitteln (z.B. Internet) oft unbrauchbar lange Übermittlungszeiten verursachen. Daher sind Kenntnisse in den einzelnen Graphikformaten wichtig. Im Gegensatz zur Pixelgraphik werden in der **Vektorgraphik** nicht Pixel, sondern Rechenanweisungen zur Berechnung der vorhandenen Kurven abgespeichert, was viel weniger Platz benötigt. Vektorgraphiken werden dann durch Vektoroperationen, Kurvenberechnungen u.s.w. manipuliert. Bei den Pixelgraphiken dagegen kommen Mengenoperationen zur Anwendung.

(c) Wichtig beim Speicherplatzbedarf sind die zur Anwendung kommenden Farbmodelle, z.B.

i. **HSV** (**„Hue“** d.h. Farbe (eine Zahl für die Farbe). „Saturation“ d.h. Sättigung, „Value“ d.h. Wert. „Value“ wird auch manchmal in der bezeichnerenden Weise „Brightness“ d.h. Helligkeit genannt, das Farbmodell heißt dann entsprechend HSB).

ii. **RGB** (Red, Gree, Blue). Bildschirm! Jeder der drei Farbanteile wird durch eine Zahl (Intensitätsstufe) festgelegt (z.B. 8 Bits).

iii. **CMYK** (Cyan, Magenta, Yellow, Schwarz als Schlüsselfarbe (Key)). Jeder er Anteile wird wiederum durch eine Zahl definiert. Dieses System ist wichtig in der Drucktechnik, da mit diesen Farben (Cyan (spezielles Blau), Magenta (spezielles Rot), Yellow (spezielles Gelb), Schwarz (spezielles Schwarz) gegenüber von Weiss) die besten Ergebnisse erzeugt werden können.

(d) Beispiel zur Grösse einer Pixelgraphik:

Gegeben sei ein **BMP**–Bild (RGB) mit 1’024 mal 768 = 786’432 Bildpunkte (Pixel, ehemals etwa VGA–Bildschirm). 1’024 mal 768 ergibt 786’432 Bildpunkte (Pixel). Im RGB–Modell mit 8 Bit für die Farbe Rot ($2^8 = 256$ Intensitätsstufen), 8 Bit für die Farbe Grün und 8 Bit für die Farbe Blau ergibt das $8 + 8 + 8 = 24$ notwendige Bits, also $2^{24} = 16'777'216$ verschiedene Farben. Der Speicherbedarf ist dann mindestens die Pixelzahl 786432 mal 24, d.h. $786432 \cdot 24 = 18874368$ Bit, was 2359296 Bytes oder 2.304 kByte resp. 2.25 MByte entspricht. Also: Achtung vor zu grossen Bildern!
(2^8 Bit sind ein Byte, $2^10 = 1024$ Bytes sind ein kByte u.s.w., denn bei der Speicherverwaltung zählt das Dualsystem. 786’432 mal 24 Bit ergibt 18’874’368 Bit Speicherbedarf. 18’874’368 Bit $\hat{=}$ 2’359’296 Byte = 2’304kByte = 2.25MByte.

Beim **JPEG**–Format (internettauglich) erfolgt eine Komprimierung, indem Pixelmengen mit gleichen Farben zusammengefasst werden. Die Farbspeicherung wird dadurch kleiner. Doch Achtung vor der Veränderung der Pixelzahl (d.h. bei einer Grössenveränderung des Bildes!).

Beim **GIF**–Format (internettauglich) wird die Anzahl Farben auf 256 beschränkt, was die meisten Leute sowieso nicht merken. (Achtung Patentschutz!)

Beim **TIFF**–Format kommt das Farbmodell CMYK zur Anwendung. In diesem Format ist eine verlustfreie Komprimierung möglich.

Weitere Formate siehe Literatur.

(e) **Aufgabe:** Beschaffe dir im Internet Literatur zu den Farbmodellen und Komprimierungen und schreibe eine Zusammenfassung.

Link 1:

`http://www.smarttrain.at/reframe/kompression_frame.htm`

Link 2:

`http://goethe.ira.uka.de/seminare/redundanz/`

Link 3: Selber suchen.

2. Vektorrechnung:

   (a) Schreibe eine Zusammenfassung über Vektorrechnung Teil 1 (Schema: Begriffe, Beziehungen, Anwendungsbeispiele). Inhalt: Stoffbereich Vektorbegriff, Addition, Multiplikation mit Skalar, Gesetze, lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit, Basis, Dimension, Darstellung von Vektoren in Koordinatensystemen, Länge, Rechengesetze in Koordinatensystemen. Link z.B.

   `http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html   Skript Algebra`

   oder eigene Literatur.

   (b) Deute ein gefärbtes Pixel aus einer Pixelgraphik als Vektor. Welche Dimension ist bei dieser Betrachtung angebracht?

   (c) Zeichne in der Darstellungsweise einer Isometrie (Falschperspektive) einen Würfel mit einer Ecke im Punkte $A(3;2;1)$. Ein Kantenvektor ist $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Ein zweiter Kantenvektor hat die Richtung von $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$. Ein drittet Kantenvektor steht natürlich senkrecht auf den ersten beiden und hat die Richtung so, dass die erste Koordinate negativ wird.
   Zeichne einen zweiten Würfel, den man erhält durch Verschiebung des ersten Würfels um $\vec{v_1}$ plus den Raumdiagonalenvektor des Würfels durch A. Mache im Bild die jeweiligen vorderen Flächen sichtbar.
   Zeichne einen dritten Würfel, der wie folgt entsteht: Interpretiere die drei Kantenvektoren als Basisvektoren eines neuen Koordinatensystems. Drehe den Würfel dann um 120^o in der Richtung des Gegenuhrzeigersinns im neuen Koordinatensystem um $\vec{v_1}$ und zeichne den Bildwürfel. Falls du diese Teilaufgabe noch nicht lösen kannst, so vertage dies auf später — oder frage bei Gelegenheit den Dozenten.

2.3 Das Problem der Streckungen, Translationen und Drehungen von Punkten und Vektoren

---

Einen Vektor um einen Faktor $\lambda \in \mathbb{R}$ strecken heisst, dass man den zugehörigen Pfeil oder den damit gegebenen Ortsvektor um diesen Faktor zu strecken hat. So ist $-3\,\vec{v}$ dann 3 mal so lang wie $\vec{v}$ und entgegengesetzt gerichtet.

Eine Verschiebung oder Translation eines Vektors $\vec{v}$ um einen Vektor $\vec{a}$ bedeutet, dass man mit der Vektoraddition $\vec{w} = \vec{v}+\vec{a}$ einen neuen Vektor $\vec{w}$ bestimmt. Dabei werden die Koordinaten von $\vec{v}$ und $\vec{a}$ addiert.

In der Ebene kann man einen Punkt oder einen Ortsvektor eindeutig mit einen gegebenen Winkel um den Ursprung drehen. Im Raum ist das aber anders: Eine Drehung im Raum muss durch eine Drehachse festgelegt werden. Eine Achse ist durch zwei Punkte gegeben.

1. Drehungen: Wir projizieren den dreidimensionalen Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ in eine der drei Grundebenen und erhalten dort im Zweidimensionalen: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$. Diese Vektoren kann man z.B. um den Ursprung drehen. Erst studieren wir die Drehungen an einfachsten Beispielen:
   (a) Drehen wir $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ um 30^o oder $\frac{\pi}{6}$ im Gegenuhrzeigersinn, so erhalten wir den Vektor $\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.866025 \\ 0.5 \end{pmatrix}$. Drehen wir hingegen $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ um diesen Winkel, so finden wir $\begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.866025 \end{pmatrix}$. Drehen wir die Summe $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, so erhalten wir die Summe $\begin{pmatrix} \sqrt{3}-1/2 \\ 1/2+\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$.
   (b) Allgemein ist das Resultat einer Drehung des Vektors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ um α der Vektor $\begin{pmatrix} \cos(\alpha)\,x - sin(\alpha)\,y \\ \sin(\alpha)\,x + cos(\alpha)\,y \end{pmatrix}$
   (c) Drehen wir daher die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ um 30^o oder $\frac{\pi}{6}$ im Gegenuhrzeigersinn, so erhalten wir näherungsweise die Vektoren $\begin{pmatrix} -0.767949 \\ 5.33013 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1.33013 \\ 7.69615 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1.26795 \\ 6.19615 \end{pmatrix}$
2. Aufgabe: Mache dir von der Sache eine Skizze (Kontrolle!). Ist alles so richtig?
3. Drehe den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ um die z–Achse um 60^o, das Resultat dann um die x–Achse um 45^o und das neue Resultat wieder um die z–Achse um -60^o. Was bekommt man? Kontrolliere das Resultat mit Hilfe einer Skizze (Selbstkontrolle ist in der Praxis wichtig!).
4. Halte in einer Zusammenfassung deine Erkenntnisse über Drehungen fest.
5. Suche im Werk „Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik“ in den Teilen 1.1 bis 1.3 Anwendungen für deinen Beruf, die dir persönlich wichtig sind und halte diese in einer Zusammenfassung fest.

2.4 Zerlegung von Vektoren, Anwendung des Skalarprodukts

---

1. **Rechenregeln für Vektoren** — (wie heissen sie?):

   (a) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

   (b) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

   (c) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

   (d) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

   (e) $\lambda\,(\mu\,\vec{a}) = (\lambda\,\mu)\,\vec{a}$

   (f) $\lambda\,(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\,\vec{a} + \lambda\,\vec{b}$

2. **Vektorlänge** (3-dimensional):

   $$l = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

   Aufgabe:

   Gegeben: $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $|\vec{v}| = ?$

3. **Aufgabe:**

   Gegeben sind die Kräfte $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ sowie ein Dreibein aus Metall mit den Beinrichtungen (Ortsvektoren) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Kräfte werden auf das Dreibein dort übertragen, wo die Beine zusammengschweisst sind. (Skizze!)
   Berechne die Längen der Komponenten der Resultierenden $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ in Richtung der Beine.

Rückseite!

4. **Skalarprodukt in einem Orthonormalsystem** im $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_3 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \,\cos(\varphi) = |\vec{a}| \cdot b_a$$

   b_a ist die Länge der Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$.

5. **Regeln für das Skalarprodukt** — (wie heissen sie?):

   (a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

   (b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \;\Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

   (c) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

   (d) $\lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b}$

6. (a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \;\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \varphi = ?, \;\; b_a = ?$

   (b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \;\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ z \end{pmatrix}, \;\; b_a = 2 \;\Rightarrow\; z = ?$

7. Gegeben ist ein Würfel im Raum mit der Kantenlänge 1. Gesucht sind die Projektions-längen der Kantenvektoren auf eine der Raumdiagonalen. (Skizze, Rechnung!)

8. Gegeben ist ein reguläres Tetraeder T_1 im Raum. Aus den Seitenmittelpunkten wird wieder ein Tetraeder T_2 gebildet. Von jeder Ecke von T_1 zu den nächstgelegenen Ecken von T_2 sind drei Linien möglich. Diese werden gezogen. So entstehen vier „Zacken“, welche mit T_2 einen Stern bilden. Berechne die Zackenhöhe im Verhältnis zur Höhe von T_1 sowie das Sternvolumen im Verhältnis zum Volumen von T_1.

2.5 Flächenprodukt, Vektorprodukt

---

1. **Senkrecht stellen eines ebenen Vektors** — (nachlesen in der Literatur):

   (a) Ablesbar an einer Skizze: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \vec{a}_\perp = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$
   (Vektoren und Koordinatenachsen bilden kongruente Dreiecke.)

   (b) **Bsp.:** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \vec{a}_\perp = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Löse eigene ähnliche Beispiele und kontrolliere sie mittels einer Skizze.

2. **Flächenprodukt** — (nachlesen in der Literatur):

   (a) Mit Hilfe des Skalarprodukts sieht man: Die durch zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bestimmte Parallelogrammfläche berechnet sich
   $A = |\vec{a}| \cdot h = |\vec{a}_\perp| \cdot |\vec{b}_{\vec{a}_\perp}| = \vec{a}_\perp \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1\, b_2 - a_2\, b_1 := [\vec{a}, \vec{b}]$

   (b) **Bsp.:** $A = [\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}] = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$. Löse eigene ähnliche Beispiele.

3. **Vektorprodukt** — (nachlesen in der Literatur):

   Das Vektorprodukt definieren wir für dreidimensionale Vektoren (im Raum). Zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist das Vektorprodukt $\vec{n} := \vec{a} \times \vec{b}$ gegeben durch einen Vektor $\vec{n}$, welcher senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht. Für die Orientierung gilt die Korkzieherregel: Von $\vec{a}$ nach $\vec{b}$ drehen. Dann zeigt $\vec{n}$ in die Bewegungsrichtung des Korkziehers (Rechtsschraube). Die Länge von $\vec{n}$ ist gleich dem Flächeninhalt des durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bestimmten Parallelogramms.

   Berechnung: $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} := \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2\, b_3 - a_3\, b_2 \\ a_3\, b_1 - a_1\, b_3 \\ a_1\, b_2 - a_2\, b_1 \end{pmatrix}$

   Wie man sieht, sind die Komponenten Flächenprodukte der in die Grundebenen proji-zierten Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

   $A = |\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$. Löse eigene ähnliche Beispiele.

Rückseite!

4. **Bsp.:** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \ \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \ A = 3\sqrt{6} \approx 7.34847$

5. **Regeln für das Flächen- und Vektorprodukt** — (nachlesen in der Literatur):
   (a) $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$
   (b) $[\vec{\lambda a}, \vec{b}] = \lambda\, [\vec{a}, \vec{b}]$
   (c) $[\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{c}]$
   (d) $[\vec{a}, \vec{b}] = 0 \ \Leftrightarrow \vec{a} \| \vec{b}$
   (e) $[\vec{a}, \vec{b}] = \pm|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \ \Rightarrow \ \vec{a} \perp \vec{b}$
   (f) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
   (g) $\overrightarrow{\lambda\, a} \times \vec{b} = \lambda\, \vec{a} \times \vec{b}$
   (h) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
   (i) $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \ \Leftrightarrow \vec{a} \| \vec{b}$

6. $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OB} = \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$. Berechne die Distanz von B zu $\overline{OA}$

   Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$

   Länge des Normalenvektors = Parallelogramminhalt:
   $F = |\vec{n}| = \sqrt{(-1)^2 + 7^2 + 9^2} = \sqrt{131} \approx 11.4455$

   $F = |\vec{a}| \cdot h, \ \ |\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6} \approx 2.44949 \ \Rightarrow \ h = \frac{F}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{131}}{\sqrt{6}} \approx 4.67262$

   Löse eigene ähnliche Beispiele.

7. Suche in der Literatur gelöste Beispiele zum Flächen- und Vektorprodukt. Versuche sie zu verstehen. Notiere jede Beispiele, welche besonders interessant scheinen.

2.6 Spatprodukt, Abstände

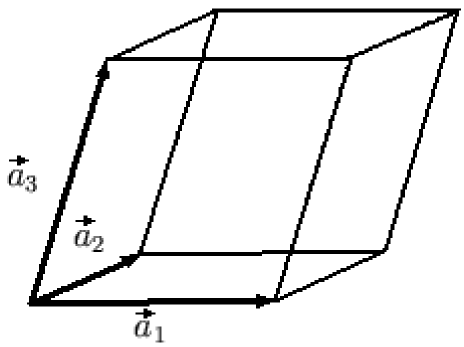
---

1. **Spatprodoukt** — (nachlesen in der Literatur):

   (a) Ein durch durch vier Punkte im Raum, im zu betrachtenden Fall daher durch den Ursprung und drei linear unabhängige Vektoren gebildetes „räumliches Parallelogramm“ nennen wir

   Spat oder **Parallelepiped**.

   Im entsprechenden 2–dimensionalen Fall hätten wir es mit einem Parallelogramm zu tun.



   (b) Das Spatvolumen erhalten wir aus Grundflächeninhalt A mal Höhe h:
   $V = A \cdot h = |\vec{a}_1 \times \vec{a}_2| \cdot \vec{a}_3$ (Vektor– und Skalarprodukt).
   Dabei ist $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \vec{n}$ der Normalenvektor auf $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ mit $|\vec{n}| = A$.
   $\leadsto\; V = |\vec{n}| \cdot h = |\vec{n}| \cdot |(\vec{a}_3)_{\vec{n}}| = \vec{n} \cdot \vec{a}_3 = (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \vec{a}_3$.

   Dieses Volumen kann auch negativ sein, denn es ist ein Skalarprodukt ($\vec{n} \cdot \vec{a}_3$). Vertauscht man die Reihenfolge der Vektoren, so ändert sich eventuell der Umlaufsinn dieser Vektoren. Oder man beginnt mit anderen zwei dieser drei Vektoren um die Grundfläche A zu definieren. $|V|$ kann daher damit nicht ändern. Bloss das Vor-zeichen von V könnte wechseln.

   (c) Zur Berechnung des Spatprodukts $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} := [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ kann man die Regel von **Sarrus** verwenden:

$$\left|\begin{array}{ccccccccc} a_1 & & b_1 & & c_1 & & a_1 & & b_1 \\ & \searrow & & \nearrow\!\!\!\!\searrow & & \nearrow\!\!\!\!\searrow & & \nearrow & \\ a_2 & & b_2 & & c_2 & & a_2 & & b_2 \\ & \nearrow & & \nearrow\!\!\!\!\searrow & & \nearrow\!\!\!\!\searrow & & \searrow & \\ a_3 & & b_3 & & c_3 & & a_3 & & b_3 \end{array}\right| \quad \text{mit} \quad \overset{+}{\searrow}, \quad \overset{-}{\nearrow}$$

   (d) **Bsp.:** $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = 1 \cdot 5 \cdot 0 + 4 \cdot 8 \cdot 3 + 7 \cdot 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 6 \cdot 8 \cdot 1 - 0 \cdot 2 \cdot 4$

$$= 27$$

2. **Abstandsberechnungen** — (nachlesen in der Literatur):

   (a) Durch vier Punkte O, A, B, C sind drei Vektoren $\overrightarrow{OA}= \vec{a}, \overrightarrow{OB}= \vec{b}, \overrightarrow{OC}= \vec{c}$ und damit ein Spat gegeben. Will man den Abstand des Punktes C von der Fläche (O, A, B) wissen, so kann man die Formel $V = A \cdot h \;\Rightarrow\; h = \dfrac{V}{A} = \dfrac{[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$ benutzen.

   (b) In obigem Beispiel erhält man damit $h = 3\sqrt{\dfrac{3}{2}} \approx 3.67423$

3. **Regeln** — (nachlesen in der Literatur):

   Die Regeln für das Spatprodukt kann man aus den Regeln für das Vektorprodukt und das Skalarprodukt gewinnen. Sie werden daher hier nicht explizit dargestellt.

   Das Spatprodukt bezeichnet man auch als 3×3–**Determinante**.

Möglichkeiten für kostenlose Literatur:

```
Beispiel: Vektorrechnung im Wikipedia
http://de.wikipedia.org/wiki/Vektorrechnung
http://de.wikipedia.org/wiki/Spatprodukt
http://de.wikipedia.org/wiki/Analytische_Geometrie
http://de.wikipedia.org/wiki/Kategorie:Geometrie
http://de.wikipedia.org/wiki/Kategorie:Lineare_Algebra

Beispiel 2: Differentialrechnung in mathe-online
http://www.mathe-online.at/mathint/anwdiff/i.html
http://www.mathe-online.at/mathint/diff1/i.html
```

2.7 Vektorielle analytische Geometrie: Punkte, Geraden, Ebenen, Kreise, Kugeln Tangenten

---

1. **Punkt, Ortsvektor** — (nachlesen in der Literatur):

   Ein Punkt P kann in einem Koordinatensystem durch seinen Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ gegeben werden. Das ist derjenige Vektor, der durch den Pfeil vom Ursprung O zum Punkt P repräsentiert wird. Beispiel: $\overrightarrow{OP}= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $P = P(1, 2, 3)$. Mache eigene Beispiele.

2. **Parametergleichung der Geraden** — (nachlesen in der Literatur):

   Eine Gerade g ist durch zwei Punkte P_0 und P_1 festgelegt. Daher genügt es, z.B. P_0 als Aufpunkt und $\vec{a} = \overrightarrow{P_0P_1}$ als Richtungsvektor zu verwenden. Jeden weiteren Punkt auf der Geraden erhält man dann, indem man den Richtungsvektor geeignet streckt:
   $\overrightarrow{0P}\ (t) = \overrightarrow{0P_0} + t\ \overrightarrow{P_0P_1} = \overrightarrow{OP_0} + t\,\vec{a}$.
   Beispiel: $\overrightarrow{OP_0}= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{OP}= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ zeigt auf den Punkt $P(-1; 4; -1) \in g$. Mache eigene Beispiele.

3. **Parametergleichung der Ebene** — (nachlesen in der Literatur):

   Eine Ebene Φ ist durch drei Punkte P_0, P_1 und P_2 festgelegt. Daher genügt es, z.B. P_0 als Aufpunkt und $\vec{a} = \overrightarrow{P_0P_1}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{P_0P_2}$ als Richtungsvektoren zu verwenden, $\overrightarrow{P_0P_1} \nparallel \overrightarrow{P_0P_2}$. Jeden weiteren Punkt auf der Ebene erhält man dann, indem man die Richtungsvektoren geeignet streckt:
   $\overrightarrow{0P}\ (\lambda, \mu) = \overrightarrow{0P_0} + \lambda\ \overrightarrow{P_0P_1} + \mu\ \overrightarrow{P_0P_2} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b}$.
   Beispiel: $\overrightarrow{OP_0}= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
   $\Rightarrow \overrightarrow{OP}= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ zeigt auf den Punkt $P(-3; 2; -2) \in \Phi$. Mache eigene Beispiele.

4. **Vektorgleichung des Kreises oder der Kugel** — (nachlesen in der Literatur):

   Ein Kreis oder eine Kuges ist bestimmt durch ihren Mittelpunkt M und den Radius R. Es gilt für alle Punkte P der Peripherie: $\mid \overrightarrow{MP} \mid = R \;\Rightarrow\; \mid \overrightarrow{MP} \mid^2 = \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MP} = R^2 = const.$.
   Damit ist die Vektorgleichung schon gegeben.
   Beispiel: $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad R = 10 \;\Rightarrow\; \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix}$
   $\Rightarrow\; R^2 = 10^2 = 100 = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix} = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2.$
   Liegt ein Punkt auf der Kugel, so muss er obige Gleichung erfüllen. Mache eigene Beispiele.

5. **Koordinatengleichung der Gerade in der Grundebene** — (nachlesen in der Literatur):

   Wir kennen für die Gerade g die Funktionsgleichung: $y = m\,x + b$. Diese lässt sich umformen: $m\,x + (-1)\,y + b = 0$. Die letzte Gleichung wiederum dürfen wir mit irgend einer Zahl ungleich 0 multiplizieren, ohne dass die Gleichung die Gültigkeit verliert: $a\,m\,x + a\,(-1)\,y + a\,b = 0$. Da hier $m = 0$ möglich wäre, wollen wir an Stelle von $a\,(-1)$ allgemeiner $a\,q$ zulassen mit irgend einer Zahl q. Das gibt wieder eine Geradengleichung, denn für $q \neq 0$ können wir daraus wieder die Funktionsgleichung zurückgewinnen. Für $q = 0$ erhalten wir $a\,m\,x + a\,b = 0 \;\Rightarrow\; x = -\frac{b}{m},\; m \neq 0$, denn m und q können nicht gleichzeitig 0 gewählt werden, weil das nur zur Gleichung $b = 0$ fühern würde. $b = 0$ ist aber von allen Punkten erfüllt, also nicht nur von den Punkten auf einer Geraden. Für $q = 0$ erhalten wir wie eben berechnet ein fixes x. y dagegen darf beliebig sein. Das ergibt eine zur x–Achse senkrechte Gerade.
   Wir schreiben nun allgemeiner: $A\,x + B\,y + C = 0$. Diese Gerade schneidet die x–Achse in P_1 mit $x = -\frac{C}{A}$ (y=0) und die y–Achse in P_2 mit $y = -\frac{C}{B}$ (x=0). Daraus berechnet man, dass der Vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ senkrecht auf dem „Koordinatenvektor“ $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ steht ($\perp$, denn das Skalarprodukt wird 0).
   $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ heisst daher „Normalenvektor“ zur Geraden g. Man entnimmt ihn sofort der Gleichung $A\,x + B\,y + C = 0$. Diese Gleichung heisst daher „Koordinatengleichung“. Über die Länge von $\vec{n}$ kann man vorerst nichts sagen. Mache eigene Beispiele.

Möglichkeiten für kostenlose Literatur:

```
Beispiel 1: Vektorrechnung im Wikipedia
http://de.wikipedia.org/wiki/Vektorrechnung
http://de.wikipedia.org/wiki/Spatprodukt
http://de.wikipedia.org/wiki/Analytische_Geometrie
http://de.wikipedia.org/wiki/Kategorie:Geometrie
http://de.wikipedia.org/wiki/Kategorie:Lineare_Algebra

Beispiel 2: Differentialrechnung in mathe-online
http://www.mathe-online.at/mathint/anwdiff/i.html
http://www.mathe-online.at/mathint/diff1/i.html
```

2.8 Vektorielle analytische Geometrie: Die Koordinatengleichung der Ebene

---

1. Analog wie bei der Geraden können wir eine Parametergleichung einer Ebene umformen in eine einzige Gleichung mit drei Unbekannten der Form:

$$\Phi: \; A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$$

Beispiel: $\Phi: \; 7\,x + (-3)\,y + 4\,z + 8 = 0$

Die Koeffizienten einer solchen Gleichung sind nicht fix. Denn wenn man die Gleichung mit irgend einer Zahl $\neq 0$ multipliziert, so entsteht eine neue Gleichung mit unveränderter Lösungsmenge. Beispiel: Multiplikation mit 2 ergibt: $\Phi: \; 14\,x + (-6)\,y + 8\,z + 17 = 0, \;\; x, y, z$ unverändert.

Die Koordinatengleichung einer Ebene kann man erhalten, wenn man die Koordinaten von 3 gegebenen Punkten, welche nicht auf einer Geraden liegen, je einmal in die obige erste Gleichung einsetzt. So entstehen 3 Gleichungen mit den unbekannten Parameter A, B, C, D. Sind die Ortsvektoren der drei Punkte linear abhängig, so liegt der Ursprung in der Ebene. D wird dann $= 0$.
Andernfalls ist $D \neq 0$. Wären dann die Koeffizienten bekannt, so könnte man die Gleichung mit $\frac{1}{D}$ multiplizieren. Dann wird der Koeffizient an der Stelle D gleich 1. Daher kann man im Falle $D \neq 0$ immer $D = 1$ annehmen. Man hat also in jedem Fall jetzt 3 Gleichungen mit nur noch 3 Unbekannten (D ist ja jetzt bekannt). Wenn man diese Unbekannten berechnet, so gewinnt man die Koordinatengleichung.

Im Unterschied zur Koordinatengleichung der Ebene findet man in der Koordinatenglei-chung der Geraden nur zwei Variablen. Im $\mathbb{R}^3$ müsste man für die Festlegung einer Gerade zwie Koordinatengleichungen von Ebenen nehmen (Schnittgebilde). **Bsp.:**

2. $\begin{pmatrix} 2\,x - 3\,y + 4\,z - 6 = 0 \\ -x + y + z + 2 = 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Mögliche Lösung $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\,t \\ -2 + 6\,t \\ t \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2\,x - 3\,y + 4\,z - 6 = 0 \\ -x + y + z + 2 = 0 \\ -2\,x - 3y + z = 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ Lösung } \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{31} \begin{pmatrix} 42 \\ -26 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Im ersten Fall erhält man als Schnittgebilde eine Gerade, im zweiten Fall einen Punkt.

3. Setzt man in $A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$ z.B. die Werte von x und y gleich 0, so erhält man einen Punkt auf der z–Achse mit $z = \dfrac{-D}{C}$. Ebenso erhält man den x–Achsenabschnitt der Ebene $x = \dfrac{-D}{A}$ und den y–Achsenabschnitt $y = \dfrac{-D}{B}$. A, B, C, D haben daher sicher etwas mit Koordinaten zu tun.

4. Wir nennen den Vektor, den man mit den Koordinaten A, B, C bilden kann, jetzt $\vec{n}$. Es gilt also: $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$. Frage: Was hat $\vec{n}$ für eine Bedeutung?

Wir werden Klarheit in dieser Sache bekommen, wenn wir das Skalarprodukt von $\vec{n}$ mit den durch die Achsenabschnitte definierten, zur Ebene parallelen Vektoren $\begin{pmatrix} \frac{D}{A} \\ \frac{-D}{B} \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \frac{D}{A} \\ 0 \\ \frac{-D}{C} \end{pmatrix}$ bilden:

$\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} \frac{D}{A} \\ \frac{-D}{B} \\ 0 \end{pmatrix} = A \cdot \dfrac{D}{A} + B \cdot \dfrac{-D}{B} = D - D + 0 = 0$ und

$$\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} \frac{D}{A} \\ 0 \\ \frac{-D}{C} \end{pmatrix} = A \cdot \frac{D}{A} + 0 + C \cdot \frac{-D}{C} = D - D = 0 \leadsto \ \vec{n} \perp \Phi$$

Resultat: $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ ist immer ein **Normalenvektor** zur Ebene $A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$.

Daher ist die Koordinatengleichung bedeutsam: Man sieht in ihr den Normalenvektor. Will man z.B den Winkel zwischen zwei Ebenen finden, so kann man mit dem Skalarprodukt $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = |\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2| \cdot \cos(\alpha)$ den Winkel α berechnen: $\alpha = \arccos(\dfrac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|})$.

5. Frage: Was ist die Bedeutung von D?. Um diese Bedeutung zu erfassen, normieren wir den Normalenvektor so, dass seine Länge gleich 1 ist: $\vec{n}_{norm} = \dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$. Passen wir die Koeffizienten in der Koordinatengleichung entsprechnend an, so ergibt sich:

$$\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}(A\,x + B\,y + C\,z + D)$$

$$= \frac{A\,x}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + \frac{B\,y}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + \frac{C\,z}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

Man hat daher $\dfrac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} \cdot \vec{x} = \dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\dfrac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Dabei ist das Produk $\dfrac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} \cdot \vec{x} = \dfrac{1}{|\vec{n}|} \cdot |\vec{n}| \cdot |\vec{x}| \cdot \cos(\alpha) = |\vec{x}| \cdot \cos(\alpha)$. Hier ist $|\vec{x}|$ die Länge eines Vektors, der vom Ursprung in die Ebene zeigt. α ist der Winkel zwischen diesem Vektor und dem Normalenvektor. Daher ist $|\vec{x}| \cdot \cos(\alpha) = \pm d = \pm$ Distanz vom Ursprung zur Ebene Φ.

Man erhält daher: Distanz vom Ursprung zur Ebene Φ: $\qquad \pm d = -\dfrac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.
D zusammen mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ trägt also in sich die Distanz der Ebene zum Ursprung. Damit hat man nochmals ein Mittel zur Abstandsberechnung zur Verfügung.

Möglichkeiten für kostenlose Literatur:

```
Beispiel 1: Vektorrechnung im Wikipedia
http://de.wikipedia.org/wiki/Vektorrechnung
http://de.wikipedia.org/wiki/Spatprodukt
http://de.wikipedia.org/wiki/Analytische_Geometrie
http://de.wikipedia.org/wiki/Kategorie:Geometrie
http://de.wikipedia.org/wiki/Kategorie:Lineare_Algebra

Beispiel 2: Differentialrechnung in mathe-online
http://www.mathe-online.at/mathint/anwdiff/i.html
http://www.mathe-online.at/mathint/diff1/i.html
```

2.9 Test

◇ **Test** ◇ ◇ **Version A1a Bu** ◇ **04 05** ◇

Aufgabe 1 **(je 3 Punkte)**

(a) Erkläre den mathematischen Begriff **geometrischer Vektor**. Zeige dazu Beispiele. *Richtlinie bezüglich maximalem Umfang: Ca. eine halbe Seite.*

(b) Erkläre die mathematische Eigenschaft **linear unabhängig** betreffend Vektoren. Zeige dazu Beispiele. *Richtlinie bezüglich maximalem Umfang: Ca. eine halbe Seite.*

Aufgabe 2 **(je 12 Punkte)**

Fasse deine Kenntnisse zum Thema **Geraden– und Ebenengleichungen** zusammen. Erwartet wird eine strukturierte listanartige Übersicht.
Richtlinie bezüglich maximalem Umfang: Ca. 1 – 2 Seiten.

Viel Glück!

Kapitel 3

Kurs 2 (2. Jahr)

3.1 Kurzskript mit Diagrammen zum Zoo der Funktionen

Dieses Kurzskript ist hier aus änderungstechnischen Gründen nicht speziell eingefügt worden. Den Inhalt findet man unter der Adresse:

`http://rowicus.ch/Wir/Scripts/FktZoo.pdf`

Zoo der Funktionen

Plots von einfachen Funktionenserien

Übungen und Selbststudium in Mathematik

Rolf Wirz

Ausgabedatum......

3.2 Funktionen, Kurven und Tangenten

Nach den Grundlagen des ECTS–Systems muss man bei uns auf eine Unterrichtslektion ca. eine bis vier Stunden Selbststudium rechnen. Damit sind Übungen, eigenständige Erarbeitung von Teilen des Stoffes, Prüfungsvorbereitungen, Arbeit mit Computerprogrammen u.s.w. gemeint. (1 ECTS entspricht 30 Stunden Arbeit. Bei 7 Lektionen z.B. entstehen so pro Lektion zusätzlich drei bis dreieinhalb Stunden Arbeit.)

Aufgabe: Bearbeite dieses Blatt 1, indem du dir dafür einen Studienplan bis zur nächsten Lektion machst. Halte diesen Studienplan dann auch ein.

Wichtig: Die Lösungen der folgenden Aufgaben (resp. die Resultate der eigenen Arbeiten) sind aufzubewahren und an die Schlussprüfung mitzubringen. Sie werden da gebraucht!

1 Stoffgruppe 1: Kurven und Tangenten...

(a) Zu einer Funktion $y = f(x)$ definiert man eine zweite Funktion $y' = f'(x) = \frac{d\,f(x)}{d\,x}$, die in jedem Punkt der ursprünglichen Funktion die Tangentensteigung angibt: $f'(x) = \tan(\alpha)$ in $P(x, y)$. Unter „differenzieren der Funktion f“ verstehen wir die Berechnung der Ableitung f'. Die Berechnungsmethoden für f' werden in der Differentialrechnung untersucht. Hier beschränken wir uns auf einfache Resultate.

Beispiele: (Beachte: $x^1 = x,\ \ x^0 = 1$)

$f(x)$	$f'(x)$
$const.$	0
$a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + a_1\,x^1 + a_0\,x^0$	$n\,a_n\,x^{n-1} + (n-1)\,a_{n-1}\,x^{n-2} + \ldots + a_1$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$c_1\,f_1(x) + c_2\,f_2(x)$	$c_1\,f_1'(x) + c_2\,f_2'(x)$
$f_1(x) \cdot f_2(x)$	$f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x)$
$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$	$\frac{f_1'(x) \cdot f_2(x) - f_1(x) \cdot f_2'(x)}{(f_2(x))^2}$
$f_1(f_2(x)) = f_1(z)$	$\frac{d\,f_1(z)}{d\,z} \cdot \frac{d\,f_2(x)}{d\,x},\ \ z = f_2(x)$

(b) Plane eine Zusammenfassung der Regeln mit Beispielen, die du in der Literatur finden kannst (sollte auf die 4. Lektion fertig sein).

2 Übersicht über den „Zoo der elementaren Funktionen“:

Studiere zu den „Zoo der Funktionen“, mit dem du dann arbeiten kannst bei der Lösung von Tangentenproblemen u.s.w..

Mögliche Liste: Konstante Funktionen, lineare Funktionen, quadratische Funktionen, Potenzfunktionen mit beliebigen Exponenten, Exponentialfunktionen, Logarithmusfunktionen, trigonometrische

Funktionen und Umkehrfunktionen, Gaussklammerfunktion, Signumfunktion, Betragsfunktion u.s.w..

Aufgabe: Mache dir eine übersichtliche Zusammenstellung mit solchen Funktionen (Materialbereitstellung). Zu finden sind solche Funktionen z.B. im Skript Analysis. Notiere dir spezielle Eigenschaften und fertige Skizzen der Graphen an.

Link 1:

`http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html`

3 **Denkaufgabe für später:** Auf einer Schraubenlinie (Radius 3, Ganghöhe 1) wird in jedem Punkt aufwärts ein Stück Tangente der Länge 1 gezogen. Skizziere möglichst exakt (Computer!) die Kurve, die durch die Endpunkte der Tangentenstücke entsteht.

3.3 Zum „Zoo der Funktionen“...

Nach den Grundlagen des ECTS–Systems muss man bei uns auf eine Unterrichtslektion ca. eine bis vier Stunden Selbststudium rechnen. Damit sind Übungen, eigenständige Erarbeitung von Teilen des Stoffes, Prüfungsvorbereitungen, Arbeit mit Computerprogrammen u.s.w. gemeint. (1 ECTS entspricht 30 Stunden Arbeit. Bei 7 Lektionen z.B. entstehen so pro Lektion zusätzlich drei bis dreieinhalb Stunden Arbeit.)

Aufgabe: Bearbeite dieses Blatt 2, indem du dir dafür einen Studienplan bis zur nächsten Lektion machst. Halte diesen Studienplan dann auch ein.

Wichtig: Die Lösungen der folgenden Aufgaben (resp. die Resultate der eigenen Arbeiten) sind aufzubewahren und an die Schlussprüfung mitzubringen. Sie werden da gebraucht!

1 Stoffgruppe 2: Zum „Zoo der Funktionen“...

In der angewandten Praxis kommen sehr oft einfache Funktionen $f(x), g(x). \ldots$ zur Anwendung und auch Zusammensetzungen davon. Um damit arbeiten zu können, muss man auch die wichtigsten Eigenschaften kennen. Auch muss man die heute gebräuchlichen Gelichungstyten voneinander zu unterscheiden wissen, damit man damit arbeiten kann. Hier einige (für nur eine Stunde zu viele) Stichworte dazu:

(a) Bestimmungsgleichungen, Funktionsgleichungen, Äquivalenzen, Gleichung als Aussagenlogische Aussage, Wertzuweisung an benannten Speicherplatz, Ungleichungen (quadratische...) u.s.w.
(b) Typen von Bestimmungsgleichungen
(c) Funktionen, Definitionsbereich, Wertebereich, Zahlen: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ Eigenschaften von $\mathbb{R}$
(d) Beispiele, reelle Funktionen: Problematik Bildbereich und Wertebereich
(e) Bsp. $f(n) = \sin(n), n \in \mathbb{N}$
(f) Intervalltypen (offen, abgeschlossen, halboffen, Umgebungen, Rand, unendlich,...)
(g) Problematik von Definitions- und Wertebereichen
(h) Folgen (Funktionen auf $\mathbb{N}$), Gauss-Klammer, Signum, Betrag, Eigenschaften...
(i) Betrag: Eigenschaften
(j) Konstante, lineare Funktion: Warum gibt es eine Gerade? (Mathematische und nicht physikalische Rechtfertigung)
(k) Quadratische Funktion, Kegelschnitte
(l) Potenzfunktionen, Parabeln, Hyperbeln
(m) Anzahl Nullstellen von Polynomen
(n) Pole
(o) Periodische Funktionen
(p) Punktweise und stückweise definierte Funktionen, diskrete Funktionen
(q) Verkettung von Funktionen
(r) Monotone und beschränkte Funktionen
(s) Gerade und ungerade Funktionen
(t) Umkehrabbildung
(u) Transzendente Funktionen wie trigonometrische Funktionen u.s.w.

(v) Eigenschaften von trigonometrischen Funktionen trigonometrische Funktionen

(w) Arcus–Funktionen

(x) Exponentialfkt.

(y) Logarithmus–Funktion

(z) Hyperbolische Funktionen und Areafunktionen

2 Plane eine weitere Zusammenfassung der Eigenschaften mit Beispielen, die du in der Literatur finden kannst (sollte auf die 5. Lektion fertig sein). Wenn die Zeit nicht reicht, so ist die Sache „auszudünnen“.

Link für Skripte (Analysis):

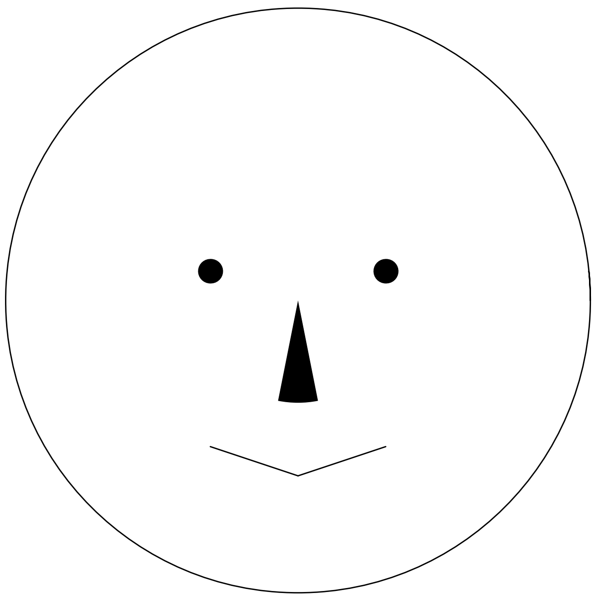
`http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html`

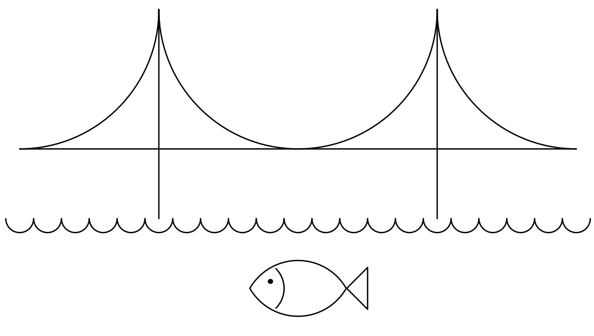
oder

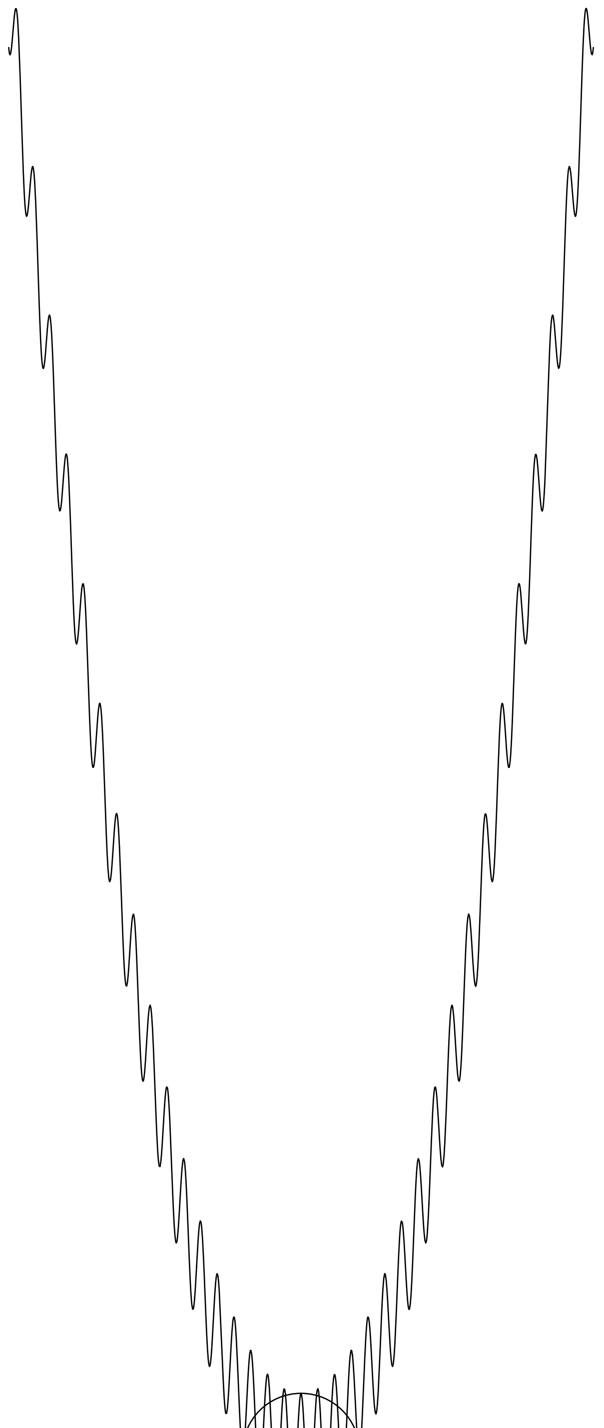
`http://www.rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html`

3.4 Spiel mit Funktionen

3.4.1 Benutze Funktionen, um einfache Zeichnungen zu machen. Hier naive Beispiele:







3.5 Steigungen von Kurventangenten

Die Steigung einer Kurventangente in einem Kurvenpunkt P_0 kann man als Grenzfall der Steigung einer Kurvensehne verstehen, welche durch P_0 geht. Für die Tangentensteigung hat man Formeln entwickelt. Mit ihrer Hilfe kann man die gesuchte Steigung aus der Formel für die Kurve berechnen.

1 Beispiel: Gegeben sei ein Polynom

$$f(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1\, x + a_0.$$

Dann berechnet sich die Steigung $\tan(\alpha)$ an der Stelle x durch

$$f'(x) = n\, a_n\, x^{n-1} + (n-1)\, a_{n-1}\, x^{n-2} + \ldots + a_1 = \tan(\alpha).$$

Die Exponenten werden also einerseits zu Faktoren, und andererseits wird 1 von ihnen subtrahiert.

Aufgabe: Suche Literatur zu diesem Sachverhalt und studiere sie soweit das möglich ist.

2 **Bsp.:** $f(x) = 4\,x^3 - 5\,x^2 + 3\,x - 6 \;\Rightarrow\; \tan(\alpha) = f'(x) = 3 \cdot 4\,x^2 - 2 \cdot 5\,x^1 + 3\,x^0,\;\; x^0 = 1$. An der Stelle $x = 4$ wird damit der Wert $\tan(\alpha) = 155$.

Aufgabe: Mache dazu eigene ähnliche Beispiele.

3 Gegeben ist die Parabel $y = f(x) = x^2$. Für ein fixes $x = x_0$ wird daher $y_0 = x_0^2$. Die Steigung in diesem Punkt ist daher $\tan(\alpha) = 2\,x_0$.
Damit können wir die Tangente an die Kurve durch $P_0(x_0; y_0)$ berechnen: $t(x) = a\,x + b$ mit $a = \tan(\alpha) = 2\,x_0$. Wir erhalten daher $t(x) = 2\,x_0\,x + b$. Im Punkte P_0 wird $t(x_0) = y_0 = x_0^2 = 2\,x_0\,x_0 + b = 2\,x_0^2 + b$. Damit finden wir $b = -x_0^2$.
Die beiden durch die Ordinate durch x_0, die Tangente, die x–Achse und die y–Achse gebildeten Dreiecke sind daher kongruent!

Aufgabe: Löse dieselbe Aufgabe für $f(x) = x^3$ sowie für $f(x) = x^4$. Was stellt man fest? Gibt es eine allgemeine Regel?

3.6 Regeln für die Steigungen von Kurventangenten

Die Steigung einer Kurventangente in einem Kurvenpunkt $P(x, y)$ bezeichnen wir mit f'. $f'(x)$ ist eine Funktion von x. Für solche Funktionen gelten Regeln. Nachfolgend sind die wichtigsten davon aufgelistet:

1 $f(x) = c = const. \;\Rightarrow\; f'(x) = 0$
(Ableitung einer Konstanten)

2 $f(x) = c^n \;\Rightarrow\; f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
(Ableitung einer Potenz)

3 $f(x) = a \cdot g(x) + b \cdot h(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = a \cdot g'(x) + b \cdot h'(x)$
(Linearität)

4 $f(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + a_2\, x^2 + a_1\, x + a_0$
$\Rightarrow\; f'(x) = a_n\; n\; x^{n-1} + a_{n-1}\,(n-1)\, x^{n-2} + a_2\, x\, x + a_1$
(Ableitung eines Polynoms)

5 $f(x) = \sin(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = \cos(x)$

6 $f(x) = \cos(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = \sin(x)$

7 $f(x) = e^x \;\Rightarrow\; f'(x) = e^x$

8 $f(x) = ln(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = \dfrac{1}{x}$

9 $f(x) = g(x) \cdot h(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$
(Produktregel)

10 $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)} \;\Rightarrow\; f'(x) = \dfrac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{(h(x))^2}$
(Quotientenregel)

11 $f(x) = g(h(x)) := g(z),\;\; z = h(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = \dfrac{d\,g(z)}{d\,z} \cdot \dfrac{d\,h(x)}{d\,x} = \dfrac{d\,g(z)}{d\,z}\Big|_{z=h(x)} \cdot \dfrac{d\,h(x)}{d\,x}$
(Kettenregel)

12 $f(f^{-1}(x)) = f(y) \;\Rightarrow\; (f^{-1}(x))' = (\dfrac{1}{f'(y)})\Big|_{y=f^{-1}(x)}$
(Ableitung der Umkehrfunktion)

Einige Beispiele sind in der Lektion gemacht worden. Andere finden sich in grosser Zahl in der Literatur über Differentialrechnung.

Möglichkeiten: $\leadsto$

Möglichkeiten für kostenlose Literatur:

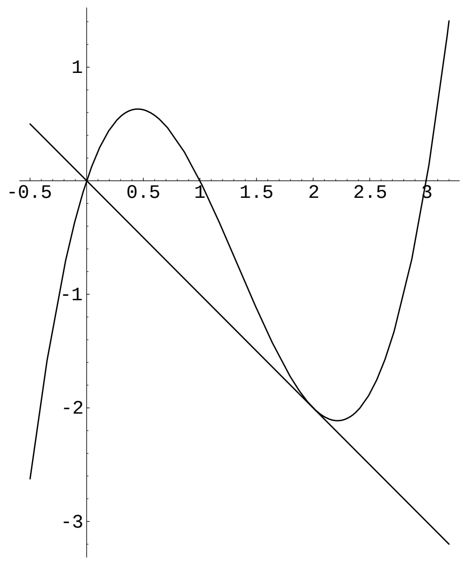
Beispiel 1: Differentialrechnung im Wikipedia
http://de.wikipedia.org/wiki/Differentialrechnung

Beispiel 2: Differentialrechnung in mathe-online
http://www.mathe-online.at/mathint/anwdiff/i.html
http://www.mathe-online.at/mathint/diff1/i.html

3.7 Beispiele von Problemen mit Steigungen von Kurventangenten

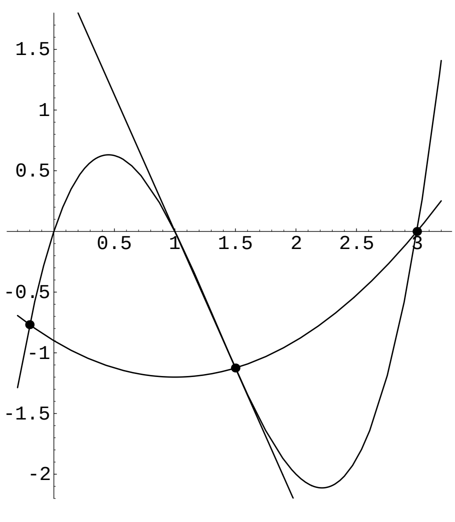
---

1



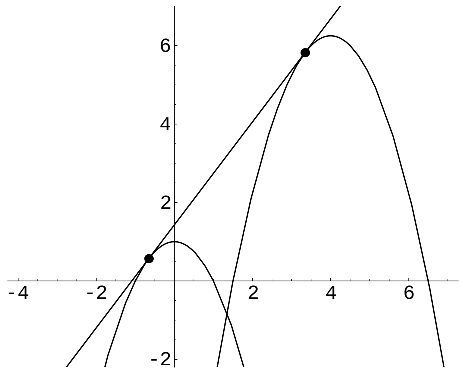
Durch die Punkte $P_1(6;0)$, $P_2(1;0)$, $P_3(3;0)$ soll eine Funktionskurve $f(x) = x^2 + b\,x + c$ gelegt werden. Von P_1 wird eine Tangente $t(x)$ an die Kurve gezogen. Wo berührt die Tangente die Kurve? von f wissen wir wegen den durch die Punkte gegebenen Nullstellen: $f(x) = (x-0)(x-1)(x-3) = x^3 - 4\,x^2 + 3\,x$. Es gilt $t(x) = a\,x$ und $a = f\,'(x_0) = 2\,x_0^2 - 8\,x_0 + 3$ für den Berührungspunkt $P_0(x_0, f(x_0)) = P_0(x_0, t(x_0))$. Damit ist $a\,x_0 = x_0^3 - 4\,x_0^2 + 3\,x_0$. Damit hat man zwei Gleichungen für den Berührungspunkt, aus denen sich x_0 und a berechnen lassen:
$a = -1,\;\; x_0 = 2,\;\; f(x_0) = -2.$

2



Durch drei gegebene Punkt soll eine Kurve gezogen werden. Auf den ersten Blick scheint die gezeigte Parabel die best passende Kurve zu sein. Nun kennt man im mittleren Punkt aber auch die Tangentenrichtung. Damit ergibt es sich, dass die gezeigte quadratische Parabel keineswegs passt. Die jetzt am besten passende Kurve ist die gezeigte kubische Parabel. Man sieht daraus, wie wichtig hier die Tangente wird. Aus Messungen sieht man, dass die kubische Parabel durch die oben verwendete Funktion $f(x) = x^3 - 4\,x^2 + 3\,x$ gegeben ist.

3



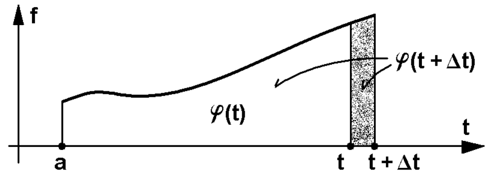
Durch zwei Funktionen
$f_1(x) = -(x-1)(x+1)$ und
$f_2(x) = -(x-1.5)(x-6.5)$ sind zwei Kurven definiert (siehe Bild).Gesucht ist eine gemeinsame Tangente $t(x)$.
Durch die Gleichungen
$t(x) = a\,x + b$,
$t(x_1) = f_1(x_1)$,
$t(x_2) = f_2(x_2)$,
$a = t\,'(x_1) = f_1'(x_1)$,
$a = t\,'(x_2) = f_2'(x_2)$ hat man vier Gleichungen für die Unbekannten a, b, x_1, x_2. Damit verfügt man über ein Gleichungssystem, das lösbar ist. Man erhält als Näherung:
$t(x) = 1.43066 + 1.3125\,x$,
$x_1 = -0.65625, x_2 = 3.34375$.

4 Studiere den Inhalt von Internetseiten, auf denen Probleme mit Tangenten zur Sprache kommen. Beispiel:

`http://www.netschool.de/mat/dirs/dui_0.htm`

3.8 Flächenfunktionen, Flächeninhalte unter krummen Kurven

1 Wir definieren den Flächeninhalt zwischen der Kurve $f(x)$ und der x–Achse von $x = a$ bis $x = t$ als neue Funktion $A(t) = \varphi(t)$. Sicher wächst diese Funktion im nebenstehenden Beispiel, wenn t grösser wird.



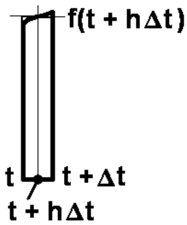
Was kommt wohl dabei heraus, wenn wir die Steigungsfunktion $\varphi'(t)$ (d.h. die Ableitung) berechnen? t ist der rechte, variable Endpunkt der x–Werte der Fläche unter der Kurve.

Es gilt: $\varphi'(t) = A'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t}$. Dabei ist die Differenz $A(t+\Delta t) - A(t)$ gerade der Flächeninhalt der dunkel gehaltenen Differenzfläche (Balken) rechts im Bild. Wir müssen danach hier den Inhalt des schmalen Balkens mit der Breite Δt und der ungefähren Höhe $f(t)$ bzw. $f(t+\Delta t)$ berechnen. Dabei können wir mit einer „mittleren Höhe“ $f(t + h \cdot \Delta t)$ rechnen.

Wie wir dem Bild rechts entnehmen, ist dann der Flächeninhalt

$$A(t+\Delta t) - A(t) = \Delta t \cdot f(t + h\,\Delta t)$$

$$\leadsto \quad \varphi'(t) \approx \frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta t \cdot f(t+h\,\Delta t)}{\Delta t} = \Delta t \cdot f(t + h\,\Delta t) \to f(t)$$



$\leadsto$ $\varphi'(t) = f(t)$. Das ist höchst erstaunlich und einfach. Die Flächeninhaltsfunktion $\varphi(t)$ ist demnach diejenige Funktion (Stammfunktion), deren Ableitung gerade $f(t)$ ist. Um $\varphi(t)$ herauszufinden, müssen wir uns daher fragen, welche Funktion abgeleitet f(t) ergibt. Konkret: Z.B. für $f(x) = x^2$ lautet die Frage: Welche Funktion $\varphi(t)$ ergibt abgeleitet $f(t) = t^2$? Da fällt einem natürlich sofort $\varphi(t) = \dfrac{t^3}{3} + const.$ ein. (Die Ableitung jeder Konstante ist ja 0.) Diese Konstante wird uns aber keine Schwierigkeiten machen, wie wir gleich sehen werden.

Will man z.B. die Fläche zwischen $x = 0$ und $x = t$ unter der Kurve $f(x) = x^2$ wissen, so kann man wie folgt argumentieren: Der Inhalt der Fläche unter der Kurve von einem unbekannten, als fix gedachten Punkt $x = x_0$ bis $x = t$ ist $\varphi(t) = \dfrac{t^3}{3} + const.$. Der Inhalt der Fläche unter der Kurve von $x = x_0$ bis $x = 0$ ist damit $\varphi(0) = \dfrac{0^3}{3} + const.$. Und so ist der Inhalt der Fläche unter der Kurve von $x = 0$ bis $x = t$ die Differenz

$$\varphi(t) - \varphi(0) = \left(\frac{t^3}{3} + const.\right) - \left(\frac{0^3}{3} + const.\right) = \frac{t^3}{3}.$$

Wir haben den Inhalt damit also berechnet! Z.B. für $t = 1$ ist er $\dfrac{1}{3}$.

2 Berechne den Inhalt der Fläche unter der Kurve der Funktion $f(x) = \sin(x)$ zwischen $x = 0$ und $x = \dfrac{\pi}{2}$!

Die Stammfunktion von $f(x) = \sin(x)$ ist bekanntlich $-\cos(x) + const.$, denn $(-\cos(x) + const.)' = \sin(x)$. Damit ergibt sich:
$Inhalt = -\cos(\frac{\pi}{2}) + const. - (-\cos(0) + const.) = -0 + const. - (-1 + const.) = 1.$
Ein unerwartet schönes Resultat!

3 Was ist der Inhalt der Fläche unter der Kurve der Funktion $f(x) = e^x$ zwischen $x = -\infty$ und $x = 0$?

Die Stammfunktion von $f(x) = e^x$ ist $e^x + const.$. Wir setzen links statt $x = -\infty$ vorerst $x = u$. Dann ist der Inhalt $A = e^0 + const. - (e^u + const.) = 1 - e^u$. Für $u \to -\infty$ geht $e^u \to \frac{1}{e^\infty} = 0$. Damit wird $A = 1$.

Dieses Resultat ist deshalb so erstaunlich, weil wir hier eine Fläche vor uns haben, die unendlich lang ist (negative x–Achse). Der Inhalt ist aber nicht unendlich, sondern exakt 1. Da es in der Natur keine unendlich langen Flächen gibt (Endlichkeit des Weltalls), haben wir hier keine physikalisch realisierbare Fläche vor uns.

4 Ein derart (wie oben) berechneter Flächeninhalt nennt man „bestimmtes Integral“. Man schreibt:

$$A = \int\limits_{x=a}^{x=t} f(x)\,dx$$

Das Resultat ist dann die Masszahl der Fläche, wie wir sie oben in den Beispielen berechnet haben.

Eine einfache Darstellung dieses Stoffes für Mittelschulen findet sich z.B. unter:

`http://www.netschool.de/mat/dirs/dui_0.htm`

3.9 Test

◇ Test ◇ **◇ Version A2a Bu ◇ 04 05 ◇**

Aufgabe 1 **(je 3 Punkte)**

(a) Erkläre den mathematischen Begriff **reelle Funktion**. (Mit „reell“ ist gemeint, dass als Urbilder und Bilder nur reelle Zahlen zugelassen sind.) Zeige dazu Beispiele. *Richtlinie bezüglich maximalem Umfang: Ca. eine halbe Seite.*

(b) Erkläre die mathematische Begriff **Tangentensteigung** am Beispiel einer Geraden. Zeige dazu Beispiele. *Richtlinie bezüglich maximalem Umfang: Ca. eine halbe Seite.*

Aufgabe 2 **(je 12 Punkte)**

Fasse deine Kenntnisse zum Thema **Tangenten an Kurven** zusammen. Erwartet wird eine strukturierte listanartige Übersicht.
Richtlinie bezüglich maximalem Umfang: Ca. 1 – 2 Seiten.

Viel Glück!

Kapitel 4

Kurs 3 (3. Jahr)

4.1 Synthese von Flächen und Schläuche (Schnecken)

Nach den Grundlagen des ECTS–Systems muss man bei uns auf eine Unterrichtslektion ca. eine bis vier Stunden Selbststudium rechnen. Damit sind Übungen, eigenständige Erarbeitung von Teilen des Stoffes, Prüfungsvorbereitungen, Arbeit mit Computerprogrammen u.s.w. gemeint. (1 ECTS entspricht 30 Stunden Arbeit. Bei 7 Lektionen z.B. entstehen so pro Lektion zusätzlich drei bis dreieinhalb Stunden Arbeit.)

Aufgabe: Bearbeite dieses Blatt 1, indem du dir dafür einen Studienplan bis zur nächsten Lektion machst. Halte diesen Studienplan dann auch ein.

Wichtig: Die Lösungen der folgenden Aufgaben (resp. die Resultate der eigenen Arbeiten) sind aufzubewahren und an die Schlussprüfung mitzubringen. Sie werden da gebraucht!

1 Stoffgruppe 1: Synthese von Flächen und Schläuche (Schnecken)

(a) Spiel mit Funktionen zum „Aufwärmen“: Entwerfe eine Landschaft mit Hilfe von Funktionen $f : x \in \mathbb{R} \to f(x) \in \mathbb{R}^2$ und stelle diese mit dem Computer dar. (Sie sollte zur späteren Aufnahme eines Vordergrundes nutzbar sein.)

(b) Die Vektorfunktion $\vec{v}(t) = 5 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$ beschreibt eine Schraubenlinie. Wenn man entlang dieser Schraubenlinie einen Kreis mit Radius $r = 1$ führt, wobei in jedem Punkt die Kreisebene jeweils orthogonal zur Tangente der Schraubenlinie steht, entsteht ein Schlauch.
Schlauchartige Gebilde finden wir neben Industrieanwendungen etwa z.B. in Rutschbahnen von Badeanstalten, Passarellen, Flughafeneinrichtungen, U-Bahnen, Treppengehäuse oder futuristischen Bauten.

Aufgabe: Versuche diesen Schlauch mathematisch zu beschreiben und dann mit dem Computer mittels Vektorgraphik exakt zu zeichnen. (Programm frei. Eventuell ist auch eine Handzeichnung möglich. Doch der Aufwand wäre hier beträchtlich.)
Hinweis: Zuerst muss die Tangentenrichtung bestimmt werden, bevor die Orthogonalität gebraucht werden kann.

Beispiel archimedische Spirale: $\vec{v}(t) := r_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$ mit der Tangentenrichtung $\vec{v}\,'(t)$. Zur Tangente brauchen wir in einem Punkt einen senkrechten Vektor $\vec{u}(t)$ mit $\langle \vec{v}\,'(t), \vec{u}(t) \rangle = 0$ sowie einen zweiten senkrechten Vektor $\vec{w}(t) = \vec{v}\,'(t) \times \vec{u}(t)$ als Basis um einen Kreis aufzunehmen mit den Vektorkoordinaten $r_2 \begin{pmatrix} \cos(s) \\ \sin(s) \end{pmatrix}$.

Bestimme als Beispiel auch numerisch den Volumeninhalt einer solchen Spirale mit drei Windungen.

2 Fraktale Gebilde

Falls die Zeit noch reich und obige Aufgabe beendet ist, so orientiere dich im Skript „Architekturmaterial“ über fraktale Gebilde.

Link 1:

`http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KArch3.pdf`

Aufgabe: Versuche selbst, ein fraktales Gebilde zu entwerfen und mit dem Computer darzustellen. Wichtig: Es kommt weniger auf die Zeichnung an. Viel wichtiger ist das Verständnis des Weges!

4.2 Jetzt ist eine Variantenwahl notwendig! Folgende Themenkreise sind möglich. . .

Nach den Grundlagen des ECTS–Systems muss man bei uns auf eine Unterrichtslektion ca. eine bis vier Stunden Selbststudium rechnen. Damit sind Übungen, eigenständige Erarbeitung von Teilen des Stoffes, Prüfungsvorbereitungen, Arbeit mit Computerprogrammen u.s.w. gemeint. (1 ECTS entspricht 30 Stunden Arbeit. Bei 7 Lektionen z.B. entstehen so pro Lektion zusätzlich drei bis dreieinhalb Stunden Arbeit.)

Aufgabe: Studiere dieses Blatt 2 und überlege dir die interessanteste Variante.

Wichtig: Die Lösungen der Aufgaben (resp. die Resultate der Arbeit) sind aufzubewahren und an die Schlussprüfung mitzubringen. Sie werden da gebraucht!

1 Stoffgruppe 2: Jetzt ist eine Variantenwahl notwendig! Folgende Themenkreise sind möglich:

   (a) Themen aus „Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik". (Schliesst Architektur ein.)
      i. Kurze Einführung
      ii. Internet–Recherche oder
      iii. Sichtung von Literatur und kurze Präsentation: Was könnte ich gebrauchen?
      iv. Graphische Behandlung und explorative Vertiefung in den Stoff: Abwandlung der gewählten Formen und Flächen, so dass sie je nach Interessenlage gewählte Eigenschaften bewahren (vorerst rein qualitativ, jedoch mit relativ exakten Skizzen). Das Resultat wird zeigen, wie weit eine Weiterbearbeitung möglich ist.
   (b) Das Einsteinjahr: Streifzug durch die Relativitätstheorie (4 - 6 Lektionen)
   (c) Weiter nach Stoffplan (Konzept reduzierte Math., htm-File, Link auf Klassenseite): Das Problem der Minimalfläche (Seifenhäute!), Gitterflächen, mathematische Formen, Anwendungen in der Architektur. Abhandlung wie eingangs beschrieben.
   (d) Seifenblasen
   (e) Themenvorschlag der Studierenden.
   (f) In kurzer Zeit neues Thema aus der Auswahl in Link 1 evaluieren:

   `http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KArch3.pdf`

2 Die Weiterarbeit ist jetzt abhängig von der Variantenwahl. . .

4.3 Beispiel 1 –Programm zu einer Arbeit

4.3.1 Beispiel 2005/ 06: Projekt 1

Arbeit im Themenbereich "Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik"(einschließlich Architektur) A03a (Einschränkung des Themas auf die Teilbereiche der im abgegebenen Text behandelten gekrümmten Kurven und Flächen.)

21.12. 05 Wir1

Grundlage:

Werk mit dem genannten Titel von Prof. Georg Glaeser (Institut für diskrete Mathematik und Geometrie an der Hochschule für angewandte Kunst in Wien).
Zugehörige Webseite: http://www.uni-ak.ac.at/geom/opengeometry_gallery.php

Thema der Arbeit:

Aspekte im Beziehungsfeld Mathematik - Architektur im weiteren Sinneäm Beispiel von ... xxx...

Phase 1:

Einarbeitung: Sichten (teilweise lesen) des gegebenen Textmaterials.
Hinweis: Es wird zeitlich kaum möglich sein, den ganzen Text zu lesen. Aus Zeitgründen ist man zum "Querlesenünd zur Auswahl gezwungen.
Ziel: Engere Begrenzung auf bevorzugte Teilthemen. Bei Bedarf noch Literatursuche (auch Internet).
Termin 1: Themen zur Genehmigung abgeben bis **16.1.06**. (Mail an Wir1).

Phase 2:

Engere Themenwahl: Einschränkung auf ein einziges bevorzugtes Thema.
Bedingung: Die einzelnen Themen dürfen sich unter den Kursteilnehmern nicht decken. (Sie können sich aber berühren).
Termin 2: Ende Klärung von Überschneidungsfragen, Auskunft zum engeren Konzept: Am **16.1.06**.

Phase 3:

Ausarbeitung: Bearbeitung des gewählten Themas.
Form + Umfang: Format A4 mit minimaler Randbreite 3 cm. Handschrift - oder auch 11-er oder 12-er-Schrift ohne größere leere Zwischenräume, keine Füllseiten. Richtwert: Total 2 bis 10 Seiten Papier.
Termine 3: Kurzer mündlicher Zwischenbericht am **30.1.05**, Abgabe am **15.2.06** (Lektion).

Mögliches Konzept zum inhaltlichen Aufbau: Vlg. Rückseite ⇝

4.3.2 Mögliches Konzept zum inhaltlichen Aufbau

a) **Deklarative Komponente (Faktenwissen):**

1 Kurze Präsentation des Objekts (d.h. der gewählten Realität aus der Architektur resp. aus deren Umkreis).

2 Kurze und fachlich saubere Darstellung der damit verbundenen Komponente aus der Mathematik. (Für die mathematische Komponente wird ein Anspruch erwartet, der über die alltägliche Erfahrung mit fixe Gerade, Ebene, Kreis, Kugel und sonst nichts"hinausgeht.)

b) **Prozedurale Komponente (Anwendung):**

1 In den Zeitrahmen passende Erarbeitung von geometrischen Verwandlungen, Transformationen, Ergänzungen oder dualen Strukturen zum gewählten Objekt nach *eigener Initiative*.

2 Beschreibung (oder Analyse) der mit der Veränderung verbundenen Folgen für die mathematische Komponente.

c) **Strategische Komponente (Einbau in ein Netz):**

1 Diskussion zum Thema Strategie zu obigen Komponenten und alternativen Methoden.

2 Abschätzung von Aufwand und Ertrag infolge Mathematik. (Beispiel: Abwägung der Antworten zu folgenden Fragen: "Was kostet die eigene Einarbeitung in das notwendige Gebiet an Zeit?". Alternative: "Was kostet der Einkauf von Know-how und was kosten die Folgen?".)

3 Diskussion zum Thema ,,reeller und ideeller Nutzen“?

d) **Formale Komponenten:** Titel, Autor, Institution, Datum, Literaturnachweis, Bildnachweis

21.12. 05 Wir1

4.3.3 Beispiele für Themen

1 Thema Kugel: Dies im Zusammenhang mit entweder einer Kuppel bzw. der Kuppel des Pantheons oder der Utopie der Kenotaphe für Newton von Boullée. Problem Pantheon: Was für Proportionen z.B. in den Kassetten.

2 Kugel mit praktischer Anwendung - Fuller, Montreal, Expo-Dom - Kugeln, Form der Zellen (regulär?).

3 Spirale–City Hall - Problem: Welche Spiralen.

4 Math. Formen: Islerschalen - Identifikation der Flächenformen? Keine Minimalflächen - schon wegen der Krümmung (Summe der Hauptkrümmungen nicht null).

5 Math. Formen: Reichstagskuppel- Wikipedia - Problem: Welche Formen/ Typen wieso? (Ellipsen?).

6 Ellipse - Botta San Francisco Zylinder - wieso diese Neigung wieso diese Proportionen?

7 Math. Formen: Calatrava-Brücken.

8 Ellipse Kolosseum–Problem: Wieso hier Ellipse? Erstmals? Vorteile, Nachteile, . . . Praktische Gründe? Formen: Herzog & de Meuron Allianz-Arena München.

9 Der Torus als Prototyp für alle anderen Drehflächen, speziell mit dem Drehellipsoid.

10 Bauwerk: Mit Ellipsenform.

11 Unendlichen Vielfalt der gekrümmten Flächen am Beispiel von Frank O. Gehry. Problem: Welche Körper? Freiformen? Analyse?

12 Kegelflächen - im engeren Sinne über die Türme an der Expo02 in Biel. Problem: Geometrisches Gerüst hinter der Sache?

13 Pyramidenformen (Louvre u.s.w.).

14 Themenkreis Photos, Verzerrung im Hirn, Abbildungen, Perspektive.

15 Salginatobelbrücke Schiers. Brücke: Welche Form? Kurvenart?

16 Minimalflächen in Dächern u.s.w. - Sonnen- oder Regensegel.

4.4 Beispiel 2 –Programm zu einer grösseren Arbeit

4.4.1 Beispiel 2005/ 06: Projekt 2

Gewicht eines leeren Gebäudes von großem öffentlichen Interesse für die Menschheit bestimmen (Z.B. UNESCO-Weltkulturerbe, Beispiel Dom von Florenz). Gewicht = ?

Gerüst:

1 Geometrische Darstellung, Aufbau, Pläne und / oder Ansichten.

2 Wichtige Masse.

3 Ev. notwendige Maßkontrollen (Vermessungen und Berechnungen).

4 Materialien.

5 Berechnungen.

6 Genauigkeit (Angabe der notwendigen Vereinfachungen, Abschätzung der Fehler).

7 Weitere Fragen:

   (a) Z.B. wie viele Quadratmeter Wald waren notwendig für das Brennen der Backsteine?
   (b) Welche Transportstrecke wurde total zurückgelegt (aufsummiert)?
   (c) Wie viele Transportesel waren notwendig für den Materialtransport?
   (d) Wie viele Menschen mussten wie lange für die Finanzierung arbeiten?
   (e) Wie viele Bauarbeiter und Zulieferer waren notwendig?
   (f) Wie viele Menschen mussten wie lange für die Versorgung der Bauarbeiter mit Essen arbeiten u.s.w.?

Benotung siehe Rückseite.

Benotung:

1 Grundlage der Benotung: Weiter ist dann auf einen noch zu nennenden Termin eine Arbeit abzuliefern, die mit der Inputzeit zusammen z.B. als ca. 180 Arbeitsstunden (6 ECTS) gewertet werden kann.

2 Das Benotungsschema ist wie folgt:

   (a) Note 4 $\rightsquigarrow$ Alles richtig (gut gelernt und gearbeitet, tieferes Verständnis der Sache nicht ersichtlich).

   (b) Note 5 $\rightsquigarrow$ Alles richtig, tiefes Verständnis ersichtlich.

   (c) Note 6 $\rightsquigarrow$ Alles richtig, tiefes Verständnis ersichtlich und auch noch Fähigkeit vorhanden, in der Sache eigene Fragen zu entwickeln.

   (d) Sonst gilt:

      i. Note 1 $\rightsquigarrow$ Nicht anwesend oder nichts abgegeben.

      ii. Note 2 $\rightsquigarrow$ Arbeit nicht auf dem Niveau einer Hochschule.

      iii. Note 3 $\rightsquigarrow$ Arbeit zwar auf dem Niveau einer Hochschule, doch die verlangten ca. 180 Stunden sind nicht ausgewiesen (Journal, nachvollziehbar).

3 Diese Regelung schützt uns vor dem Vorwurf der Korruption. Ich denke daher, dass wenn jemand einigermassen Einsatzfreude beweist, die Sache für diese Person nicht wirklich schief gehen kann und die ECTS gegeben werden können.

Wir1

4.4.2 Eine grobe Schätzmethode für Gebäudegewichte

Studierende[1] haben in einer Arbeit auf der Grundlage von eigenen Messungen, beschafften oder nachge-zeichneten Plänen, Schätzungen, Archivmaterial, vorhandenen Datenbanken u.s.w. die Gewichte und die Materialvolumina einer Anzahl von mehr oder weniger bekannten Gebäuden ermittelt. Die Resultate sind in der unten beigefügten Tabelle wiedergegeben. Auf der Grundlage dieser Resultate können wir nun eine Schätzmethode validieren.

Einfachstes Modell: Wir gehen von der Annahme aus, beim Gebäude handle es sich um einen Quader mit der Breite a, der Länge b und der Höhe h. Weiter nehmen wir an, dass die Verhältnisse dem Gesetze des goldenen Schnitts genügen: $b : a = a : h = \varrho = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Dann gilt: $h = a \cdot \varrho = b \cdot \varrho^2$. Sei d die Wanddicke. Wir nehmen weiter an, dass das Materialvolumen ungefähr der folgenden Gleichung genügt:

$$V = 2\,d\,(a\,b + a\,h + b\,h) = 2\,d\,(b \cdot \varrho \cdot b + b \cdot \varrho \cdot b \cdot \varrho^2 + b \cdot b \cdot \varrho^2) = 2\,d\,b^2\,\varrho\,(1 + \varrho + \varrho^2) \approx 2.47\,d\,b^2$$

Bei geschätztem d (unten in Metern) und bekanntem V ergibt sich daraus die plausibel nachvollziehbare, derart geschätzte Gebäudelänge (unten in Metern) zu

$$b = \sqrt{\frac{V}{2\,d\,\varrho\,(1+\varrho+\varrho^2)}} \approx 0.636\,\sqrt{\frac{V}{d}}$$

Was, wo?	m^3	Tonnen t	$\frac{t}{m^3}$	A	40–t–LKW	d	Schätzung b
Haus Kt. Bern	120.2	300.5	2.5	.	7.5×10^0	0.5	9.9
Erechtheion	1243.7	3233.3	2.6	.	8.1×10^1	0.5	31.7
Campanile d.S.Marco Venezia	7040.2	11654.1	1.7	.	2.9×10^2	2	37.7
Stadttheater Bern	5621.5	11762.2	2.1	.	2.9×10^2	0.5	67.4
Villa Rotonda, Palladio	4737.6	12413.6	2.6	.	3.1×10^2	0.5	61.9
Brandenburger Tor	5212.7	13038.0	2.5	.	3.3×10^2	1	45.9
Duomo di Firenze	89617.7	197159.0	2.2	7771.2	4.9×10^3	1	190.4

Aus den Resultaten sieht man, dass die Schätzung realistisch ist. Sogar der im Vergleich zu seiner Höhe nur wenig breite Campanile die San Marco erzeugt keine unsinnige Dimension von b.

4.4.3 Zur Interpretation der gewonnenen Zahlen

Weiter ist in der Tabelle das Transportproblem (LKW) angetönt. Dabei hat man mit einer Ladekapazität von 40 Tonnen pro LKW (Lastwagen) gerechnet. In der Realität füllen jedoch schon 20 t Backsteine einen solchen LKW (wegen dem Volumen). Beim Dom von Florenz wären daher total ca. 10′000 Lastwagen notwendig gewesen. Rechnet man aber mit Transporteseln zu 100 kg pro Esel, so kommt man auf die Zahl von ca. 2 Millionen Eselstransporten. Man bedenke die Bedeutung dieser grossen Zahl angesichts der Tatsache, dass eine grosse mittelalterliche Stadt vielleicht 20′000 bis 30′000 Einwohner hatte, welche infolge der Lebenssicherung nur zu einem geringen Teil am Bau teilgenommen haben konnte. In der Literatur wird die Position vertreten, dass der Kuppelbau des Domes zu Florenz unter Brunelleschi zwölf Jahre gedauert hat. Aus der Arbeit eines Studierenden[2] geht hervor, dass in diesen zwölf Jahren ca. 19′000 Tonnen nach oben gebracht werden mussten. Bei angenommenen 60 beteiligten Arbeitern (zu viele konnten es nicht sein, denn sonst wären sie sich gegenseitig auf die Füsse getreten. . .) und 250 Arbeitstage pro Jahr, kommt man auf einen durchschnittlichen Materialverbau von ca. 100 kg pro Person und Tag. (Bei diesem Durchschnitt ist zu berücksichtigen, dass nicht alle auf dem Bauplatz beschäftigten Arbeiter direkt Material verbaut haben können. Einige waren mit dem Materialeinbau beschäftigt, andere aber mit Logistik, Gerüstbau u.s.w..) Umgerechnet auf den ganzen Dom kommt man

[1] Berner Fachhochschule, HSB, Klasse A04p
[2] Herr H. Menzi

aus diesen Zahlen bei einem Gewicht von ca. $200'000'000\ kg$ auf rund $2'000'000$ „Mannarbeitstage". Bei durchschnittlich 60 Mann ergibt das 130 Jahre ununterbrochene Bauzeit. Ein Marktflecken mit 2000 bis 3000 Seelen hätte sich das neben all den anderen öffentlichen Bautätigkeiten (Herren– und Adelshäuser, Wehranlagen) kaum leisten können. Für eine Stadt mit ca. $30'000$ Einwohnern ist die Belastung im Bereich des Möglichen vorstellbar. Vermutlich hat es aber die Grenzen dieses Möglichen erreicht...

Es ist nun dem Leser überlassen, aus den Zahlen weitere Folgerungen zu ziehen. Z.B. ob ein Gebäude schwimmen[3] würde unter der Annahme, es habe dieselben Dimensionen, dasselbe Gewicht und es sei zusätzlich noch dicht. Das würde dann Schlüsse zulassen auf die Folgen einer Zunahme des Grundwasserdrucks und die Deformationsfolgen bei dichten Kellern...

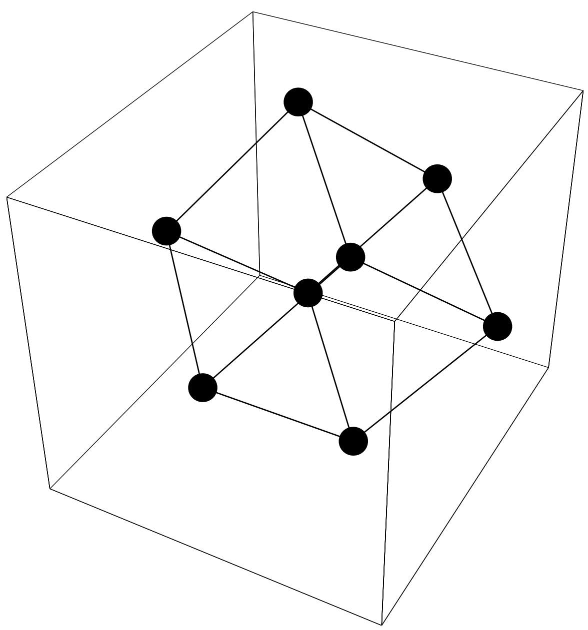
[3] Nach den Zahlen aus der erwähnten Arbeit von Herrn H. Menzi würde der Dom von Florenz sehr gut schwimmen

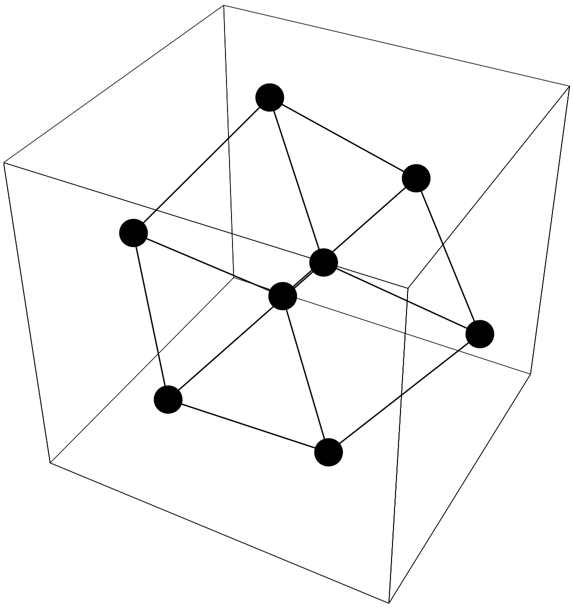
Kapitel 5

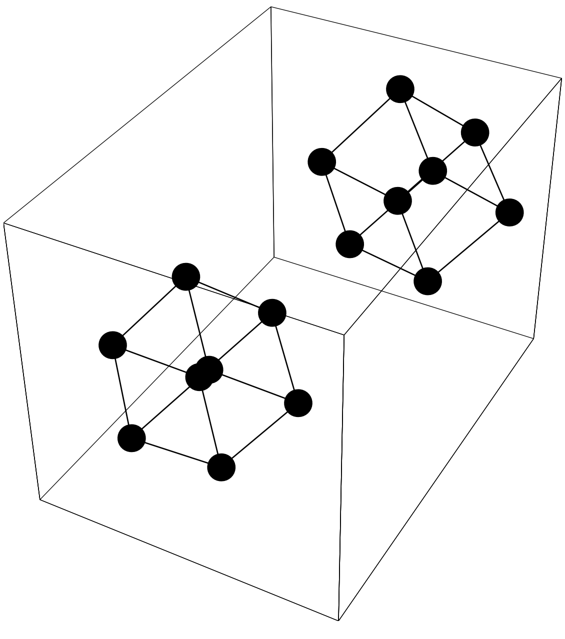
Einige Lösungen

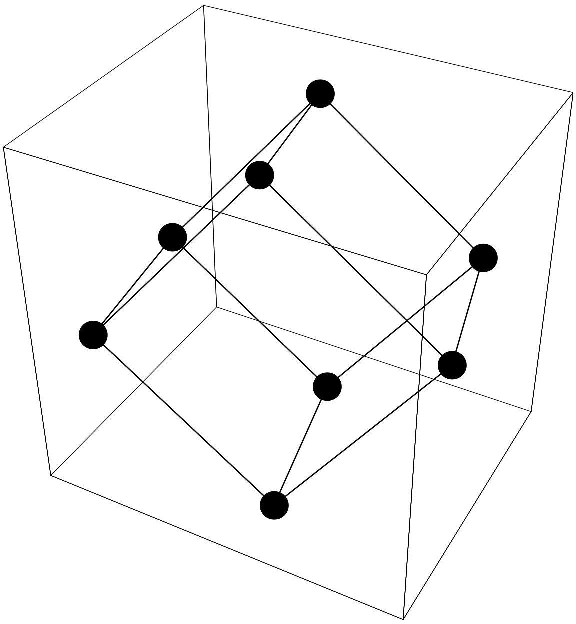
5.1 Serie A1.1

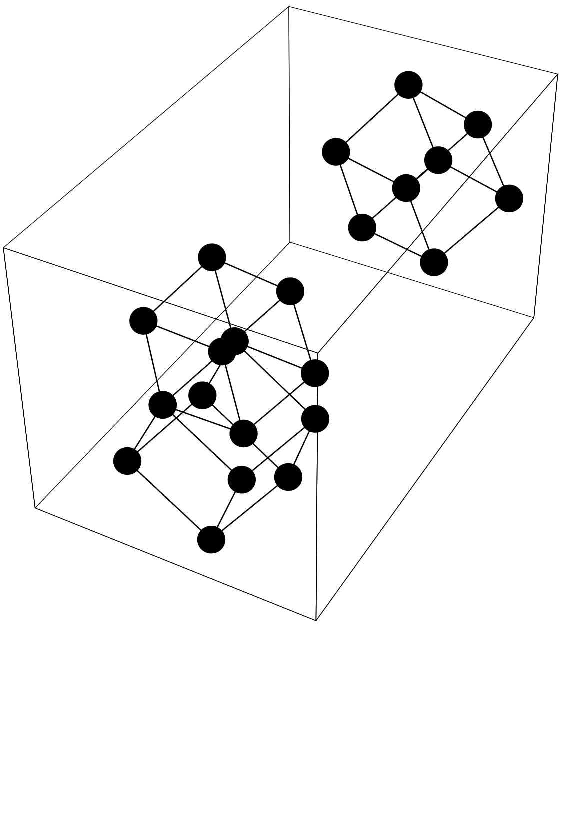
5.1.1 Output

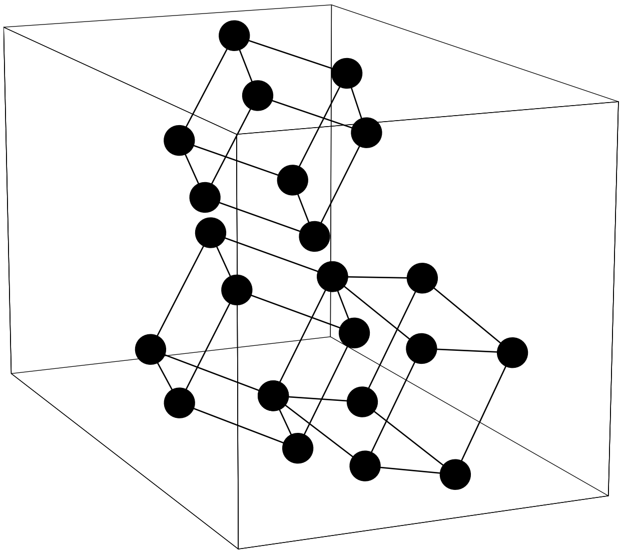












5.2 Serie A1.2, zu Aufgabe 2

Ausgangsposition

$\{1, 1, 1\}$

Drehung um die z-Achse um 60 Grad

$\left\{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right\}$
$\{-0.366025, 1.36603, 1.\}$

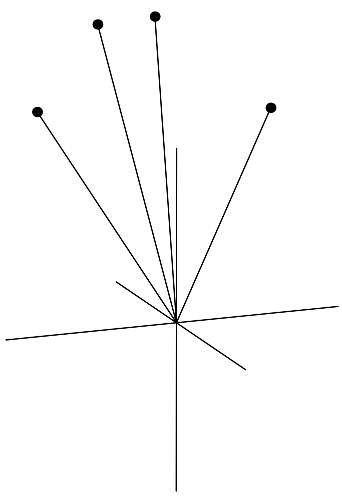
Drehung um die x-Achse um 45 Grad

$\left\{\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{3}\right), \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right\}$
$\{-0.366025, 0.258819, 1.67303\}$

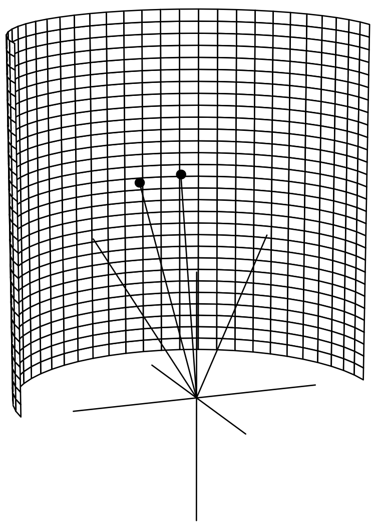
Drehung um die z-Achse um -60 Grad

$\left\{\frac{1}{4}\left(1 - \sqrt{3}\right) + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\left(-1 + \sqrt{3}\right),\right.$
$\left.-\frac{1}{4}\sqrt{3}\left(1 - \sqrt{3}\right) + \frac{-1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right\}$
$\{0.0411312, 0.446397, 1.67303\}$

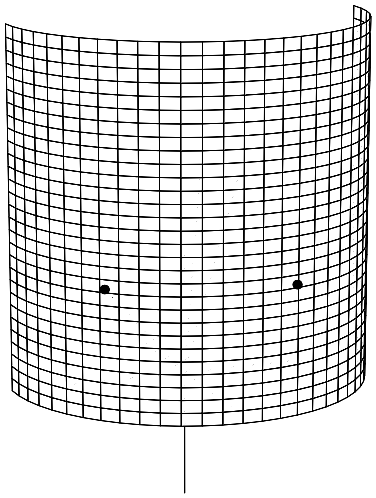
Zeichnung



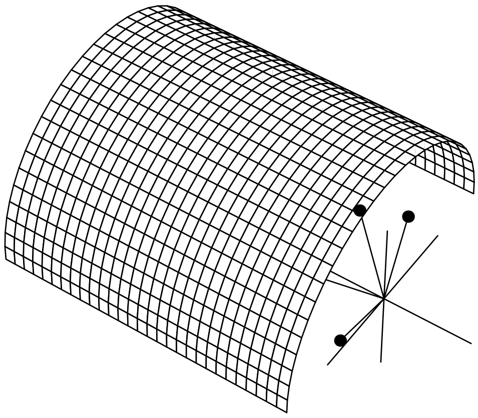
Sicht von der negativen x- und y-Achse



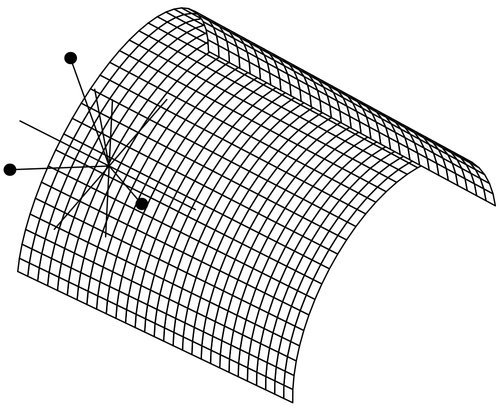
Sicht von der positiven x- und y-Achse



Sicht von oben



Sicht von unten



5.3 Serie A1.2, Lösungen

5.3.1 1: Lösungen

Assoziativgesetz, Existenz des Nullelements, Existenz des Inversen, Kommutativgesetz, Assoziativität mit Skalaren, Distributivität

5.3.2 2

$a = \{2, 1, 1\}; b = \{1, 4, 3\}; c = \{3, 2, -2\};$
$v = a - b + 3c$
$\{10, 3, -8\}$
$Norm[v]$
$\sqrt{173}$
$Norm[v]//N$
13.1529

Vektorlänge 13.1529 = $\sqrt{173}$

5.3.3 3

$F1 = \{-2, -1, -1\}; F2 = \{-1, -4, -3\};$
$a = \{0, 1, 1\}; b = \{1, 4, 2\}; c = \{2, 0, 1\};$
$Solve[F1 + F2 == \lambda a + \mu b + \nu c, \{\lambda, \mu, \nu\}]$
$\{\{\lambda \to -1, \mu \to -1, \nu \to -1\}\}$
$F1 + F2$
$\{-3, -5, -4\}$

Es gilt: R = F1+F2 = (-1) a + (-1) b + (-1) c

5.3.4 4

Sich die Formel merken

5.3.5 5

Kommutativgesetz, Orthogonalitätsgesetz, Distributivität Assoziativität mit Skalaren

5.3.6 6

a

$a = \{-2, -1, -1\}; b = \{-1, -4, -3\};$
$a.b$
9
$\phi = ArcCos[a.b/(Norm[a]Norm[b])]$
$ArcCos\left[\frac{3\sqrt{\frac{3}{13}}}{2}\right]$
$\phi = ArcCos[a.b/(Norm[a]Norm[b])]//N$
0.766163
$\phi/Degree$
43.8979

Winkel 43.8979 Grad

b

$a = \{-2, -1, -1\}; b = \{-1, -4, z\};$
$a.b$
$6 - z$
$ba = a.b/Norm[a]$
$\frac{6-z}{\sqrt{6}}$
$ba == 2$
$\frac{6-z}{\sqrt{6}} == 2$
$Solve[ba == 2, \{z\}]$
$\left\{\left\{z \to \sqrt{6}\left(-2 + \sqrt{6}\right)\right\}\right\}$
$Solve[ba == 2, \{z\}]//N$
$\{\{z \to 1.10102\}\}$

z = $\sqrt{6}$ (-2+$\sqrt{6}$) , etwa 1.10102

5.3.7 7

$d = \{1, 1, 1\};$
$k1 = \{1, 0, 0\};$
$k2 = \{1, 1, 0\} - k1;$
$k3 = d - \{1, 1, 0\};$
$\{k1, k2, k3\}$
$\{\{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}\}$
$proj1 = d.k1/Norm[d]$
$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$proj1//N$
0.57735
$proj2 = d.k2/Norm[d]$
$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$proj1//N$
0.57735
$proj2 = d.k2/Norm[d]$
$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$proj2//N$
0.57735
$proj3 = d.k3/Norm[d]$
$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$proj3//N$
0.57735

Alle Projektionen haben die Längen $\frac{1}{\sqrt{3}}$, ungefähr 0.57735

5.4 8 Maschinenrechnung mit schnellen Hilfsmitteln, welche noch nicht besprochen sind (bitte nur Resultate beachten)

Remove["*Global*‘∗"]

Mögliche Ecken von T1:

$d[\varphi\_] := \{\{Cos[\varphi], -Sin[\varphi], 0\}, \{Sin[\varphi], Cos[\varphi], 0\}, \{0, 0, 1\}\};$
$d[\varphi]//MatrixForm$
$\begin{pmatrix} Cos[\varphi] & -Sin[\varphi] & 0 \\ Sin[\varphi] & Cos[\varphi] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$e1 = \{1, 0, 0\};$
$e2 = d[120Degree].e1$
$\left\{-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right\}$
$e3 = d[240Degree].e1$
$\left\{-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right\}$
$h = 3/2Norm[e1]$
$\frac{3}{2}$
$h = Sqrt[Norm[e2 - e1]\hat{}2 - (Norm[e2 - e1]/2)\hat{}2]$
$\frac{3}{2}$
$e4 = \{0, 0, h\}$
$\left\{0, 0, \frac{3}{2}\right\}$

Ecken von T2:

$t1 = (e2 + e3 + e4)/3$
$\left\{-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{2}\right\}$
$t2 = (e1 + e3 + e4)/3$
$\left\{\frac{1}{6}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\right\}$
$t3 = (e1 + e2 + e4)/3$
$\left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\right\}$
$t4 = (e1 + e2 + e3)/3$
$\{0, 0, 0\}$

Zachenhöhe: Länge der Projektion von e4-t1 auf e4

$h1 = (e4 - t1).e4/Norm[e4]$
1

Die Zachenhöhe ist 1

$h1/h$
$\frac{2}{3}$

Sternvolumen: Volumen des inneren Tetraeders plus 4 Zackenvolumina

$VaeusseresTetraeder = Det[\{e4 - e1, e4 - e2, e4 - e3\}]/6$
$\frac{3\sqrt{3}}{8}$
$\%//N$
0.649519
$VinneresTetraeder = Det[\{t4 - t1, t4 - t2, t4 - t3\}]/6//Abs$
$\frac{1}{24\sqrt{3}}$
$\%//N$
0.0240563
$Vzacken = Norm[Cross[t3 - t1, t4 - t1]]/2 * h1/3$
$\frac{\sqrt{\frac{5}{6}}}{18}$

$\%//N$
0.0507151
$VStern = VinneresTetraeder + 4Vzacken$
$\frac{1}{24\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{\frac{10}{3}}}{9}$
$\%//N$
0.226916
$VStern/VaeusseresTetraeder$
$\frac{8\left(\frac{1}{24\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{\frac{10}{3}}}{9}\right)}{3\sqrt{3}}$
$\%//N$
0.349361
$VStern/VaeusseresTetraeder100//N$
34.9361

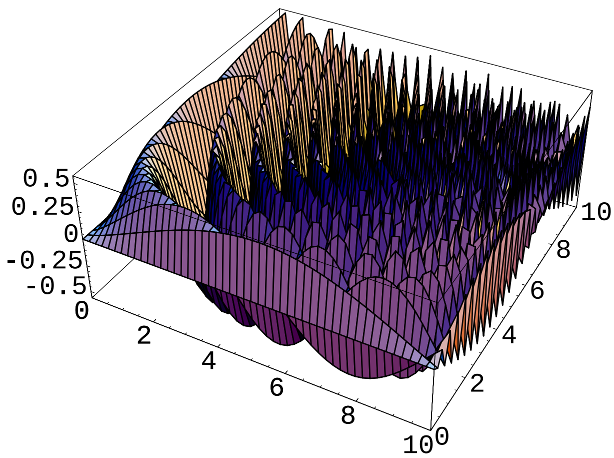
Das Sternvolumen ist ca. 34.9361 % des Tetraedervolumens

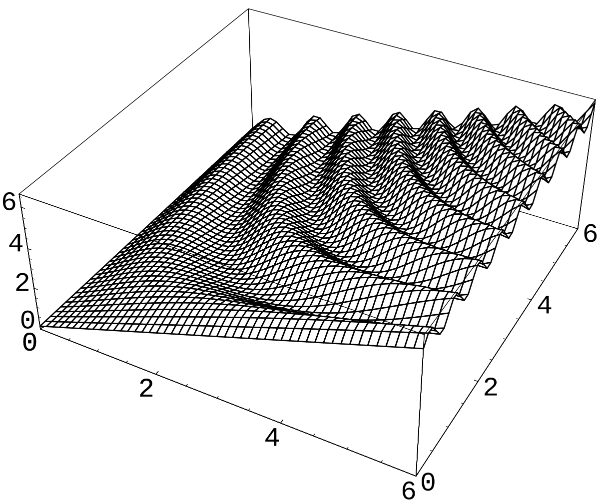
a

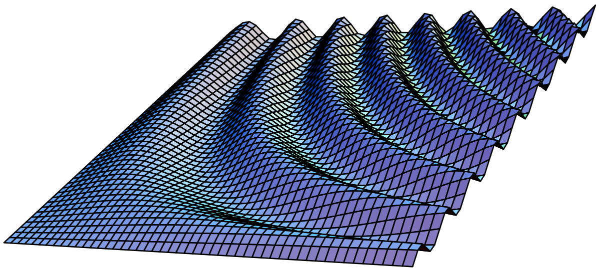
5.5 Serie A3.1, Landschaft mit Funktionen und Kurven

Solche Lösungen brauchen vermutlich die Hilfe des Dozenten. Dazu muss man ihn kontaktieren.

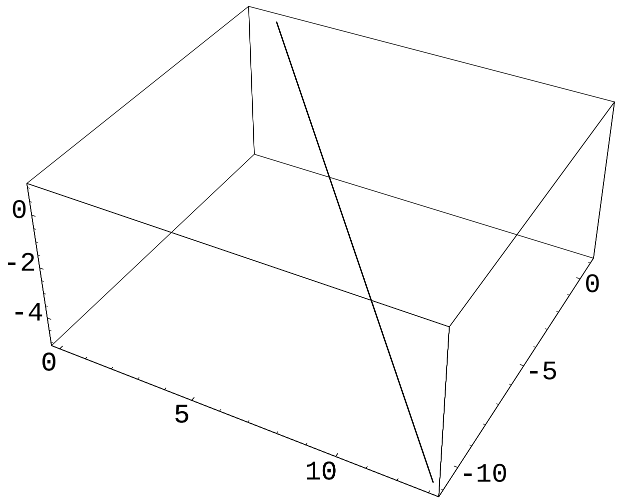
5.5.1 Beispiel Landschaft (Spiel mit Funktionen)

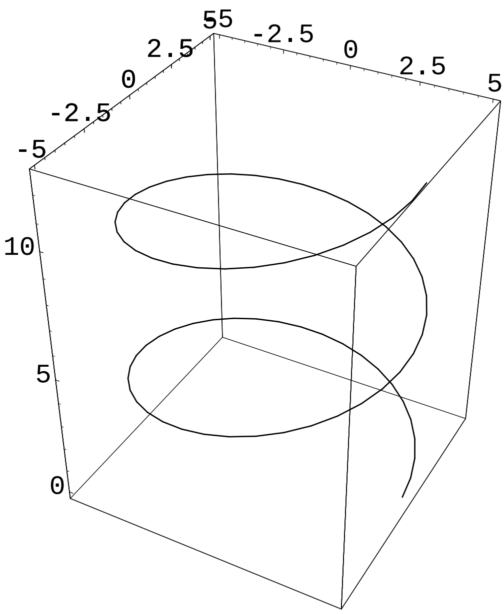




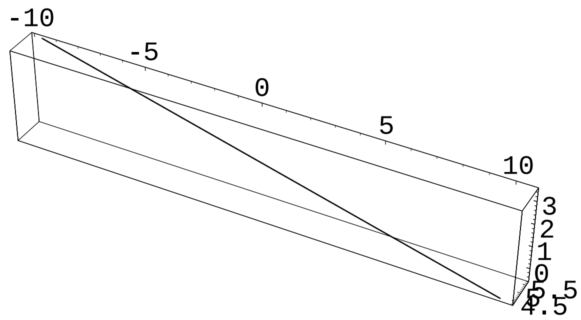


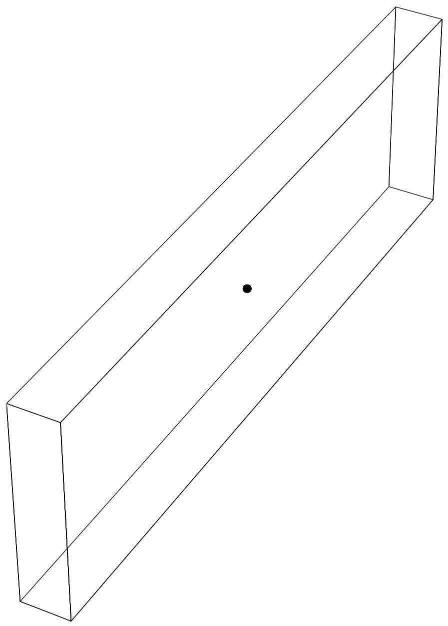
5.5.2 Vektorkurven

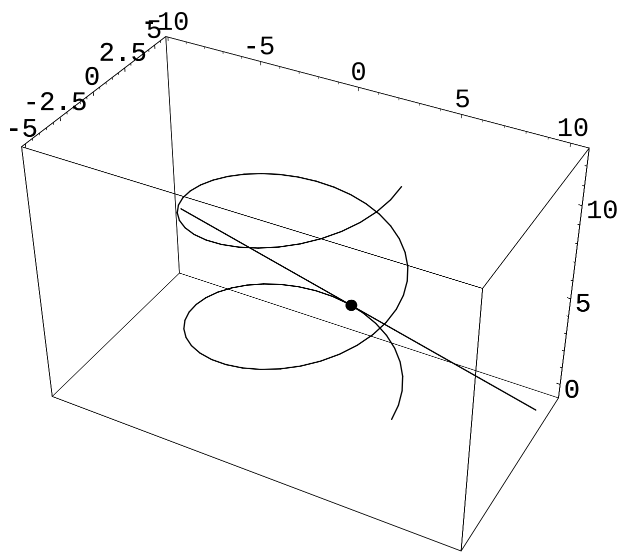




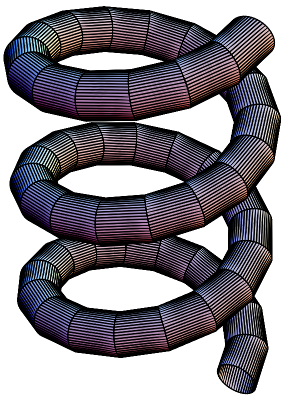
5.5.3 Tangente







5.5.4 Schlauch



Ende