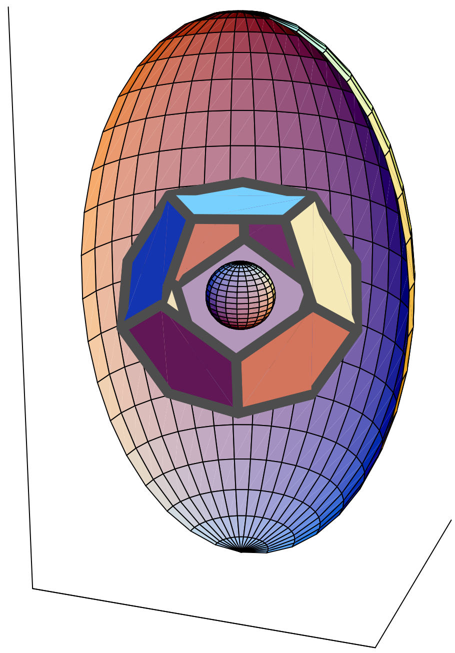
Arbeitsbuch ◇ Math ◇ Arch ◇ Ing ◇ Grundlagen — Stützkurs — Vorkurs ◇ für Architekten und Ingenieure



von

Rolf Wirz

BFH–AHB // BFH–TI

Leere Ausgabe vom 2. November 2008, V. 1.0.5 / d

WIR1/Win XP/2008/LaTex/KursGrundlagen_FM_BM.TEX

Arbeitsbuch

Keiner, der nicht Mathematiker ist, soll meine Werke lesen. . .

Leonardo

Aktuelle Adresse des Autors (2007):

Rolf W. Wirz-Depierre
Prof. für Math.
Berner Fachhochschule (BFH), Dep. AHB und TI
Pestalozzistrasse 20
Büro B112 CH–3400 Burgdorf/BE
Tel. ++41 (0)34 426 42 30 / intern 230
Mail: Siehe http://rowicus.ch/Wir/indexTotalF.html unter „Koordinaten von R.W.“
(Alt: Ingenieurschule Biel (HTL), Ing'schule des Kt. Bern, Fachhochschule ab 1997) // BFH HTA Biel // BFH HT/

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **7**

2 (I) Geometrie **9**

3 (I) Grundlagen **11**
3.1 Dimensionskontrolle . . . 12
3.2 Der mathematische Lehrsatz . . . 13
3.2.1 Der Aufbau eines mathematischen Lehrsatzes . . . 13
3.2.2 Wahre und falsche Implikationen . . . 14
3.2.3 Die Umkehrung einer Implikation . . . 15

4 (I) Planimetrie **17**
4.1 Winkel . . . 18
4.1.1 Winkel an Parallelen, Winkel am Dreieck . . . 18
4.1.2 Winkel am Kreis . . . 19
4.2 Berechnungen am Dreieck und Viereck . . . 20
4.2.1 Einfache Aufgaben zu Pythagoras, Katheten– und Höhensatz . . . 20
4.2.2 Spezielle Dreiecke . . . 21
4.2.3 Kreisberührungsaufgaben . . . 22
4.2.4 Berechnung von Flächeninhalten und Abständen . . . 23
4.2.5 Tangentenabschnitte, Tangentenviereck . . . 24
4.2.6 Vermischte Probleme . . . 25
4.3 Was im erwähnten Lehrbuch wortlos vorausgesetzt ist . . . 26
4.3.1 Allgemeine geometrische Grundlagen . . . 26
4.3.2 Kongruenzgeometrie . . . 27
4.4 Berechnungen am Kreis . . . 28
4.4.1 Kreis und Kreisring . . . 28
4.4.2 Kreisring . . . 29
4.4.3 Das Bogenmass . . . 30
4.4.4 Der Kreissektor . . . 31
4.4.5 Das Segment . . . 32
4.4.6 Vermischte Probleme . . . 33
4.5 Strahlensätze . . . 34
4.5.1 Die Sätze . . . 34
4.5.2 Der Schwerpunkt des Dreiecks . . . 35
4.5.3 Die Winkelhalbierenden im Dreieck . . . 36
4.6 Ähnliche Figuren . . . 37
4.6.1 Die zentrische Streckung . . . 37
4.6.2 Ähnliche Figuren . . . 38
4.6.3 Ähnliche Dreiecke . . . 39
4.6.4 Ähnlichkeit am Kreis, Sehnensatz, Sekanten–Tangentensatz . . . 40

5 (I) Trigonometrie **41**
5.1 Das rechtwinklige Dreieck . . . 42
5.1.1 Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck . . . 42
5.1.2 Aufgaben aus der Optik . . . 43
5.1.3 Flächeninhalt eines Dreiecks . . . 44
5.1.4 Berechnungen am Kreis . . . 45
5.2 Das allgemeine Dreieck . . . 46
5.2.1 Definition der Winkelfunktionen für beliebige Winkel . . . 46
5.2.2 Sinussatz . . . 47
5.2.3 Cosinussatz . . . 48
5.2.4 Vermischte Probleme mit Parameter . . . 49
5.3 Probleme aus Physik und Technik . . . 50
5.3.1 Probleme aus der Statik . . . 50
5.3.2 Probleme aus der Vermessung . . . 51
5.4 Ähnliche Figuren . . . 52
5.5 Trigonometrische Funktionen . . . 53
5.5.1 Argumente im Gradmass . . . 53
5.5.2 Argumente im Bogenmass . . . 54
5.5.3 Angewandte Aufgaben . . . 55
5.6 Goniometrie . . . 56
5.6.1 Beziehungen zwischen $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ und $\tan(\alpha)$ . . . 56
5.6.2 Additionstheoreme . . . 57
5.6.3 Funktionen des doppelten Winkels . . . 58
5.6.4 Transzendente Gleichungen . . . 59

6 (I) Stereometrie **61**
6.1 Beziehungen im Raum . . . 62
6.1.1 Lage von Punkten, Geraden und Ebenen im Raum . . . 62
6.1.2 Winkel im Raum . . . 63
6.2 Ebenflächig begrenzte Körper (Polyeder) . . . 64
6.2.1 Das Prisma . . . 64
6.2.2 Pyramide und Pyramidenstumpf . . . 65
6.2.3 Prismatoide . . . 66
6.2.4 Reguläre Polyeder (Platonische Körper) . . . 67
6.3 Krummflächig begrenzte Körper . . . 68
6.3.1 Der Kreiszylinder . . . 68
6.3.2 Kreiskegel und Kreiskegelstumpf . . . 69
6.3.3 Kugel und Kugelteile . . . 70
6.3.4 Rotationskörper . . . 71
6.4 Ähnliche Körper . . . 72
6.5 Extremwertaufgaben . . . 73

7 (I) Vektorgeometrie **75**
7.1 Der Vektorbegriff . . . 76
7.2 Elementare Vektoroperationen . . . 77
7.3 Linearkombination und lineare Abhänaiakeit von Vektoren . . . 78
7.4 Vektoren im Koordinatensystem . . . 79
7.4.1 Vektoren in der Ebene . . . 79
7.4.2 Vektoren im Raum . . . 80
7.5 Das Skalarprodukt . . . 81
7.6 Die Gerade . . . 82
7.7 Das Vektorprodukt . . . 83
7.8 Die Ebene . . . 84

8 (II) Platonische und Archimedische Körper. . . 85

9 (II) Einleitung und Hinweise 87
9.1 Notizen . . . 88

10 (II) Vom Umgang mit den Platonischen Körpern 89
10.1 Sprache der Form . . . 89
10.2 Gestalt der Platonischen Körper . . . 90
10.3 Darstellen der Platonischen Körper . . . 91
10.4 Vom Goldenen Schnitt . . . 92
10.5 Johannes Kepler und die Platonischen Körper . . . 93
10.6 Gegenseitige Beziehungen . . . 94
10.7 Polare Beziehungen . . . 95
10.8 Durchdringungen . . . 96
10.9 Kern und Schale . . . 97
10.10Umstülpungen . . . 98

11 (II) Didaktische Bemerkungen 99
11.1 Notizen . . . 100

12 (II) Archimedische Körper 101
12.1 Aus zweierlei Formkräften . . . 102
12.2 Eine notwendige Einfügung . . . 103
12.3 Abschleifen der Kanten beim Würfel . . . 104
12.4 Aus dreierlei Formkräften . . . 105
12.5 Die Sonderlinge . . . 106

13 (II) Irdene und goldene Reihe 107
13.1 Notizen . . . 108

14 (II) Übersichten 109
14.1 Eckenbildende Flächen der Platonischen Körper und ihre Abwicklungen . . . 110
14.2 Eckenbildende Flächen der Archimedischen Körper und ihre Abwicklungen . . . 111

15 (II) Polare Gebilde der Archimedischen Körper 113
15.1 Grundsätzliches . . . 114
15.2 Konstruktions–Anweisungen . . . 115
15.3 Verwandeln der polaren Formen . . . 116

16 (II) Symmetrieeigenschaften der regelmässigen Polyeder 117
16.1 Notizen . . . 118

17 (II) Sternartige Polyeder 119
17.1 Keplers Dodekaederstern . . . 120
17.2 Keplers Ikosaederstern . . . 121
17.3 Bindelstern . . . 122
17.4 Baravallestern . . . 123
17.5 Vergleich der vier Sternkörper . . . 124
17.5.1 Der Vielflächner aus 12 Fünfecken . . . 125
17.5.2 Der Vielflächner aus 20 Dreiecken . . . 126

18 (II) Räumliche Gebilde aus Diagonalen der Platonischen Körper **127**
18.1 Körper aus Flächendiagonalen . . . 128
18.1.1 Tetraederzwilling . . . 128
18.1.2 Würfelfünfling . . . 129
18.2 Körper aus Raumdiagonalen des Dodekaeders . . . 130
18.2.1 Hüllenstern . . . 130
18.2.2 Tetraederfünflinge . . . 131
18.2.3 Doppel–Tetraederfünfling . . . 132
18.3 Körper aus Raumdiagonalen des lkosaeders . . . 133
18.3.1 Oktaederfünfling, dem lkosaeder einbeschrieben . . . 133
18.4 Vergleich der drei Fünflinge . . . 134
18.5 Techniken . . . 135
18.5.1 Modellbau . . . 135
18.5.2 Spritzen . . . 136
18.6 Mathematische Ergänzungen . . . 137
18.6.1 Notizen . . . 137
18.7 Literatur, Transparente und Abwicklungen . . . 138
18.7.1 Notizen . . . 138

19 (III) Algebra **139**

20 (III) Grundlagen **141**
20.1 Grundbegriffe der Mengenlehre . . . 142
20.1.1 Mengen und Elemente . . . 142
20.1.2 Teilmengen . . . 143
20.1.3 Schnittmengen, Vereinigungsmengen . . . 144
20.1.4 Differenzmenge . . . 145
20.1.5 Mengenalgebra . . . 146
20.2 Rechnen mit Näherungswerten . . . 147
20.2.1 Exakte Werte und Näherungswerte . . . 147
20.2.2 Fehlertypen . . . 148
20.2.3 Rechnen bei Verwendung von Näherungswerten . . . 149
20.2.4 Rechnen bei Verwendung von Näherungswerten ohne Fehlerangabe . . . 150

21 (III) Arithmetik **151**
21.1 Zahlen, Terme, Ordnungsrelationen . . . 152
21.1.1 Zahlenmengen . . . 152
21.1.2 Der Betrag einer Zahl . . . 153
21.1.3 Terme . . . 154
21.1.4 Polynome . . . 155
21.1.5 Ordnungsrelationen . . . 156
21.2 Addition, Subtraktion . . . 157
21.3 Multiplikation . . . 158
21.3.1 Distributivgesetz, binomische und trinomische Formeln . . . 158
21.3.2 Faktorzerlegung . . . 159
21.4 Division . . . 160
21.4.1 Erweitern und kürzen . . . 160
21.4.2 Addieren und subtrahieren . . . 161
21.4.3 Multiplizieren . . . 162
21.4.4 Dividieren . . . 163
21.4.5 Polynomdivision . . . 164
21.4.6 Vermischte Probleme . . . 165
21.5 Potenzen . . . 166

21.5.1 Definition von a^n . . . 166
21.5.2 Addieren und subtrahieren von Potenzen . . . 167
21.5.3 Anwendung der Potenzsätze . . . 168
21.5.4 Vermischte Probleme . . . 169
21.5.5 Zehnerpotenzen . . . 170
21.6 Wurzeln . . . 171
21.6.1 Die Quadratwurzel . . . 171
21.6.2 Definition der n–ten Wurzel aus a und Potenzdarstellung der n–ten Wurzel aus a . 172
21.6.3 Das Rechnen mit Wurzeln . . . 173
21.6.4 Vermischte Probleme . . . 174
21.7 Logarithmen . . . 175
21.7.1 Zehnerlogarithmen (dekadische Logarithmen) . . . 175
21.7.2 Logarithmen mit beliebiger Basis . . . 176
21.7.3 Logarithmengesetze . . . 177

22 (III) Gleichungen **179**
22.1 Aussagen und Aussageformen . . . 180
22.1.1 Aussagen . . . 180
22.1.2 Verknüpfung von Aussagen . . . 181
22.1.3 Aussageformen . . . 182
22.1.4 Äquivalenz von Aussageformen . . . 183
22.2 Lineare Gleichungen . . . 184
22.2.1 Gleichungen ohne Parameter . . . 184
22.2.2 Gleichungen mit Parametern . . . 185
22.2.3 Lineare Ungleichungen . . . 186
22.3 Quadratische Gleichungen . . . 187
22.3.1 Definition . . . 187
22.3.2 Äquivalente und nicht äquivalente Umformungen . . . 188
22.3.3 Lösungsverfahren . . . 189
22.3.4 Sonderfälle . . . 190
22.3.5 Substitution . . . 191
22.3.6 Textaufgaben . . . 192
22.3.7 Parameteraufgaben, Satz von Vieta . . . 193
22.3.8 Zerlegung von $a\,x^2 + b\,x + c$ in Linearfaktoren . . . 194
22.4 Quadratische Gleichungen . . . 195
22.4.1 Definition . . . 195
22.4.2 Äquivalente und nicht äquivalente Umformungen . . . 196
22.4.3 Lösungsverfahren . . . 197
22.4.4 Textaufgaben . . . 200
22.4.5 Parameteraufgaben, Satz von Vieta . . . 201
22.4.6 Zerlegung von $a\,x^2 + b\,x + c$ in Linearfaktoren . . . 202
22.5 Besondere Gleichungstypen . . . 203
22.5.1 Bruchgleichungen . . . 203
22.5.2 Wurzelgleichungen . . . 204
22.5.3 Produkt $= 0$ . . . 205
22.5.4 Exponentialgleichungen . . . 206
22.5.5 Logarithmische Gleichungen . . . 207
22.6 Gleichungen mit mehreren Unbekannten . . . 208
22.6.1 Lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten . . . 208
22.6.2 Lineare Gleichungen mit drei und mehr Unbekannten . . . 209
22.6.3 Nicht lineare Gleichungssysteme . . . 210
22.7 Vermischte Textaufgaben . . . 211
22.8 Gleichungen 3. und höheren Grades, transzendente Gleichungen . . . 212

23 (III) Funktionen **213**
23.1 Kartesisches Koordinatensystem . . . 214
23.2 Der Funktionsbegriff . . . 215
23.3 Lineare Funktionen . . . 216
23.3.1 Definition der linearen Funktion . . . 216
23.3.2 Der Graph einer linearen Funktion . . . 217
23.3.3 Aufgaben aus der Praxis . . . 218
23.3.4 Berechnung von Flächen . . . 219
23.3.5 Senkrechte Geraden . . . 220
23.3.6 Abschnittsweise lineare Funktionen . . . 221
23.3.7 Betragsfunktionen . . . 222
23.3.8 Geradenscharen . . . 223
23.3.9 Graphisches Lösen linearer Gleichungssysteme . . . 224
23.4 Quadratische Funktionen . . . 225
23.4.1 Der Graph einer quadratischen Funktion . . . 225
23.4.2 Quadratische Ungleichungen . . . 226
23.4.3 Bestimmung der Funktionsgleichung . . . 227
23.4.4 Schnittpunkte von Graphen . . . 228
23.4.5 Parabel und Tangente . . . 229
23.4.6 Parabelscharen . . . 230
23.4.7 Geometrische Örter . . . 231
23.4.8 Extremwertaufgaben . . . 232
23.4.9 Graphisches Lösen nicht linearer Gleichungssysteme . . . 233
23.4.10 Probleme aus Physik und Technik . . . 234
23.5 Potenzfunktionen . . . 235
23.6 Polynomfunktionen . . . 236
23.7 Rationale Funktionen . . . 237
23.8 Umkehrung von Funktionen . . . 238
23.9 Wurzelfunktionen . . . 239
23.10 Exponentialfunktionen . . . 240
23.11 Logarithmusfunktionen . . . 241
23.12 Winkelfunktionen . . . 242
23.13 Optimieren . . . 243
23.13.1 Lineare Ungleichungen mit zwei Unbekannten . . . 243
23.13.2 Lineare Optimierung . . . 244
23.13.3 Extremwertaufgaben . . . 245

Kapitel 1

Einführung

Dieses Buch ist als Arbeitsbuch für einen Vorkurs, Stützkurs oder Reaktivierungskurs gedacht, in dem es um die Grundlagen der Mathematik geht. Hier wird daher kein exakter Aufbau von mathematischem Wissen geboten, denn dafür sind andere Kurse geschrieben worden. Vielmehr sollen an dieser Stelle die für die Fachhochschule notwendigen Grundlagen in Richtung Architektur und verwandte Gebiete auf einen Stand gebracht werden, der müheloses Arbeiten erlaubt, damit für die kommende Praxis in den technischen Aspekten des Baubereiches ein hochschulwürdiges Wissen vorhanden ist. Dieses ist notwendig um die Sicherheit von Konstruktionen und Dimensionierungen zu verstehen, um Effizienzberechnungen anstellen zu können, um mit Finanzen rechnen zu können oder auch nur um die Normen lesen und verstehen zu können. Daneben sollte z.B. ein Architekt den Umgang mit seinem ureigensten Werkzeug, der Geometrie, auf einem hochschulwürdigen Niveau beherrschen.
„Arbeitsbuch" bedeutet, dass der Stoff nach dem Fahrplan des Inhaltsverzeichnisses anhand der abgegebenen Werke aus der Literatur in Eigenarbeit erarbeitet werden soll. Es sind daher keine oder allenfalls nur wenige Angaben zum Stoffinhalt gemacht. Gleiches gilt für die Übungen.

Bei diesem Buch handelt es sich demnach nicht um eine schulartige Einführung in die Mathematik der genannten Stufe. Eine solche findet man unter den Skripten des Autors (siehe z.B. „Grundlagen") via den Link (Lit. [1])

`http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html`

Im Herbst 2008 Der Autor

Der Mensch hat dreierlei Wege, um zu lernen:
Erstens durch Nachdenken, das ist der edelste;
zweitens durch Nachahmen, das ist der leichteste;
drittens durch Erfahrung, das ist der bitterste.

Konfuzius

Kapitel 2

(I) Geometrie

Kapitel 3

(I) Grundlagen

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Mathematik für Mittelschulen, Geometrie“ von Peter Frommenwiler und Kurt Studer, Sauerländer-Verlag (Lit. [2])

3.1 Dimensionskontrolle

Begriffe und Zusammenhänge:

Geometrische Aufgaben kann man physikalisch interpretieren, indem man die Masse (Längen, Flächeninhalten Volumeninhalte) mit Einheiten versieht.

Auf physikalsiche Grössen kann man die arithmetischen Elementaroperationen anwenden.

Pysikalische Grössen sind Masszahlen, welche mit Einheiten versehen sind. Bei der Addition oder Subtraktion von Grössen müssen die Einheiten gleich sein. Bei der Multiplikation oder Division von physikalsichen Grössen rechnet man die Einheiten entsprechend mit Hilfe der gleichen Operationen mit.

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Begriffe klar und versuche, die vorkommenden Aussagen zu beweisen. Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

3.2 Der mathematische Lehrsatz

3.2.1 Der Aufbau eines mathematischen Lehrsatzes

Begriffe und Zusammenhänge:

Ein mathematischer Satz ist eine wahre Aussage über einen mathematischen Inhalt. Ein solcher Satz besteht in der Regel aus einer Voraussetzung V, den Bedingungen, unter denen der Satz wahr sein soll, und der Behauptung B (darum geht es dabei) sowie dem Beweis (Bew).

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Begriffe klar und versuche, die vorkommenden Aussagen zu beweisen. Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

3.2.2 Wahre und falsche Implikationen

Begriffe und Zusammenhänge:

Bei einem bewiesenen Satz handelt es sich um eine wahre logische Implikation (wahre Wenn–Dann–Aussage) der Form $V \Rightarrow B$. Um einen Satz zu beweisen, wendet man verschiedene Beweistechniken an.

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Begriffe klar und versuche, die vorkommenden Aussagen zu beweisen. Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

3.2.3 Die Umkehrung einer Implikation

Begriffe und Zusammenhänge:

Wenn ein mathematischer Satz, d.h. eine Aussage der Form $V \Rightarrow B$, wahr ist, dann braucht die umgekehrte Aussage oder Umkehrung $B \Rightarrow A$ nicht auch zwingend wahr zu sein. Sie kann sich als wahr oder auch als falsch erweisen. Wenn aber eine Aussage sowohl als auch ihre Umkehrung war ist, so redet man von einer Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ (A äquivalent B oder A gilt genau dann wenn B gilt).

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Begriffe klar und versuche, die vorkommenden Aussagen zu beweisen. Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

Kapitel 4

(I) Planimetrie

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Mathematik für Mittelschulen, Geometrie“ von Peter Frommenwiler und Kurt Studer, Sauerländer-Verlag (Lit. [2])

4.1 Winkel

4.1.1 Winkel an Parallelen, Winkel am Dreieck

Begriffe und Zusammenhänge:

1. Winkel, Winkelmass, Scheitel, Schenkel, Verwendung von griechischen Buchstaben.
2. Winkel an geschnittenen Parallelen: Stufenwinkel und Wechselwinkel, Gleichheitsbeziehungen, Ergänzung auf 180 Grad.
3. Winkel am Dreieck: Die Winkelsumme ist 180 Grad.
4. Die Aussenwinkel am Dreieck sind gleich den gegenüberliegenden Innenwinkeln.
5. Die Aussenwinkel je einseitig sind zusammen 360 Grad.
6. Gleichseitige Dreiecke: Alle Winkel sind 60 Grad.
7. Gleichschenklige Dreiecke.

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Begriffe klar und versuche, die vorkommenden Aussagen zu beweisen. Skizzen! Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

4.1.2 Winkel am Kreis

Begriffe und Zusammenhänge:

1. Peripheriewinkel und Zentriwinkel.
2. Alle Peripheriewinkel über einem Bogen sind gleich.
3. Ein Peripheriewinkel ist doppelt so gross wie der Zentriwinkel über einem Bogen.
4. Spialfall: Wenn der Bogen gerade der Halbkreis ist, hat man den Satz von Thales. Der Peripheriewinkel misst dort 90 Grad.
5. Ein Peripheriewinkel ist gleich dem Sehnen–Tangentenwinkel an einem Bogen.
6. Ein Viereck in einem Kreis mit den Eckpunkten auf dem Kreis heisst Sehnenviereck.
7. In einem Sehenviereck ergänzen sich gegenüberliegende Winkel auf 180 Grad.

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Begriffe klar und versuche, die vorkommenden Aussagen zu beweisen. Skizzen! Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

4.2 Berechnungen am Dreieck und Viereck

4.2.1 Einfache Aufgaben zu Pythagoras, Katheten– und Höhensatz

Begriffe und Zusammenhänge:

Pythagoras: In einem rechtwinklichen Dreieck ist das Hypothenusenquadrat gleich der Summe der Kathetenquadrate.

Kathetensatz von Euklid: In einem rechtwinklichen Dreieck ist das Produkt einer Hypothenuse mit dem durch die Höhe auf die Hypothenuse bedingten Hypothenusenabschnitt gleich dem Kathetenquadrat.

Höhensatz von Euklid: In einem rechtwinklichen Dreieck ist das Quadrat der Höhe auf die Hypothenuse gleich dem Produkt der durch die Höhe bedingten Hypothenusenabschnitte.

Spezielle Übungen:

Studiere dazu Beweise in Lehrbüchern. Es gibt welche, die sehr kurz und unmittelbar einsichtig sind.

4.2.2 Spezielle Dreiecke

Begriffe und Zusammenhänge:

Im gleichseitigen oder im gleichschenklig–rechtwinkligen Dreieck lassen sich bei einer bekannten Seite oder Höhe die andern Seiten oder Höhen exakt berechnen.

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Berechnungen im Lehrbuch.

4.2.3 Kreisberührungsaufgaben

Begriffe und Zusammenhänge:

Z.B. im Zusammenhang mit gotischen Fenstern entstehen sehr interessante Aufgaben. Dabei gilt es Strecken oder Radien zu berechnen, wenn durch eine Figur mit wenigen Angaben gegeben sind.

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Berechnungen im Lehrbuch.

4.2.4 Berechnung von Flächeninhalten und Abständen

Begriffe und Zusammenhänge:

Die Dreiecksfläche kann man als eine halbe Rechtecksfläche berechnen. Ebenso lässt sich ein Parallelogramm oder ein Trapez sehr einfach in ein berechenbares Rechteck verwandeln. Hier erkennt man, dass der Flächeninhalt gleich der mittleren Breite mal die Höhe ist.

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

4.2.5 Tangentenabschnitte, Tangentenviereck

Begriffe und Zusammenhänge:

Zwei Tangenten an einen Kreis mit den Tangentialpunkten $T_1,\ T_2$ schneiden sich in einem Punkt P (Tangentenschnittpunkt). Dann sind die beiden Tangentenabschnitte gleich lang:

$$|\overline{PT_1}| = |\overline{PT_2}|$$

Vier Tangenten an einen Kreis schneiden sich paaweise so, dass ein Tangentenviereck entsteht. Dabei gehören die Schnittpunkte jeweis zu zwei Tangenten an auf dem Kreis benachbarten Tangentialpunkten. Der Kreis ist jetzt Inkreis dieses Vierecks. Die Lägen den entstehenden Vierecksseiten sind $a,\ b,\ c$ und d in natürlicher Reihenfolge. Dann gilt

$$a + c = b + d$$

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

4.2.6 Vermischte Probleme

In diesem Abschnitt werden im Lehrbuch nur Übungsaufgaben präsentiert.

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

4.3 Was im erwähnten Lehrbuch noch vorausgesetzt ist

4.3.1 Allgemeine geometrische Grundlagen

Begriffe und Zusammenhänge:

1. Grundbegriffe
2. Grundrelationen
3. Axiome der euklidschen Geometrie
4. Definitionen von geometrischen Objekten (Elemente)
5. Lemmata, Theoreme und Korollare, Konstruktionsmethoden
6. Anwendungen dazu

Spezielle Übungen:

Konsultiere dazu die an Gymnasien verwendete Schulbuchliteratur älteren Datums. Neuere Literatur ist in dieser Beziehung oft nicht mehr genügend und daher unbrauchbar. Hier muss ein Kulturverlust bedauert werden, da am Beispiel der euklidschen Geometrie die mathematische Mehtodik exemplarisch vortrefflich geschult werden kann.

4.3.2 Kongruenzgeometrie

Begriffe und Zusammenhänge:

Kongruenz bei geometrischen Figuren bedeutet form– und flächen– oder grössengleich. Die Form einer Figur wird durch die Winkelgrössen bestimmt. Zwei Dreiecke sind kongruent:

1. Wenn sie in allen Seiten übereinstimmen.
2. Wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.
3. Wenn sie in zwei Seiten und dem Winkel übereinstimmen, welcher der grösseren der beiden Seiten gegenüber liegt.
4. Wenn sie in einer Seite und den anliegenden Winkeln übereinstimmen.

Spezielle Übungen:

Konsultiere dazu die an Gymnasien verwendete Schulbuchliteratur älteren Datums. Neuere Literatur ist in dieser Beziehung oft nicht mehr genügend und daher unbrauchbar. Hier muss ein Kulturverlust bedauert werden, da am Beispiel der euklidschen Geometrie die mathematische Mehtodik exemplarisch vortrefflich geschult werden kann.

4.4 Berechnungen am Kreis

4.4.1 Kreis und Kreisring

Begriffe und Zusammenhänge:

Kreis mit Radius r: Umfang $u = 2\,\pi\,r$, Flächeninhalt $A = r^2\,\pi$.

Kreisring mit Innenradius r, mittlerem Radius r_m und Aussenradius R: Ringbreite $b = R - r$;
Flächeninhalt $A = R^2\,\pi - r^2\,\pi = (R^2 - r^2)\,\pi = (R + r)(R - r)\,\pi = 2\,r_m\,b\,\pi$, $\;r_m = r + \frac{b}{2} = R - \frac{b}{2}$.

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

4.4.2 Kreisring

In diesem Abschnitt werden im Lehrbuch nur Übungsaufgaben präsentiert.

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

4.4.3 Das Bogenmass

Begriffe und Zusammenhänge:

Das Bogenmass als Winkelmass: $b =$ Bogenlänge, $r =$ Radius $\Rightarrow \varphi = \frac{b}{r}$.

Manchmal wird das Bogenmass als Winkelmass auch mit $\widehat{\varphi}$ oder auch mit $arc(\varphi)$ bezeichnet. In der Physik, wo zu Masszahlen immer eine Einheit gehört, hat man für das Bogenmass die künstliche Einheit *rad* eingeführt. Dabei handelt es sich aber nicht um eine physikalische Einheit, da man die Einheitsbogenlänge nicht physikalisch eichen kann. (Zu physikalischen Einheiten gibt es immer ein Eichexperiment.) In der Physik wird meistens noch das Altgradmass verwendet, das an das mittlere Jahr angelehnt ist. (Vollwinkel 360^o, $360 =$ Mittelwert zwischen dem Sonnenjahr zu 366 Tagen und dem Mondjahr zu 354 Tagen.)

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

4.4.4 Der Kreissektor

Begriffe und Zusammenhänge:

Sei r = Radius, b = Bogenlänge, φ = Zentriwinkel, A_{Sek} = Flächeninhalt. Dann gilt:

$$b = \varphi \cdot r, \quad A_{Sek} = \frac{1}{2} \cdot \varphi \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot b \cdot r$$

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

4.4.5 Das Segment

Begriffe und Zusammenhänge:

Wenn man von einem Kreissektor das durch die beiden Radien gebildete Dreieck wegnimmt, bleibt noch das durch den Bogen und die Sehne eingeschlossene Kreissegment.
Sei r = Radius, b = Bogenlänge, φ = Zentriwinkel, s = Sehnenlänge, h = Segmenthöhe, A_{Seg} = Flächeninhalt des Segments. Dann gilt:

$$A_{Seg} = A_{Sek} - A_{Dreieck} \text{ für } \varphi < \pi$$

$$A_{Seg} = A_{Sek} + A_{Dreieck} \text{ für } \varphi > \pi$$

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

4.4.6 Vermischte Probleme

In diesem Abschnitt werden im Lehrbuch nur Übungsaufgaben präsentiert.

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

4.5 Strahlensätze

4.5.1 Die Sätze

Begriffe und Zusammenhänge:

Zwei sich in P schneidende Geraden erzeugen Paare von nicht parallelen, von P ausgehenden Strahlen s_1 und s_2. Diese Strahlen werden von zwei Parallelen g_1 und g_2 geschnitten. Wenn wir die dadurch entstehenden Streckenabschnitte von P aus nummerieren, so erhalten wir auf s_1 die Strecken mit den Längen a_1 und a_2. Auf s_2 erhalten wir die Strecken mit den Längen b_1 und b_2. Und auf g_1 und g_2 die Strecken mit den Längen c_1 und c_2. Dann gelten die Strahlensätze:

Regel:

1. 1. Strahlensatz: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}, \; \frac{a_1}{a_1 + a_2} = \frac{b_1}{b_1 + b_2}$
2. 2. Strahlensatz: $\frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1}{a_1 + a_2} = \frac{b_1}{b_1 + b_2}$

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

4.5.2 Der Schwerpunkt des Dreiecks

Begriffe und Zusammenhänge:

In einem Dreieck heisst der Geradenabschnitt von einer Ecke zur Mitte der gegenüberligenden Seite Schwerlinie. Dann gilt:

1. Die drei Schwerlinien in einem Dreieck schneiden sich in einem Punkt, dem Schwerpunkt S.
2. Der Schwerpunkt teilt jede Schwerlinie im Verhältnis 2 : 1.

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

4.5.3 Die Winkelhalbierenden im Dreieck

Begriffe und Zusammenhänge:

In einem Dreieck mit den Seiten a, b und c und den Eckpunkten A, B und C wird der Winkel γ bei C halbiert. Dadurch entsteht eine Winkelhalbierende Gerade, die die Seite c in die Abschnitte c_a (an a anliegend) und c_b (an b anliegend) teilt. Dann gilt:

$$\frac{c_a}{c_b} = \frac{a}{b}$$

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

4.6 Ähnliche Figuren

4.6.1 Die zentrische Streckung

Begriffe und Zusammenhänge:

Wir nennen eine Abbildung eines Urbildpunktes P in einen Bildpunkt P' eine **zentrische Streckung** mit Zentrum Z und Streckungsfaktor λ, wenn gilt:

1. P' liegt auf der Geraden $\overline{ZP}$.
2. $|\overline{ZP'}| = \lambda \cdot |\overline{ZP}|$.

Wenn $\lambda > 0$ ist, so kann statt der Geraden $\overline{ZP}$ der Strahl $\overline{ZP}$ zugrunde gelegt werden. Man sagt, dass dann P in P' positiv gestreckt wird.
Wenn $\lambda < 0$ ist, so wird P in P' negativ gestreckt.
Bei $|\lambda| \in (0,\ 1)$ spricht man von einer Verkleinerung.
Bei $|\lambda| > 1$ spricht man von einer Vergrösserung.
Bei $|\lambda| = 1$ ist das Bild kongruent zum Original.

Regel:

1. Das Bild einer Geraden ist eine Gerade.
2. Die Urbildgerade und die Bildgerade sind parallel.
3. Das Bild einer Strecke mit der Länge a hat die Länge $|\lambda| \cdot a$. Speziell gilt das für Kreisradien.
4. Für den Flächeninhalt A' des Bildes einer Figur mit der Flächeninhalt A gilt: $A' = \lambda^2 \cdot A$.
5. Winkel behalten bei der Abbildung ihre Grösse bei.

Wir sagen: Ein konvexes Viereck A ist in einer konvexen Figur B eingeschrieben, wenn jede Ecke von A auf dem Rande von B liegt.

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

4.6.2 Ähnliche Figuren

Begriffe und Zusammenhänge:

Wir nennen eine Figur U ähnlich zu einer Figur V, wenn man eine zentrische Streckung angeben kann, welche U so vergrössert oder verkleinert, dass das Resultat kongruent zu V ist. Symbol: $U \sim V$.

Für ähnliche Figuren U und V gilt:

1. Alle entsprechenden Winkel sind gleich gross.
2. Alle entsprechenden Strecken oder Kurven haben dasselbe Längenverhäntnis λ:
   $U \;\mapsto\; V \rightsquigarrow\; a \;\mapsto\; a' = \lambda\, a.$
3. Alle entsprechenden Flächen haben dasselbe Inhaltsverhäntnis λ^2:
   $F_U \;\mapsto\; F_V \rightsquigarrow\; F_k \;\mapsto\; F'_k = \lambda^2\, F_k.$

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

4.6.3 Ähnliche Dreiecke

Begriffe und Zusammenhänge:

Ähnlichkeit bei geometrischen Figuren bedeutet formgleich. Die Form einer Figur wird durch die Winkelgrössen bestimmt. Zwei Dreiecke sind kongruent:

1. Wenn sie in den Verhältnissen aller Seiten übereinstimmen.
2. Wenn sie in den Verhältnissen zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.
3. Wenn sie in den Verhältnissen zweier Seiten und dem Winkel übereinstimmen, welcher der grösseren der beiden Seiten gegenüber liegt.
4. Wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen.
5. Die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Seiten.

Zwei Dreiecke sind in perspektiver Lage, wenn sie durch zwei sich schneidende Geraden g_1 und g_2 und zwei Parallelen h_1 und h_2 gebildet werden, welche g_1 und g_2 je in einem Punkt schneiden.

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

4.6.4 Ähnlichkeit am Kreis, Sehnensatz, Sekanten–Tangentensatz

Begriffe und Zusammenhänge:

Sehnensatz: Sei S ein Punkt innerhalb eines Kreises. S schneidet eine Sehne u in zwei Teile u_1 und u_2. Ebenso schneidet S v in zwei Teile v_1 und v_2 und auch w in w_1 und w_2. Dann gilt:

$$u_1 \cdot u_2 = v_1 \cdot v_2 = w_1 \cdot w_2$$

Sekanten–Tangentensatz: Sei S ein Punkt ausserhalb eines Kreises. Die durch S gehende Gerade g schneidet den Kreis in T_1 und T_2. $u_1 = |\overline{ST_1}|,\ \ u_2 = |\overline{ST_2}|$. Ebenso schneidet die durch S gehende Gerade h den Kreis in H_1 und H_2. $v_1 = |\overline{SH_1}|,\ \ v_2 = |\overline{SH_2}|$ Dann gilt:

$$u_1 \cdot u_2 = v_1 \cdot v_2$$

Der Satz gilt auch noch, wenn h eine Tangente an den Kreis ist. Dann gilt $v_1 = v_2$.

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

Kapitel 5

(I) Trigonometrie

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Mathematik für Mittelschulen, Geometrie“ von Peter Frommenwiler und Kurt Studer, Sauerländer-Verlag (Lit. [2])

5.1 Das rechtwinklige Dreieck

5.1.1 Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck

5.1.2 Aufgaben aus der Optik

5.1.3 Flächeninhalt eines Dreiecks

5.1.4 Berechnungen am Kreis

5.2 Das allgemeine Dreieck

5.2.1 Definition der Winkelfunktionen für beliebige Winkel

5.2.2 Sinussatz

5.2.3 Cosinussatz

5.2.4 Vermischte Probleme mit Parameter

5.3 Probleme aus Physik und Technik

5.3.1 Probleme aus der Statik

5.3.2 Probleme aus der Vermessung

5.4 Ähnliche Figuren

5.5 Trigonometrische Funktionen

5.5.1 Argumente im Gradmass

5.5.2 Argumente im Bogenmass

5.5.3 Angewandte Aufgaben

5.6 Goniometrie

5.6.1 Beziehungen zwischen $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ und $\tan(\alpha)$

5.6.2 Additionstheoreme

5.6.3 Funktionen des doppelten Winkels

5.6.4 Transzendente Gleichungen

Kapitel 6

(I) Stereometrie

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Mathematik für Mittelschulen, Geometrie“ von Peter Frommenwiler und Kurt Studer, Sauerländer-Verlag (Lit. [2])

6.1 Beziehungen im Raum

6.1.1 Lage von Punkten, Geraden und Ebenen im Raum

6.1.2 Winkel im Raum

6.2 Ebenflächig begrenzte Körper (Polyeder)

6.2.1 Das Prisma

6.2.2 Pyramide und Pyramidenstumpf

6.2.3 Prismatoide

6.2.4 Reguläre Polyeder (Platonische Körper)

6.3 Krummflächig begrenzte Körper

6.3.1 Der Kreiszylinder

6.3.2 Kreiskegel und Kreiskegelstumpf

6.3.3 Kugel und Kugelteile

6.3.4 Rotationskörper

6.4 Ähnliche Körper

6.5 Extremwertaufgaben

Kapitel 7

(I) Vektorgeometrie

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Mathematik für Mittelschulen, Geometrie“ von Peter Frommenwiler und Kurt Studer, Sauerländer-Verlag (Lit. [2])

7.1 Der Vektorbegriff

7.2 Elementare Vektoroperationen

7.3 Linearkombination und lineare Abhänaiakeit von Vektoren

7.4 Vektoren im Koordinatensystem

7.4.1 Vektoren in der Ebene

7.4.2 Vektoren im Raum

7.5 Das Skalarprodukt

7.6 Die Gerade

7.7 Das Vektorprodukt

7.8 Die Ebene

Kapitel 8

(II) Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde“ von Paul Adam und Arnold Wyss, Haupt–Verlag Bern (Lit. [3])

Kapitel 9

(II) Einleitung und Hinweise

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde“ von Paul Adam und Arnold Wyss, Haupt–Verlag Bern (Lit. [3])

9.1 Notizen

Kapitel 10

(II) Vom Umgang mit den Platonischen Körpern

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde“ von Paul Adam und Arnold Wyss, Haupt–Verlag Bern (Lit. [3])

10.1 Sprache der Form

10.2 Gestalt der Platonischen Körper

10.3 Darstellen der Platonischen Körper

10.4 Vom Goldenen Schnitt

10.5 Johannes Kepler und die Platonischen Körper

10.6 Gegenseitige Beziehungen

10.7 Polare Beziehungen

10.8 Durchdringungen

10.9 Kern und Schale

10.10 Umstülpungen

Kapitel 11

(II) Didaktische Bemerkungen

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde“ von Paul Adam und Arnold Wyss, Haupt–Verlag Bern (Lit. [3])

11.1 Notizen

Kapitel 12

(II) Archimedische Körper

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde“ von Paul Adam und Arnold Wyss, Haupt–Verlag Bern (Lit. [3])

12.1 Aus zweierlei Formkräften

12.2 Eine notwendige Einfügung

12.3 Abschleifen der Kanten beim Würfel

12.4 Aus dreierlei Formkräften

12.5 Die Sonderlinge

Kapitel 13

(II) Irdene und goldene Reihe

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde“ von Paul Adam und Arnold Wyss, Haupt–Verlag Bern (Lit. [3])

13.1 Notizen

Kapitel 14

(II) Übersichten

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde“ von Paul Adam und Arnold Wyss, Haupt–Verlag Bern (Lit. [3])

14.1 Eckenbildende Flächen der Platonischen Körper und ihre Abwicklungen

14.2 Eckenbildende Flächen der Archimedischen Körper und ihre Abwicklungen

Kapitel 15

(II) Polare Gebilde der Archimedischen Körper

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde“ von Paul Adam und Arnold Wyss, Haupt–Verlag Bern (Lit. [3])

15.1 Grundsätzliches

15.2 Konstruktions–Anweisungen

15.3 Verwandeln der polaren Formen

Kapitel 16

(II) Symmetrieeigenschaften der regelmässigen Polyeder

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde“ von Paul Adam und Arnold Wyss, Haupt–Verlag Bern (Lit. [3])

16.1 Notizen

Kapitel 17

(II) Sternartige Polyeder

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde“ von Paul Adam und Arnold Wyss, Haupt–Verlag Bern (Lit. [3])

17.1 Keplers Dodekaederstern

17.2 Keplers lkosaederstern

17.3 Bindelstern

17.4 Baravallestern

17.5 Vergleich der vier Sternkörper

17.5.1 Der Vielflächner aus 12 Fünfecken

17.5.2 Der Vielflächner aus 20 Dreiecken

Kapitel 18

(II) Räumliche Gebilde aus Diagonalen der Platonischen Körper

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde“ von Paul Adam und Arnold Wyss, Haupt–Verlag Bern (Lit. [3])

18.1 Körper aus Flächendiagonalen

18.1.1 Tetraederzwilling

18.1.2 Würfelfünfling

18.2 Körper aus Raumdiagonalen des Dodekaeders

18.2.1 Hüllenstern

18.2.2 Tetraederfünflinge

18.2.3 Doppel–Tetraederfünfling

18.3 Körper aus Raumdiagonalen des lkosaeders

18.3.1 Oktaederfünfling, dem lkosaeder einbeschrieben

18.4 Vergleich der drei Fünflinge

18.5 Techniken

18.5.1 Modellbau

18.5.2 Spritzen

18.6 Mathematische Ergänzungen

18.6.1 Notizen

18.7 Literatur, Transparente und Abwicklungen

18.7.1 Notizen

Kapitel 19

(III) Algebra

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Mathematik für Mittelschulen, Algebra“ von Peter Frommenwiler und Kurt Studer, Sauerländer-Verlag (Lit. [4])

Kapitel 20

Grundlagen

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Mathematik für Mittelschulen, Algebra“ von Peter Frommenwiler und Kurt Studer, Sauerländer-Verlag (Lit. [4])

20.1 Grundbegriffe der Mengenlehre

20.1.1 Mengen und Elemente

Begriff und Zusammenhänge:

Eine Menge ist, etwas vereinfacht gesagt, eine Zusammenfassung von unterscheidbaren Objekten des Denkens. Die Objekte nennen wir Elemente. Eine Menge, welche keine Element enthält, heisst leere Menge. Die Menge aller Objekte, welche in einem gesetzten Fall betrachtet werden sollen, heisst Grundmenge.

Schreibweise:

1. $a \in M \rightsquigarrow$ Das Element a gehört zur Menge M. (a ist in M enthalten.)
2. $a \notin M \rightsquigarrow$ Das Element a gehört nicht zur Menge M.

Eine Menge kann wir folgt gegeben sein:

1. Durch eine Aufzählung der Elemente, z.B. $M = \{1, 2, 3, \ldots, 45, 46\}$.
2. Durch die Angabe von definierenden Eigenschaften der Elemente, z.B. $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = \pi\}$.
3. $M = \{\}$ (leere Menge).
4. $M = U$ (universelle Menge oder Grundmenge).

Eine Menge kann endlich viele Elemente haben (endliche Menge). Sie kann aber auch unendlich viele Elemente haben (unendliche Menge). $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ sind unendliche Mengen.

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

20.1.2 Teilmengen

Begriff und Zusammenhänge:

Wenn jedes Element einer Menge A auch in einer anderen Menge B enthalten ist, so heisst A Teilmenge von B.

Schreibweise:

1. $A \subset B \leadsto$ Unechte Teilmenge. B ist grösser (hat mehr Elemente) als A.
2. $A \subseteq B \leadsto$ Echte Teilmenge. B ist grösser als oder gleich zu A.

Darstellung: Durch Mengendiagramme (Euler–, früher auch Venn—Diagramme).

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

20.1.3 Schnittmengen, Vereinigungsmengen

Begriffe:

Die Menge der Elemente, welche sowohl in A als auch in B enthalten sind, heisst Schnittmenge $A \cap B$ von A und B.

Die Menge der Elemente, welche in A oder in B (oder in beiden zugleich) enthalten sind, heisst Vereinigungsmenge $A \cup B$ von A und B.

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

20.1.4 Differenzmenge

Begriff:

Die Menge der Elemente, welche in A, aber nicht in B enthalten sind, heisst Differenzmenge $A \setminus B$ von A und B.
Die Mengendifferenz einer Menge A zur Grundmenge U heisst Komplement $\bar{A}$ von A bezüglich U.

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

20.1.5 Mengenalgebra

Zusammenhänge:

Für Mengen und ihre Beziehungen ($\subset, \cap, \cup, \setminus$ u.s.w.) gelten eine ansehliche Anzahl von Regeln, die wegen ihres Umfangs hier nicht alle aufgezählt werden können. Einige davon sind:

Regel:

1. $A \cap B = B \cap A$ (Kommutativgesetz)
2. $A \cup B = B \cup A$ (Kommutativgesetz)
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (Assoziativgesetz)
4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (Assoziativgesetz)
5. $A \cup \{\} = A$ ($\{\}$ ist neutral)
6. $A \cap \{\} = \{\}$ (wie $x \cdot 0 = 0$)
7. $A \cup U = U$ (wie $x \cdot 0 = 0$)
8. $A \cap U = A$ (U ist neutral)
9. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
10. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
11. u.s.w.

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

20.2 Rechnen mit Näherungswerten

20.2.1 Exakte Werte und Näherungswerte

Regeln und Zusammenhänge:

Bsp.:

$1,\ 4,\ \ -6,\ \frac{2}{3},\ 0.25=\frac{1}{4},\ 0.33\bar{3}\ldots=\frac{1}{3},\ \pi,\ \ \ldots$ sind exakte Werte.

Näherungswerte sollten dagegen immer speziell gekennzeichnet werden.

Beispiele: $F = 0.124 \pm 0.001,\ \sqrt{2} \approx 1.414,\ \pi \approx 3.14159,\ \pi \approx 3.14 \pm 0.01$. Leider muss man feststellen, dass die exakte Unterscheidung zwischen exakten Werten und Näherungswerten in der Literatur oft zu wünschen übrig lässt.

Bei physikalischen Messgrössen (Zahl mit einer Einheit), die nicht Zählgrössen oder exakte Anzahlen sind, geht man davon aus, dass die letzte geschriebene Ziffer gerundet ist.

Da in den Wissenschaften oft eine „wissenschaftliche Zahlenschreibweise“ verwendet wird, muss man den Begriff der „geltenden Ziffern“ beachten. Das sind die wesentlichen Ziffern, die z.B beim Messen an der Skalierung ablesbar sind, ohne eventuelle Ziffern 0, welche nur vom Masssystem abhängen.
Beispiele: $1.32\,m = 0.00132\,km = 13.2\,dm = 1.32 \cdot 10^3\,mm \approx 1320\,mm$. Hier hat man die geltenden Ziffern 1, 2 und 3.

Rundungen:

Regel:

1. Ist ein abbrechender Dizimalbruch als gerundet (als unexakt) gekennzeichnet, so geht man davon aus, dass nur die letzte geschriebene Ziffer z_n unexakt, d.h. gerundet ist.
2. Für die Rundung ist die nächste, nicht mehr geschriebene Ziffer z_{n+1} entscheidend.
3. Ist $z_{n+1} \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, so wird abgerundet (Konvention).
4. Ist $z_{n+1} \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$, so wird aufgerundet (Konvention).

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

20.2.2 Fehlertypen

Definitionen und Zusammenhänge:

Exakte Fehler bei bekannten exakten Werten

Seien $a =$ exakter Wert und $\bar{a} =$ Näherungswert. Dann ist $\varepsilon = |a - \bar{a}|$ der absolute Fehler.
Dazu bezeichnet man $\rho = \dfrac{\varepsilon}{|a|}$ als den relativen Fehler.
Der relative Fehler kann auch in Prozent angegeben werden: $\rho\,\% = \rho \cdot 100\,\%$

Unbekannte Fehler bei unbekannten exakten Werten

Bei Messwerten ist in der Regel der exakte Wert unbekannt. Dafür kann man aber verlässliche Toleranzen oder Fehlerschranken angeben. Z.B. liegt eine Messung a im Intervall zwischen $\bar{a} - \Delta a$ und $\bar{a} + \Delta a$ $(\Delta a > 0)$. Dann schreibt man: $a = \bar{a} \pm \Delta a$.
Δa heisst hier absoluter Fehler und $\rho = \dfrac{\Delta a}{|a|}$ relativer Fehler. Der Messwert und der absolute Fehler sollten immer gleich viele Dezimalstellen aufweisen, da die Schreibweise nur so Sinn mancht.
$\rho\,\% = \dfrac{\Delta a}{|a|} \cdot 100\,\%$ ist der relative Fehler in Prozent.

Bsp.: $10.0\,cm \pm 0.1\,cm = 10.0\,cm \pm 1\,\%$

Regel:

1. Absolute und relative Fehler sollten immer aufgerundet werden.
2. Absolute und relative Fehler sollten immer auf höchstens zwei geltende Ziffern genau angegeben werden.

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

20.2.3 Rechnen bei Verwendung von Näherungswerten

Regel:

1. Fehlt bei einem Wert die Fehlerangabe, so geht man davon aus, dass die letzte Ziffer einen absoluten Fehler von ± 1 hat.
   Beispiel: $3.8\,cm = 3.8\,cm \pm 0.1\,cm$.

2. In der Regel ist bei einer Verrechnung von Näherungswerten das Fehlerfortpflanzungsgesetz anzuwenden. Dieses Gesetz kann hier aber mangels Theorie nicht behandelt werden. Es ist aber üblich, mit folgenden Näherungen zu arbeiten:

3. Bei einer Addition oder Subtraktion von Werten mit verschiedenen absoluten Fehlern gilt für das Resultat der grösste vorkommende absolute Fehler. Beispiel: $14+2.4-0.68 \approx 14+2.4-0.7 = 14+1.7 \approx 14+2 = 16$

4. Bei der Multiplikation und der Division wird oft so verfahren, dass man im Resultat die gleiche Anzahl geltende Ziffern verwendet wie der ungenauste verrechnete Näherungswert aufweist. Diese Regel wird aber aus pragmatischen Gründen (mangels Mathematik–Kenntnissen) und daher ohne Begründung verwendet. Man soll ja ein Resultat liefern und hat dabei vorerst keine andere Möglichkeit als so vorzugehen (Prinzip von Descartes für das methodische Vorgehen bei der Interpretation von Messungen).

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

20.2.4 Rechnen bei Verwendung von Näherungswerten ohne Fehlerangabe

Beispiele:

Siehe Lehrbuch.

Spezielle Übungen:

Studiere dazu die Aufgaben im Lehrbuch.

Kapitel 21

(III) Arithmetik

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Mathematik für Mittelschulen, Algebra“ von Peter Frommenwiler und Kurt Studer, Sauerländer-Verlag (Lit. [4])

21.1 Zahlen, Terme, Ordnungsrelationen

21.1.1 Zahlenmengen

Begriffe:

1. Definition der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ als Anzahlen oder Mächtigkeiten von Mengen, dazu etwas Theorie. Bemerkung zu der axiomatischen Definition von $\mathbb{N}$.
2. Definition der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ als Lösungen von $a + x = b, \;\; a, b \in \mathbb{N}$, dazu etwas Theorie.
3. Definition der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ als Lösungen von $a \cdot x = b, \;\; a, b \in \mathbb{Z}, \;\; a \neq 0$, dazu etwas Theorie. Dichtheit von $\mathbb{Q}$.
4. Das Problem der irrationalen Zahlen: $\mathbb{Q}$ ist zwar dicht, jedoch hat $\mathbb{Q}$ Löcher: Z.B. $\sqrt{2} \neq \mathbb{Q}$ (Beweis).
5. Definition der irrationalen Zahlen „Menge der Löcher in $\mathbb{Q}$“, dazu etwas Theorie.
6. Definition der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}\cup$„Menge der Löcher in $\mathbb{Q}$“, dazu etwas Theorie.
7. Darstellung von $\mathbb{R}$ als Menge von Dezimalbrüchen, dazu etwas Theorie: Problem der Doppeldeutigkeit.
   Z.B. $1.00\ldots = 0.99\ldots$.

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Begriffe klar und versuche, die vorkommenden Aussagen nachzuvollziehen. Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

21.1.2 Der Betrag einer Zahl

Begriff und Zusammenhänge:

Definition: Betrag von a:

$|a| = a$ für $a \geq 0$, $-|a| = a$ für $a < 0$.

$|a|$ entspricht dem (positiven) Abstand bei Längenmessungen an Gegenständen oder zwischen zwei Punkten in einem Koordinatensystem.

Regel:

1. $|a - b| = |b - a|$
2. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
3. $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$ für $b \neq 0$

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Begriffe klar und versuche, die vorkommenden Aussagen nachzuvollziehen. Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

21.1.3 Terme

Begriff und Zusammenhänge:

Terme werden durch folgende Regeln aufgebaut:

1. Zahlen, Parameter, Variable und Produkte von Zahlen, Parameter und Variablen sind Terme.
2. Summen (und Differenzen) von Termen sind Terme.
3. Produkte und Quotienten von Termen sind Terme.

Bsp.: $0,\ 1,\ -1,\ 3.414,\ \pi,\ -\frac{7}{9},\ a,\ b,\ x,\ x^2,\ x^99,\ -2+4\cdot x-8x^2+a\cdot\frac{7}{9}\cdot x^99,\ ,\ \frac{7\,x-a\,x^3}{9+4\,x^2-6\,x^5}\ldots$

Zur Zahl 0:

1. $\pm 0+a=a$
2. $0\cdot a=0$
3. $\frac{0}{a}=0,\ \ a\neq 0$
4. $\frac{a}{0}$ ist nicht definiert. ($\frac{a}{0}=b$ führt auf $a=0\cdot b=0\ldots$)

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Begriffe klar und versuche, die vorkommenden Aussagen nachzuvollziehen. Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

21.1.4 Polynome

Begriff:

Polynome $p(x)$ in einer Variablen x sind Terme, die man in folgender Form schreiben kann:

$p(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_2\, x^2 + a_1\, x + a_0$. Dabei ist $n \in \mathbb{N}$ und $a_n, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R},\;\; a_n \neq 0$.

n heisst Grad des Polynoms $p(x)$.

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Begriffe klar und versuche, die vorkommenden Aussagen nachzuvollziehen. Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

21.1.5 Ordnungsrelationen

Begriffe:

Die reellen Zahlen sind geordnet, z.B. im Gegensatz zu den Geraden des Raumes. Man weiss daher, ob eine gegebene Zahl grösser, gleich oder kleiner als eine gegebene andere Zahl ist.

1. $a < b \rightsquigarrow$ a ist kleiner b.
2. $a \leq b \rightsquigarrow$ a ist kleiner oder gleich b.
3. $a > b \rightsquigarrow$ a ist grösser b.
4. $a \geq b \rightsquigarrow$ a ist grösser oder gleich b.
5. $a < 0 \rightsquigarrow$ a ist negativ.
6. $a > 0 \rightsquigarrow$ a ist positiv.
7. $a < x < b \rightsquigarrow$ a kleiner x kleiner $b \rightsquigarrow$ x liegt zwischen a und b, ist aber nicht gleich a oder b.
8. $a \leq x \leq b \rightsquigarrow$ a kleiner oder gleich x kleiner oder gleich $b \rightsquigarrow$ x liegt zwischen a und b oder ist gleich a oder b.
9. U.s.w.

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Begriffe klar und versuche, die vorkommenden Aussagen nachzuvollziehen. Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

21.2 Addition, Subtraktion

Zusammenhänge:

1. Terme, welche Additions– und Subtraktionszeichen enthalten, können zur besseren Übersicht mit Klammern geschrieben werden.
2. Zwecks Vereinfachung durch Ausführung der Addition oder Subtraktion bei Teilen mit gleichen Variablenanteilen können Terme, welche Additions– und Subtraktionszeichen enthalten, ohne Klammern geschrieben werden.
3. Wenn vor einer Klammer ein Pluszeichen steht, so kann diese Klammerung weggelassen werden.
4. Wenn vor einer Klammer ein Minuszeichen steht, so kann diese Klammerung nur dann weggelassen werden, wenn vorher alle Plus– und Minuszeichen vor klammerlosen Termen oder geklammerten Termen ausgewechselt worden sind. Die Plus– und Minuszeichen in etwa vorkommenden inneren Klammern dürfen jedoch nicht geändert werden.

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Begriffe klar und versuche, die vorkommenden Aussagen nachzuvollziehen. Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

21.3 Multiplikation

21.3.1 Distributivgesetz, binomische und trinomische Formeln

Regeln:

1. $a\,(b\,c) = (a\,b)\,c = a\,b\,c$ (Assoziativgesetz)
2. $a\,(b + c) = a\,b + a\,c$ (Distributivgesetz)
3. $a\,(b - c) = a\,b - a\,c$ (Distributivgesetz)
4. $(a + b)^2 = (b + a)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$ (Binomische Formel)
5. $(a - b)^2 = (b - a)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$ (Binomische Formel)
6. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ (Binomische Formel)
7. $(a + b)^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3$ (Binomische Formel)
8. $(a - b)^3 = a^3 - 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 - b^3$ (Binomische Formel)
9. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\,a\,b + 2\,a\,c + 2\,b\,c$ (Binomische Formel)

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Begriffe klar und versuche, die vorkommenden Aussagen nachzuvollziehen. Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

21.3.2 Faktorzerlegung

Methoden:

1. Ausklammern eines gemeinsamen Faktors, Beispiel:
$$12\,a^4\,b^2 - 4\,a^3\,b^3 + 6a\,b^2 = 2\,a\,b^2\,(6\,a^3 - 2\,a^2\,b + 3)$$
2. Mehrmaliges Ausklammern, Beispiel:
$$x^2 - x\,y - x\,z - 3\,x + 3\,y + 3\,z = x\,(x - y - z) - 3\,(x - y - z) = (x - 3)(x - y - z)$$
3. Nach dem Muster von Binomen, Beispiel $(a^2 - b^2)$:
$$(u + 3)^2 - (u - 3)^2 = ((u + 3) + (u - 3))((u + 3) - (u - 3)) = 2\,u \cdot 6 = 12\,u$$
4. Nach dem Muster von Binomen, Beispiel $((a\,x + b)(x + c) = a\,x^2 + (a\,c + b)\,x + a \cdot c)$:
$$u^2 - 3\,u - 28 = (u - 7)(u + 4)$$
Hinweis: Man setze $u^2 - 3\,u - 28 = (u + b)(u + c) \;\Rightarrow\; b \cdot c = -28 = (-1) \cdot 7 \cdot 4$. Dann verteile man die Zahlen (-1), 7, 4 auf b und c und probiere aus, ob das mittlere Glied bei der gewählten Verteilung richtig ist. Falls nicht, so wähle man die Verteilung anders und probiere wieder, bis es passt.

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Begriffe klar und versuche, die vorkommenden Aussagen nachzuvollziehen. Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

21.4 Division

21.4.1 Erweitern und kürzen

Methoden:

1. Regel 1:
$$\frac{-x}{y} = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y}$$
2. Regel 2:
$$\frac{x-y}{y-x} = -1$$
3. Erweitern mit $x+y$, Beispiel:
$$\frac{3\,u}{4\,v} = \frac{3\,u\,(x+y)}{4\,v\,(x+y)} = \frac{3\,u\,x + 3\,u\,y}{4\,v\,x + 4\,v\,y} \qquad \text{für} \quad 4\,v\,(x+y) \neq 0$$
4. Kürzen mit $x+y$, Beispiel:
$$\frac{3\,u\,x + 3\,u\,y}{4\,v\,x + 4\,v\,y} = \frac{3\,u\,(x+y)}{4\,v\,(x+y)} = \frac{3\,u}{4\,v} \qquad \text{für} \quad 4\,v\,(x+y) \neq 0$$

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Begriffe klar und versuche, die vorkommenden Aussagen nachzuvollziehen. Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

21.4.2 Addieren und subtrahieren

Methode erklärt an einem Beispiel, angelehnt an das Lehrbuch:

Behandle den folgenden Ausdruck:

$$\frac{u^2-8\,u}{2\,u^2+u-15}-\frac{u^2}{5\,u-2\,u^2}$$

1. Kürze die einzelnen Brüche:

$$\frac{u^2-8\,u}{2\,u^2+u-15}-\frac{u^2}{5\,u-2\,u^2}=\frac{u^2-8\,u}{2\,u^2+u-15}-\frac{u}{5-2\,u}$$

2. Bestimme den Hauptnenner (kgV):

$$N_1=2\,u^2+u-15=(2\,u-5)(u+3),\;\; N_2=(-1)(2\,u-5)\;\Rightarrow\; kgV=(2\,u-5)(u+3)$$

3. Erweitere die einzelnen Brüche bis der Hauptnenner erreicht ist, Beispiel:

$$=\frac{u^2-8\,u}{2\,u^2+u-15}-\frac{u}{5-2\,u}=\frac{u^2-8\,u}{(2\,u-5)(u+3)}+\frac{u}{2\,u-5}=\frac{u^2-8\,u}{(2\,u-5)(u+3)}+\frac{(u+3)\,u}{(u+3)(2\,u-5)}$$

4. Addiere oder subtrahiere dann und vereinfache gegebenenfalls, Beispiel:

$$=\frac{u^2-8\,u}{(2\,u-5)(u+3)}+\frac{(u^2+3\,u)}{(u+3)(2\,u-5)}=\frac{2\,u^2-5\,u}{(2\,u-5)(u+3)}=\frac{(2\,u-5)\,u}{(2\,u-5)(u+3)}=\frac{u}{u+3}$$

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Begriffe klar und versuche, die vorkommenden Aussagen nachzuvollziehen. Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

21.4.3 Multiplizieren

Methode erklärt an einem Beispiel, angelehnt an das Lehrbuch:

Behandle den folgenden Ausdruck:

$$\left(1+\frac{1}{b}\right)^2\left(1+\frac{b^2}{b^2+b}\right)\left(2-\frac{2\,b^2+2\,b-1}{b^2+b}\right)$$

1. Kürze die einzelnen Brüche:

$$=\left(1+\frac{1}{b}\right)^2\left(1+\frac{b^2}{b^2+b}\right)\left(2-\frac{2\,b^2+2\,b-1}{b^2+b}\right)=\left(1+\frac{1}{b}\right)^2\left(1+\frac{b}{b+1}\right)\left(2-\frac{2\,b^2+2\,b-1}{b\,(b+1)}\right)$$

2. Schreibe alle Faktoren als Brüche:

$$=\left(\frac{b+1}{b}\right)^2\left(\frac{b+b+1}{b+1}\right)\left(\frac{2b^2+2\,b-2\,b^2-2\,b+1}{b(b+1)}\right)=\left(\frac{(b+1)^2}{b^2}\right)\left(\frac{2\,b+1}{b+1}\right)\left(\frac{1}{b\,(b+1)}\right)$$

3. Bringe alles auf einen Bruchstrich und kürze, Beispiel:

$$=\frac{(b+1)^2\,(2\,b+1)}{b^2\,(b+1)\,b(b+1)}=\frac{(b+1)^2\,(2\,b+1)}{b^3\,(b+1)^2}=\frac{2\,b+1}{b^3}$$

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Begriffe klar und versuche, die vorkommenden Aussagen nachzuvollziehen. Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

21.4.4 Dividieren

Methoden, Beispiele:

1. Brüche werden dividiert, indem man den Nennerbruch umstürzt und multpiliziert:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a\,d}{b\,c}$$

2. Beim Dividieren sind Klammerungen notwendig:

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{(\frac{a}{b})}{(\frac{c}{1})} = \frac{a}{b\,c} \neq \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{(\frac{a}{1})}{(\frac{b}{c})} = \frac{a\,c}{b}$$

3. Bringe im Zähler sowie auch im Nenner alles auf je einen Bruchstrich und kürze, Beispiel:

$$= \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}} = \frac{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}}{\frac{3}{12}+\frac{2}{12}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{2\cdot 6}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{2}} = 2$$

   Hier ist das kgV von $2, 3, 4, 6$ gleich 12.

4. Kettenbrüche sind Brüche der Form

$$\cfrac{a}{b + \cfrac{c}{d + \cfrac{e}{f + \dots_{\ddots}}}}$$

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Begriffe und Zusammenhänge klar und versuche, die vorkommenden Aussagen nachzuvollziehen. Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

21.4.5 Polynomdivision

Methode oder Beispiel:

Polynome werden analog von grossen Zahlen dividiert, indem man die erste Stelle des Dividenden durch die erste Stelle des Divisors dividiert und hinten hinschreibt. Anschliessend wird das dabei aufgetretene Resultat mit dem Divisor zurückmultipliziert und unten hingeschrieben. Danach berechnet man die Differenz der zurückmultiplizierten Zeile und der oben dran stehenden Zeile u.s.w.

Beispiel einer Polynomdivision:

$8\,x^2$	$-2\,y^2$	$-3\,z^2$	$+10\,x\,y$	$+2\,x\,z$	$+10\,y\,z$	$:\ (2\,x+3\,y-z)\ =\ 4\,x-y+3\,z$
$8\,x^2$			$+12\,x\,y$	$-4\,x\,z$		$\hookleftarrow (2\,x+3\,y-z)\,(4\,x)$
/	$-3\,y^2$	$-3\,z^2$	$-02\,x\,y$	$+6\,x\,z$	$+10\,y\,z$	
/	$-3\,y^2$	/	$-02\,x\,y$	/	$+01\,y\,z$	$\hookleftarrow (2\,x+3\,y-z)\,(-y)$
/	/	$-3\,z^2$	/	$+6\,x\,z$	$+10\,y\,z$	
/	/	$-3\,z^2$	/	$+6\,x\,z$	$+10\,y\,z$	$\hookleftarrow (2\,x+3\,y-z)\,(3\,z)$
/	/	/	/	/	/	

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Begriffe und Zusammenhänge klar und versuche, die vorkommenden Aussagen nachzuvollziehen. Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

21.4.6 Vermischte Probleme

Die Übungen beziehen sich auf die vorangegangenen Abschnitte.

Spezielle Übungen:

Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

21.5 Potenzen

21.5.1 Definition von a^n

Definitionen und Regeln:

a^n heisst **Potenz**. Dabei ist a die **Basis** und n der **Exponent**.

1. $a^1 = a$.
2. $a^n = \underbrace{a \cdot \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}, \quad n \geq 2$.
3. Sei $a \neq 0$: $\quad a^0 = 1$.
4. Sei $a \neq 0,\ m \in \mathbb{Z}$: $\quad a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$.
5. Sei $a\,b \neq 0,\ m \in \mathbb{Z}$: $\quad \left(\dfrac{a}{b}\right) = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{-m}$.
6. Sei $n \in \mathbb{N}$: $\quad (-1)^{2\,n} = 1,\ (-1)^{2\,n+1} = -1$.

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Begriffe und Zusammenhänge klar und versuche, die vorkommenden Aussagen nachzuvollziehen. Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

21.5.2 Addieren und subtrahieren von Potenzen

Regel:

1. $a\,x^n + b\,x^{n+r} - c\,x^{n+s} = (a + b\,x^r - c\,x^s)\,x^n$

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Zusammenhänge klar und versuche, die vorkommenden Aussagen nachzuvollziehen. Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

21.5.3 Anwendung der Potenzsätze

Regeln:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\qquad \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \;\; b \neq 0$
2. $a^n \cdot a^n = (a \cdot b)^n$ $\qquad \dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n, \;\; b \neq 0$
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Zusammenhänge klar und versuche, die vorkommenden Aussagen nachzuvollziehen. Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

21.5.4 Vermischte Probleme

Spezielle Übungen:

Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

21.5.5 Zehnerpotenzen

Definitionen und Regeln:

10^r heisst 10–**er Potenz**. Dabei ist 10 die **Basis** und r der **Exponent**.

$a \cdot 10^k$ mit $a \in [1,\ 10]$ heisst **wissenschaftliche Zahlenschreibweise**.

Beispiele: $153.952 = 1.53952 \cdot 10^2,\ \ 0.00153952 = 1.53952 \cdot 10^{-3}$

Faktoren und Bezeichnungen:

Vorsatz	Symbol	Faktor
Tera	T	10^{12}
Giga	G	10^9
Mega	M	10^6
Kilo	k	10^3
Hekto	h	10^2
Deka	da	10^1
Dezi	d	10^{-1}
Zenti	c	10^{-2}
Milli	m	10^{-3}
Mikro	μ	10^{-6}
Nano	n	10^{-9}
Piko	p	10^{-12}

Spezielle Übungen:

Mache dir die vorkommenden Begriffe und Zusammenhänge klar und versuche, die vorkommenden Aussagen nachzuvollziehen. Mache dazu Übungen eigener Wahl aus dem angegebenen Lehrbuch.

21.6 Wurzeln

21.6.1 Die Quadratwurzel

21.6.2 Definition von $\sqrt[n]{a^m}$ und Potenzdarstellung von $\sqrt[n]{a^m}$

21.6.3 Das Rechnen mit Wurzeln

21.6.4 Vermischte Probleme

21.7 Logarithmen

21.7.1 Zehnerlogarithmen (dekadische Logarithmen)

21.7.2 Logarithmen mit beliebiger Basis

21.7.3 Logarithmengesetze

Kapitel 22

(III) Gleichungen

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Mathematik für Mittelschulen, Algebra“ von Peter Frommenwiler und Kurt Studer, Sauerländer-Verlag (Lit. [4])

22.1 Aussagen und Aussageformen

22.1.1 Aussagen

22.1.2 Verknüpfung von Aussagen

22.1.3 Aussageformen

22.1.4 Äquivalenz von Aussageformen

22.2 Lineare Gleichungen

22.2.1 Gleichungen ohne Parameter

22.2.2 Gleichungen mit Parametern

22.2.3 Lineare Ungleichungen

22.3 Quadratische Gleichungen

22.3.1 Definition

22.3.2 Äquivalente und nicht äquivalente Umformungen

22.3.3 Lösungsverfahren

22.3.4 Sonderfälle

Allgemeiner Fall

22.3.5 Substitution

22.3.6 Textaufgaben

22.3.7 Parameteraufgaben, Satz von Vieta

22.3.8 Zerlegung von $a\,x^2 + b\,x + c$ in Linearfaktoren

22.4 Quadratische Gleichungen

22.4.1 Definition

22.4.2 Äquivalente und nicht äquivalente Umformungen

22.4.3 Lösungsverfahren

Sonderfälle

Allgemeiner Fall

Substitution

22.4.4 Textaufgaben

22.4.5 Parameteraufgaben, Satz von Vieta

22.4.6 Zerlegung von $a\,x^2 + b\,x + c$ in Linearfaktoren

22.5 Besondere Gleichungstypen

22.5.1 Bruchgleichungen

22.5.2 Wurzelgleichungen

22.5.3 Produkt $= 0$

22.5.4 Exponentialgleichungen

22.5.5 Logarithmische Gleichungen

22.6 Gleichungen mit mehreren Unbekannten

22.6.1

Lineare Gleichungen mit zwei

22.6.2 Lineare Gleichungen mit drei und mehr Unbekannten

22.6.3 Nicht lineare Gleichungssysteme

22.7 Vermischte Textaufgaben

22.8 Gleichungen 3. und höheren Grades, transzendente Gleichungen

Kapitel 23

(III) Funktionen

Die Einteilung der folgenden Kapitel, Paragraphen und Abschnitte folgt dem Werk „Mathematik für Mittelschulen, Algebra“ von Peter Frommenwiler und Kurt Studer, Sauerländer-Verlag (Lit. [4])

23.1 Kartesisches Koordinatensystem

23.2 Der Funktionsbegriff

23.3 Lineare Funktionen

23.3.1 Definition der linearen Funktion

3.3.6 Abschnittsweise lineare Funktionen 3.3.7 Betragsfunktionen 3.3.8 Geradenscharen 3.3.9 Graphisches Lösen linearer Gleichungssysteme

23.3.2 Der Graph einer linearen Funktion

23.3.3 Aufgaben aus der Praxis

23.3.4 Berechnung von Flächen

23.3.5 Senkrechte Geraden

23.3.6 Abschnittsweise lineare Funktionen

23.3.7 Betragsfunktionen

23.3.8 Geradenscharen

23.3.9 Graphisches Lösen linearer Gleichungssysteme

23.4 Quadratische Funktionen

23.4.1 Der Graph einer quadratischen Funktion

23.4.2 Quadratische Ungleichungen

23.4.3 Bestimmung der Funktionsgleichung

23.4.4 Schnittpunkte von Graphen

23.4.5 Parabel und Tangente

23.4.6 Parabelscharen

23.4.7 Geometrische Örter

23.4.8 Extremwertaufgaben

23.4.9 Graphisches Lösen nicht linearer Gleichungssysteme

23.4.10 Probleme aus Physik und Technik

23.5 Potenzfunktionen

23.6 Polynomfunktionen

23.7 Rationale Funktionen

23.8 Umkehrung von Funktionen

23.9 Wurzelfunktionen

23.10 Exponentialfunktionen

23.11 Logarithmusfunktionen

23.12 Winkelfunktionen

23.13 Optimieren

23.13.1 Lineare Ungleichungen mit zwei Unbekannten

23.13.2 Lineare Optimierung

23.13.3 Extremwertaufgaben

Literaturverzeichnis

[1] http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html, Grundlagen

[2] Mathematik für Mittelschulen, Geometrie, Peter Frommenwiler und Kurt Studer, Sauerländer-Verlag Siehe unter dem Link http://www.sauerlaender.ch.

[3] Platonische und Archimedische Körper, ihre Sternformen und polaren Gebilde, Paul Adam und Arnold Wyss, Haupt–Verlag Bern

[4] Mathematik für Mittelschulen, Algebra, Peter Frommenwiler und Kurt Studer, Sauerländer-Verlag Siehe unter dem Link http://www.sauerlaender.ch.

ENDE