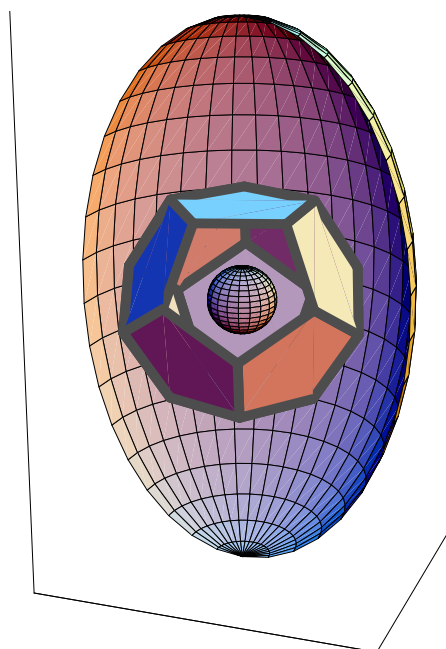


Script ◇ Math ◇ Ing  
◇ Fortsetzung Mathematik (II) ◇  
◇ — Suite mathématiques (II) ◇  
kurz & bündig ◇ — concis



**Scripta bilingua**

von • *de*

Rolf Wirz

Berner Fachhochschule BFH ◇ TI <sub>(HTI)</sub> und • *et* AHB <sub>(HSB)</sub>

Version: • <i>Version:</i> V.2.12.46 (V.2.10.81) / 1. April 2012
--

Doppelsprachiger Text • *Texte bilingue*

Produziert mit LaTeX/PCTEX auf NeXT/ WIN98. • *Produit avec LaTeX/PCTEX sur NeXT/ WIN98/ XP.*  
 Einige Graphiken sind auch mit *Mathematica* entstanden. • *Quelques représentations ont été produites avec Mathematica.*

*Je mathematischer und wirkungsvoller eine Theorie ist, desto unanschaulicher ist sie. Die moderne Wissenschaft erkaufte sich ihre Möglichkeit die Welt zu verändern — oft durch Verzicht auf die Anschaulichkeit der Beschreibung. . . .*  
 • *Plus une théorie est mathématique et efficace, moins elle est claire. Les sciences modernes acquièrent la possibilité de changer le monde — au prix de la clarté de la description. . . .*

*Fleckenstein*

Aktuelle Adresse des Autors (2007):

Rolf W. Wirz-Depierre  
 Prof. für Math.  
 Berner Fachhochschule (BFH), Dep. AHB und TI  
 Pestalozzistrasse 20  
 Büro B112 CH-3400 Burgdorf/BE  
 Tel. ++41 (0)34 426 42 30 / intern 230  
 Mail: Siehe <http://rowicus.ch/Wir/indexTotalF.html> unter „Koordinaten von R.W.“  
*Alt: Ingenieurschule Biel (HTL), Ing'schule des Kt. Bern, Fachhochschule ab 1997) // BFH HTA Biel // BFH TI //*





# Inhaltsverzeichnis • Table des matières

<b>1 Organisatorisches — Quant à l'organisation</b>	<b>1</b>
<b>2 Differentialgleichungen — Equations différentielles</b>	<b>3</b>
2.1 Einführung — Introduction	3
2.2 Lösung bei D'Gl 1. Ordn. — Solutions d'éq'diff d'ordre 1	6
2.2.1 Lösung, Integralkurve — Solution, courbe d'intégrale	6
2.2.2 Linienelement, Richtungsfeld — Élément de ligne, champs de direction	7
2.2.3 Isoklinen — Isoclines	9
2.2.4 Zentrale Fragen — Questions centrales	10
2.3 Anfangswertproblem — Problème de valeur initiale	13
2.3.1 Idee — Idée	13
2.3.2 Verallgemeinerung des Problems — Généralisation du problème	14
2.3.3 Randwertprobleme — Problèmes aux limites	15
2.3.4 Veränderte Problemstellung — Changer le problème	15
2.4 Existenz und Eindeutigkeit — Existence et univocité	16
2.4.1 Existenzsatz von Peano — Théorème d'existence de Peano	16
2.4.2 Eindeutigkeit — Univocité	17
2.4.3 Existenzsatz und Eindeutigkeit — Existence et univocité	19
2.4.4 Beispiel mit einer singulären Lösung — Exemple avec une solution singulière	22
2.5 Gleich'typen, Lös'methoden — Types d'éq., méthodes de solution	22
2.5.1 Iterationsverfahren von Picard — Méthode d'iteration de Picard	22
2.5.2 Separationsverfahren — Méthode de séparation des variables	23
2.5.3 „Beinahe“ separable D'Gl — Eq. diff. "presque séparable"	24
2.5.4 Substitutionsmethode — Méthode de substitution	25
2.5.5 Exakte D'Gl — Eq.diff. exacte	26
2.5.6 Eulersche Multiplikatoren — Multiplicateurs d'Euler	27
2.5.7 Eine Anwendung: Einhüllende — Une application: Enveloppe	30
2.6 Theorie der linearen D'Gl — Théorie des eq.diff. linéaires	32
2.6.1 Einführung, Definitionen — Introduction, définitions	32
2.6.2 Homogenes System — Système homogène	33
2.6.3 Inhomogenes System — Système inhomogène	38
2.7 Lineare D'Gl mit konst. Koeff. — Eq.diff. linéaires avec coeff. const.	40
2.7.1 Homogenes Problem — Problème homogène	40
2.7.2 Inhomogenes Problem — Problème non homogène	44
2.7.3 Potenzreihenansatz — Partir d'une série de puissance	45
2.8 Numerische Verfahren — Méthodes numériques	46
2.8.1 Das Verfahren von Euler — La méthode d'Euler	46
2.8.2 Die Methode von Runge-Kutta — La méthode de Runge-Kutta	48

2.8.3	D'Gl und Differenzenmethode — Eq. diff. et méthode d'éq. aux différences . . . . .	50
2.9	Allgemeine Maschinenlösungen — Solutions générales par l'ordinateur . . . . .	53
2.9.1	<i>Mathematica</i> -Lösung — Solutions par <i>Mathematica</i> . . . . .	53
2.9.2	Selbst gerechnete Lösung — Solution calculée personnellement . . . . .	54
2.10	Artillerie-Methode — Méthode selon l'artillerie . . . . .	56
2.11	Anwendungen — Applications . . . . .	59
2.11.1	Biegelinie — Ligne élastique ou axe neutre . . . . .	59
2.11.2	Knickung — Problème de flambage . . . . .	59
<b>3</b>	<b>Laplace-Transformationen — Transformations de Laplace</b>	<b>61</b>
3.1	Einführung — Introduction . . . . .	61
3.1.1	Übersicht — Vue générale . . . . .	61
3.1.2	Der Trick — Le truc . . . . .	61
3.2	Exist. u. Eindeut'probleme — Probl. d'exist. e. d'univoc. . . . .	63
3.2.1	Definitionen — Définitions . . . . .	63
3.2.2	Existenzprobleme — Problèmes d'existence . . . . .	64
3.2.3	Eindeutigkeitsprobleme — Problèmes d'univocité . . . . .	65
3.3	Aufbau des Kalküls — Constr. de la théorie formalisée . . . . .	67
3.3.1	Elementare Regeln — Règles élémentaires . . . . .	67
3.3.2	Linearitätsregeln — Linéarité . . . . .	68
3.3.3	Streckung im Urbildbereich — Extension dans le domaine de déf. . . . .	68
3.3.4	Differentiationsregel — Règle de la dérivation . . . . .	69
3.3.5	Anwendung auf eine D'Gl — Application pour une éq.diff. . . . .	69
3.3.6	Integrationsregel — Règle d'intégration . . . . .	69
3.3.7	Verschiebungssätze — Théorème de retard . . . . .	70
3.3.8	Multiplikationsregel — Règle de la multiplication . . . . .	71
3.3.9	Divisionsregel — Règle de la division . . . . .	72
3.3.10	Faltung — Plissement . . . . .	72
3.3.11	Periodische Funktionen — Fonctions périodiques . . . . .	75
3.3.12	Anfangs- und Endwerte — Valeurs initiales et finales . . . . .	76
3.3.13	Transformation rationaler Funktionen — Transformation de fonctions rationnelles	78
3.4	Musterbeispiele — Exemples modèles . . . . .	80
3.4.1	Rücktransformationen — Transformations inverses . . . . .	80
3.4.2	Lösen von D'Gl — Résoudre des éq.diff. . . . .	80
3.4.3	D'Gl 2. Ordnung — Eq.diff. d'ordre 2ème . . . . .	81
3.4.4	Systeme von D'Gl — Systèmes d'éq.diff. . . . .	82
3.4.5	Anwendung der Faltung — Application du plissement . . . . .	83
3.5	Distributionen — Distributions . . . . .	84
3.5.1	Idee, Dirac-Stoss — Idée, impulsion unité de Dirac . . . . .	84
3.5.2	Die Transformierte der Dirac-Funktion — La transformée de la fonction de Dirac .	86
3.5.3	Anwendung auf ein AWP — Application pour un PVI . . . . .	87
3.5.4	Stoss zur Zeit 0 — Coup au temps 0 . . . . .	87
3.5.5	Stoss zur Zeit $t_0$ — Coup au temps $t_0$ . . . . .	87
3.6	Probleme aus der Praxis — Problèmes de la pratique . . . . .	89
3.6.1	Schwingungen und Oszillatoren — Oscillations et oscillateurs . . . . .	89
3.6.2	Stabilitätsverhalten von Lösungen — Comportement de stabilité de solutions . .	90
3.6.3	Stabilitätskriterium — Critère de stabilité . . . . .	93
3.6.4	Randwertprobleme — Problèmes de valeurs aux limites . . . . .	93
3.7	LTI-Systeme — Systèmes LTI . . . . .	94
3.7.1	Grundlagen — Fondements . . . . .	94
3.7.2	Beispiele, Systemverknüpfungen — Exemples, liaisons de systèmes . . . . .	95

<b>4</b>	<b>Fourierreihen — Séries de Fourier</b>	<b>99</b>
4.1	Einführung — Introduction	99
4.1.1	Verwendung — Utilisation	99
4.1.2	Periodische Funktionen — Fonctions périodiques	99
4.1.3	Trigonometrische Reihen — Séries trigonométriques	100
4.2	Fourierreihen und Fourieranalyse — Séries et analyse de Fourier	101
4.2.1	Das Darstellungsproblem — Le problème de la représentation	101
4.2.2	Das Konvergenzproblem — Le problème de la convergence	103
4.2.3	Folgerungen und Konsequenzen — Conclusions et conséquences	109
4.2.4	Sinus- und Cosinusreihen — Séries de sinus et cosinus	110
4.2.5	Eulersche Formeln, Periode T — Formules d'Euler, période T	112
4.3	Harmonische Analyse — Analyse harmonique	112
4.3.1	Beispiele — Exemples	112
4.3.2	Lineare Kombinationen — Combinaisons linéaires	115
4.3.3	Parsevalsche Gleichung — Equation de Parseval	115
4.3.4	Die Formel — La formule	115
4.3.5	Anwendung — Application	116
4.4	Komplexe Darstellung — Représentation complexe	117
4.4.1	Komplexe Fourierkoeffizienten — Coefficients de Fourier complexes	117
4.4.2	Berechnung der Koeffizienten — Calculer les coefficients	118
4.4.3	Beispiel — Exemple	118
4.4.4	Amplitudenspektrum, Phasenspektrum — Spectre d'amplitude, spectre de phase	121
4.4.5	Reelle Interpretation der Spektren — Interprétation réelle des spectres	123
4.4.6	Das Phänomen von Gibbs — Le phénomène de Gibbs	124
4.4.7	Beispiele — Exemples	125
4.5	Diskrete Fouriertransformation — Transf. de Fourier discrète	126
4.5.1	DFT und Fouriersynthese — DFT et synthèse de Fourier	126
4.5.2	FFT — FFT	131
4.6	Fouriertransformation — Transformation de Fourier	133
4.6.1	Fourierintegral — Intégrale de Fourier	133
4.6.2	b-Band-Beschränktheit, Shannon — Borné à la bande b, Shannon	139
4.6.3	Lösen von D'Gl — Résoudre des éq.diff.	141
<b>5</b>	<b>z-Transformationen — Transformations en z</b>	<b>143</b>
5.1	Einführung — Introduction	143
5.1.1	Verwendung — Utilisation	143
5.1.2	Gegenstand der Betrachtung — Objet de la considération	143
5.1.3	z-Transformierte — Transformée en z	144
5.2	Regeln, Calculus — Règles, calcul	145
5.2.1	Geometrische Folgen — Suites géométriques	145
5.2.2	Differentiation von Transformierten — Différentiation de transformées	145
5.2.3	Linearität, Einheitsimpuls — Linéarité, impulsion d'unité	146
5.2.4	Exponential und trig. Folgen — Suites exp. et trig.	146
5.2.5	Verschiebungen — Décalages	148
5.2.6	Gliedweise Mult. mit einer Folge — Mult. avec une suite terme p. terme	149
5.2.7	Anfangs- und Endwertsatz — Théorème des valeurs aux limites	150
5.2.8	Inverse z-Transformation — Transformation en z inverse	152
5.2.9	Auffinden der Inversen — Trouver l'inverse	152
5.3	Praktische Anwendungen — Applications pratiques	154
5.3.1	Differenzengleichungen — Equations aux différences	154
5.3.2	Diskrete lineare Systeme — Systèmes linéaires discrets	156
5.3.3	Impuls- und Schrittantwort — Réponse d'impulsion et indicielle	160
5.3.4	Schrittantwort — Réponse indicielle	161

5.4	Stabilität — Stabilité	163
5.4.1	Der Begriff — La notion	163
5.4.2	Stabilitätskriterium — Critère Pour la stabilité	164
5.4.3	Stabilitätskriterium — Critère pour la stabilité	165
5.5	Faltung, Konvolution — Plissement	166
5.5.1	Die Idee — L'idée	166
5.6	Laplace- und z-Transformation — Transf. de Laplace et en z	168
5.7	Ingenieuranwendungen — Applications d'ingénieur	169
<b>6</b>	<b>Vektoranalysis — Analyse vectorielle</b>	<b>171</b>
6.1	Grundlagen — Les bases	171
6.1.1	Einführung — Introduction	171
6.1.2	Operatoren — Opérateurs	171
6.2	Felder — Champs	173
6.2.1	Der Feldbegriff — La notion du champ	173
6.2.2	Feldtypen — Types de champs	175
6.3	Gradient, Divergenz, Rotation — Gradient, divergence, rotationnel	177
6.3.1	Laplace- und Nabla-Operator — Opérateurs de Laplace et nabla	177
6.3.2	Definition von grad, div und rot — Définition de grad, div et rot	177
6.3.3	Formeln mit grad, div und rot — Formules avec grad, div et rot	178
6.3.4	Bedeutung von grad, div und rot — Signification de grad, div et rot	179
6.4	Konservative Felder — Champs conservateurs	182
6.4.1	Linienintegrale — Intégrales curvilignes	182
6.4.2	Gradientenfelder und Pot'felder — Champs de vect. lam. et champs de potent.	184
6.4.3	Konservative Felder — Champs conservateurs	185
6.4.4	Eigenschaften, Beispiele — Qualités, exemples	188
6.4.5	Konservative Felder und Rotation — Champs conservateurs et rotationnel	190
6.4.6	Bsp.: Stromdurchflossener Leiter — Expl.: Conduct. alimenté de courant électr.	192
6.5	Die Integralsätze — Les théorèmes de l'intégrale	194
6.5.1	Der Begriff Fluss — La notion de flux	194
6.5.2	Definition des Flusses — La définition du flux	194
6.5.3	Fluss durch geschlossene Flächen — Flux à travers des surfaces fermées	196
6.5.4	Anwend.: Wieso r-quadrat-Gesetze? — Applic.: Pourq. d. lois de r au carré?	197
6.5.5	Übersicht über die Integralsätze — Aperçu des théorèmes de l'intégrale	198
6.5.6	Die Sektorformel — La formule de secteur	200
6.5.7	Konsequenzen aus den Integralsätzen — Conséquences des théorèmes de l'intégrale	202
6.5.8	Quellenfreie Potentialfelder — Champs de potentiel libres de sources	203
6.5.9	Beispiele zu Stokes — Exemples concernant Stokes	204
6.5.10	Abgeleitete Formeln — Formules dérivées	204
6.5.11	Koord'unabhängige Def.n der Rotation — Déf. du rotationnel indép. de coord.	205
6.5.12	Zur Divergenz des elektr. Feldes — Quant à la divergence d'un champ électr.	206
6.6	Beweisideen z.d. Int'sätzen — Idées d. preuves p.l. théor.d. l'intégr.	207
6.6.1	Zum Satz von Gauss — Quant au théorème de Gauss	207
6.6.2	Zum Satz von Stokes — Quant au théorème de Stokes	209
6.7	Zirkulation, Vektorpotential — Circulation, potentiel vectoriel	211
6.7.1	Zirkulation und Rotation — Circulation et rotationnel	211
6.7.2	Das Vektorpotential — Le potentiel vectoriel	215



<b>7</b>	<b>Rayleigh–Quotient (Anhang — Annexe 1)</b>	<b>219</b>
7.1	Grundlagen zur Methode mit dem Rayleigh–Quotienten	220
7.1.1	Übersicht: Problem und Ziel	220
7.1.2	Theorie bezüglich Rayleigh–Quotient	220
7.1.3	Berechnung des Rayleigh–Quotienten	225
7.1.4	Eine genauere numerische Näherung für den 1. Eigenwert	230
7.1.5	Bemerkung zum Ritz–Galerkin–Verfahren	232
7.1.6	Übersicht	232
7.1.7	Die Methode	232
<b>8</b>	<b>Partielle Differentialgleichungen (Anhang — Annexe 2)</b>	<b>239</b>
8.1	Partielle Differentialgleichungen	240
8.1.1	Quasilineare part. D’gl 1. Ordnung mit zwei Variablen	240
8.1.2	Klassifikation bei part. D’gl. 2. Ordnung	242
8.1.3	Verfeinerung der Klassifikation	242
8.1.4	Das Beispiel der Wärmeleitgleichung	244
8.1.5	Koordinatentransformationen bei Operatoren	248
8.1.6	Lineare Operatoren	253
8.1.7	Zur schwingenden Membran	254
8.1.8	Die Poisson–Gleichung	256
8.1.9	Exkurs: Wichtige Formeln	259
8.1.10	Plattengleichung und biharmonischer Operator	260
8.1.11	Das Modellierungsbeispiel der an vier Punkten aufgehängten Platte	261
8.1.12	Das Modellierungsbeispiel Kreisplatte	261
8.1.13	Numerische Methoden	263
8.1.14	Numerische Beispiele: Differenzenverfahren	264
8.1.15	Numerische Beispiele: Iterationsverfahren	268
8.2	Schritte in die Variationsrechnung	274
8.2.1	Der Begriff der ersten Variation	274
8.2.2	Die Euler–Lagrange–Differentialgleichung	275
8.2.3	Die Herleitung der Potentialgleichung	276
8.2.4	Die Kettenlinie	276
8.2.5	Ein isoperimetrisches Problem und die Lagrange–Funktion	278
8.2.6	Das Prinzip der kleinsten Wirkungen und erste Variation	279
8.2.7	Bernoullis Brachystochronen–Problem	281
8.2.8	Variation und finite Elemente: Triangulationsmethode	283
8.2.9	Weitere Probleme	287
8.3	Schwingungen und partielle Differentialgleichungen	288
8.3.1	Die homogene Wellengleichung, Voraussetzungen	288
8.3.2	Separationsansatz und stehende Welle	288
8.3.3	Schwingung eines dünnen Balkens	290
8.3.4	Die schwingende dünne Platte	292
8.3.5	Ausblick über Eigenwerte und Eigenfunktionen	298
8.4	Fouriertransformationen und partielle Diff’gleichungen	298
8.4.1	Entwicklung der Methode an einem Beispiel	298
8.4.2	Beispiel einer konkreten Anwendung	300
8.5	Zur Idee der Greenschen Funktion	300
8.5.1	Einführung und Begriff	300
8.5.2	Ein Schulbeispiel	301
8.6	Bemerkung zur Delta–Funktion	303
8.7	Ausblick	305

<b>9</b>	<b>Mathematische Modellierung (Anhang — Annexe 3)</b>	<b>307</b>
9.1	Einige Kurven . . . . .	308
9.1.1	Die Klothoide . . . . .	308
9.1.2	Kettenline contra Seilkurve . . . . .	310
9.1.3	Eine Schleppkurve . . . . .	312
9.2	Balken und Biegelinie . . . . .	313
9.2.1	Schnittkräfte und Momente am Balken . . . . .	313
9.2.2	Die Biegelinie des Balkens . . . . .	317
9.2.3	Zur Knickung . . . . .	319
9.3	Gekoppelte Pendel . . . . .	320
9.3.1	Problemmodellierung . . . . .	320
9.3.2	Beispiellösung . . . . .	321
9.4	Weitere Beispiele zur Modellierung . . . . .	321
9.4.1	Ausblick auf weitere Beispiele und Themenbereiche . . . . .	321
9.4.2	Bemerkung zu autonomen und dynamischen Systemen . . . . .	323
<b>10</b>	<b>Anhang 4 — Annexe 4</b>	<b>325</b>
10.1	Hinweise – Indications . . . . .	325
10.1.1	Abkürzungen – Abréviations . . . . .	325
10.1.2	Literatur — Littérature . . . . .	325

# Kapitel • Chapitre 1

## Organisatorisches — Quant à l'organisation

### Kurze Übersicht • *Vue générale*

1. Organisation, Rahmen • *Organisation, cadre*
2. Stoff • *Matière*
3. Ziel, Weg, Methoden, Feedback, Team • *But, chemin, méthodes, feedback, groupe*
4. Übungen, Selbststudium • *Exercices, études personnelles*
5. Lerntechnik, Arbeitstechnik, Selfmanagement • *Technique de travail et d'apprendre, selfmanagement*
6. Rechte und Pflichten des Studenten und der Schule • *Droits et devoirs de l'étudiant et de l'école*
7. Prinzipien, Grundsätze • *Principes et positions*
8. Rechner, Computer, Mathematiksoftware • *Calculatrices de poche, ordinateurs, software en mathes*
9. Semesterorganisation Mathematik (Anzahl Noten, Prüfungsreglement, Prüfungsplan, Prüfungsrahmen, erlaubte Unterlagen, formale Anforderungen, Benotungskriterien, Benotung der Übungen und Projekte, Arbeitsnachweismappe, Klassensprecher, Klassenbetreuer, Kopierchef, Sprechstunden)  
• *Organisation du semestre en mathématiques (nombre de notes, règlement des examens, Plan des examens, conditions concernant les examens, exigences formelles, conditions formelles, philosophie des notes, évaluation des exercices et des projets, porte-feuille, chef de classe, professeur chargé de la classe, chef chargé des copies, heures de consultation)*
10. Hilfsmittel (Bibliothek, Taschenrechner, Mathematiksoftware, Literatur) • *Aides (bibliothèque, calculatrice de poche, software en mathématiques, littérature)*

- 11. Zeitplanung • *Plan du temps à disposition*
- 12. Einführung • *Introduction*

# Kapitel • Chapitre 2

## Differentialgleichungen — Equations différentielles

### 2.1 Einführung — Introduction

#### Literatur — Littérature

Hier eine kleine Auswahl, die jeweils den grössten Teil des gesamten Stoffes abdeckt:

Leupold u.a., Mathematik 1, 2

Swobowsky, Analyse

Swobowsky, Calculus

Glyn James, Modern Engineering Mathematics,

Advanced Modern Engineering Mathematics

• *Voilà un choix limité qui concerne la plus grande partie de la matière:*

*Leupold u.a., Mathematik 1, 2*

*Swobowsky, Analyse*

*Swobowsky, Calculus*

*Glyn James, Modern Engineering Mathematics,*

*Advanced Modern Engineering Mathematics*

#### Der Begriff — La notion

Bisher haben wir in der Mathematik vor allem gewöhnliche **Zahlengleichungen** getroffen:

• *Jusqu'à maintenant nous avons trouvé dans les mathématiques surtout des équations de nombres simples:*

**Bsp.:** • **Exemple:**  $x^2 + 2x + \frac{1}{2} = 0, x = ?$

Gesucht waren unbekannte Zahlen oder Zahlenmengen: • *On a cherché des nombres inconnus ou des ensembles de nombres inconnus:*

$\mathbb{L}$  = Zahlenmenge • *Ensemble de nombres.*

Eine **Differentialgleichung** dagegen ist eine Gleichung, in der eine **unbekannte Funktion** und – oder Ableitungen dieser Funktion vorkommen. Gesucht ist hier die unbekannte Funktion.

• *Une équation différentielle par contre est une équation dans laquelle se trouve une fonction inconnue et – ou des dérivées de cette fonction. Ici on cherche la fonction inconnue.*

**Bsp.:** • **Exemple:**  $y''(t) + y'(t) = \cos(2t)$

$y(t)$  ist eine unbekannte Funktion • *est une fonction inconnue.*

Beispiel einer Lösung: • *Exemple pour une solution:*  $y(t) = 2 \sin(t) - \frac{1}{3} \cos(2t)$   
(Kontrolle! • *Contrôle!*)

$\leadsto$  Die Lösungsmenge ist eine Funktionenmenge. • *L'ensemble de solutions est un ensemble de fonctions.*

**Wichtig:** Differentialgleichung  $\leadsto$  Gleichung mit Differentialquotienten.

• **Important:** *Equation différentielle*  $\leadsto$  *Equation qui contient des quotients différentiels.*

**Schreibweise:** • **Façon d'écrire:**

Differentialgleichung  $\leadsto$  D'Gl • *Equation différentielle*  $\leadsto$  *éq'diff*

## Beispiele, Praxis — Exemples, pratique

Die mathematische Formulierung praktischer Probleme in Naturwissenschaft, Technik, Wirtschaft, ... führt häufig auf Differentialgleichungen. Z.B. wenn es um den Zusammenhang zwischen einer Grösse und ihrer zeitlichen Veränderung geht.

• *La formulation de problèmes pratiques dans les sciences naturelles, dans la technique, l'économie, ... mène souvent à des équations différentielles. P.ex. s'il s'agit d'une relation entre une entité et son changement par le temps.*

1. Wir kennen das Fallgesetz aus der Physik: • *Nous connaissons la loi de la chute des corps de la physique:*

$$\begin{aligned} -g = \ddot{s} = s''(t) &\Rightarrow s = \int s'(t) dt + C_1 = \int (\int s'(t) dt + C_1) dt + C_2 = \int (\int -g dt + C_1) dt + C_2 \\ &= \int (-g t + C_1) dt + C_2 = -\frac{1}{2} t^2 + C_2 t + C_1 \end{aligned}$$

$\mathbb{L}$  = unendliche, 2-parametrische Funktionenschar. Für eine eindeutige Lösung braucht es zwei Bedingungen ( $C_1$  und  $C_2$  festlegen).

•  $\mathbb{L}$  = *ensemble fini de fonctions à deux paramètres. Pour une solution unique (claire et nette) il faut deux conditions (fixer  $C_1$  et  $C_2$ ).*

2.  $y'(t) = y(t)$ ,  $y'(t) - y(t) = 0$

$\leadsto$  Welche Funktion geht beim Ableiten in sich selbst über? • *Quelle fonction ne change pas en passant à la dérivée?*

Bekannt: • *Nous savons:*

$$y_1(t) = e^t, \quad y_2(t) = -3e^t, \quad y_3(t) = e^{t+5} = e^t \cdot e^5, \quad y_4(t) = 7e^t - e^{t+\ln(3)} = 4e^t$$

Allgemein: • *Généralement:*  $y(t) = C \cdot e^t$

**Problem:** • **Problème:** Gibt es noch weitere Lösungen  $\notin \{C \cdot e^t \mid C \in \mathbb{R}\}$ ?

• *Y a-t-il encore d'autres solutions  $\notin \{C \cdot e^t \mid C \in \mathbb{R}\}$ ?*

3.  $y''(t) = -y(t)$  resp. • *resp.  $y''(t) + y(t) = 0$*

$\leadsto$  Schwingungsgleichung • *Equation d'oscillation.*

**Lösung:** • **Solution:**  $y(t) = C_1 \cdot \sin(t) + C_2 \cdot \cos(t)$

## Typen von Differentialgleichungen — Types d'équations différentielles

**Definition:** • **Définition:**

**Ordnung** einer D'Gl := Ordnung der höchsten auftretenden Ableitung. • **Ordre** d'une éq'diff := *Ordre de la dérivée la plus haute.*

**Symbol:** • **Symbole:** Ordnung einer D'Gl :=  $\text{Ord}(D'Gl)$  *Ordre d'une éq'diff* :=  $\text{Ord}(\text{éq'diff})$

**Beispiele:** • **Exemples:**

$$1. \quad y' - t^2 - y^3 = 0, \quad y = y(t) \Rightarrow \text{Ord} = 1, \quad \text{pgrad}(y^3) = 3$$

$$2. (y'')^3 - 4(y')^4 + t = 0 \Rightarrow \text{Ord} = 2$$

$$3. y''' \cdot y' - y \cdot t^6 = 0 \Rightarrow \text{Ord} = 3$$

$$4. \ln(y''') \cdot \cos(y') - e^y + y = 0 \Rightarrow \text{Ord} = 3$$

**Definition:** • **Définition:** **Gewöhnliche D'Gl** := D'Gl, in der nur Ableitungen nach einer Variablen vorkommen. • **Eq'diff ordinaire** := *éq'diff dans laquelle on ne trouve que des dérivées d'après une variable.*

.B. D'Gl  $n$ -ter Ordnung: • *P.ex. éq'diff d'ordre  $n$ :*

**Explizite D'Gl:** • **éq'diff explicite:**  $y^{(n)}(t) = g(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$

**Implizite D'Gl:** • **éq'diff implicite:**  $f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t), y^{(n)}(t)) = 0$

Im Unterschied zur gewöhnlichen D'Gl kommen bei einer **partiellen D'Gl** Ableitungen nach verschiedenen Variablen vor. • *Par différence à l'éq'diff ordinaire, on trouve dans l'équation différentielle partielle des dérivées d'après plusieurs variables.*

**Beispiele:** • **Exemples:**

$$1. \forall_{x,t} t \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \rightsquigarrow \text{z.B.} \bullet \text{ p.ex. } u(x, t) = e^{(\frac{t}{x})^2}$$

$$2. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightsquigarrow \text{Wellengleichung.} \bullet \text{ Equation d'ondes.}$$

$$3. \sin(t \cdot x^{\frac{1}{2}}) \cdot u''_{tt} = u''_{xx} + u$$

## Verwandlung in Differentialgleichungssysteme — Transcription en des systèmes d'éq'diff

**Bsp.:** • **Exemple:**

Nebstehend ein Differentialgleichungssystem mit zwei Gleichungen: • *Voilà un système d'équations différentielles avec deux équations:*

$$\begin{aligned} f_1(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t), y^{(n)}(t)) &= 0 \\ f_2(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t), y^{(n)}(t)) &= 0 \end{aligned}$$

**Wichtig:** • **Important:** Mit Hilfe einer Umbenennung der Variablen lässt sich jede D'Gl  $n$ -ter Ordnung als System 1-ter Ordnung mit  $n + 1$  Gleichungen schreiben: • *A l'aide de définitions de nouvelles variables on peut écrire chaque éq'diff à  $n$  variables comme système d'ordre 1 avec  $n + 1$  équations:*

Sei • *Soit*  $F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$

Definiere: • *Définir:*

$\rightsquigarrow$  System: • *Système:*

$$\begin{aligned} y(t) &= z_0(t) & F(t, z_0, z_1, \dots, z_n) &= 0 \\ y'(t) &= z'_0(t) := z_1(t) & z'_0(t) &= z_1(t) \\ &\vdots & &\vdots \\ y^{(n)}(t) &= z'_{n-1}(t) := z_n(t) & z'_{n-1}(t) &= z_n(t) \end{aligned}$$

Vektorschreibweise: • *Ecrire à l'aide de vecteurs:*

Sei • Soit  $\vec{z} := \begin{pmatrix} z_0 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix}$ ,  $\vec{f}(t, z_0, \dots, z_{n-1}, z_n) := \vec{f}(t, \vec{z}, z_n) := \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$

$\leadsto$  D'Gl: • *Eq'diff:* 
$$\begin{cases} \vec{z}' = \vec{f}(t, \vec{z}, z_n) \\ 0 = F(t, \vec{z}, z_n) \end{cases}$$

**Bemerkung:** • **Remarque:**

1.  $\vec{f}$  kann allgemeiner eine beliebige Funktion von  $t, \vec{t}, \vec{z}$  und  $z_n$  sein.  
•  $\vec{f}$  peut être plus généralement une fonction quelconque de  $t, \vec{t}, \vec{z}$  et  $z_n$ .
2. Statt theoretisch eine einzige D'Gl 1-ter Ordnung zu untersuchen, kann man auch gleich ein System 1-ter Ordnung untersuchen. Statt mit Funktionen hat man es dann mit Vektorfunktionen (mehrere Funktionen aufs Mal) zu tun. Zur Vereinfachung wollen wir nachfolgend die Überlegungen so weit als möglich für den Fall einer einzigen Gleichung machen. Die Übertragung auf Vektorgleichungen ist dann nur noch ein 'technisches Problem'.  
• *Au lieu d'examiner une seule équation d'ordre 1, on peut aussi tout de suite examiner un système d'ordre 1. Par conséquent, là, on doit traiter des fonctions vectorielles (plusieurs fonctions à la fois). Pour simplifier les choses nous voulons faire les réflexions suivantes pour le cas d'une seule équation. La transcription pour des équations vectorielles est alors un 'problème technique'.*

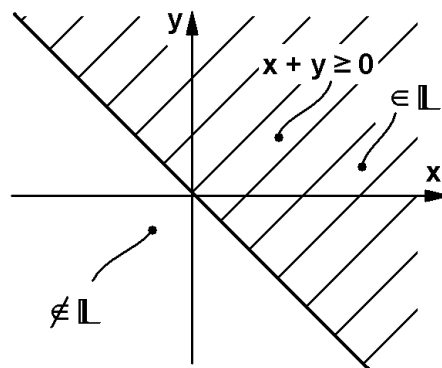
## 2.2 Lösung bei D'Gl 1. Ordn. — Solutions d'éq'diff d'ordre 1

### 2.2.1 Lösung, Integralkurve — Solution, courbe d'intégrale

Bsp.: • **Exemple:**

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) = \sqrt{x+y} \\ D_f &\subseteq \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Wegen  $\sqrt{*}$  ist die Gleichung nur für  $y \geq -x$  definiert. • *A cause de  $\sqrt{*}$  l'équation n'est définie que pour  $y \geq -x$*



**Definition:** • **Définition:**

$y : I \mapsto \mathbb{R}$  heisst **Lösung** oder **Integral** der D'Gl  $y' = f(x, y)$  • *s'appelle solution ou intégrale de l'éq'diff  $y' = f(x, y)$*   
 $y' = f(x, y) \Leftrightarrow$   
 1)  $y \in \mathcal{D}(I)$  (diff'bar'dérivab(I))  
 2) Graph • *Grappe*  $\{(x, y(x))\} \subseteq D_f$   
 3)  $y(x)$  erfüllt die D'Gl • *satisfait l'éq'diff  $y' = f(x, y)$*

Ist  $y(x)$  Lösung, so heisst die Kurve  $\{(x, y(x))\} \subseteq D_f$  **Integralkurve**. • *Quand  $y(x)$  est solution, la courbe  $\{(x, y(x))\} \subseteq D_f$  s'appelle courbe d'intégrale.*

**Hinweis:** • **Indication:** In obiger Skizze geht die Integralkurve durch den Punkt  $(x_0, y_0)$ .

• *Dans l'esquisse ci-dessus la courbe d'intégrale passe par le point  $(x_0, y_0)$ .*



### 2.2.2 Linienelement, Richtungsfeld — Élément de ligne, champs de direction

Sei • *Soit*  $y_0 := y(x_0)$ ,  $y'_0 = y'(x_0)$ .

In einem Punkte  $(x_0, y_0)$  kann die Integralkurve durch ihre Tangente mit der Steigung  $y'_0$  approximiert werden. • *Dans un point  $(x_0, y_0)$  la courbe d'intégrale peut être approximée par la tangente avec la pente  $y'_0$ .*

**Definition:** • **Définition:** Ein Tripel der Art  $(x_0, y_0, y'_0)$  heisst **Linienelement**.  
• *Un triplet de la forme  $(x_0, y_0, y'_0)$  s'appelle élément de ligne.*

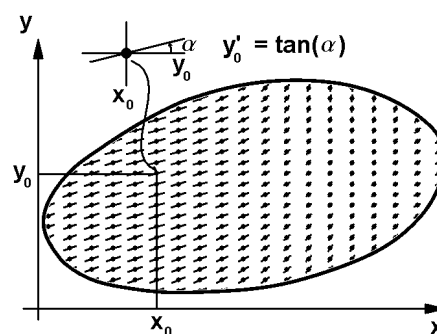
Ein Linienelement gibt in einem beliebigen Punkt einen guten Eindruck vom Verhalten der Kurve in diesem Punkt. • *Pour un point quelconque, un élément de ligne donne une bonne impression du comportement (action) de la courbe.*

Ein Linienelement lässt sich gut durch ein kurzes Tangentenstücklein in einem Punkt  $(x_0, y_0)$  mit der Steigung  $y'_0$  darstellen. Ohne Schaden können wir die Exaktheit etwas vernachlässigen und vom **Graphen eines Linienelementes** reden. • *Dans un point  $(x_0, y_0)$  on peut bien représenter un élément de ligne par un court segment de tangente à la pente  $y'_0$ . Sans problème nous pouvons ici renoncer à l'exactitude de la langue et parler d'un graphe d'un élément de ligne.*

**Wichtig:** • **Important:** Wenn eine Differentialgleichung  $y' = f(x, y)$  gegeben ist, so lässt sich in einem beliebigen Punkt  $(x_0, y_0)$  die Steigung  $y'_0 = f(x_0, y_0)$  sofort berechnen und damit das Linienelement skizzieren! • *Quand on a donné une éq'diff  $y' = f(x, y)$ , on peut pour un point quelconque  $(x_0, y_0)$  tout de suite calculer la pente  $y'_0 = f(x_0, y_0)$  et donc se faire une esquisse de l'élément de ligne!*

Ersetzt man das Bild einer Integralkurve in genügend vielen Punkten durch die Graphen der Linienelemente, so gewinnt man rasch einen Eindruck vom Verlauf der Kurve!

• *Si l'on remplace donc l'image d'une courbe intégrale dans assez de points par le graphe d'éléments de lignes, on obtient très vite une impression du comportement de la courbe!*



**Definition:** • **Définition:** Die Menge der Linienelemente  $\{(x_0, y_0, y'_0)\}$  heisst **Richtungsfeld** (auch Tangentenfeld).  
• *L'ensemble des éléments de ligne  $\{(x_0, y_0, y'_0)\}$  s'appelle champ de direction (champ de tangentes).*

**Wichtig:** • **Important:** Mit Hilfe einer Skizze eines Graphen des Richtungsfeldes lassen sich die Integralkurven sofort abschätzen. • *A l'aide d'une esquisse du graphe du champ de direction les courbes d'intégrale se laissent estimer tout de suite.*

**Bsp.:** • **Exemple:**

D'Gl • *Eq'diff*  $y' = -\frac{x}{y}$ ,  $y = y(x)$ ,  $y \neq 0$ ,  $D_f = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ,  $f(x, y) = -\frac{x}{y}$

Sei • Soit  $x_0 = y_0 = 1$

$$\Rightarrow y'_0 = -\frac{x_0}{y_0} = -\frac{1}{1} = -1$$

$\leadsto$  Linienelement • *élément de ligne*  $(1, 1, -1)$

(Vgl. Skizze • Voir esquisse)

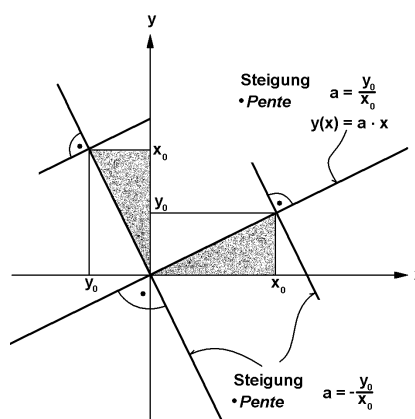
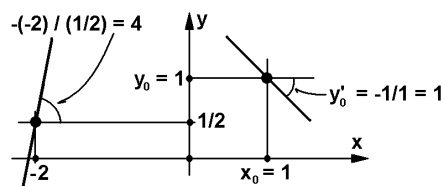
$\leadsto$  Idee: • Idée:

Sei • Soit

$$y = a \cdot x \Rightarrow y' = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{a \cdot x} = -\frac{1}{a}$$

Eine Gerade mit der Steigung  $-\frac{1}{a}$  ist senkrecht zu einer Geraden mit der Steigung  $a$ .

• Une droite à la pente  $-\frac{1}{a}$  est perpendiculaire à une droite à la pente  $a$ .

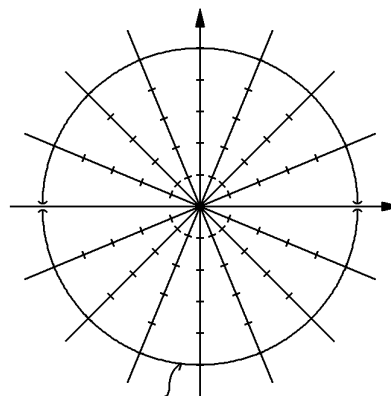


In jedem Punkt  $P_0 = (x_0, y_0 = a \cdot x_0)$  lässt sich daher sofort das Linienelement  $(x_0, a \cdot x_0, -\frac{1}{a})$  zeichnen. Es steht  $\perp$  zur Geraden  $y(x) = a \cdot x$  (welche durch den Ursprung geht).

• Dans chaque point  $P_0 = (x_0, y_0 = a \cdot x_0)$  l'élément de ligne  $(x_0, a \cdot x_0, -\frac{1}{a})$  se laisse tout de suite dessiner. Il est  $\perp$  à la droite  $y(x) = a \cdot x$  (qui passe par l'origine).

$\leadsto$  Die Lösungskurven müssen konzentrische Kreise um den Ursprung sein, wobei für  $y = 0$  die Lösung nicht definiert ist.  $\leadsto$  **Integalkurven.**

•  $\leadsto$  Les courbes d'intégrales doivent être des cercles concentriques autour de l'origine. Pour  $y = 0$  la solution n'est pas définie.  $\leadsto$  **Courbes intégrales.**



Integalkurve • Courbe intégrale

**Kontrolle:** • **Contrôle:** Sei • Soit  $y \neq 0$

$$\text{Kreis: } \bullet \text{ Cercle: } y = \pm\sqrt{r^2 - x^2} \ (|x| \leq r) \Leftrightarrow x^2 + y(x)^2 = r^2 := C$$

$$(\text{diff, int'gr } \leadsto) \Leftrightarrow 2x + 2y' \cdot y = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

Beispiele von Richtungsfeldern lassen sich z.B. mit einem *Mathematica*-Programm auf 'Knopfdruck' schnell generieren, vgl. Anhang. • On peut générer des exemples pour des champs de direction très vite par exemple à l'aide d'un programme de *Mathematica*, voir annexe.

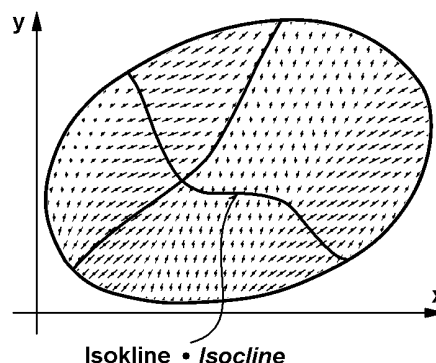
### 2.2.3 Isoklinen — Isoclines

Wir betrachten diejenigen Linienelemente  $(x_0, y_0, y'_0)$  für die gilt:  $y'_0 = k$  (const.).

- *Nous considérons les éléments de lignes  $(x_0, y_0, y'_0)$  pour lesquels vaut l'équation  $y'_0 = k$*

Diese Linienelemente zu  $k$  definieren oft wieder eine Kurve.

- *Ces éléments de ligne pour  $k$  définissent souvent de nouveau une courbe.*



**Definition:** • **Définition:** Kurven der Art  $\{(x_0, y_0, y'_0) \mid y'_0 = k\}$  nennen wir **Isoklinen**.  
 • *Nous appelons des courbes du genre  $\{(x_0, y_0, y'_0) \mid y'_0 = k\}$  des isoclines.*

**Bemerkung:** • **Remarque:** Auf den Isoklinen haben somit alle Linienelemente die gleiche Steigung  $k$ .  
 • *Sur les isoclines tous les éléments de ligne ont donc la même pente  $k$ .*

**Wichtig:** • **Important:** In expliziten D'Gl kann man die Isoklinen oft sofort einfach bestimmen und damit auch die Integralkurven abschätzen.  
 • *Pour des éq'diff on peut souvent trouver les isoclines de manière simple et à l'aide de celles-ci vite estimer les courbes d'intégrales.*

**Bsp.:** • **Exemple:**

$$1. \ y' = \frac{\sin(x)}{2 + \sin(y)} \Rightarrow \text{Isokline: } \bullet \text{ Isocline: } (y' = k = \text{const}) \sin(x) = 2k + k \cdot \sin(y) \\ \Rightarrow \quad |_{k \neq 0} \sin(y) = \frac{\sin(x) - 2 \cdot k}{k} \Rightarrow y(x) = \arcsin\left(\frac{\sin(x) - 2 \cdot k}{k}\right), \quad k \neq 0$$

Zum Ausnahmefall  $k = 0$ : • *Quant au cas exceptionnel  $k = 0$ :  $0 = \frac{\sin(x)}{2 + \sin(y)} \Rightarrow x = 0, y \in \mathbb{R} \leadsto$*   
 $y$ -Achse • *Axe  $y$ .*

2. **Achtung:** • **Attention:**

Isoklinen können auch ganze 'Ebenen' sein: • *Les isoclines peuvent être aussi des plans entiers:*  
 D'Gl • *Eq'diff  $y' = a = \text{const.} \Rightarrow y = ax + C = y(x, C), \quad C \in \mathbb{R}$*

$$3. \ 2y' - (64y^2)^{\frac{1}{3}} = 0 \Rightarrow 2y' - 4(y^2)^{\frac{1}{3}} = 0 \\ \text{Isokline: } \bullet \text{ Isocline: } y' = 2y^{\frac{2}{3}} = k \Rightarrow y^{\frac{2}{3}} = \frac{k}{2} = k_1 \Rightarrow y = (k_1)^{\frac{3}{2}} = k_2 \Rightarrow y = \text{const.} \\ \leadsto \text{Isokline: Horizontale Geraden. } \bullet \text{ Isoclines: Droites horizontales.}$$

Lösung dieser D'Gl: • *Solution de cette éq'diff:*

$$(a) \ y \equiv 0 \in \mathbb{L}$$

$$\begin{aligned}
\text{(b) } y' &= \frac{dy}{dx} = 2 \cdot y^{\frac{2}{3}} \Rightarrow y^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{dy}{dx} = 2 \quad \text{für } \bullet \text{ pour } y \neq 0 \\
&\Rightarrow \int y^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{dy}{dx} dx = \int y^{-\frac{2}{3}} dy = \int 2 dx \Rightarrow 3 \cdot y^{\frac{1}{3}} + C_1 = 2x + C_2 \\
&\Rightarrow y^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}(2x + C_2 - C_1) := \frac{1}{3}(2x + C_0) := \frac{2}{3}(x + C) \Rightarrow y = \left(\frac{2}{3}(x + C)\right)^3
\end{aligned}$$

**Achtung:** • **Attention:** Für  $y \neq 0$  ist die Integralkurve hier nicht eindeutig definiert!  
 • Ici, pour  $y \neq 0$  la courbe intégrale n'est pas définie de façon univoque!

Eine Erklärung erhalten wir, wenn wir die Wendepunkte der Kurven untersuchen:

• Nous obtenons une explication si nous examinons les points d'inflexion des courbes:

$$y = \left(\frac{2}{3}(x + C)\right)^3 \Rightarrow y' = 2 \left(\frac{2}{3}(x + C)\right)^2 \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow y'' = 2 \left(\frac{2}{3}(x + C)\right) \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{9}(x + C)$$

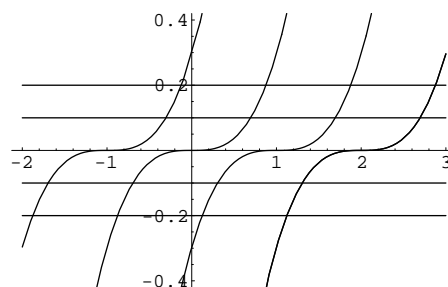
$$y'' = 0 \Rightarrow \frac{16}{9}(x + C) = 0 \Rightarrow x = -C = \text{const.} = k \Rightarrow y(x) = y(-C) = \left(\frac{2}{3}(-C + C)\right)^3 = 0$$

Die Kurve  $y = \left(\frac{2}{3}(x + C)\right)^3$  hat ihren Wendepunkt in  $(-C, 0)$ , d.h. auf der  $x$ -Achse.

• La courbe  $y = \left(\frac{2}{3}(x + C)\right)^3$  a son point d'inflexion à  $(-C, 0)$ , c.v.d. sur l'axe  $x$ .

Das Richtungsfeld hat daher die Gestalt wie im Bilde (Integralkurven):

• Le champ de directions a donc la forme qu'on voit dans l'image à côté (Courbes intégrales):



Somit kann ein Stück einer Integralkurve, das von unten die  $x$ -Achse erreicht, auf verschiedene Weisen oberhalb der  $x$ -Achse fortgesetzt werden. • On peut donc continuer une partie d'une courbe intégrale arrivant à l'axe  $x$  de par dessous de façons différentes au dessus de l'axe  $x$ .

## 2.2.4 Zentrale Fragen — Questions centrales

### Eindeutigkeit einer Lösung — Univocité d'une solution

Im letzten Beispiel haben wir gesehen, dass es sicher Differentialgleichungen gibt, deren Integralkurven an gewissen Punkten auf unterschiedliche Weisen fortgesetzt werden können. Die Lösungen sind somit nicht eindeutig. • On a vu dans l'exemple dernier qu'il existe des équations différentielles dont les courbes intégrales peuvent être continuées de façons différentes. Donc les solutions ne sont pas univoques.

→ **Problem 1:** Wann hat eine Differentialgleichung auch eine eindeutige Lösung?

• **Problème 1:** Quand une équation différentielle a-t-elle aussi une solution univoque?

Das Eindeutigkeitsproblem ist im Vergleich zu den nachfolgenden Problemen einfach zu lösen.

• Par comparaison aux problèmes qui suivent ci-dessous, le problème de l'univocité ne pose pas de problèmes énormes.

**Existenz einer Lösung — Existence d'une solution**

Man sieht schon graphisch, dass die folgende Gleichung keine Integralkurve besitzen kann:

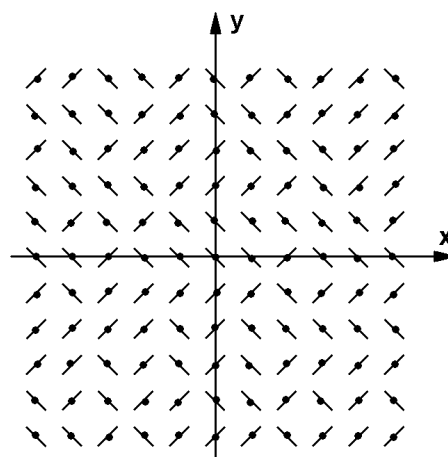
• *On voit de façon graphique, que l'équation suivante ne peut pas avoir de courbe d'intégrale:*

$$y' = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Im Bild ist jeder Punkt zufällig gewählt:

• *Dans l'image chaque point est choisi par hasard:*

$$(x \in \mathbb{Q}) \vee (x \notin \mathbb{Q})$$



Hingegen besitzt die Gleichung  $y' = y$  ganz sicher eine Lösung, nämlich  $y(x) = e^x$ , wie man sofort durch Einsetzen feststellt. • *Par contre l'équation  $y' = y$  possède sûrement une solution  $y(x) = e^x$ , comme on peut constater par substitution.*

**Weiteres Beispiel: • Autre exemple:**

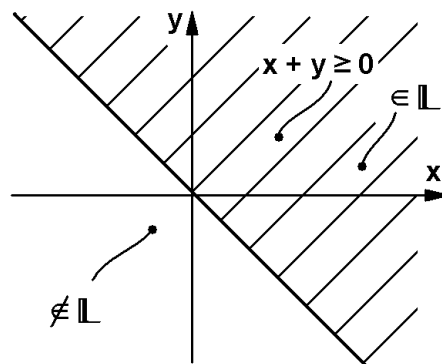
Definitionsbereich einer Lösung • *Domaine de définition d'une solution*

$$y' = \sqrt{x+y}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad y(x) = ?$$

Wegen  $\sqrt{x+y} \geq 0$  ist die Gleichung nur für  $y \geq -x$  definiert. • *A cause de  $\sqrt{x+y} \geq 0$  l'équation n'est définie que pour  $y \geq -x$*

Implizite Lösung: • *Solution implicite:*

$$-x - 2 \cdot \operatorname{artanh}(\sqrt{x+y}) - \ln(-1 + x + y) + 2 \cdot \sqrt{x+y} = C, \quad x \in \mathbb{R} \Rightarrow y \in \mathbb{C} \dots!$$



↪ **Problem 2:** Existiert zu einer gegebenen Differentialgleichung auch eine Lösung?

• **Problème 2:** *Est-ce qu'il existe aussi une solution pour une équation différentielle donnée?*

Das Existenzproblem ist im Vergleich zu den andern Problemen oft schwierig zu lösen, ausser bei relativ einfachen Klassen von Gleichungen, für die man generelle Existenzsätze kennt. • *Par comparaison aux autres problèmes, la résolution du problème de l'existence est difficile, excepté pour les classes de problèmes simples pour lesquelles on a des théorèmes d'existence.*

**Lösungsmethode — Méthode de solution**

**Problem 3:** Wie lässt sich die Lösung einer gegebenen Differentialgleichung auffinden? Welche Methoden hat man zur Verfügung?

• **Problème 3:** *Comment est-ce qu'on peut trouver la solution d'une équation différentielle donnée? Quelles sont les méthodes qu'on a à disposition?*

Was die Lösungsmethoden betrifft, gibt es in der Literatur riesige Sammlungen. Wir werden in diesem Kurs nur sehr wenige, aber für uns wichtige Methoden besprechen können. • *En ce qui concerne les méthodes de solution, on a dans la littérature des collections énormes. Pendant notre cours nous pouvons discuter seulement une petite partie qui a notamment une grande importance pour nous.*

### Natur der Darstellbarkeit einer Lösung — Nature de la représentation d'une solution

**Problem 4:** Wann ist es möglich, zu einer gegebenen Differentialgleichung eine analytische Lösung aufzufinden? Wann kann man eine brauchbare numerische Lösung finden?

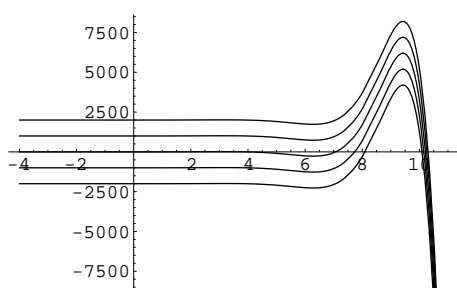
• **Problème 4:** *Quand est-ce qu'il est possible de trouver une solution analytique d'une équation différentielle donnée? Quand est-ce qu'on peut trouver une solution numérique qui soit valable?*

### Natur der Stabilität einer Lösung — Stabilité d'une solution

Wenn man an einem System ganz wenig die Parameter verändert, so hätte man es meistens gerne so, dass dann das System sein Verhalten auch nur ganz wenig ändert und nicht komplett kippt. Z.B. sollte ein wenig mehr Wärme in einem Gas zu einem etwas höheren Druck und nicht zur Explosion des Systems führen. • *Si on changeait très peu les paramètres à un système, on aimerait bien que le système change seulement très peu son comportement et qu'il ne bascule pas complètement. P.ex. un un peu plus de chaleur dans un gaz devrait seulement augmenter un peu la pression et non pas causer une explosion du système.*

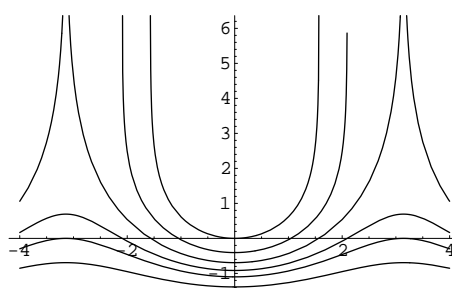
**Problem 5:** Wann verhält sich die Lösung einer gegebenen Differentialgleichung auch **stabil** in dem Sinne, dass bei kleinen Änderungen der Parameter die Lösung nach grösseren Zeiten auch nur wenig ändert und das System nicht komplett kippt? (Vgl. Skizzen.)

• **Problème 5:** *Quand est-ce que la solution d'une équation différentielle se comporte de façon **stable** dans le sens suivant? C'est-à-dire quand un petit changement des paramètres a comme conséquence seulement un petit changement de la solution après un certain temps et ne mène pas à un changement total du système? (Voir images.)*



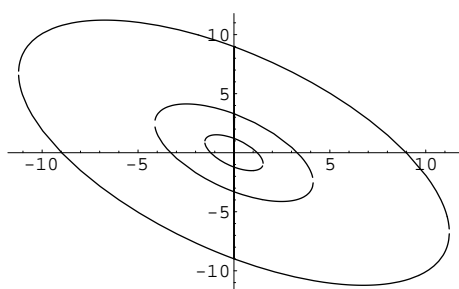
$$y' = e^x \cdot \sin(x)$$

$$y = c - \frac{1}{2} e^x \cos(x) + \frac{1}{2} e^x \sin(x)$$



$$y' = e^y \cdot \sin(x)$$

$$y = -\ln(\cos(x) + c), \quad \cos(x) + c > 0$$



$$y' = -\frac{5x+3y}{3x+5y}$$

$$y = \frac{1}{5}(-3x \pm x\sqrt{-16+5e^{2(x-\ln(x))}})$$

## 2.3 Anfangswertproblem — Problème de valeur initiale

### 2.3.1 Idee — Idée

**Bsp.:** • **Exemple:**

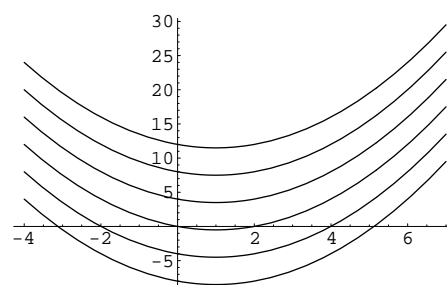
D'Gl: • *Eq. diff.:*  $y' = x - 1$

$$\Rightarrow y = \int x - 1 dx = \frac{1}{2}x^2 - x + C$$

Speziell: • *Spécialement:*  $y(0) = C$

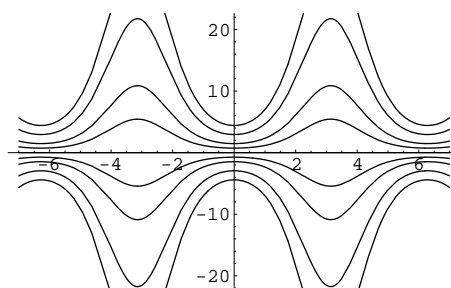
$$\mathbb{L} = \{y_C(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + C \mid C \in \mathbb{R}\}$$

$\leadsto \mathbb{L}$  = Unendliche Kurvenschar, Scharparameter  $C$ . •  $\mathbb{L}$  = *Famille de courbes infinie, paramètre de la courbe  $C$ .*



$$y' = x - 1, \quad y = \frac{1}{2}x^2 - x + C$$

Allgemein ist bei uns die Lösung einer einfachen expliziten Differentialgleichung eine Kurvenschar. • *Généralement chez nous la solution d'une équation différentielle explicite et simple est une famille de courbes.*



$$y' = y + \sin(x), \quad y = c \cdot e^{-\cos(x)}$$

Man kann sich demnach die folgende sinnvolle Frage stellen:

• *On peut se poser donc la question raisonnable suivante:*

**Problem:** • **Problème:** Suche zu einer gegebenen Differentialgleichung  $y' = f(x, y)$  diejenigen Integralkurven, die durch einen gegebenen Punkt  $P_0 = (x_0, y_0)$  gehen. • *Soit donnée une équation différentielle  $y' = f(x, y)$ . Trouver les courbes intégrales qui passent par le point donné  $P_0 = (x_0, y_0)$ .*

**Definition:** • **Définition:**

Das eben gestellte Problem heisst **Anfangswertproblem (AWP)**. Die Bedingung  $y(x_0) = y_0$  heisst **Anfangsbedingung (A'Bed)**. • *Le problème qu'on vient de poser s'appelle problème de valeur initiale (PVI). La condition  $y(x_0) = y_0$  s'appelle condition initiale (CInit).*

### 2.3.2 Verallgemeinerung des Problems — Généralisation du problème

Ein analoges Problem kann man sich für einfache **explizite Differentialgleichungen höherer Ordnung** stellen. Man kann sich vorstellen, dass beim Lösen der D'Gl so oft integriert werden muss, wie die Ordnung angibt, um zur Lösung gelangen zu können. Daher sind vermutlich soviele Anfangsbedingungen notwendig, wie die Ordnung angibt, um die anfallenden Integrationskonstanten fixieren zu können.

• *On peut se poser un problème analogue pour les équations différentielles explicites et simples d'ordre supérieur. On peut s'imaginer que pour résoudre l'éq. diff. il faut intégrer si souvent que l'ordre l'indique pour arriver à une solution. Par conséquent il faut nécessairement donner probablement le même nombre de conditions initiales que l'ordre indique pour pouvoir fixer les constantes d'intégration qui apparaissent.*

**Bsp.:** • **Exemple:**  $y''' = f(x, y, y', y'')$

↪ Integrationskonstanten: • *Constantes d'intégration:*  $C_1, C_2, C_3$

↪ **A'Bed.** • **C.Init.**  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, y''(x_0) = y''_0$

Daher definieren wir: • *C'est pourquoi nous définissons:*

**Definition:** • **Définition:**

Das Problem • *Le Problème*

$$y^{(n)}(x) = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

$$(*) \quad y(x_0) = y_0$$

$$(*) \quad \dots = \dots$$

$$(*) \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

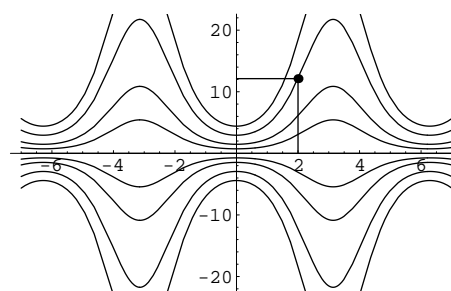
heißt **Anfangswertproblem** • *s'appelle problème de valeur initiale.*

Die Bedingungen (\*) heißen **Anfangsbedingungen** • *Les conditions (\*) s'appellent conditions de valeurs initiales*

**Bemerkung:** • **Remarque:**

Ohne Anfangsbedingungen ↪ **allgemeine Lösung** ( $\mathbb{L}_g$ ), mit Anfangsbedingungen ↪ **partikuläre Lösung** ( $\mathbb{L}_p$ )

• *Sans conditions initiales* ↪ **solution générale** ( $\mathbb{L}_g$ ), *avec conditions initiales* ↪ **solution particulière** ( $\mathbb{L}_p$ )



$$y' = y + \sin(x), \quad y(2) = 8 \cdot e^{-\cos(2)}$$

**Beispiele:** • **Exemples:**

$$1. \quad y \cdot y'' - (y')^2 = 0 \quad (\text{resp.} \quad \bullet \quad \text{resp.} \quad y'' = \frac{(y')^2}{y}) \quad \rightsquigarrow \quad \mathbb{L}_g: y(x) = C_1 \cdot e^{C_2 \cdot x}$$

$$\text{A'Bed.} \quad \bullet \quad \text{C.Init.:} \quad y(3) \approx 8.96338, \quad y'(3) \approx 4.48169 \Rightarrow y(x) \approx 2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$$

$$2. \quad \frac{x \cdot y'}{2} - y = 0 \quad (\text{resp.} \quad \bullet \quad \text{resp.} \quad y' = \frac{dy}{dx} = 2 \frac{y}{x}), \quad \text{A'Bed.} \quad \bullet \quad \text{C.Init.} \quad y(1) = 1$$

**Trick:** • **Truc:** „Separiere“ die Variablen wie folgt: • *„Séparer“ les variables comme il suit:*



$$\begin{aligned}
y' \cdot \frac{1}{y} &= \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = 2 \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{y} \cdot y' dx = \int \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} dx = \int \frac{1}{y} dy = \int 2 \cdot \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = 2 \int \frac{1}{x} dx \\
&\Rightarrow \ln(y) + C_1 = 2 \ln(x) + C_2 \Rightarrow \ln(y) = 2 \ln(x) + C_3 \\
&\Rightarrow y = e^{\ln(y)} = e^{2 \ln(x) + C_3} = e^{2 \ln(x)} \cdot e^{C_3} := (e^{\ln(x)})^2 \cdot C = x^2 \cdot C = C \cdot x^2 \Rightarrow y(x) = C \cdot x^2
\end{aligned}$$

$$y(1) = 1 \Rightarrow C \cdot 1^2 = C = 1 \Rightarrow y_{\text{part}}(x) = x^2$$

### 2.3.3 Randwertprobleme — Problèmes aux limites

Eine vom Anfangswertproblem verschiedene Problemstellung begegnet uns in den **Randwertproblemen**. • *Les problèmes aux limites sont différents des problèmes de valeurs initiales.*

Die Art dieser Problemstellung ist aus dem nachfolgenden Beispiel ersichtlich. (In diesem Kurs wird weiter nicht auf diese Problemstellung eingegangen.) • *La manière de poser ce problème est évidente dans l'exemple qui suit. (Dans ce cours, nous n'allons pas continuer de traiter ce genre de problèmes.)*

Bsp.: • **Exemple:**

D'Gl • Eq.diff.: (RWP • PAL)

$$\begin{aligned}
y'' &= \lambda y \\
y(0) &= 0 \quad (*) \\
y(\pi) &= 0 \quad (*)
\end{aligned}$$

Die Gleichungen (\*) sind die **Randbedingungen**. • *Les équations (\*) sont les conditions aux limites*

Allgemein lauten hier die Randbedingungen: • *De façon générale les conditions aux limites sont:*  
 $y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2$   
 Gesucht ist dann eine Lösung im Intervall  $[x_1, x_2]$ . • *On cherche donc une solution dans l'intervalle  $[x_1, x_2]$ .*

$\lambda$  heisst hier **Eigenwert**  $\rightsquigarrow$  „Eigenwertproblem“. • *Ici,  $\lambda$  s'appelle valeur propre  $\rightsquigarrow$  "Problème de valeur propre".*

Man kann sofort Lösungen erraten: • *On peut deviner tout de suite des solutions:*

$$y_1(x) = \sin(x), \quad y_2(x) = \sin(x), \quad y_2(x) = \sin(2x), \quad y_3(x) = \sin(3x), \quad \dots, \quad y_n(x) = \sin(nx), \quad n \in \mathbb{Z}$$

Es fällt auf, dass z.B.  $y(x) = \cos(nx)$  zwar die Differentialgleichung erfüllt, nicht aber die Randbedingungen! • *On constate que p.ex.  $y(x) = \cos(nx)$  satisfait l'équation différentielle, mais non les conditions aux limites.*

### 2.3.4 Veränderte Problemstellung — Changer le problème

Bei Differentialgleichungen 1. Ordnung  $y'(x) = f(x, y)$  kann man versuchen, statt die Lösungen die orthogonalen Trajektorien  $y_{\perp}(x)$  zu suchen. • *Quant aux équations différentielles de premier ordre  $y'(x) = f(x, y)$ , on peut essayer de chercher les trajectoires orthogonales  $y_{\perp}(x)$ , au lieu de chercher les solutions.*

Denn es gilt: • *Car il vaut:* 
$$y'_{\perp}(x_0) = -\frac{1}{y'(x_0)} \quad \forall x_0 \in D_y$$

**Bsp.:** • **Exemp.:**Sei • Soit (a)  $y(x) = y_C(x) = C \cdot \sin(x) \Rightarrow y'(x) = C \cdot \cos(x)$ 

$$\Rightarrow \frac{y_C'(x)}{y_C(x)} = \frac{C \cdot \cos(x)}{C \cdot \sin(x)} = \cot(x) \quad \forall_C \rightsquigarrow y_C'(x) = y_C(x) \cdot \cot(x)$$

(b)  $P = P(x, y), \quad P_0 = P(x_0, y_0) = P(x_0, y_C(x_0)) \rightsquigarrow y_C(x_0) = y_{\perp, B}(x_0)$   
 $C, B$  Parameter • paramètres  $\rightsquigarrow$ 

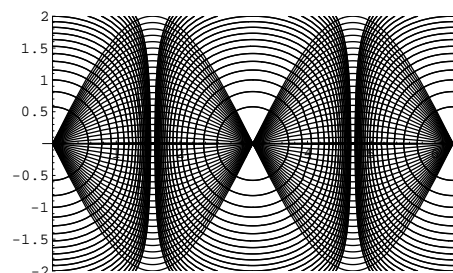
$$y_C'(x_0) = y_C(x_0) \cdot \cot(x_0) = y_{\perp, B}(x_0) \cdot \cot(x_0) = -\frac{1}{y_{\perp, B}'(x_0)} \Rightarrow y_{\perp, B}'(x_0) \cdot y_{\perp, B}(x_0) = -\tan(x_0) \quad \forall_{B, x_0}$$

$$\Rightarrow y_{\perp, B}'(x) \cdot y_{\perp, B}(x) = -\tan(x)$$

Sei • Soit  $y_{\perp, B}(x) := z(x)$   
 $\Rightarrow z'(x) \cdot z(x) = -\tan(x)$ 

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int z'(x) \cdot z(x) dx &= \int z(x) \cdot \frac{dz}{dx} dx \\ &= \int z dz = \frac{1}{2} z^2 + B_1 = - \int \tan(x) dx \\ &= \int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} dx = \ln(|\cos(x)|) + B_1 \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \Rightarrow z(x)^2 = \ln(\cos^2(x)) + B \Rightarrow z(x) = y_{\perp, B}(x) = \sqrt{\ln(\cos^2(x)) + B}$$



## 2.4 Existenz und Eindeutigkeit — Existence et univocité

**Bemerkung:** • **Remarque:**

Die **Existenz** einer Lösung einer expliziten D'Gl  $y^{(n)}(x) = f(x, y', \dots, y^{(n-1)})$  lässt sich allgemein für **stetige** Funktionen  $f$  beweisen, **nicht** aber die **Eindeutigkeit**. • *On peut prouver l'existence d'une solution d'une équation différentielle  $y^{(n)}(x) = f(x, y', \dots, y^{(n-1)})$  généralement pour des fonctions continues  $f$ , mais non l'univocité.*

(Die Beweise sind im allgemeinen recht tieflegend und bauen üblicherweise auf Funktionalanalysis, worauf hier nicht eingegangen wird. Der Eindeutigkeitsbeweis gelingt unter der Voraussetzung einer **Lipschitzbedingung**, die später besprochen wird.) • *(Généralement les preuves sont très approfondies. Normalement elles s'appuient sur l'analyse fonctionnelle, une matière qui n'est pas traitée dans ce cadre. On réussit à prouver l'univocité à une condition de Lipschitz qui est traitée plus tard.)*

### 2.4.1 Existenzsatz von Peano — Théorème d'existence de Peano

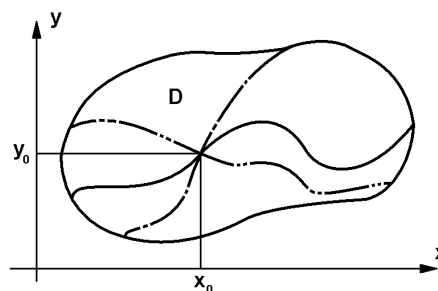
Zur Vereinfachung wollen wir hier Differentialgleichungen 1. Ordnung diskutieren. Für D'Gl höherer Ordnung kann man eine ähnliche Betrachtung führen, muss aber Vektorräume mit speziellen Abstandsbegriffen zu Hilfe nehmen, was die Sache ein wenig kompliziert. • *Pour simplifier la chose, nous voulons discuter ici les équations différentielles du 1. ordre. Pour les éq.diff. d'ordre supérieur, on peut traiter la matière de façon pareille, mais on doit s'appuyer sur les espaces vectoriels liés à des notions de distances spéciales, ce qui complique un peu la chose.*

Sei  $D$  ein vernünftiges Gebiet. • Soit  $D$  une région raisonnable.

**Satz:** • **Théorème:**  
(Peano)

**Vor.:** • **Hyp.:**

- 1)  $f$  stetig in • *continue à*  $D \subseteq \mathbb{R}^2$
- 2)  $y' = f(x, y)$  in • *dans*  $D$



**Beh.:** • **Thè.:**  $\forall (x_0, y_0) \in D$  : Durch  $(x_0, y_0)$  geht mindestens eine Integralkurve, die bis zum Rand von  $D$  verläuft.  
 •  $\forall (x_0, y_0) \in D$  : *Par le point  $(x_0, y_0)$  il y a au moins une courbe intégrale qui passe jusqu'au bord de  $D$ .*

## 2.4.2 Eindeutigkeit einer Lösung — Univocité d'une solution

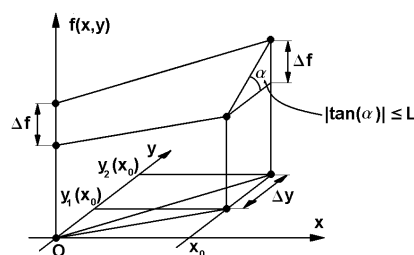
Wir betrachten auch hier vorerst nur Differentialgleichungen 1. Ordnung.

• *À ce sujet nous ne considérons pour le moment que des équations différentielles du 1. ordre.*

**Definition:** • **Définition:**  $f$  genügt in  $D$  bezüglich  $y$  einer **Lipschitzbedingung** •  $f$  *satisfait dans  $D$  une condition de Lipschitz par rapport à  $y$*   
 $\Leftrightarrow \exists L \in \mathbb{R}^+ : \forall (x, y_1), (x, y_2) \in D : |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|$

**Symbol:** • **Symbole:**  $f \in \mathcal{L}$ ipschitz

$L$  heisst **Lipschitzkonstante**. •  $L$  *s'appelle constante de Lipschitz*.

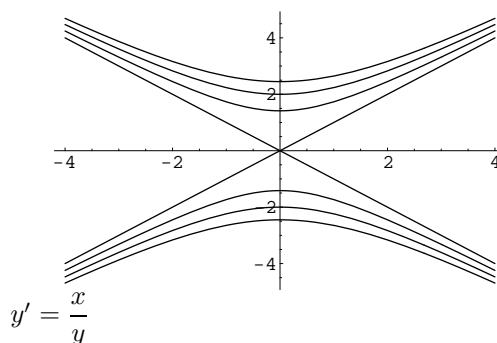
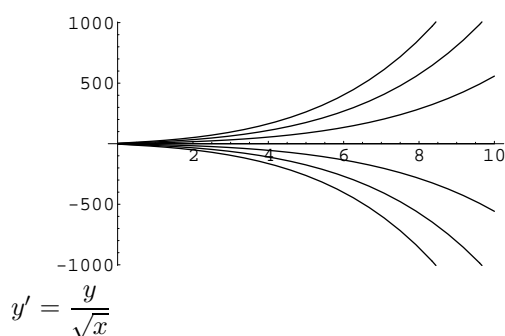


**Bemerkung:** • **Remarque:**

Die Lipschitzbedingung ist eine schwächere Bedingung als die Differenzierbarkeit! • *La condition de Lipschitz est une condition plus faible que la dérivabilité.*

Lipschitz:  $Q(f, x, y_1(x), y_2(x)) := \left| \frac{f(x, y_2(x)) - f(x, y_1(x))}{y_2(x) - y_1(x)} \right| \leq L, \quad y_1(x) \neq y_2(x)$

Diff'barkeit: • *Dérivable:*  $\lim_{y_2 \rightarrow y_1} Q(f, x, y_1(x), y_2(x)) \text{ ex.}$



**Satz:** • **Théorème:**      **Vor.:** • **Hyp.:**

- 1)  $f$  diff'bar in • *dérivable dans*  $U_\delta(y_0)$
- 2)  $f'_y$  beschr'borné( $U_\delta(y_0)$ )

**Beh.:** • **Thè.:**

- $f$  genügt in  $U_\delta(y_0)$  einer Lipschitzbedingung  
 •  $f$  satisfait une condition de Lipschitz dans  $U_\delta(y_0)$

**Zum Beweis:** • **Quant à la preuve:**

Sei • *Soit*  $\Delta x > 0 \Rightarrow \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right| = \frac{|\Delta y|}{\Delta x} \rightarrow |y'| = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right| = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta y|}{\Delta x} = \frac{|dy|}{dx}$

Analog: • *Analogiquement:*

$|f'_y| = \left| \frac{df}{dy} \right|$  mit • *avec*  $|f'_y| \leq k$  in • *dans*  $U_\delta(y_0)$  ( $f$  beschr'borné)  $\Rightarrow$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left| \int_{f(x, y_2)}^{f(x, y_1)} df \right| \leq \left| \int_{f(x, y_2)}^{f(x, y_1)} |df| \right| = \left| \int_{y_2}^{y_1} \frac{|df|}{dy} dy \right| \leq \left| \int_{y_2}^{y_1} k dy \right| = k \cdot |y_1 - y_2|$$

Wähle: • *Choisir:*  $L := k \Rightarrow |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq k \cdot |y_1 - y_2| = L \cdot |y_1 - y_2|$  (Lipschitz) ☺

**Bedeutung von  $L$ :** • **Signification de  $L$ :**

Sei • *Soit*  $f$  diff'bar in • *dérivable dans*  $U_\delta(y_0) \Rightarrow |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|$

$$\Rightarrow L \geq \frac{|f(x, y_1) - f(x, y_2)|}{|y_1 - y_2|} \Rightarrow |f'_y| = \lim_{y_2 \rightarrow y_1} \frac{|f(x, y_1) - f(x, y_2)|}{|y_1 - y_2|} \leq L \Rightarrow |f'_y| \leq L$$

**Konsequenzen:** •  $L$  ist eine Schranke für  $|f'_y|$  •  $L$  est une borne pour  $|f'_y|$

**Conséquences:**

Weiter folgt aus der Lipschitzbedingung: • *Ensuite, comme conséquence de la condition de Lipschitz, on peut noter:*

$y_2 \rightarrow y_1 \Rightarrow |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \rightarrow 0$  d. h. • *ç. v. d.*  $f(x, y_1) \rightarrow f(x, y_2) \rightsquigarrow$

**Korollar:** • **Corollaire:**

**Vor.:** • **Hyp.:**

$f \in \mathcal{L}\text{ipschitz}(y)$

**Beh.:** • **Thè.:**

$f \in \text{stet'cont}(y)$

**Bemerkung:** • **Remarque:** Die Lipschitzbedingung ist also schwächer als die Differenzierbarkeitsbedingung, aber stärker als die Stetigkeitsbedingung • *La condition de Lipschitz est donc plus faible que le condition de la dérivabilité, mais plus forte que la condition de continuité.*

### 2.4.3 Existenzsatz und Eindeutigkeit für allgemeine Gebiete — Existence et univocité pour des régions générales

**Satz:** • **Théorème:**      **Vor.:** • **Hyp.:**

- (1) **AWP** • **PVI:**  $y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$
- (2)  $f \in \text{stet}'\text{cont}(D)$
- (3)  $\forall \bar{U} \subset D : f \in \mathcal{Lipschitz}(\bar{U})$

**Beh.:** • **Thè.:**

- (1) Das **AWP** • **PVI** ist in  $U$  eindeutig lösbar. • *Le AWP • PVI est résoluble dans  $U$  de façon univoque.*
- (2) Die Integralkurven verlaufen in  $D$  von Rand zu Rand. • *Les courbes intégrales passent dans  $D$  de limite (frontière) à limite.*

**Satz:** • **Théorème:**      **Vor.:** • **Hyp.:**

- (1) **AWP** • **PVI:**  $y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$
- (2)  $f \in \text{stet}'\text{cont}(D)$
- (3)  $\forall \bar{U} \subset D : f \in \mathcal{Lipschitz}(\bar{U})$
- (4)  $f \notin \mathcal{Lipschitz}(\partial D)$

**Beh.:** • **Thè.:**

- (3) Die Integralkurven lassen sich nicht eindeutig über den Rand hinaus fortsetzen.  
• *Il n'est pas possible de continuer les courbes intégrales au delà de la limite (frontière).*

**Bemerkung:** • **Remarque:** Ein analoger Satz gilt für Systeme und somit für Differentialgleichungen höherer Ordnung. (Details vgl. Literatur.)  
• *Un théorème analogue vaut pour les systèmes et par conséquent pour les équations différentielles d'ordre supérieur. Détails: voir la littérature.*

Da die Differenzierbarkeitsbedingung stärker ist als die Lipschitzbedingung, ergibt sich sofort aus dem letzten Satz eine einfache Folgerung, die manchmal auch als **Satz von Cauchy** erwähnt wird:

• *Comme la condition de la dérivabilité est plus forte que la condition de Lipschitz, il résulte du dernier théorème aussitôt une conclusion simple, qui est mentionnée parfois aussi comme **théorème de Cauchy**:*

**Korollar:** • **Corollaire:****Vor.:** • **Hyp.:**

- (1) **AWP** • **PVI:**  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$   
 (2)  $f'_y$  existiert in • *existe dans*  $D$   
 (3)  $f'_y \in \text{beschr'borné}(D)$

**Beh.:** • **Thè.:**

- (1) Das AWP ist in  $U$  eindeutig lösbar. • *Le AWP • PVI est résoluble dans  $U$  de façon univoque.*

**Beispiele:** • **Exemples:**

1.  $y' = e^y \cdot \sin(x) \rightsquigarrow f(x, y) := e^y \cdot \sin(x) \in \text{diff'bar'dérivab}(D_f)$ ,  $D_f = \mathbb{R} \times [-20, 20]$   
 ( d. h. • ç. v. d.  $y \in [-20, 20]$  )  $\Rightarrow |f'_y| \in \text{beschr'borné}(D_f)$

Wähle: • *Choisir:*  $L = \text{Max}_{(x,y) \in D_f} |f'_y| + 1 \Rightarrow f \in \mathcal{Lipschitz}(D_f)$   
 $\Rightarrow$  AWP eindeutig lösbar! • *Le PVI est résoluble de façon univoque!*

2.  $y'(x) = \frac{3}{2} \sqrt[3]{y^2} \cdot x^2 \Rightarrow f(x, y) = \frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}} \cdot x^2$ ,  $f'_y(x, y) = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}} \cdot x^2$   
 $\Rightarrow |f'_y(x, y)| = \frac{1}{\sqrt[3]{y}} \cdot x^2 \rightarrow \infty$  für • *pour*  $y \rightarrow 0$ ,  $x = \text{const.} \neq 0$

Sei • *Soit*  $D_f = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \Rightarrow |f'_y(x, y)| \notin \text{beschr'borné}(D_f)$   
 (Dasselbe gilt für: • *La même chose vaut pour:*  $D_f = \{(x, 0) \mid x \neq 0\}$  )

$\rightsquigarrow$  Wegen  $|f'_y| \leq L$  gilt somit: • *A cause de*  $|f'_y| \leq L$  *il vaut donc:*  $f \notin \mathcal{Lipschitz} !!$

**Problem:** • **Problème:** Was passiert mit der Lösung für  $(x, y) = (x_0, 0)$ ? (Wegen der Stetigkeit von  $f$  ist die Existenz einer Lösung zu erwarten. Wegen der Verletzung der Lipschitzbedingung kann diese Lösung aber nicht eindeutig sein!) • *Qu'est-ce qui se passe avec la solution pour  $(x, y) = (x_0, 0)$ ? (A cause de la continuité de  $f$  on s'attend qu'une solution existe. Comme on a violé la condition de Lipschitz, cette solution ne peut pas être univoque!!)*

**Lösung:** • **Solution:**

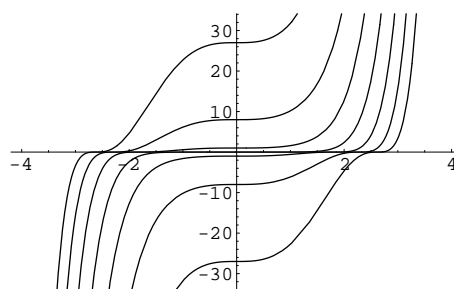
$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}} \cdot x^2 \Rightarrow \int y^{-\frac{2}{3}} dy = \int \frac{3}{2} \cdot x^2 dx \Rightarrow 3 y^{\frac{1}{3}} + C_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} x^3 + C_2 \Rightarrow y^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{6} x^3 + C$$

$$\rightsquigarrow y(x) = \left(\frac{1}{6} x^3 + C\right)^3 := (u + C)^3 := g(u), \quad u(x) := \frac{1}{6} x^3 \quad (u \text{ bijektiv.}) \quad \bullet \quad (u \text{ bijectif.})$$

Es gilt: • *Il vaut:*  $g'_u = 3(u + C)^2$ ,  $g''_u = 6(u + C) = 6u + 6C = 6u + C_6 = 0$  für • *pour*  
 $u_0 = \frac{-C_6}{6} = C_0 \rightsquigarrow g''(u_0) = g'(u_0) = g(u_0) = 0 \rightsquigarrow$

$(C_0, 0) = (u_0, 0) \in \{(u, g(u))\}$   
 (Lösungskurve • *Courbe de solutions*)

Die Punkte der Lösungskurve auf der  $x$ -Achse sind Wendepunkte mit horizontalen Tangenten • *Les points de la courbe de solutions sur l'axe  $x$  sont donc des points d'inflexion qui possèdent des tangentes horizontales.*



Da die bijektive Abbildung  $x \mapsto u(x) = \frac{1}{6}x^3$  nur eine Ausdehnung der  $x$ -Achse bewirkt, gilt dasselbe auch für die Integralkurven  $y(x)$  • *Comme l'application bijective  $x \mapsto u(x) = \frac{1}{6}x^3$  n'effectue qu'une extension de l'axe  $x$ , la même chose vaut aussi pour les courbes intégrales  $y(x)$*

Das Bild zeigt, dass auf der  $x$ -Achse die Kurven auf verschiedene Weisen fortgesetzt werden können. Dort sind die Lipschitzbedingung und die Eindeutigkeit der Integralkurven verletzt. • *L'image montre que sur l'axe  $x$  les courbes peuvent être continuées de façons différentes. Là, la condition de Lipschitz et l'univocité des courbes intégrales sont violées.*

**Wichtig:** • **Important:** Die Eindeutigkeit von Lösungen ist in Technik und Wissenschaft zentral. Systeme, die plötzlich in eine andere, ebenfalls existierende Lösung kippen können, können gefährlich sein. • *L'évidence (univocité) de solutions est centrale dans la technique et dans les sciences. Les systèmes, qui peuvent basculer soudainement dans une autre solution qui est aussi existente, peuvent être dangereux.*

**Bemerkung:** • **Remarque:** Oft findet man in der Ingenieurliteratur den Existenz- und Eindeutigkeitssatz in folgender Formulierung (Picard–Lindelöf): • *Souvent on trouve dans la littérature pour les ingénieurs le théorème de l'existence et l'univocité des solutions exprimé de manière suivante (Picard–Lindelöf):*

**Satz:** • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ D_f &= \{(x, y) \mid x \in [a, b] \wedge y \in [c, d]\} \\ f(x, y), f'_y(x, y) &\in C[c, d] \\ P &= P(x_0, y_0) \text{ (AWP • PVI)} \end{aligned}$$

**Beh.:** • **Thè.:**

$$\begin{aligned} \forall P \in D_f \quad \exists! y &= y(x) : \\ y &\text{ Lösungskurve • } y \text{ courbe de solutions} \\ y' &= f(x, y) \wedge y_0 = y(x_0) \end{aligned}$$

### 2.4.4 Beispiel mit einer singulären Lösung — Exemple avec une solution singulière

Geg.: • **Donné:** D'Gl • Eq.diff.

$$(y'(x) - 1)^3 = 27 \cdot (y(x) - x)^2$$

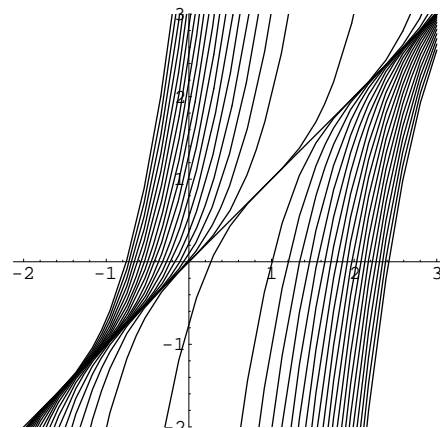
Man prüft sofort nach: • *On peut vérifier tout de suite:*

Allgem. Lös.: • *Solut. générale:*

$$y(x) = (x - C)^3 + x$$

Singuläre Lösung: • *Solution singulière:*

$$y(x) = x$$



## 2.5 Gleichungstypen, Lösungsmethoden — Types d'équations, méthodes de solution

### 2.5.1 Iterationsverfahren von Picard<sup>1</sup> — Méthode d'itération de Picard<sup>1</sup>

Betrachte: • *Etudier:*  $y' = f(x, y)$ ,  $x \in [x_0, x_0 + a]$ ,  $f \in \mathcal{Lipschitz}$

Zugehörige Integralgleichung: • *Equation intégrale liée:*  $\int y' dx = y(x) + C = \int f(x, y) dx$

$\leadsto$  AWP: • *PVI:*  $y'(x) = f(x, y) \wedge y(x_0) = y_0 \Rightarrow$  Lösung eindeutig! • *Solution univoque!*

**Methode:** Verwende die **Iterationsmethode**. In der Funktionalanalysis kann gezeigt werden, dass die folgende Funktionenfolge (Iterationsfolge) gegen eine Lösung konvergiert:

• **Méthode:** *Appliquons la méthode d'itération. Dans l'analyse fonctionnelle on peut montrer que la suite de fonctions suivante (suite d'itération) converge vers une solution:*

Start: • *Départ:*  $y_1(x) = y_0 = \text{const.}$  ( $y_0$  wählen) • *(Choisir  $y_0$ )*

Iteration: • *Itération:*  $y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_k(t)) dt$

**Bsp.:** • **Exemple:**

**AWP** • **PVI:**  $y' = y + x \Rightarrow f(x, y) = y + x$ ,  $y(0) = 0$ ,  $\neq 0$  ( $x \neq 0 \Rightarrow 0 + x \neq 0$ )

Start: • *Départ:*  $y_1(x) = y_0 = 0$

Iteration: • *Itération:*  $y_2(x) = y_{1+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_k(t)) dt = 0 + \int_0^x (0 + t) dt = \frac{1}{2} \cdot x^2$

$$y_3(x) = 0 + \int_0^x (y_2(t) + t) dt = \int_0^x \left(\frac{1}{2} \cdot t^2 + t\right) dt = \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{2!} \cdot x^2$$

<sup>1</sup>Emilie Picard, 1856 – 1941



$$\begin{aligned}
y_4(x) &= 0 + \int_0^x (y_3(t) + t) dt = \int_0^x \left( \frac{1}{3!} \cdot t^3 + \frac{1}{2!} \cdot t^2 + t \right) dt = \frac{1}{4!} \cdot x^4 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{2!} \cdot x^2 \\
&\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
y_n(x) &= 0 + \int_0^x (y_{n-1}(t) + t) dt = \dots = \frac{1}{n!} \cdot x^n + \frac{1}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} + \dots + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{2!} \cdot x^2 \\
&\leadsto y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n \right) - x - 1 = e^x - x - 1
\end{aligned}$$

**Kontrolle:** • **Contrôle:**

$$y' = y + x \Rightarrow (e^x - x - 1)' = e^x - 1 = (e^x - x - 1) + x + y = x, \quad y(0) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0 \leadsto \odot$$

**Problem:** • **Problème:** In der Praxis kann bei diesem Verfahren der Rechenaufwand enorm werden. Zwar erhält man eine Potenzreihe. Wenn aber das Bildungsgesetz nicht sichtbar wird, bleibt das Problem des Konvergenzradius und der Fehlerabschätzung. • *Dans la pratique, le travail pour calculer d'après cette méthode peut devenir énorme. En effet on obtient une série de puissances. Si la loi de composition n'est pas bien visible, le problème du rayon de convergence et l'estimation d'erreur reste ouverte.*

Nun wollen wir uns etwas mit einfach lösbaren Gleichungstypen beschäftigen: • *Maintenant nous allons nous occuper un peu des types d'équations résolubles de façon simple:*

## 2.5.2 Separationsverfahren — Méthode de séparation des variables

Das Separationsverfahren oder die Methode der Variablentrennung haben wir bereits weiter oben praktiziert. (Vgl. Seite 14.) Jetzt wollen wir die Methode allgemeiner besprechen. • *Nous avons déjà utilisé la méthode de séparation des variables. (Voir page 14.) Maintenant nous allons discuter la méthode de façon plus générale.*

**Definition:** • **Définition:** Eine D'Gl der Form  $y'(x) = f(x) \cdot g(y)$  heisst **separabel** oder separierbar. • *Une équation diff. de la forme  $y'(x) = f(x) \cdot g(y)$  l'appelle séparable.*

**Methode:** • **Méthode:**  $y' = \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{g(y)} = f(x), \quad g(y) \neq 0$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{g(y)} \cdot \frac{dy}{dx} dx = \int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx \leadsto$$

**Lemma:** • **Lemme:** **Vor.:** • **Hyp.:**  $y'(x) = f(x) \cdot g(y), \quad g(x) \neq 0$

**Beh.:** • **Thè.:**

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$$

**Konsequenz:** • **Conséquence:**

Sei • *Soit*  $G(y) := \int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx = F(x) + C.$  Sei • *Soit*  $G^{-1}(y)$  definiert. • *définie.*  
 $\leadsto y = G^{-1}(F(x) + C)$

Beispiele: • Exemples:

1. D'Gl • Eq.diff.:  $e^y \cdot y' - x^2 - x = 0 \Rightarrow y' = (x^2 + 2) \cdot e^{-y} = f(x) \cdot g(y) \leadsto$  separabel  
• *séparable*

$$\begin{aligned} \Rightarrow G(y) &= \int \frac{1}{g(y)} dy = \int \frac{1}{e^{-y}} dy = \int e^{-y} dy = e^y + C_1 \\ &= \int f(x) dx = \int (x^2 + 2) dx = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + C_2 \\ \Rightarrow e^y &= \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + C \Rightarrow y = \ln\left(\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + C\right) \end{aligned}$$

2. D'Gl • Eq.diff.:  $y' = e^y \cdot \sin(x)$   
 $\Rightarrow \int e^{-y} dy = \int \sin(x) dx \Rightarrow -e^{-y} = -\cos(x) - C \Rightarrow e^{-y} = \cos(x) + C$   
 $\Rightarrow -y = \ln(\cos(x) + C), y = -\ln(\cos(x) + C)$

3. Elektrischer RC-Kreis (ohmscher Widerstand, Kondensator) • *Circuit électrique RC (résistance ohmique, condensateur)*

$$\text{AWP} \quad \bullet \text{ PVI: } R \cdot C \cdot I' + I = 0 \Rightarrow U(t) = R \cdot I(t) = \text{const.} - \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t_1} I(t) dt$$

$$\text{Sei} \quad \bullet \text{ Soit } U_C(0) = \text{const.} = 0 \Rightarrow I = I(t) = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

4. D'Gl • Eq.diff.:

$$y' = -\text{sgn}(y) \cdot x \cdot \sqrt{|y|} = \begin{cases} -x \sqrt{+y} & y \geq 0 \\ +x \sqrt{-y} & y < 0 \end{cases}$$

$$\text{Lösung:} \quad \bullet \text{ Solution: } y(x) = \frac{1}{16} (C - x^2)^2, \quad x \in (-\sqrt{C}, +\sqrt{C}), \quad C > 0$$

5. D'Gl • Eq.diff.:  $y' = y^2 + 1, y(0) = 0 \leadsto$

$$\text{Lösung:} \quad \bullet \text{ Solution: } y(x) = \tan(x + n \cdot \pi), \quad n \in \mathbb{Z}$$

### 2.5.3 „Beinahe“ separable D'Gl — Eq. diff. ”presque séparable“

Begriffe: • Notions:  $P(x), Q(x)$  seien Polynome. • *Soient donnés des polynômes  $P(x), Q(x)$ .*

Die folgende Differentialgleichung nennen wir **beinahe separabel**: • *Nous appelons ”presque separable” l'équation différentielle suivante:*

$$y' = P(x) \cdot y + Q(x)$$

Herleitung einer Lösungsformel: • *Dérivation d'une formule de solution:*

1. Sei • *Soit*  $Q(x) = 0$ .  $\rightsquigarrow y' = P(x) \cdot y$  ist separabel. • *est séparable.*  $\rightsquigarrow$

$$\int P(x) dx = \int \frac{dy}{y} = \ln(|y|) + C_1 := \ln(|y|) - \ln(|C_2|) = \ln\left(\frac{|y|}{|C_2|}\right) \Rightarrow \frac{|y|}{|C_2|} = e^{\int P(x) dx}$$

$$\Rightarrow |y| = |C_2| \cdot e^{\int P(x) dx}, \quad y = C \cdot e^{\int P(x) dx}$$

2. Studiere: • *Etudier:*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(y \cdot e^{-\int P(x) dx}) &= y' \cdot e^{-\int P(x) dx} + y \cdot e^{-\int P(x) dx} \cdot (-P(x)) \\ &= (y' - y \cdot P(x)) \cdot e^{-\int P(x) dx} = Q(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} \\ \Rightarrow \int \frac{d}{dx}(y \cdot e^{-\int P(x) dx}) dx &= (y \cdot e^{-\int P(x) dx}) + C_1 = \int Q(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} dx \Rightarrow \\ y(x) &= e^{\int P(x) dx} \cdot \left( \int Q(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} dx - C_1 \right) = e^{\int P(x) dx} \cdot \left( \int Q(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} dx + C \right) \end{aligned}$$

**Satz:** • **Théorème:**      **Vor.:** • **Hyp.:**

$$y' = P(x) \cdot y + Q(x),$$

$$P(x), Q(x) \text{ Polynome} \quad \bullet \text{ Polynômes } P(x), Q(x)$$

**Beh.:** • **Thè.:**

$$y(x) = (e^{\int P(x) dx}) \cdot \left( \int Q(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} dx + C \right)$$

**Bsp.:** • **Exemple:** **D'Gl** • **Eq.diff.:**  $y' = 3x^2 \cdot y + x^2$

$$\rightsquigarrow P(x) = 3x^2, \quad Q(x) = x^2 \Rightarrow$$

$$y(x) = e^{\int 3x^2 dx} \cdot \left( \int x^2 \cdot e^{-\int 3x^2 dx} dx + C \right) = e^{(x^3)} \cdot \left( \int x^2 \cdot e^{-(x^3)} dx + C \right) = \left( C - \frac{1}{3} \right) \cdot e^{(x^3)}$$

$$\Rightarrow y(x) = -\frac{1}{3} \cdot e^{(x^3)} + C_0$$

## 2.5.4 Substitutionsmethode — Méthode de substitution

Bei gewissen Gleichungstypen lohnt sich eine Substitution. • *Pour certains types d'équations, une substitution est recommandable.*

**Bsp.:** • **Exemple:** Der Gleichungstyp • *Le type d'équation*  $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Substituiere: • *Substituer:*  $z := \frac{y}{x} \rightsquigarrow y = z \cdot x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y' = \frac{dz \cdot x}{dx} = \frac{dz}{dx} \cdot x + z \cdot \frac{dx}{dx} \Rightarrow y' = z' \cdot x + z$

$$\rightsquigarrow z' = \frac{f(z) - z}{x} \Rightarrow \text{separabel} \quad \bullet \text{ séparable}$$

**Beispiele:** • **Exemples:**

1. **D'Gl** • **Eq.diff.:**  $x \cdot y' - y - x = 0 \Rightarrow y' = \frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x} := f\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\Rightarrow y' = \frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x} \underset{z=\frac{y}{x}}{=} 1 + z = z' \cdot x + z$$

$$\Rightarrow z' \cdot x = 1, \quad z' = \frac{1}{x} \Rightarrow z = \ln(|x|) + C = \frac{y}{x} \Rightarrow y(x) = x \cdot (\ln(|x|) + C)$$

2. D'Gl • **Eq.diff.:**  $y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy} = \frac{1 + \frac{y^2}{x^2}}{2\frac{y}{x}} = \frac{1 + (\frac{y}{x})^2}{2\frac{y}{x}} = \frac{1 + (z)^2}{2z} = z' \cdot x + z$   
 $\Rightarrow z' = \frac{dz}{dx} = \left(\frac{1 + (z)^2}{2z} - z\right) \cdot \frac{1}{x} = \left(\frac{1}{2}z - z + \frac{1}{2z}\right) \cdot \frac{1}{x} = \left(-\frac{1}{2}z + \frac{1}{2z}\right) \cdot \frac{1}{x}$   
 $\leadsto$  separabel • *séparable*  
 $\leadsto$  **Lösung:** • **Solution:**  $z(x) = \pm \sqrt{\frac{x+C}{x}}, y(x) = \pm \sqrt{x(x+C)}$

### 2.5.5 Exakte D'Gl — Eq.diff. exacte

Wir betrachten: • *Nous étudions:*  $y'(x) = \frac{dy(x)}{dx} = -\frac{g(x,y)}{h(x,y)}$

Nach der von der Variablentrennung her bekannten Vorgehensweise lässt sich diese Formel formal umschreiben in: • *Cette formule se laisse réécrire formellement d'après le procédé connu de la séparation de variables dans:*

$$h(x,y) dy + g(x,y) dx = 0$$

In diesem Ausdruck steht jetzt links ein totales Differential: • *Maintenant, on voit à gauche, dans cette expression, une différentielle totale:*

$$dF(x,y) = F_x' dx + F_y' dy = h(x,y) dy + g(x,y) dx = 0$$

Das Problem ist hier die Existenz der Funktion  $F(x,y)$ . • *Ici, le problème est l'existence de la fonction  $F(x,y)$ .*

Falls also eine Funktion  $F(x,y)$  existiert mit  $F_x' = g(x,y)$  und  $F_y' = h(x,y)$ , so ist  $F_x' dx + F_y' dy = h(x,y) dy + g(x,y) dx$  ein totales Differential. • *S'il existe donc une fonction  $F(x,y)$  avec  $F_x' = g(x,y)$  et  $F_y' = h(x,y)$ , alors  $F_x' dx + F_y' dy = h(x,y) dy + g(x,y) dx$  est une différentielle totale.*

Diese Erkenntnis können wir benutzen, um die Differentialgleichung zu lösen: • *Nous pouvons utiliser ce fait pour résoudre l'équation différentielle:*

$$\leadsto h(x,y) dy + g(x,y) dx = 0 = dF \Rightarrow F(x,y) = \int dF = C = \text{const.}$$

(Denn  $dF = 0$  ist nur gültig für  $F = \text{const.}$ ) • *(Car  $dF = 0$  n'est valable que pour  $F = \text{const.}$ )*

**Konsequenz:** • **Conséquence:**  $y(x)$  ist jetzt durch  $F(x,y) = C$  implizit gegeben. Falls sich diese Gleichung nach  $y$  auflösen lässt, hat man die explizite Lösung. •  *$y(x)$  est maintenant donné de façon implicite par  $F(x,y) = C$ . Si cette équation est résoluble vers  $y$ , on a la solution explicite.*

Daher definieren wir: • *C'est pourquoi nous définissons:*

**Definition:** • **Définition:** Eine formale D'Gl der Form  $h(x,y) dy + g(x,y) dx = 0$  heisst **exakt** in  $D$ , falls in  $D$  eine Funktion  $F(x,y)$  existiert mit  $F_x' = g(x,y)$  und  $F_y' = h(x,y)$ .  
 $F$  heisst dann **Stammfunktion**.  
 • *Une équation différentielle de forme  $h(x,y) dy + g(x,y) dx = 0$  s'appelle **exacte** dans  $D$ , s'il existe dans  $D$  une fonction  $F(x,y)$  avec  $F_x' = g(x,y)$  et  $F_y' = h(x,y)$ .  
 $F$  s'appelle **intégrale générale**.*

**Korollar: • Corollaire:**

Eine exakte D'Gl  $h(x, y) dy + g(x, y) dx = 0$  lässt sich als totales Differential  $dF = F_x' dx + F_y' dy$  interpretieren. Damit kennt man die implizite Lösung  $F(x, y) = C$ . Die explizite Lösung findet man durch auflösen dieser Gleichung, falls möglich. • *On peut interpréter une éq. diff. exacte  $h(x, y) dy + g(x, y) dx = 0$  comme différentielle totale  $dF = F_x' dx + F_y' dy$ . Ainsi on connaît la solution implicite  $F(x, y) = C$ . On trouve la solution explicite en résolvant cette équation, si c'est possible.*

Bei „anständigen“ Funktionen gilt  $F_{xy}'' = F_{yx}''$ . Daher muss bei einer exakten Differentialgleichung entsprechend gelten:  $g_y' = h_x'$  (notwendige Bedingung). • *Pour une fonction qui se comporte de manière propre on trouve:  $F_{xy}'' = F_{yx}''$ . C'est pourquoi pour une éq. diff. exacte il faut avoir conformément:  $g_y' = h_x'$  (condition nécessaire).*

**Lemma: • Lemme:****Vor.: • Hyp.:****D'Gl • Eq.diff.**

$$h(x, y) dy + g(x, y) dx = 0, \quad g_y' = h_x'$$

**Beh.: • Thè.:**

Die D'Gl ist exakt. • *L'éq.diff. est exacte.*

**Beispiele: • Exemples:**

$$\begin{aligned} 1. \text{ D'Gl • Eq.diff. } y' &= -\frac{y^2 \cdot e^{xy} + 3x^2 y}{x^3 + (1+xy)e^{xy}} \Rightarrow (y^2 \cdot e^{xy} + 3x^2 y) dx + (x^3 + (1+xy)e^{xy}) dy = 0 \\ &\leadsto g_y' = 3x^2 + 2e^{xy} y + e^{xy} x y^2 = h_x' \quad \odot \end{aligned}$$

Falls die D'Gl exakt ist, gilt: • *Si l'éq.diff. est exacte, il vaut:*

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int (y^2 \cdot e^{xy} + 3x^2 y) dx = \int (x^3 + (1+xy)e^{xy}) dy = C \\ &\leadsto y \cdot e^{xy} + x^3 y + C(y) = x^3 y + \frac{1}{x} e^{xy} + y \cdot e^{xy} - \frac{1}{x} e^{xy} + C(x) \Rightarrow C(y) = C(x) = C_0 = \text{const.} \\ &\Rightarrow F(x, y) = y \cdot e^{xy} + x^3 y + C_0 \text{ Stammfunktion • } \textit{intégrale générale.} \end{aligned}$$

$$\leadsto y(x) \text{ ist Lösung von: • } \textit{est solution de: } y \cdot e^{xy} + x^3 y = C$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ D'Gl • Eq.diff. } y'(1+x^2) + 2xy &= 0 \Rightarrow 2xy dx = (1+x^2) dy, \quad (2xy)'_y = 2x = (1+x^2)'_x \\ &\Rightarrow F(x, y) = x^2 y + y + C_0 \text{ Stammfunktion • } \textit{intégrale générale} \Rightarrow x^2 y + y = C, \quad y(x) = \frac{C}{1+x^2} \end{aligned}$$

**2.5.6 Eulersche Multiplikatoren — Multiplicateurs d'Euler****Beispiel — Exemple**

$$y' = -\frac{y}{2x} \Rightarrow y dx + 2x dy = 0 \leadsto g_y' = 1, \quad h_x' = 2 \leadsto \text{D'Gl nicht exakt! • } \textit{Eq.diff non exacte!}$$

**Problem: • Problème:** Lässt sich die Sache doch noch retten? — Ja! Man kann die D'Gl „künstlich“ exakt machen. Dazu braucht es die **Eulerschen<sup>2</sup> Multiplikatoren**. • *Est-ce qu'on peut sauver la*

chose encore? – Oui! On peut rendre l'éq.diff. exacte de façon "artificielle". Pour cela, on a besoin des multiplicateurs d'Euler<sup>2</sup>.

**Idee:** • **Idée:** Multipliziere die D'Gl mit  $y$ . • Multiplier l'éq.diff. avec  $y$ !

$$\leadsto y dx + 2x dy = 0 \mid \cdot y \Rightarrow y^2 dx + 2xy dy = 0 \leadsto \text{exakt!} \bullet \text{exacte!}$$

$$\Rightarrow F_1(x, y) = xy^2 + C_0 \quad \text{Lösung:} \bullet \text{Solution:} : xy^2 = C \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{C}{x}} = \frac{C_1}{\sqrt{|x|}}$$

**Achtung:** • **Attention:** Eulersche Multiplikatoren sind nicht immer eindeutig! • Les multiplicateurs d'Euler ne sont pas toujours bien clairs!

**Bsp.:** • **Exemple:** Für  $x > 0$  führt die Multiplikation der Gleichung mit  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  auf folgende exakte D'Gl: • Pour  $x > 0$  la multiplication de l'équation avec  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  mène à l'eq.diff. exacte suivante:

$$\frac{y}{\sqrt{x}} dx + 2\sqrt{x} dy = 0$$

$$\leadsto y x^{-\frac{1}{2}} dx + 2x^{\frac{1}{2}} dy = 0 \Rightarrow F_2(x, y) = 2y \cdot x^{\frac{1}{2}} = 2y \cdot \sqrt{x} = C$$

$$\leadsto \text{Lösung:} \bullet \text{Solution:} : y(x) = \frac{C}{2\sqrt{x}} = \frac{C_1}{\sqrt{x}}$$

$\leadsto$  Lösung von oben! • Solution qu'on a déjà trouvée ci-dessus!

### Allgemeinere Beschreibung des Verfahrens — Description plus générale de la méthode

Sei • Soit  $h(x, y) dy + g(x, y) dx = 0$ ,  $g(x, y), h(x, y) \in \text{stet'cont}(D)$  (D'Gl: • Eq.diff.):

Sei • Soit  $M(x, y) \neq 0$  in • dans  $D$

**Definition:** • **Définition:**  $M(x, y) \cdot h(x, y) dy + M(x, y) \cdot g(x, y) dx = 0$  exakt • exacte  
 $\Rightarrow M(x, y)$  heisst **integrierender Faktor** oder **Eulerscher Multiplikator** • s'appelle **facteur intégrant** ou **multiplicateur d'Euler**

**Bemerkung:** • **Remarque:**

1. Die Eulerschen Multiplikatoren werden manchmal fälschlicherweise „Multiplikatoren von Lagrange“ genannt. Der aus Turin stammende „Italiener“ Lagrange war 1766 in Berlin, wo auch Euler arbeitete. Später wirkte Lagrange in Paris. • Les multiplicateurs d'Euler sont parfois appelés faussement "multiplicateurs de Lagrange". "L'Italien" Lagrange originaire de Turin était en 1766 à Berlin, où Euler travaillait aussi. Plus tard Lagrange a séjourné et travaillé à Paris.
2. Die Bestimmung des integrierenden Faktors ist im allgemeinen schwierig. In gewissen bekannten Fällen gelingt sie jedoch recht gut. • Trouver le facteur intégrant est généralement difficile. Cependant on réussit bien dans certains cas connus.

**Beispiel eines Spezialfalles:** • **Exemple d'un cas spécial:**

Seien • Soient  $g(x, y), h(x, y), M(x, y) \in \mathcal{C}^1$  (stetig diff'bar • dérivables de façon continue)

---

<sup>2</sup>Leonard Euler, 1707 – 1783

Sei • *Soit*  $F''_{x,y} = F''_{y,x} \Rightarrow (M(x,y) \cdot g(x,y))'_y = (M(x,y) \cdot h(x,y))'_x$

$\leadsto$  Partielle Differentialgleichung • *Equation différentielle partielle*  $M'_y \cdot g + M \cdot g'_y = M'_x \cdot h + M \cdot h'_x$

$\Rightarrow M = \frac{M'_x \cdot h - M'_y \cdot g}{g'_y - h'_x} \leadsto M$  eventuell modellierbar. • *éventuellement*  $M$  peut être formé.

**Speziell:** • **Spécialement:**  $M(x,y) = M(x) \Rightarrow M'_y \equiv 0$

$\Rightarrow \frac{M'_x}{M} = \frac{g'_y - h'_x}{h} = (\ln(M))'_x \Rightarrow \ln(M) = \int \frac{g'_y - h'_x}{h} dx + C \Rightarrow M = M(x) = e^{(\int \frac{g'_y - h'_x}{h} dx + C)}$

**Satz:** • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**  $M(x,y) = M(x)$

**Beh.:** • **Thè.:**  $\frac{M'_x}{M} = \frac{g'_y - h'_x}{h}, M = M(x) = e^{(\int \frac{g'_y - h'_x}{h} dx + C)}$

**Beispiele:** • **Exemples:**

1. **D'Gl** • **Eq.diff.:**  $y \cdot (2x^2 + 2xy^2 + 1)x'_t + (3y^2 + x)y'_t = 0, x'_t = \frac{dx}{dt}, y'_t = \frac{dy}{dt}$

$\Rightarrow y \cdot (2x^2 + 2xy^2 + 1)dx + (3y^2 + x)dy = gdx + gdy = 0, g'_y \neq h'_x$

Versuche: • *Essayer:*  $M = M(x),$

$\frac{M'_x}{M} = \frac{g'_y - h'_x}{h} = \frac{1 \cdot (2x^2 + 2xy^2 + 1) + y \cdot (2 \cdot 2xy) - 1}{(3y^2 + x)} = \frac{2x^2 + 6xy^2}{x + 3y^2} = 2x := q(x)$   
 $\Rightarrow M = M(x)!!$

$\Rightarrow M(x) = e^{(\int \frac{g'_y - h'_x}{h} dx + C_0)} = e^{(\int 2x dx + C_0)} = e^{(x^2 + C_1)} = e^{(x^2)} \cdot C$   $C$  ist frei wählbar (nur ein Multiplikator notwendig!). • *Choisir  $C$  librement (seulement un multiplicateur nécessaire!).*  
 $\Rightarrow C := 1, M = e^{(x^2)}$

$\Rightarrow$  **D'Gl** • **Eq.diff.**  $e^{(x^2)} \cdot y \cdot (2x^2 + 2xy^2 + 1)dx + e^{(x^2)} \cdot (3y^2 + x)dy$  exakt. • *exacte.*

$e^{(x^2)} \cdot y \cdot (2x^2 + 2xy^2 + 1)dx + e^{(x^2)} \cdot (3y^2 + x)dy = F'_x dx + F'_y dy$

$\Rightarrow F(x,y) = \int F'_y dy = \int e^{(x^2)} \cdot (3y^2 + x)dy = e^{(x^2)} \cdot (y^3 + xy) + C_1(x)$

$\Rightarrow F'_x = \frac{d}{dx} e^{(x^2)} \cdot (y^3 + xy) + C_1(x) = 2x e^{(x^2)} \cdot (y^3 + xy) + e^{(x^2)} \cdot y + C_1(x)' \stackrel{?}{=} e^{(x^2)} \cdot y \cdot (2x^2 + 2xy^2 + 1)$

😊

$\Rightarrow C_1(x)'_x = 0, C_1(x) = C_0 = \text{const.} \Rightarrow F(x,y) = e^{(x^2)} \cdot (y^3 + xy) = C$

$\leadsto y = - \left( \frac{2^{\frac{1}{3}} e^{x^2} x}{(27 C e^{2x^2} + \sqrt{729 C^2 e^{4x^2} + 108 e^{6x^2} x^3})^{\frac{1}{3}}} \right) + \frac{(27 C e^{2x^2} + \sqrt{729 C^2 e^{4x^2} + 108 e^{6x^2} x^3})^{\frac{1}{3}}}{3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} e^{x^2}}$

2. **Beispiel mit Variablentrennung** • **Exemple avec séparation des variables**

$g(x,y)dx + h(x,y)dy = (x-1)^2 y dx + x^2 (y+1) dy = 0$

$$\Rightarrow g(x, y) = (x-1)^2 y = M_1(x) \cdot N_1(y), \quad h(x, y) = x^2 (y+1) = M_2(x) \cdot N_2(y)$$

$$g(x, y) dx + h(x, y) dy = M_1(x) \cdot N_1(y) dx + M_2(x) \cdot N_2(y) dy$$

**Idee:** • **Idée:** Wähle: • *Choisir:*  $M = \frac{1}{N_1(y) \cdot M_2(x)}$

$$\Rightarrow M \cdot g(x, y) dx + M \cdot h(x, y) dy = \frac{M_1(x) \cdot N_1(y)}{N_1(y) \cdot M_2(x)} dx + \frac{M_2(x) \cdot N_2(y)}{N_1(y) \cdot M_2(x)} dy = \frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy$$

$\leadsto$  **D'Gl** • **Eq.diff.**  $g_1(x) dx + h_1(y) dy = F'_x dx + F'_y dy = 0$  mit • *avec*

$$F(x, y) = G(x) + H(y) + C, \quad g_1(x) = G'_x, \quad h_1(x) = H'_y, \quad ((g_1)'_y = 0 = (h_1)'_x)$$

$\leadsto$  **D'Gl** • **Eq.diff.**  $\frac{(x-1)^2}{x^2} dx = \frac{y+1}{y} dy = 0 \Rightarrow F(x, y) = \int \frac{(x-1)^2}{x^2} dx = \int (1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}) dx = x - 2 \ln(|x|) - \frac{1}{x} + C_1(y),$

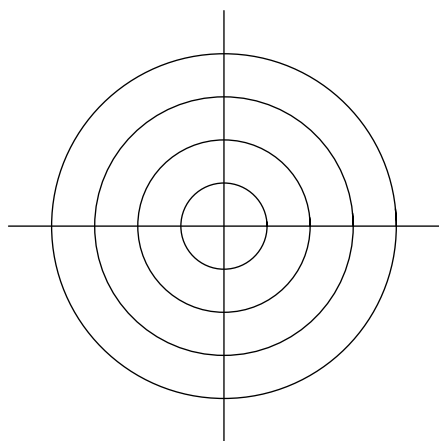
$$F(x, y) = \int \frac{y+1}{y} dy = \int (1 + \frac{1}{y}) dy = y + \ln(|y|) + C_2(x) \Rightarrow x - 2 \ln(|x|) - \frac{1}{x} + C_1(y) = G(x) + C_1(y) = H(y) + C_2(x) = y + \ln(|y|) + C_2(x)$$

$$\Rightarrow C_1(x) = x - 2 \ln(|x|) - \frac{1}{x} + C_0 \wedge C_2(y) = y + \ln(|y|) + C_0 \Rightarrow F(x, y) = x - 2 \ln(|x|) - \frac{1}{x} + y + \ln(|y|) + C_0, \quad x - 2 \ln(|x|) - \frac{1}{x} + y + \ln(|y|) = C \Rightarrow y(x) = \dots$$

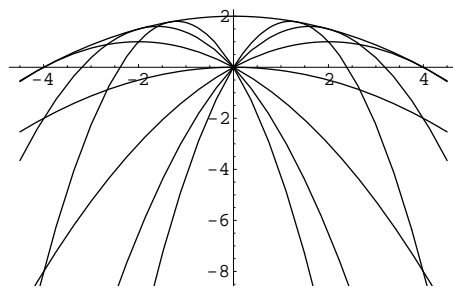
Hier lässt sich z.B.  $x(y)$  einfach berechnen.  $y(x)$  kann man daraus graphisch ermitteln. Ein anderer Weg ergibt sich mit einer Approximation der Ausdrücke durch Taylorpolynome. • *Ici il est facile de calculer  $x(y)$ . De cela on peut chercher et trouver graphiquement  $y(x)$ . Une autre méthode se fait par une approximation des expressions par des polynômes de Taylor.*

### 2.5.7 Eine Anwendung: Einhüllende einer Kurvenschar — Une application: Enveloppe d'une famille de courbes

**1. Beispiel:** • **Exemple 1:**  $\Phi(x, y, C) = x^2 + y^2 - c^2 = 0, \quad c = r \leadsto$  Konzentrische Kreise, keine Einhüllende! • *Cercles concentriques, pas d'enveloppe!*



$$\Phi(x, y, C) = x^2 + y^2 - c^2 = 0, \quad c = r$$



$$\Phi(x, y, C) = y - cx + a(1 + c^2)x^2 = 0$$

**2. Beispiel:** • **Exemple 2:** Kurvenschar rechts: • *Famille de courbes à droite:*  
 $\Phi(x, y, c) = 0$   
 $c$ : Scharparameter •  $c$ : Paramètre d'un système de courbes



Wir nehmen an, dass in diesem Fall zur Kurvenschar eine Kurve existiert, die dem entspricht, was man sich als „Einhüllende“ etwa vorstellen kann. Es gilt nun, diese Einhüllende exakt zu definieren: • *Nous supposons que, dans notre cas, pour la famille de courbes il existe une courbe, qui correspond à ce qu'on peut se représenter environ comme enveloppe. Maintenant il est essentiel de définir exactement cette enveloppe:*

**Definition:** • **Définition:**  $\gamma$  ist **Einhüllende** der Kurvenschar  $S = \{\gamma_i\}$  •  $\gamma$  est l'**enveloppe** de la famille de courbes  $\{\gamma_i\} \Leftrightarrow$

- (1)  $\gamma$  ist Kurve • *est courbe*,  $\gamma : t \mapsto \vec{r}(t)$
- (2)  $|\gamma|$  berührt in jedem Punkt  $P_i(x_i, y_i)$  genau eine Kurve  $|\gamma_i|$  der Schar  $S$ . • *Dans chaque point  $P_i(x_i, y_i)$ ,  $|\gamma|$  touche exactement une courbe  $|\gamma_i|$  de la famille  $S$ .*

**Konsequenz:** • **Conséquence:**  $\forall_{P_i(x_i, y_i) \in |\gamma|} \exists_{c_i} \gamma_i : c = c(x_i, y_i) \wedge \Phi(x_i, y_i, c(x_i, y_i)) = 0$

„Berühren“  $\leadsto$  gleiche Tangentensteigungen! • *„Toucher“  $\leadsto$  Pentés des tangentes sont égales*

Untersuchung der Tangentensteigungen: • *Examination des pentes de tangentes:*

1.  $\underline{\gamma}$ :  $\Phi(x, y, c(x, y)) = 0 \Rightarrow d\Phi = 0 \Rightarrow d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial c} dc = 0, dc = \frac{\partial c}{\partial x} dx + \frac{\partial c}{\partial y} dy$   
 $\Rightarrow d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial c} \left( \frac{\partial c}{\partial x} dx + \frac{\partial c}{\partial y} dy \right) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial y} dy = 0$   
 $\Rightarrow \frac{d\Phi}{dx} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial \Phi}{\partial c} \left( \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) = 0$
2.  $\underline{\gamma}$ :  $\Phi(x, y, c_i) = 0 \wedge c = c_i = \text{const.} \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0 \Rightarrow d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy$   
 $\Rightarrow \frac{d\Phi}{dx} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$
3.  $\underline{\gamma = \gamma_i}$ :  $c = c_i, P = P_i$ , Steigung • *Pente*  $\frac{dy}{dx}|_{\gamma} = \frac{dy}{dx}|_{\gamma_i}, (x_i, y_i, c_i)|_{\gamma} = (x_i, y_i, c_i)|_{\gamma_i}$   
 $\Rightarrow \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{|_{\gamma}} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{|_{\gamma_i}}$   
 $\Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial \Phi}{\partial c} \left( \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial c} \left( \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) = 0$

Schar:  $c$  ist veränderlicher Parameter • *Famille:  $c$  est paramètre variable*

$\leadsto \Phi(x, y, c) = 0 \Rightarrow c = c(x, y), \frac{\partial c(x, y)}{\partial x} \neq 0$  (Sonst müsste  $c(x, y) = \text{const.} \neq$  veränderlich sein.)

• *Si non  $c(x, y)$  devrait être = const.  $\neq$  variable.)*

$$\Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0 \leadsto \text{D'Gl für } \Phi! \bullet \text{Eq.diff pour } \Phi!$$

Damit erhalten wir: • *On obtient donc:*

**Satz:** • **Théorème:** Die Einhüllende  $\gamma$  ist durch die folgenden Bedingungen bestimmt:  
 • *l'enveloppe  $\gamma$  est définie par les conditions suivantes:*

- (1)  $\Phi(x, y, c) = 0$
- (2)  $\frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0$

Damit gelingt es, Einhüllende von Kurvenscharen zu berechnen. • *A l'aide de ce théorème on réussit à calculer l'enveloppe d'une famille de courbes.*

**Bsp.:** • **Exemple:** „Sicherheitslinie“ als Einhüllende einer Schar von Schussparabeln, Abschusswinkel  $\alpha$ . • *„Ligne de sécurité“ comme enveloppe d'une famille de parabôles de tir,  $\alpha$  = angle de lancement.*

$$1. \quad y - cx + a(1 + c^2)x^2 = 0, \quad y = cx - a(1 + c^2)x^2$$

$$2. \quad \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0 = -x + ax^2 \cdot 2c \Rightarrow c = \frac{1}{2ax} \Rightarrow y = -ax^2 + \frac{1}{4a} \leadsto \text{Parabel!} \quad \bullet \text{Parabôle!}$$

## 2.6 Theorie der linearen D'Gl — Théorie des éq.diff. linéaires

### 2.6.1 Einführung, Definitionen — Introduction, définitions

**Definition:** • **Définition:** Eine D'Gl  $n$ -ter Ordnung heisst **linear**, falls sie linear ist in  $y, y', \dots, y^{(n)}$ :  
• *Une éq.diff. d'ordre  $n$  s'appelle linéaire, si elle est linéaire dans  $y, y', \dots, y^{(n)}$ :*

$$\sum_{j=0}^n y^{(j)}(x) \cdot a_j(x) = b(x), \quad a_n(x) \neq 0, \quad a_j(x), b(x) \in \text{stet'cont}$$

$b(x) \equiv 0 \leadsto$  das System heisst **homogen** • *le système s'appelle homogène*

$b(x) \neq 0 \leadsto$  das System heisst **inhomogen** • *le système s'appelle non-homogène*

Die Verallgemeinerung des Existenz- und Eindeigkeitssatzes für Systeme und somit für D'Gl höherer Ordnung sagt, dass für lineare D'Gl das AWP immer eindeutig lösbar ist. • *La généralisation du théorème d'existence et d'univocité pour les systèmes d'éq.diff. et par conséquent pour une éq.diff. d'ordre supérieur dit que le PVI est toujours clairement soluble pour les éq.diff. linéaires.*

Bekanntlich können wir eine solche D'Gl höherer Ordnung wie folgt als System 1. Ordnung schreiben:  
• *Comme nous savons nous pouvons écrire une telle éq.diff. d'ordre supérieur comme système d'ordre 1<sup>er</sup> comme il suit:*

$$\left| \begin{array}{lcl} y(x) : & = & z_0(x) \\ y'(x) : & = & z_1(x) = z'_0(x) \\ \vdots & = & \vdots \\ y^{(n)}(x) & = & z_n(x) = z'_{n-1}(x) = \frac{b(x)}{a_n(x)} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j(x)}{a_n(x)} \cdot z_j(x) \end{array} \right|$$

Vektorschreibweise: • *Ecrit à l'aide de vecteurs:* Sei • *Soit :*

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \dots & \dots & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}, \quad \vec{z}(x) = \begin{pmatrix} z_0(x) \\ \vdots \\ z_{n-1}(x) \end{pmatrix}, \quad \vec{b}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{b(x)}{a_n(x)} \end{pmatrix}$$

$$\leadsto \vec{z}'(x) = A(x) \cdot \vec{z}(x) + \vec{b}(x)$$

**Beispiele:** • **Exemples:**

1.  $y \cdot y''' + y'' = e^{-x} \leadsto$  nicht linear • *non linéaire*
2.  $(y''')^2 + y^3 = 0 \leadsto$  nicht linear • *non linéaire*
3.  $5x^2 \cos(x) \cdot y' - 2y'' \cdot x \cdot e^{\cosh(x)} + 6y = 0 \leadsto$  linear, homogen • *linéaire, homogène*
4.  $4y' - \sqrt{x} y''' + \tan(x) \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot y = \sin(x) \leadsto$  linear, inhomogen • *linéaire, non-homogène*
5.  $\cos(y') + y = 0 \leadsto$  nicht linear • *non linéaire*

## 2.6.2 Homogenes System — Système homogène

**LK von Lösungen** — **CL de solutions**

Sei • *Soit*  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ,  $a_j(x) := a_j$ .

$y_i$  Lösung des homogenen Problems. •  $y_i$  *solution du problème homogène*.  $\leadsto y_i \in \mathbb{L}_{hom} \leadsto$

1.  $\sum_{j=0}^n a_j \cdot y_i^{(j)} = 0 \Rightarrow \lambda_k \cdot \sum_{j=0}^n a_j \cdot y_i^{(j)} = \sum_{j=0}^n a_j \cdot (\lambda_k y_i^{(j)}) = 0 \Rightarrow \lambda_k \cdot y_i(x) \in \mathbb{L}_{hom}$
2.  $\sum_{j=0}^n a_j \cdot y_1^{(j)} = 0 \wedge \sum_{j=0}^n a_j \cdot y_2^{(j)} = 0 \Rightarrow \sum_{j=0}^n a_j \cdot y_1^{(j)} + \sum_{j=0}^n a_j \cdot y_2^{(j)} = \sum_{j=0}^n a_j \cdot (y_1^{(j)} + y_2^{(j)}) = 0$   
 $\Rightarrow (y_1(x) + y_2(x)) \in \mathbb{L}_{hom}$

**Satz:** • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**  $y_1, \dots, y_k \in \mathbb{L}_{hom}$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$

**Beh.:** • **Thè.:**  $\sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot y_i \in \mathbb{L}_{hom}$

**Definition:** • **Définition:** Eine Funktionenmenge  $\{f_1(x), \dots, f_k(x)\}$  heisst **linear un-**  
**abhängig** • *Un ensemble  $\{f_1(x), \dots, f_k(x)\}$  s'appelle*  
**linéairement indépendant** (l.u.'l.i.)  $\Leftrightarrow$

$$\forall \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot f_i(x) \equiv 0, \lambda_i \in \mathbb{R} : \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$$

**Bsp.:** • **Exemple:**  $\{f_1(x), f_2(x)\} = \{e^{\alpha x}, e^{\beta x}\}$  l.u. für • l.i. pour  $\alpha \neq \beta$ :

Sei • *Soit*  $\lambda_1 \cdot e^{\alpha x} + \lambda_2 \cdot e^{\beta x} = 0 \wedge \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$  (Annahme • *Supposition*)

$$\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 \cdot e^{(\beta-\alpha)x} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}(\lambda_1 + \lambda_2 \cdot e^{(\beta-\alpha)x}) = \lambda_2 \cdot e^{(\beta-\alpha)x} \cdot (\beta - \alpha) = 0$$

$$\lambda_2 \neq 0 \wedge \beta \neq \alpha \wedge e^{(\beta-\alpha)x} \neq 0 \wedge \lambda_2 \cdot e^{(\beta-\alpha)x} \cdot (\beta - \alpha) = 0 \Rightarrow \text{Widerspruch!} \bullet \text{Contradiction!}$$

$\leadsto$  Annahme  $\lambda_2 \neq 0$  falsch! • *Supposition*  $\lambda_2 \neq 0$  fausse! Sei • *Soit*  $\lambda_2 = 0$

$$\leadsto \lambda_1 + \lambda_2 \cdot e^{(\beta-\alpha)x} = \lambda_1 + 0 \cdot e^{(\beta-\alpha)x} = \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$



### Die Wronskideterminante — Le déterminant de Wronski

Seien • *Soient*  $\vec{y}_0 = \vec{y}_0(x), \dots, \vec{y}_n = \vec{y}_n(x), \vec{y}_j(x) = \begin{pmatrix} y_j(x) \\ y_j'(x) \\ \vdots \\ y_j^{(n)}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$

Konstruiere Matrix: • *Construire matrice:*

$$Y = Y(x) = (\vec{y}_0, \dots, \vec{y}_n) = \begin{pmatrix} y_0(x) & \dots & \dots & y_n(x) \\ y_0^{(n)}(x) & \dots & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{pmatrix}$$

**Definition:** • **Définition:**

$W = W(x) := \det(Y(x))$  heisst **Wronskideterminante**

•  $W = W(x) := \det(Y(x))$  s'appelle **déterminant de Wronski**

**Satz:** • **Théorème:**

**Vor.:** • **Hyp.:**

$\{y_0(x), \dots, y_n(x)\} \in \mathcal{C}^{(n)}$  ( $n$  mal stetig diff'bar)  
• ( $n$  fois dérivable de façon continue)

**Beh.:** • **Thè.:**

$\{y_0(x), \dots, y_n(x)\}$  l.a.'l.d.  $\Leftrightarrow W(x) \equiv 0$

**Beweis** für das Beispiel  $n = 1$  ( $2 \times 2$ -Matrix) • **Preuve** pour l'exemple  $n = 1$  (matrice  $2 \times 2$ )

$$1. (y_0(x) \equiv 0) \vee (y_1(x) \equiv 0) \Rightarrow W(x) \equiv 0 \text{ (Spalte} = 0 \bullet \text{Colonne} = 0)$$

$$2. \text{Sei} \bullet \text{Soit } (y_0(x) \not\equiv 0) \wedge (y_1(x) \not\equiv 0)$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_0(x) & y_1(x) \\ y_0'(x) & y_1'(x) \end{vmatrix} \equiv 0 \Leftrightarrow W(x) = y_0(x) \cdot y_1'(x) - y_1(x) \cdot y_0'(x) \equiv 0$$

$$\Leftrightarrow y_0(x) \cdot y_1'(x) \equiv y_1(x) \cdot y_0'(x) \Leftrightarrow y_0(x) \cdot \frac{dy_1}{dx} \equiv y_1(x) \cdot \frac{dy_0}{dx} \Leftrightarrow y_0 \cdot \frac{dy_1}{dx} dx \equiv y_1 \cdot \frac{dy_0}{dx} dx$$

(Ausnahme: Diskrete Punkte, wo der Nenner 0 sein könnte  $\leadsto$  Fall  $y_0(x), y_1(x) \neq 0$ .)

• (Exception: Points discrets où le dénominateur pourrait être 0  $\leadsto$  le cas  $y_0(x), y_1(x) \neq 0$ .)

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy_1}{y_1 dx} dx \equiv \int \frac{dy_0}{y_0 dx} dx \Leftrightarrow \int \frac{dy_1}{y_1(x)} \equiv \int \frac{dy_0}{y_0(x)} \Leftrightarrow \ln(|y_1(x)|) \equiv \ln(|y_0(x)|) + C_0$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(|y_1(x)|)} = |y_1(x)| \equiv e^{\ln(|y_0(x)|) + C_0} = |y_0(x)| \cdot e^{C_0} = C \cdot |y_0(x)| \Rightarrow |y_1(x)| \equiv C \cdot |y_0(x)|$$

Wegen der stetigen Diff'barkeit im Definitionsbereich gilt die letzte Äquivalenz auch an den eventuellen diskreten Ausnahmepunkten. • À cause de la dérivabilité de façon continue dans le

domaine de définition, la dernière équivalence vaut aussi aux points éventuels d'exception discrets.

$|y_1(x)| \equiv C \cdot |y_0(x)|$  bedeutet bei diff'baren Funktionen: • *signifie pour des fonctions dérivables:*  
 $y_0(x), y_1(x) \neq 0 \Rightarrow y_1(x) \equiv \pm C \cdot y_0(x)$  d. h. • *ç. v. d.  $\{y_0(x), y_1(x)\}$  l.a.'l.d.*

**Bsp.:** • **Exemple:** Sei • *Soit*  $a \neq 0$ ,  $M = \{\sin(ax), \cos(ax)\}$

$$W(x) = \begin{vmatrix} \sin(ax) & \cos(ax) \\ a \cos(ax) & -a \sin(ax) \end{vmatrix} = -a(\sin^2(ax) + \cos^2(ax)) = -a \neq 0 \Rightarrow M \text{ l.u.'l.i.}$$

### Anwendung der Wronskideterminante — Application du déterminant de Wronski

1. D'Gl 1. Ordnung: • *Eq. diff. d'ordre 1<sup>er</sup>:*  $y' = a(x) \cdot y$ ,  $y(x_0) = y_0$  (**AWP** • **PVI**)

AWP eindeutig lösbar, • *PVI résoluble de façon univoque*,  $W(x) = y(x) \neq 0$  für • *pour  $y_0 \neq 0$*

2. D'Gl 2. Ordnung: • *Eq. diff. d'ordre 2<sup>ème</sup>:*

$y'' = a_0(x) \cdot y + a_1(x) \cdot y'$ ,  $y(x_0) = y_0$ ,  $y'(x_0)$  sei vorläufig frei. • *soit provisoirement libre.*

$\leadsto$  AWP unbestimmt. Durch  $(x_0, y_0 = y(x_0))$  gehen mehrere Integralkurven, je nach dem Wert von  $y'(x_0)$ . • *PVI non-déterminé. Il y a plusieurs courbes intégrales qui passent par le point  $(x_0, y_0 = y(x_0))$ , dépendant de  $y'(x_0)$ .*

Zwei solche Kurven seien: • *Soient deux courbes de ce genre:*

$y_1(x), y_2(x)$  mit • *avec  $y_1(x) \neq y_2(x)$ ,  $y_1(x_0) = y_2(x_0)$ .*

Annahme: • *Supposons:*  $W(x) \equiv 0$  ( in • *dans  $I$ ,  $x_0 \in I$  )  $\Rightarrow \{y_1(x), y_2(x)\}$  l.a.'l.d.*

$\leadsto \exists_{\lambda_1, \lambda_2 \neq 0} : \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) \equiv 0 \Rightarrow y_2(x) \equiv -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} y_1(x) = \mu \cdot y_1(x)$

$y_0 := y_1(x_0) = y_2(x_0) \Rightarrow y_0 = y_2(x_0) = \mu \cdot y_1(x_0) = \mu \cdot y_0 \Rightarrow y_0 = \mu \cdot y_0 \Rightarrow (\mu = 1) \vee (y_0 = 0)$

(1) Fall • *Cas  $y_1(x) \neq 0 \wedge \mu = 1 \Rightarrow y_1(x) \equiv y_2(x) \leadsto$  Widerspruch! • Contradiction!*

(2) Fall • *Cas  $y_1(x) \equiv 0 \wedge \mu = 1 \Rightarrow y_1(x) \equiv y_2(x) \leadsto$  Widerspruch! • Contradiction!*

(3) Fall • *Cas  $y_0 = 0, \Rightarrow y_0 = y_1(x_0) = y_2(x_0) = 0$   
 Eindeutigkeit der Lösung • *Solution univoque  $\leadsto y_1(x) \equiv y_2(x)$ .**

**Konsequenz:** • **Conséquence:**

**Vor.:** • **Hyp.:**  $y_1(x) \neq y_2(x)$ ,  $y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_0$

**Beh.:** • **Thè.:**  $W(x) \equiv 0 \Rightarrow y_0 = 0$

**Problem:** • **Problème:** Sei • *Soit*  $W(x) \neq 0$  ( in • *dans  $I$  ),  $x_0 \in I$ ,  $\{y_1, y_2\}$  l.u.'l.i.*

Kann es sein, dass  $W(x)$  trotzdem punktweise 0 werden kann in  $I$ ?

• *Est-ce que  $W(x)$  peut devenir quand même point par point 0 dans  $I$ ?*

**Untersuchung:** • **Examination:** Sei • *Soit  $W(x_1) = 0, x_1 \in I$*

$$\leadsto W(x_1) = 0 \Rightarrow y_1(x_1) \cdot y_2'(x_1) = y_2(x_1) \cdot y_1'(x_1)$$

Es gilt: • *Il vaut:*  $\begin{pmatrix} y_1(x_1) \\ y_1'(x_1) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} y_2(x_1) \\ y_2'(x_1) \end{pmatrix}$ , denn sonst müsste wegen der eindeutigen Lösung des AWP für  $x_1$  gelten:  $y_1(x) \equiv y_2(x)$ . • *car autrement on aurait  $y_1(x) \equiv y_2(x)$ , parce que la solution de PVI pour  $x_1$  est univoque.*

Fall 1: • Cas 1:

$$\text{Sei z.B.:} \bullet \text{ Soit p.ex.: } y_1(x_1), y_1'(x_1) \neq 0 \Rightarrow \frac{y_2(x_1)}{y_1(x_1)} = \frac{y_2'(x_1)}{y_1'(x_1)} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_2(x_1) \\ y_2'(x_1) \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} y_1(x_1) \\ y_1'(x_1) \end{pmatrix}$$

$\leadsto y_1(x), y_2(x)$  Lösungen zu zwei verschiedenen AWP in  $x_1$  ( $AWP_1, AWP_2$ ) mit:

•  $y_1(x), y_2(x)$  solutions pour deux VPI différents dans  $x_1$  ( $PVI_1, PVI_2$ ) avec:

$y_2(x)$  und  $\lambda \cdot y_1(x)$  sind ebenfalls auch zwei Lösungen von  $AWP_2$ .

•  $y_2(x)$  et  $\lambda \cdot y_1(x)$  sont aussi deux solutions de  $AWP_2$ .

$$\Rightarrow \lambda \cdot y_1(x) = y_2(x) \Rightarrow \{y_1(x), y_2(x)\} \text{ l.a. l.d.} \Rightarrow W(x) \equiv 0$$

Fall 2: • Cas 2:

Seien • *Soient  $y_1(x_1) = y_2(x_2) = 0$*

$$\Rightarrow W(x_1) = y_1(x_1) \cdot y_2'(x_1) - y_2(x_1) \cdot y_1'(x_1) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{y_2(x_1)}{y_1(x_1)} = \frac{y_2'(x_1)}{y_1'(x_1)} \text{ (Bernoulli!)}$$

Fall 2.1.: • Cas 2.1.:

Z.B. • *P.ex.  $y_1'(x_1) = 0 \Rightarrow y_1(x) \equiv 0$  Lösung von  $AWP_1$ , • Solution de  $AWP_1$*

$\leadsto \{y_1(x) \equiv 0, y_2(x)\} \text{ l.a. l.d.} \Rightarrow W(x) \equiv 0$

Fall 2.2.: • Cas 2.2.:

$$y_1'(x_1), y_2'(x_1) \neq 0 \Rightarrow \frac{y_2'(x_1)}{y_1'(x_1)} = \lambda$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_2(x_1) \\ y_2'(x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2'(x_1) \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} y_1(x_1) \\ y_1'(x_1) \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ y_1'(x_1) \end{pmatrix} \Rightarrow \{y_1(x), y_2(x)\} \text{ l.a. l.d.}$$

$$\Rightarrow W(x) \equiv 0 \text{ Wie in Fall 1.} \bullet \text{ comme dans le cas 1.}$$

$\leadsto \Rightarrow W(x) \equiv 0$  in allen Fällen. • *Dans tous les cas.*

Ein analoges Resultat erhält man für lineare D'Gl höherer Ordnung.

• *On obtient un résultat analogue pour les éq.diff. d'ordre supérieur.*

<b>Satz:</b>	• <b>Théorème:</b>	<u><b>Vor.:</b></u>	• <b>Hyp.:</b>	$W(x)$ = Wronski-Determinante einer linearen homogenen D'Gl der Ordnung $n$ auf $I$ . • $W(x)$ = déterminant de Wronski d'une éq.diff. linéaire et homogène d'ordre $n$ sur $I$ .
				$\exists_{x_0 \in \mathbb{R}} : W(x_0) = 0$
		<u><b>Beh.:</b></u>	• <b>Thè.:</b>	$\forall_{x \in I} : W(x) \equiv 0$

**Konsequenz:** • **Conséquence:**

<b>Korollar:</b>	• <b>Corollaire:</b>	<u><b>Vor.:</b></u>	• <b>Hyp.:</b>	Gegeben: Lineare homogene D'Gl der Ordnung $n$ auf $I$ . • Soit donnée: Une éq.diff. linéaire et homogène d'ordre $n$ sur $I$ . Für $x_0$ seien verschiedene Anfangsbedingungen gegeben. • Soient données pour $x_0$ des conditions initiales différentes.
		<u><b>Beh.:</b></u>	• <b>Thè.:</b>	Anfangsbedingungen l.u. $\Rightarrow$ zugehörige Lösungen l.u.. • Conditions initiales l.i. $\Rightarrow$ solutions liées l.i..

**Konsequenz:** • **Conséquence:**

Da es für eine eindeutige Lösung eines AWP mit einer linearen D'Gl  $n$ -ter Ordnung genau  $n$  Anfangsbedingungen braucht, die man als Vektor im  $\mathbb{R}^n$  vorgeben kann, sind alle möglichen Anfangsbedingungen eines solchen Problems mit Hilfe einer Basis des  $\mathbb{R}^n$  linear kombinierbar. Somit sind genau  $n$  verschiedene linear unabhängige Anfangsbedingungen möglich. Aus dem letzten Korollar folgt daher, dass eine lineare homogene D'Gl  $n$ -ter Ordnung immer genau  $n$  linear unabhängige Lösungen besitzt.

• Comme pour une solution univoque d'un PVI avec une éq.diff. linéaire d'ordre  $n$ , il faut avoir nécessairement exactement  $n$  conditions initiales, qu'on peut donner comme vecteur dans le  $\mathbb{R}^n$ , toutes les conditions initiales possibles d'un tel problème sont données par combinaisons linéaires à l'aide d'une base du  $\mathbb{R}^n$ . Par conséquent exactement  $n$  conditions linéairement indépendantes sont possibles. Du dernier corollaire, il résulte par conséquent qu'une éq.diff. homogène et linéaire d'ordre  $n$  possède toujours exactement  $n$  solutions linéairement indépendantes.

<b>Satz:</b>	• <b>Théorème:</b>	1. Die Lösungen einer linearen homogenen D'Gl der Ordnung $n$ bilden einen Vektorraum der Dimension $n$ . • Les solutions d'une éq.diff. homogène et linéaire d'ordre $n$ forment un espace vectoriel de la dimension $n$ . 2. Sei $\{y_1, \dots, y_n\}$ eine Basis von $n$ linear unabhängigen Lösungen. Die allgemeine Lösung hat dann die Form: • Si $\{y_1, \dots, y_n\}$ est une base de solutions linéairement indépendantes, alors la solution commune a la forme:
--------------	--------------------	---

$$y = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot y_i$$

**Bsp.:** • **Exemple:**      **D'Gl**    • **Eq.diff.:**       $y'' + y = 0$

Bekannte Lösungen: • *Solutions connues:*  $y_1(x) = \sin(x)$ ,  $y_2(x) = \cos(x)$ ,  $\{\sin(x), \cos(x)\}$  l.u.'l.i.

Denn: • *Car:*  $\lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \cos(x) = 0 \Rightarrow \lambda_1^2 \sin^2(x) = (-\lambda_2)^2 \cos^2(x)$ .    Sei z.B.: • *Soit p.ex.:*  
 $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow \forall x: \sin^2(x) = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2 \cos^2(x)$

Wer nicht sofort sieht, dass das ein Widerspruch ist, braucht nur Werte wie  $x = 0$  oder  $x = \frac{\pi}{2}$  einzusetzen.  
 • *Qui ne voit pas tout de suite que c'est une contradiction, peut mettre à la place de  $x$  des valeurs comme 0 ou  $x = \frac{\pi}{2}$ .*

$\leadsto$  Allgemeine Lösung: • *Solution générale:*  $y(x) = \lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \cos(x)$

### 2.6.3 Inhomogenes System — Système inhomogène

Wir verwenden vorläufig die folgenden Schreibweisen: • *Nous appliquons provisoirement les manières d'écrire suivantes:*

$A = A(x)$ ,  $\vec{b} = \vec{b}(x)$ ,  $A \cdot \vec{y} = \vec{0}$  (Syst.hom.),  $A \cdot \vec{y} = \vec{b}$  (Syst.inhom.)

Seien • *Soient*  $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in \mathbb{L}_{inhom}$ ,  $\vec{y} = \vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$

$A \cdot \vec{y}_1 = \vec{b}$ ,  $A \cdot \vec{y}_2 = \vec{b} \Rightarrow A \cdot (\vec{y}_1 - \vec{y}_2) = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \vec{y} = \vec{y}_1 - \vec{y}_2 \in \mathbb{L}_{hom}$

Umgekehrt: • *D'autre part:*

Seien • *Soient*  $\vec{y}_1 \in \mathbb{L}_{inhom}$ ,  $\vec{y} \in \mathbb{L}_{hom} \Rightarrow \vec{y}_2 = \vec{y}_1 + \vec{y}$  erfüllt: • *satisfait:*

$A \cdot \vec{y}_2 = A \cdot (\vec{y}_1 + \vec{y}) = A \cdot \vec{y}_1 + A \cdot \vec{y} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b} \Rightarrow \vec{y}_2 \in \mathbb{L}_{inhom}$

Sei • *Soit*  $\vec{y}_p \in \mathbb{L}_{inhom}$  eine partikuläre Lösung. • *une solution particulière.*

Damit folgt: • *Par conséquent:*

**Satz:** • **Théorème:**      **Vor.:** • **Hyp.:**

**D'Gl** • **Eq.diff.**  $A \cdot \vec{y} = \vec{b}$ ,  $\vec{y}_p \in \mathbb{L}_{inhom}$   
 $\{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n\} =$  Basis des homogenen Lösungsraumes •  $=$  base de l'espace de solutions homogènes  $A \cdot \vec{y} = \vec{0}$

**Beh.:** • **Thè.:**

Die allgemeine Lösung  $\vec{y}_{inhom}$  hat die Form:

• *La solution générale  $\vec{y}_{inhom}$  a la forme:*

$$\vec{y}_{inhom} = \vec{y}_p + \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{y}_i, \quad hom, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$



**Bsp.:** • **Exemple:**  $y' - y = 1$

1. Homogenes Problem: • *Problème homogène:*

$$y' - y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = y, \quad \int \frac{dy}{y} = \int dx \Rightarrow \ln(|y|) = x + C_0 \Rightarrow |y| = e^{x+C_0} = e^x \cdot e_0^C = e^x \cdot C_1 \\ \Rightarrow y(x) = e^x \cdot C$$

(Der Betrag kann hier weggelassen werden, da links und rechts des Gleichheitszeichens differenzierbare Funktionen stehen, die Tangentensteigung also keinen Knick haben kann.) • *(Ici, la valeur absolue peut être omise, parce qu'à gauche et à droite du signe d'égalité il y a des fonctions dérivables, ainsi la montée de tangente ne peut avoir aucun pli.)*

2. Inhomogenes Problem: • *Problème non-homogène:*

$$-y_p = 1 \Rightarrow y_p = -1, \quad y_p' - (-1) = 0 + 1 = 1 \rightsquigarrow \text{☺}$$

Diese Lösung kann man mit wenig Phantasie erraten.

• *On peut deviner cette solution avec peu d'imagination.*

3.  $y_{inhom} = y_{hom} + y_p = C \cdot e^x - 1$

Um  $C$  festzulegen, ist eine Anfangsbedingung notwendig.

• *Pour fixer  $C$ , on a besoin d'une condition initiale.*

**Bemerkung:** • **Remarque:** Diesen Typ von linearer D'Gl haben wir schon früher untersucht:

• *Nous avons examiné déjà plus haut ce type d'éq.diff. linéaire:*

$$y' = P(x) \cdot y + Q(x)$$

Das **homogene Problem** lösen wir durch **Separation der Variablen**:

• *Nous résolvons le problème homogène par séparation des variables:*

$$y' = P(x) \cdot y \Rightarrow y_{hom} = e^{\int P(x) dx + C_1} = C \cdot e^{\int P(x) dx}$$

Eine **partikuläre Lösung** kann mit Hilfe der **Methode der Variation der Konstanten** (Lagrange) gefunden werden: • *Nous pouvons trouver une solution particulière par la méthode de la variation de la constante (Lagrange):*

$$\text{Ansatz: } \bullet \text{ Départ: } y_p := C(x) \cdot e^{\int P(x) dx}$$

Dieser Ansatz ist erlaubt, da es sich nur um eine implizite Definition von  $C(x)$  handelt.

• *Ce départ est permis parce qu'il s'agit seulement d'une définition implicite de  $C$ .*

$$\Rightarrow y_p' = C'(x) \cdot e^{\int P(x) dx} + C(x) \cdot e^{\int P(x) dx} \cdot P(x) := P(x) \cdot \underbrace{C(x) \cdot e^{\int P(x) dx}}_{=y} + Q(x),$$

$$C'(x) = Q(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} \Rightarrow C(x) = \int Q(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} dx + C_0$$

$$\Rightarrow y_{inhom} = y_{hom} + y_p = C_{hom} \cdot e^{\int P(x) dx} + \left( \int Q(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} dx + C_0 \right) \cdot e^{\int P(x) dx}$$

$$\Rightarrow y_{inhom} = e^{\int P(x) dx} \cdot \left( \int Q(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} dx + C \right)$$

Formel:	• Formule:	<u>Vor.:</u>	• Hyp.:	D'Gl	• Eq.diff.	$y' = P(x) \cdot y + Q(x)$
		<u>Beh.:</u>	• Thè.:			$y_{inhom} = e^{\int P(x) dx} \cdot (\int Q(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} dx + C)$

**1. Beispiel: • Exemple 1:**

**D'Gl • Eq.diff.**  $y' = -2x \cdot y + 4x \Rightarrow -2x = P(x), 4x = Q(x)$

$$y_{inhom} = e^{\int -2x dx} (C_0 + \int 4x \cdot e^{-\int -2x dx} dx) = e^{-x^2} (C_0 + \int 4x e^{+x^2} dx) = e^{-x^2} (C_0 + 2e^{+x^2})$$

$$\Rightarrow y_{inhom} = C \cdot e^{-x^2} + 2$$

**2. Beispiel: • Exemple 2:**

**D'Gl • Eq.diff.**  $y' = \frac{2y}{x} - 3 \rightsquigarrow \frac{2}{x} = P(x), Q(x) = -3$

$$y_{inhom} = e^{\int \frac{2}{x} dx} (C_0 + \int -3 \cdot e^{-\int \frac{2}{x} dx} dx) = e^{2 \ln(|x|)} \cdot (-3 \int e^{-2 \ln(|x|)} dx + C_0) =$$

$$= |x|^2 (-3 \int |x|^{-2} dx + C_0) = x^2 (-3 \int \frac{1}{x^2} dx + C_0) = x^2 (-3 \frac{-1}{x} + C_0) = x^2 (\frac{3}{x} + C_0) = 3x + \frac{C_0}{x^2}$$

**3. Beispiel: • Exemple 3:**

**D'Gl • Eq.diff.**  $y' + y = y^2 (\cos(x) - \sin(x)) \rightsquigarrow$  Nicht linear! • *Non linéaire!*

$$\rightsquigarrow \frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} = \cos(x) - \sin(x). \quad \text{Subst.: • Subst.: } z := -\frac{1}{y} \Rightarrow z' = -\frac{1}{y^2} \cdot y' \cdot (-1)$$

$$\rightsquigarrow z' - z = \cos(x) - \sin(x) \rightsquigarrow \text{Linear! • Linéaire!} \rightsquigarrow z(x) = \frac{1}{y(x)} = e^x C_0 + \sin(x)$$

$$\rightsquigarrow y(x) = \frac{1}{e^x C_0 + \sin(x)}$$

## 2.7 Lineare D'Gl mit konstanten Koeffizienten — Eq.diff. linéaires avec coefficients constants

### 2.7.1 Homogenes Problem — Problème homogène

Wir studieren das folgende AWP: • *Nous étudions le PVI suivant:*

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y &= f(x) \\ y(x_0) &= y_0 \\ \vdots &= \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)} \end{aligned} \quad \text{mit • avec } a_i \in \mathbb{R}, a_0, a_n \neq 0$$

Es gilt: • *Il vaut:*  $y_{inhom} = y_{hom} + y_p$

Das zugehörige **homogene Problem** ist: • *Le problème homogène et affilié est:*

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

**Kurzschreibweise:** • **Manière d'écrire abrégée:**  $\vec{L} := \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ ,  $\vec{y} := \begin{pmatrix} y \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \langle \vec{L}, \vec{y} \rangle = 0$

Bekannt: Es gibt genau  $n$  linear unabhängige Lösungen.

• *On sait: Il existe exactement  $n$  solutions linéairement indépendantes.*

**Idee:** • **Idée:** Verwende  $y = e^{\lambda x}$ , setze das in die D'Gl ein, dann erscheint in jeder Ableitung der Faktor  $y = e^{\lambda x}$ ! • *Utiliser  $y = e^{\lambda x}$ , mettre cette expression dans l'éq.diff., puis dans chaque dérivée il apparaît le facteur  $y = e^{\lambda x}$ !*

$\rightsquigarrow$  **D'Gl** • **Eq.diff.:**  $a_n(\lambda^n) e^{\lambda x} + a_{n-1}(\lambda^{n-1}) e^{\lambda x} + \dots + a_1(\lambda^1) e^{\lambda x} + a_0(\lambda^0) e^{\lambda x} = 0$   
 $\Rightarrow e^{\lambda x} \cdot (a_n(\lambda^n) + a_{n-1}(\lambda^{n-1}) + \dots + a_1 \lambda + a_0 \cdot 1) = 0$ ,  $e^{\lambda x} \neq 0$   
 $\Rightarrow a_n(\lambda^n) + a_{n-1}(\lambda^{n-1}) + \dots + a_1 \lambda + a_0 := P(\lambda) = 0$

**Definition:** • **Définition:**  $P(\lambda) := a_n(\lambda^n) + a_{n-1}(\lambda^{n-1}) + \dots + a_1 \lambda + a_0$  heisst **charakteristisches Polynom** der D'Gl • *s'appelle polynôme caractéristique de l'éq.diff.*

**Konsequenz:** • **Conséquence:**  $P(\lambda) = 0$  hat nach Konstruktion maximal  $n$  verschiedene Lösungen  $y_i = e^{\lambda_i x}$ . • *D'après la construction  $P(\lambda) = 0$  a au maximum  $n$  solutions différentes  $y_i = e^{\lambda_i x}$ .*

Weiter oben haben wir gesehen, dass  $\{y_i = e^{\lambda_i x}, y_j = e^{\lambda_j x}\}$  linear unabhängig ist für  $i \neq j$ .

• *Plus haut nous avons vu que  $\{y_i = e^{\lambda_i x}, y_j = e^{\lambda_j x}\}$  est linéairement indépendant pour  $i \neq j$ .*

$\rightsquigarrow$  Findet man  $n$  verschiedene Lösungen  $y_i = e^{\lambda_i x}$ , so hat man eine Basis gefunden.

• *Si on trouve  $n$  solutions  $y_i = e^{\lambda_i x}$  différentes, on a trouvé une base.*

$\rightsquigarrow$  **Problem:** • **Problème:** Was passiert • *Qu'est-ce qui se passe*

1. für • *pour  $\lambda_i \in \mathbb{C}$ ,  $\notin \mathbb{R}$*

2.  $\exists_{i,j} : y_i = y_j$  (zusammenfallende Lösungen • *solutions qui sont les mêmes*)

Fall 1: • Cas 1: Sei • *Soit  $\lambda_i \in \mathbb{C}$ ,  $\notin \mathbb{R}$*

$P(x)$  reell • *réel*  $\Rightarrow (\lambda_i \in \mathbb{L}(\lambda) \Rightarrow \bar{\lambda}_i \in \mathbb{L}(\lambda))$

Sei • *Soit  $i = 1 \Rightarrow y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{\bar{\lambda}_1 x} \in \mathbb{L}$  (D'Gl • Eq.diff.)*

$\Rightarrow y_1 + y_2 = e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_2 x} = e^{\lambda_1 x} + e^{\bar{\lambda}_1 x} = e^{\operatorname{Re} \lambda_1 x} \cdot (e^{i \operatorname{Im} \lambda_1 x} + e^{-i \operatorname{Im} \lambda_1 x})$   
 $= 2 \cdot e^{\operatorname{Re} \lambda_1 x} \cdot \cos(\operatorname{Im} \lambda_1 x) \in \mathbb{R}$  ist auch Lösung (Summe!) • *est aussi solution (somme!)*

Ebenso: • *De même:  $i \cdot (y_1 - y_2) = 2 e^{\operatorname{Re} \lambda_1 x} \cdot \sin(\operatorname{Im} \lambda_1 \cdot x) \in \mathbb{R}$*

**Satz:** • **Théorème:** (1)

Vor.: • Hyp.:

$P(\lambda)$  hat lauter verschiedene Nullstellen  $\lambda_i$   
 •  $P(\lambda)$  a seulement des zéros différents  $\lambda_i$

Beh.: • Thè.:

$\{y_1 = e^{\lambda_1 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}\}$  ist Basis von  $\mathbb{L}$   
 • *est base de  $\mathbb{L}$*

**Satz:** • **Théorème:** (2)**Vor.:** • **Hyp.:**

$P(\lambda)$  hat Nullstellen  $\lambda_i \notin \mathbb{R}$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{C}$   
 •  $P(\lambda)$  a des zéros  $\lambda_i \notin \mathbb{R}$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{C}$

**Beh.:** • **Thè.:**

$e^{\lambda_1 x} + e^{\bar{\lambda}_1 x}$ ,  $i \cdot (e^{\lambda_1 x} - e^{\bar{\lambda}_1 x})$  l.u. Lösungen  $\in \mathbb{R}$   
 • sont des solutions  $\in \mathbb{R}$  l.i.

**Symbol:** • **Symbole:** $k(\lambda_i) :=$  Vielfachheit der Nullstelle  $\lambda_i$  von  $P(\lambda)$ . •  $k(\lambda_i) :=$  multiplicité du zéro  $\lambda_i$  de  $P(\lambda)$ .

**Problem:** • **Problème:** Sei  $\lambda_i$  Nullstelle von  $P(\lambda)$  mit der Vielfachheit  $k(\lambda_i) > 1$ . Sei z.B.  $i = 1$ .  
 Dann gilt: • Soit  $\lambda_i$  zéro de  $P(\lambda)$  avec la multiplicité  $k(\lambda_i) > 1$ . Soit p.ex.  $i = 1$ . Alors on obtient:

**Satz:** • **Théorème:****Vor.:** • **Hyp.:** $\lambda_i$  NS von • zéro de  $P(\lambda)$ ,  $k(\lambda_i) > 1$ **Beh.:** • **Thè.:**

$\{e^{\lambda_i x}, x \cdot e^{\lambda_i x}, \dots, x^{k-1} \cdot e^{\lambda_i x}\}$   
 = System von l.u. Lösungen  
 • = système de solutions l.i.

Der Beweis dieser Aussage ist mathematisch sehr trickreich. Man kann dabei aber einiges lernen.

• La preuve de ce théorème est, du point de vue des mathématiques, très maligne. Mais on peut en apprendre un tas de choses.

**Zum Beweis:** • **Quant à la preuve:**1. Lineare Unabhängigkeit von • Indépendance linéaire de  $\{e^{\lambda_i x}, x \cdot e^{\lambda_i x}, \dots, x^{k-1} \cdot e^{\lambda_i x}\}$ :

Sei • Soit  $p_{k-1}(x) := c_0 \cdot e^{\lambda_i x} + c_1 \cdot x \cdot e^{\lambda_i x} + \dots + c_{k-1} \cdot x^{k-1} \cdot e^{\lambda_i x} := q_{k-1}(x) \cdot e^{\lambda_i x} \equiv 0$   
 $\Rightarrow q_{k-1}(x) := c_0 + c_1 x + \dots + c_{k-1} x^{k-1} \equiv 0$

Dieses Polynom vom Grade  $k-1$  hat für  $c_{k-1} \neq 0$  maximal  $k-1$  Nullstellen. • Pour  $c_{k-1} \neq 0$  ce polynôme du degré  $k-1$  a au maximum  $k-1$  zéros. $\Rightarrow p_{k-1}(x) \not\equiv 0 \leadsto$  Widerspruch! • Contradiction! $\leadsto c_{k-1} = 0$ 

Genauso argumentiert man mit: • Également on argumente avec:

$p_{k-2}(x) := c_0 \cdot e^{\lambda_i x} + c_1 \cdot x \cdot e^{\lambda_i x} + \dots + c_{k-2} \cdot x^{k-2} \cdot e^{\lambda_i x} \leadsto c_{k-2} = 0$   
 u.s.w • etc.  $\leadsto c_{k-1} = c_{k-2} = \dots = c_0 = 0 \Rightarrow$  l.u. l.i.

2. Zeige: • Montrer:  $x^m \cdot e^{\lambda_i x} \in \mathbb{L}$  für • pour  $m = 0, 1, 2, \dots, k-1$

**Trick:** • **Truc:**

Behandle  $\tilde{y}(\lambda) := x^m \cdot e^{\lambda x}$  als Funktion von  $\lambda$ . • *Traiter  $\tilde{y}(\lambda) := x^m \cdot e^{\lambda x}$  comme fonction de  $\lambda$ .*

$$\leadsto \tilde{y}(\lambda) := x^m \cdot e^{\lambda x} = \frac{d}{d\lambda}(x^{m-1} \cdot e^{\lambda x}) = \dots = \frac{d^m}{d\lambda^m}(e^{\lambda x}) = (e^{\lambda x})_{\lambda}^{(m)} \Rightarrow \tilde{y}(\lambda_i) = (e^{\lambda x})_{\lambda}^{(m)}|_{\lambda=\lambda_i}$$

Die D'Gl war: • *L'éq.diff. était:  $L(y) := a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$*

Wir setzen die Lösung  $\tilde{y}(\lambda)$  darin ein: • *Nous y introduisons la solution  $\tilde{y}(\lambda)$ :*

$$\begin{aligned} \leadsto L(\tilde{y}(\lambda)) &= L(x^m \cdot e^{\lambda x}) = \\ &= a_n (x^m \cdot e^{\lambda x})_x^{(n)} + a_{n-1} (x^m \cdot e^{\lambda x})_x^{(n-1)} + \dots + a_1 (x^m \cdot e^{\lambda x})'_x + a_0 x^m \cdot e^{\lambda x} = \\ &= L\left(\frac{d^m}{d\lambda^m}(e^{\lambda x})\right) \stackrel{(*)}{=} \frac{d^m}{d\lambda^m} L(e^{\lambda x}) = \frac{d^m}{d\lambda^m}(e^{\lambda x} \cdot P(\lambda)) \end{aligned}$$

(\*): Vertauschung der Ableitungen nach  $x$  und  $\lambda$ . • *Echanger l'opération de dériver d'après  $x$  et  $\lambda$ .*

$$\Rightarrow L(\tilde{y}(\lambda))|_{\lambda=\lambda_i} = L(x^m \cdot e^{\lambda x})|_{\lambda=\lambda_i} = \frac{d^m}{d\lambda^m}(e^{\lambda x} \cdot P(\lambda))|_{\lambda=\lambda_i}$$

$\lambda_i$   $k$ -fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms  $P(\lambda)$  •  *$\lambda_i$  zéro de la multiplicité  $k$  du polynôme caractéristique  $P(\lambda)$*

$\leadsto P(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^k \cdot R(\lambda)$  Hauptsatz der Algebra • *Théorème principal de l'algèbre*

$$\begin{aligned} \Rightarrow L(\tilde{y}(\lambda))|_{\lambda=\lambda_i} &= L(x^m \cdot e^{\lambda x})|_{\lambda=\lambda_i} = \frac{d^m}{d\lambda^m}(e^{\lambda x} \cdot (\lambda - \lambda_i)^k \cdot R(\lambda))|_{\lambda=\lambda_i} \\ &= \frac{d^m}{d\lambda^m}((\lambda - \lambda_i)^k \cdot R_1(\lambda))|_{\lambda=\lambda_i}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, k-1 \end{aligned}$$

$m \leq k-1$ , Produktregel: • *Règle du produit:*

In jedem Summanden der Ableitung  $\frac{d^m}{d\lambda^m}((\lambda - \lambda_i)^k \cdot R_1(\lambda))$  erscheint ein Faktor  $((\lambda - \lambda_i)^j)$ ,  $j \geq k-m \geq 1$  • *Dans chaque terme de la somme qui est résultat de l'opération de la dérivée  $\frac{d^m}{d\lambda^m}((\lambda - \lambda_i)^k \cdot R_1(\lambda))$  il apparaît un facteur  $((\lambda - \lambda_i)^j)$ ,  $j \geq k-m \geq 1$ .*

$$\leadsto \frac{d^m}{d\lambda^m}((\lambda - \lambda_i)^k \cdot R_1(\lambda)) = (\lambda - \lambda_i) \cdot e^{\lambda x} \cdot Q(\lambda), \quad Q(\lambda) = \text{Polynom in } \lambda \quad \bullet \text{ polynôme avec variable } \lambda$$

$$\Rightarrow L(\tilde{y}(\lambda))|_{\lambda=\lambda_i} = \frac{d^m}{d\lambda^m}((\lambda - \lambda_i)^k \cdot R_1(\lambda))|_{\lambda=\lambda_i} = 0 \Rightarrow \tilde{y}(\lambda)|_{\lambda=\lambda_i} = x^m \cdot e^{\lambda_i x} \mathbb{L} \quad \leadsto \odot$$

**Satz:** • **Théorème:** (3)

**Vor.:** • **Hyp.:**

$P(\lambda)$  hat eine  $k_i$ -fache Nullstelle  $\lambda_i$   
•  $P(\lambda)$  a un zéro  $\lambda_i$  de la multiplicité  $k_i$

**Beh.:** • **Thè.:**

$\{e^{\lambda_i x}, x \cdot e^{\lambda_i x}, \dots, x^{k-1} \cdot e^{\lambda_i x}\}$   
= System von l.u. Lösungen der D'Gl  
• = système de solutions l.i. de l'éq.diff.

**1. Beispiel: • Exemple 1: D'Gl • Eq.diff.:**

$$y''' - y'' + y' - y = 0, \quad P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda^2 + 1) \cdot (\lambda - 1), \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = \pm i$$

$\leadsto$  Lösungen: • *Solutions:*  $e^x, e^{ix}, e^{-ix}$

oder • *ou*  $e^x, e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos(x), -i(e^{ix} - e^{-ix}) = 2 \sin(x)$

**2. Beispiel: • Exemple 2: D'Gl • Eq.diff.:**

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0, \quad P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3$$

$\leadsto$  3 zusammenfallende Lösungen: • *3 solutions coïncidentes:*

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \quad k = 3 \quad \{e^x, x \cdot e^x, x^2 \cdot e^x\}$  linear unabhängiges System von Lösungen. • *système de solutions linéairement indépendant.*

**2.7.2 Inhomogenes Problem — Problème non-homogène (inhomogène)**

**Problemlage — Problème qui se pose**

**D'Gl • Eq.diff.**  $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b(x), \quad a_n, a_0 \neq 0$

Bekannt: • *Nous savons que:*  $\mathbb{L}_{inhom} = \{y_{hom} + y_p \mid y_{hom} \in \mathbb{L}_{hom}\}, \quad \mathbb{L}_{hom} \text{ bekannt.} \quad \bullet \text{ connu.}$

$\leadsto$  **Problem: • Problème:** Finde  $y_p!$  • *Trouver  $y_p!$*

**Methoden — Méthodes**

**A: Einfache Fälle: • Cas simples:**

1.  $b(x) = c = \text{const.}$  Wähle: • *Choisir:*  $y_p := \frac{c}{a_0}$

2.  $b(x) = p(x) \cdot e^{\alpha \cdot x}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad p(x) = \text{Polynom} \quad \bullet \text{ polynôme}$

Ansatz: • *Départ:*  $y_p = q(x) \cdot e^{\alpha \cdot x}, \quad q(x) = \text{Polynom mit unbekannten Koeffizienten} \quad \bullet \text{ polynôme aux coefficients inconnus}$

$\leadsto$  Einsetzen, Koeffizientenvergleich! • *Mettre dans l'éq.diff., comparer les coefficients.*

3.  $b(x) = a \cdot \sin(\alpha \cdot x) + b \cdot \cos(\beta \cdot x)$

Ansatz: • *Départ:*  $y_p = x^k \cdot (A \cdot \sin(\alpha \cdot x) + B \cdot \cos(\beta \cdot x))$

$\leadsto$  Einsetzen,  $A, B, k$  bestimmen! • *Mettre dans l'éq.diff., calculer  $A, B, k$*

4.  $b(x) = p(x) \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x) + q(x) \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x)$

Ansatz: • *Départ:*  $y_p = x^k \cdot (p_1(x) \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x) + q_1(x) \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x))$

$\leadsto$  Einsetzen,  $p_1, q_1, k$  bestimmen! • *Mettre dans l'éq.diff., calculer  $p_1, q_1, k$*

**1. Beispiel: • Exemple 1: D'Gl • Eq.diff.**  $y'' - y' - 2y = 2x$ 

$$y_{hom} : y'' - y' - 2y = 0 \Rightarrow P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2, \text{ NS'Z: } \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2 \Rightarrow y_{hom} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$$

$$y_p : y_p \stackrel{?}{=} ax + b \Rightarrow y_p'' - y_p' - 2y_p = 0 - a - 2(ax + b) = 2x \Rightarrow -a - 2b = 0 \wedge -2a \neq 2 \neq \Rightarrow a = -1, b = \frac{1}{2} \Rightarrow y_{inhom} = y_{hom} + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - x + \frac{1}{2}$$

**2. Beispiel: • Exemple 2: D'Gl • Eq.diff.**  $y^{(6)} + y^{(4)} - y^{(2)} - y = e^x \cdot \sin(x)$ 

$$y_{hom} : P(\lambda) = \lambda^6 + \lambda^4 - \lambda^2 - 1 = 0 \text{ Setze: • Substituer: } \lambda^2 = \mu$$

$$\leadsto \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_{3,4} = i, \lambda_{5,6} = -i \Rightarrow \text{Basis: • base: } e^x, e^{-x}, e^{ix}, x \cdot e^{ix}, e^{-ix}, x \cdot e^{-ix} \text{ oder • ou } e^x, e^{-x}, \cos(x), x \cdot \cos(x), \sin(x), x \cdot \sin(x)$$

$$\leadsto y_{hom} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos(x) + C_4 x \cdot \cos(x) + C_5 \sin(x) + C_6 x \cdot \sin(x)$$

$$y_p : y_p(x) \stackrel{?}{=} e^x(k_1 \sin(x) + k_2 \cos(x)) \text{ Einsetzen: • Mettre dans l'éq.diff.: } \Rightarrow y_p(x) = e^x\left(\frac{1}{5} \sin(x) - \frac{2}{5} \cos(x)\right)$$

$$\leadsto y_{inhom} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos(x) + C_4 x \cdot \cos(x) + C_5 \sin(x) + C_6 x \cdot \sin(x) + e^x\left(\frac{1}{5} \sin(x) - \frac{2}{5} \cos(x)\right)$$

**B: Allgemeinere Methoden: • Méthodes plus générales:**

1. Ansatzmethoden wie z.B. die Variation der Konstanten. • *Méthodes de mise en position (ou de mise en équation) comme p.ex. la variation de la constante.*
2. Potenzreihenansatz und Koeffizientenvergleich (vgl. unten). • *Partir d'une série de puissances, comparer les coefficients (voir en bas).*
3. Numerische Methoden (vgl. unten). • *Méthodes numériques (voir en bas).*
4. Laplace-Transformationen (vgl. nächstes Kapitel). • *Transformations de Laplace (voir chapitre prochain).*

**2.7.3 Potenzreihenansatz — Partir d'une série de puissance**

$$\text{D'Gl • Eq.diff. } y' - y = x^2, y(x_0) = y(0) = y_0 \leadsto \text{AWP • PVI}$$

$$\text{Idee: • Idée: Sei • Soit } y(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

$$\text{Einsetzen in die D'Gl, Koeffizientenvergleich • Mettre cette expression dans l'éq.diff., comparer les coefficients } \leadsto a_n \leadsto \text{speziell: • spécialement: } x_0 = 0, y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\Rightarrow y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+1} (m+1) x^m = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) x^n,$$

$$x^2 = y' - y = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} (n+1) - a_n) x^n,$$

$$\Rightarrow y(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 0^n = a_0 = y_0 \wedge a_{n+1} (n+1) - a_n = 0 \text{ für • pour } n \neq 2,$$

$$a_{n+1} (n+1) - a_n = 1 \text{ für • pour } n = 2$$

Koeffizientenvergleich: • *Comparer les coefficients:*

$$\begin{array}{lcl}
 n=0: & a_0 = y_0 = a_1 \cdot (0+1) & \Rightarrow a_1 = y_0 \\
 n=1: & a_1 = a_2 \cdot (1+1) & \Rightarrow a_2 = \frac{y_0}{2} \\
 n=2: & 1 + a_2 = a_3 \cdot (2+1) & \Rightarrow a_3 = \frac{1}{3} + \frac{y_0}{2 \cdot 3} \\
 n=3: & a_3 = a_4 \cdot (3+1) & \Rightarrow a_4 = \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{y_0}{2 \cdot 3 \cdot 4} \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 n=k: & a_k = a_{k+1} \cdot (k+1+1) & \Rightarrow a_{k+1} = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (k+1)} + \frac{y_0}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (k+1)}
 \end{array}$$

$$\Rightarrow a_{k+1} = \frac{2}{(k+1)!} + \frac{y_0}{(k+1)!} \Rightarrow a_k = \frac{2+y_0}{k!}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Rightarrow y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = y_0 + y_0 \cdot x + \frac{y_0}{2} x^2 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{2+y_0}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_0}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{k!} - 2 \cdot \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) =$$

$$= y_0 \cdot e^x + 2 \cdot e^x - 2 - 2x - 2x^2 = (y_0 + 2) \cdot e^x - 2 - 2x - 2x^2$$

$$\Rightarrow y(x) = (y_0 + 2) \cdot e^x - 2 - 2x - 2x^2$$

## 2.8 Numerische Verfahren — Méthodes numériques

Wir betrachten hier D'Gl erster Ordnung oder anstelle von D'Gl  $n$ -ter Ordnung Systeme erster Ordnung. Es sollen hier zwei numerische Verfahren zur approximativen Auffindung einer partikulären Lösungskurve besprochen werden: Das Euler-Verfahren und das klassische Runge-Kutta-Verfahren. • *Ici nous étudions des éq.diff. de premier ordre ou au lieu d'éq.diff. d'ordre  $n$  des systèmes de premier ordre. Nous discutons deux méthodes numériques pour trouver approximativement une courbe de solution particulière: La méthode d'Euler et la méthode classique de Runge-Kutta.*

### 2.8.1 Das Verfahren von Euler — La méthode d'Euler

Gegeben sei das AWP: • *Soit donné le PVI:  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$*

**Ges.:** • **Trouver:** Eine Näherungslösung in • *Une solution approximative dans  $I = [x_0, b]$*

**Methode:** • **Méthode:** Teile  $I$  in  $n$  gleich lange Teile • *Partager  $I$  en  $n$  parties de longueur égale*  
 $\leadsto x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  (Teilpunkte) • *(points de division).*

**Schrittweite:** • **Longueur d'une partie:**  $\Delta x = \Delta x_n = \frac{b - x_0}{n}$ ,  $x_{k+1} = x_k + \Delta x$

**Idee:** • **Idée:** Ersetze den Differentialquotient  $y' = \frac{dy}{dx}$  durch den Differenzenquotienten  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

• *Remplacer la dérivée  $y' = \frac{dy}{dx}$  par le quotient des différences  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ .*

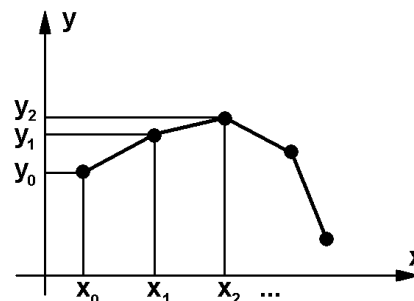
$\leadsto y' = f(x, y) \mapsto \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f(x, y)|_{x=x_k}$

$\Rightarrow \Delta y \approx f(x_k, y_k) \cdot \Delta x_n \Rightarrow y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) \cdot \Delta x_n + R(\Delta x_n^2)$ ,  $R(\Delta x_n^2) \xrightarrow{(\Delta x_n \rightarrow 0)} 0$



Die Restfunktion  $R(\Delta x_n^2)$  geht mit  $\Delta x_n$  quadratisch gegen 0. Betreffend den Beweis sei auf die Literatur verwiesen. • *La fonction de reste  $R(\Delta x_n^2)$  va avec  $\Delta x_n$  carré vers 0. A propos de la preuve, nous renvoyons à la littérature.*

Die so berechneten Punkte  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  bilden die Ecken eines Polygonzuges. • *Les points  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  calculés ainsi forment les sommets d'une ligne polygonale.*



**Definition:** • **Définition:** Diesen Polygonzug nennen wir **Eulerschen Polygonzug**.  
• *Nous appelons cette ligne polygonale (brisée) ligne polygonale d'Euler.*

**Bsp.:** • **Exemple:** D'Gl • **Eq.diff.**  $y' - y = x$ ,  $y(0) = 1$

Bekannte exakte Lösung: • *Solution exacte connue:*

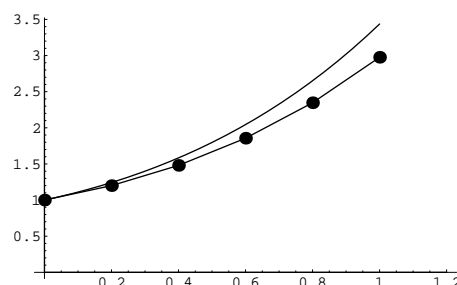
$$y_{hom} = C \cdot e^x, \quad y_p = -x - 1 \Rightarrow y_{inhom} = C \cdot e^x - x - 1, \quad y(0) = 1 \Rightarrow C = 2 \Rightarrow y_{inhom} = 2 \cdot e^x - x - 1$$

**Numerische Näherung nach Euler:** • **Approximation numérique d'après Euler:**

$$y' = y + x = f(x, y), \quad \Delta x = \text{const.}, \quad y_{k+1} \approx y_k + \Delta y_k = y_k + f(x_k, y_k) \Delta x_k = y_k + (y_k + x_k) \Delta x_k$$

Sei • *Soit*  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 0.2$ ,  $x_2 = 0.4$ ,  $x_3 = 0.6$ ,  $x_4 = 0.8$ ,  $x_5 = 1.0$

$x_k$	$x_k$
0.0	1.000
0.2	1.200
0.4	1.480
0.6	1.856
0.8	2.347
1.0	2.976



Genauer Wert: • *Valeur exacte:*  $y_5 \approx 3.42!!$

↪ Grosser Fehler. • *Erreur grande*

Für die Praxis besser geeignet ist daher eine verbesserte Version des Euler-Verfahrens, das **Runge-Kutta-Verfahren**. • *Par conséquent une version corrigée de la méthode d'Euler est mieux convenable pour la pratique: La méthode de Runge-Kutta.*

## 2.8.2 Die Methode von Runge–Kutta — La méthode de Runge–Kutta

Gleichung 1. Ordnung — Equation d'ordre 1<sup>er</sup>

Sei das folgende AWP gegeben: • *Soit donné le PVI suivant:  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$*

Berechne für: • *Calculer pour:  $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ :*

$$\begin{aligned} k_{1,j} &= f(x_j, y_j) \\ k_{2,j} &= f\left(x_j + \frac{\Delta x}{2}, y_j + \frac{1}{2} \Delta x \cdot k_{1,j}\right) \\ k_{3,j} &= f\left(x_j + \frac{\Delta x}{2}, y_j + \frac{1}{2} \Delta x \cdot k_{2,j}\right) \\ k_{4,j} &= f\left(x_j + \Delta x, y_j + \Delta x \cdot k_{3,j}\right) \\ y_{j+1} &= y_j + \frac{\Delta x}{6} \cdot (k_{1,j} + 2k_{2,j} + 2k_{3,j} + k_{4,j}) + R(\Delta x^5) \end{aligned}$$

Bemerkenswert ist, dass hier die Restfunktion  $R$  mit  $\Delta x^5$  gegen 0 geht, während beim Euler–Verfahren vergleichsweise nur mit  $\Delta x^2$ .  $f(x_j, y_j)$  wird hier ersetzt durch einen gewichteten gemittelten Wert.

• *Il est remarquable qu'ici, la fonction de reste  $R$  va vers 0 avec  $\Delta x^5$ , tandis qu'à la méthode d'Euler, seulement avec  $\Delta x^2$ . Ici,  $f(x_j, y_j)$  est remplacé par une valeur moyenne pondérée.*

Empfehlung zur Wahl der Schrittweite  $\Delta x$ : • *Recommandement pour le choix de la longueur de l'intervalle  $\Delta x$ :*

Sei • *Soit  $L$  = Lipschitzkonstante* • *constante de Lipschitz*  $\rightsquigarrow$  Wähle: • *Choisir:  $\Delta x \leq \frac{L}{10}$*

Hinweis: • *Indication:  $f$  diff'bar* •  *$f$  dérivable*  $\rightsquigarrow L = \text{Max}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{|x=\text{const}}$

Bsp.: • **Exemple:** D'Gl • **Eq.diff.**

$y' - y = x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $x \in [0, 0.4000]$   $\rightsquigarrow y' = f(x, y) = y + x$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 1$   $\rightsquigarrow$  Wähle: • *Choisir:  $\Delta x \leq \frac{1}{10} = 0.1$ ,  $I = [0, 0.4]$ ,*

4 Teilintervalle: • *4 Intervalles partiels:  $x_0 = 0.0$ ,  $x_1 = 0.1$ ,  $x_2 = 0.2$ ,  $x_3 = 0.3$ ,  $x_4 = 0.4$*

Rechnung: • *Calcul:*

$y_0 = 1$ ,  $y_1 = y_{0+1}$  für • *pour  $j = 0$*

$$\begin{aligned} k_{1,0} &= f(x_0, y_0) = f(0, 1) = 0 + 1 &= 1.0 \\ k_{2,0} &= f\left(0, \frac{0.1}{2}, 1 + \frac{1}{2} \cdot 0.1 \cdot 1\right) = 0.05 + 1.05 &= 1.1 \\ k_{3,0} &= f\left(0, \frac{0.1}{2}, 1 + \frac{1}{2} \cdot 0.1 \cdot 1.1\right) = 0.05 + 1.055 &= 1.105 \\ k_{4,0} &= f(0, 0.1, 1 + 0.1 \cdot 1.105) = 0.1 + 1.1105 &= 1.2105 \\ y_1 &= 1 + \frac{0.1}{6} (1.0 + 2 \cdot 1.1 + 2 \cdot 1.105 + 1.2105) &= 1.1103 \end{aligned}$$

Weiter: • *En outre:  $y_2 = y_{1+1}$ ,  $j = 1$*

$\rightsquigarrow k_{1,1} = 1.210$ ,  $k_{2,1} = 1.321$ ,  $k_{3,1} = 1.326$ ,  $k_{4,1} = 1.443$ ,  $y_2 = 1.2429$

$$\leadsto k_{1,2} = 1.443, \quad k_{2,2} = 1.567, \quad k_{3,2} = 1.571, \quad k_{4,2} = 1.700, \quad y_3 = 1.3998$$

$$\leadsto k_{1,3} = 1.700, \quad k_{2,3} = 1.835, \quad k_{3,3} = 1.840, \quad k_{4,3} = 1.984, \quad y_4 = 1.5836$$

Vergleich bei  $x = 0.4$  • *Comparaison pour  $x = 0.4$*

$$\begin{array}{ll} y_{\text{exact}} & \approx 1.5836 \\ y_{\text{Runge-Kutta}} & \approx 1.5836 (!) \\ y_{\text{Euler}} & \approx 1.48 \dots \end{array}$$

### Systeme 1. Ordnung — Systèmes d'ordre 1<sup>er</sup>

$$\text{Sei } \bullet \text{ Soit } \left\{ \begin{array}{l} z'_1(x) = f_1(x, z_1(x), z_2(x), \dots, z_m(x)) \\ \vdots \\ z'_m(x) = f_m(x, z_1(x), z_2(x), \dots, z_m(x)) \end{array} \right\} \quad \text{d. h. } \bullet \text{ } v. \text{ d. } \vec{z}' = \vec{f}(x, \vec{z})$$

$$\text{AWP } \bullet \text{ PVI } \leadsto z_i(x_0) = z_{i,0}, \quad i = 1, \dots, m$$

**Idee:** • **Idée:** Wende das oben besprochene Verfahren parallel für alle Gleichungen an.

• *Appliquer la méthode discutée en haut parallèlement pour toutes les équations.*

**Vorgehen:** • **procédé:**

Berechne mit Runge-Kutta  $\{z_{1,1}, \dots, z_{m,1}\}$  aus  $\{z_{1,0}, \dots, z_{m,0}\}$ . Dazu muss man für jedes  $z_{i,1}$  die  $k_{1,(i,1)}, \dots, k_{4,(i,1)}$  berechnen in der folgenden Reihenfolge: Zuerst berechnet man  $k_{1,(1,1)}, \dots, k_{1,(m,1)}$ . Anschliessend  $k_{2,(1,1)}, \dots, k_{2,(m,1)}$  u.s.w.. Dann berechnet man  $z_{1,2}, \dots, z_{m,2}$  aus  $z_{1,1}, \dots, z_{m,1}$ .

• *Calculer  $\{z_{1,1}, \dots, z_{m,1}\}$  de  $\{z_{1,0}, \dots, z_{m,0}\}$  avec Runge-Kutta. Pour cela on doit calculer pour chaque  $z_{i,1}$  les  $k_{1,(i,1)}, \dots, k_{4,(i,1)}$  dans l'ordre suivant: D'abord calculer  $k_{1,(1,1)}, \dots, k_{1,(m,1)}$ . Après calculer  $k_{2,(1,1)}, \dots, k_{2,(m,1)}$  etc.. Puis on calcule  $z_{1,2}, \dots, z_{m,2}$  de  $z_{1,1}, \dots, z_{m,1}$ .*

**Formeln:** • **Formules:** Seien • *Soient*  $j = 1, \dots, n, \quad i = 0, \dots, m$

$n =$  Anzahl Teilintervalle • *nombre d'intervalles partiels*

$$\begin{aligned} k_{1,(i,j)} &= f_i(x_j, z_1(x_j), \dots, z_m(x_j)) \\ k_{2,(i,j)} &= f_i\left(x_j + \frac{\Delta x}{2}, z_1(x_j) + \frac{1}{2} \Delta x \cdot k_{1,(i,j)}, \dots, z_m(x_j) + \frac{1}{2} \Delta x \cdot k_{1,(m,j)}\right) \\ k_{3,(i,j)} &= f_i\left(x_j + \frac{\Delta x}{2}, z_1(x_j) + \frac{1}{2} \Delta x \cdot k_{2,(i,j)}, \dots, z_m(x_j) + \frac{1}{2} \Delta x \cdot k_{2,(m,j)}\right) \\ k_{4,(i,j)} &= f_i\left(x_j + \Delta x, z_1(x_j) + \Delta x \cdot k_{3,(i,j)}, \dots, z_m(x_j) + \Delta x \cdot k_{3,(m,j)}\right) \\ z_{i,(j+1)} &= z_i(x_{j+1}) = z_{i,(j)} + \frac{\Delta x}{6} \cdot (k_{1,(i,j)} + 2k_{2,(i,j)} + 2k_{3,(i,j)} + k_{4,(i,j)}) \end{aligned}$$

**Bemerkung:** • **Remarque:**

Man stellt sofort fest, dass im Computerzeitalter diese Formeln wohl nicht mehr für Handrechnungen verwendet werden. Der Zeitverschleiss ist enorm. Doch sind für Programmierungen in dieser Richtung Kenntnisse der Theorie unabdingbar. In vielen Computeralgebra-Systemen findet man entsprechende Module heute eingebunden, etwa z.B. in Mathematica. (Vgl. Mathematica-Kurs.) • *On constate tout de suite qu'aujourd'hui, dans le siècle des ordinateurs, probablement personne n'applique plus ces formules pour les calculs à la main. Ce serait une perte de temps. Cependant les connaissances de la théorie sont indispensables pour les programmations dans cette direction. Dans beaucoup de systèmes d'algèbre*

d'ordinateur, on trouve aujourd'hui des modules correspondants intégrés, par exemple dans Mathematica. (Voir cours de Mathematica.)

Der nachfolgende Abschnitt ist dem Algebra-Skript entnommen:

- La section suivante est prise du script d'algèbre:

### 2.8.3 D'Gl und Differenzenmethode — Equation différentielle et méthode d'équations aux différences

Bsp.: • Exemple:

Wir betrachten die folgende Differentialgleichung (Randwertproblem):

- Nous étudions l'équation différentielle suivante (problème de valeur aux limites):

$$3y''(x) - 5y'(x) + y(x) + 2x = 0, \quad a = 0, \quad b = 10, \quad y(a) = -2; y(b) = 5;$$

Nun diskretisieren wir das Problem indem wir das Intervall  $I = [a, b]$  in  $n$  Teile gleicher Länge  $h$  teilen (Teilpunkte  $x_k$ ).

- Maintenant nous discrétisons le problème en partageant l'intervalle  $I = [a, b]$  en  $n$  segment de longueur  $h$  égale (points de section  $x_k$ ).

$$\leadsto x_0 = a, \quad x_n = b, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + k \cdot h$$

Nun ersetzen wir die Differentialquotienten durch die Differenzenquotienten:

- Maintenant nous remplaçons les quotients différentiels par les quotients des différences:

$$\begin{aligned} y'(x_k) &\approx \frac{y(x_k) - y(x_{k-1}))}{h}, \quad y''(x_k) \approx \frac{y'(x_{k+1}) - y'(x_k)}{h} = \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} \\ \frac{2x_k h^2 + (5h + 3)y_{k-1} + (h^2 - 5h - 6)y_k + 3y_{k+1}}{h^2} &= 0, \\ \Rightarrow \frac{(5h + 3)y_{k-1} + (h^2 - 5h - 6)y_k + 3y_{k+1}}{h^2} &= -2x_k \end{aligned}$$

Wir studieren zuerst das Beispiel mit  $n = 11$ .  $y_0 = y(x_0) = y(a)$  und  $y_{11} = y(x_{11} = y(b))$  sind gegeben. Daher müssen noch  $y_1, y_2, \dots, y_{10}$  berechnet werden. Dazu verwenden wir obige Gleichungen. Diese ergeben ein System:

- Nous étudions d'abord l'exemple avec  $n = 11$ .  $y_0 = y(x_0) = y(a)$  et  $y_{11} = y(x_{11} = y(b))$  sont données. Par conséquent il faut encore calculer  $y_1, y_2, \dots, y_{10}$ . Dans cette intention nous utilisons les équations mentionnées en haut. Celles-ci forment un système:

$$\begin{aligned} \frac{(5h + 3)y_0 + (h^2 - 5h - 6)y_1 + 3y_2}{h^2} &= -2x_1 \\ &\vdots \\ \frac{(5h + 3)y_{k-1} + (h^2 - 5h - 6)y_k + 3y_{k+1}}{h^2} &= -2x_k \\ &\vdots \\ \frac{(5h + 3)y_9 + (h^2 - 5h - 6)y_{10} + 3y_{11}}{h^2} &= -2x_{10} \end{aligned}$$

Wie man sieht, kommen in jeder Zeile immer nur drei der Unbekannten  $y_k$  vor. Daher ist die Koeffizientenmatrix eine Bandmatrix, die nur in drei Diagonalen, der Hauptdiagonale und den beiden Nebendiagonalen, besetzt ist. Gleichungssysteme mit solchen Matrixen sind einfach lösbar.

• *Comme on voit, dans chaque ligne il y a seulement trois inconnus  $y_k$ . Par conséquent la matrice des coefficients est une matrice de bande qui a les éléments  $\neq 0$  seulement dans trois diagonales, la diagonale principale et les deux diagonales secondaires voisines. Les systèmes d'équation avec les telles matrices sont résolubles de façon simple.*

**Bemerkung:** • **Remarque:**

Falls die D'Gl nicht linear ist, kann man die Matrizenmethode nicht ohne weiteres anwenden. Man muss sich dann überlegen, ob man die Gleichung eventuell z.B. mit Hilfe einer Potenzreihenentwicklung linearisieren könnte.

• *Si l'éq. diff. n'est pas linéaire, on ne peut pas utiliser la méthode de matrice sans d'autres méthodes, cela ne va pas aussi facilement. Il faut donc réfléchir si éventuellement on pourrait par exemple linéariser l'équation à l'aide d'une série de puissances.*

Resultat der Berechnung: • *Résultat le calcul:*

$$M \cdot \vec{y} = \vec{b} \Rightarrow M \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18086 \\ 4000 \\ 6000 \\ 8000 \\ 10000 \\ 12000 \\ 14000 \\ 16000 \\ 18000 \\ 39965 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 12936 & -3993 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10043 & -12936 & 3993 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10043 & -12936 & 3993 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10043 & -12936 & 3993 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10043 & -12936 & 3993 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10043 & -12936 & 3993 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10043 & -12936 & 3993 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10043 & -12936 & 3993 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10043 & -12936 & 3993 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10043 & -12936 \end{pmatrix}$$

Exakte Lösung: • *Solution exacte:*

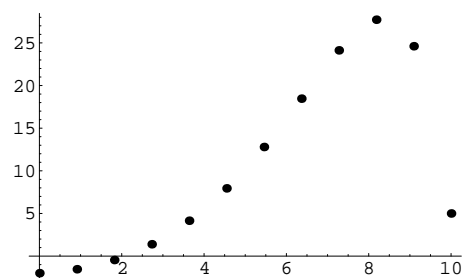
$$y(x) =$$

$$\frac{e^{-\frac{1}{6}(-5+\sqrt{13})x} \left( 2e^{\frac{1}{6}((-5+\sqrt{13})x+50)}(x+5) - 2e^{\frac{1}{6}((-5+\sqrt{13})x+20\sqrt{13}+50)}(x+5) + 35e^{\frac{1}{3}\sqrt{13}(x+5)} - 8e^{\frac{1}{3}(\sqrt{13}x+25)} + 8e^{\frac{5}{3}(5+2\sqrt{13})} - 35e^{\frac{5\sqrt{13}}{3}} \right)}{-e^{25/3} + e^{\frac{5}{3}(5+2\sqrt{13})}}$$

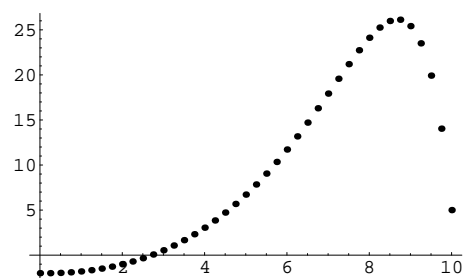
$$\approx -2x + 8.00002759115 e^{0.2324081207560x} - 0.0000275911538341 e^{1.43425854591x} - 10$$

In den nachstehenden Diagrammen sind die Resultate der Berechnung für  $n = 11$ ,  $n = 40$  dem exakten Resultat gegenübergestellt:

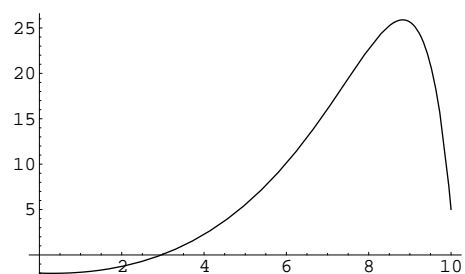
- Dans les diagrammes suivants, on voit la comparaison des résultats du calcul pour  $n = 11$ ,  $n = 40$  et du résultat exact:



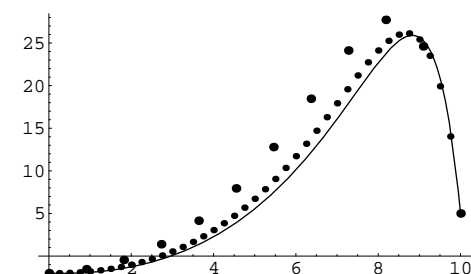
12 Punkte,  $n = 11$  • 12 points,  $n = 11$



41 Punkte,  $n = 40$  • 41 points,  $n = 40$



Exakte Lösung • Solution exacte



Alles zusammen • Tout ensemble

## 2.9 Allgemeine Maschinenlösungen — Solutions générales par l'ordinateur

### 2.9.1 Mathematica-Lösung — Solutions par Mathematica

**1. Beispiel: • Exemple 1:**  $y'(x) + \alpha y(x) = f(x)$

*Mathematica-Basiscode: • Code de base de Mathematica:*

```
solv1 = DSolve[ y'[x] + \[Alpha] y[x] == f[x], y, x];
u[x_] := y /. solv1[[1]];
a = (u[x][x] // InputForm)[[1]][[2]][[2]][[2]][[1]];
v[x_] := u[x][x] /. a -> t;
Print["y(x) = ", v[x] // Simplify];
```

**Output:**  $y(x) = e^{-x\alpha} \left( c_1 + \int_1^x e^{t\alpha} f(t) dt \right)$

**2. Beispiel: • Exemple 2:**  $y''(x) + \alpha y'(x) + \beta y(x) = f(x)$

*Mathematica-Code: • Code de Mathematica:*

```
Remove["Global`*"];
solv2 = DSolve[y''[x] + \[Alpha] y'[x] + \[Beta] y[x] == f[x], y, x][[1]];
u[x_] := y /. solv2[[1]];
a = u[x][[2]][[3]][[2]][[2]][[1]];
b = u[x][[2]][[4]][[2]][[2]][[1]];
v[x_] := u[x][x] /. {a -> t, b -> t};
Print["y(x) = ", v[x] // Simplify]
```

**Output:**

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta})} \left( c_1 + e^{x\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}} c_2 + e^{x\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}} \int_1^x \frac{e^{\frac{1}{2}t(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta})} f(t)}{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}} dt + \int_1^x -\frac{e^{\frac{1}{2}t(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta})} f(t)}{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}} dt \right)$$

**3. Beispiel: • Exemple 3:**  $y''(x) + 2y'(x) + (-1)y(x) = \cos(x)$ ,  $y(0) = 2.86909$ ,  $y'(0) = -4.80015$

*Mathematica-Code: • Code de Mathematica:*

```
Remove["Global`*"];
solv2 = DSolve[y''[x] + \[Alpha] y'[x] + \[Beta] y[x] == f[x], y, x][[1]];
u[x_] := y /. solv2[[1]];
a = u[x][[2]][[3]][[2]][[2]][[1]];
b = u[x][[2]][[4]][[2]][[2]][[1]];
v[x_] := u[x][x] /. {a -> t, b -> t};
s[u_] := v[x] /. {x -> u, \[Alpha] -> 2, \[Beta] -> -1, C[1] -> 1, C[2] -> 1, f[t] ->
  Cos[t]};
Print["y(x) = ", s[x] // N // Simplify];
Print["y(0) = ", s[0] // N];
Print["y'(0) = ", (D[s[m], m] /. m -> 0) // N];
Plot[s[m], {m, 0, Pi}, AspectRatio->1];
```

**Output:** (Ohne weitere Kommastellen) • (*Sans toutes les places possibles*)

$$y(x) = 0.25 \cos(x) + 2.24228 e^{-2.414218x} + 0.87682 e^{0.414212x} + 0.25 \sin(x)$$

$$y(0) = 2.86909, \quad y'(0) = -4.80015$$

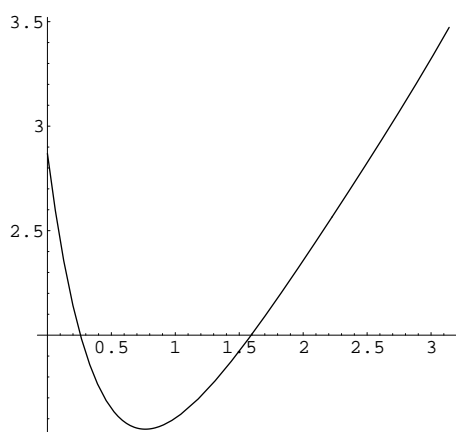
(Plot siehe unten, identisch mit Bild links.) • (*Plot voir ci-dessous, image à gauche.*)

**Direkter Plot der exakten Lösung:** • **Directement dessiner la solution exacte:**

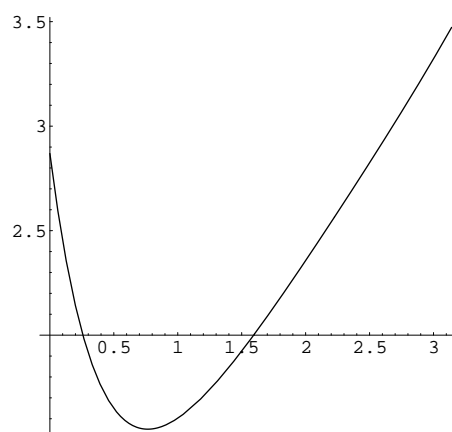
```
Remove["Global`*"];
solv = Flatten[DSolve[{y''[x]+2 y'[x]-1 y[x]==Cos[x],
y[0]==2.86909,y'[0]==-4.80015},y,x]];
y = y/.solv;
Plot[y[x],{x,0,Pi},AspectRatio->1];
```

**Direkter Plot der numerischen Lösung:** • **Directement dessiner la solution exacte:**

```
Remove["Global`*"];
solution=NDSolve[{y''[x]+2 y'[x]-1 y[x]==Cos[x],y[0]==2.86909,
y'[0]==-4.80015},y,{x,0,4 Pi}];
Plot[y[x]/. solution,{x,0,Pi},AspectRatio->1];
```



Exakte Lösung • *Solution exacte*



Numerische Lösung • *Solution numérique*

## 2.9.2 Selbst gerechnete Lösung — Solution calculée personnellement

**Wir betrachten Beispiel 3:** • **Considérons exemple 3:**

$$y''(x) + 1 y'(x) + (-1) y(x) = \cos(x + 1) = \cos(x) \cos(1) - \sin(x) \sin(1), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

**Homogene Lösung** • *Solution homogène*

$y_{hom}$  Lösung des homogenen Problems. •  $y_{hom}$  solution du problème homogène.

$$1. \quad y''(x) + y'(x) - y(x) = 0$$



$\leadsto$  Charakteristisches Polynom: • *Polynôme caractéristique*  $\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{5}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}) \leadsto y_{hom} = c_1 e^{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})x} + c_2 e^{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})x}$$

2. Frage: • *Question:*  $y_{part} = ?$   $\leadsto$  Probiere: • *Essayier:*

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad y_1(x) = \cos(x) &\Rightarrow A(y_1(x)) := y_1''(x) + y_1'(x) - y_1(x) \\ &= -\cos(x) - \sin(x) - \cos(x) = -2 \cos(x) - \sin(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2(x) = \sin(x) &\Rightarrow A(y_2(x)) := y_2''(x) + y_2'(x) - y_2(x) \\ &= -\sin(x) + \cos(x) - \sin(x) = \cos(x) - 2 \sin(x) \end{aligned}$$

**Bemerkung:** • **Remarque:**  $A$  ist linearer Operator! • *A est opérateur linéaire!*

$$y_{part}(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A(y_{part}(x)) &= A(\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)) = \alpha A(y_1(x)) + \beta A(y_2(x)) = \\ &\alpha(-2 \cos(x) - \sin(x)) + \beta(\cos(x) - 2 \sin(x)) = (-2\alpha + \beta) \cos(x) + (-\alpha - 2\beta) \sin(x) \\ &:= \cos(x) \cos(1) - \sin(x) \sin(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2\alpha + \beta &= \cos(1) & \alpha &= \frac{1}{5}(-2 \cos(1) + \sin(1)), \\ -\alpha - 2\beta &= -\sin(1) & \beta &= \frac{1}{5}(\cos(1) + 2 \sin(1)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y_{part}(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = \frac{1}{5}(-2 \cos(1) + \sin(1)) \cos(x) + \frac{1}{5}(\cos(1) + 2 \sin(1)) \sin(x)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_{allg}(0) &= 1, \quad y'_{allg}(0) = 0, \quad y_{allg}(x) = y_{hom}(x) + y_{part}(x) = \\ &\frac{1}{5} \left( 5 e^{-\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})x} \left( c_1 + c_2 e^{\sqrt{5}x} \right) - 2 \cos(x+1) + \sin(x+1) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'_{allg}(x) &= \frac{1}{10} (2 \cos(x+1) + e^{-\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})x} (4 e^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})x} \sin(x+1) - 5((1+\sqrt{5})c_1 \\ &\quad - (-1+\sqrt{5})c_2 e^{\sqrt{5}x}))) \end{aligned}$$

$$y_{allg}(0) = 1 = c_1 + c_2 + \frac{1}{5}(-2 \cos(1) + \sin(1))$$

$$y'_{allg}(0) = 0 = \frac{1}{10}(-5((1+\sqrt{5})c_1 - (-1+\sqrt{5})c_2) + 4 \sin(1) + 2 \cos(1))$$

$$c_1 = \frac{1}{10} \left( 5 - \sqrt{5} + 2 \cos(1) + (-1 + \sqrt{5}) \sin(1) \right)$$

$$c_2 = \frac{1}{10} \left( 5 + \sqrt{5} + 2 \cos(1) - (1 + \sqrt{5}) \sin(1) \right) \leadsto$$

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{10} (2(-2 \cos(1) + \sin(1)) \cos(x) + 2(\cos(1) + 2 \sin(1)) \sin(x) + e^{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})x} \\ &\quad * (5 + \sqrt{5} + 2 \cos(1) - (1 + \sqrt{5}) \sin(1)) + e^{-\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})x} (5 - \sqrt{5} + 2 \cos(1) + (-1 + \sqrt{5}) \sin(1))) \end{aligned}$$

$$y(x) = -0.04783 \cos(x) + 0.48847 e^{-1.61803x} + 0.55936 e^{0.61803x} + 0.44465 \sin(x)$$

**Vergleich: Maschinenlösung: • Comparer avec la solution par machine:***Mathematica*-Code: • *Code de Mathematica*:

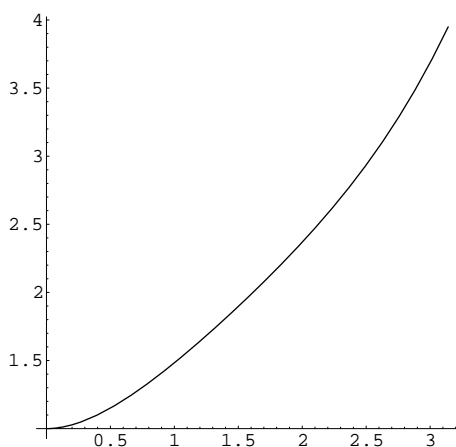
```

Remove[x,y];
solv = Flatten[DSolve[{y''[x] + y'[x] - y[x]==Cos[x+1], y[0]==1, y'[0]==0},y,x]];
y = y/.solv;
(* Print["y(x) = ",Simplify[y[x]]]; *)
Print["Numerisch y(x) = ",Simplify[y[x]]/N];
Plot[y[x],{x,0,Pi},AspectRatio->1];

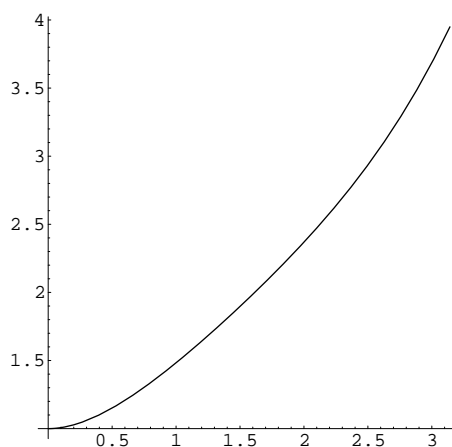
```

**Output:** (Numerisch  $\leadsto$  kürzer.) • (*Numérique  $\leadsto$  plus court.*)

$$y(x) = -0.1 * 2.71828^{-1.61803x} (4.0 * 2.71828^{1.61803x} \cos(x + 1.) - 5.59366 * 2.71828^{2.23607x} - 2.0 * 2.71828^{1.61803x} \sin(x + 1.0) - 4.88465)$$



Oben errechnete Lösung

• *Solution calculée ci-dessus*

Maschinenlösung

• *Solution par machine* $\leadsto$  Diagramme identisch! • *Diagrammes identiques!*

ligne élastique ou axe neutre

**2.10 Artillerie-Methode — Méthode selon l'artillerie**

Die hier behandelte Methode ist auch unter dem Namen „Shooting-Methode“ bekannt.

• *La méthode qu'on va traiter ici s'appelle aussi "shooting method".*Wir wollen das folgende **Randwertproblem** lösen (Knickungsproblem):• *On aimerait résoudre le problème de valeurs aux limites suivant (problème de flambage):*

$$y''(x) + \frac{F}{(EI_y)} y(x) (1 + (y'(x))^2)^{\frac{3}{2}} = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(x_L) = 0$$

Zuerst studieren wir eine vereinfachte lineare Gleichung ( $|y'(x)| \ll 1$ ):• *D'abord nous étudions une équation simplifiée qui es linéaire ( $|y'(x)| \ll 1$ ):*

$$y''(x) + \frac{F}{(EI_y)} y(x) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(x_L) = 0$$

Man findet sofort die allgemeine Lösung: • *Tout de suite on trouve la solution générale:*

$$y_{gen}(x) = c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{F} x}{\sqrt{E} \sqrt{I_y}}\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{F} x}{\sqrt{E} \sqrt{I_y}}\right)$$

Wir wählen wir für die Konstanten numerische Werte ( $m, N$  u.s.w.):

• *Pour les constants on prend les valeurs numériques suivantes ( $m, N$  etc.):*

$$x_L = 5, \quad I_y = \frac{Pi}{4} (R^4 - r^4), \quad R = 0.1, \quad r = 0.01, \quad E = 210000 * 1000^2, \quad F = 5 * 10^6$$

→ Allgemeine Lösung: • *Solution générale:*

$$y_{gen}(x) = c_1 \cos(0.55062 x) + c_2 \sin(0.55062 x)$$

Setzt man jedoch Randbedingungen, so ändert sich die Situation.

• *Mais la situation change, si l'on choisit des conditions aux limites.*

Sei • *Soit  $y(0) = 0$*

$$\Rightarrow y_{gen}(0) = 0 = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = c_1 = 0 \Rightarrow y_{gen}(0) = c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{F} x}{\sqrt{E} \sqrt{I_y}}\right)$$

Sei • *Soit  $y(x_L) = 0$*

$$\Rightarrow y_{gen}(0) = 0 = c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{F} x_L}{\sqrt{E} \sqrt{I_y}}\right) \Rightarrow \frac{\sqrt{F} x_L}{\sqrt{E} \sqrt{I_y}} = \pi \Rightarrow x_L = \pi \frac{\sqrt{E} \sqrt{I_y}}{\sqrt{F}} \text{ oder } \bullet \text{ ou } F = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_x}{x_L^2}$$

Für ein gegebenes  $x_L$  ist damit  $F$  bestimmt und kann somit nicht mehr frei gewählt werden.

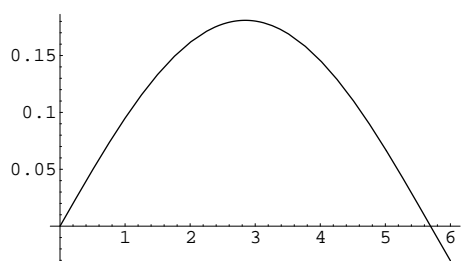
• *Pour un  $x_L$  donné  $F$  est déterminé et ne peut donc plus être choisi librement.*

Dagegen lässt sich  $c_2$  hier ohne weitere Bedingung nicht bestimmen.

• *Par contre, on ne peut pas calculer  $c_2$  sans condition supplémentaire.*

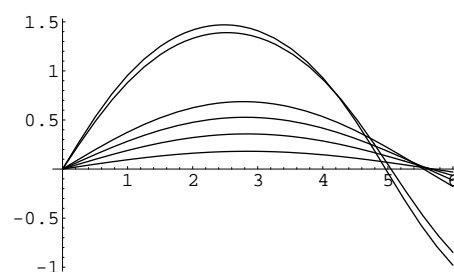
Um weiterzukommen, verändern wir das ursprüngliche Problem. Wir gehen vor wie die Artillerie. An Stelle der zweiten Randbedingung führen wir eine zweite Anfangsbedingung ein, die wir solange anpassen, bis die zweite Randbedingung erfüllt ist. (**Shooting-Methode**). Wir lösen das Problem numerisch.

• *Pour pouvoir continuer, nous nous occupons de nouveau du problème initial. A la place de la deuxième condition aux limites nous postulons une deuxième condition initiale que nous allons ajuster jusqu'à la deuxième condition au limite va être satisfaite. Nous allons calculer la solution numériquement.*

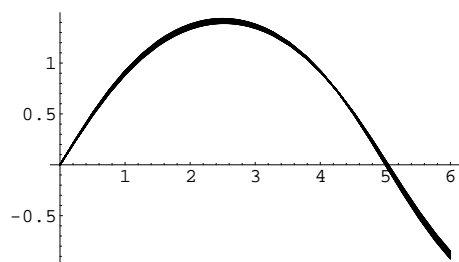


$$y''(x) + y(x) \frac{F}{(E \cdot I_y)} (1 + (y'(x))^2)^{\frac{3}{2}} = 0,$$

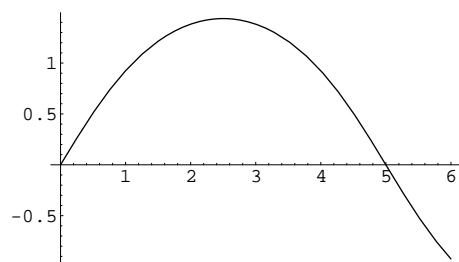
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.1$$



$$y'(0) = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 1.0, 1.1$$



$$y'(0) = 1.000, 1.001, 1.002, \dots, 1.057$$



$$y'(0) = 1.057$$

Hier ist zur Berechnung *Mathematica* verwendet worden. Programm siehe unten.

• Ici pour calculer on a utilisé *Mathematica*. Voici le programme:

```
Remove["Global`*"]
```

```
(* Initialisierung *)
```

```
xL = 5; R = 0.1; r = 0.01; Iy = Pi/4 (R^4 - r^4);
```

```
eE = 210000 *1/(1/1000^2); F = 5 10^6;
```

```
M[y_]:= F y;
```

```
ys0=1; i=1;
```

```
solution=
```

```
NDSolve[{y''[x] + F y[x]/(eE Iy) (1+(y'[x])^2)^(3/2) == 0,
```

```
y[0] == 0, y'[0] == ys0 },y,{x,0,1.2 xL}];
```

```
Endwert=(y[x]/.solution)/.x->xL;
```

```
If[Endwert[[1]] > 0, steuerung = 1, If[Endwert[[1]] < 0,
```

```
steuerung = -1, steuerung = 0]];
```

```
h=steuerung;
```

```
pl[i]=Plot[y[x]/.solution,{x,0,1.2 xL},DisplayFunction->Identity];
```

```
Print[{i,h,steuerung,Endwert " = y[xL]",ys0}];
```

```
(* Loop *)
```

```
While[(h-steuerung) == 0 ,
```

```
Print["Vor ",{i,h,steuerung,Endwert " = y[xL]",ys0/N}];
```

```
ys0=1+i/1000;
```

```
i++;
```

```
h=steuerung;
```

```
solution=
```

```
NDSolve[{y''[x] + F y[x]/(eE Iy) (1+(y'[x])^2)^(3/2) == 0,
```

```
y[0] == 0, y'[0] == ys0 },y,{x,0,1.2 xL}];
```

```
Endwert=(y[x]/.solution)/.x->xL;
```

```
If[Endwert[[1]] > 0, steuerung = 1, If[Endwert[[1]] < 0,
```

```
steuerung = -1, steuerung = 0]];
```

```
pl[i]=Plot[y[x]/.solution,{x,0,1.2 xL},DisplayFunction->Identity];
```

```
Print["Nach ",{i,h,steuerung,Endwert " = y[xL]",ys0/N},
```

```
If[(h-steuerung) == 0,""," Umschlagpunkt"]];
```



```
Show[Table[pl[n],{n,1,i}],DisplayFunction->$DisplayFunction];
```

```
Plot[y[x]/.solution,{x,0,1.2 xL}];
```

## 2.11 Anwendungen — Applications

### 2.11.1 Biegelinie — Ligne élastique ou axe neutre

*Mathematica*-Output siehe: • *Output de Mathematica voir:*

<http://rowicus.ch/Wir/MathematicaPackages/Biegelinie.pdf>

<http://rowicus.ch/Wir/MathematicaPackages/Biegelinie.nb>

### 2.11.2 Knickung — Problème de flambage

*Mathematica*-Output siehe: • *Output de Mathematica voir:*

<http://rowicus.ch/Wir/MathematicaPackages/Knickung.pdf>

<http://rowicus.ch/Wir/MathematicaPackages/Knickung.nb>



## Kapitel • Chapitre 3

# Laplace–Transformationen — Transformations de Laplace

### 3.1 Einführung — Introduction

#### 3.1.1 Übersicht — Vue générale

Bei den Laplace–Transformationen handelt es sich um eine symbolische Methode, die zum Auflösen von Differentialgleichungen grosse Dienste leistet. Mit ihrer Hilfe lassen sich transzendente D'Gl auf algebraische Gleichungen zurückführen und algebraisch lösen. Es gelingt, einen Kalkül aufzubauen, was die Methode äusserst effizient macht.

Den Ursprung der Laplace–Transformationen finden wir schon bei Euler. Benannt sind sie heute aber nach Laplace, der als Zeitgenosse von Euler wie dieser auch in Berlin tätig war. Die Idee wurde von Heaviside<sup>3</sup> aufgegriffen. Die Früchte finden wir im heute bekannten und verwendeten Kalkül.

• *Quant aux transformations de Laplace, il s'agit d'une méthode symbolique, qui rend de grands services pour résoudre des équations différentielles. Les éq.diff. transcendentes se laissent transformer en équations algébriques et résoudre algébriquement. Ainsi on arrive à construire un calcul, ce qui rend la méthode extrêmement efficace.*

*Nous trouvons déjà l'origine des transformations de Laplace chez Euler. Aujourd'hui on les nomme d'après Laplace qui, contemporain d'Euler, était aussi actif, comme celui-ci à Berlin. L'idée a été reprise par Heaviside<sup>3</sup>. Nous en trouvons les fruits dans le calcul connu et utilisé aujourd'hui.*

Bezüglich der Literatur sei auf die Ingenieur–Literatur oder die Handbücher über Laplace–Transformationen von Doetsch verwiesen. • *Concernant la littérature il faut consulter la littérature pour ingénieurs ou les manuels de Doetsch sur les transformations de Laplace.*

#### 3.1.2 Der Trick — Le truc

**Bsp.:** • **Exemple:** Ohne den Kalkül vorerst zu kennen, wollen wir die Methode schrittweise am Beispiel einer D'Gl demonstrieren. • *Sans d'abord connaître le calcul, nous voulons démontrer progressivement la méthode à l'exemple d'une éq.diff..*

**Bsp.:** • **Exemple:**

**AWP** • **PVI**  $y'' - y' - 6y - e^{-x} = 0, \quad x \geq 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y(x) = ?$

**Idee:** • **Idée:** : Berechnen: • **Calculer:**  $\int_0^{\infty} e^{-sx} (y'' - y' - 6y - e^{-x}) dx = \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot 0 dx = 0 \rightsquigarrow$

---

<sup>3</sup>Heaviside, 1850–1925

1. Sei • *Soit*  $F(s) := \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot y(x) dx$  (Annahme: • *Supposition:*  $\exists_{s \in \mathbb{C}} : F(s)$  existiert • *existe*)

2. Partielle Integration: • *Intégration partielle:*

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot y'(x) dx = e^{-sx} y(x) \Big|_0^{\infty} - (-s) \cdot \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot y(x) dx = e^{-sx} y(x) \Big|_0^{\infty} - (-s) \cdot F(s)$$

Seien • *Soient* :  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-sx} y(x) = 0$  und • *et*  $\lim_{x \downarrow 0} y(x) = y(0)$  existiert • *existe*

$$\leadsto e^{-sx} y(x) \Big|_0^{\infty} = 0 - e^{-s \cdot 0} y(0) = -y(0) \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot y'(x) dx = -y(0) + s \cdot F(s)$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-sx} y(x) = 0$  bedeutet, dass die Lösungsfunktion  $y(x)$  schwächer wächst als  $e^{sx}$ , was in der Praxis vernünftig ist.  $s$  kann ja noch gewählt werden ( $\operatorname{Re}(s) > 0$ ). • *signifie que la fonction de solution  $y(x)$  croît plus faiblement que  $e^{sx}$ , ce qui est raisonnable dans la pratique.  $s$  peut être choisi librement ( $\operatorname{Re}(s) > 0$ ).*

3. Sei • *Soit*  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-sx} y'(x) = 0$  ( $\int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot y'(x) dx$  soll existieren! • *doit exister!*)

$\leadsto$  Partielle Integration: • *Intégration partielle:*

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot y''(x) dx &= e^{-sx} y'(x) \Big|_0^{\infty} - (-s) \cdot \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot y'(x) dx = -y'(0) + s \cdot \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot y'(x) dx \\ &= -y'(0) + s(-y(0) + s \cdot F(s)) = -y'(0) - s y(0) + s^2 \cdot F(s) \end{aligned}$$

4.  $\int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot e^{-x} dx = \int_0^{\infty} e^{-(s+1)x} dx = -\frac{1}{s+1} \cdot e^{-(s+1)x} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+1}$  für • *pour*  $\operatorname{Re}(s) > -1$

Wende diese Resultate auf die D'Gl an: • *Appliquer ces résultats à l'éq. diff.:*

$$\begin{aligned} (-y'(0) - s y(0) + s^2 \cdot F(s)) - (-y(0) + s \cdot F(s)) - 6 \cdot F(s) - \frac{1}{s+1} &= 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \\ \Rightarrow -s + s^2 \cdot F(s) + 1 - s \cdot F(s) - 6 \cdot F(s) &= \frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist jetzt **algebraisch lösbar!**

• *Maintenant, cette équation est résoluble de façon algébrique!*

$$\Rightarrow F(s) = \frac{s^2}{(s+1)(s^2-s-6)} := \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot y(x) dx$$

Wenn es nun gelingt, aus dieser Gleichung  $y(x)$  zu berechnen, ist das **AWP gelöst!** • *Si nous arrivons maintenant à calculer  $y(x)$  de cette équation, nous avons résolu le PVI!*

Dazu ist es ratsam,  $F(s)$  in Partialbrüche zu zerlegen: • *Il est prudent de décomposer  $F(s)$  en fractions partielles:*

$$F(s) = \frac{s^2}{(s+1)(s^2-s-6)} = \frac{9}{20} \cdot \frac{1}{s-3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s+1}$$

**Berechnung von  $y(x)$  aus  $F(s)$ :** • **Calculer  $y(x)$  de  $F(s)$ :**

**Trick:** • **Truc:**  $\int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot e^{\alpha x} dx = \int_0^{\infty} e^{(\alpha-s)x} dx = \frac{1}{s-\alpha}$  für • *pour*  $\operatorname{Re}(\alpha-s) > 0$ ,  $\operatorname{Re}(\alpha) > \operatorname{Re}(s)$



$$\begin{aligned} \leadsto F(s) &= \int_0^\infty e^{-sx} \cdot y(x) dx = \frac{9}{20} \cdot \frac{1}{s-3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{1}{4} \frac{1}{s+1} \\ &= \frac{9}{20} \cdot \int_0^\infty e^{-sx} \cdot e^{3x} dx + \frac{4}{5} \cdot \int_0^\infty e^{-sx} \cdot e^{-2x} dx - \frac{1}{4} \int_0^\infty e^{-sx} \cdot e^{-1x} dx \quad (\alpha = 3, -2, -1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \leadsto F(s) &= \int_0^\infty e^{-sx} \cdot \left( \frac{9}{20} \cdot e^{3x} + \frac{4}{5} \cdot e^{-2x} - \frac{1}{4} \cdot e^{-1x} \right) dx = \int_0^\infty e^{-sx} \cdot y(x) dx \Rightarrow \\ \int_0^\infty e^{-sx} \cdot \left( \frac{9}{20} \cdot e^{3x} + \frac{4}{5} \cdot e^{-2x} - \frac{1}{4} \cdot e^{-1x} - y(x) \right) dx &\equiv 0 \quad \forall s, \quad y(x) \in \mathcal{C}^2 \Rightarrow y(x) = \frac{9}{20} \cdot e^{3x} + \frac{4}{5} \cdot e^{-2x} - \frac{1}{4} \cdot e^{-1x} \end{aligned}$$

$$\leadsto \text{Lösung:} \quad \bullet \text{ Solution:} \quad y(x) = \frac{9}{20} \cdot e^{3x} + \frac{4}{5} \cdot e^{-2x} - \frac{1}{4} \cdot e^{-1x}$$

Durch die Herleitung einer Menge von Regeln, d.h. eines Kalküls, kann eine solche Berechnung enorm abgekürzt werden. Wir werden daher erst Regeln gewinnen müssen, bevor wir die Sache anwenden können. *• Par la dérivation d'un ensemble de règles, c.-à.-d. d'un calcul, une telle déduction du résultat peut être raccourci énormément. Par conséquent, nous devons d'abord chercher des règles avant de pouvoir utiliser cette méthode.*

## 3.2 Existenz-, Eindeutigkeitsprobleme — Probl. d'existence et d'univocité

### 3.2.1 Definitionen — Définitions

**Definition:** *• Définition:* Sei *• Soit*  $s \in \mathbb{C}$   
 $\mathcal{L}\{f\} := F(s) := \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t) dt$  heisst **Laplace-Transformierte**  
 von  $f(t)$ . *• s'appelle transformée de Laplace de  $f(t)$ .*

$\mathcal{L}$  kann als Operator verstanden werden: *• On peut comprendre  $\mathcal{L}$  comme opérateur:*

$\mathcal{L}: f(t) \mapsto F(s), \quad f \in \{f_i \mid i \in M\}, \quad F \in \{F_i \mid i \in M\}$   
 $f$ : Urbildfunktion, Originalfunktion *• Fonction originale*  
 $F$ : Bildfunktion *• Fonction image,  $s \in \mathbb{C}$*

$\mathcal{L}$ : heisst **Laplace-Transformation**. *•  $\mathcal{L}$ : s'appelle transformation de Laplace.*  
 $e^{-st}$  heisst **Dämpfungsglied**. *•  $e^{-st}$  s'appelle terme amortisseur.*

**Symbol:** *• Symbole:* In der Literatur sind sehr verschiedene Symbole gebräuchlich: *• Dans la littérature, on utilise des symboles très différents:*

- |    |        |                             |   |
|----|--------|-----------------------------|---|
| 1) | $f(t)$ | $\mapsto$                   | $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}, \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ |
| 2) | $f(t)$ | $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ | $F(s)$  |
| 3) | $f(t)$ | $\circ \bullet$             | $F(s)$  |
| 4) | $f(t)$ | $\mapsto$                   | $F(s)$  |
| 5) | $f(t)$ | $\sqsubset$                 | $F(s)$  |

**Bemerkung:** • **Remarque:** Neben  $\mathcal{L}$  werden wir hier vor allem folgende Symbole benutzen:  
 • *A côté de  $\mathcal{L}$ , nous utiliserons en particulier les symboles suivants:*  
 $f(t) \circ \bullet F(s)$ ,  $F(s) \bullet \circ f(t)$ .

### 3.2.2 Existenzprobleme — Problèmes d'existence

**Problem:** • **Problème:** Wann existiert  $F(s)$ ? • *Quand  $F(s)$  existe-t-il?*

$\leadsto$  Für  $f(t)$  müssen wir fordern: • *Il faut exiger pour  $f(t)$ :*

1)  $f(t) \cdot e^{-s \cdot t}$  integrierbar (z.B.  $f$  stückweise stetig). • *intégrable (p.ex.  $f$  continue par morceaux).*

2)  $\forall s \in D_{\mathcal{L}} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-s \cdot t} f(t) = 0$

**Bemerkung:** • **Remarque:**

$$s = \operatorname{Re}(s) + i \operatorname{Im}(s) \Rightarrow e^{-s \cdot t} = e^{-t \cdot \operatorname{Re}(s)} \cdot (\cos(t \cdot \operatorname{Im}(s)) - \sin(t \cdot \operatorname{Im}(s)))$$

$\leadsto \operatorname{Re}(s) > 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t \cdot \operatorname{Re}(s)} = 0$  wie gewünscht! • *comme désiré!*

**Satz:** • **Théorème:** **Konvergenzsatz** • **Théorème de convergence**

**Vor.:** • **Hyp.:**

- 1)  $f$  stückweise stetig • *continue par morceaux*
- 2)  $f$  wächst höchstens exponentiell.  
 •  *$f$  croît au maximum de façon exponentielle.*  
*d. h. • ç. v. d.*  
 $\exists M, \gamma \in \mathbb{R}^+ : |f(t)| \leq M \cdot e^{\gamma t}, t \in \mathbb{R}^+$

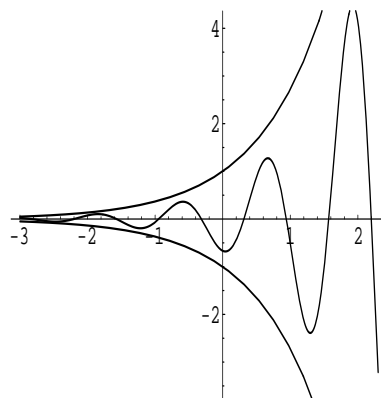
**Beh.:** • **Thè.:**

- 1)  $\forall s : \operatorname{Re}(s) > \gamma : F(s)$  existiert • *existe*
- 2)  $\lim_{\operatorname{Re}(s) \rightarrow \infty} F(s) = 0$  für • *pour  $\operatorname{Re}(s) > \gamma$*

**Bemerkung:** • **Remarque:**

Über die Umkehrung des Satzes wird nichts gesagt.

• *Au sujet du renversement du théorème, rien n'est dit.*



**Hinweis zum Beweis:** • **Indication quant à la preuve:**

$$\begin{aligned} \text{Ad 2)} \quad F(s) &= \left| \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t) dt \right| \leq \int_0^\infty |e^{-st}| \cdot |f(t)| dt \leq \int_0^\infty e^{-t \operatorname{Re}(s)} \cdot M \cdot e^{\gamma t} dt = M \cdot \int_0^\infty e^{(\gamma - \operatorname{Re}(s)) \cdot t} dt \\ &= \frac{M \cdot e^{(\gamma - \operatorname{Re}(s)) \cdot t}}{\gamma - \operatorname{Re}(s)} \Big|_0^\infty \stackrel{\operatorname{Re}(s) > \gamma}{=} \frac{M}{\gamma - \operatorname{Re}(s)} \cdot (0 - 1) = \frac{M}{\operatorname{Re}(s) - \gamma} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für • *pour*  $\operatorname{Re}(s) \rightarrow \infty$  ( $\operatorname{Re}(s) - \gamma > 0$ )

$$\text{Ad 1)} \quad F(s) = \int_0^{t_0} e^{-st} \cdot f(t) dt + \int_{t_0}^\infty e^{-st} \cdot f(t) dt = k(t_0) + R(t_0), \quad k(t_0) \in \mathbb{R}$$

$$R(t_0) \leq \int_{t_0}^\infty |e^{-st}| \cdot |f(t)| dt \leq M \cdot \int_{t_0}^\infty e^{(\gamma - \operatorname{Re}(s)) \cdot t} dt = \frac{M}{\gamma - \operatorname{Re}(s)} \cdot (0 - e^{(\gamma - \operatorname{Re}(s)) \cdot t_0}) < \varepsilon_0$$

für • *pour*  $\gamma - \operatorname{Re}(s) < 0$ ,  $t_0 > k$ ,  $e^{(\gamma - \operatorname{Re}(s)) \cdot t_0} > \varepsilon_1 \rightsquigarrow t_0 > k \Rightarrow R(t_0) < \varepsilon_0$

**Beispiele:** • **Exemples:**

1.  $f(t) = \text{Polynom in } t$  • *polynôme en } t \rightsquigarrow F(s) \text{ existiert}* • *existe*
2.  $f(t) = q \cdot e^{k \cdot t} \rightsquigarrow F(s) \text{ existiert}$  • *existe*
3.  $f(t) = e^{(t^2)} \rightsquigarrow F(s) \text{ existiert nicht!}$  • *n'existe pas!*

### 3.2.3 Eindeutigkeitsprobleme — Problèmes d'univocité

Eine nutzbringende Anwendung der Laplace-Transformationen auf Differentialgleichungen gelingt nur, falls aus  $F(s)$  die Urbildfunktion  $f(t)$  wieder eindeutig zurückgewonnen werden kann. • *Une application profitable des transformations de Laplace aux équations différentielles n'est possible que si la fonction originale  $f(t)$  peut être récupérée de forme univoque de  $F(s)$ .*

Daher untersuchen wir zuerst die Bijektivität von  $\mathcal{L}$ . • *C'est pourquoi nous examinons d'abord la bijectivité de  $\mathcal{L}$ .*

Sei • *Soit*  $\mathcal{F} = \{f \mid \mathcal{L}\{f\} \text{ ex.}\}$ ,  $\Phi = \{F = \mathcal{L}\{f\} \mid f \in \mathcal{F}\}$ ,  $D_f = \mathbb{R}_0^+$

$\rightsquigarrow$  Es ist: • *Il vaut:*  $\mathcal{L} : \mathcal{F} \longmapsto \Phi$  mit • *avec*  $\mathcal{L} : f \longmapsto F = \mathcal{L}\{f\}$

**Definition:** • **Définition:**

Wir nennen zwei Funktionen  $f_1, f_2$  auf  $D_f$  **fast identisch**

• *Nous appelons deux fonctions  $f_1, f_2$  sur  $D_f$  presque identiques*

:  $\Leftrightarrow f_1(t) = f_2(t)$  für fast alle  $t \in D_f$

• :  $\Leftrightarrow f_1(t) = f_2(t)$  pour presque tous les  $t \in D_f$

Genau gesprochen dürfen zwei fast identische Funktionen demnach nur auf einer Menge vom „Mass 0“ verschieden sein. • *Vu de façon exacte, deux fonctions presque identiques ne peuvent être différentes que sur un ensemble de la "mesure 0".*

Diese Definition macht daher Sinn, weil eine Veränderung einer Funktion auf einer Menge vom Masse 0 das „Lebesgue'sche Integral“ nicht beeinflusst.  $\mathcal{L}\{f\}$  ändert daher bei einer solchen Veränderung nicht. Schon beim Riemannschen Integral ändert der Wert des Integrals nicht, wenn man den Integranden in einem isolierten Punkt abändert, z.B. wenn man den Wert dort verdoppelt. • *Par conséquent, cette définition est sensée, parce qu'un changement d'une fonction sur un ensemble de mesure 0 n'influence*

pas "l'intégrale de Lebesgue".  $\mathcal{L}\{f\}$  ne change donc pas à un tel changement. Déjà pour l'intégrale de Riemann, la valeur de l'intégrale ne change pas si on modifie la fonction intégrée dans un point isolé, par exemple si on y double la valeur.

**Definition:** • **Définition:** Wir nennen einen Operator  $\mathcal{O} : f(t) \mapsto F(s)$  **fast bijektiv**  
 • *Nous appelons un opérateur  $\mathcal{O} : f(t) \mapsto F(s)$  presque bijectif*  
 $: \Leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}$  führt immer zu einer fast identischen Originalfunktion zurück. • *ramène toujours à une fonction presque identique à la fonction originale.*

**Satz:** • **Théorème:** Die Laplace-Transformation ist fast bijektiv auf  $D_{\mathcal{L}}$ .  
 • *La transformation de Laplace est presque bijective sur  $D_{\mathcal{L}}$ .*

$\leadsto$  Zwei Rücktransformierte  $f_1 = \mathcal{L}^{-1}\{f\}$  und  $f_2 = \mathcal{L}^{-1}\{f\}$  sind somit nur auf einer Nullmenge verschieden. Schränkt man demnach  $\mathcal{F}$  auf stetige Funktionen auf  $\mathbb{R}_0^+$  ein, so erreicht man Eindeutigkeit.  
 • *Par conséquent, deux inverses  $f_1 = \mathcal{L}^{-1}\{f\}$  et  $f_2 = \mathcal{L}^{-1}\{f\}$  ne sont différentes que sur un ensemble de mesure zéro. Si on restreint donc  $\mathcal{F}$  aux fonctions continues sur  $\mathbb{R}_0^+$ , on atteint l'univocité.*

**Korollar:** • **Corollaire:** Für stetige Funktionen auf  $\mathbb{R}_0^+$  ist die Laplace-Transformation bi-jektiv • *Pour les fonctions continues sur  $\mathbb{R}_0^+$ , la transformation de Laplace est bijective.*

**Hinweis zum Beweis:** • **Indication pour la preuve:**

- Es ist nach Konstruktion  $\mathcal{L}\{\mathcal{F}\} = \Phi$ , d.h.  $\mathcal{L}$  ist surjektiv.  
 • *D'après la construction il vaut  $\mathcal{L}\{\mathcal{F}\} = \Phi$ , ça veut dire  $\mathcal{L}$  est surjective.*
- Sei • *Soit  $f_1 \neq f_2$  und • et  $\mathcal{L}\{f_1\} \equiv \mathcal{L}\{f_2\} \Rightarrow \mathcal{L}\{f_1 - f_2\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot (f_1(t) - f_2(t)) dt$*   
 $e^{-st}$  ist analytisch. • *est analytique.*

Falls  $f_1, f_2$  auch analytisch sind, so gilt: • *Si  $f_1, f_2$  sont aussi analytiques, il vaut:*

$$(f_1(t) - f_2(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \neq 0$$

Später werden wir zeigen: • *Plus tard nous allons démontrer:  $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$*

Falls die Konvergenz unproblematisch ist, gilt: • *Si la convergence n'est pas problématique, il vaut:*

$$\mathcal{L}\{f_1 - f_2\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{n!}{s^{n+1}} = F(s) \equiv 0, \quad s \in \mathbb{C} \text{ (Re}(s) > 0 \dots) \Rightarrow \forall_n : a_n = 0$$

$\leadsto$  Widerspruch! • *Contradiction!*

(Fast identische analytische Funktionen sind identisch.)

• *Les fonctions analytiques et presque identiques sont identiques.*

- $f_1, f_2$  nicht analytisch: Argumentiere mit Approximationen durch analytische Funktionen.  
 •  *$f_1, f_2$  non analytiques: Argumenter avec approximations par fonctions analytiques.*
- Wegen  $D_f = \mathbb{R}_0^+$  spielt das Verhalten von  $f$  auf  $\mathbb{R}^-$  keine Rolle.  
 • *À cause de  $D_f = \mathbb{R}_0^+$ , le comportement de  $f$  sur  $\mathbb{R}^-$  n'importe pas.*

### 3.3 Aufbau des Kalküls — Construction de la théorie formalisée

#### 3.3.1 Elementare Regeln — Règles élémentaires

##### 1. Beispiel: • Exemple 1:

$$f(t) = e^{a \cdot t} \Rightarrow F(s) = \int_0^\infty e^{-s \cdot t} \cdot e^{a \cdot t} dt = \int_0^\infty e^{(a-s) \cdot t} dt = \frac{e^{(a-s) \cdot t}}{a-s} \Big|_0^\infty = \frac{1}{a-s} (\lim_{t \rightarrow \infty} e^{(a-s) \cdot t} - e^0)$$

$$\text{Sei } \bullet \text{ Soit } \operatorname{Re}(a-s) < 0 \text{ oder } \bullet \text{ ou } \operatorname{Re}(a) < \operatorname{Re}(s) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e^{(a-s) \cdot t} = 0 \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s-a}$$

##### 2. Beispiel: • Exemple 2: $f(t) = c \cdot t^n, n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow F(s) = c \cdot \int_0^\infty e^{-s \cdot t} \cdot t^n dt = -\frac{c}{s} \cdot e^{-s \cdot t} \cdot t^n \Big|_0^\infty + \frac{n \cdot c}{s} \cdot \int_0^\infty e^{-s \cdot t} \cdot t^{n-1} dt = \frac{n \cdot c}{s} \cdot \int_0^\infty e^{-s \cdot t} \cdot t^{n-1} dt$$

für • pour  $\operatorname{Re}(s) > 0$

$$\text{Iteration: } \bullet \text{ Itération: } \Rightarrow F(s) = \frac{n(n-1) \cdot c}{s^2} \cdot \int_0^\infty e^{-s \cdot t} \cdot t^{n-2} dt = \dots = \frac{n! \cdot c}{s^n} \cdot \int_0^\infty e^{-s \cdot t} \cdot t^{n-n} dt =$$

$$= \frac{n! \cdot c}{s^n} \cdot \int_0^\infty e^{-s \cdot t} dt = \frac{n! \cdot c}{s^n \cdot (-s)} e^{-s \cdot t} \Big|_{t=0}^\infty = \frac{n! \cdot c}{s^{n+1}} \Rightarrow F(s) = \frac{n! \cdot c}{s^{n+1}} \text{ für } \bullet \text{ pour } \operatorname{Re}(s) > 0$$

##### 3. Beispiel: • Exemple 3: $f(t) = \sin(\omega \cdot t) \Rightarrow$

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega \cdot t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-s \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) dt = -\frac{1}{s} e^{-s \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) \Big|_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-s \cdot t} \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) dt$$

$$= \frac{\omega}{s} \int_0^\infty e^{-s \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t) dt = \frac{\omega}{s} \mathcal{L}\{\cos(\omega \cdot t)\} = 0 + \frac{\omega}{s} \left( -\frac{1}{s} e^{-s \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t) \Big|_0^\infty - \frac{\omega}{s} \int_0^\infty e^{-s \cdot t} \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) dt \right)$$

$$= \frac{\omega}{s} \left( \frac{1}{s} - \frac{\omega}{s} F(s) \right) = \frac{\omega}{s^2} - \frac{\omega^2}{s^2} F(s) \Rightarrow F(s) = \frac{\omega}{s^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{s^2}} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \text{ für } \bullet \text{ pour } \operatorname{Re}(s) > 0$$

$$\Rightarrow F(s) = \mathcal{L}\{\sin(\omega \cdot t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{s} \mathcal{L}\{\cos(\omega \cdot t)\} \Rightarrow \mathcal{L}\{\cos(\omega \cdot t)\} = \frac{s \omega}{\omega(s^2 + \omega^2)} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

für • pour  $\operatorname{Re}(s) > 0$

Damit kennen wir einige Transformationen elementarer Funktionen. Die Transformationen vieler anderer gebräuchlicher Funktionen lassen sich mit Hilfe von Regeln aus diesen Elementartransformationen ableiten. • *Ainsi nous connaissons quelques transformations de fonctions élémentaires. Les transformations d'un tas d'autres fonctions usuelles peuvent être dérivées à l'aide de règles et de ces transformations élémentaires.*

**Regeln: • Règles:**

- (1)  $e^{a \cdot t} \circ \bullet \frac{1}{s-a}$  für • pour  $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a)$
- (2)  $c \cdot t^n \circ \bullet \frac{n! \cdot c}{s^{n+1}}$  für • pour  $\operatorname{Re}(s) > 0$
- (3)  $\sin(\omega \cdot t) \circ \bullet \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$  für • pour  $\operatorname{Re}(s) > 0$
- (4)  $\cos(\omega \cdot t) \circ \bullet \frac{s}{s^2 + \omega^2}$  für • pour  $\operatorname{Re}(s) > 0$

**Korollar:** • **Corollaire:**

$$(2') \quad c \circ \bullet \frac{c}{s} \quad \text{für} \quad \bullet \quad \text{pour } \operatorname{Re}(s) > 0$$

$$(2'') \quad 0 \circ \bullet 0 \quad (\text{Spezialfall}) \quad \bullet \quad (\text{Cas spécial})$$

$$(2''') \quad t \circ \bullet \frac{1}{s^2} \quad \text{für} \quad \bullet \quad \text{pour } \operatorname{Re}(s) > 0$$

### 3.3.2 Linearitätsregeln — Linéarité

Aus der Linearität des Integraloperators folgt sofort die Linearität der Laplace-Transformation.  
 • *De la linéarité de l'opérateur d'intégrale on déduit tout de suite la linéarité de la transformation.*

**Satz:** • **Théorème:**      **Vor.:** • **Hyp.:**

$$f_1 \circ \bullet F_1, \quad f_2 \circ \bullet F_2, \\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$$

**Beh.:** • **Thè.:**

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \circ \bullet \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 \quad \text{resp.} \quad \bullet \quad \text{resp.} \\ \mathcal{L}\{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2\} = \lambda_1 \mathcal{L}\{f_1\} + \lambda_2 \mathcal{L}\{f_2\}$$

**Konsequenz:** • **Conséquence:**

$$f(t) = \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} e^{-t} \circ \bullet \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-1} = \frac{1}{s^2 - 1}$$

**Regel:** • **Règle:**      (4)       $\sinh(t) \circ \bullet \frac{1}{s^2 - 1} \quad \text{für} \quad \bullet \quad \text{pour } \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(\alpha) = 1$

### 3.3.3 Streckung im Urbildbereich — Extension dans le domaine de définition

$$\tau := \lambda t, \quad \lambda > 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{f(\lambda t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(\lambda t) dt = \int_0^\infty e^{-s \frac{\tau}{\lambda}} \cdot f(\tau) \frac{d\tau}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-(\frac{s}{\lambda}) \cdot \tau} \cdot f(\tau) d\tau = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{s}{\lambda}\right)$$

$$\Rightarrow f(\lambda t) \circ \bullet \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{s}{\lambda}\right)$$

**Regel:** • **Règle:**      **Vor.:** • **Hyp.:**       $f(t) \circ \bullet F(s), \quad \lambda > 0$

**Beh.:** • **Thè.:**       $f(\lambda t) \circ \bullet \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{s}{\lambda}\right)$

**Bsp.:** • **Exemple:**       $\sinh(8t) \circ \bullet \frac{1}{8} \frac{64}{s^2 - 64} = \frac{8}{s^2 - 64}$

## 3.3.4 Differentiationsregel — Règle de la dérivation (différentiation)

Regel: • Règle:

Vor.: • Hyp.:

$$f(t) \circ \bullet F(s)$$

Beh.: • Thè.:

$$\begin{aligned} (1) \quad & f'(t) \circ \bullet s \cdot F(s) - f(0^+), \\ & f(0^+) = \lim_{t \downarrow 0} f(t) \\ (2) \quad & f''(t) \circ \bullet s^2 \cdot F(s) - s f(0^+) - f'(0^+) \\ & \vdots \\ (n) \quad & f^{(n)}(t) \circ \bullet s^n \cdot F(s) - s^{(n-1)} f(0^+) - \\ & s^{(n-2)} f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+) \end{aligned}$$

Zum Beweis: • Quant à la preuve:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'\} &= \int_0^\infty e^{-st} \cdot f'(t) dt = e^{-st} \cdot f(t) \Big|_0^\infty + s \cdot \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} \cdot f(t) - \lim_{t \downarrow 0} e^{-st} \cdot f(t) + s \cdot F(s) \\ &= 0 - e^0 \cdot f(0^+) + s \cdot F(s) \end{aligned}$$

Ebenso für: • *De même pour* :  $f'', \dots, f^{(n)}(t)$ .Symbol: • Symbole:  $f(0)$  existiert •  $existe \rightsquigarrow f(0^+) := f(0)$ , sonst • *si non*  $f(0^+) := \lim_{t \downarrow 0} f(t)$ .

$$\begin{aligned} \text{Bsp.:} \quad & \bullet \text{Exemple: } f'(t) = \cos(\omega t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right), \quad f(t) = \sin(\omega t) \circ \bullet \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\ \Rightarrow \quad & f'(t) = \cos(\omega t) \circ \bullet s \cdot \frac{1}{\omega} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - \frac{1}{\omega} \sin(\omega \cdot 0^+) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} - 0 = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

## 3.3.5 Anwendung auf eine D'Gl — Application pour une éq.diff.

AWP • PVI:  $y'' + \omega^2 y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ Sei • *Soit*  $y(t) \circ \bullet Y(s)$ 

$$\begin{aligned} \Rightarrow y'' + \omega^2 y = 0 \circ \bullet s^2 Y(s) - y(0^+) \cdot s - y'(0^+) + \omega^2 Y(s) &= s^2 Y(s) - 1 \cdot s - 0 + \omega^2 Y(s) = 0 \\ & \text{(wegen } \bullet \text{ à cause de } 0 \circ \bullet 0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Y(s)(s^2 + \omega^2) = s, \quad Y(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \bullet \circ y(t) = \cos(\omega t)$$

 $\rightsquigarrow$  Lösung: • Solution:  $y(t) = \cos(\omega t)$ 

## 3.3.6 Integrationsregel — Règle d'intégration

Als Umkehrung der Differentiationsregel erhalten wir die Integrationsregel:

• *Du renversement de règle de la dérivation (différentiation) résulte la règle d'intégration:*

$$\text{Sei } \bullet \text{ Soit } g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \circ \bullet G(s), \quad f(t) \circ \bullet F(s) \rightsquigarrow G(s) = ?$$

$$\rightsquigarrow g'(t) = f(t) \bullet \circ F(s) \wedge g'(t) = f(t) \bullet \circ s \cdot G(s) - g(0^+) = s \cdot G(s) \Rightarrow F(s) = s \cdot G(s)$$

Regel: • Règle:

Vor.: • Hyp.:

$$f(t) \circ \bullet F(s)$$

Beh.: • Thè.:

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \circ \bullet \frac{F(s)}{s}$$

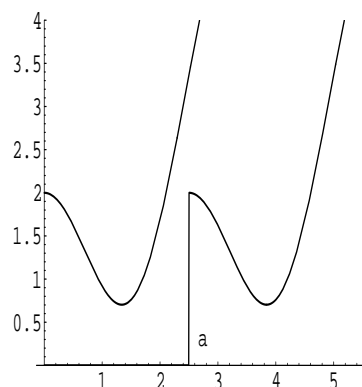
Bsp.: • Exemple: (Integralgleichung • Equation d'intégrale)

$$\begin{aligned} \int_0^t y(\tau) d\tau = y(t) + 1 &\circ \bullet \frac{Y(s)}{s} = Y(s) + \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s) \left( \frac{1}{s} - 1 \right) = \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s) \left( \frac{1-s}{s} \right) = \frac{1}{s} \\ \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{1-s} = \frac{-1}{s-1} &\bullet \circ y(t) = -e^t \leadsto \text{Lösung: } \bullet \text{Solution: } y(t) = -e^t \end{aligned}$$

## 3.3.7 Verschiebungssätze — Théorème de retard

A Verschobene Originalfunktion: • Fonction originale déplacée:

$$f(t) \mapsto \tilde{f}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq a \\ f(t-a) & t > a > 0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\tilde{f}(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} \cdot \tilde{f}(t) dt = \int_a^\infty e^{-st} \cdot \tilde{f}(t) dt = \int_a^\infty e^{-st} \cdot f(t-a) dt = \int_0^\infty e^{-s(\tau+a)} \cdot f(\tau) d\tau \\ &= e^{-sa} \int_0^\infty e^{-s\tau} \cdot f(\tau) d\tau = e^{-sa} \cdot F(s) \end{aligned}$$

Regel: • Règle:

Vor.: • Hyp.:

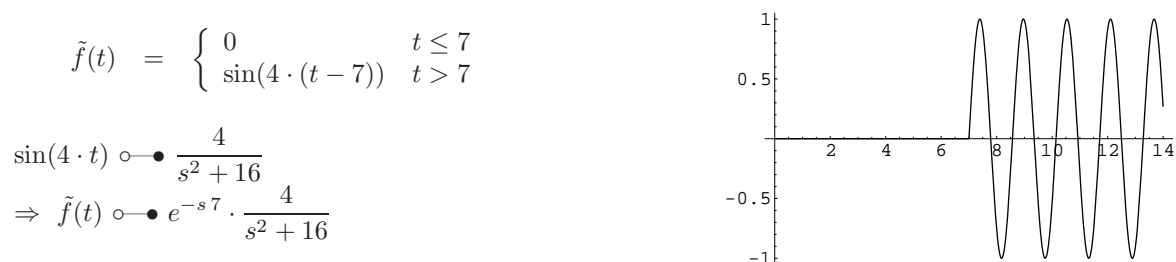
$$f(t) \circ \bullet F(s), \quad \tilde{f}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq a \\ f(t-a) & t > a > 0 \end{cases}$$

Beh.: • Thè.:

$$\tilde{f}(t) \circ \bullet e^{-sa} \cdot F(s)$$

Bsp.: • Exemple:



**B Verschobene Bildfunktion: • Fonction image déplacée:**

$\leadsto$  Exponentielle Dämpfung • *Affaiblissement exponentiel*

Sei • *Soit*  $\mathcal{L}\{e^{c \cdot t} \cdot f(t)\} = \int_0^\infty e^{-s \cdot t} \cdot e^{c \cdot t} \cdot f(t) dt = \int_0^\infty e^{(c-s) \cdot t} \cdot f(t) dt = \int_0^\infty e^{-(s-c) \cdot t} \cdot f(t) dt$   
 $= \int_0^\infty e^{-\tilde{s} \cdot t} \cdot f(t) dt = F(\tilde{s}) = F(s - c)$  für • *pour*  $\operatorname{Re}(s - c) > 0$

**Regel:** • **Règle:**      **Vor.:** • **Hyp.:**       $f(t) \circ \bullet F(s), \quad c \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(s - c) > 0, \quad s \in \mathbb{C}$

**Beh.:** • **Thè.:**       $e^{c \cdot t} \cdot f(t) \circ \bullet F(s - c)$

**Bsp.:** • **Exemple:**  $e^{c \cdot t} \cdot f(t) = e^{c \cdot t} \cdot \sin(\omega t) \circ \bullet \frac{\omega}{(s - c)^2 + \omega^2}$

**3.3.8 Multiplikationsregel — Règle de la multiplication**

(Auch Differentiationsregel der Bildfunktion • *Aussi règle de la différentiation de la fonction image*)

Sei  $f$  eine vernünftige Funktion, z.B. stetig: • *Soit  $f$  une fonction raisonnable, p.ex. continue:*

$$-\frac{dF(s)}{ds} = -\frac{d}{ds} \left( \int_0^\infty e^{-s \cdot t} \cdot f(t) dt \right) = -\int_0^\infty \frac{d e^{-s \cdot t}}{ds} \cdot f(t) dt = -\int_0^\infty e^{-s \cdot t} \cdot (-t) \cdot f(t) dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-s \cdot t} \cdot (t \cdot f(t)) dt = \mathcal{L}\{t \cdot f(t)\}$$

**Regel:** • **Règle:**      **Vor.:** • **Hyp.:**

$f(t) \circ \bullet F(s), \quad f \text{ zulässig} \quad \bullet \quad f \text{ raisonnable}$

**Beh.:** • **Thè.:**

$t^n \cdot f(t) \circ \bullet (-1)^n \cdot \frac{d^n F(s)}{ds^n}$

**Korollar:** • **Corollaire:****Vor.:** • **Hyp.:** $f_n(t) \circ \bullet F_n(s)$ ,  $f_n$  zulässig •  $f_n$  raisonnable**Beh.:** • **Thè.:**

$$\sum_{n=0}^N f_n(t) \cdot t^n \circ \bullet \sum_{n=0}^N (-1)^n \cdot \frac{d^n F_n(s)}{d s^n}$$

**Beispiele:** • **Exemples:**

$$(1) \quad t \cdot \sin(t) \circ \bullet - \frac{d \frac{1}{s^2+1}}{d s} = \frac{2 s}{(s^2+1)^2}$$

$$(2) \quad t^n \cdot e^{a \cdot t} \circ \bullet (-1)^n \frac{d^n \frac{1}{s-a}}{d s^n} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

Analog zur Multiplikationsregel gibt es auch eine Divisionsregel: • *Analoguement à la règle de la multiplication il existe aussi une règle de la division:*

### 3.3.9 Divisionsregel — Règle de la division

Betrachte: • *Etudier:*  $f(t) \circ \bullet F(s)$ ,

$$\int_s^\infty F(\tau) d\tau = \int_s^\infty \left( \int_0^\infty e^{-\tau t} \cdot f(t) dt \right) d\tau = \int_0^\infty \left( \int_s^\infty e^{-\tau t} \cdot f(t) d\tau \right) dt = \int_0^\infty \left( -\frac{1}{t} e^{-\tau t} \cdot f(t) \Big|_{\tau=s}^{\tau=\infty} \right) dt$$

Sei • *Soit*  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{e^{-\tau t} \cdot f(t)}{t} = 0$ 

$$\Rightarrow \int_s^\infty F(\tau) d\tau = \int_0^\infty e^{-\tau s} \cdot \frac{f(t)}{t} dt = \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} \text{ falls } \bullet \text{ si } \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(t)}{t} \text{ existiert } \bullet \text{ existe}$$

**Regel:** • **Règle:****Vor.:** • **Hyp.:**

$$f(t) \circ \bullet F(s),$$

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{f(t)}{t} \text{ existiert } \bullet \text{ existe}$$

**Beh.:** • **Thè.:**

$$\frac{f(t)}{t} \circ \bullet \int_s^\infty F(\tau) d\tau$$

$$\text{Bsp.: } \bullet \text{ Exemple: } f(t) = \sin(t) \circ \bullet F(s) = \frac{1}{s^2+1}, \quad \lim_{t \downarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(t)}{t} \circ \bullet \int_s^\infty \frac{1}{\tau^2+1} d\tau = \arctan(\tau) \Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan(s) = \arctan\left(\frac{1}{s}\right)$$

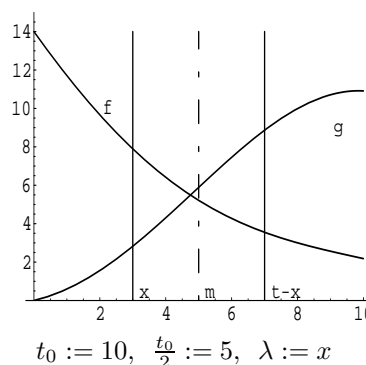
### 3.3.10 Faltung — Plissement

**Definition:** • **Définition:**

$$f(t) * g(t) := \int_0^t f(\lambda) \cdot g(t-\lambda) d\lambda \text{ heisst } \mathbf{Faltung}^4 \text{ von } f \text{ und } g.$$

• *s'appelle plissement*<sup>4</sup> (*convolution*) *de } f \text{ et } g.*

Sei das Koordinatensystem auf dem Rand eines Blattes Papier aufgetragen. Die Senkrechte  $m$  auf die  $t$ -Achse gehe durch  $\frac{t_0}{2}$ . Falls man bei fixem  $t_0$  das Papier mit dem Graphen längs  $m$  faltet, so liegen die Funktionswerte  $g(t_0 - \lambda)$  und von  $f(\lambda)$  auf derselben Ordinate. • *Soit le système de coordonnées tracé sur le bord d'une feuille de papier. Le papier avec le graphe va être plié longitudinalement la verticale  $m$  par  $\frac{t_0}{2}$  sur l'axe  $t$ . Ainsi les valeurs de fonction  $g(t_0 - \lambda)$  et  $f(\lambda)$  sont sur la même ordonnée.*



**Regel:** • **Règle:**

**Vor.:** • **Hyp.:**

$$f(t) \circ \bullet F(s), \quad g(t) \circ \bullet G(s)$$

**Beh.:** • **Thè.:**

$$f(t) * g(t) \circ \bullet F(s) \cdot G(s)$$

**Bemerkung:** • **Remarque:**

1. Diese Regel ermöglicht eine Rücktransformation von Produkten. • *Cette règle facilite une transformation inverse de produits.*

2. **Achtung:** • **Attention:**

$$f(t) \equiv g(t) \equiv 1 \circ \bullet F(s) \equiv G(s) \equiv \frac{1}{s}, \quad F(s) \cdot G(s) \equiv \frac{1}{s^2}$$

$$f(t) \cdot g(t) = 1 \circ \bullet \frac{1}{s}$$

$$f(t) \cdot g(t) \neq t \circ \bullet F(s) \equiv G(s) \equiv \frac{1}{s^2}$$

**Zum Beweis:** • **Quant à la preuve:**

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \int_0^\infty e^{-st} \left( \int_0^t f(\lambda) \cdot g(t - \lambda) d\lambda \right) dt = \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(\lambda) \cdot g(t - \lambda) d\lambda dt \rightsquigarrow 0 \leq \lambda \leq t \rightsquigarrow D$$

Satz von Fubini:  $\rightsquigarrow$  Möglichkeiten:

1) Erst über  $\lambda$  von 0 bis  $t$  integrieren und anschließend über  $t$  — oder:

2) Erst über  $t$  von  $\lambda$  bis  $\infty$  integrieren und anschließend über  $\lambda$ .

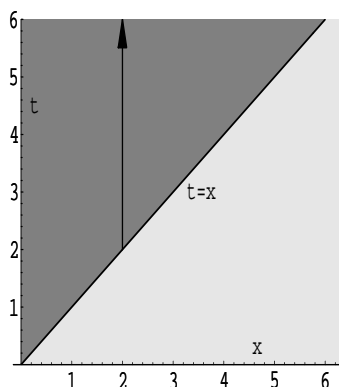
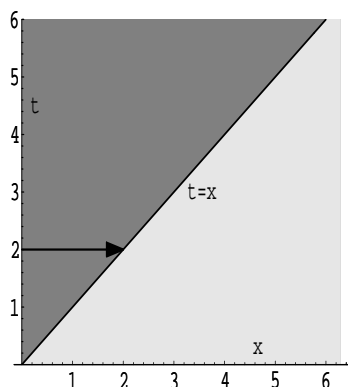
• *Théorème de Fubini:  $\rightsquigarrow$  Possibilités:*

1) *D'abord intégrer sur  $\lambda$  de 0 à  $t$  et ensuite sur  $t$  — ou:*

2) *D'abord intégrer sur  $t$  de  $\lambda$  à  $\infty$  et ensuite sur  $\lambda$ .*

---

<sup>4</sup>Von • de Emilie Borel, 1871 – 1956



$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \mathcal{L}\{f * g\} &= \int_0^\infty \int_\lambda^\infty e^{-st} f(\lambda) \cdot g(t-\lambda) dt d\lambda = \int_0^\infty f(\lambda) \cdot \left( \int_\lambda^\infty e^{-st} \cdot g(t-\lambda) dt \right) d\lambda \\
 &= \int_0^\infty f(\lambda) \cdot \left( \int_0^\infty e^{-s(\tau+\lambda)} \cdot g(\tau) d\tau \right) d\lambda = \int_0^\infty f(\lambda) \cdot e^{-\lambda s} \cdot \left( \int_0^\infty e^{-s\tau} \cdot g(\tau) d\tau \right) d\lambda = \int_0^\infty f(\lambda) \cdot e^{-\lambda s} \cdot G(s) d\lambda \\
 &= G(s) \cdot \int_0^\infty f(\lambda) \cdot e^{-\lambda s} d\lambda = G(s) \cdot F(s)
 \end{aligned}$$



**Bsp.:** • **Exemple:** Bekannt: • *On sait:*  $\sin(t) \circ \bullet \frac{1}{s^2 + 1}$

**Problem:** • **Problème:**  $\frac{1}{s^2 + 1} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} = \frac{1}{(s^2 + 1)^2} \bullet \circ ?$

Mit Faltung: • *A l'aide du plissement:*

$$\frac{1}{(s^2 + 1)^2} \bullet \circ \sin(t) * \sin(t) = \int_0^t \sin(\lambda) \cdot \sin(t-\lambda) d\lambda = \frac{1}{2} (\sin(t) - t \cdot \cos(t))$$

**Bemerkung:** • **Remarque:**

Fast überall identische zulässige Funktionen haben fast überall identische Faltungen. Die Transformaten der Faltungsprodukte sind identisch. • *Les fonctions qui sont presque partout identiques et admissibles ont des plissements presque partout identiques. Les transformés des produits de plissement sont identiques.*

**Symbol:** • **Symbole:** Um eine fast bijektive Transformation besonders zu kennzeichnen, benutzen wir die Symbole  $\circ \sim \bullet$ ,  $\bullet \sim \circ$ . Für fast identisch schreiben wir  $\simeq$ . • *Pour marquer particulièrement une transformation presque bijective, nous utilisons les symboles  $\circ \sim \bullet$ ,  $\bullet \sim \circ$ . Pour presque identique nous utilisons  $\simeq$ .*

Eine Betrachtung: • *Nous étudions:*

1.  $f * g \circ \sim \bullet F \cdot G = G \cdot F \bullet \sim \circ g * f \Rightarrow f * g \simeq g * f$
2.  $(f * g) * h \circ \sim \bullet \mathcal{L}\{f * g\} \cdot H = (F \cdot G) \cdot H = F \cdot (G \cdot H) \bullet \sim \circ f * (g * h) \Rightarrow (f * g) * h \simeq f * (g * h)$
3.  $f * (g + h) \circ \sim \bullet F \cdot \mathcal{L}\{f + h\} = F \cdot (G + H) = F \cdot G + F \cdot H \bullet \sim \circ f * g + f * h \Rightarrow f * (g + h) \simeq f * g + f * h$

**Satz: • Théorème:** Im Sinne von „fast identisch“ gilt für das Faltungsprodukt: • *Dans le sens de "presque identique", il vaut pour le produit de plissement:*

1.  $f * g \simeq g * f$  (Kommutativität • *commutativité*)
2.  $(f * g) * h \simeq f * (g * h)$  (Assoziativität • *associativité*)
3.  $f * (g + h) \simeq f * g + f * h$  (Distributivität • *distributivité*)

**Bsp.: • Exemple:** Integralgleichung: • *Equation d'intégrale:*

$$t^2 + \int_0^t y(\lambda) \cdot \sin(t - \lambda) d\lambda = y(t) \circ \bullet \frac{2}{s^3} + Y(s) \cdot \frac{1}{s^2 + 1} = Y(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{2}{s^3} \cdot \frac{s^2 + 1}{s^2} = 2 \frac{s^2 + 1}{s^5} = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^5} \bullet \circ y(t) \simeq t^2 + \frac{t^4}{12}$$

(Für die Eindeutigkeit von  $y$  kann man z.B. Stetigkeit verlangen...)

• *Pour l'univocité d'y on peut demander p.ex. la continuité.*

### 3.3.11 Periodische Funktionen — Fonctions périodiques

Periodische Funktionen sind vor allem in der Elektrotechnik häufig anzutreffen...

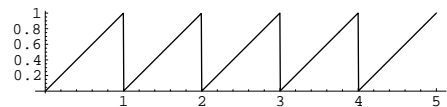
• *On trouve des fonctions périodiques souvent en particulier dans l'électrotechnique...*

**Bsp.: • Exemple:**

$$f(t) = f(t + nT), \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t) dt = \int_0^T e^{-st} \cdot f(t) dt +$$

$$+ \int_T^{2T} e^{-st} \cdot f(t) dt + \int_{2T}^{3T} e^{-st} \cdot f(t) dt + \dots$$



Allgemeiner Summand: • *Terme général de la somme:*  $t := \tau + nT$

$$\tau = t - nT \Rightarrow \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} \cdot f(t) dt = \int_0^T e^{-s(\tau+nT)} \cdot f(\tau+nT) d\tau = e^{-snT} \int_0^T e^{-s\tau} \cdot f(\tau) d\tau =$$

$$= (e^{-sT})^n \int_0^T e^{-s\tau} \cdot f(\tau) d\tau := \rho(s)^n \cdot \varphi(s)$$

$$\Rightarrow F(s) = \varphi(s) \cdot (1 + \rho(s) + \rho(s)^2 + \rho(s)^3 + \dots) = \varphi(s) \cdot \frac{1}{1 - \rho(s)} \quad \text{für} \quad \bullet \quad \text{pour } |\rho(s)| < 1$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{1}{1 - \rho(s)} \cdot \int_0^T e^{-s\tau} \cdot f(\tau) d\tau \quad \text{für} \quad \bullet \quad \text{pour } |e^{-sT}| = e^{-\operatorname{Re}(s)T} < 1, \text{ d. h. } \bullet \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > 0$$

Regel: • Règle:

Vor.: • Hyp.:

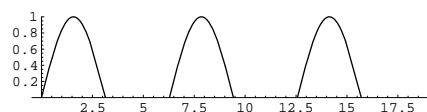
$f(t)$   $T$ -periodisch • *périodique avec  $T$ ,*  
 $t \geq 0, f(t) \circ \bullet F(s), \operatorname{Re}(s) > 0$   
 $\rho(s) = e^{-sT}$

Beh.: • Thè.:

$$F(s) = \frac{1}{1 - \rho(s)} \cdot \int_0^T e^{-s\tau} \cdot f(\tau) d\tau$$

Bsp.: • Exemple:

$$f(t) = \begin{cases} \sin(t) & t \in [0, \pi] \\ 0 & t \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$$



$$f(t) = f(t + 2n\pi), \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \int_0^{2\pi} e^{-s\tau} \cdot \sin(\tau) d\tau = \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \cdot \frac{e^{-st}(-s \sin(t) - \cos(t))}{s^2 + 1} \Big|_{t=0}^{t=2\pi} \\ &= \frac{1}{(1 - e^{-\pi s})(1 + e^{-\pi s})} \cdot \frac{1 + e^{-\pi s}}{s^2 + 1} = \frac{1}{(1 - e^{-\pi s})(s^2 + 1)} \end{aligned}$$

### 3.3.12 Anfangs- und Endwerte — Valeurs initiales et finales

Wir wollen hier den Zusammenhang von  $f(t)$  und  $F(s)$  für  $s \rightarrow \infty$  und  $s \downarrow 0$  studieren.

• Ici nous voulons étudier le rapport entre  $f(t)$  et  $F(s)$  pour  $s \rightarrow \infty$  et  $s \downarrow 0$ .

Sei  $s \in \mathbb{C}$  zulässig für die Existenz von  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ . Ebenso existiere  $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ .

• Soit  $s \in \mathbb{C}$  admissible pour l'existence de  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ . En outre soit que  $\mathcal{L}\{f'(t)\}$  existe.

Sei  $\langle s_n \rangle$  eine beliebige zulässige Folge mit  $s_n \rightarrow \infty$ . Falls für alle solche  $\langle s_n \rangle$  gilt:  $e^{-s_n \cdot t} \cdot f'(t)$  konvergiert gleichmäßig auf  $[0, \infty]$ , so darf die nachfolgende Grenzwertrelation gliedweise integriert werden:

• Soit  $\langle s_n \rangle$  une suite quelconque et admissible avec la qualité  $s_n \rightarrow \infty$ . S'il vaut pour toutes les suites  $\langle s_n \rangle$  de ce genre: l'expression  $e^{-s_n \cdot t} \cdot f'(t)$  converge de façon uniforme sur  $[0, \infty]$ , on peut intégrer la relation limite suivante terme par terme:

$$0 = 0 \cdot f'(t) = e^{-\infty} \cdot f'(t) = e^{-t \cdot (\lim_{n \rightarrow \infty} s_n)} \cdot f'(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-s_n \cdot t} \cdot f'(t)$$

Das wenden wir auf die Differentiationsregel an: • Nous appliquons celà à la règle de différentiation:

$$\begin{aligned} s_n \cdot F(s_n) &= \int_0^\infty e^{-s_n t} \cdot f'(t) dt + f(0^+) \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \cdot F(s_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_0^\infty e^{-s_n t} \cdot f'(t) dt + f(0^+) \right) = \int_0^\infty \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-s_n t} \cdot f'(t) dt + f(0^+) \\ &= \int_0^\infty e^{-\infty} \cdot f'(t) dt + f(0^+) = \int_0^\infty 0 \cdot f'(t) dt + f(0^+) = 0 + f(0^+) = f(0^+) = \lim_{t \downarrow 0} f(t) \end{aligned}$$

Unter denselben Voraussetzungen erhalten wir: • Sous les mêmes conditions initiales nous obtenons:

$$\begin{aligned} \lim_{s_n \downarrow 0} s_n \cdot F(s_n) &= \lim_{s_n \downarrow 0} \left( \int_0^\infty e^{-s_n t} \cdot f'(t) dt + f(0^+) \right) = \int_0^\infty \lim_{s_n \downarrow 0} e^{-s_n t} \cdot f'(t) dt + f(0^+) = \int_0^\infty e^0 \cdot f'(t) dt + f(0^+) \\ &= \int_0^\infty f'(t) dt + f(0^+) = f(t) \Big|_0^\infty + f(0^+) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0^+) + f(0^+) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \end{aligned}$$

**Regel:** • Règle:**Vor.:** • **Hyp.:**

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ ,  $\mathcal{L}\{f'(t)\}$  existiert • *existe*  
 $s, s_n \in \mathbb{C}$  zulässig

• *admissible*

Die verwendeten Grenzwerte existieren

• *Les valeurs limites utilisées existent*

$\forall \langle s_n \rangle, s_n \rightarrow \infty$  :  $e^{-s_n \cdot t} \cdot f'(t)$  konvergiert  
 gleichmässig auf • *converge de façon uniforme*  
 sur  $[0, \infty]$

**Beh.:** • **Thè.:**

$$(1) \quad \lim_{s_n \downarrow 0} s_n \cdot F(s_n) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$$

$$(2) \quad \lim_{s_n \rightarrow \infty} s_n \cdot F(s_n) = \lim_{t \downarrow 0} f(t)$$

**Konsequenz:** • **Conséquence:** Wenn man das Verhalten einer Lösung  $y(t)$  einer D'Gl für grosse  $t$  abschätzen will und  $Y(s)$  berechnet werden kann, so macht diese Regel die Rücktransformation  $Y \bullet \circ y$  unnötig. Die Erfahrung zeigt, dass oft gerade diese Rücktransformation Probleme bringt.

• *Si on veut évaluer le comportement d'une solution  $y(t)$  d'une éq.diff. pour des valeurs  $t$  qui sont grandes et si  $Y(s)$  peut être calculée, cette règle rend ainsi la transformation inverse  $Y \bullet \circ y$  inutile. L'expérience montre que souvent exactement cette transformation inverse pose des problèmes.*

**Beispiele:** • **Exemples:**

Wir wissen: • *Nous savons:*  $e^{at} \circ \bullet \frac{1}{s-a}$  für • *pour  $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a)$ .*

Sei • *Soit*  $a = 1 \Rightarrow f(t) = e^t \circ \bullet \frac{1}{s-1}$

$$1. \quad \lim_{s_n \rightarrow \infty} s_n \cdot F(s_n) = \lim_{s_n \rightarrow \infty} s_n \cdot \frac{1}{s_n - 1} = \lim_{s_n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{s_n}} = 1 = e^0 = \lim_{t \downarrow 0} e^t \quad \text{☺}$$

$$2. \quad \lim_{s_n \downarrow 0} s_n \cdot F(s_n) = \lim_{s_n \downarrow 0} s_n \cdot \frac{1}{s_n - 1} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^t = \infty \neq 0 \Rightarrow ?? \quad \text{☹}$$

Wieso stimmt im zweiten Beispiel die Sache nicht? — Ist die Regel trotz aller Logik falsch?

• *Pourquoi la chose ne tient-elle pas dans le deuxième exemple? – Est-ce que la règle est fausse malgré toute la logique?*

**Erklärung:** • **Explication:**

$\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a)$  bedeutet hier  $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(1)$ . Dann bilden wir später  $\lim_{s \downarrow 0} s_n \cdot F(s_n)$ . Damit gerät aber  $s_n$  in einen nicht zulässigen Bereich. Eine Voraussetzung ist verletzt, und die Regel ist hier gar nicht anwendbar! Man sieht hier eindrucklich, wie wichtig die Beachtung von Voraussetzungen sind...

• Ici,  $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a)$  signifie  $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(1)$ . Ensuite nous calculons  $\lim_{s \downarrow 0} s_n \cdot F(s_n)$ . Ainsi  $s_n$  est situé dans un domaine non-admissible. Une hypothèse est violée, et la règle n'est pas du tout applicable dans ce cas! On voit donc de manière frappante l'importance des hypothèses...

3. Sei • Soit  $a = -1 \Rightarrow f(t) = e^{-t} \circ \bullet \frac{1}{s+1}$ ,  $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(-1)$ ,  $0 = \lim_{s_n \downarrow 0} s_n \not\leq -1$

Die oben verletzte Voraussetzung ist hier also erfüllt.

• La condition violée en haut est satisfaite maintenant.

$$\leadsto \lim_{s \downarrow 0} s_n \cdot F(s_n) = \lim_{s \downarrow 0} s_n \cdot \frac{1}{s_n + 1} = 0 = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \quad \text{☺}$$

### 3.3.13 Transformation einiger rationaler Funktionen — Transformation de quelques fonctions rationnelles

**Formeln — Formules**

Seien • Soient  $\Phi := \frac{C - B \cdot p}{\omega}$ ,  $\omega := \sqrt{q - p^2}$

Ohne Herleitung ist nachfolgend eine Auswahl von Rücktransformationen aufgelistet. Der Leser kann die Formeln kontrollieren durch Transformation der rechten Seite. Man kann sich die Sache allerdings auch einfach machen, indem man mit Hilfe eines Computeralgebra-Programms (z.B. Mathematica) die Laplace-Integrale der rechten Seite rechnet... • *Consécutivement on voit une liste choisie de transformations inverses. Le lecteur peut contrôler les formules par la transformation du côté droit. On peut en effet aussi simplifier la chose en utilisant un programme d'algèbre sur ordinateur (par exemple Mathematica) pour calculer les intégrales de Laplace du côté droit.*

**Regeln: • Règles:**

1.  $\frac{Bs + C}{s^2 + 2ps + q} \circ \bullet e^{-p \cdot t} (\Phi \sin(\omega t) + B \cdot \cos(\omega t))$
2.  $\frac{Bs + C}{(s^2 + 2ps + q)^2} \circ \bullet e^{-p \cdot t} \left( \left( \frac{B \cdot t}{2\omega} + \frac{\Phi}{2\omega^2} \right) \Phi \sin(\omega t) - \frac{\Phi}{2\omega^2} \cdot t \cdot \cos(\omega t) \right)$
3.  $\frac{Bs + C}{(s^2 + 2ps + q)^3} \circ \bullet \frac{e^{-p \cdot t}}{8\omega^3} \cdot \sin(\omega t) \cdot (B \cdot t + \Phi \cdot \left( \frac{3}{\omega} - \omega^2 \cdot t - (B \cdot \omega \cdot t^2 + 3\Phi \cdot \omega \cdot t) \cdot \cos(\omega t) \right))$

**Bemerkung: • Remarque:**

Die Erfahrung zeigt, dass bei D'Gl  $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$  häufig rational wird. Auch führt die Transformation einer linearen D'Gl mit konstanten Koeffizienten (AWP) immer auf einen Ausdruck der Form  $Y(s) \cdot P(s) = F(s) + Q(s)$ ,  $P(s), Q(s)$  Polynome. Damit muss  $\frac{Q(s)}{P(s)}$  rücktransformiert werden.

• *L'expérience montre que l'éq.diff.  $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$  devient souvent rationnelle. De même la transformation d'une éq.diff linéaire aux coefficients constants (PVI) mène toujours à une expression de la forme  $Y(s) \cdot P(s) = F(s) + Q(s)$ ,  $P(s), Q(s)$  polynômes. On doit donc trouver la transformée inverse de  $\frac{Q(s)}{P(s)}$ .*

Wir kennen bereits die Rücktransformationen folgender Ausdrücke:

• *Nous connaissons déjà les transformées inverses des expressions suivantes:*



$$\frac{c}{s^n}, \quad \frac{c}{(s-a)^n}, \quad \frac{\omega \cdot c}{s^2 + \omega^2}, \quad \frac{s \cdot c}{s^2 + \omega^2} \text{ u.s.w.} \bullet \text{ etc..}$$

Daher kann man mit der **Linearitätsregel** und der **Partialbruchzerlegung** von  $\frac{Q(s)}{P(s)}$  einigermassen auskommen. Allgemein zeigt sich, dass das schwierigere Problem immer in der Rücktransformation  $y(s) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$  liegt. • *C'est pourquoi on peut bien s'en tirer avec la règle de linéarité et la décomposition en fractions partielles de  $\frac{Q(s)}{P(s)}$ . Généralement on fait l'expérience que le problème compliqué est toujours de trouver  $y(s) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ .*

### Beispiel — Exemple

$$\text{AWP} \bullet \text{PVI:} \quad E(y) \equiv a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = f(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0$$

$$E(y) \circ \bullet a(s^2 Y - s y_0 - y'_0) + b(s Y - y_0) + c Y = F(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{F(s)}{a s^2 + b s + c} + \frac{a \cdot s \cdot y_0 + a \cdot y'_0 + b \cdot y_0}{a s^2 + b s + c}$$

Die Erfahrung zeigt, dass  $F$  häufig rational ist. • *L'expérience nous montre que  $F$  est souvent rationnelle.*

Für die Lösung von linearen D'Gl mit konstanten Koeffizienten ist es somit wichtig, die Rücktransformation von „Basisbrüchen“ zu beherrschen, die bei der Partialbruchzerlegung entstehen. • *Pour la solution des éq.diff. linéaires avec les coefficients constants, il est par conséquent important de maîtriser la transformation inverse de "fractions de base", qu'on obtient comme résultat de la décomposition en fractions partielles.*

### Methoden zur Rücktransformation — Méthodes pour la transformation inverse

1. Einsatz von Computeralgebra-Programmen (z.B. Mathematica). • *Utiliser des programmes d'algèbre sur ordinateur (p.ex. Mathematica).*
2. Laplace-Transformations-Tabellen (Lexika). • *Tableaux de transformations de Laplace (Lexiques).*
3. Verwendung der Regeln (vgl. oben). • *Utiliser des règles (voir en haut).*
4. Umformungen, z.B. mit Partialbruchzerlegung, um auf bekannte Transformierte zu gelangen.  
• *Transformations, par exemple à l'aide de décomposition en fractions partielles, pour arriver à des transformées connues.*
5. Verwendung des Faltungssatzes. • *Utiliser le théorème de plissement.*
6. Explizite Berechnung, vgl. unten. • *Calculer explicitement, voir en bas.*

### Explizite Berechnung • Calcul explicite

Mit Hilfe von Kenntnissen in Funktionentheorie gelingt es mit Hilfe des Residuensatzes die Rücktransformierte explizit zu berechnen. (Analog wie bei der Fouriertransformation, Integral von Mellin-Fourier,  $C$ : Browich-Kurve.) • *À l'aide de connaissances dans la théorie des fonctions complexes, on réussit à calculer explicitement la transformée inverse à l'aide du théorème des résidus. (Analogiquement aux transformations de Fourier, intégrales de Mellin-Fourier,  $C$ : courbe de Browich.)*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{st} F(s) ds$$

### 3.4 Musterbeispiele — Exemples modèles

#### 3.4.1 Rücktransformationen — Transformations inverses

$$1. F(s) = \frac{3s+7}{s^2-2s-3} = \frac{3s+7}{(s+1)(s-3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-3} = \frac{-1}{s+1} + \frac{4}{s-3}$$

$$\Rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = -1 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s+1}\right\} + 4 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s-3}\right\} = -e^{-t} + 4e^{3t}$$

$$2. \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-2} - \frac{3s}{s^2+16} + \frac{5}{s^2+4}\right\} = 4 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - 3 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\} + \frac{5}{2} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$$

$$= 4e^{2t} - 3 \cos 4t + \frac{5}{2} \sin(2t)$$

$$3. \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+5}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1 \cdot \frac{2}{2}}{(s-1)^2+4}\right\} = \frac{1}{2} e^t \cdot \sin(2t)$$

$$4. \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-\frac{\pi}{3}s} \cdot \frac{s}{s^2+4}\right\} = \tilde{f}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq \frac{\pi}{3} \\ \cos(2t - \frac{2\pi}{3}) & t > \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$5. \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s-4}{s^2-4s+20}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s-4}{(s-2)^2+16}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6(s-2)}{(s-2)^2+16}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8}{(s-2)^2+16}\right\}$$

$$= 6e^{2t} \cos 4t + 2e^{2t} \sin(4t) = 2 \cdot e^{2t} (3 \cos(4t) + \sin(4t))$$

$$6. \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1 \cdot \frac{\omega}{\omega}}{s(s^2+\omega^2)}\right\} = \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin(\omega \tau) d\tau = -\frac{1}{\omega^2} \cos(\omega \tau) \Big|_0^t = \frac{1}{\omega^2} (1 - \cos(\omega t))$$

$$7. \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = \int_0^t e^{-\tau} d\tau = -e^{-\tau} \Big|_0^t = 1 - e^{-t}$$

#### 3.4.2 Lösen von D'Gl — Résoudre des éq.diff.

$$1. \text{AWP} \quad \bullet \text{PVI:} \quad E(y) \equiv y' - 7y = e^{7t}, \quad y(0) = 0$$

$$\text{Lösung:} \quad \bullet \text{Solution:} \quad E(y) \circ \bullet s \cdot Y(s) - 0 - 7Y(s) = \frac{1}{s-7} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{(s-7)^2}$$

$$\Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-7)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{-1}{s-7}\right)\right\} = t \cdot e^{7t}$$

$$2. \text{AWP} \quad \bullet \text{PVI:} \quad E(y) \equiv y' + y = \sin(t), \quad y(0) = 1$$

**Lösung: • Solution:**

$$E(y) \circ \bullet s \cdot Y(s) - 1 + Y(s) = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow Y(s) = \frac{s^2+2}{(s+1)(s^2+1)}$$

Partialbruchzerlegung: • *Décomposition en fractions partielles:*

$$Y(s) = \frac{3}{2} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2} \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow y(t) = 1.5 e^{-t} - 0.5 \cos(t) + 0.5 \sin(t)$$

3. AWP • PVI:  $E(y) \equiv y''' - 3y'' + 3y' - y = t^2 \cdot e^t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -2$

**Lösung:** • **Solution:**  $E(y) \circ \bullet H(Y) =$

$$\begin{aligned} & s^3 \cdot Y(s) - s^2 \cdot y(0^+) - s \cdot y'(0^+) - y''(0^+) - 3(s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0^+) - y'(0^+)) + 3(s \cdot Y(s) - y(0^+)) - Y(s) \\ &= \frac{2}{(s-1)^3} \Rightarrow (s^3 - 3s^2 + 3s - 1)Y(s) - s^2 + 2 + 2s - 3 = \frac{s^2 + 2}{(s-1)^3} \\ &\Rightarrow Y(s) = \frac{(s^2 - 3s + 1)(s-1)^3 + 2}{(s^3 - 3s^2 + 3s - 1)(s-1)^3} = \frac{(s^2 - 3s + 1)(s-1)^3 + 2}{(s-1)^6} \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung: • *Décomposition en fractions partielles:*

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2}{(s-1)^6} - \frac{1}{(s-1)^3} - \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{s-1} \\ \Rightarrow y(t) &= \frac{2t^5 \cdot e^t}{5!} - \frac{t^2 \cdot e^t}{2} - t \cdot e^t + e^t \end{aligned}$$

### 3.4.3 Differentialgleichungen 2. Ordnung — Equations différentielles d'ordre 2ème

In der Physik oder der Elektrotechnik hat man häufig Probleme der folgenden Art:

• *Dans la physique ou l'électrotechnique, on a souvent des problèmes de la sorte suivante:*

AWP • PVI:  $E(y) \equiv a y'' + b y' + c y = f(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0, \quad a, b, c = \text{const.}, \quad f(t)$   
 Funktion oder Distribution • *foncition ou distribution*

Wir definieren: • *Nous définissons:*

**Definition:** • **Définition:**

- $f(t)$  heisst **Anregerfunktion** oder **Inputfunktion**
- $f(t)$  s'appelle **stimulation** ou **fonction input**
- $y(t)$  heisst **Antwortfunktion** oder **Outputfunktion**
- $y(t)$  s'appelle **réponse** ou **fonction output**
- $a, b, c$  heissen **Systemparameter**
- $a, b, c$  s'appellent **paramètres du système**

Allgemein gilt: • *Généralement il vaut:*  $(t = t_0)$

$$E(y) \circ \bullet a(s^2 Y - s y_0 - y'_0) + b(s Y - y_0) + c Y = F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Y(s)(a s^2 + b s + c) &= F(s) + y_0(a s + b) + a y'_0 \\ \Rightarrow Y(s) &= Y_{inhom}(s) = \underbrace{\frac{F(s)}{a s^2 + b s + c}}_{=Y_p(s)} + \underbrace{y_0 \frac{a s + b}{a s^2 + b s + c} + y'_0 \frac{a}{a s^2 + b s + c}}_{=Y_{hom}(s)} \end{aligned}$$

**Spezialfälle:** • **Cas spéciaux:**

1.  $f(t) \equiv 0 \Rightarrow Y = Y_{hom}, \quad a y'' + b y' + c y = 0 \rightsquigarrow$  Homogene D'Gl, Anfangsbedingungen nicht zwingend homogen. • *Eq.diff. homogène, conditions initiales non forcément homogènes.*
2.  $y_0 = y'_0 = 0, \quad f(t) \neq 0 \Rightarrow Y = Y_p \rightsquigarrow$  Inhomogene D'Gl. • *Eq.diff. non-homogène.*
3.  $y_0 = y'_0 = 0, \quad f(t) \equiv 0 \Rightarrow Y(s) \equiv 0 \Rightarrow y(t) \equiv 0 \rightsquigarrow$  Homogene D'Gl. • *Eq.diff. homogène.*

**Definition: • Définition:**  $p(s) = a s^2 + b s + c$  heisst **charakteristisches Polynom der D'Gl** • s'appelle **polynôme caractéristique de l'éq.diff.**

$Y_{inhom}(s) \bullet \circ y_{inhom}(t) =$  **erzwungene Antwort** • **réponse forcée**

$Y_{hom}(s) \bullet \circ y_{hom}(t) =$  **freie Antwort** • **réponse libre**

**Bsp.: • Exemple:**

**AWP • PVI**  $E(y) \equiv y'' + y = \sin(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad \circ \bullet \quad s^2 Y - 1 + Y = \frac{1}{s^2 + 1}$

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)^2} + \frac{1}{s^2 + 1} = Y_p + Y_{hom} \quad \bullet \circ \quad y(t) = \underbrace{-\frac{1}{2}(\sin(t) + t \cos(t))}_{y_p(t)} + \underbrace{\sin(t)}_{y_{hom}(t)}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2} \sin(t) - \frac{1}{2} t \cdot \cos(t)$$

### 3.4.4 Anwendung auf Systeme von D'Gl — Application pour systèmes d'éq.diff.

Statt nur eine einzige D'Gl zu transformieren, kann man auch gleich mehrere, d.h. ein System transformieren. Ebenso lässt sich dann eine D'Gl höherer Ordnung auch dadurch lösen, dass man sie in ein System verwandelt und dieses transformiert. • *Au lieu de transformer seulement une éq.diff unique, on peut aussi transformer tout de suite plusieurs éq.diff., c.-à-d. on transforme un système. Une éq.diff. d'ordre supérieur se laisse également transformer en la changeant en un système d'ordre premier et en transformant ce système-ci.*

**1. Beispiel: • Exemple 1:**

$$\begin{aligned} x''(t) - y(t) &= 0 \\ 9 \cdot x'(t) - y'(t) &= 0 \end{aligned}$$

$x(0) = 1, \quad x'(0) = 0, \quad y(0) = 6, \quad \rightsquigarrow E(x, y):$  AWP, System • PVI, système

Transformiere: • Transformer:  $x(t) \circ \bullet X(s), \quad y(t) \circ \bullet Y(s)$

$$\rightsquigarrow E(x, y) \circ \bullet \quad \begin{aligned} s^2 \cdot X(s) - s - Y(s) &= 0 \\ 9(s \cdot X(s) - 1) - s \cdot Y(s) + 6 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} s^2 \cdot X(s) - Y(s) &= s \\ 9s \cdot X(s) - s \cdot Y(s) &= 3 \end{aligned}$$

Lösung nach Cramer: • Solution d'après Cramer:

$$X(s) = \frac{\begin{vmatrix} s & -1 \\ 3 & -s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2 & -1 \\ 9s & -s \end{vmatrix}} = \frac{-s^2 + 3}{-s^3 + 9s} = \frac{-s^2 + 3}{s(3+s)(3-s)} = \frac{1}{3s} + \frac{1}{3(s+3)} + \frac{1}{3(s-3)}$$

$$\bullet \circ x(t) = \frac{1}{3} (1 + e^{3t} + e^{-3t})$$

$$Y(s) = \frac{\begin{vmatrix} s^2 & s \\ 9s & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2 & -1 \\ 9s & -s \end{vmatrix}} = \frac{3s^2 - 9s^2}{-s^3 + 9s} = -\frac{6s}{9 - s^2} = 6 \frac{s}{s^2 - 9} \quad \bullet \circ y(t) = 6 \cosh(3t) = 3(e^{3t} + e^{-3t})$$

**2. Beispiel: • Exemple 2:**

Beispiel mit gekoppelten Pendeln siehe Anhang Seite 320.

- *Exemple avec des pendule accouplés directement par un ressort voir annexe page 320.*

**3.4.5 Anwendung der Faltung — Application du plissement**

Wir betrachten das folgende AWP: • *Nous étudions le PVI suivant:*

$$E(y) \equiv a y''(t) + b y'(t) + c y(t) = f(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0$$

$$E(y) \circ \bullet a s^2 Y(s) + b s Y(s) + c Y(s) = F(s) + a(s y_0 + y'_0) + b = F(s) + R(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{F(s) + R(s)}{a s^2 + b s + c} = \frac{F(s) + R(s)}{P(s)} = F(s) \cdot \frac{1}{P(s)} + R(s) \cdot \frac{1}{P(s)}$$

$P(s)$  ist ein Polynom 2. Grades (**charakteristisches Polynom**),  $R(s)$  ein Polynom 1. Grades.

- *$P(s)$  est un polynôme du deuxième degré (**polynôme caractéristique**),  $R(s)$  un polynôme du premier degré.*

$\leadsto$  Die Rücktransformation von  $\frac{R(s)}{P(s)}$  und von  $\frac{1}{P(s)}$  ist nach der behandelten Theorie möglich. Es bleibt das Problem der Rücktransformation von  $\frac{F(s)}{P(s)}$ . • *La Transformation inverse de  $\frac{R(s)}{P(s)}$  et de  $\frac{1}{P(s)}$  est possible d'après la théorie traitée. Il reste le problème de la transformation inverse de  $\frac{F(s)}{P(s)}$ .*

$$\text{Seien } \bullet \text{ Soient : } \frac{1}{P(s)} = G(s) \bullet \circ g(t) \Rightarrow \frac{F(s)}{P(s)} = F(s) \cdot \frac{1}{P(s)} = F(s) \cdot G(s) \bullet \circ f(t) * g(t)$$

Speziell für  $y_0 = y'_0$  ist dann  $R(s) = 0$ . Damit gilt der Satz:

- *Spécialement pour  $y_0 = y'_0$  il vaut donc  $R(s) = 0$ . Ainsi il vaut:*

**Satz: • Théorème:**      **Vor.: • Hyp.:**

$$a y''(t) + b y'(t) + c y(t) = f(t), \quad y_0 = y'_0 = 0$$

$$\frac{1}{a s^2 + b s + c} \bullet \circ g(t)$$

**Beh.: • Thè.:**

$$y(t) = f(t) * g(t)$$

**Bemerkung: • Remarque:**

Dieser Satz ist auch bekannt als **Prinzip von Duhamel**.

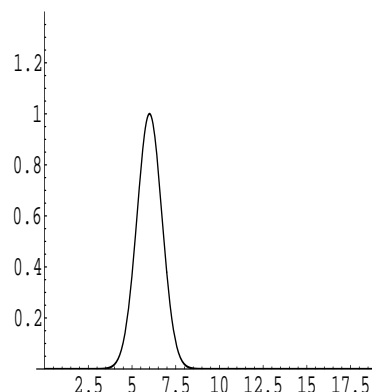
- *Ce théorème est aussi connu comme principe de Duhamel.*

## 3.5 Distributionen — Distributions

### 3.5.1 Idee, Dirac-Stoss — Idée, impulsion unité de Dirac

Z.B. in der Mechanik hat man manchmal die Situation, dass auf eine Masse  $m$  während sehr kurzer Zeit eine sehr grosse Kraft wirkt.

• *P.ex. dans la mécanique on a parfois la situation que sur une masse  $m$  il se manifeste une force très grande pendant un temps très court.*



Bekanntlich gilt: • *Comme on sait, il vaut:*  $F(t) = m \cdot a(t) = m \cdot \ddot{s} = m \cdot \dot{v}(t)$

Der aufgenommene Impuls von  $m$  ist dann: • *L'impulsion de  $m$  est donc:*

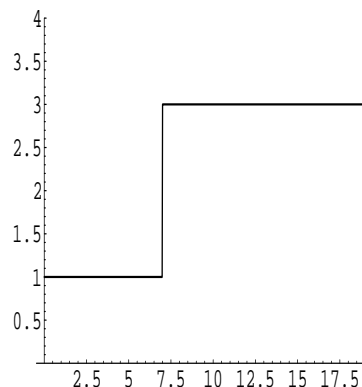
$$\Delta P = m \cdot v(t_1) - m \cdot v(0) = \int_0^{t_1} m \cdot \dot{v}(t) dt = \int_0^{t_1} F(t) dt$$

Das entspricht dem Inhalt der Fläche unter der Kurve im  $F$ - $t$ -Diagramm. (Kraftstoss).

• *Ça correspond au contenu de la surface sous la courbe dans le diagramme  $F$ - $t$ . (Impulsion).*

Andererseits hat man in der Elektrotechnik oft die Situation, dass z.B. die Spannung plötzlich sprunghaft ansteigt, z.B. bei einem Einschaltvorgang.

• *Par ailleurs on a souvent la situation dans l'électrotechnique que p.ex. la tension monte soudainement par bonds, p. ex. lors d'un enclenchement d'interrupteur.*



**Problem:** • **Problème:** Wie geht man mathematisch mit diesem Verhalten um?

• *Comment est-ce qu'on manie ce comportement mathématiquement?*

Den mathematischen Zugang dazu liefert die recht anspruchsvolle **Theorie der Distributionen**.

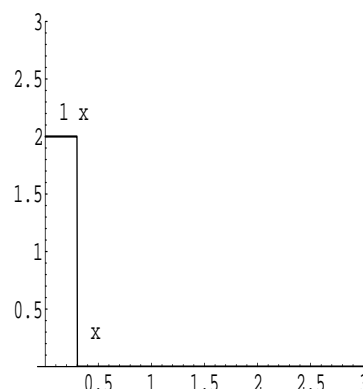
• *L'accès mathématique à cela est fourni par la théorie des distributions bien exigeante.*

Hier wollen wir nur das Beispiel einer ganz einfachen Distribution studieren, nämlich die Dirac-Funktion. Dazu gehen wir von der Vorstellung eines Kraftstosses besonderer Art aus: • *Ici, nous voulons étudier seulement l'exemple d'une distribution tout à fait simple, la fonction de Dirac. Nous partons de l'idée d'une impulsion de sorte particulière:*

Sei • *Soit*

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & t \in [0, \varepsilon] \\ 0 & t \notin [0, \varepsilon] \end{cases}$$

$$\leadsto A = \varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon} = 1$$



Es gilt: • *Il vaut:*  $\int_0^\infty f_\varepsilon(t) dt = \int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} dt = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon = 1 \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^\infty f_\varepsilon(t) dt = 1$

Ohne gross auf mathematische Strenge Rücksicht zu nehmen, können wir daher auf eher heuristische Art definieren: • *Sans tenir compte de la sévérité mathématique, nous pouvons définir par conséquent plutôt de manière heuristique:*

**Definition:** • **Définition:**  $f_0(t) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f_\varepsilon(t) := \delta(t)$  heisst **Dirac-Funktion** • *s'appelle*  
**Fonction de Dirac**

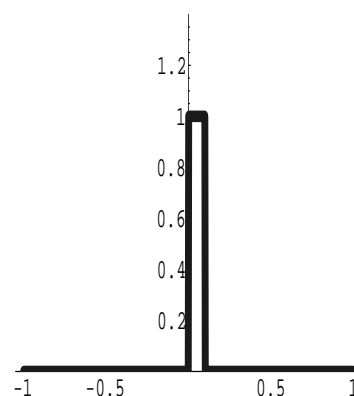
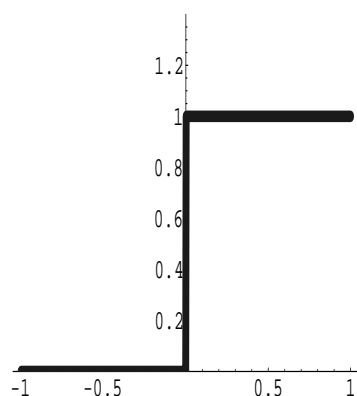
$\delta(t)$  gehört zur Klasse der **Distributionen**. Man kann  $\delta(t)$  als „verallgemeinerte Funktion auffassen“.

•  $\delta(t)$  appartient à la classe des **distributions**. On peut comprendre  $\delta(t)$  comme fonction généralisée.

**Bemerkung:** • **Remarque:**

$\delta(t)$  kann auch heuristisch als „Ableitung“ der Sprungfunktion  $h(t)$  für  $\Delta t \rightarrow 0$  aufgefasst werden (vgl. Skizze).

• On peut aussi comprendre  $\delta(t)$  comme „dérivée“ de la fonction de saut (de Heaviside)  $h(t)$  pour  $\Delta t \rightarrow 0$ .



**Bemerkung:** • **Remarque:**

Hier haben wir die Delta-Funktion auf eine mathematisch gesehen saloppe, nur für die Fachhochschule gedachte Art eingeführt. Die einwandfreien, in der Fachliteratur üblichen Darstellungen decken sich damit nicht unbedingt. Eine Bemerkung dazu findet der Leser im Anhang. (Siehe Seite 303.)

• Ici, nous avons présenté la fonction delta mathématiquement d'une façon décontractée. Pour le niveau des hautes écoles spécialisées ça peut aller, car ça ne dérange pas. La manière qu'on trouve dans la littérature spécialisée irréprochable et usuelle ne coïncide pas absolument avec cela. Le lecteur trouve une remarque précise dans l'annexe. (Voir à la page 303.)

### 3.5.2 Die Transformierte der Dirac-Funktion — La transformée de la fonction de Dirac

Ohne die mathematischen Details bei Limesvertauschungen u.s.w. untersucht zu haben, kann man wohl doch folgende Herleitung akzeptieren: • *Sans avoir examiné les détails mathématiques pour l'échange des limites etc., on peut accepter probablement la déduction suivante:*

$$\begin{aligned} \delta(t) \circ \bullet \int_0^\infty e^{-st} \delta(t) dt &= \int_0^\infty e^{-st} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-st} \cdot f_\varepsilon(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\varepsilon e^{-st} \cdot \frac{1}{\varepsilon} dt = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot e^{-st} \cdot \frac{-1}{s} \Big|_0^\varepsilon = \frac{-1}{s} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (e^{-s\varepsilon} - e^0) \stackrel{\text{Bernoulli}}{=} \frac{-1}{s} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{1} \cdot (-s \cdot e^{-s\varepsilon}) = \frac{-1}{s} \cdot (-s) \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

für • pour  $\operatorname{Re}(s) > 0$

**Regel:** • **Règle:**  $\delta(t) \circ \bullet \Delta(s) = 1$

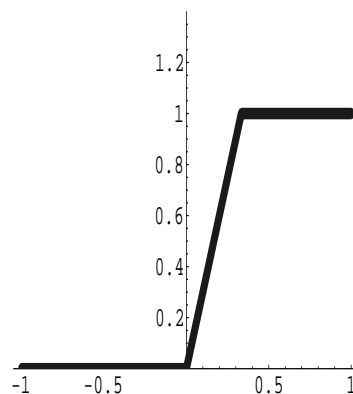
**Bemerkung:** • **Remarque:**

Rein formal ergibt sich daraus nach der Differentiationsregel für die Sprungfunktion  $h(t)$ : • *Purement formellement on déduit de cette règle pour la fonction de saut  $h(t)$  à l'aide de la règle de la dérivation:*

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

Sei • Soit  $h'(t) = \delta(t) \Rightarrow \delta(t) \circ \bullet s \cdot \mathcal{L}\{h(t)\} - h(0^+) = s \cdot H(s) - 0 = \Delta(s) = 1, H(s) = \frac{1}{s}$

$h(t)$  ist als Grenzwert ( $\varepsilon \downarrow 0$ ) des Geradenabschnittes zwischen  $(0,0)$  und  $(\varepsilon,1)$  aufzufassen, was zu  $h(0^+) = 0$  führt. • *On peut comprendre  $h(t)$  comme valeur limite ( $\varepsilon \downarrow 0$ ) de la section de la droite entre  $(0,0)$  et  $(\varepsilon,1)$ , ce qui mène à  $h(0^+) = 0$ .*



Das Resultat stimmt überein mit: • *Le résultat concorde avec:*  $h(t) \circ \bullet \int_0^\infty e^{-st} \cdot 1 dt = \frac{1}{s}$

Wie man sieht, haben  $h(t)$  und  $f(t) = 1$  dieselbe Transformierte. • *Comme on voit,  $h(t)$  et  $f(t) = 1$  ont la même transformée.*

Formal können wir jetzt auch die Transformierte des vorläufig formalen Ausdrucks  $\delta'(t) := \lambda(t)$  bestimmen: • *Formellement nous pouvons calculer maintenant aussi la transformée de l'expression*



provisoirement formelle  $\delta'(t) := \lambda(t)$ :

$$\delta'(t) := \lambda(t) \circ \bullet \Lambda(s) = s$$

So wird offensichtlich, dass schliesslich auch Polynome als Laplace-Transformierte auftreten können, wenn man den hier eingeschlagenen Weg weiter verfolgt. • *Ainsi il est évident que finalement aussi des polynômes peuvent apparaître comme transformées de Laplace si on poursuit le chemin que nous avons commencé ici.*

Weiter gilt: • *En outre il vaut:*

$$\begin{aligned} f(t) \cdot \delta(t) &= f(t) \cdot 0 = 0 = f(0) \cdot 0 = f(0) \delta(t) \quad \text{für } \bullet \text{ pour } t \neq 0 \\ &\Rightarrow \int_0^\infty f(t) \cdot \delta(t) dt = \int_0^\infty f(0) \cdot \delta(t) dt = f(0) \int_0^\infty \delta(t) dt = f(0) \cdot 1 = f(0) \end{aligned}$$

**Regel:** • **Règle:** (Ausblendeeigenschaft)  
• (Qualité de supprimer ce qui n'intéresse pas)  
 $\int_0^\infty f(t) \delta(t) dt = f(0)$

### 3.5.3 Anwendung auf ein AWP — Application pour un PVI

#### 3.5.4 Stoss zur Zeit 0 — Coup au temps 0

**AWP** • **PVI**  $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = \delta(t), \quad y_0 = y'_0 = 0$

**Bekannt:** • *Nous savons:*  $\frac{1}{as^2 + bs + c} \circ \bullet g(t), \quad 1 \bullet \circ f(t) = \delta(t)$

$\leadsto$  **Lösung:** • **Solution:**  $y(t) = f(t) * g(t) = \delta(t) * g(t) = \int_0^t \delta(\lambda) g(t - \lambda) d\lambda$

Es gilt: • *Il vaut:*

$$\delta(\lambda) \cdot g(t - \lambda) = \begin{cases} 0 = 0 \cdot g(t) = 0 = \delta(\lambda) \cdot g(t) & \lambda \neq 0 \\ \delta(0) \cdot g(t) & \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(t) = f(t) * g(t) = g(t) \cdot \int_0^t \delta(\lambda) d\lambda = g(t) \cdot 1 = g(t) \Rightarrow y(t) = g(t)$$

**Regel:** • **Règle:** **Vor.:** • **Hyp.:**  $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = \delta(t), \quad y_0 = y'_0 = 0$

**Beh.:** • **Thè.:**  $y(t) = g(t)$

### 3.5.5 Stoss zur Zeit $t_0$ — Coup au temps $t_0$

Stoss zur Zeit  $t = t_0$  der Grösse 1: • *Coups au temps  $t = t_0$  de la grandeur 1:  $\delta(t) \circ \bullet 1$*

$$\begin{aligned} \Rightarrow \delta(t - t_0) \circ \bullet \int_0^\infty e^{-st} \delta(t - t_0) dt &\stackrel{t-t_0=\tau}{=} \int_{-t_0}^\infty e^{-s(\tau+t_0)} \delta(\tau) d\tau = e^{-st_0} \int_{-t_0}^\infty e^{-s\tau} \delta(\tau) d\tau = e^{-st_0} \cdot 1 \\ &\text{für } \bullet \text{ pour } t_0 > 0 \end{aligned}$$

Regel: • Règle:

Vor.: • Hyp.:

$$t_0 \geq 0$$

Beh.: • Thè.:

$$\delta(t - t_0) \circ \bullet e^{-s t_0}$$

Beispiele: • Exemples:

$$1. E(y) \equiv y'' + y = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k \cdot \pi) = \delta(t) + \delta(t - \pi) + \delta(t - 2\pi) + \dots, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

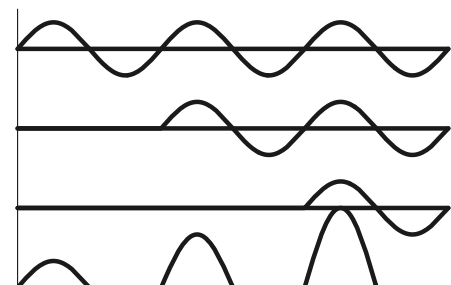
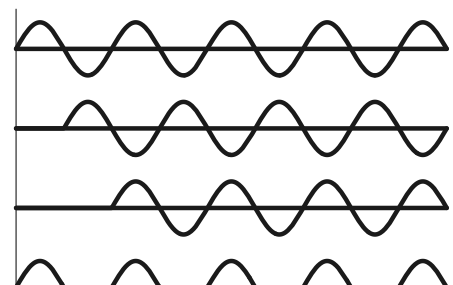
$$E(y) \circ \bullet s^2 Y + Y = 1 + e^{-s\pi} + e^{-2s\pi} + e^{-3s\pi} + \dots \rightsquigarrow \begin{array}{l} \text{geometrische Reihe mit} \\ \text{géométrique avec} \end{array} \bullet \begin{array}{l} \text{série} \\ q = e^{-s\pi} \end{array}$$

$$\operatorname{Re}(s) > 0 \Rightarrow |q| < 1 \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{1+s^2} + \frac{e^{-s\pi}}{1+s^2} + \frac{e^{-2s\pi}}{1+s^2} + \frac{e^{-3s\pi}}{1+s^2} + \dots \bullet \circ y(t) \Rightarrow$$

$$y(t) = \sin(t) + \begin{pmatrix} 0, & t \leq \pi \\ \sin(t - \pi), & t > \pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, & t \leq 2\pi \\ \sin(t - 2\pi), & t > 2\pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, & t \leq 3\pi \\ \sin(t - 3\pi), & t > 3\pi \end{pmatrix} + \dots$$

$$\Rightarrow y(t) = \sin(t) + \begin{pmatrix} 0, & t \leq \pi \\ -\sin(t), & t > \pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, & t \leq 2\pi \\ \sin(t), & t > 2\pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, & t \leq 3\pi \\ -\sin(t), & t > 3\pi \end{pmatrix} + \dots$$

Aussehen: • Vue du graphe:



$$2. E(y) \equiv y'' + y = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k \cdot 2\pi) = \delta(t) + \delta(t - 2\pi) + \delta(t - 4\pi) + \dots, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

$$E(y) \circ \bullet s^2 Y + Y = 1 + e^{-2s\pi} + e^{-4s\pi} + e^{-6s\pi} + \dots \rightsquigarrow \begin{array}{l} \text{geometrische Reihe mit} \\ \text{géométrique avec} \end{array} \bullet \begin{array}{l} \text{série} \\ q = e^{-2s\pi} \end{array}$$

$$\operatorname{Re}(s) > 0 \Rightarrow |q| < 1 \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{1+s^2} + \frac{e^{-2s\pi}}{1+s^2} + \frac{e^{-4s\pi}}{1+s^2} + \frac{e^{-6s\pi}}{1+s^2} + \dots \bullet \circ y(t) \Rightarrow$$

$$y(t) = \sin(t) + \begin{pmatrix} 0, & t \leq 2\pi \\ \sin(t - 2\pi), & t > 2\pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, & t \leq 4\pi \\ \sin(t - 4\pi), & t > 4\pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, & t \leq 6\pi \\ \sin(t - 6\pi), & t > 6\pi \end{pmatrix} + \dots$$

$$\Rightarrow y(t) = \sin(t) + \begin{pmatrix} 0, & t \leq 2\pi \\ \sin(t), & t > 2\pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, & t \leq 4\pi \\ \sin(t), & t > 4\pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, & t \leq 6\pi \\ \sin(t), & t > 6\pi \end{pmatrix} + \dots$$

$$\rightsquigarrow y(t) = (n+1) \sin(t) \text{ für } \bullet \text{ pour } t \in [2n\pi, 2(n+1)\pi]$$

$$\rightsquigarrow \text{Amplitude wächst mit } n. \bullet L' \text{amplitude grandit avec } n.$$

3. Harmonischer Oszillator mit Dämpfung und Impulsänderung: • *L'oscillateur harmonique avec affaiblissement et changement d'impulsion:*

$$E(y) \equiv y'' + 2y' + y = 3\delta(t-1) + e^{-t}, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{3e^{-s}}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^3} \bullet \circ \quad y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 1 \\ 3 \cdot (t-1) \cdot e^{-(t-1)} & t > 1 \end{cases} + \frac{1}{2} e^{-t} \cdot t^2$$

$$\Rightarrow y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 1 \\ e^{-t} (3 \cdot e^{(t-1)} + \frac{1}{2} t^2) & t > 1 \end{cases}$$

## 3.6 Probleme aus der Praxis — Problèmes de la pratique

### 3.6.1 Schwingungen und Oszillatoren — Oscillations et oscillateurs

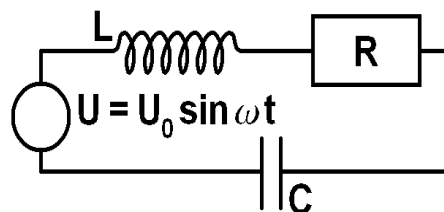
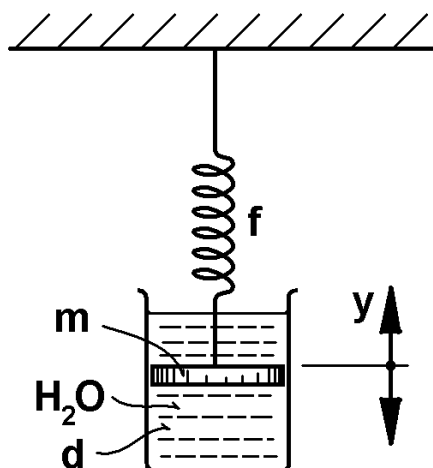
Schwingungen treffen wir z.B. bei Federn, Pendeln, RCL-Schwingkreisen, Wirbelstromdämpfung, Molekülschwingungen, Torsionsschwingungen u.s.w.. • *Nous rencontrons des oscillations p.ex. aux ressorts, pendules, circuits RCL, affaiblissement de courant parasite (de Foucault), oscillations de molécule, oscillations de torsion etc..*

#### 1. Beispiel: • Exemple 1:

Annahme:

Dämpfungskraft  $\sim$  Geschwindigk.  $\dot{y}$ , Proportionalitätskonstante  $d$  (Dämpfungskonstante)

• *Supposition: La force d'affaiblissement  $\sim$  vitesse constante de proportionnalité  $d$  (constante d'affaiblissement)*



Mit dem Federgesetz ergibt sich dann: • *A l'aide de la loi des ressorts on obtient:*

$m \cdot \ddot{y} + d \cdot \dot{y} + f \cdot y = 0$ ,  $f$  = Federkonstante • *constante de rappel (flexibilité d'un ressort)*

Sei • *Soit*  $2\rho = \frac{d}{m}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{f}{m} \Rightarrow \ddot{y} + 2\rho \cdot \dot{y} + \omega_0^2 \cdot y = 0$

Die Erfahrung zeigt, dass man mit Vorteil die folgenden Fälle getrennt behandelt (Diskriminante!):

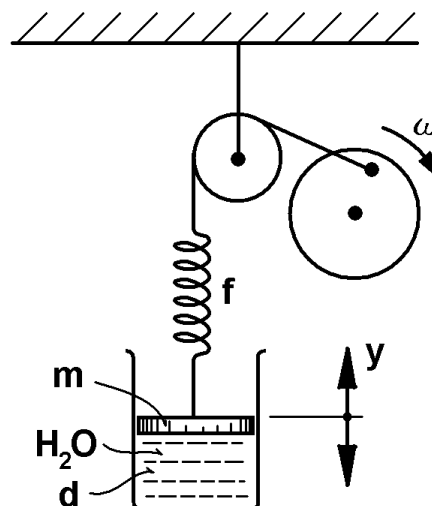
• *L'expérience montre qu'il convient de traiter les cas suivants séparément (diskriminant!):*

1.  $\omega_0^2 - \rho^2 > 0$ : **Schwache Dämpfung** •  $\omega_0^2 - \rho^2 > 0$ : *Affaiblissement faible*
2.  $\omega_0^2 - \rho^2 = 0$ : **Kritische Dämpfung** •  $\omega_0^2 - \rho^2 = 0$ : *Affaiblissement critique*
3.  $\omega_0^2 - \rho^2 < 0$ : **Starke Dämpfung** •  $\omega_0^2 - \rho^2 < 0$ : *Affaiblissement fort*

## 2. Beispiel: • Exemple 2:

Falls zusätzlich eine Anregerkraft  $F$  wirkt, etwa über einen Exzenter, so erhält man die folgende D'Gl: • *Si l'on a en plus une force stimulante  $F$ , p.ex. par un disque excentrique, on obtient ainsi l'éq.diff. suivante:*

$$F(t) = k \cdot \sin(\omega t) \Rightarrow$$



$$E(y) \equiv \ddot{y} + 2\rho\dot{y} + \omega_0^2 y = k \cdot \sin(\omega t), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

Aus physikalischen Gründen kann man vermuten: • *On peut supposer pour des raisons de physique:*

$$y(t) = A \cdot \sin(\Omega \cdot t + \varphi)$$

Das Studium des Verhaltens der Lösung abhängig von den speziellen Parametern (Resonanzverhalten u.s.w.) ist Gegenstand eines kleinen Mathematik-Labor Projekts (z.B. mit Mathematica). Daher wird hier nicht weiter darauf eingegangen. • *Les études du comportement de la solution dépendant des paramètres spéciaux (comportement de résonance etc.) est un petit projet traité dans le laboratoire de mathématiques (par exemple avec Mathematica). Par conséquent ici on ne traite plus cela.*

### 3.6.2 Stabilitätsverhalten von Lösungen — Comportement de stabilité de solutions

**Problem:** • **Problème:** Regt man ein System, das sich in Ruhe befindet, von aussen kurz an, so erwartet man, dass das System nach einer gewissen Zeit wieder dem Ruhezustand zustrebt. Falls das nicht so geschieht, so zeigt das System ein labiles oder ein instabiles Verhalten analog zu Gleichgewichtszuständen in der Statik. Diesen Sprachgebrauch übernehmen wir von der Statik. Bevor wir praktische Probleme behandeln können, müssen wir aber noch das Problem der Bedeutung der „Anregung“ klären.

• *Si on stimule brièvement un système qui se trouve dans l'état de repos, on s'attend à ce que le système se dirige vers la condition de repos après un certain temps. Si ça n'arrive pas ainsi, le système montre un comportement instable ou un comportement instable analogue aux équilibres dans la statique. Nous assumons ce langage de la statique. Avant de pouvoir traiter des problèmes pratiques, nous devons clarifier encore le problème de la signification de la "stimulation".*

**Bsp.: • Exemple:**

System  $\rightsquigarrow$  D'Gl: • *Système*  $\rightsquigarrow$  *éq.diff.*:  $ay'' + by' + cy = f(t)$ ,  $y(0) = y_0$ ,  $y'(0) = y'_0$

„**System in Ruhe**“ kann nun zwei Bedeutungen haben:

• *„Le système en état de repos“ peut avoir deux significations:*

1.  $f(t) \equiv 0$  (keine äussere Anregung) • *(pas de stimulation de l'extérieur)*

$$\Rightarrow Y = \frac{a \cdot s \cdot y_0 + a \cdot y'_0 + b \cdot y_0}{a \cdot s^2 + b \cdot s + c} \bullet \circ y(t)$$

2.  $y_0 = y'_0$ ,  $f(t) = \delta(t)$  (oder ein vergleichbarer Stoss) • *(ou un coup comparable)*

$$\rightsquigarrow f(t) = 0 \text{ für } \bullet \text{ pour } t > 0 \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{a \cdot s^2 + b \cdot s + c} \bullet \circ y(t)$$

Man erkennt sofort, dass der Fall (2) für  $Y$  ein Spezialfall des Falles (1) ist:

• *On reconnaît tout de suite que le cas (2) pour  $Y$  est un cas spécial du cas 1:*

$$y_0 = 0, \quad a \cdot y'_0 = 1, \quad y'_0 = \frac{1}{a}$$

Entsprechendes gilt für D'Gl höherer Ordnung.

• *Une situation correspondante vaut pour des éq.diff d'ordre supérieur.*

Unter einer „kurzen Anregung“ können wir demnach einen Dirac-Stoss vorstellen — oder auch Anfangsbedingungen, die einem solchen Stoss entsprechen. • *Sous une „stimulation courte“, nous pouvons donc nous imaginer un coup de Dirac — ou bien des conditions initiales qui correspondent à un tel coup.*

Die Lösungsfunktion  $y(t)$  eines derart kurz angeregten Systems ergibt sich demnach als Rücktransformierte einer rationalen Funktion  $Y(s) = \frac{p_m(s)}{q_n(s)}$  • *On obtient donc la fonction de solution  $y(t)$  d'un système animé tellement brièvement comme transformée inverse d'une fonction rationnelle  $Y(s) = \frac{p_m(s)}{q_n(s)}$ .*

Nun können wir den Begriff der Stabilität genauer erklären:

• *Maintenant nous pouvons expliquer l'idée de la stabilité plus exactement :*

**Definition: • Définition:**

Eine Lösung einer D'Gl eines kurz angeregten Systems heisst:

• *Une solution d'une éq.diff. d'un système brièvement animé s'appelle:*

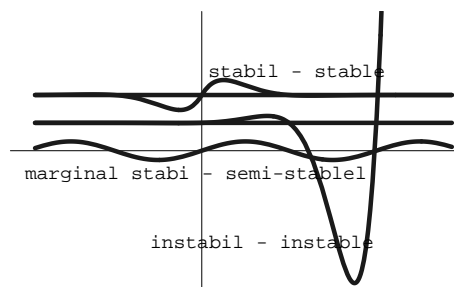
1. **stabil • stable**  $\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = c$ ,  $|y(t)| < k \in \mathbb{R}$

2. **marginal stabil (halbstabil) • semi-stabilisé**  
 $\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} : y(t) \in [c_1, c_2]$ ,  $|y(t)| < k \in \mathbb{R}$

3. **instabil** in allen andern Fällen  
 • **instable** dans tous les autres cas

Die Menge der stabilen Funktionen sind eine Teilmenge der halb stabilen.

• *L'ensemble des fonctions stables est un sous-ensemble des fonctions semi-stabilisées.*



**Beispiele:** • **Exemples:**

$$1. \frac{c}{(s+a)^n} \bullet \circ \frac{(-1)^{n-1} c}{(n-1)!} e^{-at} \cdot t^{n-1} \rightsquigarrow$$

$$(a) \text{ stabil } \bullet \text{ stable, } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n-1} c}{(n-1)!} e^{-at} \cdot t^{n-1} = 0 \text{ für } \bullet \text{ pour } \operatorname{Re}(a) > 0$$

$$(b) \text{ instabil } \bullet \text{ instable für } \bullet \text{ pour } (\operatorname{Re}(a) < 0) \vee (a = 0 \wedge n > 1) \text{ u.s.w. } \bullet \text{ etc.}$$

$$2. \frac{1}{s^2+1} \bullet \circ \sin(t) \rightsquigarrow \text{ marginal stabil } \bullet \text{ semi-stabilisé}$$

**Bemerkung:** • **Remarque:**

(a) Sei  $y(t)$  stückweise stetig und marginal stabil resp. ganz stabil. • *Soit  $y(t)$  continue par morceaux et semi-stable ou bien stable.*  $\Rightarrow y(t)$  beschränkt auf • *bornée à  $\mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$*

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-st} y(t) dt = Y(s) \text{ existiert für } \bullet \text{ existe pour } \operatorname{Re}(s) > 0$$

(b) Vgl. Beispiele in der Literatur, z.B. Glyn James, Advanced Modern Engineering Math., p.185 ff. • *Voir exemples dans la littérature, p.ex. Glyn James, Advanced Modern Engineering Math., p.185 ff.*

$$3. E(y) \equiv y'' + 9y = \cos(2t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

$$E(y) \bullet \circ s^2 Y - s + 9Y = \frac{s}{s^2 + 4}$$

$$\Rightarrow Y = \frac{s^3 + 5s}{(s^2 + 4)(s^2 + 9)} = \frac{4}{5} \frac{s}{s^2 + 9} + \frac{1}{5} \frac{s}{s^2 + 4} \bullet \circ y(t) = \frac{4}{5} \cos(3t) + \frac{1}{5} \cos(2t)$$

$\rightsquigarrow$  Ständige Anregung. • *Stimulation sans arrêt.*

$$4. E(y) \equiv y'' + 9y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

$$E(y) \bullet \circ s^2 Y - s + 9Y = 0 \Rightarrow Y = \frac{s}{(s^2 + 9)} \bullet \circ y(t) = \cos(3t)$$

$\rightsquigarrow y(t)$  marginal stabil. •  *$y(t)$  semi-stable.*

### 3.6.3 Stabilitätskriterium — Critère de stabilité

Ein System nennen wir bekanntlich **stabil**, wenn die Impulsantwort auf den Stoss  $\delta(t)$  bei  $t = 0$  mit der Zeit wieder zur Ruhe kommt. Bei linearen D'Gl mit konstanten Koeffizienten bedeutet das: • *Comme chacun sait, nous appelons un système stable, si la réponse d'impulsion sur le coup  $\delta(t)$  à  $t = 0$  va avec le temps de nouveau vers l'équilibre. Pour l'éq.diff. linéaire avec des coefficients constants ça signifie:*

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = \delta(t) \quad \circ \bullet \quad a_n s^n Y + a_{n-1} s^{n-1} Y + \dots + a_0 Y = 1$$

$$\Rightarrow Y = \frac{1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{1}{a_n (s - s_1) \dots (s - s_n)} = \frac{1}{a_n} \left( \frac{A_1}{s - s_1} + \dots + \frac{A_n}{s - s_n} \right)$$

(im Falle lauter verschiedener Nullstellen  $s_i$ ) • *(dans le cas de places de zéro  $s_i$  toutes différentes)*

$$Y \bullet \circ y(t) = \frac{1}{a_n} (A_1 e^{s_1 t} + \dots + A_n e^{s_n t}), \quad A_k, s_k \in \mathbb{C}$$

Im Falle zusammenfallender Nullstellen entstehen noch Terme folgender Form: • *Dans le cas de places de zéro qui coïncident, il y a encore des termes de la forme suivante:*  $A_k t^j \cdot e^{s_k t}$

Nun streben aber alle Terme  $e^{s_i t}$  und  $t^j \cdot e^{s_k t}$  mit  $t \rightarrow \infty$  gegen 0, wenn  $\operatorname{Re}(s_i) < 0$  resp.  $\operatorname{Re}(s_k) < 0$  gilt. Das System kommt zur Ruhe: • *Maintenant tous les termes  $e^{s_i t}$  et  $t^j \cdot e^{s_k t}$  avec  $t \rightarrow \infty$  vont vers 0, s'il vaut  $\operatorname{Re}(s_i) < 0$  resp.  $\operatorname{Re}(s_k) < 0$ . Le système trouve le repos:  $y(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$*

**Satz:** • **Théorème:**      **Stabilitätskriterium • Critère de stabilité**

**Vor.:** • **Hyp.:**

$s_k$  Nullstelle des charakteristischen Polynoms  
• *zéro du polynôme caractéristique*  
 $\forall_{k=1}^n \operatorname{Re}(s_k) < 0$

**Beh.:** • **Thè.:**

$y(t)$  stabil • *stable*

**Achtung:** • **Attention:** Der Grenzwertsatz  $\lim_{s \downarrow 0} s \cdot Y(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$  ist gemäss Voraussetzungen nur dann problemlos anwendbar, wenn  $y(t)$  nicht exponentiell wächst. Kennt man nur  $Y(s)$  und nicht  $y(t)$ , so ist eine Untersuchung der Nennernullstellen  $s_k$  für die Entscheidung der Stabilität empfehlenswert.

• *Le théorème des valeurs limites  $\lim_{s \downarrow 0} s \cdot Y(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$  est applicable selon les hypothèses sans problème seulement si  $y(t)$  ne croît pas de façon exponentielle. Si on connaît seulement  $Y(s)$  et non pas  $y(t)$ , un examen des places de zéro du dénominateur est recommandable pour décider de la stabilité.*

### 3.6.4 Randwertprobleme — Problèmes de valeurs aux limites

**Bsp.:** • **Exemple:**

$$E(x) \equiv t \cdot y'' + 2y' + ty = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 0 \quad (\text{Randwerte}) \quad \bullet \quad (\text{valeurs aux limites})$$

Hier fehlt  $y'(0)$ . Dafür ist  $y(\pi) = 0$  gegeben. • *Ici,  $y'(0)$  manque. Mais on a donné  $y(\pi) = 0$ .*

**Methode:** • **Méthode:** Rechne wie gewohnt mit einem Parameter  $y'(0) = \lambda$ . Wähle anschliessend  $\lambda$  so, dass  $y(\pi) = 0$  erfüllt ist. • *Calculer comme d'habitude à l'aide d'un paramètre  $y'(0) = \lambda$ . Ensuite choisir  $\lambda$  de façon que  $y'(\pi) = 0$  soit satisfait.*

Multiplikationsregel: • *Règle de la multiplication:*

$$y'' \circ \bullet s^2 Y - s \cdot 1 - \lambda \Rightarrow t \cdot y'' \circ \bullet - 2sY - s^2 \cdot \frac{dY}{ds} + 1$$

$$2y' \circ \bullet 2(sY - 1), \quad t \cdot y \circ \bullet - \frac{dY}{ds} = -Y'$$

$$\Rightarrow E(x) \circ \bullet Y'(-s^2 - 1) + Y(-2s + 2s) + 1 - 2 = Y'(-s^2 - 1) - 1 = 0 \Rightarrow Y' = -\frac{1}{s^2 + 1}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \int Y'(s) ds = \int -\frac{1}{s^2 + 1} ds = -\arctan(s) + C, \quad C = \text{const.} = ?$$

Es muss gelten: • *Il faut obtenir:*  $\lim_{\text{Re}(s) \rightarrow \infty} Y(s) = \lim_{\text{Re}(s) \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-st} y(t) dt = 0$   
 (wobei gilt: • *il vaut naturellement:*  $t \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \lim_{\text{Re}(s) \rightarrow \infty} e^{-st} = 0$ )

Hinweis: • *Indication:*  $1 = y(0) = \lim_{t \downarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \lim_{s \rightarrow \infty} Y(s) \Rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} Y(s) = 0$

$$\Rightarrow 0 = \lim_{\text{Re}(s) \rightarrow \infty} Y(s) = \lim_{\text{Re}(s) \rightarrow \infty} -\arctan(s) + C = -\frac{\pi}{2} + C \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan(s), \quad \int_s^\infty \frac{1}{1 + \sigma^2} d\sigma = \frac{\pi}{2} - \arctan(s) = Y(s) \circ \bullet ?$$

$$\Rightarrow Y(s) = -\int_s^\infty Y'(\sigma) d\sigma = -\int_s^\infty \frac{-1}{1 + \sigma^2} d\sigma, \quad Y'(s) = \frac{dY}{ds} = \frac{d \frac{\pi}{2} - \arctan(s)}{ds} = -\frac{1}{1 + s^2}$$

$$\Rightarrow Y'(s) = \frac{-1}{1 + s^2} \bullet \circ -\sin(t) = -t \cdot y(t) \Rightarrow Y(s) \bullet \circ \frac{\sin(t)}{t}$$

Interessanterweise tritt in  $y(t)$  jetzt  $\lambda$  nicht mehr auf! Doch wir haben Glück:  $y(t)$  erfüllt die Randbedingung  $y(\pi) = \frac{\sin(\pi)}{\pi} = 0$ . Wegen der Regel von Bernoulli ist auch die andere Randbedingung erfüllt:

$$y(0) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1 \Rightarrow y(t) = \frac{\sin(t)}{t} \text{ ist Lösung!} \bullet \text{ Il est intéressant que dans } y(t), \lambda \text{ n'apparaît plus!}$$

Mais nous avons de la chance:  $y(t)$  satisfait les conditions aux limites  $y(\pi) = \frac{\sin(\pi)}{\pi} = 0$ . A cause de la règle de Bernoulli, l'autre condition aux limites est aussi satisfaite:  $y(0) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1 \Rightarrow y(t) = \frac{\sin(t)}{t}$  est solution!

## 3.7 LTI-Systeme — Systèmes LTI

### 3.7.1 Grundlagen — Fondements

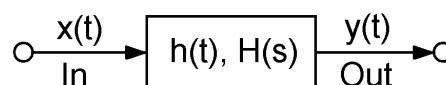
**Bedeutung:** • **Signification:** **LTI-Systeme:** Lineare zeitinvariante Übertragungssysteme, wichtig in der Signal- und Rundfunktechnik. • **Systèmes LTI:** Systèmes de transmission linéaires et invariants par rapport au temps, importants dans la technique des signaux et de la radio.

Wir betrachten den folgenden Typus: • *Nous étudions le type suivant:*

$x(t)$ : Eingangssignal • *Signal au début*

$y(t)$ : Ausgangssignal • *Signal à la fin*

$H(s)$ : Übertragungsfunktion • **Fonction de transmittance**





Wir wollen hier nur Funktionen mit der folgenden Eigenschaft betrachten: • *Ici nous voulons étudier seulement les fonctions avec la qualité suivante:*

$$y(t) \circ \bullet Y(s) = H(s) \cdot X(s) \bullet \circ h(t) * x(t) = y(t), \quad H(s) \bullet \circ h(t), \quad X(s) \bullet \circ x(t)$$

Zur Zeit  $t = 0$  herrscht der **Nullzustand** (Zero state). • *Au temps  $t = 0$  on trouve la condition de zéro (Zero state).*

Sei weiter das System dergestalt, dass  $y(t)$  und  $x(t)$  durch eine lineare D'Gl mit konstanten Koeffizienten zusammenhängen. Dazu seien die Randbedingungen homogen. • *Le système soit de telle manière que  $y(t)$  et  $x(t)$  soient liées par une éq.diff. aux coefficients constants. Les conditions initiales soient en plus homogènes.*

$\leadsto$  Sei • *Soit  $E(x, y) \equiv x(t) = \alpha_n y^{(n)} + \dots + \alpha_1 y^{(1)} + \alpha_0 y$ ,  $y(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0$*   
 $\leadsto$  AWP, Nullzustand homogen. • *PVI, conditions zéro homogènes.*

Dann gilt: • *Puis il vaut:*  $E(x, y) \circ \bullet X(s) = \alpha_n s^n Y + \dots + \alpha_1 s Y + \alpha_0 Y$

$\leadsto X(s) = P(s) \cdot Y(s)$  mit • *avec  $P(s) = \alpha_n s^n + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0$ ,*  
 $Y(s) = \frac{X(s)}{P(s)} := H(s) \cdot X(s) \Rightarrow H(s) = \frac{1}{P(s)}, \quad H(s) \cdot P(s) = 1$

Rücktransformation: • *Transformation inverse:*

$$\alpha_n s^n H(s) + \dots + \alpha_1 s H(s) + \alpha_0 H(s) = H(s) \cdot P(s) = 1 \bullet \circ \delta(t) = \alpha_n y^{(n)} + \dots + \alpha_1 y' + \alpha_0 y$$

mit • *avec  $h(0) = \dots = h^{(n-1)}(0) = 0$*

**Bedeutung von  $h(t)$**  • **Signification de  $h(t)$**  Die Rücktransformierte  $h(t)$  der Übertragungsfunktion ist demnach die Antwort des Systems auf das Eingangssignal  $\delta(t)$  (Dirac-Stoss). • *La transformée inverse  $h(t)$  de la fonction de transmittance est donc la réponse au signal d'entrée  $\delta(t)$  (coup de Dirac).*

**Andere Interpretation von  $h(t)$ :** • **Autre interprétation de  $h(t)$ :**

$$\begin{aligned} H(s) \cdot P(s) - 1 &= \alpha_n s^n H(s) - 1 + \alpha_{n-1} s^{n-1} H(s) + \dots + \alpha_1 s H(s) + \alpha_0 H(s) \\ &= \alpha_n \left( s^n H(s) - \frac{1}{a_n} \right) + \alpha_{n-1} s^{n-1} H(s) + \dots + \alpha_1 s H(s) + \alpha_0 H(s) = 0 \circ \bullet \alpha_n y^{(n)} + \dots + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = 0, \\ &\quad h(0) = h'(0) = \dots = h^{(n-2)}(0) = 0, \quad h^{(n-1)}(0) = \frac{1}{a_n} \end{aligned}$$

Wegen der ersten Interpretation definieren wir: • *Nous définissons à cause de la première interprétation:*

**Definition:** • **Définition:**  $h(t)$  heisst **Impulsantwort** • *s'appelle réponse d'impulsion*

$\leadsto$  Übertragungsfunktion • *fonction de transmittance* •  $\circ$  Impulsantwort • *réponse d'impulsion*

### 3.7.2 Beispiele, Systemverknüpfungen — Exemples, liaisons de systèmes

**Tiefpassfilter** — **Filtre passe-bas**

**Bsp.:** • **Exemple:**

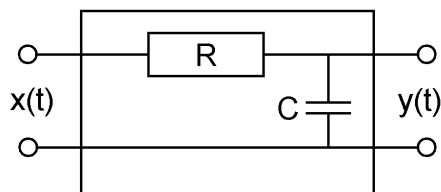
Es gilt: • *Il vaut:*

$$R \cdot \dot{y} + \frac{y}{C} = \frac{x}{C}$$

RBed homogen • *Cond.lim. homogènes*

$$\leadsto R \cdot C \cdot \dot{y} + y = x \circ \bullet (R \cdot C \cdot s + 1) Y = X$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{1}{R \cdot C \cdot s + 1} \bullet \circ \frac{1}{R \cdot C} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} = h(t) \leadsto \text{stabil} \bullet \text{stable}$$

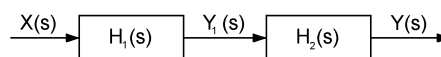


### Ungedämpfter Schwingkreis — Circuit oscillant non-amorti

$$\ddot{y} + \omega^2 y = x(t) \circ \bullet s^2 Y + \omega^2 Y = X \Rightarrow H(s) = \frac{1}{s^2 + \omega^2} \bullet \circ \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \leadsto \text{marginal stabil} \bullet \text{semi-stable}$$

### Reihenschaltung — Couplage en série

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= H_1(s) \cdot X(s), \\ Y(s) &= Y_2(s) = H_2(s) \cdot Y_1(s) \\ \Rightarrow Y(s) &= H_2(s) \cdot H_1(s) \cdot X(s) \end{aligned}$$



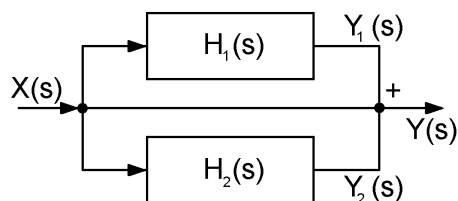
Regel: • Règle:

$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s)$$

### Parallelschaltung — Couplage en dérivation (montage en parallèle)

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) \circ \bullet Y_1(s) + Y_2(s)$$

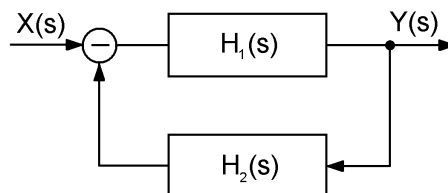
$$\begin{aligned} Y_1(s) &= H_1(s) \cdot X(s), \\ Y_2(s) &= H_2(s) \cdot X(s) \\ \Rightarrow Y(s) &= Y_1(s) + Y_2(s) \\ &= H_1(s) \cdot X(s) + H_2(s) \cdot X(s) \\ &= (H_1(s) + H_2(s)) \cdot X(s) \\ &= H(s) \cdot X(s) \end{aligned}$$



Regel: • Règle:  $H(s) = H_1(s) + H_2(s)$

### Rückführschaltung — Couplage de retour

$$\begin{aligned} Y &= H \cdot X, \quad Y_2 = H_2 \cdot Y \\ \Rightarrow H_1 \cdot X &= H_1 \cdot H_2 \cdot Y \\ \Rightarrow H \cdot X &= H_1 \cdot X - H_1 \cdot H_2 \cdot H \cdot X \\ \Rightarrow H &= \frac{H_1}{1 + H_1 \cdot H_2} \end{aligned}$$



Regel: • Règle:  $H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1 \cdot H_2(s)}$

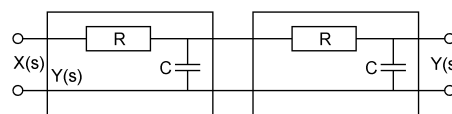
**Reihe von Tiefpassfiltern — Série de filtres passe-bas**

$$H_1 = \frac{1}{1 + sRC}, \quad H_2 = H_1$$

$$\Rightarrow H = H_1 \cdot H_2 = \left( \frac{1}{1 + sRC} \right)^2$$

$\leadsto$  Impulsantwort: • *Réponse à l'impulsion:*

$$h(t) = \frac{1}{(R \cdot C)^2} \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

**Bemerkung: • Remarque:**

1. Ein lineares System ist stabil, wenn für die Impulsantwort resp. die Stossantwort gilt:
  - *Un système linéaire est stable, si pour la réponse à l'impulsion il vaut:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$$

2. Oft werden in der Literatur zur Laplace-Transformation verwandte Transformationen verwendet:
  - *Souvent dans la littérature on trouve des transformations liées à la transformation de Laplace:*

**(a) Laplace-Carson-Transformation: • Transformation de Laplace-Carson:**

**Def.: • Déf.:**  $F_C(s) = F(s) \cdot s$

$F(s) \cdot s$  tritt im Anfangs- resp. im Endwertsatz auf.

- $F(s) \cdot s$  apparaît dans le théorème de valeurs au début ou à la fin.

Z.B. • *P.ex.*  $\lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s) = \lim_{t \downarrow 0} f(t)$

**(b) 2-seitige Laplace-Transformation: • Transformation de Laplace à deux côtés:**

**Def.: • Déf.:**  $F_2(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) dt$

Da wir nur Funktionen mit  $f(t) = 0$  für  $t < 0$  betrachten, ändert sich mit dieser Transformation bei uns nichts. Man erhält aber damit eine Schreibweise, die analog zur Fouriertransformation ist.

- *Comme nous ne considérons que des fonctions avec  $f(t) = 0$  pour  $t < 0$ , rien ne change avec cette transformation chez nous. L'avantage est qu'on obtient une orthographe qui est analogue à la transformation de Fourier.*



## Kapitel • Chapitre 4

# Fourierreihen — Séries de Fourier

### 4.1 Einführung — Introduction

#### 4.1.1 Verwendung — Utilisation

Fourierreihen werden vielerorts in Wissenschaft und Technik zur Analyse und Beschreibung periodischer Vorgänge verwendet. Ein wichtiges Beispiel ist die Signalübertragung.

• *On utilise les séries de Fourier dans beaucoup de domaines de la science et de la technique pour l'analyse et la description de processus périodiques. Un exemple important est le transfert de signaux.*

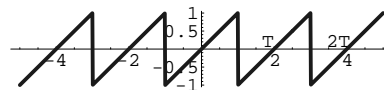
#### 4.1.2 Periodische Funktionen — Fonctions périodiques

**Definition:** • **Définition:**

$f(t)$  heisst  $T$ -periodisch

•  $f(t)$  s'appelle **périodique** avec  $T$

$$\Leftrightarrow \forall_{t \in \mathbb{R}} : f(t) = f(t + T)$$



$T$  heisst **Periodenlänge** •  $T$  s'appelle **longueur de la période**

**Problem:** • **Problème:**  $f(t_0) = f(t_0 + T) \leadsto$  Man hätte gern  $T = 2\pi$  • *On aimerait avoir  $T = 2\pi$*

Substitution: • *Substitution:*  $t' := t \cdot \frac{2\pi}{T}, \quad t := t' \cdot \frac{T}{2\pi}$

Setze: • *Mettre:*  $f(t) = f(t' \cdot \frac{T}{2\pi}) := f_1(t')$

$$\Rightarrow f_1(t') = f(t) = f(t+T) = f(t' \cdot \frac{T}{2\pi} + T \cdot \frac{2\pi}{2\pi}) = f((t' + 2\pi) \cdot \frac{T}{2\pi}) = f_1(t' + 2\pi) \Rightarrow f_1(t') = f_1(t' + 2\pi)$$

**Lemma:** • **Lemme:** **Vor.:** • **Hyp.:**  $f(t) = f(t + T), \quad t := t' \cdot \frac{T}{2\pi}, \quad f(t) = f_1(t')$

**Beh.:** • **Thè.:**  $f_1(t') = f_1(t' + 2\pi)$

$f_1$  ist also  $2\pi$ -periodisch. Daher kann man o.B.d.A.<sup>5</sup>  $T = 2\pi$  setzen.

•  $f_1$  est donc périodique avec la période  $2\pi$ , c'est pourquoi nous pouvons mettre s.r.d.l.u.<sup>6</sup>  $T = 2\pi$ .

### 4.1.3 Trigonometrische Reihen — Séries trigonométriques

**Definition:** • **Définition:** **Trigonometrische Reihen** sind Ausdrücke der folgenden Art:  
 • **Les séries trigonométriques** sont des expressions du genre suivant:

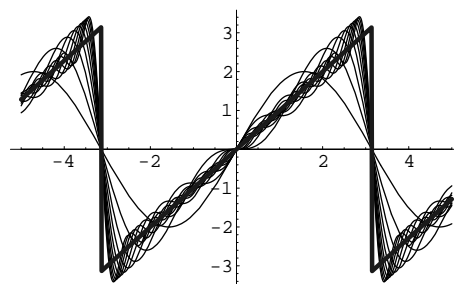
$$1. f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(t) + b_1 \sin(t) + \dots + a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

$$2. \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(\omega k t) + b_k \sin(\omega k t)), \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$3. 2(\sin(t) - \frac{1}{2} \sin(2t) + \frac{1}{3} \sin(3t) - \dots) = 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kt)$$

Konvergiert eine solche Reihe?

• Est-ce qu'une telle série converge-t-elle?



**Lemma:** • **Lemme:** **Vor.:** • **Hyp.:**

Trig. Reihe konv. für  $t = t_0$  • *Série trig conv. pour  $t = t_0$*

**Beh.:** • **Thè.:**

Trig. Reihe konv. für  $t = t_0 + T$  resp.  $t = t_0 + 2\pi$

• *Série trig conv. pour  $t = t_0 + T$  resp.  $t = t_0 + 2\pi$*

**Lemma:** • **Lemme:** Trigonometrische Reihen sind  $T$  resp.  $2\pi$ -periodisch.

• *Les séries trigonométriques sont périodiques avec la période  $T$  resp. avec la période  $2\pi$ .*

**Bemerkung:** • **Remarque:**

Im Folgenden betrachten wir trigonometrische Reihen, die „technisch vernünftig“ sind, d.h. stückweise stetig, über eine Periode integrierbar etc.. • *Dans ce qui suit, nous considérons les séries trigonométriques qui sont techniquement raisonnables, c.-à.-d. continues par morceaux, intégrable sur une période etc..*

<sup>5</sup>Ohne Beschränkung der Allgemeinheit

<sup>6</sup>sans restriction de l'universalité

## 4.2 Fourierreihen und Fourieranalyse — Séries et analyse de Fourier

**Bemerkung:** • **Remarque:** Statt Fourieranalyse sagt man auch **harmonische Analyse** (vgl. nächstes Kapitel).  
 • *Au lieu de parler de l'analyse de Fourier, on parle aussi de l'analyse harmonique (voir chapitre prochain).*

**Konvention:** • **Convention:** Sei o.B.d.A.: • *Soir s.r.d.l.u.:*  $\forall t \in \mathbb{R} : f(t) = f(t + 2\pi), T = 2\pi$

### 4.2.1 Das Darstellungsproblem — Le problème de la représentation

Fourierpolynome — Polynômes de Fourier

**Definition:** • **Définition:**  $f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$  heisst **Fourierpolynom** vom **Grade**  $n$ . • *s'appelle Polynôme de Fourier du degré  $n$ .*

**Problem:** • **Problème:** Eine gegebene periodische Funktion  $f$  soll möglichst gut durch Fourierpolynome approximiert werden. Gesucht sind **Kriterien für gute Approximation**. • *Une fonction périodique  $f$  donnée doit être approximée aussi bien que possible par des polynômes de Fourier. On cherche des critères pour une bonne approximation.*

**Idee:** • **Idée:** Suche Approximationen  $f_n$  mit **minimaler Fehlerquadratsumme** (MFQS):  
 • *Chercher des approximations  $f_n$  avec une somme minimale des carrés des résidus (SEQR):*

$$\leadsto \int_0^{2\pi} (f - f_n)^2 dt = \int_0^{2\pi} \left( f - \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \right) \right)^2 dt = \varphi(a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n) \rightarrow \text{Min}$$

$\varphi$  ist eine quadratische Funktion mit  $2n+1$  Variablen. Setzt man die partiellen Ableitungen 0 (Bedingung für Minimum), so erhält man ein lineares Gleichungssystem, das sich eindeutig lösen lässt. Es zeigt sich, dass das so gefundene Minimum eine ideale Approximation darstellt. •  *$\varphi$  est une fonction carrée avec  $2n+1$  variables. Si on met les dérivées partielles égales à 0 (condition pour le minimum), on obtient un système d'équations linéaires qui peut être résolu clairement. On va voir que le minimum ainsi trouvé représente une approximation idéale.*

**Formeln von Euler** — **Formules d'Euler**

**Problem:** • **Problème:** Berechnung der Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$  (Variablen von  $\varphi$ )  
 • *Calculer les coefficients  $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$  (variables dans  $\varphi$ )*

In der nachfolgenden Berechnung verwenden wir die **Orthogonalitätsrelationen** (Integral als Skalarprodukt): • *Dans le calcul qu'il faut faire maintenant nous utilisons les relations d'orthogonalité (intégrale comme produit scalaire):*

$$\int_0^{2\pi} \sin(kt) \cdot \sin(mt) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos((k-m) \cdot t) - \cos((k+m) \cdot t) dt = \begin{cases} 0 & k \neq m, \quad k, m \in \mathbb{Z} \\ \pi & k = m \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(kt) \cdot \cos(mt) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin((k-m) \cdot t) + \sin((k+m) \cdot t) dt = 0 \quad \forall k, m \in \mathbb{Z}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(kt) \cdot \cos(mt) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos((k-m) \cdot t) + \cos((k+m) \cdot t) dt = \begin{cases} 0 & k \neq m, \quad k, m \in \mathbb{Z} \\ \pi & k = m \end{cases}$$

Hinweis z.B. zur zweiten dieser Formeln: • *Indication p.ex. pour la 2ème de ces formules:*

$$\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) = (\sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta)) + (\sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)) = 2 \sin(\alpha) \cos(\beta)$$

Damit wird die nachfolgende Herleitung möglich: • *Comme ça la déduction suivante devient possible:*

$$1. \frac{\partial \varphi}{\partial a_k} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial a_k} (f - f_n)^2 dt = - \int_0^{2\pi} 2(f - f_n) \cdot \frac{\partial}{\partial a_k} f_n dt = - \int_0^{2\pi} 2(f - f_n) \cdot \cos(kt) dt = 0 \text{ (Min.)}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} f \cdot \cos(kt) dt = \int_0^{2\pi} f_n \cdot \cos(kt) dt = \int_0^{2\pi} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m \cos(mt) + b_m \sin(mt)) \right) \cdot \cos(kt) dt$$

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} \cos(kt) dt}_{=0} + \underbrace{\sum_{k=1}^n \left( a_k \int_0^{2\pi} \cos(mt) \cos(kt) dt + b_k \int_0^{2\pi} \sin(mt) \cos(kt) dt \right)}_{=\pi, \quad k=m} = a_k \cdot \pi$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f \cdot \cos(kt) dt$$

$$2. \frac{\partial \varphi}{\partial b_k} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial b_k} (f - f_n)^2 dt = - \int_0^{2\pi} 2(f - f_n) \cdot \frac{\partial}{\partial b_k} f_n dt = - \int_0^{2\pi} 2(f - f_n) \cdot \sin(kt) dt = 0 \text{ (Min.)}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} f \cdot \sin(kt) dt = \int_0^{2\pi} f_n \cdot \sin(kt) dt = \int_0^{2\pi} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m \cos(mt) + b_m \sin(mt)) \right) \cdot \sin(kt) dt$$

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} \sin(kt) dt}_{=0} + \underbrace{\sum_{k=1}^n \left( a_k \int_0^{2\pi} \cos(mt) \sin(kt) dt + b_k \int_0^{2\pi} \sin(mt) \sin(kt) dt \right)}_{=\pi, \quad k=m} = b_k \cdot \pi$$

$$\Rightarrow b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f \cdot \sin(kt) dt$$

$$3. \frac{\partial \varphi}{\partial a_0} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial a_0} (f - f_n)^2 dt = - \int_0^{2\pi} 2(f - f_n) \cdot \frac{\partial}{\partial a_0} f_n dt = - \int_0^{2\pi} 2(f - f_n) \cdot \frac{1}{2} dt = 0$$

$$\leadsto \int_0^{2\pi} f dt = \int_0^{2\pi} f_n dt = \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} dt + \sum_{k=1}^n \left( a_k \int_0^{2\pi} \cos(kt) dt + b_k \int_0^{2\pi} \sin(kt) dt \right) = \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot 2\pi + 0 + 0 = a_0 \cdot \pi$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt, \quad \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$$

$\leadsto a_0$  = Mittelwert von  $f$  über  $[0, 2\pi]$ . •  $a_0$  = *valeur moyenne de  $f$  sur  $[0, 2\pi]$ .*



Somit kennen wir die Formeln von Euler für die idealste Approximation (MFQS):

- *Ainsi nous connaissons la formule d'Euler pour l'approximation la plus idéale (SEQR)*

**Satz:** • **Théorème:**     **Vor.:** • **Hyp.:**

$f$   $2\pi$ -periodisch und vernünftig •  $f$  périodique avec  $2\pi$  et raisonnable

**Beh.:** • **Thè.:**

$$\begin{aligned}\frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \cos(kt) dt \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \sin(kt) dt\end{aligned}$$

**Definition:** • **Définition:**

- $a_0, a_k, b_k$  heißen **reelle Fourierkoeffizienten**
- $a_0, a_k, b_k$  s'appellent **coefficients de Fourier réels**
- $f_n$  heisst  **$n$ -te Approximation**
- $f_n$  s'appelle  $n^{\text{ième}}$  **approximation**

**Bemerkung:** • **Remarque:**

1.  $a_0, a_k, b_k$  hängen nicht von  $n$  ab! • *ne dépendent pas de  $n$ !*
2. Wenn wir  $n$  vergrößern, so wird die Approximation besser, falls die neu hinzukommenden Fourierkoeffizienten  $\neq 0$  sind. (Ansonst hätte man ja eine bessere Approximation mit neuen Koeffizienten  $= 0$ .) • *Si nous accroissons  $n$ , l'approximation s'améliore si les coefficients de Fourier qui s'ajoutent sont  $\neq 0$ . (Si non on aurait une meilleure approximation avec les nouveaux coefficients  $= 0$ .)*

## 4.2.2 Das Konvergenzproblem — Le problème de la convergence

Fourierreihen — Séries de Fourier

**Definition:** • **Définition:**     Sei • *Soit*  $\tilde{f}(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) := f_\infty(t)$   
 $\tilde{f}$  heisst **Fourierreihe** von  $f$ .  
 •  $\tilde{f}$  s'appelle **série de Fourier** de  $f$ .

**Problem:** • **Problème:**

Wann gilt für ein gegebenes  $f(t)$  in  $[0, 2\pi]$  punktweise die nachfolgende Beziehung?

- *Quand est-ce que l'équation suivante vaut pour un  $f(t)$  donné dans  $[0, 2\pi]$  point par point?*

$$\forall t: f(t) = \tilde{f}(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f_\infty(t)$$

**Annahme:** • **Hypothèse:**

Die Funktionenfolge  $\langle f_n \rangle$  konvergiere gleichmässig ( $\mathcal{UNIFCONV}$ ) in  $[0, 2\pi]$  gegen  $\tilde{f}(t)$ . Bei gleichmässiger Konvergenz darf man unendliche Summen gliedweise integrieren. Die Fourierkoeffizienten sind daher nach den Eulerschen Formeln berechenbar. • *La suite de fonctions  $\langle f_n \rangle$  converge de façon uniforme ( $\mathcal{UNIFCONV}$ ) dans  $[0, 2\pi]$  vers  $\tilde{f}(t)$ . Au cas de la convergence uniforme on peut intégrer les sommes infinies membre par membre. Par conséquent les coefficients de Fourier sont calculables d'après les formules d'Euler.*

### Untersuchung: • Examination:

Sei  $f$  stetig in  $[0, 2\pi]$ . • *Soit  $f$  continue dans  $[0, 2\pi]$ .*

$f_n$  war so definiert, dass  $\int_0^{2\pi} (f - f_n)^2 dt$  minimal war (MFQS). Wegen der gleichmässigen Konvergenz kann man somit herleiten:

•  *$f_n$  était définie de manière que  $\int_0^{2\pi} (f - f_n)^2 dt$  était minimal (SEQR). A cause de la convergence uniforme on peut donc déduire:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} (f - f_n)^2 dt = \int_0^{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} (f - f_n)^2 dt = \int_0^{2\pi} (f - \tilde{f})^2 dt = \int_0^{2\pi} \varphi(t)^2 dt, \quad \varphi(t) = f(t) - \tilde{f}(t)$$

Wegen der gleichmässigen Konvergenz ist mit  $f(t)$  auch  $\tilde{f}(t)$  stetig, also auch  $f(t) - \tilde{f}(t) = \varphi(t)$ . • *A cause de la convergence uniforme, si  $f(t)$  est continue,  $\tilde{f}(t)$  est aussi continue, donc aussi  $f(t) - \tilde{f}(t) = \varphi(t)$ .*

Würde nun  $\int_0^{2\pi} \varphi(t)^2 dt \neq 0$  gelten, so wäre die stetige Funktion  $\varphi(t) \not\equiv 0$  in  $[0, 2\pi]$ . Man könnte daher  $\varphi(t)$  in  $[0, 2\pi]$  durch Fourierpolynome  $\varphi_n(t) \not\equiv 0$  approximieren.

• *Si on avait  $\int_0^{2\pi} \varphi(t)^2 dt \neq 0$ , la fonction continue  $\varphi(t)$  serait  $\not\equiv 0$  dans  $[0, 2\pi]$ . On pourrait donc approximer  $\varphi(t)$  dans  $[0, 2\pi]$  par des polynômes de Fourier  $\varphi_n(t) \not\equiv 0$ .*

Für die MFQS würde das dann bedeuten: • *Pour la SEQR cela signifierait:*

$$\int_0^{2\pi} (\varphi - \varphi_n)^2 dt = \int_0^{2\pi} (f - \tilde{f} - \varphi_n)^2 dt < \int_0^{2\pi} \varphi^2(t) dt = \int_0^{2\pi} (f - \tilde{f})^2 dt \Rightarrow \int_0^{2\pi} (f - (\tilde{f} + \varphi_n))^2 dt < \int_0^{2\pi} (f - \tilde{f})^2 dt$$

$(\tilde{f} + \varphi_n)$  würde daher  $f$  besser approximieren als  $\tilde{f}$  alleine. Somit wäre dann  $\tilde{f}$  nicht mehr die beste Approximation, die MFQS wäre somit nicht minimal.

•  *$(\tilde{f} + \varphi_n)$  approximerait donc  $f$  mieux que  $\tilde{f}$  toute seule. Donc  $\tilde{f}$  ne serait plus l'approximation la meilleure, la SEQR ne serait donc pas minimale.*

$\leadsto$  Widerspruch! • *Contradiction!*

**Lemma:** • **Lemme:**      **Vor.:** • **Hyp.:**

$f \text{ stet'cont}([0, 2\pi]), f \text{ periodisch}$  •  $f \text{ périodique}, T = 2\pi$   
 $\langle f_n \rangle \in \mathcal{UNIFCONV}([0, 2\pi])$

**Beh.:** • **Thè.:**

$$\int_0^{2\pi} (f - \tilde{f})^2 dt = 0, \tilde{f} \in \text{stet'cont}([0, 2\pi])$$

**Konsequenz:** • **Conséquence:**  $f \text{ stet'cont}([0, 2\pi]), \langle f_n \rangle \in \mathcal{UNIFCONV}([0, 2\pi]) \Rightarrow$   
 $\forall t \in [0, 2\pi] f(t) = \tilde{f}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$

**Es entsteht somit die Frage:** Wann konvergiert  $\langle f_n \rangle$  gleichmässig in  $[0, 2\pi]$ ?

• **Par conséquent il se pose la question:**

*Quand est-ce que  $\langle f_n \rangle$  converge de façon iniforme dans  $[0, 2\pi]$ ?*

**Satz von Dirichlet** — **Théorème de Dirichlet**

**Betrachtung:** • **Examination:**

Gleichmässig konvergente Reihen darf man vor oder nach dem Summieren differenzieren, was allerdings nur Sinn macht, wenn die Glieder diff'bar sind und die Reihe der Ableitungen auch konvergiert. Weiter ist eine auf einem abgeschlossenen Intervall konvergente Reihe von stetigen Funktionen auch gleichmässig konvergent.

Fourierpolynome sind nun trivialerweise diff'bar. Daher muss im Falle der Konvergenz in  $[0, 2\pi]$  gelten:  $f'_n \rightarrow \tilde{f}'$ . Für  $f = \tilde{f}$  ist somit die Diff'barkeit von  $f$  notwendig.

Da hinreichende Bedingungen viel schwieriger zu behandeln sind als notwendige, wollen wir zuerst einen einfacheren Fall besprechen:

• *On peut calculer les dérivées de séries convergentes de façon uniforme avant de calculer ou après avoir calculé la somme. C'est en effet seulement sensé quand les termes de la série sont dérivables et si la série des dérivées converge. En outre une série de fonctions continues qui converge sur un intervalle fermé converge aussi de façon uniforme.*

*Il va de soi que les polynômes de Fourier sont dérivables. C'est pourquoi au cas de la convergence dans  $[0, 2\pi]$  il faut exiger:  $f'_n \rightarrow \tilde{f}'$ . Pour  $f = \tilde{f}$ , la dérivabilité de  $f$  est donc nécessaire.*

*Comme les conditions suffisantes sont beaucoup plus difficiles à traiter que les conditions nécessaires, nous voulons discuter d'abord un cas plus simple:*

**Satz:** • **Théorème:**      **Vor.:** • **Hyp.:**

$f$   $2\pi$ -periodisch •  $f$  périodique avec  $2\pi$   
 $f$  2 mal stetig diff'bar in  $[0, 2\pi]$   
 •  $f$  deux fois dérivable de façon continue dans  $[0, 2\pi]$

**Beh.:** • **Thè.:**

Die Fourierreihe  $\tilde{f}$  von  $f$  konvergiert gleichmässig und absolut.  
 • La série de Fourier  $\tilde{f}$  de  $f$  converge de façon uniforme et absolue.

**Zum Beweis:** • **Quant à la preuve:** Verwende • *Utiliser*  $\cos(0) = \cos(k 2\pi)$ ,  $f'(0) = f'(k 2\pi)$ .

$$\begin{aligned} \text{Z.B.} \quad & \bullet \text{ P.ex. } a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \cos(kt) dt = \frac{f(t)}{\pi} \cdot \frac{1}{k} \sin(kt) \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{k\pi} \int_0^{2\pi} f'(t) \cdot \sin(kt) dt \\ & = 0 + \frac{1}{k\pi} f'(t) \cdot \frac{1}{k} \cdot \cos(kt) \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{k^2\pi} \int_0^{2\pi} f''(t) \cdot \cos(kt) dt = -\frac{1}{k^2\pi} \int_0^{2\pi} f''(t) \cdot \cos(kt) dt \\ \Rightarrow |a_k| & \leq \frac{1}{k^2\pi} \int_0^{2\pi} |f''(t)| \cdot |\cos(kt)| dt \leq \frac{1}{k^2\pi} \int_0^{2\pi} |f''(t)| dt = \frac{1}{k^2\pi} k_1 \Rightarrow |a_k| \leq \frac{1}{k^2\pi} k_1 \quad \forall_k \end{aligned}$$

$$\text{Ebenso:} \quad \bullet \text{ De même: } |b_k| \leq \frac{1}{k^2\pi} k_2 \quad \forall_k$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \right| & \leq \left| \frac{a_0}{2} \right| + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| |\cos(kt)| + |b_k| |\sin(kt)|) \leq \left| \frac{a_0}{2} \right| + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) \\ & \leq \left| \frac{a_0}{2} \right| + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k^2\pi} k_1 + \frac{1}{k^2\pi} k_2 \right) = \left| \frac{a_0}{2} \right| + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k^2\pi} \underbrace{(k_1 + k_2)}_{=c} \right) = \left| \frac{a_0}{2} \right| + c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\pi} \end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\pi}$  ist eine konvergente  $p$ -Reihe mit  $p = 2$ . • *est une série  $p$  convergente avec  $p = 2$ .*

Falls die Fourierkoeffizienten durch ihre Absolutwerte ersetzt werden, erhält man dieselbe Majorante, was die absolute Konvergenz zeigt.

• *Si les coefficients de Fourier sont remplacés par leurs valeurs absolues, on obtient la même majorante, ce qui prouve la convergence absolue.* ☺

Aus obigem Satz und dem letzten Lemma erhält man sofort:

• *De ce théorème et du dernier lemme on obtient tout de suite:*

**Korollar:** • **Corollaire:****Vor.:** • **Hyp.:**

- $f$   $2\pi$ -periodisch •  $f$  périodique avec  $2\pi$
- $f$  2 mal stetig diff'bar in  $[0, 2\pi]$
- $f$  deux fois dérivable de façon continue dans  $[0, 2\pi]$

**Beh.:** • **Thè.:**

- (1)  $f(t) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$
- (2)  $a_0, a_k, b_k$  berechenbar nach Euler
  - $a_0, a_k, b_k$  calculable d'après Euler

Diese bisher gewonnenen Resultate lassen sich noch ausdehnen. So erhält man den **Konvergenzsatz von Dirichlet** für stückweise glatte resp. **normale** Funktionen. Bezüglich des Beweises sei auf die Literatur verwiesen.

• *On peut encore étendre ces résultats obtenus jusqu'ici. Ainsi on obtient le **théorème de convergence de Dirichlet** pour des fonctions lisses par morceaux resp. **normales**. Pour ce qui concerne la preuve, il faut consulter la littérature.*

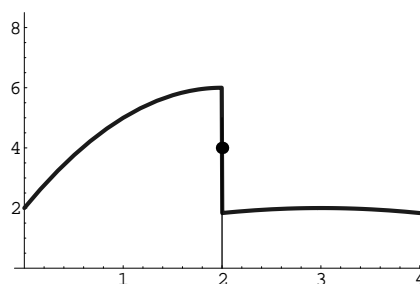
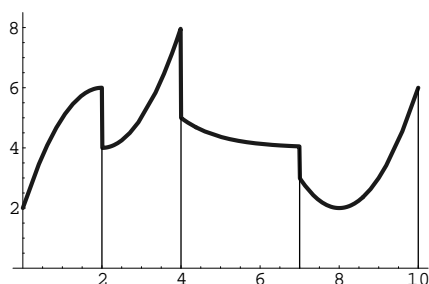
**Definition:** • **Définition:**

Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  nennen wir **stückweise glatt** auf einem Intervall, wenn sie dort fast überall stetig diff'bar ist, ausser ev. in isolierten Ausnahmepunkten nicht. In diesen existiert aber der rechts- und linksseitige Limes der Funktion und der Ableitung.

• *Nous appelons une fonction  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  **lisse par morceaux** sur un intervalle, si elle y est dérivable de façon continue dans presque tous les points, sauf éventuellement à des points d'exception isolés. Dans ces points d'exception il existe la valeur limite de droite et de gauche pour la fonction et la dérivée.*

Entsprechend definieren wir für Funktionen  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ .

• *Correspondamment nous définissons pour les fonctions  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ .*

**Illustration:** • *Illustration:*

**Satz:** • **Théorème:** von Dirichlet • de Dirichlet  
Vor.: • Hyp.:

$f$  stückweise glatt in  $[0, 2\pi]$  •  $f$  lisse par morceaux dans  $[0, 2\pi]$

$$\tilde{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$$

Beh.: • Thè.:

1.  $\tilde{f} = f(t)$  in allen Stetigkeitspunkten von  $f$   
 •  $\tilde{f} = f(t)$  dans tous les points de continuité de  $f$
2. In den Sprungstellen  $\xi$  konvergiert die Fourierreihe gegen das arithmetische Mittel der Funktionsgrenzwerte:  
 • Dans les places de saut  $\xi$  la série de Fourier converge vers la moyenne arithmétique des valeurs limites de fonction:

$$\tilde{f}(\xi) = \frac{1}{2} (f(\xi^+) + f(\xi^-))$$

**Bemerkungen:** • **Remarques:**

1. Damit ist die Klasse der Funktionen, die sich in eine konvergente Fourierreihe entwickeln lassen, keineswegs ausgeschöpft. Z.B. Weierstrass hat eine Funktion angegeben, die überall stetig ist, nirgends diff'bar ist, jedoch in eine konvergente Fourierreihe entwickelt werden kann. • Avec cela, la classe des fonctions, qui peuvent être développées dans une série de Fourier convergente, n'est pas du tout épuisée. P.ex. Weierstrass a donné une fonction qui est continue partout, mais qui n'est dérivable dans aucun point et cependant qui peut être développée partout dans une série de Fourier convergente.
2. (a) In der **harmonischen Analyse** geht es darum, zu einer gegebenen Funktion die Fourierkoeffizienten zu bestimmen, d.h. die Fourierentwicklung durchzuführen.  
 • Dans l'analyse harmonique, il s'agit de trouver les coefficients de Fourier pour une fonction donnée, c.-à.-d., effectuer le développement de Fourier.
- (b) In der **harmonischen Synthese** stellt man sich das Problem, die Funktion zu finden, deren Fourierkoeffizienten (genannt das **Spektrum**) gegeben sind.  
 • Dans la synthèse harmonique, on se pose le problème de trouver la fonction dont on connaît les coefficients de Fourier (appelé le spectre).

## 4.2.3 Folgerungen und Konsequenzen — Conclusions et conséquences

Korollar: • Corollaire:

Vor.: • Hyp.:

Seien • Soient

 $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $f$  diff'bar/dérivable,  $f'$  beschr'borné([a, b])Beh.: • Thè.:

$$(1) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \cdot \cos(k \cdot t) dt = 0$$

$$(2) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \cdot \sin(k \cdot t) dt = 0$$

Zum Beweis: • Quant à la preuve: Z.B. • P.ex. (1):

$$\begin{aligned} \leadsto \left| \int_a^b f(t) \cdot \sin(k \cdot t) dt \right| &= \left| -\frac{1}{k} f(t) \cos(k \cdot t) \Big|_a^b + \frac{1}{k} \int_a^b f(t)' \cdot \cos(k \cdot t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{k} (|f(a)| |\cos(k \cdot a)| + |f(b)| |\cos(k \cdot b)|) + \frac{1}{k} \int_a^b |f(t)'| \cdot |\cos(k \cdot t)| dt \leq \frac{1}{k} (|f(a)| + |f(b)|) + \frac{1}{k} \int_a^b |f(t)'| dt \\ &= \frac{1}{k} \cdot (f(a) + f(b) + C) \rightarrow 0 \quad \text{mit } \bullet \text{ avec } k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Nun studieren wir einige Tricks zur Gewinnung neuer Fourierreihen aus gegebenen Fourierreihen durch Integration und Differentiation:

• *Maintenant nous étudions quelques trucs pour obtenir de nouvelles séries de Fourier par intégration et dérivées de séries données:*

Korollar: • Corollaire:

Vor.: • Hyp.:Die Fourierreihe  $\tilde{f}(t)$  konvergiere gleichmässig im Intervall  $I$ .

• *La série de Fourier  $\tilde{f}(t)$  converge de façon uniforme dans l'intervalle  $I$ .*

Beh.: • Thè.:

$\tilde{f}(t)$  lässt sich gliedweise integrieren. Zur Bestimmung der Integrationskonstante ist eine Nebenbedingung notwendig. Das Resultat ist wieder eine Fourierreihe, falls  $a_0 = 0$  gilt.

•  *$\tilde{f}(t)$  est intégrable terme par terme. Pour calculer la constante d'intégration, une condition secondaire est nécessaire. Le résultat est de nouveau une série de Fourier pour  $a_0 = 0$ .*

**Korollar:** • **Corollaire:****Vor.:** • **Hyp.:**

Die Fourierreihe  $\tilde{f}(t)$  sowie ihre Ableitung  $\tilde{f}'(t)$  konvergieren gleichmässig im Intervall  $I$ .

• *La série de Fourier  $\tilde{f}(t)$  et aussi sa dérivée  $\tilde{f}'(t)$  convergent de façon uniforme dans l'intervalle  $I$ .*

**Beh.:** • **Thè.:**

$\tilde{f}'(t)$  lässt sich durch gliedweise Differentiation von  $\tilde{f}(t)$  gewinnen.

•  *$\tilde{f}'(t)$  peut être obtenu en calculant la dérivée terme par terme dans  $\tilde{f}(t)$ .*

Dass die Reihe der Ableitungen der Glieder nicht notwendigerweise konvergieren muss, zeigt das folgende **Beispiel:**

• **L'exemple suivant montre que la série des dérivées des termes ne doit pas converger nécessairement:**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt)}{k} = \tilde{f}(t) \text{ conv}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt)}{k} = \tilde{f}(t) = -\ln(2 \cdot \sin(\frac{t}{2})), \quad 0 < t < 2\pi, \text{ siehe}^7. \quad \bullet \text{ voir}^7.$$

Durch gliedweise Differentiation ergibt sich: • *En calculant la dérivée terme par terme, on obtient:*

$$\tilde{f}'(t) \stackrel{?}{=} - \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kt) \rightsquigarrow \text{Es gilt aber: } \bullet \text{ Mais il vaut: } g(t, n) = \sum_{k=1}^n \sin(kt) = \frac{\cos(\frac{t}{2})}{2 \sin(\frac{t}{2})} - \frac{\cos((n + \frac{1}{2}) \cdot t)}{2 \sin(\frac{t}{2})}$$

$\rightsquigarrow$  **Problem:**  $\cos((n + \frac{1}{2}))$  ist nicht konvergent für  $n \rightarrow \infty$ .

•  $\rightsquigarrow$  **Problème:**  $\cos((n + \frac{1}{2}))$  n'est pas convergent pour  $n \rightarrow \infty$ .

Weiter gilt z.B.<sup>7</sup>: • *En outre il vaut p.ex.<sup>7</sup>:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kt)}{k} = \frac{\pi - t}{2}, \quad 0 < t < 2\pi \text{ und } \bullet \text{ et } \sum_{k=1}^{\infty} r^k \sin(kt) = \frac{r \sin(t)}{1 - 2r \cos(t) + r^2}, \quad |r| < 1$$

**Beispiele:** • **Exemples:**

$$(1) \quad f(t) = \begin{cases} t & t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - t & t \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \end{cases}, \quad f(t) = \tilde{f}(t) = \frac{4}{\pi} \left( \frac{\sin(t)}{1^2} - \frac{\sin(3t)}{3^2} + \frac{\sin(5t)}{5^2} - \frac{\sin(7t)}{7^2} \pm \dots \right)$$

$$(2) \quad f(t) = \begin{cases} +1 & t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ -1 & t \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \end{cases}, \quad f(t) \sim \tilde{f}(t) = \frac{4}{\pi} \left( \frac{\cos(t)}{1} - \frac{\cos(3t)}{3} + \frac{\cos(5t)}{5} - \frac{\cos(7t)}{7^2} \pm \dots \right)$$

In Beispiel 2 treffen wir eine Sprungstelle, daher „ $\sim$ “.

• *Dans l'exemple 2 nous avons une place de saut, donc nous écrivons „ $\sim$ “.*

#### 4.2.4 Sinus- und Cosinusreihen — Séries de sinus et cosinus

1. (a) **Gerade Funktionen:** • **Fonctions paires:**  $f(t) = f(-t)$

<sup>7</sup>Vgl.: • Voir: Meyberg–Vachenaier, Höhere Math. 2, p.313



Man erhält hier: • *Ici on obtient:*

$$\begin{aligned}\pi \cdot b_k &= \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \sin(kt) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \sin(kt) dt \stackrel{t' \equiv -t}{=} (-1) \cdot \int_{t=-\pi}^{t=\pi} \underbrace{f(-t')}_{=f(t')} \cdot \underbrace{\sin(k(-t'))}_{=-\sin(kt')} dt' \\ &= \int_{\pi}^{-\pi} f(t') \cdot \sin(k(t')) dt' = - \int_{-\pi}^{\pi} f(t') \cdot \sin(k(t')) dt' \stackrel{t' \equiv t}{=} - \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \sin(k(t)) dt = -\pi \cdot b_k \\ \Rightarrow \pi \cdot b_k &= -\pi \cdot b_k \Rightarrow \forall_k : b_k = 0 \Rightarrow \tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt)\end{aligned}$$

2. (b) **Ungerade Funktionen:** • **Fonctions impaires:**  $f(t) = -f(-t)$

Eine analoge Rechnung wie in (a) zeigt hier: • *Ici un calcul analogue comme dans (a) nous montre:*

$$\forall_k : a_k = 0 \Rightarrow \tilde{f}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kt)$$

**Definition:** • **Définition:**  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kt)$  heisst **Sinusreihe**. • ... s'appelle **série de sinus**.  
 $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt)$  heisst **Cosinusreihe**. • ... s'appelle **série de cosinus**.

**Korollar:** • **Corollaire:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$f(t)$  ist in eine Fourierreihe  $\tilde{f}(t)$  entwickelbar.

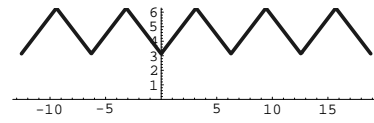
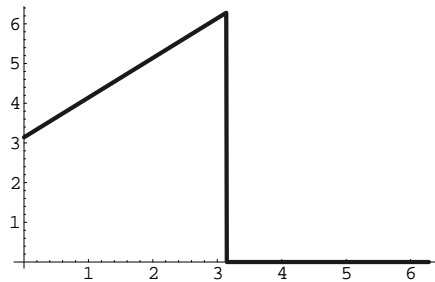
• *On peut développer  $f(t)$  en une série de Fourier  $\tilde{f}(t)$ .*

**Beh.:** • **Thè.:**

- (1)  $f(t)$  gerade • *paire*  
 $\Rightarrow \tilde{f}(t)$  Cosinusreihe •  $\tilde{f}(t)$  Série de cosinus  
 (2)  $f(t)$  ungerade • *impaire*  
 $\Rightarrow \tilde{f}(t)$  Sinusreihe •  $\tilde{f}(t)$  Série de sinus

**Beispiele:** • **Exemples:**

Die untenstehende Funktion  $f(t) = t + \pi$  ist auf  $[0, \pi]$  durch eine Cosinusreihe darzustellen. Dazu erweitern wir die Funktion zu einer geraden,  $2\pi$ -periodischen Funktion auf  $\mathbb{R}$  und entwickeln diese in eine Fourierreihe  $\leadsto$  Cosinusreihe. • *La fonction  $f(t) = t + \pi$  mentionnée ci-dessous doit être représentée sur  $[0, \pi]$  par une série de cosinus. Pour cela nous élargissons la fonction à une fonction paire qui est périodique avec  $2\pi$  et définie sur  $\mathbb{R}$ . Ensuite nous développons cette fonction en une série de Fourier  $\leadsto$  série de cosinus.*



$$\tilde{f}(t) = \frac{3\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)t)$$

**Anwendung:** Entwicklung von Signalen über endlichen Intervallen in einfache Fourierreihen, d.h. Sinus- oder Cosinusreihen. Die Signalübermittlung reduziert sich dann auf die Übermittlung einer Folge von Fourierkoeffizienten, die man je nach riskiertem Fehler früher oder später abbricht.

• **Application:** *Développement de signaux sur des intervalles fins dans des séries de Fourier simples, c.-à-d. des séries de sinus-ou cosinus. Alors la transmission de signaux se réduit à la transmission d'une suite de coefficients de Fourier qu'on interrompt plus tôt ou plus tard selon l'erreur risquée.*

#### 4.2.5 Eulersche Formeln, Periode T — Formules d'Euler, période T

Sei • Soit  $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(\omega k t) + b_k \sin(\omega k t))$

Für die Koeffizienten gilt dann: • Pour les coefficients il vaut donc:

Regel: • Règle:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_c^{c+T} f(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(t) \cdot \cos(\omega k t) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(t) \cdot \sin(\omega k t) dt$$

### 4.3 Harmonische Analyse und Fourieranalyse — Analyse harmonique

#### 4.3.1 Beispiele — Exemples

1. Beispiel: • Exemple 1:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < \pi \\ 1 & \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$$

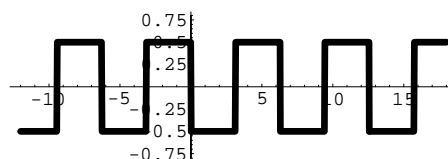
$$\Rightarrow T = 2\pi$$



$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

Sei • Soit  $f(t) = f_1(t) + 0.5$   
 $\Rightarrow f_1(t) = f(t) - 0.5$

$\leadsto f_1(t), f_1(t) \cdot \cos(kt)$  ungerade • *impaire*



$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \cos(kt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f_1(t) + 0.5) \cdot \cos(kt) dt = \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(t) \cdot \cos(kt) dt}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{\pi} \cdot 0.5 \cdot \int_0^{2\pi} \cos(kt) dt}_{=0} = 0$$

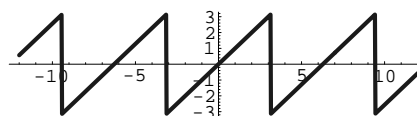
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \sin(kt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 1 \cdot \sin(kt) dt = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{k} \cdot \cos(kt) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{k\pi} \cdot (\cos(k\pi) - \cos(2k\pi)) = \begin{cases} 0 & k = 2n \\ -\frac{2}{k\pi} & k = 2n-1 \end{cases}$$

$\leadsto$  Sinusreihe: • *Série de sinus*:  $f(t) \sim \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \left( \frac{\sin(t)}{1} + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \dots \right)$

## 2. Beispiel: • Exemple 2:

$f(t) = t$  für • *pour*  $t \in (-\pi, \pi]$ ,  $T = 2\pi$

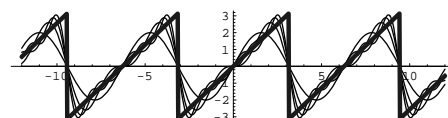
$\leadsto f$  ungerade (abgesehen von den Sprungstellen) • *impaire (hormis les places de saut)*



$$\Rightarrow a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \sin(kt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \sin(kt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cdot \sin(kt) dt = \frac{1}{\pi} \left( -\frac{1}{k} t \cos(kt) \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{-1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) dt = -\frac{1}{k\pi} (\pi \cdot (-1)^k - (-\pi)(-1)^k) = -\frac{1}{k\pi} \pi \cdot (-1)^k \cdot 2 = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}$$

$$\tilde{f}(t) = 2 \left( \sin(t) - \frac{1}{2} \sin(2t) + \frac{1}{3} \sin(3t) - \dots \right)$$



Eine Konsequenz für die Berechnung von  $\pi$ : • *Une conséquence pour calculer  $\pi$* :

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) (= t|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}) = 2 \left( \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3} \sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \dots \right) = 2 \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot (-1) + \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{5} \cdot (+1) - \dots \right)$$

Formel: • *Formule*:  $\pi = 4 \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \right)$

**Bemerkung: • Remarque:**

Die Konvergenz dieser Reihe für  $\pi$  ist nicht besonders gut. Wir werden später mit andern Fourierreihen besser konvergente Reihen für  $\pi$  finden. • *La convergence de cette série pour  $\pi$  n'est pas particulièrement bonne. Nous trouverons plus tard d'autres séries de Fourier pour  $\pi$  qui convergent mieux.*

**3. Beispiel: • Exemple 3:**

$$f_1(x) = |x|, \quad x \in [-\pi, \pi), \quad T = 2\pi$$

Nach Euler-Formeln oder Tabelle • *Selon formules d'Euler ou tableau*

$$\leadsto \tilde{f}_1(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \cos(x) + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \dots \right)$$

Gesucht ist die Fourierreihe der folgenden verwandten Funktion:

• *On cherche maintenant la série de Fourier de la fonction apparentée suivante:*

$$f_2(x) = x^2, \quad x \in [-\pi, \pi), \quad T = 2\pi$$

Die Reihe von  $f_2$  kann man nicht durch gliedweise Integration aus der Fourierreihe von  $f_1$  gewinnen, denn  $f_1$  und  $f_2$  sind beide gerade. Die Integration macht aber aus einer geraden Funktion (Cosinusreihe) eine Sinusreihe. Hingegen gelingt die Berechnung mit Hilfe des Resultates von Beispiel 2. Dort hat man eine geeignete ungerade Funktion: • *Il n'est pas possible de trouver la série de  $f_2$  par intégration terme par terme de la série de Fourier de  $f_1$ , car ces séries sont paires toutes les deux. L'intégration, par contre, d'une fonction paire (série de cosinus) fait une série de sinus. Mais il est possible d'obtenir le résultat en utilisant ce qu'on a trouvé dans l'exemple 2. Là, on a une fonction impaire utilisable:*

$$\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + C_0 \Rightarrow \frac{x^2}{2} = \int x \, dx - C_0 = \int x \, dx + C \quad \text{Aus Bsp. 2} \quad \bullet \text{ Voir ex. 2:}$$

$$\leadsto a_k \cos(kx) = 2 \cdot \int -(-1)^k \cdot 2 \cdot \frac{1}{k} \sin(kx) \, dx + C_k = (-1)^k \cdot 4 \cdot \frac{1}{k^2} \cos(kx) + C_k$$

$$\Rightarrow \tilde{f}_2(x) = -\frac{4 \cdot \cos(1x)}{1^2} + \frac{4 \cdot \cos(2x)}{2^2} - \frac{4 \cdot \cos(3x)}{3^2} + \frac{4 \cdot \cos(4x)}{4^2} - \dots + C$$

$$\Rightarrow \frac{a_0}{2} = C, \quad a_1 = -\frac{4}{1^2}, \quad a_2 = +\frac{4}{2^2}, \quad a_3 = -\frac{4}{3^2}, \quad a_4 = +\frac{4}{4^2} \dots$$

$C = \frac{a_0}{2}$  muss gesondert berechnet werden. • *Il faut calculer  $C = \frac{a_0}{2}$  de façon spéciale:*

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cdot dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi^3 = \frac{\pi^2}{3} \Rightarrow f_2(x) \sim \frac{\pi^2}{3} - 4 \left( \frac{\cos(1x)}{1^2} - \frac{\cos(2x)}{2^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} - \frac{\cos(4x)}{4^2} + \dots \right)$$

**Bemerkung: • Remarque:**

$$x = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left( \frac{\cos(1 \cdot 0)}{1^2} - \frac{\cos(2 \cdot 0)}{2^2} + \frac{\cos(3 \cdot 0)}{3^2} - \frac{\cos(4 \cdot 0)}{4^2} + \dots \right) = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots \right)$$

**Formel: • Formule:**

$$\pi = \sqrt{12 \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots \right)}$$

### 4.3.2 Lineare Kombinationen — Combinaisons linéaires

Gleichmässig konvergente Reihen lassen sich bekanntlich gliedweise addieren u.s.w.. Daher gilt:

• *Les séries convergentes de façon uniforme peuvent s'additionner terme par terme etc., comme nous savons. Par conséquent il vaut:*

**Satz:** • **Théorème:**      **Vor.:** • **Hyp.:**       $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

$f$  und  $g$  besitzen gleichmässig konvergente Fourierreihen:

•  *$f$  et  $g$  possèdent des séries de Fourier convergentes de façon uniforme:*

$$f(t) \sim \tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

$$g(t) \sim \tilde{g}(t) = \frac{a_0^*}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^* \cos(kt) + b_k^* \sin(kt))$$

$$\lambda f(t) + \mu g(t) \sim \frac{A_0^*}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^* \cos(kt) + B_k^* \sin(kt))$$

**Beh.:** • **Thè.:**

$$\begin{aligned} A_k &= \lambda a_k + \mu a_k^* & k &= 0, 1, 2, \dots \\ B_k &= \lambda b_k + \mu b_k^* & k &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

**Anwendung:** • **Application:** Sei • *Soit*  $T = 2\pi$

$\leadsto$  Mit Hilfe des Satzes kann man nun die Reihe von  $f(t) = t^2 + t$  aus den Reihen von  $f_1(t) = t$  und  $f_2(t) = t^2$  durch gliedweise Addition berechnen. • *Maintenant, à l'aide de ce théorème, on peut calculer la série de  $f(t) = t^2 + t$  des séries de  $f_1(t) = t$  et  $f_2(t) = t^2$  par l'addition terme par terme.*

**Dabei ist zu beachten:** • **Dans ce cadre on tient compte de:**

Wenn eine Fourierreihe auf einem abgeschlossenen Intervall konvergiert, so konvergiert sie gleichmässig.

• *Si une série de Fourier converge sur un intervalle fermé, alors la série converge de façon absolue.*

**Bsp.:** • **Exemple:** Reihen von • *Séries de*  $1, t, t^2, \dots, t^n, t \in [-\pi, \pi], t = 2\pi$

$\leadsto$  Reihe von • *Série de*  $1 + t + t^2 + \dots + t^n = \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t}, t \in [-\pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon].$

### 4.3.3 Parsevalsche Gleichung — Equation de Parseval

#### 4.3.4 Die Formel — La formule

Im Folgenden seien die Reihen absolut und gleichmässig konvergent. Mit solchen Reihen kann man bekanntlich Arithmetik betreiben wie mit endlichen Reihen.

• *Dans ce qui suit, les séries soient convergentes de façon absolue et régulière. Avec de telles séries, comme nous savons maintenant on peut pratiquer l'arithmétique comme avec les séries finies.*

Wir verwenden (siehe Orthogonalitätsrelationen): • *Nous utilisons (relations d'orthogonalité):*

$$\int_0^T \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 dt = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 \cdot T, \quad \int_0^T \cos^2(k\omega t) dt = \frac{T}{2}, \quad \int_0^T \sin^2(k\omega t) dt = \frac{T}{2}, \quad \int_0^T \sin(k_1\omega t) \cdot \sin(k_2\omega t) dt = 0,$$

$$\int_0^T \sin(k_1 \omega t) \cdot \cos(k_2 \omega t) dt = 0, \quad \dots$$

Damit erhalten wir: • *Par conséquent on obtient:*

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{a_0}{2} + \sum_0^\infty (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \right)^2 dt = \frac{1}{T} \left( T \cdot \frac{a_0^2}{4} + \frac{T}{2} (a_1^2 + b_1^2) + \frac{T}{2} (a_2^2 + b_2^2) + \dots \right)$$

Denn beim Integrieren liefern nur die folgenden Terme einen Beitrag:

• *Car en faisant l'intégrale, seulement les termes suivants fournissent une contribution:*

$$\left(\frac{a_0}{2}\right)^2, (a_k \cos(\omega k t))^2, (b_k \sin(\omega k t))^2 \quad \leadsto \quad \frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^\infty (a_k^2 + b_k^2)$$

Damit diese Gleichung gelten kann, muss natürlich  $\sum_{k=1}^\infty (a_k^2 + b_k^2)$  endlich sein.

• *Pour que cette équation soit valable, la somme  $\sum_{k=1}^\infty (a_k^2 + b_k^2)$  doit être finie.*

**Satz:** • **Théorème:** Parsevalsche Gleichung • **Equation de Parseval**

**Vor.:** • **Hyp.:**

$$f(t) \sim \tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_0^\infty (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

$$\sum_{k=1}^\infty (a_k^2 + b_k^2) \text{ endlich} \quad \bullet \text{ finie}$$

**Beh.:** • **Thè.:**

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^\infty (a_k^2 + b_k^2)$$

### 4.3.5 Anwendung — Application

Integrale der Form  $\frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt$  findet man häufig, wenn es z.B. um Energie geht.

• *On trouve souvent des intégrales de forme  $\frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt$ , s'il s'agit d'énergie.*

Z.B. • *P.ex.*  $\bar{E}_{kin} = \frac{1}{T} \cdot m \cdot \int_0^T v(t)^2 dt$  oder • *ou*

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = R \cdot I^2(t) \quad (U = R \cdot I), \quad W = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt$$

$$\leadsto W = \int_0^T P(t) dt = R \cdot \int_0^T I^2(t) dt, \quad \bar{P} = \frac{1}{T} \cdot R \cdot \int_0^T I^2(t) dt$$

Sei die Fourierreihe von  $I$  gegeben durch: • *La série de Fourier soit donnée par:*

$$I(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

$$\Rightarrow \bar{P} = \frac{W}{T} = \frac{1}{T} \cdot R \cdot (T \cdot (\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2))) = R \cdot (\frac{a_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2))$$

Weiter: • *En outre:  $U_{eff} = \left( \frac{1}{T} \cdot \int_0^T U(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \dots, I_{eff} = \dots$*

**Bsp.:** • **Exemple:**

$$f_2(x) = x^2, \quad x \in (-\pi, \pi], \quad T = 2\pi, \quad \Rightarrow f_2(x) \sim \frac{\pi^2}{3} - 4 \left( \frac{\cos(1x)}{1^2} - \frac{\cos(2x)}{2^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} - \frac{\cos(4x)}{4^2} + \dots \right)$$

$$\leadsto \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f_2^2(x) dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{5} \cdot \pi^5 \cdot 2 = \frac{\pi^4}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \left( \frac{\pi^2}{3} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^2}{k^4}$$

$$\leadsto \frac{\pi^4}{5} = \left( \frac{\pi^2}{3} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^2}{k^4}, \quad \frac{\pi^4}{5} - \left( \frac{\pi^2}{3} \right)^2 = \frac{4\pi^4}{45} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^2}{k^4} = 8 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \Rightarrow \pi = \sqrt[4]{\frac{8 \cdot 45}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}}$$

**Formel:** • **Formule:**

$$\pi = \sqrt[4]{90 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}} \approx \sqrt[4]{90 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^4}}$$

$\leadsto$  Z.B. für  $n = 100$  erhält man eine Genauigkeit von 7 Stellen:

• *P.ex. pour  $n = 100$  on a 7 places exactes:*

$$\pi \approx \underline{3.141592654}, \quad \pi_{10} \approx \underline{3.141592415}, \quad n = 100$$

## 4.4 Komplexe Darstellung von Fourierreihen — Représentation complexe de séries de Fourier

### 4.4.1 Komplexe Fourierkoeffizienten — Coefficients de Fourier complexes

Sei • *Soit  $\omega = \frac{2\pi}{T}$*

Benutze: • *Utiliser:*  $\cos(\omega k t) = \frac{e^{i\omega k t} + e^{-i\omega k t}}{2}, \quad \sin(\omega k t) = \frac{e^{i\omega k t} - e^{-i\omega k t}}{2i} = \frac{-i e^{i\omega k t} + i e^{-i\omega k t}}{2}$

$$\leadsto \tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(\omega k t) + b_k \sin(\omega k t)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t),$$

$$q_k(t) = a_k \cdot \frac{e^{i\omega k t} + e^{-i\omega k t}}{2} + b_k \cdot \frac{-i e^{i\omega k t} + i e^{-i\omega k t}}{2} = \frac{1}{2} (a_k - i b_k) e^{i\omega k t} + \frac{1}{2} (a_k + i b_k) e^{-i\omega k t}$$

$$:= c_k \cdot e^{i\omega k t} + \bar{c}_k \cdot e^{-i\omega k t}$$

Zur Vereinfachung definieren wir: • *Pour simplifier nous définissons:*

**Definition:** • **Définition:**  $c_{-k} := \bar{c}_k, \quad c_0 = \frac{a_0}{2}$   
 $\leadsto$  **komplexe Fourierkoeffizienten**  
 •  $\leadsto$  **coefficients de Fourier complexes**

$\leadsto \tilde{f}(t)$  komplex geschrieben: • *Ecrit de façon complexe:*  $\tilde{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i \omega_k t}$

#### 4.4.2 Berechnung der Koeffizienten — Calculer les coefficients

$$c_k = \frac{1}{2} (a_k - i b_k) = \frac{2}{T} \cdot \frac{1}{2} \int_0^T f(t) (\cos(\omega_k t) - i \sin(\omega_k t)) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i \omega_k t} dt$$

$$c_{-k} = \bar{c}_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-(-i \omega_k t)} dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i \omega_{(-k)} t} dt$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{T} \cdot \frac{1}{2} \int_0^T f(t) e^{-i \omega_{\cdot 0} t} dt$$

Daher gilt für alle  $k$  die Formel: • *C'est pourquoi pour tous les  $k$  on a la formule:*

**Formel:** • **Formule:** 
$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i \omega_k t} dt$$

**Konsequenz:** • **Conséquence:**

$$|c_k|^2 = c_k \cdot \bar{c}_k = \frac{1}{2} (a_k - i b_k) \cdot \frac{1}{2} (a_k + i b_k) = \frac{1}{4} (a_k^2 + b_k^2) := \frac{A_k^2}{4} \Rightarrow A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = 2 \cdot |c_k|$$

In der komplexen Schreibweise gewinnen die Fourierreihen an Übersichtlichkeit. Die Darstellung wird kompakter. • *Par l'orthographe complexe, les séries de Fourier gagnent de clarté. La représentation devient plus compacte.*

Z.B. sieht dann die Parsevalsche Gleichung in der komplexen Schreibweise wie folgt aus:

• *P.ex. l'équation de Parseval écrite de manière complexe a la forme suivante:*

$$|c_k|^2 = \frac{A_k^2}{4} = \frac{1}{4} (a_k^2 + b_k^2) \Rightarrow \frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i \omega_k t} \right)^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

#### 4.4.3 Beispiel — Exemple

**Geg.:** • **Donné:**

$f(t)$ , Fundamentalintervall • *Intervalle fondamentale*  $I = [a, b]$ , Periode • *période*  $T = b - a$ .



1. Beispiel: • Exemple 1:  $f(t) = t$ ,  $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ,  $T = 1$ :

Mathematica-Programm: • Programme en Mathematica:

```
<< Calculus`FourierTransform`;
f[t_] := t;
FourierTrigSeries[f[t], t, 10]
```

Output: • Output:

$$\frac{\sin(2\pi t)}{\pi} - \frac{\sin(4\pi t)}{2\pi} + \frac{\sin(6\pi t)}{3\pi} - \frac{\sin(8\pi t)}{4\pi} + \frac{\sin(10\pi t)}{5\pi} - \frac{\sin(12\pi t)}{6\pi} + \frac{\sin(14\pi t)}{7\pi} - \frac{\sin(16\pi t)}{8\pi} + \frac{\sin(18\pi t)}{9\pi} - \frac{\sin(20\pi t)}{10\pi}$$

Mathematica-Programm: • Programme en Mathematica:

```
FourierSinCoefficient[f[t], t, 10]
```

Output: • Output:

$$-\frac{1}{10\pi}$$

Mathematica-Programm: • Programme en Mathematica:

```
FourierCosCoefficient[f[t], t, 10]
```

Output: • Output:

$$0$$

Komplexe Schreibweise: • *Ecrit de façon complexe:*

Mathematica-Programm: • Programme en Mathematica:

```
FourierSeries[f[t], t, 10]
```

Output: • Output:

$$\frac{ie^{-2i\pi t}}{2\pi} - \frac{ie^{2i\pi t}}{2\pi} - \frac{ie^{-4i\pi t}}{4\pi} + \frac{ie^{4i\pi t}}{4\pi} + \frac{ie^{-6i\pi t}}{6\pi} - \frac{ie^{6i\pi t}}{6\pi} - \frac{ie^{-8i\pi t}}{8\pi} + \frac{ie^{8i\pi t}}{8\pi} + \frac{ie^{-10i\pi t}}{10\pi} - \frac{ie^{10i\pi t}}{10\pi} - \frac{ie^{-12i\pi t}}{12\pi} + \frac{ie^{12i\pi t}}{12\pi} + \frac{ie^{-14i\pi t}}{14\pi} - \frac{ie^{14i\pi t}}{14\pi} - \frac{ie^{-16i\pi t}}{16\pi} + \frac{ie^{16i\pi t}}{16\pi} + \frac{ie^{-18i\pi t}}{18\pi} - \frac{ie^{18i\pi t}}{18\pi} - \frac{ie^{-20i\pi t}}{20\pi} + \frac{ie^{20i\pi t}}{20\pi}$$

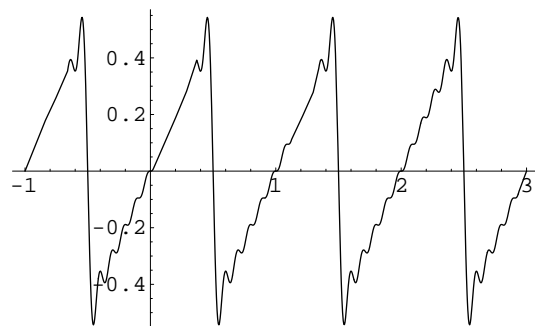
Mathematica-Programm: • Programme en Mathematica:

---

```
| Plot[Evaluate[FourierTrigSeries[f[t], t, 10]], {t, -1, 3}];
```

---

Bild • Image



2. Beispiel: • Exemple 2:  $f(t) = t$ ,  $I = [-\pi, \pi]$ ,  $T = 2\pi$ :

Mathematica-Programm: • Programme en Mathematica:

---

```
| << Calculus'FourierTransform';  
| f[t_] := t;  
| f1[u_] = 2Pi FourierTrigSeries[f[t], t, 10] /. t -> u/(2Pi) // Expand;  
| Print[f1[u]];
```

---

Output: • Output:

---

```
| 2 sin(u) - sin(2u) + 2/3 sin(3u) - 1/2 sin(4u) + 2/5 sin(5u) - 1/3 sin(6u) + 2/7 sin(7u) - 1/4 sin(8u) +  
| 2/9 sin(9u) - 1/5 sin(10u)
```

---

Mathematica-Programm: • Programme en Mathematica:

---

```
| 2Pi(FourierSeries[f[t], t, 10] /. t -> u/(2Pi)) // Expand
```

---

Komplexe Schreibweise: • Écrit de façon complexe:

Output: • Output:

---

```
| ie^{-iu} - ie^{iu} - 1/2 ie^{-2iu} + 1/2 ie^{2iu} + 1/3 ie^{-3iu} - 1/3 ie^{3iu} - 1/4 ie^{-4iu} + 1/4 ie^{4iu} + 1/5 ie^{-5iu} - 1/5 ie^{5iu} -  
| 1/6 ie^{-6iu} + 1/6 ie^{6iu} + 1/7 ie^{-7iu} - 1/7 ie^{7iu} - 1/8 ie^{-8iu} + 1/8 ie^{8iu} + 1/9 ie^{-9iu} - 1/9 ie^{9iu} - 1/10 ie^{-10iu} + 1/10 ie^{10iu}
```

---

Mathematica-Programm: • Programme en Mathematica:

---

```
| Plot[f1[u], {u, -0.3, 8}];
```

---

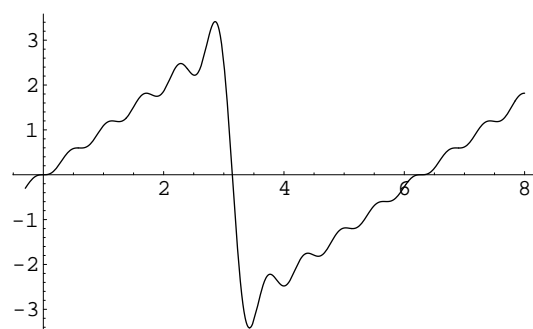


Bild • Image

#### 4.4.4 Amplitudenspektrum, Phasenspektrum — Spectre d'amplitude, spectre de phase

Die Begriffe **Amplitudenspektrum** und **Phasenspektrum** treten bei Fourierreihen in komplexer Darstellung auf. Um einen Zugang zu dieser Sache zu bekommen, betrachten wir sogenannte **Zeigerdiagramme**: • *Les notions spectre d'amplitude et spectre de phase apparaissent avec les séries de Fourier dans la représentation complexe. Pour obtenir un accès à cette chose, nous regardons les dits diagrammes vectoriels (diagrammes de Fresnel):*

Idee: • Idée:

Betrachte die bijektive Abbildung: • *Considérons l'application bijective:*

$$\Phi : \underbrace{a_k \cos(\omega k t) + b_k \sin(\omega k t)}_{\in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}} \mapsto z_k = \underbrace{a_k \cos(\omega k t) + i b_k \sin(\omega k t)}_{\in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}}$$

**Definition:** • **Définition:**

$a_k \cos(\omega k t) + i b_k \sin(\omega k t)$  nennen wir **Zeiger**  
•  $a_k \cos(\omega k t) + i b_k \sin(\omega k t)$  s'appelle **aiguille** (vecteur)

Andererseits können wir  $(a_k \cos(\omega k t) + b_k \sin(\omega k t))$  als Vektor über der folgenden Basis auffassen:

• *D'autre part nous pouvons interpréter  $(a_k \cos(\omega k t) + b_k \sin(\omega k t))$  comme vecteur sur la base suivante:*

$$B = \{\cos(\omega k t), \sin(\omega k t) \mid k \in \mathbb{N}_0\} := \{\cos(\omega k t) \mid k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\sin(\omega k t) \mid k \in \mathbb{N}_0\}$$

Entsprechend ist ein Zeiger ein Vektor über der Basis  $B_i$ : • *Correspondamment une aiguille est un vecteur sur la base  $B_i$ :*  $B_i = \{\cos(\omega k t), i \sin(\omega k t) \mid k \in \mathbb{N}_0\}$

Ebenso wird  $\tilde{f}(t)$  ein summierter Vektor über  $B$ , der bei der Abbildung  $\Phi$  in einen entsprechenden Zeiger oder einen Vektor über  $B_i$  übergeht. • *De même  $\tilde{f}(t)$  devient, comme somme, un vecteur sur  $B$ , qui est interprété par l'application  $\Phi$  comme aiguille correspondante ou un vecteur sur  $B_i$ .*

Man hat hier somit einen Vektorraumisomorphismus, d.h. die Information über  $f(t)$  ändert auf der Bildseite nicht. Man darf also ohne weiteres mit den Zeigern arbeiten. • *On a ici par conséquent un isomorphisme d'espaces vectoriels, c.-à.-d. l'information concernant  $f(t)$  ne change pas du côté de l'image. On peut travailler ainsi sans problèmes avec les aiguilles.*

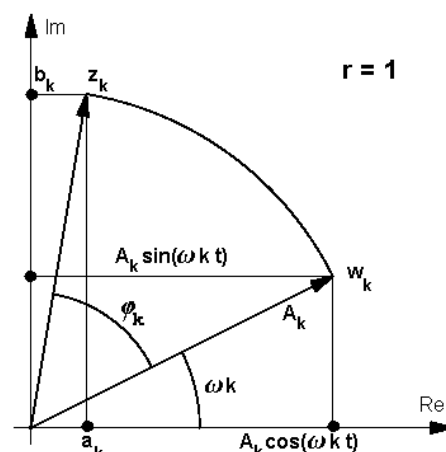
Beachte: • *Considérer:*

$$w_k := A_k \cdot e^{i \omega k t} \mapsto z_k = r (a_k + i b_k)$$

$$\begin{aligned} w_k &= A_k \cdot e^{i \omega k t} = \\ &A_k \cos(\omega k t) + i A_k \sin(\omega k t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_k &= r (a_k + i b_k) \\ &= A_k (\cos(\omega k t + \varphi_k) + i \sin(\omega k t + \varphi_k)) \\ &= A_k \cdot e^{i(\omega k t + \varphi_k)} = r \sqrt{a_k^2 + b_k^2} e^{i(\omega k t + \varphi_k)}, \\ A_k &= r_k = r \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = 2 \cdot |c_k| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_k &= r (a_k + i b_k) = r \sqrt{a_k^2 + b_k^2} e^{i(\omega k t + \varphi_k)} \\ &= A_k e^{i \omega k t} e^{i \varphi_k} = w_k e^{i \varphi_k}, \quad w_k = z_k \cdot e^{-i \varphi_k} \end{aligned}$$



**Konsequenz:** • **Conséquence:**  $z_k$  kann sowohl durch  $(a_k, b_k)$  wie auch durch  $(A_k, \varphi_k, t)$  beschrieben werden. • *On peut décrire  $z_k$  par  $(a_k, b_k)$  aussi bien que par  $(A_k, \varphi_k, t)$ .*

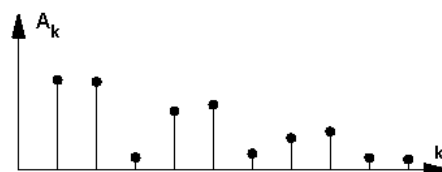
**Anwendung:** • **Application:** In der Elektrophysik werden Strom und Spannung mit Vorteil durch Zeiger  $z_k$  (komplexe Funktion) dargestellt. Addiert man solche Spannungen und Ströme, so erhält man komplexe Fourierreihen der folgenden Form ( $r = 1$ ): • *Dans l'électrophysique, le courant et la tension sont souvent représentés de manière avantageuse par des aiguilles  $z_k$  (fonction complexes). Si on additionne de telles tensions et des courants, on obtient ainsi des séries de Fourier complexes de la forme suivante ( $r = 1$ ):*

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t) &= \frac{a_0}{2} + i \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + i b_k) = \frac{z_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} z_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i(\omega k t + \varphi_k)} = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cdot e^{i \varphi_k}) e^{i \omega k t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (w_k) e^{i \omega k t} \end{aligned}$$

Hier verwenden wir die folgende Begriffe: • *Ici, nous utilisons les notions suivantes:*

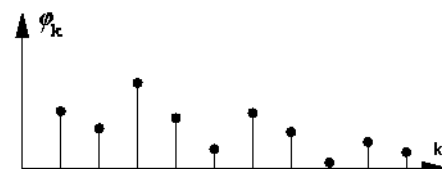
$A_k$  heisst **Amplitude**,  $\{A_k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$  heisst **Amplitudenspektrum**.

•  $A_k$  s'appelle **amplitude**,  $\{A_k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$  s'appelle **spectre d'amplitude**.

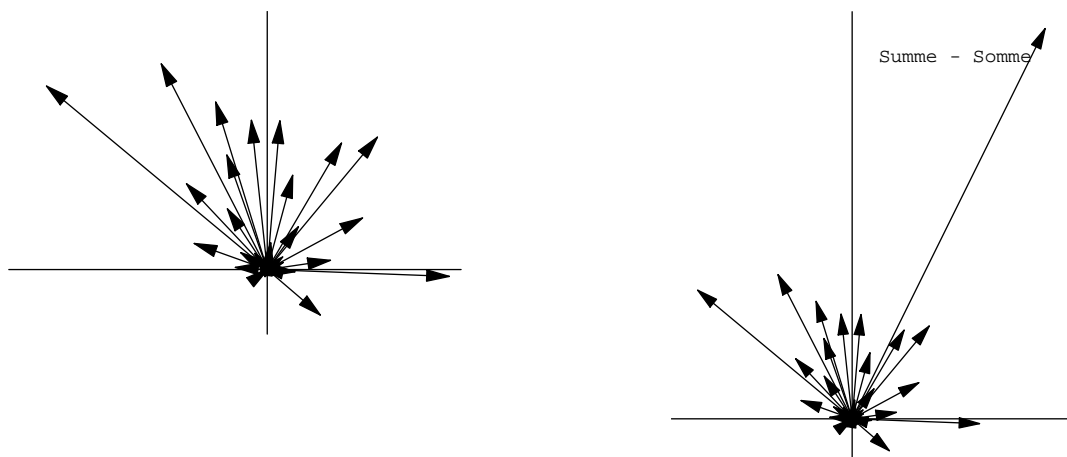


$\varphi_k$  heisst **Phasens**,  $\{\varphi_k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$  heisst **Phasenspektrum**.

•  $\varphi_k$  s'appelle **phase**,  $\{\varphi_k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$  s'appelle **spectre de phase**.



**Bsp.:** • **Exemple:**



#### 4.4.5 Reelle Interpretation der Spektren — Interprétation réelle des spectres

Sei • Soit  $\tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(\omega k t) + b_k \sin(\omega k t))$

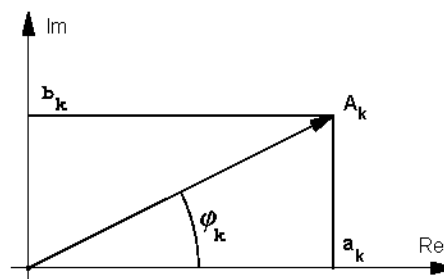
Für  $t = 0$  ergibt sich die folgende Situation: • Pour  $t = 0$  on obtient la situation suivante:

$$a_k + i b_k = A_k \underbrace{e^{i \omega k t}}_{e^0=1} \cdot \underbrace{e^{i \varphi_k}}_{\cos(\varphi_k) + i \sin(\varphi_k)}$$

Sei • Soit :

$$\begin{aligned} a_k &:= A_k \cos(\varphi_k) \\ b_k &:= A_k \sin(\varphi_k) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_k &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \\ A_0 &= \frac{a_0}{2} \end{aligned}$$



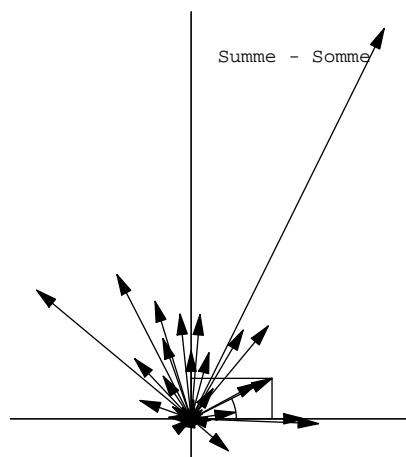
$\{(a_k, b_k)\}$  kartes. • cartes.  $\mapsto \{(A_k, \varphi_k)\}$  polar • polaire

$$\begin{aligned} \leadsto \tilde{f}(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos(\varphi_k) \cos(\omega k t) + A_k \sin(\varphi_k) \sin(\omega k t)) \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k (\cos(\varphi_k) \cos(\omega k t) + \sin(\varphi_k) \sin(\omega k t)) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\omega k t \underbrace{- \varphi_k}_{+\varphi_k^-}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos(\varphi_k) \cos(\omega k t) + A_k \sin(\varphi_k) \sin(\omega k t)) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\varphi_k^- + \omega k t)$$

Hier haben wir das **Koeffizientenspektrum**  $\{a_0, a_k, b_k \mid k \in \mathbb{N}\}$  sowie das **Amplituden- und Phasenspektrum**  $\{A_k, \varphi_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ .

• Ici nous avons le **spectre des coefficients**  $\{a_0, a_k, b_k \mid k \in \mathbb{N}\}$  ainsi que les **spectres des amplitudes et des phases**  $\{A_k, \varphi_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ .



Damit ergibt sich eine alternative Darstellungsart der Fourierreihen im Reellen als Sinusreihe mit indexabhängiger Phasenverschiebung. • Ici on a donc une sorte de représentation alternative de la série de Fourier dans le réel comme série de sinus avec un déplacement de phase dépendant de l'index.

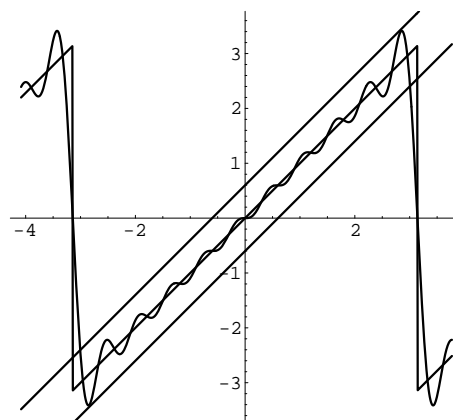
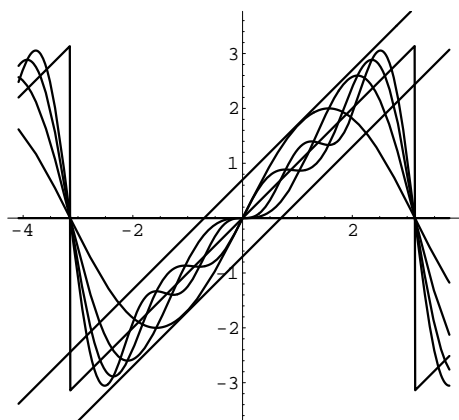
#### 4.4.6 Das Phänomen von Gibbs — Le phénomène de Gibbs

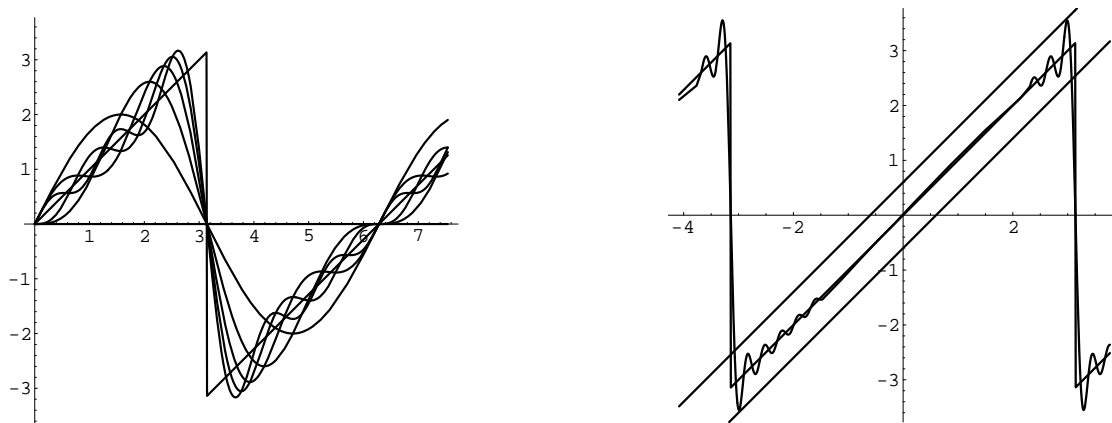
Wir betrachten die Funktion • Nous considérons la fonction

$$f(t) = t, \quad t \in [-\pi, \pi], \quad f(t + 2n\pi) = f(t), \quad n \in \mathbb{Z}$$

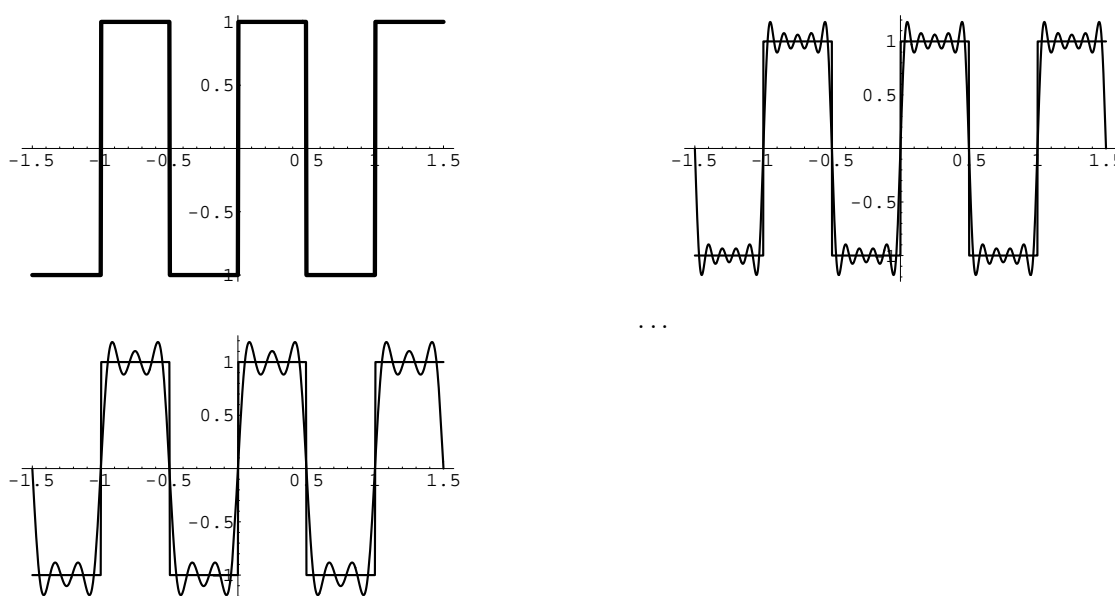
An der Sprungstelle beobachtet man das folgende Phänomen:

• À la place de saut, on observe le phénomène suivant:





Wenn man eine Funktion mit Sprungstellen, z.B. eine Sägezahnfunktion, durch eine Fourierreihe annähert, so tritt an den Sprungstellen eine Überhöhung, der sogenannte „overshoot“ auf (im letzten Beispiel ca. 18 %). Diese Beobachtung nennen wir das **Gibbsche Phänomen**. Stellt eine Funktion z.B. die elektrische Spannung dar, so tritt bei der Fouriersynthese an der Sprungstelle eine etwas höhere Spannung auf, an die man je nach Fall denken sollte. . . • *Si on approxime une fonction avec les places de saut, par exemple une fonction de dent de scie, par une série de Fourier, on constate une surélévation de marche aux places de saut, dit "overshoot" (dans le dernier exemple env. 18%). Cette observation s'appelle le **phénomène de Gibbs**. Si une fonction par exemple décrit la tension électrique, il apparaît donc une tension un peu plus haute aux places en question, à laquelle il faudrait penser. . .*



#### 4.4.7 Beispiele — Exemples

1. Anwendungen in der Signalübertragung. • *Applications pour la transmission de signaux.*
2. Anwendungen zur Lösung von Differentialgleichungen, siehe z.B. Seite 244, Wärmeleitungsgleichung. • *Applications pour résoudre des équations différentielles, voir p.ex. page 244, équation de propagation de la chaleur.*
3. U.s.w. • *Etc.*

## 4.5 Diskrete Fouriertransformation — Transformation de Fourier discrète

### 4.5.1 DFT und Fouriersynthese — DFT et synthèse de Fourier

#### Theorie — Théorie

In der Praxis hat man oft Messreihen  $\{(t_k, y_k) \mid k \in \mathbb{N}\}$ . Gesucht ist eine möglichst passende periodische Funktion mit bekannter Periode durch die Punkte  $(t_k, y_k)$ . • *Dans la pratique, on a souvent des séries de mesure  $\{(t_k, y_k) \mid k \in \mathbb{N}\}$ . On cherche une fonction périodique aussi bonne que possible avec une période connue qui passe par les points  $(t_k, y_k)$ .*

Seien • Soient  $[a, b] = [0, 2\pi]$ :

$T = 2\pi$ ,  $a = 0 = t_0$ ,  $b = 2\pi = t_n$

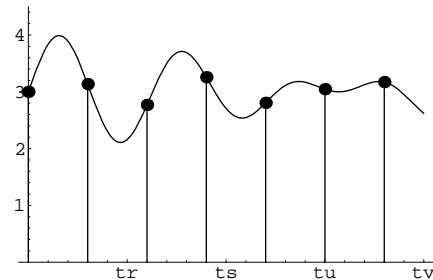
(Das lässt sich so einrichten.)

• (On peut arranger cela ainsi.)

Sei • Soit  $t_{k+1} - t_k = \frac{2\pi}{n} = h \forall k$

$\leadsto$  Äquidistante Messungen.

• Mesurages à des distances égales.



Verwende die Trapezregel (numerische Integration). Nach ihr gilt bekanntlich:

• Utiliser la règle du trapèze (intégration numérique). D'après cette règle il vaut, comme nous savons:

$$\int_a^b g(t) dt = \frac{h}{2} (g(a) + g(b)) + h \sum_{k=1}^{n-1} g(a + k \cdot h) + R = \frac{h}{2} (g(t_0) + g(t_n)) + h \sum_{k=1}^{n-1} g(t_k) + R, \quad |R| \leq \frac{h^2}{8} \int_a^b |g''(t)| dt$$

Um diese Formel anwenden zu können, braucht man nur die Messpunkte  $\{(t_k, y_k = f(t_k))\}$  zu kennen. Dann können wir mit Hilfe der Messpunkte die Fourierkoeffizienten numerisch annähern: • *Pour pouvoir appliquer cette formule, il suffit de connaître les points de mesure  $\{(t_k, y_k = f(t_k))\}$ . Alors nous pouvons approcher numériquement les coefficients de Fourier à l'aide des points de mesure:*

$$c_s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot e^{-i s t} dt \approx \tilde{c}_s := \frac{h}{2\pi} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k) \cdot e^{-i s \frac{2\pi k}{n}} = \frac{2\pi}{n \cdot 2\pi} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} y_k \cdot e^{-i s \frac{2\pi k}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} y_k \cdot e^{-i s t_k}$$

Dabei war  $f(a) = f(t_0)$  (Periodizität).  $f(b) = f(a)$  ist verrechnet worden.

• Il était  $f(a) = f(t_0)$  (périodicité).  $f(b) = f(a)$  a été incorporé.

Analog schliesst man für die reellen Fourierkoeffizienten  $a_k$  und  $b_k$ . Dabei muss man die Exponentialfunktion durch cos und sin ersetzen. • *De manière analogue on déduit les formules pour les coefficients de Fourier réels  $a_k$  et  $b_k$ . Pour cela il faut remplacer la fonction exponentielle par cos et sin.*

Falls die Periodendauer  $T$  ist statt  $2\pi$ , so erhält man folgende Formel:

• Si la durée de période est  $T$  au lieu de  $2\pi$ , on obtient la formule suivante:

$$c_s \approx \tilde{c}_s := \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k) \cdot e^{-i s \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t_k} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} y_k \cdot e^{-i s \cdot \omega \cdot t_k}, \quad t_k = \frac{k \cdot T}{n}$$



Zur Vereinfachung der Rechnung fassen wir die Fourierkoeffizienten sowie die Messwerte u.s.w. als Vektoren in  $\mathbb{C}^n$  auf: • *Pour simplifier le calcul, nous interprétons les coefficients de Fourier ainsi que les valeurs indiquées comme vecteurs dans  $\mathbb{C}^n$ :*

$$\vec{y}^{(n)} := \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} := \vec{f}^{(n)} := \begin{pmatrix} f(t_0) \\ \vdots \\ f(t_{n-1}) \end{pmatrix}, \quad \vec{c}^{(n)} := \begin{pmatrix} \tilde{c}_0 \\ \vdots \\ \tilde{c}_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad s = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Sei weiter: • *Soit en outre:  $r := e^{-i \frac{2\pi}{n}} \Rightarrow \tilde{c}_s = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} y_k \cdot r^{s \cdot k}$ ,  $\tilde{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i \omega_k t} \approx \sum_{k=k_1}^{k_2} \tilde{c}_k e^{i \omega_k t}$*

Daraus ersieht man, dass der Vektor  $\vec{c}^{(n)}$  aus  $\vec{y}^{(n)}$  durch Multiplikation mit folgender Matrix  $W$  entsteht:

• *On voit que le vecteur  $\vec{c}^{(n)}$  provient de  $\vec{y}^{(n)}$  par la multiplication avec la matrice suivante:*

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & r & r^2 & \dots & r^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & r^{n-1} & \dots & \dots & r^{(n-1)^2} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{c}^{(n)} = \frac{1}{n} \cdot W \cdot \vec{y}^{(n)}$$

**Definition:** • **Définition:**  $\mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$  mit • *avec  $\vec{y}^{(n)} \mapsto \vec{c}^{(n)} = \frac{1}{n} \cdot W \cdot \vec{y}^{(n)}$  heisst **diskrete Fouriertransformation** • s'appelle **transformation de Fourier discrète***

**Symbol:** • **Symbole:**  $DFT(\vec{y}^{(n)}) := \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot W \cdot \vec{y}^{(n)} = \sqrt{n} \cdot \vec{c}^{(n)}$ ,  $DFT^{-1}(\vec{c}^{(n)}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \vec{y}^{(n)}$

**Eigenschaften:**

• **Qualités:**

1.  $W^{-1} = \frac{1}{n} \cdot \bar{W}$ ,  $\sqrt{n} \cdot W^{-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \bar{W}$ ,  $\bar{W}$  konj.  
 $n \cdot W^{-1} = \bar{W}$ ,  $(\bar{W})^{-1} = \frac{1}{n} \cdot W$
2.  $\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot W$  ist unitär • *est unitaire  $\leadsto |\det(\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot W)| = 1$*
3.  $\vec{y}^{(n)} = \bar{W} \cdot \vec{c}^{(n)}$

**Zum Beweis:** • **Quant à la preuve:**

Ad (1) (1) lässt sich direkt nachrechnen.

(Dabei sind Kenntnisse über komplexe Einheitswurzeln  $r := e^{-i \frac{2\pi}{n}}$  nützlich.)

• *Ad (1) On peut traiter (1) par calcul direct.*

(Il est utile d'avoir des connaissances sur les racines d'unité complexes  $r := e^{-i \frac{2\pi}{n}}$ .)

Ad (2)  $1 = \det(E) = \det(W \cdot W^{-1}) = \det\left(\frac{W \cdot \bar{W}}{n}\right) =$

$$\det\left(\frac{W}{\sqrt{n}}\right) \cdot \det\left(\frac{\bar{W}}{\sqrt{n}}\right) = \det\left(\frac{W}{\sqrt{n}}\right) \cdot \overline{\det\left(\frac{W}{\sqrt{n}}\right)} = |\det\left(\frac{W}{\sqrt{n}}\right)|^2$$

Ad (3)  $\vec{c}^{(n)} = \frac{1}{n} \cdot W \cdot \vec{y}^{(n)} \Rightarrow n \cdot \vec{c}^{(n)} = W \cdot \vec{y}^{(n)} \Rightarrow \vec{y}^{(n)} = n \cdot W^{-1} \cdot \vec{c}^{(n)} = \frac{n}{n} \cdot \bar{W} \cdot \vec{c}^{(n)} = \bar{W} \cdot \vec{c}^{(n)}$

**Folgerung: • Conclusion:**

Mit Hilfe der  $c_s$  in  $\tilde{c}^{(n)}$  lässt sich nun eine Fourierreihe herstellen, deren Graph durch die Punkte geht, die durch  $\vec{y}^{(n)}$  definiert sind.  $W$  ist oben konstruiert worden.

• *Maintenant, à l'aide des  $c_s$  on peut construire une série de Fourier dont la courbe passe par des points qui sont définits par  $\vec{y}^{(n)}$ .  $W$  a été construite en haut.*

**Formeln: • Formules:**

$$T = 2\pi, \quad \omega = 1, \quad \Delta t = \frac{2\pi}{n}, \quad r := e^{-i\frac{2\pi}{n}} = e^{-i\Delta t}, \quad W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & r & r^2 & \dots & r^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & r^{n-1} & \dots & \dots & r^{(n-1)^2} \end{pmatrix},$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & r & r^2 & \dots & r^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & r^{n-1} & \dots & \dots & r^{(n-1)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^{0 \cdot 0} & r^{0 \cdot 1} & r^{0 \cdot 2} & \dots & r^{0 \cdot (n-1)} \\ r^{1 \cdot 0} & r^{1 \cdot 1} & r^{1 \cdot 2} & \dots & r^{1 \cdot (n-1)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ r^{(n-1) \cdot 0} & r^{(n-1) \cdot 1} & \dots & \dots & r^{(n-1) \cdot (n-1)} \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}^{(n)} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \bar{W} \cdot \tilde{c}^{(n)}, \quad \tilde{c}^{(n)} = \begin{pmatrix} \tilde{c}_0 \\ \vdots \\ \tilde{c}_s \\ \vdots \\ \tilde{c}_{n-1} \end{pmatrix} = (\bar{W})^{-1} \cdot \vec{y}^{(n)} = \frac{1}{n} W \cdot \vec{y}^{(n)}, \quad \tilde{c}_s = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} y_k \cdot r^{s k}$$

$$\tilde{f}(t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} c_s e^{i \omega s t} \approx \sum_{k=k_1}^{k_2} \tilde{c}_k e^{i \omega k t} = \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{c}_k e^{i \omega k t} = \tilde{f}_{(approx DFT)}(t).$$

**Bsp.: • Exemple:**

Siehe Problem 4: • (Voir problème 4:

[http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TM2Ana\\_0708\\_02.pdf](http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TM2Ana_0708_02.pdf)

[http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TM2Ana\\_0708\\_02\\_Loes.pdf](http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TM2Ana_0708_02_Loes.pdf)

[http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TM2Ana\\_0708\\_02\\_Loes.nb](http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TM2Ana_0708_02_Loes.nb)

**Anwendung — Application**

Eine erste wichtige Anwendung kennen wir vom erwähnten Problem der Messreihen, zu denen eine periodische Funktion gefunden werden soll. Eine andere Anwendung ist die **trigonometrische Interpolation**, z.B. bei Plots. Gegeben sind hier eine Anzahl von Stützstellen. Um dazwischen liegende Funktionswerte abzuschätzen, können wir mit Hilfe der DFT  $f(t)$  durch trigonometrische Polynome annähern. So erhält man Fourierpolynome mit den Koeffizienten  $c_{-\frac{n}{2}+1}, \dots, c_0, \dots, c_{+\frac{n}{2}+1}$ . Mit Hilfe

des trigonometrischen Polynoms kann man dann Zwischenwerte berechnen, die man weggelassen hat, z.B. um Daten zu sparen. • *Nous connaissons une première application importante du problème mentionné des séries de mesure où il faut trouver une fonction périodique. Une autre application est l'interpolation trigonométrique, par exemple pour les plots. Ici on a donné un nombre de places de mesure. Pour évaluer les valeurs de fonction entre deux places de mesure, nous approximations  $f(t)$  à l'aide de la DFT par polynômes trigonométriques. Ainsi on obtient des polynômes de Fourier aux coefficients  $c_{-\frac{n}{2}+1}, \dots, c_0, \dots, c_{+\frac{n}{2}+1}$ . A l'aide du polynôme trigonométrique, on peut alors calculer des valeurs intermédiaires qu'on a omis p.ex. pour épargner des données (restreindre le nombre de données).*

Wegen der Periodizität von  $f$  und der Formel für  $\tilde{c}_s$  gilt:  $\tilde{c}_s = \tilde{c}_{s+n}$ . Somit sind die Annäherungen  $\tilde{c}$  der Koeffizienten als Funktion des Index periodisch.

• *À cause de la périodicité de  $f$  et de la formule pour  $\tilde{c}_s$  il vaut:  $\tilde{c}_s = \tilde{c}_{s+n}$ . Par conséquent les abords sont périodiques, abords  $\tilde{c}$  des coefficients en tant que fonction de l'index.*

**Problem:** • **Problème:**

Bei grösseren Messreihen, d.h. bei grossem  $n$ , wird der Rechenaufwand enorm, was bei „on line-Übertragungen“ eine Rolle spielt. Bei der Berechnung von  $\vec{c}^{(n)}$  sind nur schon im Teil  $W \cdot \vec{y}^{(n)}$  alleine  $n^2$  komplexe Multiplikationen auszuführen. Daher lohnt es sich, einen schnelleren Algorithmus zu suchen. Für  $n = 2^m$  gelingt dies durch die **schnelle Fouriertransformation (FFT, Fast Fourier Transformation)**. • *Quand il s'agit de séries de mesure plus grandes, c.-à.-d. à grand  $n$ , la dépense des ressources de l'ordinateur devient énorme, ce qui joue un rôle pour les "transfers on line". Déjà pour le calcul de  $\vec{c}^{(n)}$  seulement dans la partie  $W \cdot \vec{y}^{(n)}$  il faut exécuter  $n^2$  multiplications complexes. Par conséquent il vaut la peine de chercher un algorithme plus rapide. Pour  $n = 2^m$  on y réussit par la transformaiton de Fourier rapide, (FFT, Fast Fourier Transformation).*

**Beispiel — Exemple**

**Ges.:** • **Trouver:** Kurve durch Punkte, welche mittels  $f(t)$  generiert worden sind. • *Graphique à travers des points générés par  $f(t)$ .*

$$f(t) = e^{\cos(t)} + \sin^2(t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

**Mathematica-Programm:** • **Programme en Mathematica:**

```
Remove["Global'"]
f[t_] := E^Cos[t] + Sin[t]^2;
n1 = 8; n = 2 * n1; w = 2 Pi/n;
{x[k_], y[k_]} = {k 2 Pi/n, f[k 2 Pi/n]};
p[k_] := {x[k], y[k]};
Table[p[k] // N, {k, 0, n - 1}] // TableForm
```

Koordinaten: • *Coordonnées:*

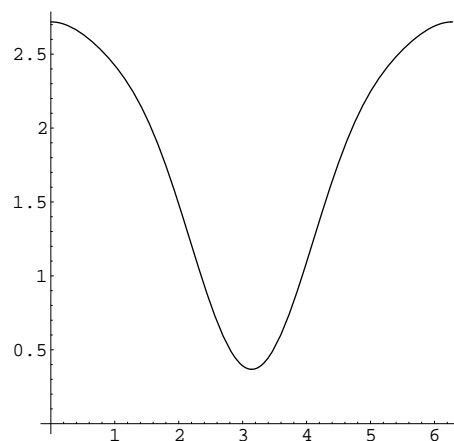
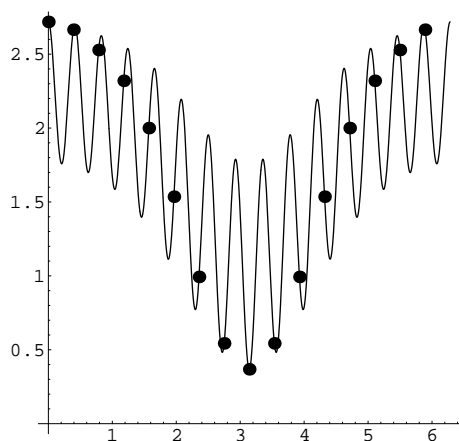
**Output:** • **Output:**

$x$	$y$
0.0000000000000000	2.718281828459045
0.39269908169872414	2.6654907808137103
0.7853981633974483	2.5281149816474726
1.1780972450961724	2.3197671913503832
1.5707963267948966	2.0000000000000000
1.9634954084936207	1.5355821639438108
2.356194490192345	0.9930686913952398
2.748893571891069	0.5434225780502063
3.141592653589793	0.36787944117144233
3.5342917352885173	0.5434225780502061
3.9269908169872414	0.9930686913952398
4.319689898685965	1.5355821639438099
4.71238898038469	2.0000000000000000
5.105088062083414	2.3197671913503832
5.497787143782138	2.5281149816474726
5.890486225480862	2.6654907808137107

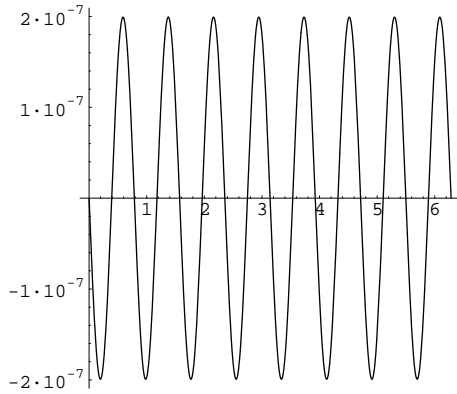
Kurven: • *Graphiques:*

Mathematica-Programm: • Programme en Mathematica:

```
epi = Prepend[Map[Point, Table[p[k], {k, 0, n - 1}]], PointSize[0.03]];
r = E^(-I 2 Pi/n);
c[s_] := 1/n Sum[y[k] r^(s k), {k, 0, n - 1}];
fS[t_] := Sum[c[k] E^(I k t), {k, 0, n - 1}];
fSsym[t_] := Sum[c[k] E^(I k t), {k, -n/2, n - 1 - n/2}];
Plot[Re[fS[t]], {t, 0, 2Pi}, PlotPoints -> 50, Epilog -> epi,
  AspectRatio -> 1];
Plot[Re[fSsym[t]], {t, 0, 2Pi}, PlotPoints -> 50, AspectRatio -> 1];
Plot[Im[fSsym[t]], {t, 0, 2Pi}, PlotPoints -> 50, AspectRatio -> 1];
Plot[{f[t], Re[fSsym[t]]}, {t, 0, 2Pi}, PlotPoints -> 50,
  Epilog -> epi, AspectRatio -> 1];
```



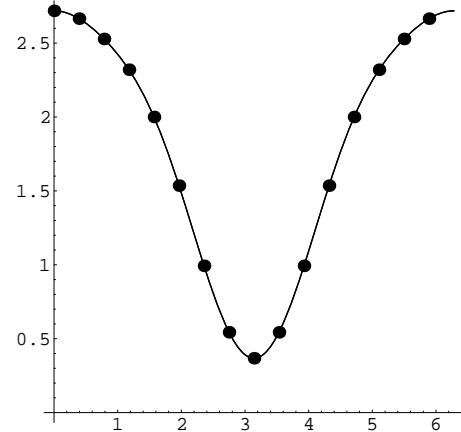
Summationsindex  $0 \leq k \leq n-1$ : Passt schlecht. • *Indice de sommation  $0 \leq k \leq n-1$ : Ne va pas bien.*



Summation des auftretenden Imaginäranteils (Teil des Approximationsfehlers).

• *Sommation de la part imaginaire apparaissant (partie de l'erreur de l'approximation).*

Summationsindex  $-\frac{n}{2} \leq k \leq n-1-\frac{n}{2}$ : Passt besser. • *Indice de sommation  $-\frac{n}{2} \leq k \leq n-1-\frac{n}{2}$ : Va mieux bien.*



Plot der ursprünglichen Funktion, überlagert die Approximation und die berechneten Punkte (Abweichung hier nicht sichtbar).

• *Graphique de la fonction originale, superposée de l'approximation et des points calculés (Ici l'écart nest pas bien visible).*

#### 4.5.2 FFT — FFT

Wir wollen versuchen, die Idee der FFT anhand einer speziellen Situation zu erarbeiten.

• *Nous voulons essayer d'acquérir l'idée du FFT à l'appui d'une situation spéciale.*

Sei • *Soit*  $n = 2 \cdot p$ ,  $r = e^{-i \frac{2\pi}{n}}$   $\Rightarrow r^n = e^{-i \frac{2\pi}{n} \cdot n} = e^{-i 2\pi} = 1 \Rightarrow r^p = r^{\frac{n}{2}} = r^{-i\pi} = -1$

Sei • *Soit*  $\vec{\gamma}^{(n)} = W \cdot \vec{f}^{(n)} = W \cdot \vec{g}^{(n)}$ ,  $\vec{\gamma}^{(n)} = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \vdots \\ \gamma_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$ ,  $f_k = y_k$ ,  $r^p = -1$ ,  $\Rightarrow \vec{\gamma}^{(n)} = n \cdot \vec{c}^{(n)}$

$$\begin{aligned} \leadsto \gamma_{2s} &= \sum_{k=0}^{n-1} r^{2sk} \cdot f_k = \sum_{k=0}^{p-1} r^{2sk} \cdot f_k + \underbrace{\sum_{k=p}^{n-1} r^{2sk} \cdot f_k}_{\sum_{k=0}^{p-1} r^{2s(k+p)} \cdot f_{k+p}} = \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} (r^{2sk} \cdot f_k + \underbrace{r^{2s(p+k)}}_{r^{2sp} \cdot r^{2sk}} \cdot f_{k+p}) = \sum_{k=0}^{p-1} (r^{2sk} (f_k + \underbrace{r^{2sp}}_{(r^p)^{2s} = ((-1)^2)^s = 1^s = 1} \cdot f_{p+k})) = \sum_{k=0}^{p-1} (r^2)^{sk} (f_k + f_{p+k}) \end{aligned}$$

Somit liegt hier eine DFT der Ordnung  $p$  vor für  $(f_k + f_{p+k})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, p-1$ .

• *On a donc ici une DFT d'ordre  $p$  pour  $(f_k + f_{p+k})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, p-1$ .*

Weiter gilt: • *Il vaut en outre:*  $\gamma_{2s+1} = \sum_{k=0}^{p-1} (r^{(2s+1)k} \cdot f_k + r^{(2s+1)(p+k)} \cdot f_{p+k}) = \sum_{k=0}^{p-1} (r^2)^{sk} (f_k + f_{p+k}) \cdot r^k$

Am Ende ist wieder  $r^p = -1$  benutzt worden. • *On a de nouveau utilisé  $r^p = -1$  à la fin.*

Das ist wieder eine DFT für  $(f_k + f_{p+k}) \cdot r^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, p-1$ , und zwar der Ordnung  $n = p$ .

- *C'est de nouveau une DFT de l'ordre  $n = p$  pour  $(f_k + f_{p+k}) \cdot r^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, p-1$ .*

**Trick: • Truc:** Damit haben wir die DFT der Ordnung  $n = 2p$  zerlegt in 2 DFT der Ordnung  $p$ . Statt  $n^2 = 4p^2$  Multiplikationen hat man nur noch  $p^2 + p^2 = 2p^2$  Multiplikationen. Dazu kommen weitere  $p$  Additionen und auch Multiplikationen um z.B.  $(f_k + f_{p+k}) \cdot r^k$  zu bilden. Somit wächst der Gewinn quadratisch mit  $p$ , der Verlust aber nur linear. Der Gewinn ist also von höherer Ordnung.

- *Nous avons donc décomposé la DFT de l'ordre  $n = 2p$  en 2 DFT de l'ordre  $p$ . Au lieu d'avoir  $n^2 = 4p^2$  multiplications on n'a que  $p^2 + p^2 = 2p^2$  multiplications. Il s'ajoutent encore d'autres  $p$  additions et en plus aussi des multiplications, par exemple pour former  $(f_k + f_{p+k}) \cdot r^k$ . Par conséquent le gain croît au carré avec  $p$ , mais la perte seulement linéairement. Ainsi le gain est d'ordre supérieur.*

Nun gelangen wir wie folgt zur FFT: • *Maintenant on obtient la FFT comme il suit:*

Iteration: • *Itération:*

Ist nun  $n = 2p = 4p_1$ , so tritt  $p_1$  an die Stelle von  $p$  vorhin, und mit den beiden oben beschriebenen DFT kann man nochmals gleich verfahren. Ist allgemein  $n = 2^m$ , so lässt sich die DFT in  $2^m$  Teile aufspalten. • *Si l'on a  $n = 2p = 4p_1$ , il y a  $p_1$  qui remplace  $p$  d'en haut, et avec les deux DFT partielles décrites en haut on peut procéder encore une fois de la même façon. Si généralement  $n = 2^m$ , la DFT peut être divisée en  $2^m$  parties.*

Ist  $\mu(n)$  die Anzahl Multiplikationen, die dann noch bleiben, so gilt nach dem eben Gesagten:

- *Si  $\mu(n)$  est le nombre des multiplications qui restent encore, il vaut d'après ce qu'on vient de dire:*

$$\mu(2) = 0, \quad \mu(2p) = 2 \cdot \mu(p) + p \rightsquigarrow \mu(n) = \frac{n}{2} \cdot \ln\left(\frac{n}{2}\right) \Rightarrow \underbrace{\mu(n)}_{FFT} << \underbrace{n^2}_{DFT}$$

**Bsp.: • Exemple:** Sei • *Soit  $n = 8$*

$$\vec{\gamma}^{(8)} = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_2 \\ \gamma_4 \\ \gamma_6 \\ \gamma_1 \\ \gamma_3 \\ \gamma_5 \\ \gamma_7 \end{pmatrix} = \tilde{W}_8 \cdot \vec{f}^{(8)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r^2 & r^4 & r^6 & | & 1 & r^2 & r^4 & r^6 \\ 1 & r^4 & 1 & r^4 & | & 1 & r^4 & 1 & r^4 \\ 1 & r^6 & r^4 & r^2 & | & 1 & r^6 & r^4 & r^2 \\ \hline 1 & r^2 & r^4 & r^6 & | & 1 & r^2 & r^4 & r^6 \\ 1 & r^3 & r^6 & r & | & r^4 & r^7 & r^2 & r^5 \\ 1 & r^5 & r^2 & r^7 & | & r^4 & r & r^6 & r^3 \\ 1 & r^7 & r^6 & r^5 & | & r^4 & r^3 & r^2 & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{pmatrix}$$

Dabei lässt sich  $\tilde{W} = \tilde{W}_8$  wie folgt noch aufspalten:

- *En plus on peut encore séparer  $\tilde{W} = \tilde{W}_8$  comme il suit:*

$$\tilde{W}_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & r^2 & r^4 & r^6 & | & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & r^4 & 1 & r^4 & | & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & r^6 & r^4 & r^2 & | & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & r^2 & r^4 & r^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & r^4 & 1 & r^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & r^6 & r^4 & r^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & | & r^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 & | & 0 & r^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 & | & 0 & 0 & r^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^3 & | & 0 & 0 & 0 & r^7 \end{pmatrix} =$$

$$= \left( \begin{array}{c|c} \tilde{W}_4 & 0 \\ \hline 0 & \tilde{W}_4 \end{array} \right) \cdot D_8 \rightsquigarrow \tilde{W}_8 \text{ ist faktorisiert! } \bullet \text{ est factorisé!}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}^{(8)} = \tilde{W}_8 \cdot \vec{f}^{(8)} = \left( \begin{array}{c|c} \tilde{W}_4 & 0 \\ \hline 0 & \tilde{W}_4 \end{array} \right) \cdot D_8 \cdot \vec{f}^{(8)} \quad \leadsto \quad \text{Sei } \bullet \text{ Soit } \vec{z}^{(8)} := D_8 \cdot \vec{f}^{(8)}$$

$$\leadsto \vec{z}^{(8)} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_7 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{lcl} z_0 & = & f_0 + f_4 \\ z_1 & = & f_1 + f_5 \\ \vdots & = & \vdots \\ z_3 & = & f_3 + f_7 \\ z_4 & = & (f_0 - f_4) \cdot r^0 \\ \vdots & = & \vdots \\ z_7 & = & (f_3 - f_7) \cdot r^3 \end{array}$$

$$\leadsto \Rightarrow \vec{\gamma}^{(8)} = \tilde{W}_8 \cdot \vec{f}^{(8)} = \underbrace{\left( \begin{array}{c|c} \tilde{W}_4 & 0 \\ \hline 0 & \tilde{W}_4 \end{array} \right)}_{=a} \cdot \underbrace{(D_8 \cdot \vec{f}^{(8)})}_{=b}$$

*a:* Die Hälfte der Zellen ist mit 0 besetzt: Grosse Reduktion des Aufwandes.

• *La moitié des cellules contient des 0: Grande réduction du montant de la dépense.*

*b:*  $n = 8$  Additionen und  $\frac{n}{2} = p = 4$  Multiplikationen. •  *$n = 8$  additions et  $\frac{n}{2} = p = 4$  multiplications.*

**Iteration:** • **Itération:**

Mit  $\tilde{W}_4$  verfahren wir gleich wie mit  $\tilde{W}_8$ . • *Avec  $\tilde{W}_4$  nous procédons de la même manière qu'avec  $\tilde{W}_8$ .*

## 4.6 Fouriertransformation — Transformation de Fourier

### 4.6.1 Fourierintegral — Intégrale de Fourier

**Idee** — **Idée**

Sei  $f(t)$  eine Funktion, die in eine Fourierreihe entwickelbar ist. Dann gilt:

• *Soit  $f(t)$  une fonction qui est développable dans une série de Fourier. Alors il vaut:*

$$f(t) \sim \tilde{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\omega_k t} \cdot c_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\omega_k t} \cdot \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(\lambda) \cdot e^{-i\omega_k \lambda} d\lambda = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\omega_k t} \cdot \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\lambda) \cdot e^{-i\omega_k \lambda} d\lambda$$

**Problem:** • **Problème:**

Was soll nun geschehen, wenn  $f(t)$  **nicht periodisch** ist?

• *Qu'est-ce qu'il faudrait faire maintenant si  $f(t)$  n'est pas périodique?*

**Idee:** • **Idée:**

Lasse  $T$  gross und grösser werden. Betrachte dann schliesslich  $T \rightarrow \infty$ :

• *On laisse croître  $T$  de plus en plus. Finalement considérons  $T \rightarrow \infty$ :*

$$\leadsto \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right) \rightarrow (-\infty, \infty) = \mathbb{R}.$$

Für  $\omega$  folgt dann: • *Alors pour  $\omega$  il vaut:*  $\omega = \frac{2\pi}{T} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$

$\leadsto$  **Problem:** • **Problème:**

Was passiert dann mit der Formel für  $\tilde{f}(t)$ ?

• *Qu'est-ce qui se passe alors avec la formule pour  $\tilde{f}(t)$ ?*

$\leadsto$  Sei  $\Delta\Omega$  klein, • *Soit  $\Delta\Omega$  petit,*  $\omega = \frac{2\pi}{T} := \Delta\Omega$ ,

und sei die verwendete Reihe gleichmäßig konvergent.

• *et la série en question soit convergente de façon uniforme.*

$$\begin{aligned} f(t) \sim \tilde{f}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\omega k t} \cdot \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\lambda) \cdot e^{-i\omega k \lambda} d\lambda \cdot \frac{2\pi}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\lambda) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2\pi}{T} k t} \cdot e^{-i\frac{2\pi}{T} k \lambda} \cdot \frac{2\pi}{T} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\lambda) \cdot \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\Delta\Omega k t} \cdot e^{-i\Delta\Omega k \lambda} \cdot \Delta\Omega \right) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\lambda) \cdot \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{i(t-\lambda) \cdot (k \cdot \Delta\Omega)}}_{:=g(k \cdot \Delta\Omega)} \cdot \Delta\Omega \right) d\lambda \\ &:= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\lambda) \cdot \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k \cdot \Delta\Omega) \cdot \Delta\Omega \right) d\lambda \quad \text{mit} \quad \bullet \text{ avec } \Omega := k \cdot \Delta\Omega \leadsto \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k \cdot \Delta\Omega) \cdot \Delta\Omega \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} g(\Omega) d\Omega \end{aligned}$$

Hier haben wir eine unendliche Summe als Riemannsche Näherungssumme interpretiert und sind so zu einem uneigentlichen Integral gekommen. • *Ici, nous avons interprété une somme infinie comme somme d'approximation de Riemann. Ainsi nous avons obtenu une intégrale impropre.*

$$\begin{aligned} \leadsto f(t) \sim \tilde{f}(t) &\xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(\Omega) d\Omega \right) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-\lambda) \cdot \Omega} d\Omega \right) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{i t \cdot \Omega} \cdot e^{-i \lambda \cdot \Omega} d\Omega \right) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cdot e^{-i \lambda \cdot \Omega} d\lambda \right) \cdot e^{i t \cdot \Omega} d\Omega := \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) \cdot e^{i t \cdot \Omega} d\Omega \end{aligned}$$

**Definition:** • **Définition:**  $F(\Omega) := \hat{f}(\Omega) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cdot e^{-i \lambda \cdot \Omega} d\lambda$  heisst **Fourier-Integral** oder **Fourier-Transformierte** resp. **Spektralfunktion** von  $f$ .  
• *s'appelle intégrale de Fourier ou transformée de Fourier resp. fonction spectrale de  $f$ .*

**Bemerkung:** • **Remarque:**

1. Folgerung: • *Conséquence:*  $f(t) \sim \tilde{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\Omega) \cdot e^{i t \cdot \Omega} d\Omega$

2. Es gibt Autoren, die die Fourier-Transformierte von  $f$  wie folgt anders definieren:

• *Il y a des auteurs qui définissent la transformée de Fourier  $f$  différemment comme il suit:*

$$\hat{f}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cdot e^{-i \lambda \cdot \Omega} d\lambda$$



Dann gilt: • *Alors il vaut:*  $f(t) \sim \tilde{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\Omega) \cdot e^{it \cdot \Omega} d\Omega$

$\hat{f}(\Omega)$  und  $f(t)$  haben dann eine quasi symmetrische Schreibweise.

• *Puis  $\hat{f}(\Omega)$  et  $f(t)$  ont une orthographe quasi symétrique.*

3.  $\hat{f}(\Omega)$  entstand aus den Fourierkoeffizienten  $c_k$  und aus  $\Delta\Omega$ , also dem Spektrum von  $f(t)$ , das hier kontinuierlich geworden ist. Daher kommt der Name „Spektralfunktion“ oder „Spektraldichte“. Die Werte  $\Omega$  mit  $\hat{f}(\Omega) \neq 0$  bilden das Spektrum, das für periodische Funktionen diskret war.

•  *$\hat{f}(\Omega)$  est née des coefficients de Fourier et de  $\Delta\Omega$ , donc du spectre de  $f(t)$ , qui est devenu ici continue. Par conséquent nous utilisons les notions de "fonction spectrale" et "densité spectrale". Les valeurs  $\Omega$  avec  $\hat{f}(\Omega) \neq 0$  forment le spectre qui était discret pour les fonctions périodiques.*

4. Damit ergibt sich eine **Interpretation von  $\hat{f}(\Omega)$** :

• *On a par conséquent une interprétation de  $\hat{f}(\Omega)$ :*

Es gilt: • *Il vaut:*  $\tilde{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\Omega) \cdot e^{it \cdot \Omega} d\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\Omega) \cdot (\cos(t \cdot \Omega) + i \sin(t \cdot \Omega)) d\Omega$

Somit ist  $f(t)$  als **kontinuierliche Superposition** von Schwingungen  $\hat{f}(\Omega) \cdot e^{it \cdot \Omega}$  mit der Frequenz  $\Omega$  und der Amplitude  $\hat{f}$  dargestellt. • *Par conséquent  $f(t)$  est représenté comme **superposition ininterrompue** d'oscillations avec la fréquence  $\Omega$  et l'amplitude  $\hat{f}$ .*

5. Die Fouriertransformationen und ihre Inverse entsprechen formal der reellen **Laplace-Transformationen** und ihrer Inversen. • *Les transformations de Fourier et leurs inverses correspondent formellement aux **transformations de Laplace** et à leurs inverses.*

$$\hat{f}(\Omega) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cdot e^{-i\lambda \cdot \Omega} d\lambda, \quad \tilde{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{f}(\Omega) \cdot e^{it \cdot \Omega}) d\Omega$$

6. Damit  $\hat{f}(\Omega)$  existiert, muss  $f(t)$  für  $|t| \rightarrow \infty$  genügend stark gegen 0 gehen.

• *Afin que  $\hat{f}(\Omega)$  existe,  $f(t)$  für  $|t| \rightarrow \infty$  doit aller suffisamment fortement vers 0.*

Es gilt: • *Il vaut:*  $e^{-i\lambda \cdot \Omega} = \cos(\lambda \cdot \Omega) - i \sin(\lambda \cdot \Omega)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cdot e^{-i\lambda \cdot \Omega} d\lambda \right| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cdot (\cos(\lambda \cdot \Omega) - i \sin(\lambda \cdot \Omega)) d\lambda \right| = \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)| \cdot (|\cos(\lambda \cdot \Omega)| + |\sin(\lambda \cdot \Omega)|) d\lambda < \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)| \cdot 2 d\lambda = 2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)| d\lambda \end{aligned}$$

**Konsequenz:** • **Conséquence:**  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)| d\lambda$  existiert • *existe*  $\Rightarrow \hat{f}(\Omega)$  existiert • *existe*

Damit können wir den **Fourierschen Integralsatz** formulieren:

• *Par conséquent nous pouvons maintenant formuler le théorème de l'intégrale de Fourier:*

**Satz:** • **Théorème:**      **Vor.:** • **Hyp.:**

$f$  stückweise glatt auf  $\mathbb{R}$  •  $f$  lisse par morceaux sur  $\mathbb{R}$   
 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)| d\lambda$  existiert • existe

**Beh.:** • **Thè.:**

$$1. \hat{f}(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cdot e^{-i\lambda \cdot \Omega} d\lambda \text{ existiert} \bullet \text{ existe } \forall \Omega \in \mathbb{R}$$

2. In den Stetigkeitspunkten von  $f$  gilt:  
 • Dans les points où  $f$  est continue, il vaut:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\Omega) \cdot e^{it \cdot \Omega} d\Omega$$

3. In den Unstetigkeitspunkten  $\xi$  von  $f$  gilt:  
 • Dans les points  $\xi$  où  $f$  n'est pas continue, il vaut:

$$\tilde{f}(\xi) = \frac{1}{2}(f(\xi^+) + f(\xi^-)) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\Omega) \cdot e^{i\xi \cdot \Omega} d\Omega$$

## Regeln — Règles

Die Parsevalsche Gleichung sieht jetzt für  $T \rightarrow \infty$  wie folgt aus:

- L'équation de Parseval apparaît maintenant pour  $T \rightarrow \infty$  de la façon suivante:

**Korollar:** • **Corollaire:**      **Parseval**

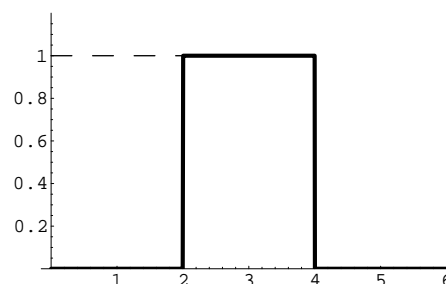
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\Omega)|^2 d\Omega$$

**Bsp.:** • **Exemple:**

Da eine Funktion mit Hilfe von Rechtecksfunktionen abgetastet werden kann, wollen wir eine Rechtecksfunktion studieren:

- Comme une fonction peut être tâchée à l'aide de fonctions de rectangle, nous voulons étudier une fonction de rectangle:

$$f(t) = \begin{cases} a & t \in [t_1, t_2] \\ 0 & t \notin [t_1, t_2] \end{cases} \quad \hat{f}(\Omega) = ?$$



$$\begin{aligned}
\leadsto \hat{f}(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-it \cdot \Omega} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} a \cdot e^{-it \cdot \Omega} dt = \frac{a}{2\pi} \cdot \frac{1}{-i\Omega} \cdot e^{-it \cdot \Omega} \Big|_{t_1}^{t_2} \\
&= -\frac{a}{2\pi i \Omega} (e^{-it_2 \cdot \Omega} - e^{-it_1 \cdot \Omega}) = -\frac{a}{2\pi i \Omega} e^{-i\Omega \frac{t_1+t_2}{2}} (e^{-i\Omega \frac{t_2-t_1}{2}} - e^{-i\Omega \frac{t_1-t_2}{2}}) \\
&= -\frac{a}{2\pi i \Omega} e^{-i\Omega \frac{t_1+t_2}{2}} (-e^{-i\Omega \frac{t_2-t_1}{2}} + e^{+i\Omega \frac{t_2-t_1}{2}}) \cdot (-1) \\
&= \frac{a}{\pi \Omega} \cdot \underbrace{\frac{1}{2i} \cdot (e^{i\Omega \frac{t_2-t_1}{2}} - e^{-i\Omega \frac{t_2-t_1}{2}})}_{\sin(\Omega \frac{t_2-t_1}{2})} \cdot e^{-i\Omega \frac{t_1+t_2}{2}} = \frac{a}{\pi \Omega} \cdot \sin(\Omega \frac{t_2-t_1}{2}) \cdot \underbrace{e^{-i\Omega \frac{t_2+t_1}{2}}}_{\in \mathbb{C}}
\end{aligned}$$

Für ein symmetrisches Intervall mit  $t_1 = -t_0$  und  $t_2 = +t_0$  wird  $\frac{t_2+t_1}{2} = 0$  und  $\frac{t_2-t_1}{2} = t_0$ . Damit erhält man:

• Pour un intervalle symétrique avec  $t_1 = -t_0$  et  $t_2 = +t_0$  on obtient  $\frac{t_2+t_1}{2} = 0$  et  $\frac{t_2-t_1}{2} = t_0$ . On obtient donc:

$$\hat{f}(\Omega) = \frac{a}{\pi \Omega} \cdot \sin(\Omega \frac{t_2-t_1}{2}) \cdot e^{-i\Omega \frac{t_2+t_1}{2}} = \frac{a}{\pi \Omega} \cdot \sin(\Omega t_0) \cdot e^{-i\Omega \cdot 0} = \frac{a}{\pi \Omega} \cdot \sin(\Omega t_0)$$

**Korollar:** • **Corollaire:**

**Vor.:** • **Hyp.:**

$$f(t) = \begin{cases} a & t \in [t_1, t_2] \\ 0 & t \notin [t_1, t_2] \end{cases}$$

**Beh.:** • **Thè.:**

$$\hat{f}(\Omega) = \frac{a}{\pi \Omega} \cdot \sin(\Omega \frac{t_2-t_1}{2}) \cdot e^{-i\Omega \frac{t_2+t_1}{2}}$$

$$t_1 = -t_0, t_2 = +t_0 \Rightarrow \hat{f}(\Omega) = \frac{a}{\pi \Omega} \cdot \sin(\Omega t_0)$$

Weiter gilt: • En outre il vaut:  $f(t) \sim \tilde{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\Omega) \cdot e^{it \cdot \Omega} d\Omega$

Bei einem symmetrischen Intervall wird dann: • Pour un intervalle symétrique on obtient alors:

$$f(t) \sim \tilde{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{\pi \Omega} \cdot \sin(\Omega t_0) \cdot e^{it \cdot \Omega} d\Omega, \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{\pi \Omega} \cdot \sin(\Omega t_0) \cdot e^{it \cdot \Omega} d\Omega, \quad t \in (-t_0, t_0)$$

Speziell: • *Spécialement:*

$$0 \in (-t_0, t_0), \quad f(0) = a = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{\pi \Omega} \cdot \sin(\Omega t_0) \cdot e^{i \cdot 0 \cdot \Omega} d\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{\pi \Omega} \cdot \sin(\Omega t_0) d\Omega$$

$$\Rightarrow \pi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\Omega t_0)}{\Omega} d\Omega = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin(\Omega t_0)}{\Omega} d\Omega \quad \text{unabhängig von } t_0 \quad \bullet \text{ indépendamment de } t_0$$

**Lemma:** • **Lemme:**  $\int_0^{\infty} \frac{\sin(\Omega t_0)}{\Omega} d\Omega$  unabhängig von  $t_0$  • *indépendamment de*  $t_0$

$$\text{und } \bullet \text{ et } \pi = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin(\Omega)}{\Omega} d\Omega.$$

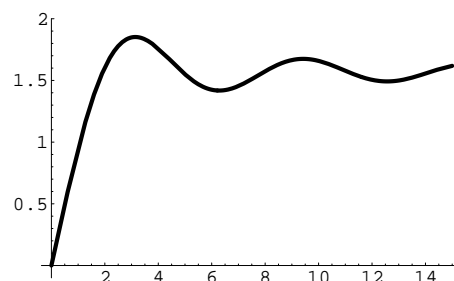
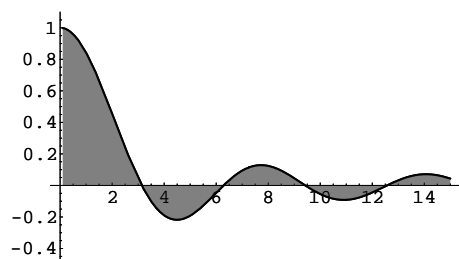
**Definition:** • **Définition:**

$Si(x) := \int_0^x \frac{\sin(\Omega)}{\Omega} d\Omega$  heisst **Integralsinus**

•  $Si(x) := \int_0^x \frac{\sin(\Omega)}{\Omega} d\Omega$  s'appelle **sinus intégral**

$Si(x)$  hat die Bedeutung des nebenstehend gezeigten Flächeninhalts.

- $Si(x)$  a la signification de la mesure de la surface montrée à côté.

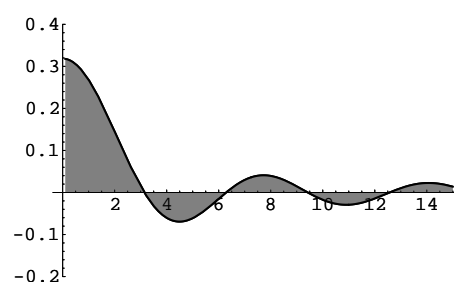
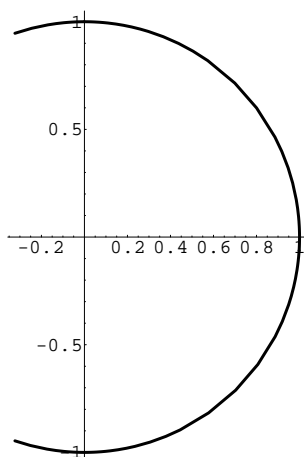


Oben haben wir gezeigt: • *Nous venons de montrer:*

**Satz:** • **Théorème:**  $Si(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} Si(x) = \frac{\pi}{2}$

**Bsp.:** • **Exemple:**

$$f(t) = \begin{cases} e^{i\omega t} & t \in [-t_0, t_0] \\ 0 & t \notin [-t_0, t_0] \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \leadsto \hat{f}(\Omega) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{-t_0}^{t_0} e^{i\omega t} \cdot e^{-i t \cdot \Omega} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-t_0}^{t_0} e^{i t \cdot (\omega - \Omega)} dt \\ &= \frac{1}{2i\pi(\omega - \Omega)} e^{i t \cdot (\omega - \Omega)} \Big|_{-t_0}^{t_0} = \frac{1}{2i\pi(\omega - \Omega)} (e^{i t_0 \cdot (\omega - \Omega)} - e^{-i t_0 \cdot (\omega - \Omega)}) = \frac{1}{\pi(\omega - \Omega)} \sin(t_0 \cdot (\omega - \Omega)) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

**Bsp.:** • **Exemple:**

Sei  $f(t) = \delta(t)$  Dirac-Funktion, Distribution. • *Soit  $f(t) = \delta(t)$  fonction de Dirac, distribution.*

$$\leadsto \hat{f}(\Omega) := \frac{1}{2\pi} \int_{-t_0}^{t_0} f(t) \cdot e^{-i t \cdot \Omega} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-t_0}^{t_0} \delta(t) \cdot e^{-i t \cdot \Omega} dt = \frac{1}{2\pi} \cdot 1 = \frac{1}{2\pi}$$

(Ausblende-Eigenschaft) • (Qualité de couper)

Nachfolgend stehen einige elementar beweisbare Regeln. Die Nachprüfung sei dem Leser überlassen.

• Dans ce qui suit on trouve quelques règles prouvables de manière simple. Le contrôle est affaire du lecteur.

Sei • Soit  $a \cdot f_1(t) + b \cdot f_2(t) \circ \bullet \widehat{a \cdot f_1(\Omega) + b \cdot f_2(\Omega)}, f'(t) \circ \bullet \widehat{f'(\Omega)}, \dots$

**Regeln:** • **Règles:**

1. Linearität: • *Linéarité:*  $\widehat{a \cdot f_1(\Omega) + b \cdot f_2(\Omega)} = a \cdot \hat{f}_1(\Omega) + b \cdot \hat{f}_2(\Omega)$

2. Differentiationsregel: • *Règle de la différentiation*  $\widehat{f'(\Omega)} = i \Omega \hat{f}(\Omega)$

3. Verschiebung Urbild • *Déplacement de l'original*

$$F(t) := f(a(t-d)) \Rightarrow \hat{F}(\Omega) = \frac{1}{a} \cdot e^{-i\Omega d} \cdot \hat{f}\left(\frac{\Omega}{a}\right)$$

4. Verschiebung Bild • *Déplacement de l'image*

$$F(t) := e^{itd} \cdot f(t) \Rightarrow \hat{F}(\Omega) = \hat{f}(\Omega - d)$$

5. Faltung 1: • *Plissement 1:*

$$F(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cdot g(t-\lambda) d\lambda := (f * g)(t) \Rightarrow \hat{F}(\Omega) = 2\pi \cdot \hat{f}(\Omega) \cdot \hat{g}(\Omega)$$

6. Faltung 2: • *Plissement 2:*

$$F(t) = f(t) \cdot g(t) \Rightarrow \hat{F}(\Omega) = (\hat{f} * \hat{g})(\Omega)$$

7. Iteration: • *Itération:*  $\widehat{(\hat{f})}(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot f(-t)$

8. Integration: • *Intégration:*

$F(t) := \int_a^t f(\lambda) d\lambda$  erfülle die Voraussetzungen des Fourierschen Integralsatzes • *satisfait les hypothèses du théorème de l'intégrale de Fourier*

$$\hat{F}(\Omega) = \frac{1}{i\Omega} \cdot \hat{f}(\Omega)$$

9. Distribution: • *Distribution:*  $f(t) \equiv 1 \Rightarrow \hat{f}(\Omega) = \delta(\Omega)$

**Beweis:** • **Preuve:**

Übungen! • *Exercices!*

## 4.6.2 b-Band-Beschränktheit, Shannon — Borné à la bande b, Shannon

**Definition:** • **Définition:**

$f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  heisst **b-Band-beschränkt**

•  $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  s'appelle **borné à la bande b**  $\Leftrightarrow \forall |\Omega| \geq b: \hat{f}(\Omega) = 0$

$\leadsto$  Im Spektrum existieren also keine grösseren Frequenzen, was z.B. in der Akustik der Fall ist.

• Dans le spectre, des fréquences plus grandes d'une certaine fréquence donnée n'existent pas ce qui est p.ex. le cas pour les sons.

Bsp.: • Exemple:

$$\operatorname{sinc}(t) := \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{it\lambda} d\lambda = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

Definition: • Définition:

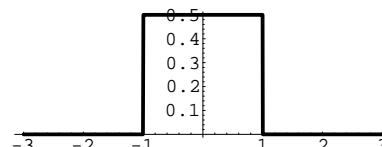
$\operatorname{sinc}(t) :=$  Sinus cardinalis (Kardinalsinus)

•  $\operatorname{sinc}(t) :=$  sinus cardinalis

Die Rechnung ergibt:

• Par le calcul on arrive à

$$\widehat{\operatorname{sinc}}(\Omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} & |\Omega| < 1 \\ 0 & |\Omega| > 1 \end{cases}$$



$$|\Omega| = 1 \Rightarrow \widehat{\operatorname{sinc}}(t) = \frac{1}{4}$$

$\widehat{\operatorname{sinc}}(\Omega)$  ist also  $b$ -Band-beschränkt. •  $\widehat{\operatorname{sinc}}(\Omega)$  est donc borné à la bande  $b$

Satz: • Théorème: Shannon

Vor.: • Hyp.:

$f$   $b$ -Band-beschränkt •  $f$  borné à la bande  $b$   $h \leq \frac{\pi}{b}$

Beh.: • Thè.:

1.  $f$  ist durch die Werte  $f(h \cdot k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  in allen Stetigkeitspunkten eindeutig bestimmt. •  $f$  est donnée de façon univoque par les valeurs  $f(h \cdot k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  dans tous les points de continuité de  $f$ .

$$2. f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(h \cdot k) \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{h} \cdot (t - h \cdot k)\right) \quad (*)$$

$$3. |\Omega| \leq \frac{\pi}{h} \Rightarrow \hat{f}(\Omega) = \frac{h}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(h \cdot k) \cdot e^{-i h k \Omega}$$

Definition: • Définition:

Wir nennen eine Funktion  $f$  **fast  $b$ -Band-beschränkt**, falls  $|\hat{f}(\Omega)|$  klein bleibt für  $|\Omega| > b$ . • Nous appelons une fonction  $f$  **presque bornée à la bande  $b$** , si  $|\hat{f}(\Omega)|$  reste petit pour  $|\Omega| > b$ .

Anwendung: • Application:

Der Mensch nimmt Töne über ca.  $20 \cdot 10^3$  Hertz nicht wahr. Für Musik genügen also  $b$ -Band-beschränkte Funktionen.  $\leadsto$  Digitale Tonaufzeichnung, Compact Disk... Hier wählt man für die Abtastfrequenz  $\frac{1}{h} \geq \frac{b}{\pi} = 40 \cdot 10^3$  Hz • L'homme n'aperçoit pas de sons au dessus de  $20 \cdot 10^3$  Hertz. Donc pour la musique des fonctions bornées à la bande  $b$  suffisent.  $\leadsto$  Phonogramme digital, disque compact... Ici on choisit pour la fréquence de lecture  $\frac{1}{h} \geq \frac{b}{\pi} = 40 \cdot 10^3$  Hz.

### 4.6.3 Lösen von D'Gl mit Fourier-Transformationen — Résoudre des éq.diff. à l'aide de transformations de Fourier

Analog wie bei den Laplace-Transformationen kann man bei D'Gl auch mit Fourier-Transformationen arbeiten. • *Analogiquement aux transformations de Laplace, pour résoudre des éq.diff., on peut aussi travailler avec des transformations de Fourier.*

**Bsp.:** • **Exemple:**  $E(y) \equiv y'(x) + y(x) = f(x)$  (D'Gl • Eq.diff.)

$$E(y) \circ \bullet i \cdot \Omega \cdot \hat{y}(\Omega) + \hat{y}(\Omega) = \hat{f}(\Omega) \Rightarrow \hat{y}(\Omega) = \frac{\hat{f}(\Omega)}{i \cdot (\Omega + 1)}$$

Rücktransformation: • *Transformation inverse:*  $\leadsto y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}(\Omega)}{i \cdot (\Omega + 1)} \cdot e^{i x \cdot \Omega} d\Omega$

Speziell: • *Spécialement:* Sei • *Soit*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1, 1] \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(\Omega) = \frac{\sin(\Omega)}{\pi \cdot \Omega} \text{ (vgl. Seite 137) } \bullet \text{ (voir page 137)}$$

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\Omega)}{i \cdot (\Omega + 1) \cdot \Omega \cdot \pi} \cdot e^{i x \cdot \Omega} d\Omega = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 1 - e^{-(x+1)} & |x| \leq 1 \\ e^{1-x} - e^{-(x+1)} & |x| > 1 \end{cases} \leadsto y_p$$

$\leadsto$  Hier haben wir eine partikuläre Lösung gefunden. Die allgemeine Lösung ergibt sich durch Addition der homogenen Lösungen: • *Ici, nous avons trouvé une solution particulière. Nous trouvons la solution générale par l'addition des solutions homogènes:*

$$E(y)_{hom} \equiv y'(x) + y(x) = 0 \Rightarrow y_{hom}(x) = c \cdot e^{-x}, \quad y_{inhom}(x) = y_{hom}(x) + y_p(x) = c \cdot e^{-x} + y_p(x)$$

**Achtung:** • **Attention:** Für  $c \neq 0$  ist  $\int_{-\infty}^{\infty} |y_{inhom}(x)| dx$  nicht mehr endlich, denn  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} dx = \infty$ .

D.h. die Fouriertransformierte existiert hier nicht. • *Pour  $c \neq 0$  l'intégrale  $\int_{-\infty}^{\infty} |y_{inhom}(x)| dx$  n'est plus finie, car  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} dx = \infty$ . C.v.d. ici, la transformée de Fourier n'existe pas.*

**Konsequenz:** • **Conséquence:** Die Fourier-Transformation liefert nur diejenigen Lösungen der D'Gl, die eine Fourier-Transformierte  $\hat{y}(\Omega)$  besitzen. Und diese sind offenbar recht eingeschränkt.

• *La transformation de Fourier fournit seulement les solutions de l'éq.diff. qui possèdent une transformée de Fourier. Et celles-là sont apparemment bien limitées.*

Weiter sind die Transformatierten reeller Funktionen, im Unterschied zu den Laplace-Transformationen, i.A. komplexe Funktionen. • *En outre les transformées de fonctions réelles sont, à la différence des transformées de Laplace, généralement des fonctions complexes.*

$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } \bullet \text{ Il vaut: } \quad \hat{f}(\Omega) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i t \cdot \Omega} dt, \quad e^{-i t \cdot \Omega} = \cos(t \cdot \Omega) - i \sin(t \cdot \Omega) \\ &\leadsto \hat{f}(\Omega) \in \mathbb{R} \quad \text{für } \bullet \text{ pour } f \text{ gerade } \bullet \text{ paire} \end{aligned}$$

**Hinweis: • Indication:**

Für die Fourier–Transformationen existieren Tabellen genauso wie für die Laplace–Transformationen.

- *Pour les transformations de Fourier il existe des tableaux juste comme pour les transformations de Laplace.*



## Kapitel • Chapitre 5

# z-Transformationen — Transformations en z

### 5.1 Einführung — Introduction

#### 5.1.1 Verwendung — Utilisation

Maschinen, wie z.B. heute übliche Computer (von Neumann-Maschinen), ändern ihren Zustand höchstens immer nur dann, wenn ein neuer Takt beginnt. Man hat es bei ihrer Beschreibung also mit einer Folge von Zuständen zu tun. Mathematisch drückt man das mit diskreten Folgen aus. • *Les machines qui fonctionnent avec une certaine cadence, c.-à-d. qui marchent d'après un certain rythme, comme par exemple aujourd'hui les ordinateurs usuels (machines de von Neumann) changent tout au plus leur état, quand un nouveau rythme (cadence) commence. A leur description on a donc à faire à une suite d'états conditionnés. Mathématiquement ça s'exprime par des suites discrètes.*

Allgemein findet man diese Situation bei der Abtastung diskreter Zeitsignale. Es zeigt sich, dass die Zustandsgleichungen der so geschriebenen Systeme Differenzengleichungen sind. In Analogie zur Behandlung der Differentialgleichungen mit Hilfe von Laplace-Transformationen behandelt man solche Differenzengleichungen mit z-Transformationen. Wie wir später sehen werden, sind z-Transformationen eigentlich nichts anderes als die diskrete Version der Laplace-Transformationen. Daher finden wir die Regeln der Laplace-Transformationen bei den z-Transformationen wieder. • *Généralement on trouve cette situation à la lecture de signaux de temps discrets. Il se montre que les équations de condition des systèmes ainsi écrits sont des équations aux différences. Par l'analogie au traitement des équations différentielles à l'aide de transformations de Laplace on traite de telles équations aux différences à l'aide de transformations en z. Comme nous verrons plus tard, les transformations en z sont proprement rien d'autre que la version discrète des transformations de Laplace. Par conséquent nous trouvons les règles des transformations de Laplace de nouveau pour les transformations en z.*

Literatur: • *Littérature*: Glyn James, Advanced Modern Engineering Mathematics, Addison Wesley.

#### 5.1.2 Gegenstand der Betrachtung — Objet de la considération

Symbole: • symboles:

Endliche Folgen: • *Suites finies*:  $\{x_k\}_{k=0}^{k=n} := \{x_k\}_0^n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

Unendliche Folgen: • *Suites infinies*:  $\{x_k\}_0^\infty := \{x_k\}_0^n = \{x_0, x_1, x_2, x_3 \dots\}$

Falls auch für  $t < 0$  abgetastet wird: • *Si on lit aussi pour  $t < 0$ :*

$$\{x_k\}_{-\infty}^{\infty} := \{\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3 \dots\}$$

**Hinweis:** • **Indication:**

Unendliche Folgen sind Grenzfälle, die bei getakteten Maschinen nicht vorkommen. • *Les suites infinies sont des cas limites qui ne sont pas possibles pour les machines à cadence.*

**Definition:** • **Définition:** Ist  $x_k = 0$  für  $k < 0$ , so heisst die Folge  $\{x_k\}_{-\infty}^{\infty}$  **Kausalfolge**.  
• *S'il vaut  $x_k = 0$  pour  $k < 0$ , la suite  $\{x_k\}_{-\infty}^{\infty}$  s'appelle suite causale.*

Sei • *Soit  $f: t \mapsto f(t)$   $f(t_k) := x_k$ ,  $k \in \mathbb{Z} \rightsquigarrow \{x_k\}_{-\infty}^{\infty}$  definiert* • *définie*

Sei • *Soit  $H(t)$  = Einheitssprungfunktion: • fonction de saut unité:*



**Lemma:** • **Lemme:**  $\{H(t) \cdot x_k\}_{-\infty}^{\infty} = \text{Kausalfolge}$  • *Suite causale*

### 5.1.3 z-Transformierte — Transformée en z

**Definition:** • **Définition:**  $\mathcal{Z}\{x_k\}_{-\infty}^{\infty} := X(z) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{x_k}{z^k}$  heisst **z-Transformierte** von  
• *s'appelle transformée en z de  $\{x_k\}_{-\infty}^{\infty}$*

$\mathcal{Z}$  ist hier ein Operator auf der Menge  $\{\{x_k\}_{-\infty}^{\infty}\}$ . •  *$\mathcal{Z}$  est un opérateur sur l'ensemble  $\{\{x_k\}_{-\infty}^{\infty}\}$ .*

**Symbol:** • **Symbole:**  $\{x_k\} \circ \bullet X(z)$

**Lemma:** • **Lemme:** **Vor.:** • **Hyp.:**  $\{x_k\}_{-\infty}^{\infty}$  Kausalfolge • *Suite causale*

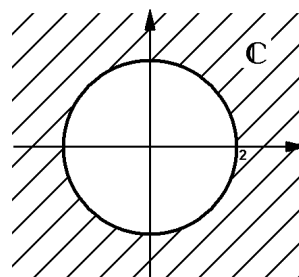
**Beh.:** • **Thè.:**  $\mathcal{Z}\{x_k\}_{-\infty}^{\infty} = \mathcal{Z}\{x_k\}_0^{\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{z^k}$

**Bsp.:** • **Exemple:** Sei • *Soit  $x_k = 2^k$  für* • *pour  $k \geq 0$*

$\mathcal{Z}\{x_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^k \rightsquigarrow \text{Geometrische Reihe}$  • *Suite géométrique*

$$\Rightarrow \mathcal{Z}\{x_k\} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - (\frac{2}{z})^k}{1 - \frac{2}{z}} = \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} = \frac{z}{z-2}$$

für • *pour*  $|\frac{2}{z}| < 1, 2 < |z|$



Umgekehrt: • *Dans l'autre direction:*  $\frac{z}{z-2} = \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} = (1 - \frac{2}{z})^{-1} = 1 + \frac{2}{z} + (\frac{2}{z})^2 + (\frac{2}{z})^3 + \dots$

## 5.2 Regeln, Calculus — Règles, calcul

### 5.2.1 Geometrische Folgen — Suites géométriques

Nimmt man statt 2 allgemein  $a \in \mathbb{C}$ , so gilt: • *Si on prend généralement*  $a \in \mathbb{C}$  *au lieu de 2, on obtient:*

**Satz:** • **Théorème:**      **Vor.:** • **Hyp.:**

$|z| > a, x_k = a^k$  für • *pour*  $k \geq 0, \{x_k\}$   
Kausalfolge • *suite causale*

**Beh.:** • **Thè.:**

$$\mathcal{Z}\{x_k\} = \mathcal{Z}\{a^k\} = \frac{z}{z-a}$$

**Bsp.:** • **Exemple:**  $\mathcal{Z}\{(-\frac{1}{2})^k\} = \frac{z}{z - (-\frac{1}{2})} = \frac{2z}{2z+1}$

### 5.2.2 Differentiation von Transformierten — Différentiation de transformées

Durch Differentiation von  $\mathcal{Z}\{a^k\} = \frac{z}{z-a}$  für  $|z| > |a|$  lassen sich neue Regeln gewinnen. • *On obtient de nouvelles règles par différentiation de*  $\mathcal{Z}\{a^k\} = \frac{z}{z-a}$  *pour*  $|z| > |a|$ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \mathcal{Z}\{a^k\} &= \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{z-a} \right) = \frac{(z-a) - z}{(z-a)^2} = \frac{-a}{(z-a)^2} = \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{z^k} = \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cdot z^{-k} = - \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot a^k \cdot z^{-k-1} \\ &= - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \cdot a^k}{z^{k+1}} = -\frac{1}{z} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \cdot a^k}{z^k} = -\frac{1}{z} \cdot \mathcal{Z}\{k \cdot a^k\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} \mathcal{Z}\{a^k\} &= \frac{d}{da} \left( \frac{z}{z-a} \right) = \frac{0 \cdot (z-a) - z \cdot (-1)}{(z-a)^2} = \frac{z}{(z-a)^2} = \frac{d}{da} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \cdot a^{k-1}}{z^k} = \mathcal{Z}\{k \cdot a^{k-1}\} \\ &= \frac{1}{a} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \cdot a^k}{z^k} = -\frac{z}{a} \cdot \frac{d}{dz} \mathcal{Z}\{a^k\} \Rightarrow \frac{d}{da} \mathcal{Z}\{a^k\} = -\frac{z}{a} \cdot \frac{d}{dz} \mathcal{Z}\{a^k\} \end{aligned}$$

**Regeln:** • **Règles:** **Vor.:** • **Hyp.:**  $|z| > |a|$

**Beh.:** • **Thè.:**

1.  $\frac{d}{da} \mathcal{Z}\{a^k\} = -\frac{z}{a} \cdot \frac{d}{dz} \mathcal{Z}\{a^k\}$
2.  $\mathcal{Z}\{k \cdot a^{k-1}\} = \frac{z}{(z-a)^2}$
3.  $a = 1 \Rightarrow \mathcal{Z}\{k\} = \frac{z}{(z-1)^2}$

**Bemerkung:** • **Remarque:**  $\mathcal{Z}\{a_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \frac{1}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^k := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot w^k, \quad w := \frac{1}{z}$   
 $\leadsto$  Die z-Transformierte ist eine **Potenzreihe!** • *La transformée en z est une série de puissances!*

### 5.2.3 Linearität, Einheitsimpuls — Linéarité, impulsion d'unité

#### Linearität — Linéarité

Da z-Transformierte also Potenzreihen sind, dürfen wir innerhalb des jeweiligen Konvergenzbereiches die bekannten Rechenregeln anwenden: Gliedweise integrieren, differenzieren, addieren u.s.w.. Daher gilt: • *Comme la transformée en z est donc une série de puissances, les règles de calcul connues peuvent être utilisées dans le domaine de convergence: Intégrer terme par terme, différencier terme par terme, additionner terme par terme etc.. Par conséquent il vaut:*

**Regel:** • **Règle:**  $\mathcal{Z}\{\lambda a_k + \mu b_k\} = \lambda \mathcal{Z}\{a_k\} + \mu \mathcal{Z}\{b_k\}$   
 innerhalb des gemeinsamen Konvergenzbereiches. • *dans le domaine de convergence commun.*

**Bsp.:** • **Exemple:**  $\mathcal{Z}\{2k\} = 2 \cdot \mathcal{Z}\{k\} = 2 \cdot \frac{z}{(z-1)^2}$

### 5.2.4 Exponential und trigonometrische Folgen — Suites exponentielles et trigonométriques

#### Einheitsimpuls — Impulsion d'unité

Wir betrachten nun die Folge: • *Maintenant nous étudions la suite:*

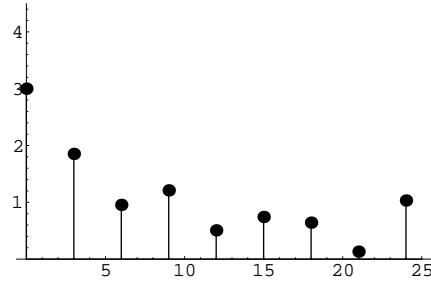
$$\{\delta_k\} = \{1, 0, 0, 0, \dots\} \circ \bullet \mathcal{Z}\{\delta_k\} = \frac{1}{z^0} + \frac{0}{z^1} + \frac{0}{z^2} + \frac{0}{z^3} + \dots = 1 \leadsto$$

**Regel:** • **Règle:**  $\{\delta_k\} = \{1, 0, 0, 0, \dots\}$  heisst **Einheitsimpulssequenz** (kurz: Einheitsimpuls) • *s'appelle séquence d'impulsion d'unité (bréf: Impulsion d'unité)*

**Exponentialfolge — Suite exponentielle****Aus der Praxis:** Abtasten eines Signals**• De la pratique:** Lire un signal

Sei • Soit  $\{f(kT) \mid k = 0, 1, 2, \dots\} = \{f(0), f(T), f(2T), f(3T), \dots\} := \{f\{kT\}\}$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}\{f\{kT\}\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(kT)}{z^k}$$



**Bsp.:** • **Exemple:**  $f(t) = e^{-t} \cdot H(t)$  (Einheitssprung für  $t = 0$ ) • (Saut d'unité pour  $t = 0$ )

$$\begin{aligned} \Rightarrow \{f\{kT\}\} &= \{1, e^{-T}, e^{-2T}, e^{-3T}, \dots\} \circ \bullet \mathcal{Z}\{f\{kT\}\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-kT}}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-T}}{z}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e^T \cdot z}\right)^k \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{e^T \cdot z}} = \frac{e^T \cdot z}{e^T \cdot z - 1} = \frac{z}{z - e^{-T}} \quad \text{für } \bullet \text{ pour } |z| > e^{-T} \end{aligned}$$

**Regel:** • **Règle:****Vor.:** • **Hyp.:**

$$\{f\{kT\}\} = \{e^{-kT}\}_0^{\infty}, \quad |z| > e^{-T}$$

**Beh.:** • **Thè.:**

$$\{f\{kT\}\} \circ \bullet \mathcal{Z}\{f\{kT\}\} = \frac{z}{z - e^{-T}}$$

**Trigonometrische Folgen — Suites trigonométriques****1. Beispiel:** • **Exemple 1:**

$$\begin{aligned} \{\cos(k\omega T)\} \circ \bullet \mathcal{Z}\{\cos(k\omega T)\} &= \mathcal{Z}\left\{\frac{e^{ik\omega T} + e^{-ik\omega T}}{2}\right\} = \frac{1}{2} \cdot (\mathcal{Z}\{e^{ik\omega T}\} + \mathcal{Z}\{e^{-ik\omega T}\}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{z}{z - e^{-i\omega T}} + \frac{z}{z - e^{i\omega T}}\right) = \frac{z \cdot (z - \cos(\omega T))}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1} \quad \text{für } \bullet \text{ pour } |z| > 1 \end{aligned}$$

**2. Beispiel:** • **Exemple 2:**

Auf analoge Weise erhalten wir: • Nous obtenons de façon analogue:

$$\{\sin(k\omega T)\} \circ \bullet \mathcal{Z}\{\sin(k\omega T)\} = \frac{z \cdot \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1} \quad \text{für } \bullet \text{ pour } |z| > 1$$

**Regel:** • **Règle:****Vor.:** • **Hyp.:**

$$|z| > 1$$

**Beh.:** • **Thè.:**

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{\cos(k\omega T)\}_0^{\infty} &= \frac{z \cdot (z - \cos(\omega T))}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1} \\ \mathcal{Z}\{\sin(k\omega T)\}_0^{\infty} &= \frac{z \cdot \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1} \end{aligned}$$

### 5.2.5 Verschiebungen — Décalages

#### Rechtsverschiebung — Décalage à droite

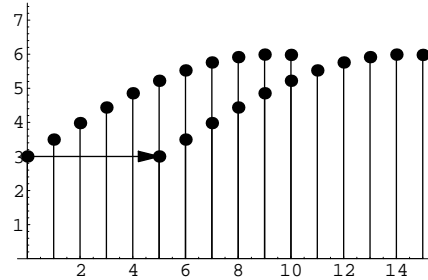
Statt „Rechtsverschiebung“ sagen wir auch **Verzögerung**. • *Au lieu de dire "décalage à droite", nous disons aussi retardement.*

Sei • Soit

$$y_k = x_{k-k_0}, \quad k \geq k_0$$

$$y_k = 0, \quad k < k_0$$

$$x_0 = y_{k_0}$$



$$\leadsto \mathcal{Z}\{y_k\} = \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{y_k}{z^k} = \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{x_{k-k_0}}{z^k} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x_p}{z^{p+k_0}} = \frac{1}{z^{k_0}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x_p}{z^p} = \frac{1}{z^{k_0}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{z^k} = \frac{1}{z^{k_0}} \mathcal{Z}\{x_k\}$$

**Regel:** • **Règle:**      **Vor.:** • **Hyp.:**

$$\mathcal{Z}\{x_k\} = \{x_k\}_0^{\infty}, \quad k < 0 \Rightarrow x_k = 0, \quad \mathcal{Z}\{x_k\} = X(z)$$

**Beh.:** • **Thè.:**

$$\mathcal{Z}\{x_{k-k_0}\} = \frac{1}{z^{k_0}} \mathcal{Z}\{x_k\} = \frac{1}{z^{k_0}} X(z)$$

**Bsp.:** • **Exemple:**  $x_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad k \geq 0.$

$$\{x_{k-2}\} \circ \bullet \mathcal{Z}\{x_{k-2}\} = \frac{1}{z^2} \mathcal{Z}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{z}{z-\frac{1}{2}} = \frac{2}{z(2z-1)} \quad \text{für} \bullet \text{ pour } |z| > \frac{1}{2}$$

#### Linksverschiebung — Décalage à gauche

Statt „Linksverschiebung“ sagen wir auch **Vorverschiebung**. • *Au lieu de dire "décalage à gauche", nous disons aussi expédition.*

Sei • Soit  $y_k = x_{k+k_0} \leadsto \mathcal{Z}\{y_k\} = ?$

Argumentiere rekursiv: • *Argumenter récursivement:*

$$k_0 = 1, \quad y_k = x_{k+1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{Z}\{y_k\} &= \left\{\frac{y_k}{z^k}\right\}_0^{\infty} = \left\{\frac{x_{k+1}}{z^k}\right\}_0^{\infty} = z \left\{\frac{x_{k+1}}{z^{k+1}}\right\}_0^{\infty} = z \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x_p}{z^p} = z \left( \left( \sum_{p=1}^{\infty} \frac{x_p}{z^p} \right) - x_0 \right) = z \cdot \mathcal{Z}\{x_k\} - z \cdot x_0 \\ &= z \cdot X(z) - z \cdot x_0 = \mathcal{Z}\{x_{k+1}\} \quad (\text{wegen der Rechtsverschiebung}) \bullet (\text{à cause du décalage à droite}) \end{aligned}$$

$$\leadsto \text{Induktion:} \bullet \text{Induction: } \mathcal{Z}\{x_{k+2}\} = z^2 \cdot \mathcal{Z}\{x_k\} - z^2 \cdot x_0 - z \cdot x_1$$

$$\leadsto \mathcal{Z}\{x_{k+k_0}\} = z^{k_0} \cdot \mathcal{Z}\{x_k\} - z^{k_0} \cdot x_0 - z^{k_0-1} \cdot x_1 - \dots - z \cdot x_{k_0-1}$$

<b>Regel:</b>	<b>• Règle:</b>	<b><u>Vor.:</u></b>	<b>• Hyp.:</b>	$\{x_k\} = \{x_k\}_0^\infty$
		<b><u>Beh.:</u></b>	<b>• Thè.:</b>	$\mathcal{Z}\{x_{k+k_0}\}_0^\infty = z^{k_0} \cdot \mathcal{Z}\{x_k\} - \sum_{n=0}^{k_0-1} z^{k_0-n} \cdot x_n$

**Bemerkung:** • **Remarque:**

Diese Regeln werden bei der Anwendung auf die Differenzengleichungen zentral sein. • *Ces règles seront importantes pour l'application aux équations aux différences.*

### 5.2.6 Gliedweise Multiplikation mit einer Folge — Multiplication avec une suite terme par terme

Multiplikation mit geometrischer Folge — Multiplication avec suite géométrique

$$\{x_k\} \circ \bullet \mathcal{Z}\{a^k x_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k x_k}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{\frac{z^k}{a^k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{(\frac{z}{a})^k} = X(\frac{z}{a}) \rightsquigarrow$$

<b>Regel:</b>	<b>• Règle:</b>	<b><u>Vor.:</u></b>	<b>• Hyp.:</b>	$\mathcal{Z}\{x_k\} \circ \bullet X(z)$
		<b><u>Beh.:</u></b>	<b>• Thè.:</b>	$\mathcal{Z}\{a^k x_k\} \circ \bullet X(\frac{z}{a})$

Multiplikation mit Potenzfolge — Multiplication avec suite de puissances

$$\begin{aligned} \text{Sei } \bullet \text{ Soit } n=1 \rightsquigarrow \mathcal{Z}\{k x_k\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k x_k}{z^k} \cdot \frac{z}{z} = z \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{z^{k+1}} x_k = z \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z^k}\right) x_k\right) = -z \cdot \frac{d}{dz} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{z^k}\right) \\ &= -z \frac{d}{dz} (\mathcal{Z}\{x_k\}) = (-z \frac{d}{dz})(X(z)) \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \text{Induktion: } \bullet \text{ Induction: } \mathcal{Z}\{k^n x_k\} = \left(-z \frac{d}{dz}\right)^n (X(z))$$

<b>Regel:</b>	<b>• Règle:</b>	<b>Differentiation der Transformierten • Différentiation de la transformée</b>		
		<b><u>Vor.:</u></b>	<b>• Hyp.:</b>	$\mathcal{Z}\{x_k\} \circ \bullet X(z)$
		<b><u>Beh.:</u></b>	<b>• Thè.:</b>	$\mathcal{Z}\{k^n x_k\} \circ \bullet \left(-z \frac{d}{dz}\right)^n (X(z))$

**Bsp.:** • **Exemple:**

$$\begin{array}{ll}
(-z \frac{d}{dz})(X(z)) = (-z \frac{d}{dz})\left(\frac{z}{z-a}\right) = \frac{z}{(a-z)^2} & \bullet \text{---} \circ \quad \{a^k\}, \\
(-z \frac{d}{dz})^2(X(z)) = (-z \frac{d}{dz})\left(\frac{az}{(a-z)^2}\right) = \frac{2a^3}{(z-a)^3} + \frac{3a^2}{(z-a)^2} + \frac{a}{z-a} & \bullet \text{---} \circ \quad \{k a^k\}, \\
& \text{u.s.w.} \quad \bullet \text{---} \circ \quad \{k^2 a^k\} \\
& \text{etc.} \quad \dots \quad \bullet \text{---} \circ \quad \{k^n a^k\}
\end{array}$$

**Konsequenz:** • **Conséquence:**

Wie man sofort sieht, lassen sich mit Hilfe dieser Regel Ausdrücke der Form  $\frac{1}{(z-\alpha)^n}$  transformieren.

• *Comme on voit tout de suite, on peut transformer à l'aide de cette règle des expressions de la forme  $\frac{1}{(z-\alpha)^n}$ .*

### 5.2.7 Anfangs- und Endwertsatz — Théorème de valeurs aux limites

**Anfangswertsatz — Théorème des valeurs au début**

Es gilt: • *Il vaut:*  $\mathcal{Z}\{x_k\} \circ \bullet X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{z^k} = x_0 + \frac{x_1}{z} + \frac{x_2}{z^2} + \dots \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} x_0$

**Satz:** • **Théorème:**      **Vor.:** • **Hyp.:**       $\{x_k\} = \{x_k\}_0^{\infty}$   
(Kausalfolge) • *(suite causale)*

**Beh.:** • **Thè.:**       $\lim_{|z| \rightarrow \infty} X(z) = x_0$

**Endwertsatz — Théorème des valeurs à la fin**

Betrachte: • *Considérons:*  $(1 - \frac{1}{z}) \cdot X(z) = (1 - \frac{1}{z}) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \cdot (\frac{1}{z} - \frac{1}{z^{k+1}}) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}}$   
 $= x_0 \cdot \frac{z-1}{z} + x_1 \cdot \frac{z-1}{z^2} + \dots + x_{N_0} \cdot \frac{z-1}{z^{N_0+1}} + \sum_{k=N_0+1}^{\infty} x_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}}$

Es gilt nun: • *Maintenant il vaut:*  $\lim_{z \rightarrow 1} x_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} = 0 \Rightarrow \lim_{z \rightarrow 1} (1 - \frac{1}{z}) \cdot X(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \sum_{k=N_0+1}^{\infty} x_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}}$

Sei jetzt: • *Soit maintenant:*  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_{\infty} \in \mathbb{C}$  existiert • *existe  $\leadsto$   $|x_k - x_{\infty}| < \varepsilon$*

$\leadsto x_k = x_{\infty} \pm \varepsilon_k$  für • *pour  $k > N_0$  und* • *et  $0 \leq \varepsilon_k \leq \varepsilon_{N_0}$*

$\Rightarrow \sum_{k=N_0+1}^{\infty} x_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} = \sum_{k=N_0+1}^{\infty} x_{\infty} \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} + \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \pm \varepsilon_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}}$       Hier ist: • *Ici on peut conclure:*

$\left| \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \pm \varepsilon_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} \right| < \varepsilon_{N_0} \cdot \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \left| \frac{z-1}{z^{k+1}} \right| = \varepsilon_{N_0} \cdot \left| \frac{z-1}{z^{N_0+2}} \right| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1}{z^k} \right| = \varepsilon_{N_0} \cdot \left| \frac{z-1}{z^{N_0+2}} \right| \cdot \frac{1}{|1-z|}$

$\leq \varepsilon_{N_0} \cdot \left| \frac{z-1}{z^{N_0+2}} \right| \cdot \frac{1}{|1-z|}$ , denn es gilt: • *car il vaut:*  $|1-z| = ||1|-|z|| \leq |1-z| \leq |1|+|z|$

$\Rightarrow \left| \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \pm \varepsilon_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} \right| < \varepsilon_{N_0} \cdot \left| \frac{z-1}{z^{N_0+2}} \right| \cdot \frac{1}{|1-z|} = \varepsilon_{N_0} \cdot \left| \frac{1}{z^{N_0+2}} \right|$  für • *pour  $|z| > 1$*



$$\leadsto \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \pm \varepsilon_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} = \varepsilon^*(N_0) \cdot \frac{1}{z^{N_0+2}}, \quad |\varepsilon^*(N_0) \cdot \frac{1}{z^{N_0+2}}| < \varepsilon_{N_0} \cdot \left| \frac{1}{z^{N_0+2}} \right|$$

Für  $\varepsilon_{N_0} \rightarrow 0$  sowie  $z \rightarrow 1$  erhalten wir: • *Pour  $\varepsilon_{N_0} \rightarrow 0$  ainsi que  $z \rightarrow 1$  nous obtenons:*

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \pm \varepsilon_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} \right| &< \varepsilon_{N_0} \cdot \left| \frac{1}{z^{N_0+2}} \right| \rightarrow 0 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \pm \varepsilon_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} \rightarrow 0 \\ \Rightarrow \sum_{k=N_0+1}^{\infty} x_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} &= \sum_{k=N_0+1}^{\infty} x_{\infty} \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} + \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \pm \varepsilon_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} \sim x_{\infty} \cdot \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \frac{z-1}{z^{k+1}} + 0 \end{aligned}$$

Hier wird: • *Ici on obtient:*

$$\begin{aligned} x_{\infty} \cdot \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \frac{z-1}{z^{k+1}} &= x_{\infty} \cdot \frac{z-1}{z^{N_0+2}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^k} = x_{\infty} \cdot \frac{z-1}{z^{N_0+2}} \cdot \frac{1}{1-z} = x_{\infty} \cdot \frac{1}{z^{N_0+2}} \cdot \frac{1}{1} = x_{\infty} \cdot \frac{1}{z^{N_0+2}} \\ \Rightarrow \sum_{k=N_0+1}^{\infty} x_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} &\sim x_{\infty} \cdot \frac{1}{z^{N_0+2}} + 0 = \frac{x_{\infty}}{z^{N_0+2}} \quad \text{für } \bullet \text{ pour } |z| > 1 \end{aligned}$$

$$\leadsto \lim_{z \rightarrow 1, |z| > 1} \left(1 - \frac{1}{z}\right) \cdot X(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \sum_{k=N_0+1}^{\infty} x_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{x_{\infty}}{z^{N_0+2}} = x_{\infty} \in \mathbb{C}$$

(falls dieser Limes existiert) • *(si cette limite existe)*

**Bemerkung:** • **Remarque:**

Falls  $\lim_{z \rightarrow 1, |z| > 1} \left(1 - \frac{1}{z}\right) \cdot X(z)$  existiert, so kann dieser Limes nach der Definition des Limes nicht vom Weg abhängig sein, auf dem  $z \rightarrow 1$  geht. Für  $|z| < 1$ ,  $z \rightarrow 0$  existiert der Limes nicht, wie Trivialbeispiele zeigen: • *Si  $\lim_{z \rightarrow 1, |z| > 1} \left(1 - \frac{1}{z}\right) \cdot X(z)$  existe, d'après la définition de la valeur limite, cette valeur ne peut pas dépendre du chemin, sur lequel  $z \rightarrow 1$ . Pour  $|z| < 1$ ,  $z \rightarrow 0$ , cette valeur limite n'existe pas, comme on apprend des exemples triviaux:*

**Bsp.:** • **Exemple:** Sei • *Soit  $z = r \in \mathbb{R}$ ,  $0 < z = r < 1$ ,  $a \neq 0$ ,  $x_k = a = \text{const.}$   $\forall_{k \in \mathbb{N}_0}$*

$$\leadsto x_{\infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a, \quad \left(1 - \frac{1}{z}\right) \cdot X(z) = \left(1 - \frac{1}{z}\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a}{z^k} = \left(1 - \frac{1}{z}\right) \cdot a \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{z}\right)^{k+1}}{1 - \frac{1}{z}}$$

mit • *avec  $\left(\frac{1}{z}\right)^{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$  und* • *et  $z = r < 1$*

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{z}\right) \cdot X(z) \rightarrow \left(1 - \frac{1}{z}\right) \cdot a \cdot \frac{1 - \infty}{1 - \frac{1}{z}} = \pm \infty \leadsto \text{Limes existiert nicht!} \bullet \text{ Valeur limite n'existe pas!}$$

Daher ist die Voraussetzung „ $X(z)$  existiert“ wesentlich. • *C'est pourquoi l'hypothèse " $X(z)$  existe" est essentielle.*

**Satz:** • **Théorème:**      **Vor.:** • **Hyp.:**

- (1)  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_\infty$  existiert • *existe*  
 (2)  $\mathcal{Z}\{x_k\} = \{x_k\}_0^\infty \circ \bullet X(z)$ ,  $X(z)$  existiert für alle betrachteten  $z$   
 •  $X(z)$  existe pour tous les  $z$  en question

**Beh.:** • **Thè.:**

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} \left(1 - \frac{1}{z}\right) \cdot X(z)$$

### 5.2.8 Inverse z-Transformation — Transformation en z inverse

**Definition** — **Définition**

Sei • *Soit*  $\{x_k\}_0^\infty \circ \bullet \mathcal{Z}\{x_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{z^k} = X(z)$  und • *et*  $\{y_k\}_0^\infty \circ \bullet \mathcal{Z}\{y_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_k}{z^k} = Y(z)$

Für  $\{x_k\}_0^\infty \neq \{y_k\}_0^\infty$  ist für mindestens ein  $k \in \mathbb{N}_0$   $x_k \neq y_k$ , d.h. die Potenzreihen  $X(z)$  und  $Y(z)$  sind in mindestens einem Glied verschieden. Die Transformation ist also injektiv und somit auf den benötigten Mengen bijektiv. • *Pour*  $\{x_k\}_0^\infty \neq \{y_k\}_0^\infty$  pour au moins un  $k \in \mathbb{N}_0$  il est  $x_k \neq y_k$ . C.v.d. les séries de puissances  $X(z)$  et  $Y(z)$  sont différentes pour au moins un terme. La transformation est donc injective et donc bijective sur les ensembles nécessaires.  $\leadsto$

**Lemma:** • **Lemme:** Die Menge der z-Transformationen  $\{\{x_k\}_0^\infty \circ \bullet \mathcal{Z}\{x_k\}\}$  stiftet eine zwischen der Urbildmenge  $\{\{x_k\}_0^\infty\}$  und der Bildmenge  $\{\mathcal{Z}\{x_k\}\}$  bijektive Abbildung. D.h. die **inverse Transformation**  $\mathcal{Z}^{-1}$  existiert eindeutig.  
 • *L'ensemble des transformations en z*  $\{\{x_k\}_0^\infty \circ \bullet \mathcal{Z}\{x_k\}\}$  crée une application bijective entre l'ensemble original  $\{\{x_k\}_0^\infty\}$  et l'ensemble des images  $\{\mathcal{Z}\{x_k\}\}$ . C.v.d. la **transformation inverse**  $\mathcal{Z}^{-1}$  existe de façon univoque.

### 5.2.9 Auffinden der Inversen — Trouver l'inverse

**Problem:** • **Problème:**

In der Praxis hat man oft das folgende Problem zu lösen: Gegeben  $X(z)$ , gesucht die Inverse  $\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$ .  
 • *Dans la pratique, on a souvent à résoudre le problème suivant: Si donné  $X(z)$ , chercher l'inverse  $\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$ .*

Häufig ist  $X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ ,  $P(z), Q(z)$  Polynome in  $z$ . Zur Auffindung der Inversen hilft daher oft die

**Partialbruchzerlegung!** • *Souvent on a*  $X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ ,  $P(z), Q(z)$  polynômes dans  $z$ . C'est pourquoi pour trouver l'inverse, la **décomposition en fractions partielles** est souvent utile!

**Beispiele ohne komplexe Zahlen** — **Exemples sans nombres complexes**

**1. Beispiel:** • **Exemple 1:**    **Geg.:** • **Donné:**  $\{a^k\} \circ \bullet \frac{z}{z-a} \Rightarrow \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-a}\right\} = \{a^k\}$

Z.B. • *P.ex.*  $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-2}\right\} = \{2^k\}$

**2. Beispiel: • Exemple 2:**

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)} = z \frac{1}{(z-1)(z-2)} \stackrel{!}{=} z \left( \frac{1}{(z-2)} - \frac{1}{(z-1)} \right) = \frac{z}{(z-2)} - \frac{z}{(z-1)}$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = \{2^k\} - \{1^k\} = \{(2^k - 1)\}_{k=0}^\infty$$

Ein anderer Weg ergibt sich mit dem Verschiebungssatz: • *Une méthode différente utilise le théorème de transfert (décalage):*

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)} \stackrel{!}{=} \frac{2}{(z-2)} - \frac{1}{(z-1)} = 2 \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{z}{(z-2)} - \frac{1}{z} \cdot \frac{z}{(z-1)} \bullet \circ \{(2 \cdot 2^{k-1} - 1^{k-1})\} = \{(2^k - 1)\}$$

**3. Beispiel: • Exemple 3:**  $Y(z) = \frac{2z+1}{(z+1)(z-3)}$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{z+1} + \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{z-3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{z}{z+1} + \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{z}{z-3} \bullet \circ \begin{cases} \frac{1}{4} \cdot (-1)^{k-1} + \frac{7}{4} \cdot (3)^{k-1}, & k > 0 \\ 0 + 0 = 0, & k = 0 \end{cases}$$

**4. Beispiel: • Exemple 4:**  $Y(z) = \frac{z^3 + 2z^2 + 1}{(z^3)} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3}$

$$1 \bullet \circ \{1, 0, 0, 0, \dots\} \quad \frac{2}{z} \bullet \circ \{0, 2, 0, 0, 0, \dots\} \quad \frac{1}{z^3} \bullet \circ \{0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, \dots\}$$

$$\leadsto Y(z) \bullet \circ \{1, 2, 0, 1, 0, 0, 0, \dots\}$$

**5. Beispiel: • Exemple 5:**  $G(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-aT}} \bullet \circ \{(1 - e^{-aT})\}, \quad k \geq 0$

**Beispiele mit komplexen Nennernullstellen — Exemples avec des zéros complexes au dénominateur**

**6. Beispiel: • Exemple 6:**

$$Y(z) = \frac{z}{z^2 + a^2}, \quad \frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{z^2 + a^2} = \frac{1}{(z+ia)(z-ia)} = \frac{1}{2ia} \cdot \left( \frac{1}{(z-ia)} - \frac{1}{(z+ia)} \right)$$

$$Y(z) \bullet \circ \frac{1}{2ia} \cdot \{(i^k a^k - (-i)^k a^k)\} = \left\{ \frac{a^k}{2ia} \cdot (i^k - (-i)^k) \right\} = \left\{ \frac{a^k}{a} \cdot \frac{(e^{\frac{i\pi k}{2}} - e^{-\frac{i\pi k}{2}})}{2i} \right\} = \{a^{k-1} \cdot \sin(\frac{k\pi}{2})\}$$

**7. Beispiel: • Exemple 7:**  $Y(z) = \frac{z}{z^2 - z + 1},$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{z^2 - z + 1} = \frac{1}{(z - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})(z - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{1}{(z - e^{\frac{i\pi}{3}})(z - e^{-\frac{i\pi}{3}})} =$$

$$\frac{1}{(e^{\frac{i\pi}{3}} - e^{-\frac{i\pi}{3}})(z - e^{\frac{i\pi}{3}})} + \frac{1}{(e^{-\frac{i\pi}{3}} - e^{\frac{i\pi}{3}})(z - e^{-\frac{i\pi}{3}})} = \frac{1}{(2i \sin(\frac{\pi}{3}))(z - e^{\frac{i\pi}{3}})} + \frac{1}{(-2i \sin(\frac{\pi}{3}))(z - e^{-\frac{i\pi}{3}})} =$$

$$\frac{1}{(2i \frac{\sqrt{3}}{2})(z - e^{\frac{i\pi}{3}})} + \frac{1}{(-2i \frac{\sqrt{3}}{2})(z - e^{-\frac{i\pi}{3}})} = \frac{1}{i\sqrt{3}} \left( \frac{1}{(z - e^{\frac{i\pi}{3}})} - \frac{1}{(z - e^{-\frac{i\pi}{3}})} \right)$$

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{1}{i\sqrt{3}} \left( \frac{z}{(z - e^{\frac{i\pi}{3}})} - \frac{z}{(z - e^{-\frac{i\pi}{3}})} \right) \bullet \circ \left\{ \left( \frac{2}{2i\sqrt{3}} (e^{\frac{ik\pi}{3}} - e^{-\frac{ik\pi}{3}}) \right) \right\} = \left\{ \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\frac{k\pi}{3}) \right) \right\}$$

## 5.3 Praktische Anwendungen — Applications pratiques

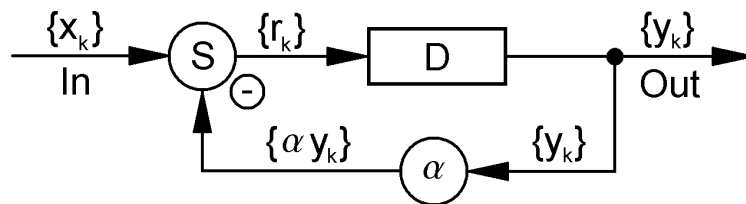
### 5.3.1 Differenzengleichungen — Equations aux différences

Z.B. in der **Computertechnik** hat man Systeme mit **diskreten Zuständen**, welche im **Takt** der **Clock** ändern (Taktfrequenz!). • *P.ex. dans la technique d'ordinateur on a des systèmes avec les conditions discrètes, qui changent avec la cadence resp. mesure, rythme de la clock.*

#### 1. Beispiel: • Exemple 1:

##### Schema • Schéma

In	Input	Eingang Signal $\mathcal{Z}\{x_k\}$	• <i>Entrée signal <math>\mathcal{Z}\{x_k\}</math></i>
S	Subtractor	Macht $r_k = x_k - \alpha y_k$ (Rückspeisung)	• <i>Fait <math>r_k = x_k - \alpha y_k</math></i> • <i>(alimentation de retour)</i>
D	Delay	Verzögerungsblock, macht $y_{k+1} = r_k$	• <i>Bloc de décélération, fait <math>y_{k+1} = r_k</math></i>
$\alpha$	Amplitude $\alpha$	Macht $y_k \mapsto \alpha y_k$ (Verstärkung)	• <i>Fait <math>y_k \mapsto \alpha y_k</math></i> • <i>(amplification, renforcement)</i>
Out	Output	Ausgang Signal $y_k$	• <i>Sortie signal <math>y_k</math></i>



##### Bedingungen: • Conditions:

Start: • *Départ:*  $y_0 = 0$     Eingang: • *Entrée:*  $\{x_k\} = \{1, 1, 1, \dots\}$      $k \geq 0$      $\alpha = 0.5$

$S \rightsquigarrow r_k = y_{k+1} = x_k - \alpha y_k \rightsquigarrow$  **Differenzengleichung: • Equation aux différences:**

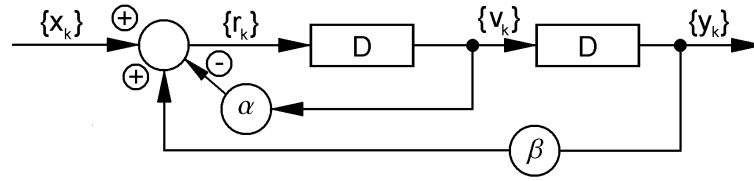
$$E(y) \equiv y_{k+1} + \alpha y_k = x_k$$

**Lösung: • Solution:** Auf die Differenzengleichung wenden wir eine z-Transformaion an: • *Nous appliquons une transformaion en z à l'équation aux différences:*

$$\begin{aligned} E(y) \circ \bullet zY(z) - zy_0 + \alpha Y(z) &= X(z) \Rightarrow zY(z) - 0 + 0.5Y(z) = \frac{z}{z-1} \\ \Rightarrow Y(z) &= \frac{X(z)}{z + \alpha} = \frac{z}{(z + 0.5)(z - 1)} = \frac{1}{3(z + 0.5)} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{z - 1} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{z}{(z + 0.5)} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z - 1} \bullet \circ \frac{1}{3} \cdot \{(-\frac{1}{2})^{k-1}\} + \frac{2}{3} \cdot \{1^{k-1}\} \Rightarrow y_k = \{(\frac{1}{3} \cdot (-\frac{1}{2})^{k-1} + \frac{2}{3})\} \end{aligned}$$

Speziell: • *Spécialement:*  $y_0 = \frac{1}{3} \cdot (-\frac{1}{2})^{-1} + \frac{2}{3} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$ ,  $y_1 = \frac{1}{3} \cdot (-\frac{1}{2})^0 + \frac{2}{3} = 1 = x_0$  ☺

#### 2. Beispiel: • Exemple 2:



**Bedingungen: • Conditions:**

Start: • *Départ:*  $y_0 = 0, y_1 = 1$     Eingang: • *Entrée:*  $\{x_k\} = \{1, 1, 1, \dots\}$      $k \geq 0$      $\alpha = 1, \beta = 2$

$$\leadsto y_{k+1} = v_l, y_{k+2} = v_{k+1}, v_{k+1} = r_k \Rightarrow y_{k+2} = r_k = x_k - \alpha v_k + \beta y_k = x_k - \alpha y_{k+1} + \beta y_k$$

$\leadsto$  Differenzengleichung: • *Equation aux différences:*

$$E(y) \equiv y_{k+2} + \alpha \cdot y_{k+1} - \beta y_k = x_k, \quad y_{k+2} + y_{k+1} - 2y_k = x_k$$

**Lösung: • Solution:**  $E(y) \circ \bullet z^2 Y(z) - z^2 y_0 - z y_1 + z Y(z) - z y_0 - 2 Y(z) = \frac{z}{z-1}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow z^2 Y(z) - z + z Y(z) - 2 Y(z) &= \frac{z}{z-1} \\ \Rightarrow Y(z) &= \left( \frac{z}{z-1} + z \right) \cdot \frac{1}{z^2 + z - 2} = \frac{z^2}{z-1} \cdot \frac{1}{(z+2)(z-1)} = \frac{z^2}{(z+2)(z-1)^2} \\ \Rightarrow \frac{Y(z)}{z} &= \frac{z}{(z+2)(z-1)^2} = \frac{1}{3} \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{2}{9} \frac{1}{z-1} - \frac{2}{9} \frac{1}{z+2} \\ \Rightarrow Y(z) &= \frac{1}{3} \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{2}{9} \frac{z}{z-1} - \frac{2}{9} \frac{z}{z+2} \bullet \circ \left\{ \left( \frac{1}{3} k + \frac{2}{9} - \frac{2}{9} (-2)^k \right) \right\}_{k=0}^{\infty} \end{aligned}$$

**3. Beispiel: • Exemple 3:**

$$E(y) \equiv 8y_{k+2} - 6y_{k+1} + y_k = 9, \quad k \geq 0, \quad y_0 = 1, \quad y_1 = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} E(y) \circ \bullet 8(z^2 Y - z^2 \cdot 1 - z \cdot \frac{3}{2}) - 6(z \cdot Y - z \cdot 1) + Y &= 9 \cdot \frac{z}{z-1} \Rightarrow Y \cdot (8z^2 - 6z + 1) = 8z^2 + \frac{24}{2}z - 6z + \frac{9z}{z-1} \\ \Rightarrow \frac{Y}{z} &= \frac{8z + 6}{(4z-1)(2z-1)} + \frac{9z}{(4z-1)(2z-1)(z-1)} = \frac{5}{z-\frac{1}{2}} - \frac{4}{z-\frac{1}{4}} + \frac{6}{z-\frac{1}{4}} - \frac{9}{z-\frac{1}{2}} + \frac{3}{z-1} \\ \Rightarrow Y(z) &= \frac{2z}{z-\frac{1}{4}} - \frac{4z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{3z}{z-1} \bullet \circ \{y_k\} = \left\{ \left( 2 \cdot \left( \frac{1}{4} \right)^k - 4 \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^k + 3 \right) \right\}_{k=0}^{\infty} \end{aligned}$$

**3. Beispiel: • Exemple 3:**

$$E(y) \equiv y_{k+2} + 2y_k = 0, \quad k \geq 0, \quad y_0 = 1, \quad y_1 = \sqrt{2}, \quad E(y) \circ \bullet z^2 Y - z^2 \cdot 1 - z \cdot \sqrt{2} + 2Y = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Y &= \frac{z^2 + \sqrt{2}z}{z^2 + 2}, \quad \frac{Y}{z} = \frac{z + \sqrt{2}}{z^2 + 2} = \frac{z + \sqrt{2}}{(z + i\sqrt{2})(z - i\sqrt{2})} = \frac{z + \sqrt{2}}{(z - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}})(z - \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{2}})} \\ &= \frac{1+i}{2i} \cdot \frac{1}{z - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}} - \frac{1-i}{2i} \cdot \frac{1}{z - \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}}, \\ Y &= \frac{1+i}{2i} \cdot \frac{z}{z - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}} - \frac{1-i}{2i} \cdot \frac{z}{z - \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}} \bullet \circ \{y_k\}_{k=0}^{\infty} = \left\{ \frac{1}{2i} \left( (1+i) 2^{\frac{k}{2}} e^{i\frac{k\pi}{2}} - (1-i) 2^{\frac{k}{2}} e^{-i\frac{k\pi}{2}} \right) \right\}_{k=0}^{\infty} \\ &= \left\{ 2^{\frac{k}{2}} \left( \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \right) \right\}_{k=0}^{\infty} \end{aligned}$$

**Bemerkung:** • **Remarque:**

Das letzte Beispiel zeigt, wie man mittels einer Rechnung in  $\mathbb{C}$  ein reelles Resultat erzielen kann, dass ohne diesen Umweg über  $\mathbb{C}$  kaum zu erzielen wäre. • *Le dernier exemple montre comme on peut obtenir un résultat réel au moyen d'un calcul dans  $\mathbb{C}$  ce qu'on aurait de la peine à obtenir sans ce détour sur  $\mathbb{C}$ .*

### 5.3.2 Diskrete lineare Systeme — Systèmes linéaires discrets

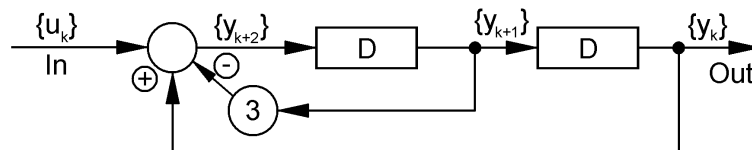
#### Diskrete Zeitsysteme — Systèmes discrets de temps

(Statt von **diskreten linearen Systemen** spricht man auch von **diskreten Zeitsystemen**.) • *Au lieu de parler de systèmes linéaires et discrets, on parle aussi de systèmes de temps discrets.*

Sei  $\{u_k\}$  die Inputfolge und  $\{y_k\}$  die Outputfolge eines Systems. Beide Folgen seien Kausalfolgen.

• *Soit  $\{u_k\}$  la suite d'entrée et  $\{y_k\}$  la suite de sortie d'un système. Toutes les deux suites soient des suites causales.*

Das System enthalte Verzögerungsblöcke, Subtraktoren (Rückspeisung, auch für die Addition) und Verstärker. • *Le système contient des blocs de décalage, des soustracteurs (alimentation de retour, aussi pour l'addition) et amplificateurs (renforcement).*



Ein allgemeines Modell eines solchen Systems ist eine **Differenzengleichung der Ordnung  $n$** :

• *Un modèle commun d'un tel système est une équation aux différences de l'ordre  $n$ :*

$$E(y, u) \equiv a_n y_{k+n} + a_{n-1} y_{k+n-1} + a_{n-2} y_{k+n-2} + \dots + a_0 y_k = b_m u_{k+m} + b_{m-1} u_{k+m-1} + \dots + b_0 u_k$$

mit • *avec  $k \geq 0$  (Kausalfolgen)* • *(suites causales),  $n \geq m \geq 0$  (Physik)* • *(physique),  $k, m, n \in \mathbb{N}_0$*   
 $a_i, b_i \in \mathbb{R}$  oder • *ou  $a_i, b_i \in \mathbb{C}$ .*

**Bedingungen:** • **Conditions:** Auch bei den  $\{u_k\}$  seien Operationen erlaubt wie bei den  $\{y_k\}$  (Zeitverzögerung, Rückspeisung, ...). Beim Start herrsche der Nullzustand (für Zeiten  $< 0$  gibt es keine Werte  $\neq 0$ ). • *Pour les  $\{u_k\}$  aussi soient admises des opérations comme pour les  $\{y_k\}$  (ralentissement, alimentation de retour, ...). Soit donné l'état nul récurrent aussi au départ (pour les temps  $< 0$  il n'y a pas de valeurs  $\neq 0$ ).*

**Definition:** • **Définition:** Solche Systeme nennen wir **diskrete Zeitsysteme**. • *Nous appelons ces sortes de systèmes des systèmes discrets de temps.*

#### Transformationsverhalten — Façon de transformer

Sei • *Soit  $\{y_k\} \circ \bullet X(z)$ ,  $\{u_k\} \circ \bullet U(z)$*

$$\Rightarrow E(y, u) \circ \bullet a_n z^{k+n} \cdot Y + a_{n-1} z^{k+n-1} \cdot Y + a_{n-2} z^{k+n-2} \cdot Y + \dots + a_0 z^k \cdot Y = b_m z^{k+m} \cdot Y + b_{m-1} z^{k+m-1} \cdot Y + \dots + b_0 z^k \cdot Y$$

$$\Rightarrow \underbrace{(a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_0 z^0) \cdot Y}_{=Q(z) \cdot Y(z)} = \underbrace{(b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0 z^0) \cdot Y}_{=P(z) \cdot Y(z)}$$

$$\leadsto Q(z) \cdot Y(z) = P(z) \cdot Y(z) \Rightarrow Y(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \cdot U(z) := G(z) \cdot U(z) \text{ mit } \bullet \text{ avec } G(z) := \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

**Definition:** • **Définition:**  $G(z)$  heisst **z-Transferfunktion (Übertragungsfunktion)**.  
 •  $G(z)$  s'appelle **fonction de transfert en z**.

In dieser Situation können wir zwei verschiedene typische Grundaufgaben formulieren: • *Dans cette situation, nous pouvons formuler deux problèmes fondamentaux typiques:*

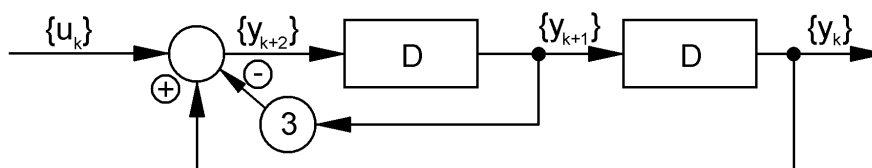
### Grundaufgabe 1 — Problème fondamental 1

**Geg.:** • **Donné:** Differenzengleichung der Ordnung  $n$ . • *Equation aux différences de l'ordre  $n$ .*

**Ges.:** • **Trouver:** Blockdiagramm und Transferfunktion. • *Schéma fonctionnel ou général et fonction de transfert.*

**Bsp.:** • **Exemple:**  $y_{k+2} + 3y_{k+1} - y_k = u_k \Rightarrow y_{k+2} = -3y_{k+1} + y_k + u_k$

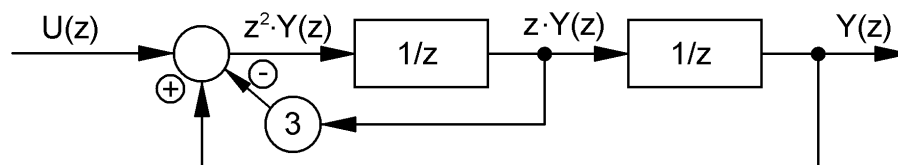
Aus der Differenzengleichung lässt sich zur Zeit  $k$  direkt folgendes Diagramm ablesen: • *De l'équation aux différences on peut lire directement le diagramme suivant pour le temps  $k$ :*



Die Differenzengleichung lässt sich direkt transformieren: • *On peut transformer directement l'équation aux différences:*

$$\leadsto Y z^2 + 3 Y z - Y = U \Rightarrow (z^2 + 3 z - 1) \cdot Y = U \Rightarrow G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{z^2 + 3 z - 1} \text{ (Odnung 2) } \bullet \text{ Ordre 2}$$

**Diagramm auf der Bildseite:** • **Diagramme du côté de l'image:**



**Bemerkung:** • **Remarque:** Das Diagramm auf der Urbildseite und dasjenige auf der Bildseite zeigen verschiedene Darstellungen desselben Input-Output-Systems. • *Le diagramme du côté de l'antécédant (du symbole original) et celui du côté de l'image montrent des représentations différentes du même système effigie-puissance.*

**Grundaufgabe 2 — Problème fondamental 2****Geg.:** • **Donné:** Transferfunktion. • *Fonction de transfert.***Ges.:** • **Trouver:** Differenzengleichung und Blockdiagramm. • *Equation aux différences et schéma fonctionnel ou général.***Bsp.:** • **Exemple:**  $G(z) = \frac{z-1}{z^2+3z+2} = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{Y(z)}{U(z)}$  (Odnung 2) • *Ordre 2*

$$\Rightarrow (z^2 + 3z + 2) \cdot Y(z) = (z - 1) \cdot U(z) \quad \bullet \circ y_{k+2} + 3y_{k+1} + 2y_k = u_{k+1} - u_k$$

 $\leadsto$  **Problem:** • **Problème:** Was tun mit  $u_{k+1} - u_k$ ? • *Quoi faire avec  $u_{k+1} - u_k$ ?***Trick:** • **Truc:** Benutze eine Hilfsfunktion: • *Utiliser une fonction auxiliaire:*

$$\frac{1}{z^2+3z+2} := \frac{R(z)}{Q(z)} \Rightarrow U(z) = z^2 \cdot R(z) + 3z \cdot R(z) + 2 \cdot R(z) \quad \bullet \circ u_k = r_{k+2} + 3r_{k+1} + 2r_k \Rightarrow$$

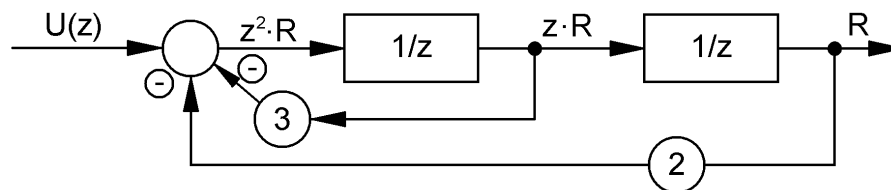
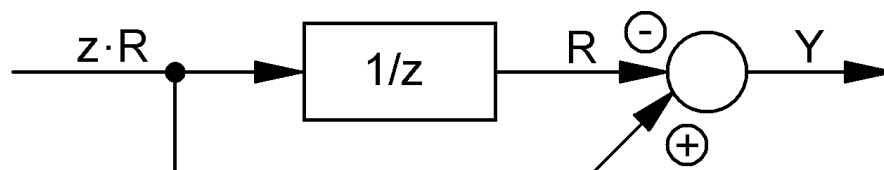
$$z \cdot U(z) = z \cdot (z^2 \cdot R(z) + 3z \cdot R(z) + 2 \cdot R(z)) = z^3 \cdot R(z) + 3z^2 \cdot R(z) + 2z \cdot R(z) \quad \bullet \circ u_{k+1} = r_{k+3} + 3r_{k+2} + 2r_{k+1}$$

Die Ausgangsgleichung sieht nun wie folgt aus: • *L'équation initiale a donc la forme suivante:*

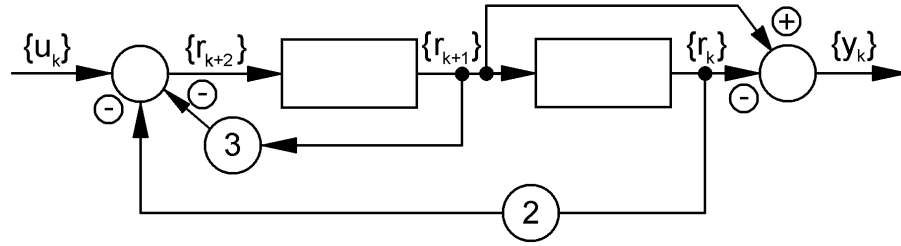
$$(z-1) \cdot U(z) = z \cdot U(z) - U(z) = (z-1)(z^2 \cdot R(z) + 3z \cdot R(z) + 2 \cdot R(z)) = (zR(z) - R(z))(z^2 + 3z + 2)$$

$$= Y(z)(z^2 + 3z + 2) \Rightarrow Y(z) = z \cdot R(z) - R(z) \quad \bullet \circ y_k = r_{k+1} - r_k$$

mit • *avec  $r_k = \mathcal{Z}^{-1}\{R(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{U(z)}{z^2+3z+2}\right\}$*

Wir müssen daher zwei Schemata kombinieren: • *C'est pourquoi nous devons combiner deux schémas:*(1) für • *pour  $U(z) = z^2 \cdot R(z) + 3z \cdot R(z) + 2 \cdot R(z)$*  oder • *ou  $z^2 \cdot R(z) = U(z) - 3z \cdot R(z) - 2 \cdot R(z)$* (2) für • *pour  $Y(z) = z \cdot R(z) - R(z)$* (3) Kombination im Urbildbereich: • *Combinaison du côté du domaine de validité:*



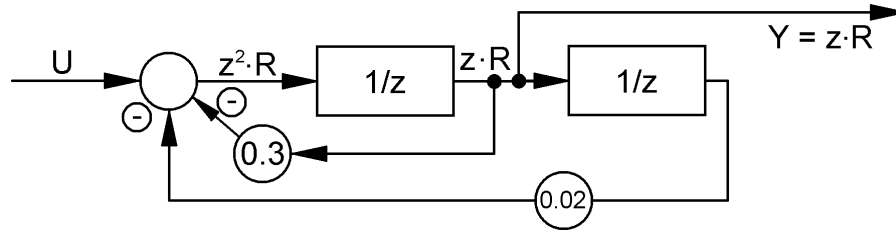


### Verschiedene mögliche Blockdiagramme — Plusieurs schémas fonctionnels possibles

**Bsp.:** • **Exemple:**  $G(z) = \frac{z}{z^2 + 0.3z + 0.02} = \frac{Y(z)}{U(z)} \Rightarrow U(z) \cdot z = Y(z) \cdot (z^2 + 0.3z + 0.02)$

Hilfsfunktion: • *Fonction auxiliaire*  $Y(z) := R(z) \cdot z \Rightarrow U(z) = R(z) (z^2 + 0.3z + 0.02)$

Daraus lässt sich direkt das folgende Schema ableiten (Bildseite): • *De cela on peut dériver directement le schéma suivant (côté image):*



Entsprechend für  $\{u_k\}$  und  $\{y_k\}$  auf der Urbildseite. (Das Diagramm kann der Leser jetzt selbst entwerfen.) • *Conformément pour  $\{u_k\}$  et  $\{y_k\}$  du côté de l'antécédant. (Le lecteur peut dresser le diagramme maintenant lui-même.)*

Es existiert aber auch ein anderes, **zweites Blockdiagramm** zur gegebenen Transferfunktion. Der Schlüssel dazu liefert die Partialbruchzerlegung der Transferfunktion: • *Mais il existe aussi un deuxième schéma fonctionnel pour la fonction de transfert donnée. La décomposition en fractions partielles de la fonction de transfert livre la clé pour celui-là:*

$$F(z) = \frac{z}{z^2 + 0.3z + 0.02} = \frac{z}{(z + 0.2) \cdot (z + 0.1)} = \frac{2}{z + 0.2} - \frac{1}{z + 0.1}$$

$$\Rightarrow Y(z) = G(z) \cdot U(z) = \left( \frac{1}{z + 0.1} - \frac{1}{z + 0.1} \right) \cdot U(z) := \underbrace{A(z) \cdot U(z)}_{=R_1(z)} - \underbrace{B(z) \cdot U(z)}_{=R_2(z)} = R_1(z) - R_2(z)$$

$$\Rightarrow 2U(z) = (z + 0.2)R_1(z), \quad U(z) = (z + 0.1)R_2(z)$$

↪ Diagramm für  $R_1(z)$ : • *Diagramme pour  $R_1(z)$ :*

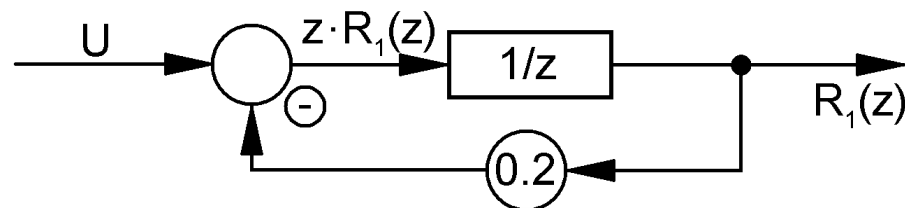
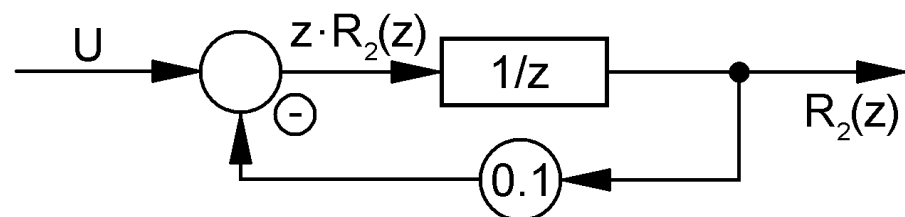
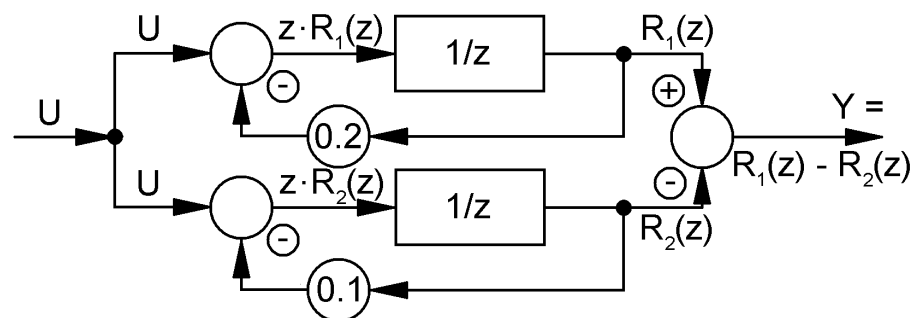


Diagramm für  $R_2(z)$ : • *Diagramme pour  $R_2(z)$* :



Kombination im Bildbereich: • *Combinaison du côté image*:

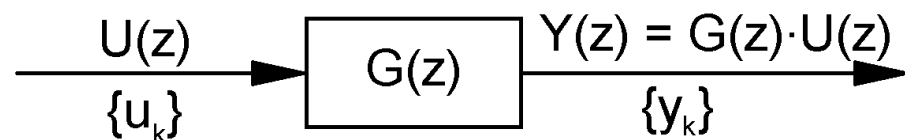


### 5.3.3 Impuls- und Schrittantwort — Réponse d'impulsion et indicielle

#### Impulsantwort — Réponse d'impulsion

Betrachte: • *Considérons*:  $\{\delta_k\} = \{1, 0, 0, 0, \dots\} \circ \bullet \mathcal{Z}\{\delta(t)\}$

**Definition:** • **Définition:**  $\{\delta_k\}$  heisst **Impulssequenz** •  $\{\delta_k\}$  s'appelle **séquence d'impulsion**



Sei weiter: • *En outre soit*:  $U(z) \xrightarrow{G(z)} Y(z)$  resp. • *resp.*  $\{u_k\} \xrightarrow{G(z)} \{y_k\}$

Hier wählen wir speziell: • *Ici nous choisissons spécialement*:  $\{u_k\} = \{\delta_k\}$

Weiter schränken wir unsere Betrachtung ein auf Systeme, die sich am Anfang in **Ruhelage** befinden.  
 • *En outre nous limitons notre considération à des systèmes, qui se trouvent au début dans la situation de repos.*

In diesem Fall definieren wir: • *Dans ce cas nous définissons:*

**Definition:** • **Définition:** Der Output eines solchen Systems  $\{y_{\delta_k}\}$  heisst **Impulsantwort des Systems**. • *La puissance d'un tel système  $\{y_{\delta_k}\}$  s'appelle réponse d'impulsion du système*

**Konsequenz:** • **Conséquence:**  $\mathcal{Z}\{y_{\delta_k}\} = Y_{\delta}(z) = G(z) \cdot U(z) = G(z) \cdot 1 = G(z)$

**Regel:** • **Règle:**  $\{y_{\delta_k}\} \circ \bullet \mathcal{Z}\{y_{\delta_k}\} = G(z)$

Die Transferfunktion  $G(z)$  ist also die z-Transformierte der Impulsantwort. • *La fonction de transfert  $G(z)$  est donc la transformée en z de la réponse d'impulsion.*

**Korollar:** • **Corollaire:**  $Y(z) = G(z) \cdot U(z) = Y_{\delta}(z) \cdot U(z)$

**Bsp.:** • **Exemple:**

**Geg.:** • **Donné:** Transferfunktion • *Fonction de transfert*  $G(z) = \frac{z}{z^2 + 3z + 2}$

**Ges.:** • **Trouver:** Impulsantwort • *Réponse d'impulsion du système*

$$\leadsto Y_{\delta}(z) = G(z) = \frac{z}{z^2 + 3z + 2} = \frac{z}{(z+2)(z+1)} \Rightarrow \frac{Y_{\delta}(z)}{z} = \frac{1}{(z+2)(z+1)} = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2}$$

$$\Rightarrow \{y_{\delta_k}\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2}\right\} = \{((-1)^k - (-2)^k)\} \text{ für } \bullet \text{ pour } k \geq 0$$

### 5.3.4 Schrittantwort — Réponse indicielle

**Definition:** • **Définition:**  $\{h_k\} = \{1, 1, 1, 1, \dots\}$  heisst **Einheitsschrittsequenz** • *s'appelle séquence de pas d'unité*

**Definition:** • **Définition:** Die Antwort des Systems auf die Einheitsschrittsequenz nennen wir **Schrittantwort** des Systems • *La réponse du système à la séquence de pas d'unité s'appelle réponse indicielle du système.*

**Bsp.:** • **Exemple:**

**Geg.:** • **Donné:**

Impulsantwortsequenz: • *Séquence de réponse d'impulsion:*  $\{y_{\delta_k}\} = \{(a^k - 0.5^k)\}$ ,  $a > 0$

$\leadsto$  Sei • *Soit* (1)  $a = 0.4$ , (2)  $a = 1.2$

**Ges.:** • **Trouver:** Schrittantwort des Systems • *Réponse indicielle du système*

$$(1) \{y_{\delta_k}\} = \{(0.4^k - 0.5^k)\}, \quad y_{\delta_k} = 0.4^k - 0.5^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

$$(2) \{y_{\delta_k}\} = \{(1.2^k - 0.5^k)\}, \quad y_{\delta_k} = 1.2^k - 0.5^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty + 0 = \infty$$

Transferfunktion: • *Fonction de transfert:*  $G(z) = Y_{\delta}(z) = \mathcal{Z}\{(a^k - 0.5^k)\} = \frac{z}{z-a} - \frac{z}{z-0.5}$

Bekannt: • *On sait:*  $\{y_{u_k}\} = \{1, 1, 1, \dots\} \circ \bullet U(z) = \frac{z}{z-1}$

$$\begin{aligned} \leadsto Y(z) &= G(z) \cdot U(z) = Y_{\delta}(z) \cdot \frac{z}{z-1} = \left(\frac{z}{z-a} - \frac{z}{z-0.5}\right) \cdot \frac{z}{z-1} \\ \Rightarrow \frac{Y(z)}{z} &= \frac{z}{(z-a)(z-1)} - \frac{z}{(z-0.5)(z-1)} = \frac{\frac{a}{a-1}}{z-a} - \frac{1}{z-0.5} - \left(2 + \frac{1}{1-a}\right) \cdot \frac{1}{z-1} \\ \Rightarrow Y(z) &= \frac{a}{a-1} \cdot \frac{z}{z-a} - \frac{z}{z-0.5} + \left(2 + \frac{1}{1-a}\right) \cdot \frac{z}{z-1} \bullet \circ \{y_k\} = \left\{\frac{a}{a-1} \cdot a^k - 0.5^k + \left(2 + \frac{1}{1-a}\right)\right\} \end{aligned}$$

**Verhalten für grosse k — Comportement pour des k grands**

$$(1) \quad y_k = \frac{0.4}{0.4-1} \cdot 0.4^k - 0.5^k + \left(2 + \frac{1}{1-0.4}\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 - 0 + 2 + \frac{1}{1-0.4} = 2 + \frac{1}{0.6} = 3.\bar{6} \dots \in \mathbb{R}$$

$$(2) \quad y_k = \frac{1.2}{1.2-1} \cdot 1.2^k - 0.5^k + \left(2 + \frac{1}{1-1.2}\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty - 0 + 2 + \frac{1}{1-1.2} = \infty$$

$$(3) \quad -1 < a < 1 \leadsto y_k = \frac{a}{a-1} \cdot a^k - 0.5^k + \left(2 + \frac{1}{1-a}\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 - 0 + \left(2 + \frac{1}{1-a}\right) \in \mathbb{R}$$

$$(4) \quad 1 < a \leadsto y_k = \frac{a}{a-1} \cdot a^k - 0.5^k + \left(2 + \frac{1}{1-a}\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty - 0 + \left(2 + \frac{1}{1-a}\right) = \infty$$

$$(5) \quad a < -1 \leadsto y_k = \frac{a}{a-1} \cdot a^k - 0.5^k + \left(2 + \frac{1}{1-a}\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \pm? \infty - 0 + \left(2 + \frac{1}{1-a}\right) = \pm? \infty$$

(alternierend gegen  $\pm\infty$ ) • (alternant vers  $\pm\infty$ )

$$(6) \quad a = -1 \leadsto y_k = \frac{-1}{-1-1} \cdot (-1)^k - 0.5^k + \left(2 + \frac{1}{1-(-1)}\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 2 \text{ oder } \bullet \text{ ou } 3$$

2 HP'PA(2 Häufungspunkte) • (2 points d'accumulation)

$$(7) \quad a = 1 \leadsto y_k = \frac{1}{1-1} \cdot 1^k - 0.5^k + \left(2 + \frac{1}{1-1}\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} ?$$

$\frac{1}{1-1}$  ist nicht definiert ... • n'est pas défini ...

**Konsequenz:** • **Conséquence:** Die Folge  $\{y_k\}$  zeigt alle Arten von Verhalten, je nach der Grösse von  $a$ . • *La suite  $\{y_k\}$  montre toutes les possibilités de comportements, selon la grandeur de  $a$ .*

Wir haben hier die Problematik der Stabilität. Bei kontinuierlichen Systemen (vgl. Laplace-Transformationen, Seite 163, 91) hiess ein System **stabil**, falls für die Impulsantwort gilt:

$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \text{const.} \neq \pm\infty$ . Diese **Definition** wollen wir **für diskrete Systeme übernehmen**.

• *Nous avons ici la problématique de la stabilité. Aux systèmes ininterrompus (continus)(voir transformations de Laplace, page 163, 91), un système est appelé stable, si pour la réponse d'impulsion il vaut:*

$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \text{const.} \neq \pm\infty$ . *Nous voulons assumer cette définition pour les systèmes discrets.*

## 5.4 Stabilität — Stabilité

### 5.4.1 Der Begriff — La notion

**Definition:** • **Définition:**

Eine Lösung einer Differenzengleichung eines mittels Impulssequenz kurz angeregten Systems heisst: • *Une solution d'une équation aux différences d'un système brièvement animé par une séquence d'impulsion s'appelle:*

1. **stabil** • **stable**  $\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = c, |y_k| < k \in \mathbb{R}$
2. **marginal stabil (halbstabil)** • **semi-stabilisé**  
 $\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}_0 y_k \in [c_1, c_2], |y_k| < k \in \mathbb{R}$
3. **instabil** • **non stable** in allen andern Fällen • *dans tous les autres cas*

Sei  $G(z)$  die Transferfunktion eines diskreten linearen Systems. Wir betrachten: • *Soit  $G(z)$  la fonction de transfert d'un système linéaire et discret. Considérons:*

$$G(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad Q(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots + a_1 z + a_0$$

Z.B. könnte  $G(z)$  gekürzt wie folgt sein: • *P.ex.  $G(z)$  pourrait être simplifié de la façon suivante:*

$$G(z) = \frac{z-1}{z^2+3z+2} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+2}$$

$\leadsto$  Theoretisch existiert eine Partialbruchzerlegung immer, obwohl man sie praktisch nicht immer exakt auffinden kann.  $G(z)$  hat hier Pole resp. Nullstellen von  $Q(z)$  bei  $z_1 = -1, z_2 = -2$ . • *Théoriquement la décomposition en fractions partielles existe toujours bien que pratiquement on ne puisse pas la trouver toujours exactement.  $G(z)$  a des pôles resp. des zéros de  $Q(z)$  à  $z_1 = -1, z_2 = -2$ .*

Als Beispiel studieren wir: • *Comme exemple nous considérons:*

$$X(z) = \frac{b}{z-\alpha}, \quad \alpha \text{ Pol von } \bullet \text{ pôle de } G(z)$$

$$\leadsto X(z) = \frac{b}{z-\alpha} = \frac{1}{z} \cdot b \cdot \frac{z}{z-\alpha} = \frac{1}{z} \cdot b \cdot \mathcal{Z}\{\alpha^k\} = \frac{1}{z} \cdot b \cdot \mathcal{Z}\{x_k\} = b \cdot \mathcal{Z}\{x_{k-1}\} \bullet \circ b \cdot \{(\alpha^{k-1})\} = \{(b \cdot \alpha^{k-1})\}$$

**Konsequenz:** • **Conséquence:** In solchen Situationen, wie in der hier gezeigten, sind also die Pole von  $G(z)$  resp. die Nullstellen von  $Q(z)$  auch die Basen der rücktransformierten Folge  $b \cdot \{(\alpha^{k-1})\}$ .

• *Dans de telles situations, comme dans celle-ci, les pôles de  $G(z)$  resp. les places de zéro de  $Q(z)$  sont donc aussi les bases de la suite retransformée  $b \cdot \{(\alpha^{k-1})\}$ . ( $\alpha \in \mathbb{C}$ )*

**Folgerung:** • **Conclusion:**

$b \cdot \{(\alpha^{k-1})\}$  verhält sich **stabil** für  $|\alpha| < 1$  und für  $\alpha = 1$ . Die Folge „explodiert“ für  $|\alpha| > 1$  (ev. alternierend u.s.w.). Die Folge alterniert für  $\alpha = -1$ . Entsprechend wandert sie für  $|\alpha| = 1, \alpha \neq 1, -1$ .

•  *$b \cdot \{(\alpha^{k-1})\}$  se comporte de manière **stable** pour  $|\alpha| < 1$  et pour  $\alpha = 1$ . La suite „explose“ pour  $|\alpha| > 1$  (ev. alternante etc.). La suite alterne pour  $\alpha = -1$ . Correspondamment elle se promène pour  $|\alpha| = 1, \alpha \neq 1, -1$ .*

### 5.4.2 Stabilitätskriterium — Critère pour la stabilité

Allgemein hängt also das Stabilitätsverhalten von den  $n(= \text{pgrad}(Q))$  Wurzeln der Gleichung  $Q(z) = 0$  ab,  $z_s = \alpha_s \in \mathbb{C}$ ,  $s = 1, 2, \dots, n$  • Généralement le comportement de stabilité dépend ainsi des  $n(= \text{pgrad}(Q))$  racines de l'équation  $Q(z) = 0$ ,  $z_s = \alpha_s \in \mathbb{C}$ ,  $s = 1, 2, \dots, n$

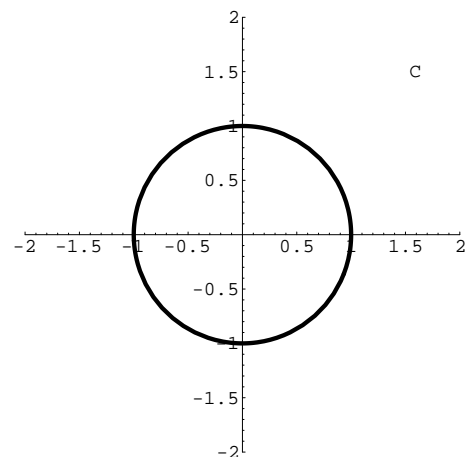
Nach dem Fundamentalsatz der Algebra gilt: • D'après le théorème fondamental de l'algèbre il vaut:  $Q(z) = a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n)$ ,  $\alpha_s = r_s \cdot e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$

Die Pole  $\alpha_s$  tauchen dann wieder auf in den Termen  $b_s \mathcal{Z}_s\{x_{s,k-1}\} \bullet \circ b_s \alpha_s^{k-1}$ . Entsprechend argumentiert man bei mehrfachen Nullstellen resp. Pole höherer Ordnung bei  $\frac{1}{(z-\alpha)^n}$  (vgl. Seite 150).

• Les pôles  $\alpha_s$  se manifestent de nouveau dans les termes  $b_s \mathcal{Z}_s\{x_{s,k-1}\} \bullet \circ b_s \alpha_s^{k-1}$ . Analogiquement on argumente aux places de zéro multiples resp. aux pôles d'ordre supérieur à  $\frac{1}{(z-\alpha)^n}$  (voir page 150).

Sei • Soit  $\alpha_s^{k-1} = r_s^{k-1} e^{i\varphi_s(k-1)}$ ,  $r_s \in \mathbb{R}_0^+$

Sei • Soit  $r_s < 1 \Rightarrow \alpha_s^{k-1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$



**Folgerung:** • **Conclusion:****Vor.:** • **Hyp.:**

$\{\alpha_s \mid s = 1, 2, \dots, n\}$  Pole der Transferfunktion  $G(s)$ . • *pôles de la fonction de transfert  $G(s)$ .*

$\alpha_s = r_s \cdot e^{i\varphi} \in \mathbb{C}, \quad r_s \in \mathbb{R}_0^+, \quad s = 1, 2, \dots, n$

**Beh.:** • **Thè.:**

1.  $\forall_s : r_s < 1 \leadsto$  Lineares System mit konstanten Koeffizienten stabil. • *Le système linéaire aux coefficients constants est stable.*

Ebenso hat man Stabilität, wenn 1 einfache Nullstelle ist.

• *On a aussi stabilité, si 1 est zéro simple.*

2. Gibt es sonst einen oder mehrere Pole, die auf dem Rand des Einheitskreises liegen, während die andern jedoch innerhalb des Kreises zu finden sind, so ist das System marginal stabil. • *S'il y a d'autre part un ou plusieurs pôles qui sont situés sur le bord du cercle d'unité, tandis que les autres se trouvent dans le cercle, ainsi le système est marginalement stable (semi-stabilisé).*

3. Befindet sich nur ein Pol ausserhalb des Kreisrandes, so ist das System instabil, d.h. es „explodiert“. • *Si nous trouvons seulement un pôle à l'extérieur du bord du cercle d'unité, le système est instable, c.-à.-d. il "explose".*

**1. Beispiel:** • **Exemple 1:**  $G(z) = \frac{1}{z + 0.25}, \quad \alpha = -0.25, \quad |\alpha| < 1 \leadsto$  stabil • *stable*

**2. Beispiel:** • **Exemple 2:**  $G(z) = \frac{z^2}{z^3 - 3z^2 + 2.5z - 1} = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad Q(z) = (z - 2)(z - 0.5(1 + i))$   
 $\Rightarrow \alpha_1 = 2 > 1 \leadsto$  instabil • *instable*

### 5.4.3 Stabilitätskriterium — Critère pour la stabilité

**Problem:** • **Problème:** Gesucht sind somit Methoden um festzustellen, wo die Nullstellen von  $Q(z)$  bezüglich des Einheitskreises liegen. • *On cherche donc des méthodes pour examiner les places de zéro de  $Q(z)$  par rapport au cercle d'unité.*

**Möglichkeiten:** • **Possibilités:**

1. Sei • *Soit*  $f(x, y) = |Q(z)|^2 = Q(z) \cdot \overline{Q(z)} = Q(z) \cdot Q(\bar{z}) \geq 0, \quad z = x + iy$

$f$  ist eine reelle Funktion von  $x$  und  $y$ . •  *$f$  est une fonction réelle de  $x$  et  $y$ .*

$$f(x, y) = |Q(z)|^2 \geq 0 \leadsto Q(z) = Q(\bar{z}) = 0 \Leftrightarrow f(x, y) = 0 \Leftrightarrow f(x, y) \rightarrow \text{Min}$$

Man muss somit die Nullstellen oder die Minima von  $f(x, y)$  suchen. • *Par conséquent on doit chercher les places de zéro ou les minimums de  $f(x, y)$ .*

Man hat hier somit die Möglichkeit, das Problem der Nullstellen oder der Minima mit Hilfe der Differentialrechnung oder numerischer Algorithmen für das Auffinden von Nullstellen klassisch im Reellen zu behandeln. • *On a par conséquent ici la possibilité de traiter le problème des places de zéro ou des minimums à l'aide du calcul différentiel ou des algorithmes numériques pour trouver les places de zéro dans le réel de façon classique.*

2.  $Q(z) = a_n (z - \alpha_1) (z - \alpha_1) \cdot \dots \cdot (z - \alpha_n) = a_n (z^n - (\alpha_1 + \dots + \alpha_n) z^{n-1} + \dots \pm \alpha_1 \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n)$   
 $= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$  (Fundamentalsatz der Algebra) • *(Théorème fondamental de l'algèbre)*

$$\leadsto \frac{a_0}{a_n} = \pm \alpha_1 \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n, \quad \left| \frac{a_0}{a_n} \right| = |\alpha_1| |\alpha_2| \cdot \dots \cdot |\alpha_n|$$

Ist nun  $\left| \frac{a_0}{a_n} \right| > 1$ , so ist im Produkt  $|\alpha_1| |\alpha_2| \cdot \dots \cdot |\alpha_n|$  mindestens ein Faktor grösser als 1, d.h. man hat **Instabilität**. • *Si maintenant on a  $\left| \frac{a_0}{a_n} \right| > 1$ , dans le produit  $|\alpha_1| |\alpha_2| \cdot \dots \cdot |\alpha_n|$  au moins un facteur est plus grand que 1, c.-à.-d. on a l'instabilité.*

3. Es gilt das **Jury-Stabilitätskriterium**. Dabei handelt es sich um ein längeres Rezept, vgl. dazu die Literatur (z.B. Glyn James, Advanced Modern Engineering Math., p. 260 ff) • *Il y a le critère de stabilité de Jury. Là, il s'agit d'une recette plus longue, voir la littérature (p.ex. Glyn James, Advanced Modern Engineering Math., p. 260 ff).*

## 5.5 Faltung, Konvolution — Plissement

### 5.5.1 Die Idee — L'idée

Wir stellen die Frage nach der Verallgemeinerung des nachfolgenden Zusammenhangs: • *Nous posons la question de la généralisation du rapport consécutif:*

$$Y(z) = Y_\delta(z) = Y_\delta(z) \cdot 1 = G(z) \cdot 1$$

Allgemeiner: • *Généralisé:*  $Y(z) = G(z) \cdot U(z) = Y_\delta(z) \cdot U(z)$ ,  $U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^{-k}$

Dabei gilt für die Inputfolge  $\{u_k\}$ : • *Pour la suite d'input  $\{u_k\}$  il vaut:*

$$\{u_k\} = \{u_0, u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots\} = u_0 \{\delta_k\} + u_1 \{\delta_{k-1}\} + u_2 \{\delta_{k-2}\} + \dots + u_n \{\delta_{k-n}\} + \dots \quad \text{mit} \quad \bullet \quad \text{avec}$$

$$\{\delta_k\} = \{\delta_{k-(0)}\} = \{1, 0, 0, 0, \dots\}, \quad \{\delta_{k-(1)}\} = \{0, 1, 0, 0, \dots\}, \quad \{\delta_{k-(2)}\} = \{0, 0, 1, 0, 0, \dots\}$$

$$\delta_{k-(j)} : = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ 1 & k = j \end{cases}$$

Z.B. ist daher  $\delta_{k-(n)} = 1$  für  $k = n$  und  $= 0$  sonst. Bei  $\delta_{k-(n)} = 1$  handelt es sich also um eine verschobene Impulssequenz nach  $k = j$ . Demnach haben wir die Eingangsfolge  $\{u_k\}$  in eine gewichtete Summe von verschobenen Inputfolgen zerlegt. • *P.ex. pour  $k = n$  il vaut donc  $\delta_{k-(n)} = 1$ ,  $= 0$  dans les autres cas. Quant à  $\delta_{k-(n)} = 1$  il s'agit par conséquent d'une séquence d'impulsions déplacées vers  $k = j$ . Nous avons donc décomposée la suite d'entrée en une somme de suites d'input  $\{u_k\}$  déplacées, pondérées.*

Sei das System beim Start in Ruhe. Wegen der Linearität gilt: • *Au départ le système soit en état de repos. A cause de la linéarité il vaut:*



**Folgerung:** • **Conclusion:**

Die Systemantwort  $\{y_k\}$  ist eine gewichtete Summe von verschobenen Impulsantworten. • *La réponse du système  $\{y_k\}$  est une somme de réponses d'impulsions déplacées et pondérées.*

Daher gelten die folgenden Zuordnungen: • *Par conséquent les classements suivants sont valables:*

$$\begin{array}{lll} \{\delta_k\} & \circ \bullet & \mathcal{Z}\{\delta_k\} = \{y_{\delta_k}\}, \\ \delta_{k-(j)} & \circ \bullet & \mathcal{Z}\{\delta_{k-(j)}\} = \{y_{\delta_{k-(j)}}\}, \\ u_j \cdot \delta_{k-(j)} & \circ \bullet & \mathcal{Z}\{u_j \cdot \delta_{k-(j)}\} = u_j \cdot \{y_{\delta_{k-(j)}}\}, \\ \{u_j\} & \circ \bullet & \mathcal{Z}\{\delta_k\} = \{y_k\}, \end{array}$$

$$\begin{aligned} \leadsto \{y_k\} &= \sum_{j=1}^{\infty} u_j \cdot \{y_{\delta_{k-(j)}}\} = u_0 \cdot \{y_{\delta_k}\}_{k=0}^{\infty} + u_1 \cdot \{y_{\delta_{k-(1)}}\}_{k=0}^{\infty} + u_2 \cdot \{y_{\delta_{k-(2)}}\}_{k=0}^{\infty} + \dots \\ &= u_0 \cdot \{y_{\delta_{0-(0)}}, y_{\delta_{1-(0)}}, y_{\delta_{2-(0)}}, \dots, y_{\delta_{n-(0)}}, \dots\} + \\ &\quad u_1 \cdot \{0, y_{\delta_{1-(1)}}, y_{\delta_{2-(1)}}, \dots, y_{\delta_{n-(1)}}, \dots\} + \dots \\ &\quad + \dots + \\ &\quad u_0 \cdot \{0, 0, 0, \dots, \underbrace{y_{\delta_{n-(n)}}, y_{\delta_{n+1-(n)}}, \dots}_{\uparrow \leadsto y_n}\} + \\ &\quad \dots \end{aligned}$$

$$\leadsto y_n = \sum_{j=0}^n u_j y_{\delta_{n-(j)}}$$

(Spaltenweise Addition im vorherigen Schema!) • *(Addition par colonne dans le schéma ci-dessus!)*

$$\leadsto \{y_k\} = M \sum_{j=0}^k u_j y_{\delta_{k-(j)}}$$

**Definition:** • **Définition:**

Die obige Summe  $\{y_k\} = \left\{ \sum_{j=0}^k u_j y_{\delta_{k-(j)}} \right\}$  heisst **Faltungssumme**.

• *La somme en haut  $\{y_k\} = \left\{ \sum_{j=0}^k u_j y_{\delta_{k-(j)}} \right\}$  s'appelle plissement.*

**Symbol:** • **Symbole:** Sei • *Soit*  $y_{\delta_{k-(j)}} := v_{k-j} \Rightarrow \left\{ \sum_{j=0}^k u_j y_{\delta_{k-(j)}} \right\} = \left\{ \sum_{j=0}^k u_j v_{k-j} \right\} := \{u_k\} * \{v_k\}$

**Bsp.:** • **Exemple:** **Geg.:** • **Donné:**  $G(z) = \frac{z}{z + \frac{1}{2}}$

**Ges.:** • **Trouver:** Schrittantwort • *Réponse indicielle*

(A) Direkte Rechnung: • *Calcul direct:*

$$\{h_k\} = \{1, 1, 1, \dots\} \Rightarrow Y(z) = G(z) \cdot \mathcal{Z}\{h_k\} = Y_{\delta}(z) \cdot \mathcal{Z}\{h_k\}$$

$$a = 1 \Rightarrow a^k = 1^k = 1 \Rightarrow \mathcal{Z}\{h_k\} = \frac{z}{z-1}$$

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{z}{z + \frac{1}{2}} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z + \frac{1}{2}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{z}{z-1} \bullet \circ \{y_k\} = \left\{ \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^k + \frac{2}{3} \cdot 1^k \right\} = \left\{ \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^k \right\}$$

(B) Indirekte Rechnung: • *Calcul indirect:*

$$\{y_{\delta_k}\} = \mathcal{Z}^{-1}\{G(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z + \frac{1}{2}}\right\} = \left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right\}$$

$$\Rightarrow \{y_k\} = \left\{ \sum_{j=0}^k u_j y_{\delta_{k-(j)}} \right\} \stackrel{u_j=1}{=} \left\{ \sum_{j=0}^k \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-j} \right\} = \left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^k \sum_{j=0}^k \left(-\frac{1}{2}\right)^{-j} \right\} = \left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^k \sum_{j=0}^k (-2)^j \right\} =$$

$$\left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{1 - (-2)^{k+1}}{1 - (-2)} \right\} = \left\{ \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^k (1 - (-2)^{k+1}) \right\} = \left\{ \frac{1}{3} \left( \left(-\frac{1}{2}\right)^k - (-2) \right) \right\} = \left\{ \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \right\}$$

**Verallgemeinerung: • Généralisation:**

$$\text{Sei} \bullet \text{ Soit } Y(z) = G(z) \cdot U(z) = Y_\delta(z) \cdot U(z), \quad U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^{-k} = u_0 + \frac{u_1}{z} + \frac{u_2}{z^2} + \frac{u_3}{z^3} + \dots$$

$$Y_\delta(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_{\delta_k} z^{-k} = y_{\delta_0} + \frac{y_{\delta_1}}{z} + \frac{y_{\delta_2}}{z^2} + \frac{y_{\delta_3}}{z^3} + \dots$$

$$\Rightarrow Y(z) = Y_\delta(z) \cdot U(z) = u_0 y_{\delta_0} + (u_0 y_{\delta_1} + u_1 y_{\delta_0}) \cdot \frac{1}{z} + (u_0 y_{\delta_2} + u_1 y_{\delta_1} + u_2 y_{\delta_0}) \cdot \frac{1}{z^2} + \dots := \sum_{k=0}^{\infty} t_k \cdot \frac{1}{z^k}.$$

$$t_k = \sum_{j=0}^k u_j y_{\delta_{k-j}} \Rightarrow Y(z) = Y_\delta(z) \cdot U(z) \bullet \circ \{y_k\} = \{t_k\} = \left\{ \sum_{j=0}^k u_j y_{\delta_{k-j}} \right\}$$

**Regel: • Règle:**

**Vor.: • Hyp.:**

**Sei • Soit**

$$v_k = y_{\delta_k}, \quad \mathcal{Z}\{u_k\} = U(z), \quad \mathcal{Z}\{v_k\} = V(z)$$

**Beh.: • Thè.:**

$$U(z) \cdot V(z) = \mathcal{Z}\left\{ \sum_{j=0}^k u_j v_{k-j} \right\} = \mathcal{Z}\{\{u_k\} * \{v_k\}\}$$

**Bemerkung: • Remarque:** Es gilt: • *Il vaut:*

$$\mathcal{Z}\{\{u_k\} * \{v_k\}\} = U(z) \cdot V(z) = V(z) \cdot U(z) = \mathcal{Z}\{\{v_k\} * \{u_k\}\} \Rightarrow \{u_k\} * \{v_k\} = \{v_k\} * \{u_k\}$$

Der Faltungsprozess ist also kommutativ! • *Le processus de plissement est donc commutatif!*

**Korollar: • Corollaire:**

$$\{u_k\} * \{v_k\} = \{v_k\} * \{u_k\}$$

## 5.6 Laplace– und z–Transformation — Transformation de Laplace et en z

Wir wollen hier den Zusammenhang zwischen Laplace– und z–Transformation klären. • *Ici nous voulons clarifier le rapport entre la transformation de Laplace et la transformation en z.*

Wir betrachten die Folge: • *Nous considérons la suite:*  $\{f(nT)\} = \{f(0), f(T), f(2T), \dots, f(nT), \dots\}$

Wir können diese Folge aus  $f(t)$  an den Stellen  $t = n \cdot T$  gewinnen, indem wir die folgende „Ausblende-funktion“ (Distribution!) verwenden: • *Nous pouvons construire cette suite par la fonction  $f(t)$  aux places  $t = n \cdot T$ , en utilisant la „fonction de suppression“ (distribution!) suivante:*

$$\hat{f}(t) := \sum_{n=0}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - nT) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \cdot \delta(t - nT)$$

$$\Rightarrow \hat{f}(nT) = f(nT) \cdot \delta(nT - nT) = f(nT) \cdot \delta(0), \quad \hat{f}(t) = 0 \quad \text{für} \bullet \text{ pour } t \neq nT, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

$\leadsto$  Laplace–Transformation: • *Transformation de Laplace:*

$$\mathcal{L}\{\hat{f}(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \left( \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \delta(t-nT) \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \int_0^{\infty} e^{-st} \delta(t-nT) dt = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-s n T} \delta(t-nT)$$

Sei • *Soit*  $z := e^{+sT} \in \mathbb{C}$  mit • *avec*  $s \in \mathbb{C} \Rightarrow \mathcal{L}\{\hat{f}(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n} \delta(t-nT) := F(z)$

Für  $k = n$  wird damit: • *Ainsi nous avons pour*  $k = n$ :  $\underbrace{\mathcal{Z}\{f(kT)\}}_{:=a_k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(kT)}{z^k} = F(z) = \mathcal{L}\{\hat{f}(t)\}$

**Konsequenz:** • **Conséquence:**

**Vor.:** • **Hyp.:**

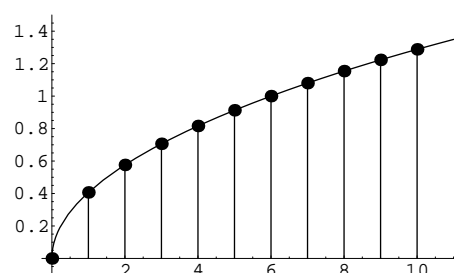
$$\hat{f}(t) := \sum_{k=0}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - kT) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot \delta(t - kT), \quad z := e^{+sT}, \quad s := \frac{\ln(z)}{T}$$

**Beh.:** • **Thè.:**

Die  $z$ -Transformierte von  $\{f(kT)\}$  ist also die Laplace-Transformierte von  $\hat{f}(t)$ . • *La transformée en  $z$  de  $\{f(kT)\}$  est la transformée de Laplace de  $\hat{f}(t)$ .*

**Bemerkung:** • **Remarque:**

$f(kT)$  beschreibt hier eine Messreihe mit fixen Zeitabständen  $T$ . •  *$f(kT)$  décrit une série de mesures avec des intervalles de temps fixes  $T$ .*



## 5.7 Ingenieur Anwendungen — Applications d'ingénieur

Vgl. Literatur: • *Voir Littérature:* Glyn James, Advanced Modern Engineering Mathematics, Addison Wesley, p. 268 ff.



## Kapitel • Chapitre 6

# Vektoranalysis — Analyse vectorielle

### 6.1 Grundlagen — Les bases

#### 6.1.1 Einführung — Introduction

Die Vektoranalysis stellt Begriffe und Sätze zur Verfügung, die das Fundament zur Formulierung vieler physikalischer Aussagen bilden. Ohne sie kommt man z.B. in den folgenden Gebieten nicht über anspruchsvolle Grundlagen hinaus: Mechanik, Elektrostatik- und Dynamik, Wärmelehre u.s.w..

• *L'analyse vectorielle met à disposition des notions et des théorèmes qui forment le fondement pour la formulation de beaucoup de faits physiques. Sans elle, par exemple dans les domaines suivants, on reste dans les bases modestes: La mécanique, l'électrostatique et électrodynamique, thermodynamique etc..*

#### 6.1.2 Operatoren auf Skalar- und Vektorfunktionen — Opérateurs sur des fonctions scalaires et vectorielles

##### Beispiel Differentialoperator — Exemple opérateur différentiel

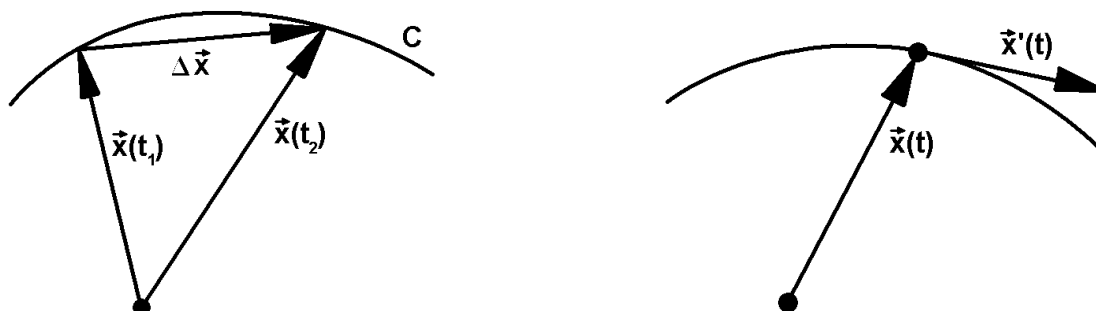
Vom Analysis-Kurs sowie von z.B. den Laplace-Transformationen her kennen wir bereits Differentialoperatoren und Integraloperatoren. Als Beispiel eines solchen Operators betrachten wir: • *Du cours d'analyse ainsi que p.ex. des transformations de Laplace nous connaissons déjà des opérateurs différentiels et des opérateurs d'intégrales. Nous considérons comme exemple d'un tel opérateur:*

$$\frac{d}{dt} : \vec{x}(t) \mapsto \frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \frac{dx_1(t)}{dt} \cdot \vec{e}_1 + \dots + \frac{dx_n(t)}{dt} \cdot \vec{e}_n = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix}$$

Wenn  $\vec{x}(t)$  die Bahn eines Massepunktes bedeutet, so bedeutet  $\vec{x}'(t)$  den Tangentenvektor resp. den Geschwindigkeitsvektor.

• *Si  $\vec{x}(t)$  signifie la voie d'un point de masse,  $\vec{x}'(t)$  signifie donc le vecteur de tangente resp. le vecteur de vitesse.*

$$\vec{x}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$



Wir verwenden die folgende Definition: • *Nous appliquons la définition suivante:*

**Definition:** • **Définition:**

- (1)  $\vec{x}(t)$  diff'bar'dérivab  $\Leftrightarrow \forall_i x_i(t)$  diff'bar'dérivab
- (2)  $\vec{x}(t)$  stetig • continue  $\Leftrightarrow \forall_i x_i(t)$  stetig • continue

### Differentiationsregeln — Règles de différentiation

Zur Vereinfachung kürzen wir die Symbole im Folgenden etwas ab: • *Pour simplifier la chose, nous raccourcissons les symboles un peu dans ce qui suit:*

**Symbol:** • **Symbole:**  $\vec{x}(t) := \vec{x}, \quad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^T \cdot \vec{y} := \vec{x} \bullet \vec{y}$

( $\vec{x}^T \cdot \vec{y}$  ist das Matrixprodukt.) • ( $\vec{x}^T \cdot \vec{y}$  est le produit matriciel.)

**Regeln:** • **Règles:**

1.  $(\vec{x} + \vec{y})' = \vec{x}' + \vec{y}'$
2.  $(\vec{x} \bullet \vec{y})' = \vec{x}' \bullet \vec{y} + \vec{x} \bullet \vec{y}'$
3.  $(\vec{x} \times \vec{y})' = \vec{x}' \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{y}'$
4.  $(f(t) \cdot \vec{x})' = f(t)' \cdot \vec{x} + f(t) \cdot \vec{x}'$
5.  $(\vec{x} \bullet (\vec{y} \times \vec{z}))' = (\vec{x}' \bullet (\vec{y} \times \vec{z})) + (\vec{x} \bullet (\vec{y}' \times \vec{z})) + (\vec{x} \bullet (\vec{y} \times \vec{z}'))$
6.  $(\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}))' = (\vec{x}' \times (\vec{y} \times \vec{z})) + (\vec{x} \times (\vec{y}' \times \vec{z})) + (\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}'))$

**Bemerkung:** • **Remarque:**

Bei (5) handelt es sich um das Spatprodukt (Determinante) und bei (6) um das Grassmannprodukt. Die Verifikation der Regeln ist elementar und geschieht durch Nachrechnung. (Z.B. mit Mathematica ...)

• *À (5) il s'agit du produit mixte (déterminant) et à (6) du produit de Grassmann. La vérification des règles est élémentaire et se fait en calculant. (P.ex. possible avec Mathematica ...)*

### Differentiale von Vektorfunktionen — Différentielles de fonctions vectorielles

Differentiale von Vektorfunktionen definieren wir wie folgt: • *Nous définissons les différentielles de fonctions vectorielles comme il suit:*

**Definition:** • **Définition:**

$$\text{Sei } \bullet \text{ Soit } \vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n \rightsquigarrow d\vec{x} := dx_1 \vec{e}_1 + \dots + dx_n \vec{e}_n = \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Sei } \bullet \text{ Soit } \vec{v} = \vec{v}(x_1, \dots, x_n) = v_1(x_1, \dots, x_n) \vec{e}_1 + \dots + v_m(x_1, \dots, x_n) \vec{e}_m = \begin{pmatrix} v_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ v_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow d\vec{v} := \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_n} dx_n = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial v_1}{\partial x_n} dx_n \\ \vdots \\ \frac{\partial v_m}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial v_m}{\partial x_n} dx_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dv_1 \\ \vdots \\ dv_m \end{pmatrix}$$

Nach den bekannten Regeln über Differentiale gilt:  $\bullet$  *D'après les règles connues sur les différentielles il vaut:*

**Regeln:**  $\bullet$  **Règles:**

1.  $df = f'_{x_1} dx_1 + \dots + f'_{x_n} dx_n = \text{grad } f \bullet d\vec{x}$
2.  $d(\vec{u} + \vec{v}) = d\vec{u} + d\vec{v}$
3.  $d(\vec{u} \bullet \vec{v}) = \vec{u} \bullet d\vec{v} + \vec{v} \bullet d\vec{u}$
4.  $d(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times d\vec{v} + \vec{v} \times d\vec{u}$

## 6.2 Felder — Champs

### 6.2.1 Der Feldbegriff — La notion du champ

Sei  $\bullet$  *Soit*  $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $P = P(x_1, \dots, x_n) := (x_1, \dots, x_n) \in V$

Z.B. spez.  $\bullet$  *P.ex. spéc.*  $n = 3$ ,  $P = P(x, y, z)$

Sei  $\varphi$  eine Funktion:  $\bullet$  *Soit*  $\varphi$  *une fonction:*  $\varphi: V \mapsto \mathbb{R}$ ,  $\varphi: (x_1, \dots, x_n) \mapsto \varphi(x_1, \dots, x_n)$

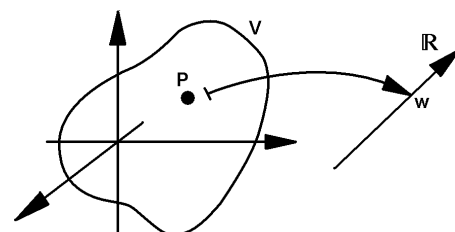
**Definition:**  $\bullet$  **Définition:**

Eine solche im allgemeinen stetig differenzierbare Funktion  $\varphi$  heisst **Skalarfeld**.  $\bullet$  *Une telle fonction  $\varphi$ , qui généralement est dérivable de façon continue, s'appelle **champ scalaire**.*

Sei  $\bullet$  *Soit*  $n = 3$

Durch ein Skalarfeld  $\varphi$  wird also z.B. jedem Punkt  $P(x, y, z) \in V$  ein Wert  $w = \varphi(x, y, z)$  zugeordnet.  $\bullet$  *Par le champ scalaire  $\varphi$  on applique donc à chaque point  $P(x, y, z) \in V$  une valeur  $w = \varphi(x, y, z)$ .*

$$\rightsquigarrow (x, y, z, w) = (x, y, z, \varphi(x, y, z)) \in \mathbb{R}^4$$



**Bemerkung:** • **Remarque:**

Bei den Skalarfeldern spielen die bekannten Begriffe **Niveaulinie**, **Niveaufläche**, **Niveauhyperfläche** eine Rolle. (Z.B.  $\varphi(x, y, z) = \text{const.}$ ) • *Aux champs scalaires, les notions connues ligne de niveau, surface de niveau, hypersurface de niveau sont importantes. (Z.B.  $\varphi(x, y, z) = \text{const.}$ )*

Entsprechend sei  $\vec{\Phi}$  eine Vektorfunktion: • *Correspondamment soit  $\vec{\Phi}$  une fonction vectorielle:*

$$\vec{\Phi}: V \mapsto \mathbb{R}^m, \quad \vec{\Phi}: (x_1, \dots, x_n) \mapsto \vec{\Phi}(x_1, \dots, x_n) := \vec{u}(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} u_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ u_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

Z.B. spez. • *P.ex. spéc.  $n = 3$ ,  $P = P(x, y, z)$ ,  $\vec{\Phi}: (x, y, z) \mapsto \vec{\Phi}(x, y, z) := \vec{u}(x, y, z)$*

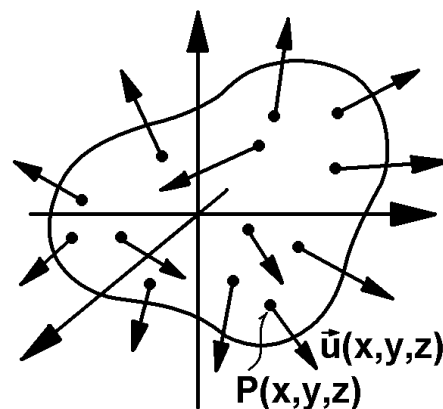
**Definition:** • **Définition:**

Eine solche im allgemeinen stetig differenzierbare Funktion  $\Phi$  heisst **Vektorfeld**. • *Une telle fonction  $\Phi$ , qui généralement est dérivable de façon continue, s'appelle champ vectoriel.*

Sei • *Soit  $n = 3$*

Durch ein Vektorfeld  $\Phi$  wird also z.B. jedem Punkt  $P(x, y, z) \in V$  ein Vektor  $\vec{u} = \Phi(x, y, z) \in \mathbb{R}^m$  zugeordnet. • *Par le champ vectoriel  $\Phi$  on applique donc à chaque point  $P(x, y, z) \in V$  un vecteur  $\vec{u} = \Phi(x, y, z) \in \mathbb{R}^m$ .*

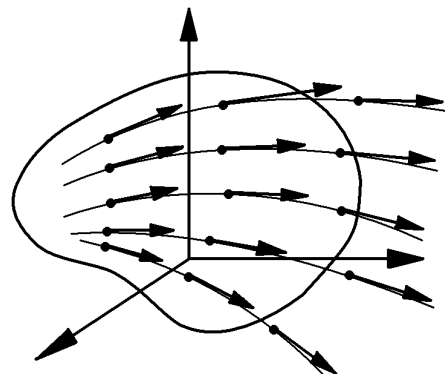
$$\leadsto (x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^{n+m}$$



Nun kommen wir zu einem anschaulichen Begriff, dessen exakte Definition hier nicht gleich gegeben werden soll. (Wieso wir auf diese verzichten, werden wir bald merken.) • *Maintenant nous venons à une notion compréhensible pour laquelle nous ne voulons pas donner la définition exacte tout de suite ici. (Pourquoi nous renonçons à celle-ci, nous le remarquerons bientôt.)*

**Begriff:** • **Notion:**

Eine **Feldlinie** ist eine gedachte Linie in einem Vektorfeld entlang den Vektoren  $\vec{u}(x_1, \dots, x_n)$ , die dann Tangentenvektoren an diese Linie sind. • *Une ligne vectorielle est une ligne qu'on s'imagina dans un champ vectoriel le long des vecteurs  $\vec{u}(x_1, \dots, x_n)$ , qui sont alors des vecteurs tangentiels à cette ligne.*



Da mit den Tangentenvektoren Ableitungen erster Ordnung im Spiel sind, müssen sich die Feldlinien als Lösungskurven von Differentialgleichungssystemen finden und definieren lassen, analog den uns bekannten



Integralkurven im Richtungsfelde einer D'Gl erster Ordnung. Auf die exakte Fassung wollen wir hier verzichten. • *Comme avec les vecteurs de tangente on rencontre des dérivées de premier ordre, les lignes vectorielles doivent se trouver et aussi se laisser définir ainsi que les courbes de solutions de systèmes d'équations différentielles, analogiquement aux courbes d'intégrales connues dans le champ de direction d'une éq.diff de premier ordre. Nous voulons renoncer ici à la définition exacte.*

## 6.2.2 Feldtypen — Types de champs

**Begriffe:** • **Notions:**

**Stationäre Felder** sind zeitunabhängig. Z.B.: • *Les champs stationnaires sont indépendants du temps.* P.ex.:  $\varphi(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z)$ ,  $\vec{u}(x, y, z, t) = \vec{u}(x, y, z)$

**Instationäre Felder** sind zeitabhängig. Z.B.: • *Les champs instationnaires sont dépendants du temps.* P.ex.:  $\exists_{t_1, t_2, x, y, z} : \varphi(x, y, z, t_1) \neq \varphi(x, y, z, t_2)$

**Homogene Felder** sind ortsunabhängig. Z.B.: • *Les champs homogènes sont indépendants du lieu.* P.ex.:  $\varphi(x, y, z, t) = \varphi(t)$

**Zentralfelder** sind nur von der Distanz zu einem Zentrum abhängig. Z.B.: • *Les champs centraux ne sont dépendants que d'une distance à un centre.* P.ex.:  $\varphi(x, y, z) = \tilde{\varphi}(r)$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

**Beispiele:** • **Exemples:**

**Skalarfelder:** Temperatur( $x, y, z, t$ ), Dichte( $x, y, z$ ) u.s.w..

• **Champs scalaires:** *Température( $x, y, z, t$ ), densité( $x, y, z$ ) etc..*

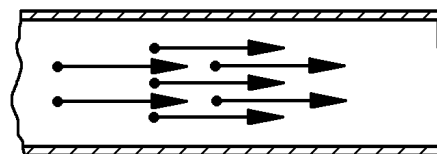
**Vektorfelder:** Elektrisches Feld  $\vec{E}$ , magnetisches Feld  $\vec{\Phi}$ , Kraftfeld  $\vec{F}$ , Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v}$ , u.s.w..

• **Champs vectoriels:** *Champ électrique  $\vec{E}$ , champ magnétique  $\vec{\Phi}$ , champ de force  $\vec{F}$ , champ de vitesse  $\vec{v}$ , etc..*

**1. Beispiel:** • **Exemple 1:**

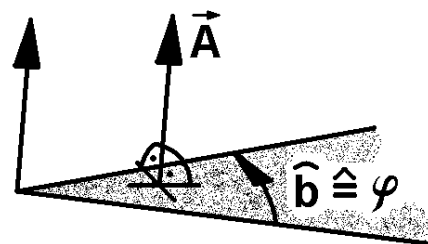
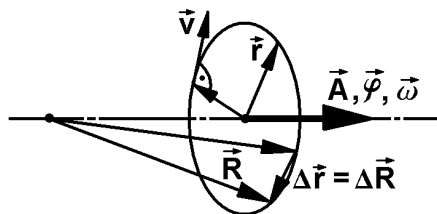
Geschwindigkeitsfeld eines Gases in einer Röhre. • *Champ de vitesse d'un gaz dans une conduite.*

$\vec{v} = \text{const.} \rightsquigarrow \sim \text{homogen}$  •  $\sim \text{homogène}$



**2. Beispiel:** • **Exemple 2:**

Geschwindigkeitsfeld bei einer Drehbewegung um eine Achse. (Der Winkel ist ein durch zwei Geraden aus einer Ebene ausgeschnittenes Flächenstück. Die Fläche wird durch einen Vektor dargestellt, somit auch der Winkel. Die Winkelgeschwindigkeit ist ein Vektor mit gleicher Richtung, weil die Zeit ein Skalar ist.) • *Champ de vitesse pour une rotation autour d'un axe. (L'angle est un morceau de surface décollé par deux droites d'une plaine. La surface est représentée par un vecteur, par conséquent aussi l'angle est représentée par un vecteur. La vitesse d'angle est donc un vecteur avec la même direction, parce que le temps est un scalaire.)*

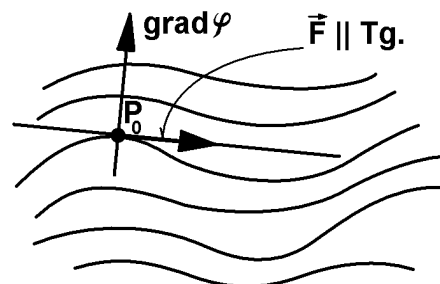
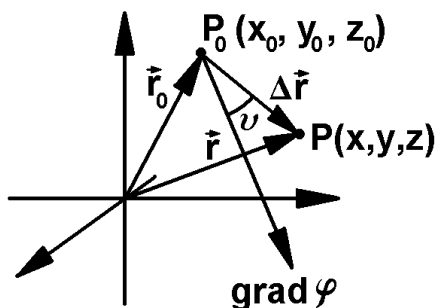
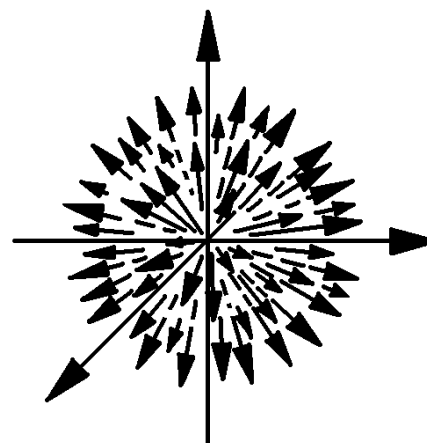


$$\leadsto \Delta \vec{R} = \Delta \vec{r}, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \perp \vec{r}, \quad \vec{v}, \vec{r} \perp \vec{A} \parallel \vec{\varphi} \Rightarrow \vec{v}, \vec{r} \perp \vec{\varphi} \leadsto \vec{v} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

## 2. Beispiel: • Exemple 2:

Coulombfeld (Zentralfeld): • *Champ de Coulomb (champ central)*:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= c \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2} \cdot \vec{e}_r = c \cdot \frac{Q \cdot q}{r^3} \cdot \vec{r} = E(\vec{r}) \cdot q, \\ E(\vec{r}) &= c \cdot \frac{Q}{r^3} \cdot \vec{r} \\ \leadsto E(\vec{r}) &= \begin{pmatrix} c \cdot Q \cdot x \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \\ c \cdot Q \cdot y \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \\ c \cdot Q \cdot z \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Beim Gravitationsfeld sieht die Sache ähnlich aus: • *La chose paraît semblable pour le champ de gravitation:*

$$\vec{F} = -\gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \vec{e}_r = \vec{g}(\vec{r}) \cdot m = \vec{g} \cdot m, \quad \vec{g}(\vec{r}) = -\gamma \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \vec{e}_r$$

## 6.3 Gradient, Divergenz, Rotation — Gradient, divergence, rotationnel

### 6.3.1 Laplace– und Nabla–Operator — Opérateurs de Laplace et nabla

**Bemerkung:** • **Remarque:** In der nachfolgenden Betrachtung beziehen wir uns immer auf den  $\mathbb{R}^3$ . Im  $\mathbb{R}^n$  ist eine entsprechende Anpassung zu vollziehen. Wir definieren vorerst zwei wichtige Differentialoperatoren: • *Dans la considération consécutive, nous nous référons toujours au  $\mathbb{R}^3$ . Dans le  $\mathbb{R}^n$ , il faut faire une adaptation correspondante. Nous définissons d'abord deux opérateurs différentiels importants:*

**Definition:** • **Définition:** 
$$\nabla := \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

heisst **Nabla**– oder **Hamiltonoperator**

• *s'appelle opérateur nabla ou opérateur de Hamilton*

Mit dem Nabla–Operator lassen sich die wichtigen Begriffe **Gradient**, **Divergenz** und **Rotation** definieren. • *Avec l'opérateur nabla on peut définir les notions importantes gradient, divergence et rotationnel.*

### 6.3.2 Definition von grad, div und rot — Définition de grad, div et rot

**Definition:** • **Définition:** 
$$\Delta := \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$
  
heisst **Laplaceoperator**  
• *s'appelle opérateur de Laplace*

Vom Analysis–Kurs her kennen wir bereits den Gradienten. Wir wiederholen hier die Definition. Sei  $\varphi(x, y, z)$  ein diff'bares Skalarfeld. Dann gilt: • *Du cours d'analyse nous connaissons déjà le gradient. Nous répétons la définition ici. Soient  $\varphi(x, y, z)$  un champ scalaire dérivable. Alors il vaut:*

**Definition:** • **Définition:** 
$$\text{grad}(\varphi) = \text{grad } \varphi := \nabla \varphi = \vec{e}_1 \varphi'_x + \vec{e}_2 \varphi'_y + \vec{e}_3 \varphi'_z = \begin{pmatrix} \varphi'_x \\ \varphi'_y \\ \varphi'_z \end{pmatrix}$$

heisst **Gradient** von  $\varphi$

• *s'appelle gradient de  $\varphi$*

**Bemerkung:** • **Remarque:**  $\nabla$  macht aus einem Skalarfeld  $\varphi$  ein Vektorfeld  $\text{grad } \varphi$ .  
•  *$\nabla$  transforme un champ scalaire  $\varphi$  en un champ vectoriel  $\text{grad } \varphi$ .*

**Definition:** • **Définition:**  $P(x, y, z)$  heisst **stationärer Punkt**, wenn gilt:  
•  *$P(x, y, z)$  s'appelle point stationnaire, s'il vaut:*

$$\text{grad } \varphi(x, y, z) = \vec{0}$$

Sei  $\vec{u}(x, y, z)$  ein diff'bares Vektorfeld. • *Soit  $\vec{u}(x, y, z)$  un champ vectoriel dérivable.*

**Definition:** • **Définition:**

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{u} &:= \nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ &= (u_1)'_x + (u_2)'_y + (u_3)'_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

heisst **Divergenz** von  $\vec{u}$  • s'appelle **divergence** de  $\vec{u}$ **Bemerkung:** • **Remarque:**

- $(\nabla \cdot)$  macht aus einem Vektorfeld  $\vec{u}$  ein Skalarfeld  $\operatorname{div} \vec{u} \in \mathbb{R}^1$ .  
 •  $(\nabla \cdot)$  transforme un champ vectoriel  $\vec{u}$  en un champ scalaire  $\operatorname{div} \vec{u} \in \mathbb{R}^1$ .

Sei wieder  $\vec{u}(x, y, z)$  ein diff'bares Vektorfeld. • Soit de nouveau  $\vec{u}(x, y, z)$  un champ vectoriel dérivable.**Definition:** • **Définition:**

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{u} &:= \nabla \times \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \frac{\partial}{\partial x} & u_1 \\ \vec{e}_2 & \frac{\partial}{\partial y} & u_2 \\ \vec{e}_3 & \frac{\partial}{\partial z} & u_3 \end{vmatrix} \\ &= \vec{e}_1 ((u_3)'_y - (u_2)'_z) + \vec{e}_2 ((u_1)'_z - (u_3)'_x) + \vec{e}_3 ((u_2)'_x - (u_1)'_y) \end{aligned}$$

heisst **Rotation**<sup>8</sup> von  $\vec{u}$  • s'appelle **rotationnel**<sup>8</sup> de  $\vec{u}$ **Bemerkung:** • **Remarque:**

- $(\nabla \times)$  macht aus einem Vektorfeld  $\vec{u}$  ein Vektorfeld  $\operatorname{rot} \vec{u}$ .  
 •  $(\nabla \times)$  transforme un champ vectoriel  $\vec{u}$  en un champ vectoriel  $\operatorname{rot} \vec{u}$ .

### 6.3.3 Formeln mit grad, div und rot — Formules avec grad, div et rot

Die folgenden Formeln ergeben sich durch koordinatenweisen Vergleich der Ausdrücke links und rechts der Gleichheitszeichen (einfache Rechnungen, z.B. möglich mit Mathematica, Übung für den Leser).

- On obtient les formules suivantes par comparaison des expressions coordonnées à gauche et à droite des signes d'égalité (calculs simples, p. ex. possible avec Mathematica, exercice pour le lecteur).

**Formeln:** • **Formules:****Vor.:** • **Hyp.:**

Seien die verwendeten Funktionen genügend oft stetig diff'bar. • Ses fonctions utilisées soient assez souvent dérivables de façon continue.

**Beh.:** • **Thè.:**

$$\operatorname{grad}(\lambda \varphi + \mu \psi) = \lambda \operatorname{grad} \varphi + \mu \operatorname{grad} \psi \quad (6.1)$$

---

<sup>8</sup>engl. curl

$$\operatorname{div}(\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) = \lambda \operatorname{div} \vec{a} + \mu \operatorname{div} \vec{b} \quad (6.2)$$

$$\operatorname{rot}(\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) = \lambda \operatorname{rot} \vec{a} + \mu \operatorname{rot} \vec{b} \quad (6.3)$$

$$\operatorname{div}(\varphi \cdot \vec{a}) = \operatorname{grad} \varphi \cdot \vec{a} + \varphi \cdot \operatorname{div} \vec{a} \quad (6.4)$$

$$\operatorname{rot}(\varphi \cdot \vec{a}) = (\operatorname{grad} \varphi) \times \vec{a} + \varphi \cdot \operatorname{Rot} \vec{a} \quad (6.5)$$

$$\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{b} \quad (6.6)$$

$$\operatorname{rot}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \cdot \operatorname{div} \vec{b} - \vec{b} \cdot \operatorname{div} \vec{a} + (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} \quad (6.7)$$

$$\operatorname{grad}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \times \operatorname{rot} \vec{b} + \vec{b} \times \operatorname{rot} \vec{a} + (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} + (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} \quad (6.8)$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = \Delta \varphi \quad (6.9)$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi) = \vec{0} \quad (6.10)$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{a}) = 0 \quad (6.11)$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{a}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{a}) - \operatorname{div}(\operatorname{grad} \vec{a}) \quad (6.12)$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{a}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{a}) - \Delta \vec{a} \quad (6.13)$$

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{a}) = \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{a}) + \operatorname{div}(\operatorname{grad} \vec{a}) \quad (6.14)$$

$$\vdots = \vdots$$

**Bemerkung:** • **Remarque:** Die drei ersten Formeln besagen, dass  $\operatorname{grad}$ ,  $\operatorname{div}$  und  $\operatorname{rot}$  lineare Operatoren sind. • *Les trois premières formules disent que  $\operatorname{grad}$ ,  $\operatorname{div}$  und  $\operatorname{rot}$  sont des opérateurs linéaires.*

### 6.3.4 Bedeutung von $\operatorname{grad}$ , $\operatorname{div}$ und $\operatorname{rot}$ — Signification de $\operatorname{grad}$ , $\operatorname{div}$ et $\operatorname{rot}$

#### Der Gradient — Le gradient

Die Bedeutung des Gradienten haben wir am Beispiel einer Funktion auf dem  $\mathbb{R}^2$  bereits im Analysis-Kurs untersucht. Wir haben dort herausgefunden, dass der Gradient eine Vektorfunktion ist, die in der Grundebene (Urbildmenge) senkrecht auf den Niveaulinien steht, „hangaufwärts“ zeigt und dessen Länge die maximale Tangentensteigung (Richtungsableitung) im jeweiligen Punkt bedeutet. Entsprechendes gilt für Funktionen im  $\mathbb{R}^n$ . • *Nous avons déjà examiné la signification du gradient à l'exemple d'une fonction sur le  $\mathbb{R}^2$  dans le cours d'analyse. Nous avons décelé là que le gradient est une fonction vectorielle qui est dans la plaine fondamentale (quantité d'original) perpendiculaire sur les lignes de niveau, qui "pointe vers le haut de la pente" et dont la longueur signifie la montée de tangente maximale (dérivée suivant une direction) dans le point en question. Correspondamment pour les fonctions dans le  $\mathbb{R}^n$ .*

Dabei war: • *Il en était:*

**Definition:** • **Définition:**  $(\operatorname{grad} \varphi \mathbb{C} \vec{e}_{\vec{r}})|_{P=P_0}$  heisst **Richtungsableitung** von  $\varphi$  in  $P_0$  in Richtung  $\vec{r}$ .  
•  $(\operatorname{grad} \varphi \mathbb{C} \vec{e}_{\vec{r}})|_{P=P_0}$  s'appelle **dérivée suivant une direction** de  $\varphi$  à  $P_0$  dans la direction  $\vec{r}$ .

**Satz:** • **Théorème:**      **Vor.:** • **Hyp.:**

Sei  $C$  Niveaulinie resp. Niveaufläche resp. Niveauhyperfläche. • *Soit  $C$  ligne de niveau resp. surface de niveau resp. hypersurface de niveau.*

**Beh.:** • **Thè.:**

1.  $\text{grad } \varphi \perp C$
2.  $|\text{grad } \varphi| = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{\max} \geq \left| \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|$
3.  $\text{grad } \varphi \parallel \vec{r} \Rightarrow |\text{grad } \varphi| = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|$

**Bsp.:** • **Exemple:**       $\varphi(x, y) = x \cdot y \Rightarrow C : x \cdot y = \text{const.} = k, \quad y = \frac{k}{x} \quad (x \neq 0)$

$\leadsto C$  : Hyperbeln! • *Hyperbôles!*       $\text{grad } \varphi = \begin{pmatrix} \varphi'_x \\ \varphi'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$  für • *pour  $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$*

Stationärer Punkt: • *Point stationnaire:*  $\text{grad } \varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \leadsto \vec{r} = \vec{0}$

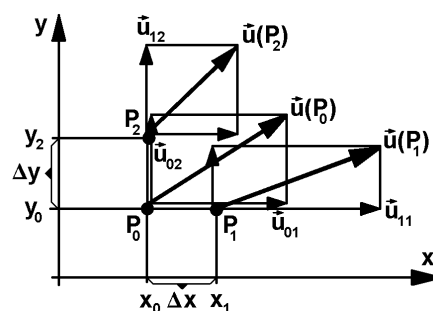
## Die Divergenz — La divergence

Mit unseren momentanen Kenntnissen ist die Erklärung der Divergenz nur rudimentär möglich. Später werden wir zeigen, dass die Divergenz die Bedeutung einer **Quellstärke** hat. Um diesen Begriff zu erläutern, müssen wir uns aber erst bis zum Divergenzsatz von Gauss vorarbeiten. Für den Moment wollen wir uns mit der folgenden Version begnügen: • *Avec nos connaissances actuelles, l'explication de la divergence n'est que rudimentairement possible. Plus tard nous montrerons que la divergence a la signification d'une **force de source**. Pour expliquer cette idée, nous devons avancer d'abord dans la théorie jusqu'au théorème de la divergence de Gauss. Pour le moment, nous voulons nous contenter de la version suivante:*

Sei • *Soit*  $\text{div } \vec{u} = (u_1)'_x + (u_2)'_y + (u_3)'_z$

$$(u_1)'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} (u_1(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - u_1(x_0, y_0, z_0))$$

$\leadsto (u_1)'_x$  beschreibt das Wachstum von  $\vec{u}$  in  $x$ -Richtung. •  $(u_1)'_x$  décrit la croissance de  $\vec{u}$  en direction  $x$ .



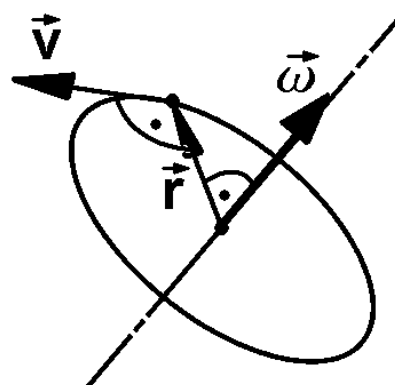
Entsprechend beschreibt  $(u_2)'_y$  das Wachstum von  $\vec{u}$  in  $y$ -Richtung,  $(u_3)'_z$  das Wachstum von  $\vec{u}$  in  $z$ -Richtung. • *Correspondamment  $(u_2)'_y$  décrit la croissance de  $\vec{u}$  en direction  $y$ ,  $(u_3)'_z$  décrit la croissance de  $\vec{u}$  en direction  $z$ .*

$\leadsto$  Die Divergenz gibt ein Mass für die Stärke des Wachstums der Komponenten in die jeweilige Richtung dieser Komponenten. • *La divergence donne une mesure pour la force de la croissance des composantes dans la direction respective de ces composantes.*

Sei z.B.  $P_2$  ein Punkt, der aus  $P_1$  durch Wachstum aller Koordinaten entsteht. Wächst z.B. bei diesem Übergang von  $P_1$  zu  $P_2$  im betrachteten Falle  $u_1$  nur in  $x$ -Richtung,  $u_2$  nur in  $y$ -Richtung und  $u_3$  nur in  $z$ -Richtung, so wächst also jede Komponente von  $\vec{u}$  nur in der ihr entsprechenden Richtung in der Urbildmenge. Die Komponenten haben daher die Tendenz, bei diesem Übergang von  $P_1$  nach  $P_2$  auseinanderzustreben, d.h. zu „divergieren“. (Vgl. Skizze.) • *Soit p.ex.  $P_2$  un point qui naît de  $P_1$  par croissance de toutes les coordonnées. Si p.ex., au passage de  $P_1$  à  $P_2$ ,  $u_1$  croît seulement dans la direction  $x$ ,  $u_2$  seulement dans la direction  $y$  et  $u_3$  seulement dans la direction  $z$ , toutes les composantes de  $\vec{u}$  ne croissent que dans la direction correspondante dans l'ensemble original. Par conséquent les composantes ont la tendance de tendre à se séparer au passage de  $P_1$  à  $P_2$ , c.-à-d. elles "divergent". (Voir esquisse.)*

### Die Rotation — Le rotationnel

Es ist sinnvoll, die Rotation an einem Beispiel zu erklären. Wir wählen das Geschwindigkeitsfeld bei einer Drehbewegung eines Massepunktes um eine Axe. • *Il est raisonnable d'expliquer le rotationnel à l'aide d'un exemple. Nous choisissons le champ de vitesse à un mouvement rotatif d'un point de masse autour d'un axe.*



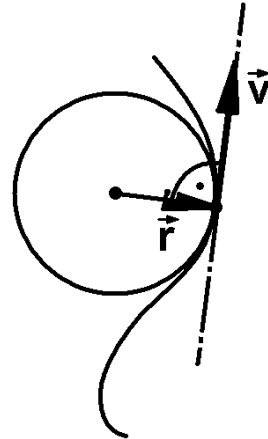
Sei  $\vec{v}$  der Geschwindigkeitsvektor. Aus der Physik wissen wir: • *Soit  $\vec{v}$  le vecteur de vitesse. De la physique nous savons:*

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2 z - \omega_3 y \\ \omega_3 x - \omega_1 z \\ \omega_1 y - \omega_2 x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rot} \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega_2 z - \omega_3 y \\ \omega_3 x - \omega_1 z \\ \omega_1 y - \omega_2 x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 + \omega_1 \\ \omega_2 + \omega_2 \\ \omega_3 + \omega_3 \end{pmatrix} = 2\vec{\omega} \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{v} = 2\vec{\omega}$$

Betrachten wir allgemein  $\vec{v}$  längs einer Feldlinie, so kann man sich  $\vec{v}$  lokal als Geschwindigkeitsvektor bei der Rotation um den Krümmungskreismittelpunkt vorstellen.  $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}$  ist dann in erster Näherung die lokale Winkelgeschwindigkeit dieser gedachten Rotationsbewegung.

• *Nous considérons généralement  $\vec{v}$  le long d'une ligne vectorielle.*



On peut s'imaginer  $\vec{v}$  localement comme vecteur de vitesse d'une rotation autour du centre du cercle de courbure.  $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}$  est donc dans la première approximation la vitesse d'angle locale de ce mouvement de rotation imaginaire.

## 6.4 Konservative Felder — Champs conservateurs

### 6.4.1 Linienintegrale von Vektorfunktionen — Intégrales curvilignes de fonctions vectorielles

#### Begriff — Notion

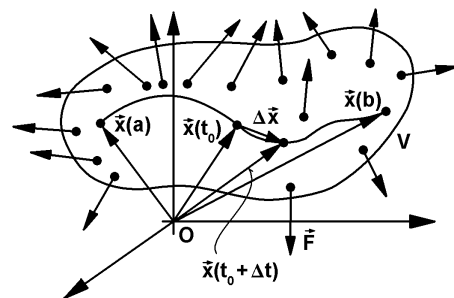
**Linienintegrale** oder **Kurvenintegrale** sind uns vom Analysis-Kurs her bekannt. Da wir uns jetzt mit solchen Integralen beschäftigen werden, wollen wir das für uns Wesentliche nochmals darstellen.

• *Nous connaissons les intégrales de ligne ou intégrales curvilignes depuis le cours d'analyse. Comme nous nous occuperons maintenant de telles intégrales, nous voulons considérer encore une fois les points qui sont plus importants pour nous.*

Gegeben sei eine Kurve  $\gamma$  (diff'bar!): • *Soit donnée une courbe  $\gamma$  (dérivable!):*

$$\gamma: [a, b] \mapsto \{\vec{x}(t)\} \subset V \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$|\gamma| := C: \text{Spur} \quad \bullet \quad \text{Trace}$$



$$\text{Sei } \bullet \text{ Soit } \vec{F} = \vec{F}(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ F_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} := \vec{F}(\vec{x}), \quad \mathbb{R}^n \ni \vec{x} \mapsto \vec{F}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{Auf } C \text{ sei: } \bullet \text{ Soit sur } C: \quad \vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}(t))$$

In der Physik und Technik begegnet man häufig der potentiellen Energie oder der Arbeit in einem Kraftfeld  $\vec{F}$ . Daher sind Ausdrücke der folgenden Art wichtig: • *Dans la physique et la technique, on rencontre souvent le travail ou l'énergie potentielle dans un champ de force  $\vec{F}$ . Par conséquent, les expressions de la sorte suivante sont importantes:*



$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x}, \quad \Delta \vec{x} = \Delta \vec{s} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} \cdot \Delta t \rightarrow d\vec{x} = \vec{x}'_t \cdot dt, \quad \vec{x}'_t = \text{Tangentenvektor} \bullet \text{vecteur tangentiel}$$

**Konsens:** • **Accord:**

Zur Vereinfachung der Schreibweise lassen wir folgende Inkonssequenz zu, weil sie nicht stört: • *À la simplification de l'orthographe, nous admettons l'inconséquence suivante, parce qu'elle ne dérange pas:*

Sei • *Soit*  $P = P(x_1, \dots, x_n) := (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\overrightarrow{OP} = \vec{x} \rightsquigarrow f(P) := f(x_1, \dots, x_n) := f(\vec{x})$

**Definition:** • **Définition:**

$$W = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{\vec{x}(a)}^{\vec{x}(b)} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} := \int_{t=a}^{t=b} \vec{F}(\vec{x}(t)) \cdot \vec{x}'_t(t) dt$$

heißt **Linienintegral** oder **Kurvenintegral** resp. Arbeit längs  $|\gamma|$  • s'appelle **intégrale curviligne** resp. travail le long de  $|\gamma|$

Das Linienintegral ist damit auf ein Integral mit einer Integrationsvariablen zurückgeführt und hängt somit nur vom Anfangspunkt  $A_\gamma$  und Endpunkt  $E_\gamma$  der Kurve ab. Falls man die Kurve im Definitionsbereich sinnvoll durch eine Summe von Teilkurven längs den Koordinatenachsen ersetzen kann, so gilt:

• *L'intégrale curviligne est donc réduit à une intégrale avec une seule variable d'intégration et dépend par conséquent seulement du point initial  $A_\gamma$  et du point final  $E_\gamma$  de la courbe. Si on peut remplacer la courbe dans le domaine de définition ingénieusement par une somme de courbes partielles le long des axes des coordonnées, il vaut ainsi:*

**Satz:** • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$|\gamma| = |\gamma_1| \cup |\gamma_2| \cup \dots \cup |\gamma_n|, \quad E_{|\gamma_{k+1}|} = E_{|\gamma_k|}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$$

**Beh.:** • **Thè.:**

$$\int_{|\gamma|} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{|\gamma_1|, x_1(a)}^{x_1(b)} F_1(\vec{x}) \cdot dx_1 + \dots + \int_{|\gamma_n|, x_n(a)}^{x_n(b)} F_n(\vec{x}) \cdot dx_n$$

**Bsp.:** • **Exemple:**

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3xy \\ 5z \\ 10x \end{pmatrix}, \quad \gamma: t \mapsto \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + 1 \\ 2t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2], \quad \Rightarrow \vec{x}'_t(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 4t \\ 3t^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Auf } |\gamma| \text{ gilt: } \bullet \text{ Sur } |\gamma| \text{ il vaut: } \vec{F}(x, y, z) = \vec{F}(x(t), y(t), z(t)) = \begin{pmatrix} 3(t^2 + 1)(2t^2) \\ 5t^3 \\ 10(t^2 + 1) \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow W = \int_0^2 \vec{F} \cdot \vec{x}'_t dt = \int_0^2 \begin{pmatrix} 3(t^2 + 1)(2t^2) \\ 5t^3 \\ 10(t^2 + 1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 4t \\ 3t^2 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^2 (3(t^2 + 1)(2t^2))(2t) + (5t^3)(4t) + (10(t^2 + 1))(3t^2) dt = \int_0^2 30t^2 + 12t^3 + 50t^4 + 12t^5 dt = 576$$

**Geschlossene Wege — Courbes fermées**

Im Analysis-Kurs haben wir definiert: • *Dans le cours d'analyse nous avons défini:*

**Definition:** • **Définition:** Wir nennen einen **Weg geschlossen**, wenn Anfangspunkt und Endpunkt der Spur zusammenfallen:  $A_{|\gamma|} = E_{|\gamma|}$ . • *Nous appelons une courbe fermée si le point initial et le point final de la trace se superposent:  $A_{|\gamma|} = E_{|\gamma|}$ .*

Für das Linienintegral über einen geschlossenen Weg  $\gamma$  verwenden wir das folgende Symbol: • *Pour l'intégrale curviligne sur une courbe fermée  $\gamma$ , nous appliquons le symbole suivant:*

**Symbol:** • **Symbole:**  $\oint_{|\gamma|} \vec{F} \cdot d\vec{x}$

**Bsp.:** • **Exemple:**

$$\begin{aligned} \text{Sei } & \bullet \text{ Soit } \vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad |\gamma| \text{ geschlossen } \bullet \text{ fermée: } \vec{x}(t_1) = \vec{x}(t_2), \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} x'_t \\ y'_t \\ z'_t \end{pmatrix} \\ \Rightarrow & \oint_{|\gamma|} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \oint_{|\gamma|} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_t \\ y'_t \\ z'_t \end{pmatrix} dt = \oint_{|\gamma_x|} a \cdot x'_t dt + \oint_{|\gamma_y|} b \cdot y'_t dt + \oint_{|\gamma_z|} c \cdot z'_t dt = a \oint_{|\gamma_x|} x'_t dt + b \oint_{|\gamma_y|} y'_t dt + \\ & c \oint_{|\gamma_z|} z'_t dt \\ & = a x \Big|_{x(t_1)}^{x(t_2)=x(t_1)} + b y \Big|_{y(t_1)}^{y(t_2)=y(t_1)} + c z \Big|_{z(t_1)}^{z(t_2)=z(t_1)} = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 = 0 \Rightarrow \oint_{|\gamma|} \vec{F} \cdot d\vec{x} = 0 \end{aligned}$$

Die Arbeit über einen geschlossenen Weg ist also 0. • *Le travail sur un chemin fermé est donc 0.*

~> **Problem:** • **Problème:** Ist die Arbeit über einen geschlossenen Weg immer 0? — Oder hängt dieses Verhalten etwa vom Feld  $\vec{F}$  oder gar vom Weg  $\gamma$  ab? • *Est-ce que le travail est toujours 0 sur un chemin fermé? — Ou est-ce que ce comportement dépend du champ  $\vec{F}$  ou bien du chemin  $\gamma$ ?*

Das folgende Beispiel zeigt uns, dass das Wegintegral resp. die Arbeit über einen geschlossenen Weg auch ungleich 0 sein kann: • *L'exemple suivant nous montre que l'intégrale curviligne resp. le travail sur un chemin fermé peut être inégal à 0:*

$$\begin{aligned} \text{Sei } & \bullet \text{ Soit } \vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{y} \\ \frac{1}{x} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow & \oint_{|\gamma|} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sin(t)} \\ \frac{1}{\cos(t)} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} (1 + 1 + 0) dt = 4\pi \neq 0 \end{aligned}$$

### 6.4.2 Gradientenfelder und Potentialfelder — Champs de vecteurs lamellaires et champs de potentiel

Sei • *Soit*  $\varphi: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ ,  $\varphi \in \mathcal{C}^1$  stetig diff'bar, z.B.  $n = 3$  • *dérivable de façon continue, p.ex.  $n = 3$*

$\leadsto \vec{F}(\vec{x}) := \text{grad } \varphi = \nabla \varphi \in \mathcal{C}$  (stetig) • (continue) In dieser Situation definieren wir: • Dans cette situation nous définissons:

**Definition:** • **Définition:**

Wenn es zu einer gegebenen Funktion  $\vec{F}(\vec{x})$  eine Funktion  $\varphi(\vec{x})$  gibt für die  $\text{grad } \varphi(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x})$  gilt, so heisst  $\varphi$  **Potentialfunktion** zu  $\vec{F}$ . Umgekehrt heisst  $\vec{F}(\vec{x})$  **Gradientenfeld** zu  $\varphi$ .

• Si pour une fonction donnée  $\vec{F}(\vec{x})$  il existe une  $\varphi(\vec{x})$  telle qu'il vaut  $\text{grad } \varphi(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x})$ , on appelle  $\varphi$  **fonction potentielle** de  $\vec{F}$ . D'autre part  $\vec{F}(\vec{x})$  s'appelle **champ de vecteurs lamellaires** de  $\varphi$ .

Gradientenfelder haben die schöne Eigenschaft, dass bei ihnen die Wegintegrale (d.h. die Arbeit) 0 ist, d.h. der Energiesatz gilt: • Les champs de vecteurs lamellaires ont la belle qualité qu'à eux les intégrales curvilignes (c.-à.-d. le travail) est 0, c.-à.-d. l'équation d'énergie vaut:

$$\oint_{|\gamma|} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \oint_{|\gamma|} \nabla \varphi \cdot d\vec{x} = \oint_{|\gamma|} \varphi'_{x_1} dx_1 + \dots \varphi'_{x_n} dx_n = \oint_{|\gamma|} d\varphi = \varphi(\vec{x}) \Big|_{\vec{x}(t_1)}^{\vec{x}(t_2)=\vec{x}(t_1)} = \varphi(\vec{x}(t_1)) - \varphi(\vec{x}(t_1)) = 0$$

**Satz:** • **Théorème:**

**Vor.:** • **Hyp.:**

Sei • Soit  $\vec{F} = \text{grad } \varphi$  Gradientenfeld • champ de vecteurs lamellaires

Sei • Soit  $\varphi$  eine Potentialfunktion zu • une fonction potentielle pour  $\vec{F}$  auf • sur  $V \subseteq \mathbb{R}^n$

Sei • Soit  $\gamma$  geschlossener Weg • chemin fermé,  $|\gamma| \subset V$

**Beh.:** • **Thè.:**

$$\oint_{|\gamma|} \vec{F} \cdot d\vec{x} = 0$$

**Bsp.:** • **Exemple:**  $\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \leadsto \exists$  Potentialfunktion: •  $\exists$  fonction de potentiel:

$$\varphi(\vec{x}) = x \cdot y \cdot z + C \Rightarrow \oint_{|\gamma|} \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \cdot d\vec{x} = 0$$

Dabei ist  $\gamma$  ein beliebiger geschlossener Weg. • Ici  $\gamma$  est un chemin fermé quelconque.

$$\text{Sei } \bullet \text{ Soit } \vec{F}_0(\vec{x}) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zu  $\vec{F}_0$  existiert keine Potentialfunktion, wie man sofort nachrechnet. • Pour  $\vec{F}_0$  il n'existe pas de fonction potentielle, comme on s'assure tout de suite par calcul.

### 6.4.3 Konservative Felder — Champs conservateurs

**Definition:** • **Définition:**

Sei • Soit  $\oint_{|\gamma|} \vec{F} \cdot d\vec{x} = 0 \forall \gamma, |\gamma| \subset V$

Dann heisst  $\vec{F}$  **Potentialfeld** oder **konservatives Feld** • Dans ce cas  $\vec{F}$  s'appelle **champ de potentiel** ou **champ conservateur**

**Folgerung:** • **Conclusion:**  $\vec{F}$  Potentialfeld • *champ de potentiel*  
 $\Rightarrow \vec{F}$  konservativ. • *conservateur.*

**Symbol:** • **Symbole:**  $\vec{F}$  konservativ: • *conservateur:*  $\vec{F} \in \text{Cons}$

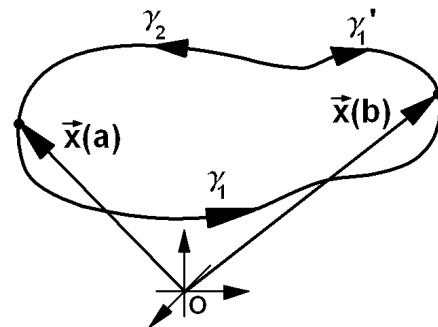
Konservative Felder haben die wichtige Eigenschaft, dass in ihnen Wegintegrale resp. die Arbeit nur vom Anfangspunkt und Endpunkt des Weges, aber nicht vom Verlauf der Spur abhängen.  
 • *Les champs conservateurs ont la qualité importante que là les intégrales curvilignes resp. le travail dépendent seulement du point initial et du point final du chemin, mais elles ne dépendent pas de la trace.*

**Satz:** • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**  $\vec{F} \in \text{Cons}$   
 $\gamma_1, \gamma_2$  zwei Wege • *deux chemins*  $\subset V$   
 mit • *avec*  $A_{\gamma_1} = A_{\gamma_2}, E_{\gamma_1} = E_{\gamma_2}$

**Beh.:** • **Thè.:**  $\int_{|\gamma_1|} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{|\gamma_2|} \vec{F} \cdot d\vec{x}$

**Zum Beweis:** • **Quant à la preuve:** Sei • *Soit*  $|\gamma| = |\gamma_1| \cup |\gamma_2|, |\gamma_2| = |-\gamma_1'|$

$$\begin{aligned} \leadsto 0 &= \oint_{|\gamma|=|\gamma_1| \cup |\gamma_2|} \vec{F} \cdot d\vec{x} \\ &= \oint_{|\gamma_1|} \vec{F} \cdot d\vec{x} + \oint_{|\gamma_2|} \vec{F} \cdot d\vec{x} \\ &= \oint_{|\gamma_1|} \vec{F} \cdot d\vec{x} + \oint_{|-\gamma_1'|} \vec{F} \cdot d\vec{x} \\ &= \oint_{|\gamma_1|} \vec{F} \cdot d\vec{x} - \oint_{|\gamma_1'|} \vec{F} \cdot d\vec{x} \\ &\Leftrightarrow \oint_{|\gamma_1|} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \oint_{|\gamma_1'|} \vec{F} \cdot d\vec{x} \end{aligned}$$



Diese Schlusskette kann man natürlich auch rückwärts lesen. Daher gilt: • *Nous pouvons évidemment lire resp. poursuivre cette chaîne de conclusions de façon inverse. Par conséquent il vaut:*

**Korollar:** • **Corollaire:** **Vor.:** • **Hyp.:**  $\forall (\vec{x}(a), \vec{x}(b)) \in V^2 \quad \int_{\vec{x}(a)}^{\vec{x}(b)} \vec{F} \cdot d\vec{x}$

**Beh.:** • **Thè.:**  $\vec{F} \in \text{Cons}$

**Problem:** • **Problème:** Ist ein konservatives Feld immer auch ein Gradientenfeld einer Potentialfunktion? D.h. existiert immer eine Potentialfunktion, wenn der Energiesatz gilt? Diese Frage wollen wir jetzt studieren. • *Est-ce qu'un champ conservateur est toujours aussi un champ de vecteurs lamellaires d'une fonction de potentiel? C.-à-d. si l'équation d'énergie est valable, existe-t-il toujours aussi une fonction de potentiel? Nous allons étudier maintenant cette question.*

Sei  $\vec{F}$  konservativ in  $V$ . • *Soit  $\vec{F}$  conservateur dans  $V$ .*

$\leadsto \oint_{|\gamma|} \vec{F} \cdot d\vec{x} = 0, |\gamma| \subset V \Rightarrow I(t) := \int_{\vec{x}(t_0)}^{\vec{x}(t)} \vec{F} \cdot d\vec{x}$  ist wegunabhängig. • *ne dépend pas du chemin.*

$$\leadsto \frac{d}{dt} I(t) = \frac{d}{dt} \int_{\vec{x}(t_0)}^{\vec{x}(t)} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \vec{F}(\vec{x}(\lambda)) \cdot \frac{d\vec{x}(\lambda)}{d\lambda} d\lambda = \vec{F}(\vec{x}(t)) \cdot \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$$

Wegen der Wegunabhängigkeit kann  $\gamma$  speziell gewählt werden. Falls  $V$  eine vernünftige Form hat, was wir voraussetzen, kann  $|\gamma|$  aus achsenparallelen Stücken zusammengesetzt werden. Auf einem solchen Stück wählen wir  $t$  gleich derjenigen Koordinate  $x_k$ , die auf diesem Stück gerade ändert. • *À cause de l'indépendance du chemin on peut choisir  $\gamma$  de façon spéciale. Si  $V$  a une forme raisonnable, ce que nous présupposons, nous pouvons composer  $|\gamma|$  de morceaux parallèles aux axes. Sur un tel morceau, nous choisissons  $t$  égal à cette coordonnée  $x_k$  qui change exactement et actuellement sur ce morceau.*

$\leadsto$  Z.B. längs  $|\gamma_k|$ : • *P.ex. le long de  $|\gamma_k|$ :*  $\frac{d}{dt} I(t) = \frac{d}{dx_k} I(x_k) = \vec{F}(\vec{x}(x_k)) \cdot \frac{\partial \vec{x}(x_k)}{\partial x_k}$

$$\frac{\partial \vec{x}(x_k)}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{k-1} \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d}{dx_k} I(x_k) = \begin{pmatrix} \vdots \\ F_k(\vec{x}(x_k)) \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = F_k(\vec{x}(x_k)) \text{ (Längs der } x_k\text{-Achse ändert nur die } x_k\text{-Koordinate, die andern Koordinaten bleiben als Parameter fix.)}$$

• *(Au long de l'axe  $x_k$ , seulement la coordonnée  $x_k$  change, les autres coordonnées restent fixes comme paramètres.)*

Da längs  $x_k$  gilt:  $t = x_k$ , können wir  $I(t) = I(x_k)$  dort als Funktion von  $x_k$  auffassen. Längs der andern Achsen ist  $x_k$  als Parameter fix und somit  $I$  dort konstant mit  $x_k$ , d.h. ebenfalls Funktion von  $x_k$ .  $I$  ist also immer Funktion von  $x_k$ , unabhängig vom Wert von  $k$ . D.h.  $I = I(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$  mit  $I_{x_k}'(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$ . • *Comme le long de  $x_k$  il vaut:  $t = x_k$ , on peut comprendre  $I(t) = I(x_k)$  là comme fonction de  $x_k$ . Au long des autres axes  $x_k$  est fixe comme paramètre et donc  $I$  est constant avec  $x_k$ , c.-à-d.  $I$  est de nouveau fonction de  $x_k$ .  $I$  est donc toujours fonction de  $x_k$ , indépendamment de la valeur de  $k$ . C.-à-d.  $I = I(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$  avec  $I_{x_k}'(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$ .*

Nun definieren wir: • *Nous définissons maintenant:*  $\varphi(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) := I(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$

Dann gilt: • *Alors il vaut:*  $\text{grad } \varphi = \begin{pmatrix} \varphi'_{x_1} \\ \vdots \\ \varphi'_{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ F_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$

$\leadsto \vec{F}(\vec{x})$  ist Gradientenfeld zur oben definierten Funktion  $\varphi(\vec{x})$ . D.h. bei vernünftigem  $V$  ist ein Potentialfeld immer auch Gradientenfeld einer Potentialfunktion. •  *$\vec{F}(\vec{x})$  est champs de vecteurs lamellaires pour la fonction  $\varphi(\vec{x})$  définie en haut. C.-à-d. si  $V$  est raisonnable, un champs de potentiel est toujours aussi champs de vecteurs lamellaires d'une fonction de potentiel.*

<b>Satz:</b> • <b>Théorème:</b>	<b><u>Vor.:</u></b> • <b><u>Hyp.:</u></b>	$\vec{F} \in \text{Cons}$ $V$ vernünftig • <i>raisonnable</i>
	<b><u>Beh.:</u></b> • <b><u>Thè.:</u></b>	$\exists_{\varphi(\vec{x})}$ zu • à $\vec{F}$ : $\varphi(\vec{x})$ ist Potentialfunktion zu $\vec{F}$ • $\varphi(\vec{x})$ est Fonction de potentiel pour $\vec{F}$

**Zusammengefasst:** • **Résumé:** Konservative Felder sind die Felder, wo der Energiesatz gilt. Und genau diese konservative Felder sind auch Gradientenfelder einer somit existierenden Potentialfunktion  $\varphi$ .

• *Les champs conservateurs sont les champs où l'équation d'énergie est valable. Et exactement ces champs conservateurs sont aussi des champs de vecteurs lamellaires d'une fonction de potentiel  $\varphi$  qui donc existe.*

**Konsequenz:** • **Conséquence:** In konservativen Feldern gilt somit: • *Dans les champs conservateurs il vaut par conséquent:*

$$\int_{|\gamma|} \vec{F}(\vec{x}) \bullet d\vec{x} = \int_{|\gamma|} \text{grad } \varphi(\vec{x}) \bullet d\vec{x} = \int_{|\gamma|} d\varphi = \varphi \Big|_{\vec{x}(t_1)=A_{|\gamma|}}^{\vec{x}(t_2)=E_{|\gamma|}} = \varphi(E_{|\gamma|}) - \varphi(A_{|\gamma|}) = \Delta\varphi$$

$\leadsto$  Differenz von Werten der Potentialfunktion. • *Différence de valeurs de la fonction de potentiel.*

Sei nun  $\varphi(\vec{x})$  die Potentialfunktion zum Potentialfeld  $\vec{F}(\vec{x}) = \text{grad } \varphi$ . Sei  $\overrightarrow{OP} := \vec{x}$ . • *Soit maintenant  $\varphi(\vec{x})$  la fonction de potentiel au champ de potentiel  $\vec{F}(\vec{x}) = \text{grad } \varphi$ . Soit  $\overrightarrow{OP} := \vec{x}$ .*

**Definition:** • **Définition:**  $\varphi(P) := \varphi(\overrightarrow{OP})$  heisst **Potential** im Punkte  $P$ . • *s'appelle potentiel dans le point  $P$ .*  
 $\Delta\varphi = \varphi(E_{|\gamma|}) - \varphi(A_{|\gamma|})$  heisst **Potentialdifferenz** • *s'appelle différence de potentiel.*

**Bemerkung:** • **Remarque:** Das Potential hat oft physikalisch die Bedeutung der **potentiellen Energie** und der Gradient dazu die Bedeutung der **Feldstärke**. Die Feldstärke erlaubt die Berechnung der Kraft des Feldes auf eine Probe, z.B. eine Probemasse oder Probeladung.  
• *Le potentiel a souvent physiquement la signification de l'énergie potentielle et le gradient à cela la signification de l'intensité du champ. L'intensité du champ permet de calculer la force du champ p. ex. sur une masse d'essai ou sur une charge d'essai.*

$$\leadsto \text{Z.B.} \bullet P.ex. \quad \vec{F} = \vec{E} \cdot q$$

#### 6.4.4 Eigenschaften, Beispiele — Qualités, exemples

Integrale sind lineare Operatoren. Daher gelten auch für Linienintegrale die Linearitätseigenschaften:

• *Les intégrales sont des opérateurs linéaires. Par conséquent les qualités de linéarité valent aussi pour les intégrales curvilignes:*

$$\begin{aligned} \text{Es gilt:} \bullet \text{Il vaut:} \quad \oint_{|\gamma|} \vec{F}(\vec{x}) \bullet d\vec{x} = 0 &\Rightarrow \oint_{|\gamma|} \lambda \cdot \overrightarrow{F}(\vec{x}) \bullet d\vec{x} = \lambda \cdot \oint_{|\gamma|} \vec{F}(\vec{x}) \bullet d\vec{x} = 0, \\ \oint_{|\gamma|} \vec{F}_1(\vec{x}) \bullet d\vec{x} = 0 \wedge \oint_{|\gamma|} \vec{F}_2(\vec{x}) \bullet d\vec{x} = 0 &\Rightarrow \oint_{|\gamma|} (\vec{F}_1(\vec{x}) \pm \vec{F}_2(\vec{x})) \bullet d\vec{x} = 0 \end{aligned}$$

**Satz:** • **Théorème:**      **Vor.:** • **Hyp.:**       $\vec{F}_1(\vec{x}), \vec{F}_2(\vec{x}) \in \text{Cons}$   
 $\lambda_i \in \mathbb{R}$  oder • *ou*  $\lambda_i \in \mathbb{C}$

**Beh.:** • **Thè.:**       $\lambda_1 \cdot \vec{F}_1(\vec{x}) \pm \lambda_2 \cdot \vec{F}_2(\vec{x}) \in \text{Cons}$

**Bsp.:** • **Exemple:**

**Zentralfelder** (kugelsymmetrische Felder) • **Champs centraux** (*les champs symétriques centraux ou sphériques*)

$\leadsto \varphi(\vec{x}) = \varphi(x, y, z) = \varphi(\vec{r}) = \varphi(r), \quad \text{grad } \varphi = \vec{F}(\vec{x}) = F(r) \cdot \vec{e}_{\vec{r}}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ resp. } \bullet \text{ resp.}$   
 $r = \sqrt{\sum x_k^2} = (\sum x_k^2)^{\frac{1}{2}}$   
 $\frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \cdot (\sum x_k^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 x_k = \frac{x_k}{r} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_k} = \varphi'_r \cdot \frac{x_k}{r} \quad \text{grad } \varphi = \varphi'_r \cdot \begin{pmatrix} \frac{x_1}{r} \\ \vdots \\ \frac{x_k}{r} \end{pmatrix} = \varphi'_r \cdot \vec{e}_{\vec{r}}$

**Lemma:** • **Lemme:**      **Vor.:** • **Hyp.:**       $\varphi(\vec{x}) = \varphi(r)$  Potentialfunktion eines Zentralfeldes • *fonction de potentiel d'un champ central*

**Beh.:** • **Thè.:**       $\text{grad}(\varphi) = \varphi'_r \cdot \vec{e}_{\vec{r}}$

Mit Hilfe dieses Lemmas kann man den folgenden Satz herleiten: • *A l'aide de ce lemme on peut déduire le théorème suivant:*

**Satz:** • **Théorème:**      **Vor.:** • **Hyp.:**

$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{Z}(\vec{r}) \leadsto$  vernünftiges Zentralfeld • *champ central raisonnable*

**Beh.:** • **Thè.:**

(1)       $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{Z}(\vec{r})$  Potentialfeld • *champ de potentiel*

(2)       $\varphi_C(r) := \int_{t(R_0)}^{t(r)} \vec{F}(\vec{x}(\lambda)) \cdot \frac{d\vec{x}(\lambda)}{d\lambda} d\lambda + C = \int_{R_0}^r \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + C$   
ist Potentialfunktion • *est fonction potentielle*

**Bemerkung:** • **Remarque:**      Eine Potentialfunktion ist nur bis auf eine additive Konstante  $C$  bestimmt, muss also noch normiert werden. Bei der Bildung des Gradienten verschwindet diese Konstante wieder. • *Une fonction de potentiel est définie seulement jusqu'à une constante  $C$  additive, elle doit donc encore être normalisée. Cette constante disparaît à la formation du gradient.*

**Zum Beweis: • Quant à la preuve:**

Es gilt: • Il vaut: 
$$\nabla\varphi = \begin{pmatrix} \varphi'_x \\ \varphi'_y \\ \varphi'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'_r \cdot r'_x \\ \varphi'_r \cdot r'_y \\ \varphi'_r \cdot r'_z \end{pmatrix} = \varphi'_r \cdot \vec{e}_{\vec{r}}$$

$$\begin{aligned} \varphi'_r(r) &= \frac{d}{dr} \left( \int_{R_0}^r \vec{Z}(|\vec{x}|) \cdot d\vec{x} \right) = \frac{d}{dr} \left( \int_{\lambda_0}^{\lambda} \vec{Z}(|\vec{x}|) \cdot \left( \frac{d}{d\lambda} \vec{x} \right) d\lambda \right) \Big|_{|\vec{x}|=r=|\vec{r}|} \vec{Z}(r) \cdot \left( \frac{d}{dr} \vec{r} \right) = \vec{Z}(r) \cdot \left( \frac{d}{dr} (r \cdot \vec{e}_{\vec{r}}) \right) \\ &= \vec{Z}(r) \cdot \vec{e}_{\vec{r}} = Z(r) \cdot \vec{e}_{\vec{r}} \cdot \vec{e}_{\vec{r}} = Z(r) \cdot 1 = Z(r) \Rightarrow \nabla\varphi = \varphi'_r \cdot \vec{e}_{\vec{r}} = Z(r) \cdot \vec{e}_{\vec{r}} = \vec{Z}(r) \Rightarrow \nabla\varphi = \vec{Z}(r) \end{aligned}$$

Das Zentralfeld  $\vec{Z}(r)$  ist somit Gradientenfeld der eingangs definierten Potentialfunktion  $\varphi = \int_{R_0}^r \vec{Z}(|\vec{x}|) \cdot d\vec{x}$ . • Le champs central  $\vec{Z}(r)$  est par conséquent champ de vecteurs lamellaires de la fonction de potentiel  $\varphi = \int_{R_0}^r \vec{Z}(|\vec{x}|) \cdot d\vec{x}$  que nous avons définie au début.

**Bsp.: • Exemple:** Coulombfeld: • Champ de Coulomb:  $\varphi(r) = c_0 \mathfrak{C} \frac{1}{r} + c_1$

$\leadsto$  Feldstärke: • Intensité du champ: 
$$\nabla\varphi = \varphi'_r \cdot \vec{e}_{\vec{r}} = -c_0 \mathfrak{C} \frac{1}{r^2} \cdot \vec{e}_{\vec{r}} = -c_0 \mathfrak{C} \frac{1}{r^3} \cdot \vec{r} = \frac{c_2 \vec{r}}{r^3}$$

**6.4.5 Konservative Felder und Rotation — Champs conservateurs et rotationnel**

Im Analysis-Kurs haben wir **einfach zusammenhängende Gebiete** oder **Volumen** definiert. In einem solchen Gebiet oder Volumen kann man bekanntlich beliebige Wege zwischen den selben Anfangs- und Endpunkten stetig ineinander deformieren. Ein solches Volumen sei im folgenden gegeben:

• Dans le cours d'analyse nous avons défini des **régions** ou des **volumes connexes de manière simple**. Comme nous savons, on peut, dans une telle région ou dans de tels volumes, déformer des chemins quelconques entre les mêmes points initiaux et finaux l'un dans l'autre continuellement. Soit donné un tel volume dans ce qui suit:

Sei • Soit  $\vec{F}(\vec{x}) \in \text{Cons}$ ,  $\vec{F}$  genügend oft stetig diff'bar •  $\vec{F}$  assez souvent dérivable de façon continue

$$\begin{aligned} \leadsto \exists_{\varphi} : \vec{F}(\vec{x}) &= \text{grad}(\varphi(\vec{x})) = \begin{pmatrix} \varphi'_x \\ \varphi'_y \\ \varphi'_z \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \text{rot } \vec{F}(\vec{x}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \varphi'_x \\ \varphi'_y \\ \varphi'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi''_{zy} - \varphi''_{yz} \\ \varphi''_{xz} - \varphi''_{zx} \\ \varphi''_{yx} - \varphi''_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \end{aligned}$$

denn z.B. • car p.ex.  $\varphi''_{zy} = \varphi''_{yz}$  u.s.w • etc..

Weiter unten werden wir mit Hilfe des **Satzes von Stokes** zeigen, dass in einfach zusammenhängenden Volumina gilt: • Ci-dessous nous montrerons à l'aide du **théorème de Stokes** que dans les volumes connexes de manière simple il vaut:

**Lemma: • Lemme:**  $\text{rot } \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} \in \text{Cons}$



Damit erhalten wir ein **einfaches Kriterium** um festzustellen, ob ein Feld konservativ ist, d.h. ob dort der Energiesatz gilt! Andererseits ist dies geradezu eine physikalische Forderung an eine reale Situation! (Z.B. Maxwellgleichung  $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$  in elektrischen Feldern!) • *Nous obtenons ainsi un critère simple pour constater si un champ est conservateur, c.-à.-d. si là l'équation d'énergie est respectée! Par ailleurs c'est franchement une exigence physique à une situation réelle! (P. ex. équation de Maxwell  $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$  pour les champs électriques!)*

**Satz:** • **Théorème:**      **Vor.:** • **Hyp.:**       $V$  einfach zusammenhängend • *connexe de manière simple*  
 $\vec{x} \in V, \vec{F} : \vec{x} \mapsto \vec{F}(\vec{x})$  genügend oft stetig diff'bar • *assez souvent dérivable de façon continue*

**Beh.:** • **Thè.:**       $\vec{F} \in \text{Cons} \Rightarrow \text{rot } \vec{F} = \vec{0}$

**Konsequenz:** • **Conséquence:** Hat man ein Vektorfeld mit  $\vec{F} \in \mathbb{R}^3$  gegeben, so kann man dieses Vektorfeld immer formal als Geschwindigkeitsfeld bei der Rotation eines Massepunktes um eine Axe interpretieren (das ist nicht verboten!), egal was  $\vec{F}$  wirklich bedeutet.  $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$  bedeutet, dass  $\vec{F}$  lokal nicht formal als Geschwindigkeitsfeld einer um eine Axe rotierenden Punktmasse interpretiert werden kann, denn in einem solchen Geschwindigkeitsfeld gilt  $\text{rot } \vec{F} = 2\vec{\omega} \neq \vec{0}$ , falls eine Geschwindigkeit vorhanden ist. Eine solche Rotationsbewegung kann man aber auch als **Wirbel** deuten. Daher kommen wir zu folgender anschaulichen Interpretation: • *Si on a donné un champ vectoriel avec  $\vec{F} \in \mathbb{R}^3$ , ainsi on peut interpréter toujours formellement ce champ vectoriel comme le champ de vitesse à la rotation d'un point de masse autour d'un axe, ce qui n'est pas interdit, n'importe ce que  $\vec{F}$  signifie vraiment.  $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$  signifie que  $\vec{F}$  ne peut pas être interprété localement et formellement comme champ de vitesse d'une masse de points tournant autour d'un axe, car dans un tel champ de vitesse il vaut  $\text{rot } \vec{F} = 2\vec{\omega} \neq \vec{0}$ , si jamais une vitesse existe. Mais on peut comprendre un tel mouvement de rotation aussi comme tourbillon. Par conséquent nous venons à l'interprétation suivante:*

**Folgerung:** • **Conclusion:**       $\text{rot } \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}$  „wirbelfrei“ • „libre de tourbillons“

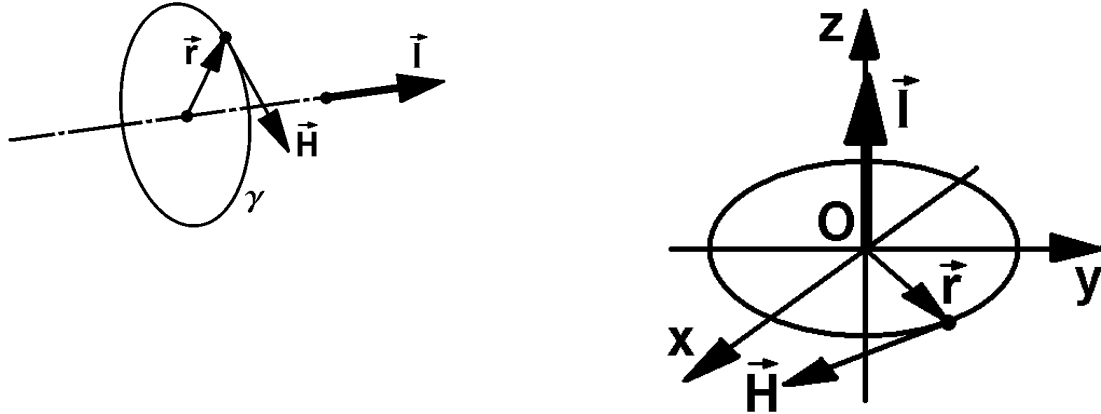
**Konsequenz:** • **Conséquence:**

Sei • *Soit*  $V$  einfach zusammenhängend und vernünftig • *connexe de manière simple et raisonnable*  
 Sei • *Soit*  $\vec{F}$  vernünftig • *raisonnable*

Der Energiesatz gilt • *L'équation d'énergie est valable*

$$\Leftrightarrow \vec{F}(\vec{x}) \in \text{Cons} \Leftrightarrow \text{rot } \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \oint_{|\gamma|} \vec{F} \cdot d\vec{x} = 0 \forall_{|\gamma| \subset V} \Leftrightarrow \exists_{\varphi(\vec{x})} : \text{grad } \varphi = \vec{F}$$

### 6.4.6 Beispiel: Stromdurchflossener Leiter — Exemple: Conducteur alimenté de courant électrique



Physik: • *Physique:*  $\vec{H} = \frac{\vec{I}}{2\pi} \times \frac{\vec{e}_r}{r}$ ,  $|\vec{r}| = r$  Sei • *Soit*  $I \neq 0$

Wähle das Koordinatensystem speziell so, dass der Strom parallel zur  $z$ -Achse fließt. • *Opter le système de coordonnées spécialement de façon que le courant circule parallèlement à l'axe  $z$ .*

$$\begin{aligned} \leadsto \vec{I} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{pmatrix}, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_r = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \vec{H} &= \frac{\vec{I}}{2\pi} \times \frac{\vec{e}_r}{r} = \frac{1}{r \cdot 2\pi} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{pmatrix} \times \left( \frac{1}{r} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{r^2 \cdot 2\pi} \cdot \begin{pmatrix} -Iy \\ Ix \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{I}{2\pi \cdot (x^2 + y^2)} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{H} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \left( \frac{I}{2\pi \cdot (x^2 + y^2)} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{I}{2\pi} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2 + y^2} \\ \frac{x}{x^2 + y^2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{I}{2\pi} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} - \left( -\frac{(x^2 + y^2) - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} \right) \end{pmatrix} = \frac{I}{2\pi} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{x^2 + y^2 - 2x^2 + x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{pmatrix} = \frac{I}{2\pi} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \\ \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{H} &\in \text{Cons} \end{aligned}$$

**Problem:** • **Problème:**

Sei • *Soit*  $|\gamma| = K_1(0)$  (Kreis um  $O$  mit  $r = 1$ ) • *(Cercle autour de  $O$  avec  $r = 1$ )*

$$\begin{aligned} \leadsto \text{Es gilt: } &\bullet \text{ Il vaut: } \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \oint_{|\gamma|} \vec{H} \cdot d\vec{x} &= \oint_{|\gamma|} \frac{I}{2\pi \cdot (x^2 + y^2)} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{I}{2\pi \cdot ((\cos(t))^2 + (\sin(t))^2)} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} \frac{I}{2\pi \cdot 1} \cdot (\sin^2(t) + \cos^2(t)) dt \end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{I}{2\pi} \cdot 1 \, dt = \frac{I \cdot 2\pi}{2\pi} = I \neq 0$$

$$\leadsto \underbrace{(\oint_{|\gamma|} \vec{H} \cdot d\vec{x} \neq 0 \Rightarrow \vec{H} \notin \text{Cons}) \wedge (\text{rot } \vec{H} = \vec{0} \Rightarrow \vec{H} \in \text{Cons})}_{|\gamma|} \Rightarrow (\vec{H} \notin \text{Cons}) \wedge (\vec{H} \in \text{Cons})$$

$\leadsto$  Widerspruch! • *Contradiction!*

$\leadsto$  Was stimmt hier nicht? • *Qu'est-ce qui est faux ici?*

**Lösung:** • **Solution:** Wieder einmal haben wir die mathematischen Voraussetzungen nicht beachtet!  $V$  ist nicht einfach zusammenhängend: Für  $r = 0$  ist  $\vec{H}$  nicht definiert, wie man sofort bemerkt.  
 • *Encore une fois nous n'avons pas respecté les conditions mathématiques!  $V$  n'est pas connexe de manière simple. Pour  $r = 0$ ,  $\vec{H}$  n'est pas défini, comme on voit tout de suite.*

Wir wollen noch die **Potentialfunktion** berechnen. Wir wissen, dass die Potentialfunktion nur von  $r$ , nicht aber vom Winkel in der  $xy$ -Ebene abhängt, denn die Projektion in diese Ebene ist ein Zentralfeld.  
 • *Nous voulons encore calculer la fonction de potentiel. Nous savons que la fonction de potentiel dépend seulement de  $r$ , mais ne dépend pas de l'angle dans le plan  $xy$ , car la projection dans ce plan est un champ central.*

Sei • *Soit*  $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix},$

$$\vec{H}(\vec{x}(t)) = \frac{I}{2\pi \cdot (r^2 \cos^2(t(r)) + r^2 \sin^2(t(r)))} \cdot \begin{pmatrix} -r \sin(t(r)) \\ r \cos(t(r)) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{I}{2\pi \cdot r^2} \cdot \begin{pmatrix} -r \sin(t(r)) \\ r \cos(t(r)) \\ 0 \end{pmatrix} = \text{grad } \varphi$$

$$\begin{aligned} \leadsto \varphi(\vec{x}) &= \int_{R_0}^r \vec{H}(\vec{x}(t)) \cdot \frac{d\vec{x}(t)}{dt} dt + C = \int_{R_0}^r \vec{H}(\vec{x}(r)) \cdot \frac{d\vec{x}(r)}{dr} dr + C = \\ &= \int_{R_0}^r \frac{I}{2\pi \cdot (\lambda^2 \cos^2(t(\lambda)) + \lambda^2 \sin^2(t(\lambda)))} \cdot \begin{pmatrix} -\lambda \sin(t(\lambda)) \\ \lambda \cos(t(\lambda)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{d\lambda} \begin{pmatrix} \lambda \cos(t(\lambda)) \\ \lambda \sin(t(\lambda)) \\ 0 \end{pmatrix} d\lambda + C = \\ &= \int_{R_0}^r \frac{I}{2\pi \lambda^2} \cdot \begin{pmatrix} -\lambda \sin(t(\lambda)) \\ \lambda \cos(t(\lambda)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t(\lambda)) - \lambda \sin(t(\lambda)) t'_\lambda \\ \sin(t(\lambda)) + \lambda \cos(t(\lambda)) t'_\lambda \\ 0 \end{pmatrix} d\lambda + C \\ &= \int_{R_0}^r \frac{I}{2\pi \lambda^2} \cdot (-\lambda \sin(t(\lambda)) \cos(t(\lambda)) + \lambda^2 \sin^2(t(\lambda)) t'_\lambda - \lambda \cos(t(\lambda)) \sin(t(\lambda)) + \lambda^2 \cos^2(t(\lambda)) t'_\lambda) d\lambda + C = \\ &= \int_{R_0}^r \frac{I}{2\pi \lambda^2} \cdot (\lambda^2 t'_\lambda) d\lambda + C = \int_{R_0}^r \frac{I}{2\pi} \cdot t'_\lambda d\lambda + C = \frac{I}{2\pi} \cdot t(\lambda) \Big|_{R_0}^r + C = \frac{I \cdot t(r)}{2\pi} + C_0 \\ &\quad \text{mit } \bullet \text{ avec } \frac{y}{x} = \tan(t(r)), \quad t(r) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow \varphi(\vec{x}) = \frac{I}{2\pi} \cdot \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + C_0 \end{aligned}$$

$$\leadsto \textbf{Lösung:} \bullet \textbf{Solution:} \quad \varphi(\vec{x}) = \frac{I}{2\pi} \cdot \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + C_0$$

Die Festlegung von  $C_0$  ist eher eine praktische Frage und sei an dieser Stelle der Physik überlassen.

• *La fixation de  $C_0$  est plutôt une question pratique et est laissée à cette place à la physique.*

## 6.5 Die Integralsätze — Les théorèmes de l'intégrale

### 6.5.1 Der Begriff Fluss — La notion de flux

#### Vorausgesetzte Begriffe — Notions supposées

Skalare sowie vektorielle Volumen- und Oberflächenintegrale wollen wir als bekannt voraussetzen:

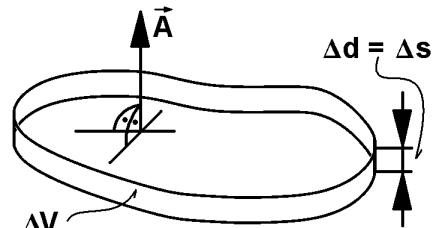
• *Nous voulons présupposer comme connues les intégrales de volume et de surface scalaires ainsi que vectorielles:*

$$\iint_A \varphi dA, \quad \iint_A \varphi d\vec{A}, \quad \iint_A \vec{a} \cdot d\vec{A}, \quad \iint_A \vec{a} \times d\vec{A}, \quad d\vec{A} = \vec{n} dA$$

Zusammenhang: • *Relation:*

$$A = \iint_A 1 dA = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta s}$$

Bsp.: • **Exemple:** Kugel • *Sphère*



$$\begin{aligned} \leadsto V(r) &= \frac{4\pi}{3} r^3, \quad A(r) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\frac{4\pi}{3} (r + \Delta s)^3 - \frac{4\pi}{3} r^3}{\Delta s} \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\frac{4\pi}{3} (r^3 + 3r^2 \Delta s + 3r \Delta s^2 + \Delta s^3) - \frac{4\pi}{3} r^3}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{4\pi}{3} (3r^2 - 3r \Delta s + \Delta s^2) = \frac{4\pi}{3} 3r^2 \\ &= 4\pi r^2 \end{aligned}$$

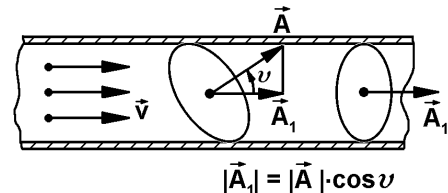
### 6.5.2 Definition des Flusses — La définition du flux

Um zu einem Verständnis des Begriffes **Fluss** zu gelangen, wollen wir ein einfaches Beispiel studieren.

• *Pour arriver à une compréhension de l'idée du flux, nous voulons étudier un exemple simple.*

Wir stellen uns folgende **Frage**: • *Nous nous posons la question suivante:*

Welches Volumen  $\Delta V$  Flüssigkeit fließt pro Zeitspanne  $\Delta t$  durch eine beliebig gegebene Querschnittsfläche  $A$  eines Rohres? • *Quel volume de liquide  $\Delta V$  coule par période  $\Delta t$  par une surface de coupe transversale  $A$  quelque donnée dans un tube?*



Es gilt (Skizze): • *Il vaut (esquisse):*  $A = |\vec{A}|$ ,  $A_n = A \cdot \cos(\theta)$ ,  $\Delta V = A_n \cdot \Delta s = |\vec{A}| \cdot \cos(\theta) \cdot |\vec{v}| \cdot \Delta t$

$\leadsto$  Volumen pro Zeit resp. „Fluss  $\Phi$ “ durch  $|\vec{A}|$ : • *Volume par temps resp. „flux  $\Phi$ “ par  $|\vec{A}|$ :*

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} \approx \frac{|\vec{A}| \cdot \cos(\theta) \cdot |\vec{v}| \cdot \Delta t}{\Delta t} = |\vec{v}| \cdot |\vec{A}| \cdot \cos(\theta) = \vec{v} \cdot \vec{A} \leadsto \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV(t)}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{A}$$

In einer zähen Flüssigkeit ist  $|\vec{v}|$  bekanntlich sehr ortsabhängig, denn die Flüssigkeit haftet an der Rohroberfläche, während sie innen schneller fließen kann. Daher müssen wir das Skalarprodukt für ein Teilvolumen pro Zeit erst lokal auf  $\Delta \vec{A}$  betrachten. Nachher summieren wir die Teile zum Gesamtvolumen pro Zeit auf. • *Dans un liquide tenace  $|\vec{v}|$  dépend fortement du lieu, comme chacun sait, car le liquide adhère à la surface du tube tandis qu'à l'intérieur il peut couler plus vite. Par conséquent nous devons*

étudier le produit scalaire pour un volume partiel par temps d'abord localement sur  $\Delta|\vec{A}|$ . Après nous additionnons les parties pour obtenir le volume total par temps.

$\leadsto$  Volumen pro Zeit resp. „Fluss“ durch  $\Delta|\vec{A}|$ : • Volume par temps resp. „flux“ par  $\Delta|\vec{A}|$ :  
 $(\Delta\vec{A}) \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \Delta\vec{A}$

Da man  $|\vec{A}|$  erhält, wenn man die Teilflächen  $\Delta|\vec{A}|$  beliebig genau aufsummiert gilt: • Comme on obtient  $|\vec{A}|$ , quand on fait la somme des pièces de surfac  $\Delta|\vec{A}|$  d'une exactitude quelconque, il vaut:

$$|\vec{A}| \approx \sum \Delta|\vec{A}| \Rightarrow |\vec{A}| = \int d|\vec{A}| \leadsto \Phi_{tot} = \frac{dV(t)_{tot}}{dt} \approx \sum \vec{v} \cdot \Delta\vec{A} \leadsto \Phi_{tot} = \frac{dV(t)_{tot}}{dt} = \iint_A \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

Damit haben wir den Grenzwert vom Volumen Flüssigkeit pro Zeit berechnet, der bei einem gegebenen Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v}$  durch eine gegebene Fläche  $A$  fließt. Diesen Grenzwert nennen wir den Fluss  $\Phi$ .

• Nous avons ainsi calculé la valeur limite du volume d'un liquide par temps, liquide qui coule dans un champ de vitesse  $\vec{v}$  donné par une surface  $A$  donnée. Nous appelons cette valeur limite flux  $\Phi$ .

Wenn wir nun nicht ein Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit  $\vec{v}$ , sondern ein beliebiges Vektorfeld und ebenfalls eine Fläche  $A$  haben, so ist es nicht verboten  $\vec{v}$  als Geschwindigkeit zu interpretieren und genauso den Fluss  $\Phi = \frac{dV(t)}{dt}$  zu berechnen. Ob tatsächlich etwas fließt, ist so eine Frage der Interpretation. (In der Physik früherer Jahrhunderte gab es die heute verworfene Äthertheorie, wo man diesem Fließen Realitätswert zugestanden hat.)

• Si maintenant nous n'avons pas un champ de vitesse d'un liquide  $\vec{v}$  mais un champ vectoriel quelconque et aussi une surface  $A$ , ainsi il n'est pas interdit d'interpréter  $\vec{v}$  comme la vitesse, et également de calculer le flux  $\Phi = \frac{dV(t)}{dt}$ . S'il y a vraiment quelque chose qui coule, est donc une question d'interprétation. (Dans la physique des siècles passés, il y a eu la théorie des éthers aujourd'hui repoussée, où on donnait une valeur de réalité à cet écoulement.)

Daher definieren wir für ein beliebig gegebenes vernünftiges Vektorfeld  $\vec{u}$  und eine ebenfalls gegebene Fläche  $A$ : • Par conséquent nous définissons pour un champ vectoriel raisonnable  $\vec{u}$ , donné de manière quelconque, et pour une surface  $A$  aussi donnée librement:

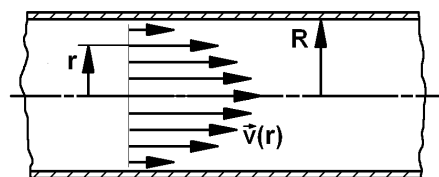
**Definition:** • **Définition:**  $\Phi := \iint_A \vec{u} \cdot d\vec{A} = \iint_A \vec{u} \cdot \vec{n} dA$   
 heisst **Fluss** von  $\vec{u}$  durch  $A$  • s'appelle **flux** de  $\vec{u}$  à travers  $A$

**Konsequenz:** • **Conséquence:** Da das Skalarprodukt unabhängig ist von der Lage des Koordinatensystems, ist auch der Fluss  $\Phi$  unabhängig von der Lage des Koordinatensystems.

• Comme le produit scalaire est indépendant de la posture du système de coordonnées, le flux  $\Phi$  aussi est indépendant de la posture du système de coordonnées.

**Bsp.:** • **Exemple:**

In einem runden Rohr mit Durchmesser  $R$  fließt eine zähe Flüssigkeit. • Dans un tube rond du diamètre  $R$  coule un liquide tenace.



Sei • Soit  $|\vec{v}(r)| = v(r) = (R^2 - r^2) \cdot k$

$$\leadsto d\Phi = v(r) \cdot dA = v(r) \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr, \quad \vec{v} \parallel d\vec{A} \Rightarrow \Phi = \iint_A \vec{v} \cdot d\vec{A} = \iint_A v(r) \cdot dA = \int_0^R v(r) \cdot 2\pi \cdot r \, dr =$$

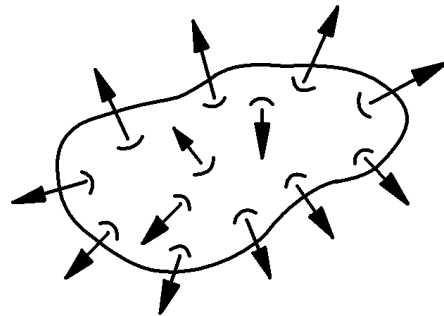
$$2\pi \int_0^R (R^2 - r^2) \cdot k \cdot r \, dr = 2\pi \cdot k \int_0^R R^2 \cdot r - r^3 \, dr = 2\pi \cdot k \left( R^2 \cdot \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^R = \frac{2\pi \cdot k \cdot R^4}{4} = \frac{\pi \cdot k \cdot R^4}{2}$$

### 6.5.3 Fluss durch geschlossene Flächen — Flux à travers des surfaces fermées

#### Begriff, Symbole — Notion, symboles

Die Oberfläche einer Kugel oder einer Kartoffel sind bekanntlich **geschlossen**. Oberflächen von endlichen Körpern sind geschlossen. • *La surface d'une boule ou d'une pomme de terre est fermée, comme chacun sait. Les surfaces de corps finis sont fermées.*

**Konvention:** • **Convention:** Wir halten es hier so, dass bei einer geschlossenen Fläche der Oberflächenvektor  $d\vec{A}$  **nach aussen gerichtet** ist. • *Ici, nous convenons ainsi que pour une surface fermée le vecteur de surface  $d\vec{A}$  est dressé en dehors.*

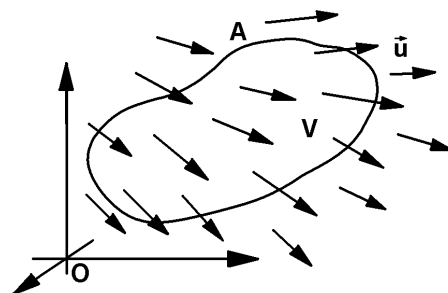


**Symbol:** • **Symbole:** Für **Integrale über geschlossene Flächen** schreiben wir: • *Pour les intégrales sur des surfaces fermées nous écrivons:*  $\oiint \vec{u} \cdot d\vec{A}$  oder • *ou*  $\oiint_A \vec{u} \cdot d\vec{A}$

#### Quellen, Senken — Sources, dépressions

Der „gesunde Menschenverstand“ führt uns zur Idee, dass eine Menge eines Medium, die über längere Zeit auf der einen Seite durch die Oberfläche in einen geschlossenen Körper hineinfließt resp. hineindiffundiert, auf der anderen Seite wieder einmal herausfließen muss oder herausdiffundieren muss. Denn, so denkt man sich, ein Körper kann ja nicht beliebig viel speichern, einmal muss Schluss sein. Wenn dem nicht so ist, so muss im Innern entweder Medium einerseits in „Senken“ verwandelt oder vernichtet — oder andererseits in „Quellen“ erzeugt werden. Und genau diese Situation werden wir bei Vektorfeldern beobachten. Daher definieren wir: • *Le "sens commun" nous mène à l'idée qu'une quantité d'un médium, qui pénètre pendant un certain temps par une surface dans un corps fermé, doit une fois sortir de l'autre côté. Car, ainsi on pense, un corps ne peut pas absorber infiniment de "matière", il doit être saturé une fois. Si ce n'est pas ainsi, le médium doit donc se transformer ou se détruire dans des "dépressions" d'un côté ou — ou par ailleurs être produit dans des "sources". Et c'est exactement cette situation que nous observerons aux champs vectoriels. Par conséquent nous définissons:*

Gegeben sei ein Vektorfeld  $\vec{u}$  und ein Körper resp. Volumen  $V$  mit der Oberfläche  $A$ . Wir sagen: • *Soit donné un champ vectoriel  $\vec{u}$  et un corps resp. un volume  $V$  avec la surface  $A$ . Nous disons:*



**Definition: • Définition:**

Ist  $\Phi > 0$ , so überwiegen in  $V$  die **Quellen**. Ist  $\Phi < 0$ , so überwiegen die **Senken**. Ist  $\Phi = 0$ , so sind die Quellen gleich den Senken. • *Si on a  $\Phi > 0$  dans  $V$ , les **sources** dominant. Si par contre on a  $\Phi < 0$ , les **dépressions** dominant. Si on a  $\Phi = 0$ , les sources sont égales aux dépressions.*

Da der Fluss von Vektorfeldern der Physik eine bedeutende Rolle spielt, steht man vor dem bekannten Problem der Berechnung von Oberflächenintegralen. Hier greifen die **Integralsätze**, mit Hilfe derer sich Oberflächenintegrale in einfacher berechenbare Volumenintegrale verwandeln lassen. • *Comme le flux de champs vectoriels de la physique joue un rôle important, on se trouve face au problème connu du calcul d'intégrales de surface. Ici les **théorèmes d'intégrale** interviennent, à l'aide desquels les intégrales de surface se laissent transformer en intégrales de volume calculables de manière plus simple.*

#### 6.5.4 Anwendung: Wieso r-Quadrat-Gesetze? — Application: Pourquoi des lois de r au carré?

**Problem: • Problème:** Beim Coulomb-Gesetz und beim Gravitationsgesetz handelt es sich um Gesetze, die die Kraft in Zentralfeldern beschreiben. Wieso steht bei diesen Gesetzen exakt  $r^2$  im Nenner und nicht  $r^{1.99999999886}$  oder  $r^{2.0000000003658}$ ? • *Quant à la loi de Coulomb et dans le cas de la loi de gravitation, il s'agit de lois, qui décrivent la force dans les champs centraux. Pourquoi dans ces lois y a-t-il comme dénominateur exactement  $r^2$  et non pas p. ex.  $r^{1.99999999886}$  ou  $r^{2.0000000003658}$ ?*

Z.B. Gravitationsgesetz • *P.ex. loi de gravitation*  $\vec{F} = \gamma \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \vec{e}_r$

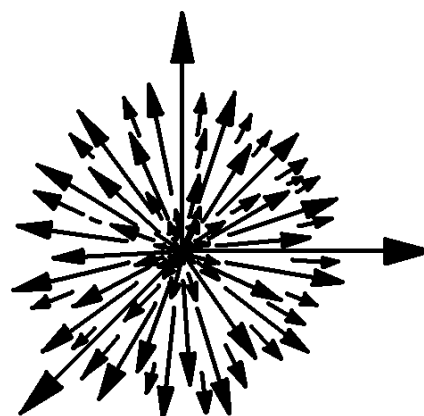
**Untersuchung: • Examination:**

Gegeben sei ein Zentralfeld mit der Feldstärke  $\vec{u} = \vec{u}(r)$ . • *Soit donné un champ central avec la force de champ  $\vec{u} = \vec{u}(r)$ .*

**Idee: • Idée:**

Folgende Vorstellung scheint sinnvoll in quellenfreien Zonen des Feldes: Der Fluss  $\Phi$  ist unabhängig von  $r > 0$  durch jede geschlossene Fläche um das Feldzentrum konstant.

• *L'idée suivante paraît sensée dans des zones du champ qui sont libres de sources: Le flux  $\Phi$  est constant indépendamment de  $r > 0$  dans chaque surface fermée autour du centre de champ.*



Seien  $A(r_1)$  und  $A(r_2)$  zentrische Sphären um den Ursprung des Zentralfeldes. • *Soient  $A(r_1)$  et  $A(r_2)$  des sphères centrales à l'origine du champ central.*

$$\leadsto \Phi_{A(r_1)} = \Phi_{A(r_2)} \text{ resp. } \bullet \text{ resp. } \Phi_{r_1} = \Phi_{r_2} = \Phi_r = \text{const.} = c = \oiint_{A(r_1)} \vec{u} \cdot d\vec{A} = \oiint_{A(r_2)} \vec{u} \cdot d\vec{A}$$

$$\text{Sei } \bullet \text{ Soit } \vec{n} \perp \text{ Sphäre } \bullet \text{ sphère } \leadsto \vec{u}(r) \parallel \vec{n} \parallel \vec{n} \cdot d\vec{A} \Rightarrow c = \oiint_{A(r)} (\vec{u} \cdot \vec{n}) \cdot dA$$

Dabei gilt mit  $|\vec{n}| = 1$ : • *Il vaut avec  $|\vec{n}| = 1$ :*  $\vec{u}(r) \cdot \vec{n} = |\vec{u}(r)| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos(0) = |\vec{u}(r)| \cdot 1 \cdot 1 = |\vec{u}(r)| = u(r)$

Für  $r = r_0$  ist jetzt: • *Maintenant on obtient pour  $r = r_0$ :*

$$c = \iint_{A(r_0)} u(r_0) \cdot dA = u(r_0) \iint_{A(r_0)} dA = u(r_0) \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow u(r) = \frac{c}{4\pi r^2} = \frac{k}{r^2}, \quad k = \frac{c}{4\pi}$$

$$\Rightarrow \vec{u}(r) = \frac{k}{r^2} \cdot \vec{e}_{\vec{r}}$$

**Konsequenz:** • **Conséquence:**

In einem Zentralfeld mit der Feldstärke  $\vec{u} = \vec{u}(r)$  und einer zentralen Quelle oder Senke im Ursprung gilt:  
• *Dans un champ central avec la force de champ  $\vec{u} = \vec{u}(r)$  et une source ou dépression dans l'origine il vaut:*

$$\vec{u}(r) = \frac{k}{r^2} \cdot \vec{e}_{\vec{r}}, \quad u(r) = \frac{k}{r^2}$$

**Bsp.:** • **Exemple:** Gravitationsgesetz: • *Loi de gravitation:*

$\vec{F} = \gamma \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \vec{e}_{\vec{r}} = m \cdot \vec{u}(r) \Rightarrow \vec{u}(r) = \gamma \frac{M}{r^2} \cdot \vec{e}_{\vec{r}} := \vec{g}(r) \rightsquigarrow$  Gravitationsfeldstärke oder Gravitationsbeschleunigung. • *Force de champ de gravitation ou accélération de gravitation.*

Für das Coulomb-Feld ist die Situation analog. • *Pour le champ de Coulomb la situation est analogue.*

**Wichtig:** • **Important:** Dem Gesetz liegt also die Annahme zu Grunde, dass der Fluss unabhängig von  $r$  durch eine Sphäre um das Zentrum konstant ist. • *La base de la loi est donc la supposition que le flux par une sphère autour du centre est constante indépendamment de  $r$ .*

### 6.5.5 Übersicht über die Integralsätze — Aperçu des théorèmes de l'intégrale

Wir wollen hier zuerst eine Übersicht über die Integralsätze geben und auf die Beweise erst weiter hinten eintreten. • *Ici nous voulons d'abord donner un aperçu des théorèmes de l'intégrale. Les preuves seront considérées plus tard et en bas.*

Seien im Folgenden die verwendeten Funktionen und Volumina „vernünftig“ in dem Sinne, dass alle notwendigen verwendeten Ableitungen existieren, gegebenenfalls stetig sind und auch die Oberflächen genügend glatt und nicht fraktal zerzaust sind. • *Dans ce qui suit les fonctions et les volumes appliqués soient raisonnables dans le sens que toutes les dérivées nécessaires et utilisées existent, qu'elles soient assez continues, et aussi les surfaces soient assez lisses et non pas mouvementées de la manière des fractales.*

Mit Hilfe des **Divergenzsatzes** oder **Satzes von Gauss** lassen sich bei Körpern Oberflächenintegrale in einfacher berechenbare Volumenintegrale umschreiben: • *A l'aide du théorème de la divergence ou théorème de Gauss on peut transcrire pour des volumes donnés des intégrales de surface en intégrales de volume calculables de manière plus simple:*



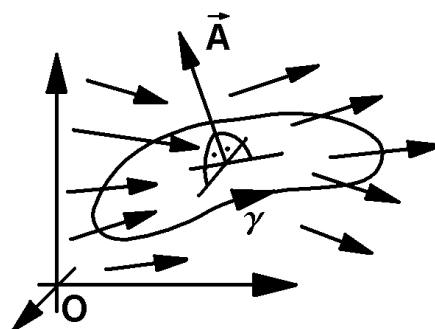
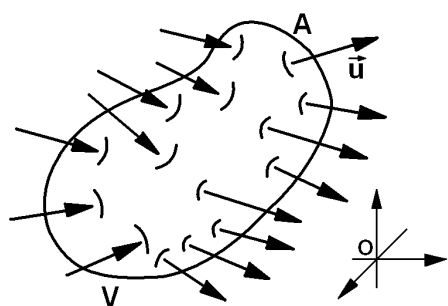
**Satz:** • **Théorème:**      **Vor.:** • **Hyp.:**

Sei  $A$  eine geschlossene Fläche, durchflossen von einem Vektorfeld  $\vec{u}$  • *Soit  $A$  une surface fermée, à travers laquelle coule un champ vectoriel  $\vec{u}$*

$\Phi_{\vec{u}}$  = Fluss • *flux*

**Beh.:** • **Thè.:**

$$\Phi_{\vec{u}} = \oint_A \vec{u} \cdot d\vec{A} = \oint_A \vec{u} \cdot V\vec{n} dA = \iiint_V \nabla \cdot \vec{u} dV = \iiint_V \operatorname{div} \vec{u} dV$$



Mit Hilfe des **Rotationssatzes** oder **Satzes von Stokes** lassen sich bei Flächen, die durch eine Kurve  $\gamma$  umrandet sind, Oberflächenintegrale in einfacher berechenbare Kurvenintegrale umschreiben. • *A l'aide du théorème du rotationnel ou théorème de Stokes pour des surfaces données et bordées d'une courbe  $\gamma$ , on peut transcrire des intégrales de surface en intégrales curvilignes calculables de manière plus simple.*

Sei hier  $A$  **orientiert** und  $\gamma$  habe bezüglich der Orientierung von  $A$  einen positiven Umlaufsinn (Gegenuhrzeigersinn). • *Ici  $A$  soit orientée et par rapport à l'orientation de  $A$   $\gamma$  ait une circulation positive (contre - sens des aiguilles d'une montre).*

**Satz:** • **Théorème:**      **Vor.:** • **Hyp.:**

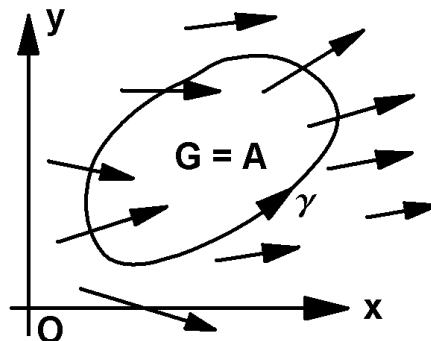
Die orientierte Fläche  $A$  habe den Rand  $|\gamma|$  mit positivem Umlaufsinn und sei durchflossen von einem Vektorfeld  $\vec{u}$  • *Soit  $A$  une surface orientée avec le bord  $|\gamma|$  avec circulation positive et soit traversée par un champ vectoriel  $\vec{u}$*

$\Phi_{\operatorname{rot} \vec{u}}$  = Fluss von • *flux de  $\operatorname{rot} \vec{u}$*

**Beh.:** • **Thè.:**

$$\Phi_{\operatorname{rot} \vec{u}} = \iint_A \operatorname{rot} \vec{u} \cdot d\vec{A} = \iint_A (\nabla \times \vec{u}) \cdot \vec{n} dA = \oint_{|\gamma|} \vec{u} \cdot d\vec{x}$$

Ein Spezialfall des Satzes von Stokes für die Grundebene ist der **Satz von Green**: • *Un cas spécial du théorème de Stokes pour le plan fondamental est le **théorème de Green**:*



**Satz:** • **Théorème:**      **Vor.:** • **Hyp.:**

Das Gebiet  $G$  in der Grundebene habe den Rand  $|\gamma|$  mit positivem Umlaufsinn und sei durchflossen von einem Vektorfeld  $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1(x, y) \\ u_2(x, y) \end{pmatrix}$  • *La région  $G$  dans le plan fondamental ait le bord  $|\gamma|$  avec circulation positive soit traversé d'un champ vectoriel  $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1(x, y) \\ u_2(x, y) \end{pmatrix}$*

**Beh.:** • **Thè.:**

$$\iint_G \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{|\gamma|} \vec{u} \cdot d\vec{x} = \oint_{|\gamma|} u_1 dx + u_2 dy$$

### 6.5.6 Die Sektorformel — La formule de secteur

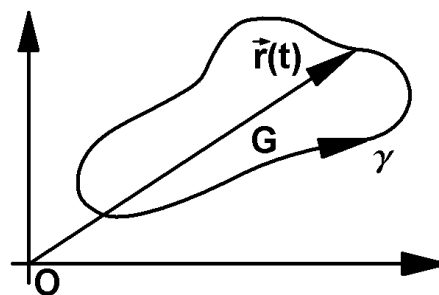
Mit Hilfe des Satzes von Green lassen sich Flächen berechnen: • *A l'aide du théorème de Green on peut calculer des surfaces:*

Green: 
$$\iint_G \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{|\gamma|} \vec{u} \cdot d\vec{x} = \oint_{|\gamma|} u_1 dx + u_2 dy$$

Wähle: • *Choisir:*

$$u_1 = \alpha \cdot y, \quad u_2 = (1 + \alpha) \cdot x, \\ \alpha \in \mathbb{C}, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [t_1, t_2]$$

$\leadsto$  Flächeninhalt: • *Mesure de la surface:*



$$|G| = \iint_G 1 dx dy = \iint_G (1 + \alpha - \alpha) dx dy = \iint_G \left( \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{|\gamma|} u_1 dx + u_2 dy = \oint_{|\gamma|} \vec{u} \cdot d\vec{r}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_1}^{t_2} \vec{u} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_t' \\ y_t' \end{pmatrix} dt = \int_{t_1}^{t_2} (u_1(x(t), y(t)) \cdot x_t' + u_2(x(t), y(t)) \cdot y_t') dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} (\alpha \cdot y(t) \cdot x_t' + (1 + \alpha) \cdot x(t) \cdot y_t') dt \quad \Rightarrow \quad |G| = \int_{t_1}^{t_2} (\alpha \cdot y(t) \cdot x_t' + (1 + \alpha) \cdot x(t) \cdot y_t') dt, \quad \alpha \in \mathbb{C}
\end{aligned}$$

**Formel:** • **Formule:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$\gamma : t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [t_1, t_2]$  vernünftige Randkurve von  $G$  mit positivem Umlaufsinn • *courbe de bord raisonnable de  $G$  avec une direction de circulation positive,  $\alpha \in \mathbb{C}$*

**Beh.:** • **Thè.:**

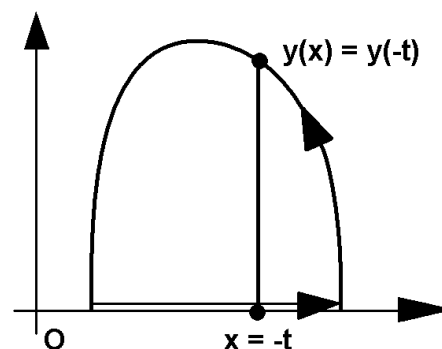
$$|G| = \int_{t_1}^{t_2} (\alpha \cdot y(t) \cdot x_t' + (1 + \alpha) \cdot x(t) \cdot y_t') dt$$

**Konsequenz:** • **Conséquence:** Speziell für  $\alpha = 0$  oder für  $\alpha = -1$  ergeben sich die Formeln:  
• *Spécialement pour  $\alpha = 0$  ou pour  $\alpha = -1$  on obtient les formules:*

$$|G| = \int_{t_1}^{t_2} x(t) \cdot y_t' dt \quad \text{oder} \quad \bullet \quad \text{ou} \quad |G| = - \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x_t' dt$$

Spezialfall: • *Cas spécial:*  $x(t) = -t, \quad t \in [t_1, t_2] \quad x(t) = t \wedge y(t) = 0, \quad t \in [t_2, t_3]$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow |G| &= - \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x_t' dt + 0 = + \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot 1 dt \\
&= + \int_{x_1}^{x_2} y(x) dx
\end{aligned}$$



**Achtung:** • **Attention:** Der positive Umlaufsinn der Randkurve hat eine Umkehrung der Integrationsrichtung beim klassischen Integral zur Folge. • *La direction de circulation positive de la courbe de bord a par conséquent un renversement de la direction d'intégration à l'intégrale classique.*

**Bsp.:** • **Exemple:** Kontrolle der Formel mit Kreis: • *Contrôle de la formule avec le cercle:*

$$\begin{aligned}
r &= 1, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 2\pi, \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad \leadsto \quad |G| = \int_{t_1}^{t_2} (\alpha \cdot y(t) \cdot x_t' + (1 + \alpha) \cdot x(t) \cdot y_t') dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\alpha \cdot \sin(t) \cdot (-\sin(t)) + (1 + \alpha) \cdot \cos(t) \cdot \cos(t)) dt = \int_0^{2\pi} -\alpha \cdot \sin^2(t) + (1 + \alpha) \cdot \cos^2(t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-1) \cdot \alpha \cdot (1 - \cos^2(t)) + (1 + \alpha) \cdot \cos^2(t) dt = \int_0^{2\pi} -\alpha + \alpha \cdot \cos^2(t) + \cos^2(t) + \alpha \cdot \cos^2(t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt = \pi \quad \Rightarrow \quad |G| = -\alpha \cdot 2\pi + \alpha \cdot \pi + \pi + \alpha \cdot \pi = \pi \leadsto \quad \checkmark \quad \text{☺}
\end{aligned}$$

### 6.5.7 Konsequenzen aus den Integralsätzen — Conséquences des théorèmes de l'intégrale

Eine Folgerung aus dem Satz von Gauss ist die Formel für die **koordinatenfreie Darstellung der Divergenz**: • *La formule pour la représentation de la divergence sans coordonnées est une conclusion du théorème de Gauss:*

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung und dem Satz von Gauss gilt: • *D'après le théorème de la moyenne du calcul intégral et le théorème de Gauss il vaut:*

$$\Delta V \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta A \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left( \frac{\Phi_{\vec{u}}}{\Delta V} \right) &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left( \frac{\oint_A \vec{u} \cdot d\vec{A}}{\Delta V} \right) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left( \frac{\iiint_V \operatorname{div} \vec{u} dV}{\Delta V} \right) = \operatorname{div} \vec{u} = \nabla \cdot \vec{u} \\ \Rightarrow \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left( \frac{\Phi_{\vec{u}}}{\Delta V} \right) &= \frac{d\Phi_{\vec{u}}}{dt} = \operatorname{div} \vec{u} \end{aligned}$$

**Korollar:** • **Corollaire:**

**Vor.:** • **Hyp.:**

Sei  $V$  das Volumen eines „Körpers“ mit  $\Delta V \rightarrow 0$ ,  $\Delta A \rightarrow 0$   
• *Soit  $V$  le volume d'un "corps" avec  $\Delta V \rightarrow 0$ ,  $\Delta A \rightarrow 0$*

**Beh.:** • **Thè.:**

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{d\Phi_{\vec{u}}}{dt}$$

**Konsequenz:** • **Conséquence:**

1.  $\frac{d\Phi_{\vec{u}}}{dt}$  ist unabhängig von der Lage des Koordinatensystems. • *est indépendant de la situation du système de coordonnées.*
2. Bei einem Körper (geschlossene Oberfläche) bedeutet  $\bar{\Phi}_V = \frac{\Phi}{V}$  den gesamten Fluss pro Volumen, der eigentlich 0 sein sollte, wenn gleichviel in den Körper hineinfließt wie auch hinausfließt. Im andern Fall kann dieser Quotient  $\bar{\Phi}_V$  offensichtlich als Mass für die **mittlere Quellstärke** interpretiert werden. Ist  $\bar{\Phi}_V$  positiv, so gibt es mehr Quellen als Senken. Wenn  $\bar{\Phi}_V$  negativ ist, so gibt es mehr Senken als Quellen. Wenn man den Grenzwert  $\Delta V \rightarrow 0$  bildet, so kommt man daher zum Begriff der **lokalen Quellstärke**. • *Pour un corps (surface fermée)  $\bar{\Phi}_V = \frac{\Phi}{V}$  signifie le flux par volume total, qui proprement dit devrait être 0, si la même quantité de médium entre dans le corps et aussi en sort. Dans l'autre cas, on peut interpréter ce quotient  $\bar{\Phi}_V$  évidemment comme mesure pour la force de source moyenne. Si  $\bar{\Phi}_V$  est positif, il y a donc plus de sources que de dépressions. Si  $\bar{\Phi}_V$  est négatif, il y a donc plus de dépressions que de sources. Si on forme la valeur de limite  $\Delta V \rightarrow 0$ , on arrive à l'idée de la force de source locale.*

Sei • *Soit  $P = P(x, y, z) = (x, y, z) \in \Delta V$ ,  $\Delta V \rightarrow 0$*

$$\Rightarrow P(x, y, z) = (x, y, z) \rightarrow P(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, z_0) = P_0$$

**Definition:** • **Définition:**

$$\Phi'_V = \frac{d\Phi}{dV} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta V} \text{ heisst lokale Quellstärke in } P_0$$

• *s'appelle force de source locale à  $P_0$*

Die Quellstärke öffnet uns einen ganz neuen Zugang zur Divergenz: • *La force de source nous ouvre un accès tout à fait nouveau à la divergence:*

**Konsequenz:** • **Conséquence:** Interpretation der **Divergenz** • *Interprétation de la divergence:*

1. Die **Divergenz** in einem Punkt hat die Bedeutung der **Quellstärke** in diesem Punkt.  
• *La divergence dans un point a la signification de la force de source dans ce point.*
2.  $\operatorname{div} \vec{u} = 0$  heisst, dass  $\vec{u}$  quellen- und senkenfrei ist. • *signifie que  $\vec{u}$  est libre de sources et de dépressions.*

**1. Beispiel:** • **Exemple 1:**

Sei • *Soit*  $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \text{const.} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{u} = 0 \leadsto$  quellenfrei. • *libre de sources.*

**2. Beispiel:** • **Exemple 2:** Sei • *Soit*  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} \omega_2 z - \omega_3 y \\ \omega_3 x - \omega_1 z \\ \omega_1 y - \omega_2 x \end{pmatrix} = \text{const.} \Rightarrow$   
 $\operatorname{div} \vec{\omega} = (\omega_2 z - \omega_3 y)'_x + (\omega_3 x - \omega_1 z)'_y + (\omega_1 y - \omega_2 x)'_z = 0 + 0 + 0 = 0 \leadsto$  quellenfrei. • *libre de sources.*

### 6.5.8 Quellenfreie Potentialfelder — Champs de potentiel libres de sources

Sei  $\vec{u}$  konservativ (d.h. Potential- oder Gradientenfeld) und quellenfrei.  $\varphi$  sei dazu eine Potentialfunktion, die ja sicher existiert. • *Soit  $\vec{u}$  conservateur (c.-à-d. champs de vecteurs lamellaires ou de potentiel) et en plus libre de sources. Soit  $\varphi$  une fonction de potentiel pour  $\vec{u}$ , qui existe sûrement.*

$$\leadsto \operatorname{grad} \varphi = \vec{u}, \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0 \Rightarrow \operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = \Delta \varphi = 0$$

**Satz:** • **Théorème:**      **Vor.:** • **Hyp.:**       $\varphi$  Potentialfunktion eines quellenfreien konservativen Vektorfeldes. •  *$\varphi$  fonction de potentiel d'un champ vectoriel conservateur et libre de sources.*

**Beh.:** • **Thè.:**       $\Delta \varphi = 0$

**Bsp.:** • **Exemple:**      **Coulombfeld** • **Champ de Coulomb**

$$\vec{F} = k \cdot \frac{q \cdot Q}{r^3} \cdot \vec{r}, \quad \text{Feldstärke: } \bullet \text{ Force de champ: } \vec{E} = k \cdot \frac{Q}{r^3} \cdot \vec{r} = k_1 \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\leadsto \text{Potentialfunktion: } \bullet \text{ Fonction de potentiel: } \varphi^*(x, y, z) = \varphi(r) = k_1 \cdot \frac{1}{r} + C,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x} E_1 + \frac{\partial}{\partial y} E_2 + \frac{\partial}{\partial z} E_3$$

Z.B. • *P.ex.*  $\frac{\partial}{\partial x} E_1 = k_1 \frac{1 \cdot r^3 - x \cdot 3r^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r} \cdot 2x}{r^6} = k_1 \left( \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} \right)$  Dieses Ergebnis lässt sich für  $y$  und  $z$  durch zyklische Vertauschung umschreiben. • *Ce résultat se laisse réécrire pour  $y$  et  $z$  par échange cyclique.*  $\leadsto \frac{\partial}{\partial x} E_2 = k_1 \left( \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5} \right)$  u.s.w • *etc..*

$$\begin{aligned} \leadsto \Delta\varphi = \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\partial}{\partial x} E_1 + \frac{\partial}{\partial y} E_2 + \frac{\partial}{\partial z} E_3 = k_1 \left( \frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} \right) = k_1 \left( \frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5} \right) \\ &= k_1 \left( \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} \right) = 0 \Rightarrow \Delta\varphi = 0 \quad \text{für } \bullet \text{ pour } r \neq 0 \end{aligned}$$

**Konsequenz:** • **Conséquence:** Das Coulombfeld einer Zentralladung ist für  $r \neq 0$  quellenfrei. Dasselbe gilt für das Gravitationsfeld einer Punktmasse, denn die Feldstärke berechnet sich hier formal gleich wie beim Coulombfeld. • *Le champ de Coulomb d'une charge centrale est libre de sources pour  $r \neq 0$ . La même chose vaut pour le champ de gravitation d'une masse ponctuelle, car la force de champ se calcule formellement de la même façon que pour le champ de Coulomb.*

### 6.5.9 Beispiele zu Stokes — Exemples concernant Stokes

1. **Durchflutungsgesetz:** Der Strom  $I$  ist die Flächendichte des magnetischen „Impulses“  $\vec{H}$ ,  $\vec{j}$  ist dabei die Stromdichte: • **Loi du flux:** *le courant  $I$  est la densité de surface de l'impulsion magnétique  $\vec{H}$ ,  $\vec{j}$  la densité du courant:*

$$I = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = \oint_{|\gamma|} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \operatorname{rot} \vec{H} \cdot d\vec{A} \Rightarrow \vec{j} = \operatorname{rot} \vec{H}$$

2. **Induktionsgesetz:**  $U$  ist die Spannung,  $\vec{B}$  ist die magnetische Flussdichte,  $\vec{E}$  die elektrische Feldstärke: • **Loi d'induction:**  *$U$  est la tension,  $\vec{B}$ , est la densité du flux magnétique,  $\vec{E}$  la force du champ électrique:*

$$\leadsto U = \oint_{|\gamma|} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \iint_A \left( -\frac{d}{dt} \vec{B} \right) \cdot d\vec{A}$$

$$\text{Stokes} \leadsto \oint_{|\gamma|} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_A \operatorname{rot} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iint_A \left( -\frac{d}{dt} \vec{B} \right) \cdot d\vec{A} \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

Spezialfall: • *Cas spécial:*  $\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \text{const.}$  (Coulombfeld) • *(Champ de Coulomb!)*

### 6.5.10 Abgeleitete Formeln — Formules dérivées

**Formeln:** • **Formules:**

1. **Erste Greensche Formel:** • **Première formule de Green:**

$$\iiint_V \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \psi \, dV = \oint_A (\varphi \operatorname{grad} \psi) \cdot d\vec{A} - \iiint_V \varphi \Delta \psi \, dV$$

Diese Formel ist das Analogon zur **partiellen Integration** im  $\mathbb{R}^3$ . • *Cette formule est l'analogue de l'intégration partielle dans le  $\mathbb{R}^3$ .*

Andere Fassung: • *Forme différente:*

$$\oint_A (\varphi \nabla \psi) \cdot d\vec{A} = \iiint_V (\nabla \varphi \cdot \nabla \psi + \varphi \Delta \psi) \, dV$$

(Beweis: Setze im Satz von Gauss: • *Preuve: Substituer dans le théorème de Gauss:  $\vec{u} = \varphi \cdot \nabla \psi$* )

$$2. \quad \oint_A (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi) d\vec{A} = \iiint_V (\varphi [\psi - \psi \triangle \psi]) dV$$

(Beweis: Schreibe die erste Formel einmal mit  $\varphi \nabla \psi$  und einmal mit  $\psi \nabla \varphi$  und subtrahiere.

• *Preuve: Ecrire la première formule une fois avec  $\varphi \nabla \psi$  et une autre fois avec  $\psi \nabla \varphi$  et soustraire.*

$$3. \quad \oint_A (\vec{n} \times \vec{u}) dA = \oint_A d\vec{A} \times \vec{u} = \iiint_V \nabla \times \vec{u} dV = \iiint_V \text{Rot} \vec{u} dV$$

$$4. \quad \iint_A d\vec{A} \times \nabla \varphi = \iint_A (\vec{n} \times \nabla \varphi) dA = \oint_{|\gamma|} \varphi d\vec{r}$$

5. In den nachstehenden Formeln steht „ $\otimes$ “ für Skalarprodukt, Vektorprodukt oder auch Zahlenprodukt. Entsprechend steht z.B.  $\tilde{\psi}$  für einen Vektor oder eine Skalarfunktion. Daher hat man im Folgenden je 6 Formeln in einer geschrieben. • *Dans les formules suivantes „ $\otimes$ “ signifie produit scalaire, produit vectoriel ou bien produit de nombres. P. ex.  $\tilde{\psi}$  signifie une fonction scalaire ou vectorielle. Par conséquent, dans les formules suivantes on écrit 6 formules dans une seule formule.*

$$(a) \quad \oint_A d\vec{A} \otimes \tilde{\psi} = \oint_A (\vec{n} \otimes \tilde{\psi}) dA = \iiint_V \nabla \otimes \tilde{\psi} dV$$

**Achtung:** Das Vektorprodukt ist nicht kommutativ. • **Attention:** *Le produit vectoriel n'est pas commutatif.*

$$(b) \quad \iint_A (\vec{n} \times \nabla) \otimes \tilde{\psi} dA = \iint_A (d\vec{A} \times \nabla) \otimes \tilde{\psi} = \oint_{|\gamma|} d\vec{r} \otimes \tilde{\psi}$$

Die Nachrechnung ist dem Leser überlassen. • *Le contrôle est laissé au lecteur.*

### 6.5.11 Koordinatenunabhängige Definition der Rotation — Définition du rotationnel indépendante de coordonnées

Wir benutzen: • *Nous utilisons:*  $\oint_A d\vec{A} \otimes \tilde{u} = \iiint_V \nabla \otimes \tilde{u} dV$ ,  $\tilde{u} = \vec{u}$ ,  $'\otimes' = ' \times '$

$$\leadsto \oint_A d\vec{A} \times \vec{u} = \iiint_V \nabla \times \vec{u} dV = \iiint_V \text{rot} \vec{u} dV$$

Diese Gleichung ist eine Vektorgleichung. Wir wollen noch am Beispiel der 3. Komponente ihre Richtigkeit kontrollieren: • *Cette équation est une équation vectorielle. Nous voulons la contrôler à l'exemple de la troisième composante:*

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad d\vec{A} = \begin{pmatrix} dA_1 \\ dA_2 \\ dA_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dA_x \\ dA_y \\ dA_z \end{pmatrix}$$

$$3. \text{ Zeile: } \bullet \text{ 3-ième ligne: } \oint_A dA_1 \cdot u_2 - dA_2 \cdot u_1 \stackrel{?}{=} \iiint_V ((u_2)'_x - (u_1)'_y) dV$$

Um diese Gleichung zu verifizieren wenden wir den Satz von Gauss auf den folgenden Vektor  $\vec{v}$  an:

• *Pour vérifier cette équation, nous appliquons le théorème de Gauss au vecteur  $\vec{v}$  suivant:*

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} u_2 \\ -u_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \oint_A \vec{v} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \text{div} \vec{v} dV \quad \leadsto$$

$$\leadsto \oint_A \begin{pmatrix} u_2 \\ -u_1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dA_1 \\ dA_2 \\ dA_3 \end{pmatrix} = \oint_A u_2 dA_1 - u_1 dA_2 = \iiint_V \text{div} \begin{pmatrix} u_2 \\ -u_1 \\ 0 \end{pmatrix} dV = \iiint_V ((u_2)'_x - (u_1)'_y) dV \leadsto \text{☺}$$

Nach dem Mittelwertsatz gilt daher: • *D'après le théorème de valeur moyenne il vaut donc:*

$$\operatorname{rot} \vec{u} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iiint_V \operatorname{rot} \vec{u} dV}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_A d\vec{A} \times \vec{u}}{\Delta V}, \quad \Delta A \text{ zu } \bullet \text{ pour } \Delta V$$

**Korollar:** • **Corollaire:** **Vor.:** • **Hyp.:**  $\Delta A$  zu • *pour*  $\Delta V$

**Beh.:** • **Thè.:**

$$\operatorname{rot} \vec{u} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_A d\vec{A} \times \vec{u}}{\Delta V}$$

**Konsequenz:** • **Conséquence:**  $\Delta V$  und  $\oint_A d\vec{A} \times \vec{u}$  sind nicht von der Lage des Koordinatensystems abhängig. Daher ist auch  $\operatorname{rot} \vec{u}$  unabhängig von der Lage des Koordinatensystems. •  $\Delta V$  et  $\oint_A d\vec{A} \times \vec{u}$  ne dépendent pas de la situation spéciale du système de coordonnées. Donc aussi  $\operatorname{rot} \vec{u}$  ne dépend pas de la situation spéciale du système de coordonnées.

### 6.5.12 Zur Divergenz des elektrischen Feldes — Quant à la divergence d'un champ électrique

Wir betrachten eine Punktladung  $Q$  im Ursprung.  $A = \partial S_r$  sei die Oberfläche einer Kugel (Sphäre) mit dem Radius  $r$  und dem Zentrum im Ursprung. • *Nous considérons une charge ponctuelle  $Q$  dans l'origine. Soit  $A = \partial S_r$  la surface d'une boule (sphère) avec le rayon  $r$  et le centre dans l'origine.*

Es ist bekannt: • *Nous savons:*  $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \vec{e}_r$  Es gilt: • *Il vaut:*

$$\begin{aligned} \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \oint_A \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \vec{e}_r \cdot d\vec{A} = \oint_A \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dA = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint_A dA = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \frac{Q}{\epsilon_0} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dV \end{aligned}$$

Andererseits ist mit der Ladungsdichte  $q$ : • *D'autre part il vaut avec la densité de charge  $q$ :*

$$\begin{aligned} Q &= \iiint_V q(x, y, z) dV = \iiint_V \frac{dQ}{dV} dV, \quad q = \frac{dQ}{dV} \\ \leadsto \frac{Q}{\epsilon_0} &= \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V q(x, y, z) dV = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dV \Rightarrow \iiint_V \frac{q(x, y, z)}{\epsilon_0} dV = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dV \end{aligned}$$

Nach dem Mittelwertsatz gilt nun: • *D'après le théorème de la valeur moyenne il vaut:*

$$\frac{q}{\epsilon_0} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\iiint_{\Delta v} \frac{q}{\epsilon_0} dV}{\Delta V} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\iiint_{\Delta v} \operatorname{div} \vec{E} dV}{\Delta V} = \operatorname{div} \vec{E}$$



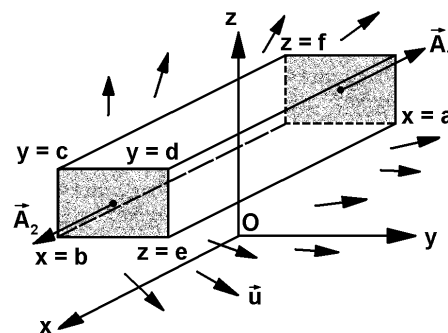
Konsequenz: • Conséquence:  $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{dQ}{dV}$

## 6.6 Beweiseideen zu den Integralsätzen — Idées de preuves pour les théorèmes de l'intégrale

### 6.6.1 Zum Satz von Gauss — Quant au théorème de Gauss

#### 1. Für einen Quader: • Pour un cube:

Der Quader sei in achsenparalleler Lage. Wir berechnen den Fluss durch eine Seitenfläche  $A_1$  gegenüber von  $A_2$ : • *Le cube soit situé parallèlement aux axes. Nous calculons le flux à travers une surface latérale  $A_1$  vis-à-vis de  $A_2$ :*



$$\begin{aligned} \vec{A}_1 &= \vec{n}_1 \cdot A_1, \quad \Phi_{A_1} = \iint \vec{u} \cdot d\vec{A} = \big|_{x=a} \iint \begin{pmatrix} u_1(a, y, z) \\ u_2(a, y, z) \\ u_3(a, y, z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \underbrace{dy dz}_{=dA} \\ &= - \int_{z=e}^{z=f} \int_{y=c}^{y=d} u_1(a, y, z) dy dz \end{aligned}$$

Analog für  $A_2$ : • *Analogiquement pour  $A_2$ :*

$$\Phi_{A_2} = \iint \vec{u} \cdot d\vec{A} = \big|_{x=b} \iint \begin{pmatrix} u_1(b, y, z) \\ u_2(b, y, z) \\ u_3(b, y, z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dy dz = \int_{z=e}^{z=f} \int_{y=c}^{y=d} u_1(b, y, z) dy dz$$

$$\Rightarrow \Phi_{A_1 \cup A_2} = \int_{e,c}^{f,d} (u_1(b, y, z) - u_1(a, y, z)) dy dz$$

Andererseits gilt aber: • *D'autre part il vaut:*

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial u_1(x, y, z)}{\partial x} dV &= \int_{e,c}^{f,d} \left( \int_a^b \frac{\partial u_1(x, y, z)}{\partial x} dx \right) dy dz = \int_{e,c}^{f,d} (u_1(x, y, z) \big|_a^b) dy dz \\ &= \int_{e,c}^{f,d} (u_1(b, y, z) - u_1(a, y, z)) dy dz \end{aligned}$$

↪ Das ist der selbe Ausdruck wie oben! • *Ceci est la même expression qu'en haut!*

$$\leadsto \Phi_{A_1 \cup A_2} = \iiint_V \frac{\partial u_1(x, y, z)}{\partial x} dV$$

Für die restlichen Flächenpaare  $A_3$  und  $A_4$  sowie  $A_5$  und  $A_6$  können wir genauso schliessen.

• *Pour les autres paires de surface restantes, c.-à-d.  $A_3$  et  $A_4$  ainsi qu' $A_5$  et  $A_6$  nous pouvons déduire de la même façon.*

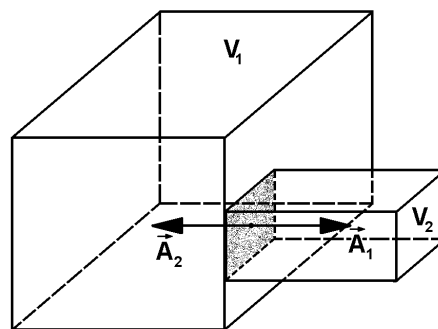
$$\leadsto \Phi_{A_3 \cup A_4} = \iiint_V \frac{\partial u_2(x, y, z)}{\partial y} dV, \quad \Phi_{A_5 \cup A_6} = \iiint_V \frac{\partial u_3(x, y, z)}{\partial z} dV$$

Addieren wir die drei erhaltenen Volumenintegrale, so erhalten wir den Satz von Gauss für den achsenparallelen Quader: • *Si nous additionnons les trois intégrales de volume obtenues, ainsi nous obtenons le théorème de Gauss pour le cube parallèle aux axes:*

$$\Phi_A = \Phi_{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6} = \iiint_V \left( \frac{\partial u_1(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial u_2(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial u_3(x, y, z)}{\partial z} \right) dV = \iiint_V \operatorname{div} \vec{u} dV$$

2. Für Körper, die sich in achsenparallele Quader zerschneiden lassen: • *Pour les corps, qui se laissent découper en cubes parallèles aux axes:*

(Wir benutzen die Tatsache, dass Integrale lineare Operatoren sind.) • *(Nous utilisons le fait que les intégrales sont des opérateurs linéaires.)*



$$\iiint_V \dots = \iiint_{V_1} \dots + \iiint_{V_2} \dots$$

$$\begin{aligned} \iint_{A_{tot}} \dots &= \iint_{A_{V_1} \setminus A_1} \dots + \iint_{A_{V_2} \setminus A_2} \dots = \iint_{A_{V_1}} \dots - \underbrace{\iint_{A_1} \dots}_{''=C''} + \iint_{A_{V_2}} \dots - \underbrace{\iint_{A_2} \dots}_{''=-C''} = \iint_{A_{V_1}} \dots + \iint_{A_{V_2}} \dots \\ \Rightarrow \iiint_V \dots &= \iiint_{V_1} \dots + \iiint_{V_2} \dots = \iint_{A_{V_1}} \dots + \iint_{A_{V_2}} \dots = \iint_{A_{tot}} \dots \end{aligned}$$

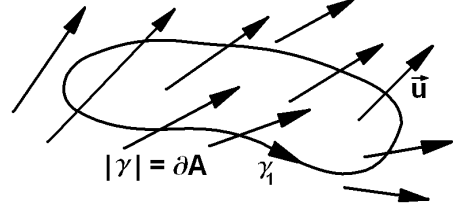
$\leadsto$  Satz von Gauss richtig für zusammengesetzte achsenparallele Quader. • *Théorème de Gauss correct pour les cubes parallèles aux axes et composés.*

3. Dieses Argument lässt sich jetzt durch Induktion ausdehnen:  $\leadsto$  Der Satz von Gauss ist richtig für beliebig viele zusammengesetzte achsenparallele Quader. • *Maintenant cet argument se laisse étendre par l'induction:  $\leadsto$  Le théorème de Gauss est correct pour les cubes parallèles aux axes et composés.*
4. Bei beliebigen Körpern kann man sich  $V$  durch Quader approximiert denken, wie das bei mehrdimensionalen Integralen auch gemacht wird. Falls  $V$  und  $\vec{u}$  genügend brav sind, wird der Fehler bei der Approximation vernachlässigbar. • *Pour des corps quelconques, on peut s'imaginer  $V$  approximé par des cubes, comme ça se fait aussi pour les intégrales à plusieurs dimensions. Si  $V$  et  $\vec{u}$  sont suffisamment raisonnables, l'erreur de l'approximation devient négligeable.*

### 6.6.2 Zum Satz von Stokes — Quant au théorème de Stokes

#### Spezialfall 1 — Cas spécial 1

Sei  $A$  eine geschlossene Fläche. Wenn wir  $|\gamma|$  auf einen Punkt zusammenziehen, so entsteht ein **Nullweg**  $|\gamma|_0$ . • *Soit  $A$  une surface fermée. Si nous déformons  $|\gamma|$  jusqu'à ce qu'on n'a qu'un point, on obtient ainsi un chemin de zéro  $|\gamma|_0$ .*



$$\leadsto \oint_{|\gamma|_0} \vec{u} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \Phi_{\text{rot} \vec{u}}, \quad \iint_{A_0} \text{rot} \vec{u} \cdot d\vec{A} = 0$$



#### Spezialfall 2 — Cas spécial 2

Sei ein gleichmässig rotierender Körper gegeben. • *Soit donné un corps régulièrement rotatif.*

$$\leadsto \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad \text{rot} \vec{v} = 2\omega \parallel \vec{A}, \quad \vec{v} \parallel d\vec{r}$$

Sei  $S$  ein Rotationskreis. • *Soit  $S$  un cercle de rotation.*

1.  $\iint_C \text{rot} \vec{v} \cdot d\vec{A} = (+) \iint_C |\text{rot} \vec{v}| \cdot |d\vec{A}| = 2|\vec{\omega}| \iint_C |d\vec{A}| = 2|\vec{\omega}| R^2 \pi = 2\pi \cdot |\vec{v}| \cdot R$
2.  $\oint_{\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \oint_{\partial C} |\vec{v}| \cdot |d\vec{r}| = |\vec{v}| \cdot \oint_{\partial C} |d\vec{r}| = |\vec{v}| \cdot 2R\pi = \Rightarrow \oint_{\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_C \text{rot} \vec{v} \cdot d\vec{A}$

#### Spezialfall Rechteck — Cas spécial rectangle

**Geg.:** • **Donné:** Rechteck in achsenparalleler Lage. • *Rectangle, situation parallèle aux axes.*

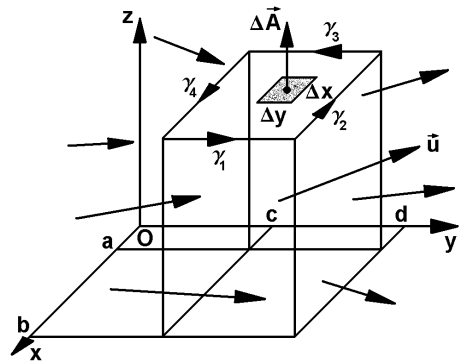
Sei • *Soit  $z = e = \text{const.}$ ,*

$$|\gamma| = \bigcup_{i=1}^4 |\gamma|_i, \quad d\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dx dy \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} (u_3)'_y - (u_2)'_z \\ (u_1)'_z - (u_3)'_x \\ (u_2)'_x - (u_1)'_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dx dy \end{pmatrix} = ((u_2)'_x - (u_1)'_y) dx dy$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \iint_A \text{rot} \vec{u} \cdot d\vec{A} &= \iint_A (u_2)'_x - (u_1)'_y dx dy = \int_{c a}^{d b} (u_2)'_x dx dy - \int_{a c}^{b d} (u_1)'_y dy dx \\ &= \int_c^d u_2(x, y, e) \Big|_{x=a}^{x=b} dy - \int_a^b (x, y, e) u_1 \Big|_c^d dx \\ &= \int_c^d u_2(b, y, e) dy + \int_d^c u_2(a, y, e) dy + \int_a^b u_1(x, c, e) dx + \int_b^a u_1(x, d, e) dx \end{aligned}$$

Andererseits gilt: • *D'autre part il vaut:*



$$\text{Auf } \bullet \text{ Sur } |\gamma|_1: d\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ dy \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} \cdot \vec{r} = u_2(b, y, e) dy$$

$$\text{Auf } \bullet \text{ Sur } |\gamma|_2: d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} \cdot \vec{r} = u_1(x, d, e) dx$$

$$\text{Auf } \bullet \text{ Sur } |\gamma|_3: d\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ dy \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} \cdot \vec{r} = u_2(a, y, e) dy$$

$$\text{Auf } \bullet \text{ Sur } |\gamma|_4: d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} \cdot \vec{r} = u_1(x, c, e) dx$$

(Alle Vorzeichen '+'. Die Durchlaufrichtung wird durch die Integrationsgrenzen bestimmt.) • *Tous les signes '+'. La direction de passage est déterminée par les frontières d'intégration.*

$$\Rightarrow \oint_{|\gamma|} \vec{u} \cdot d\vec{r} = \int_{|\gamma|_1} \vec{u} \cdot d\vec{r} + \int_{|\gamma|_2} \vec{u} \cdot d\vec{r} + \int_{|\gamma|_3} \vec{u} \cdot d\vec{r} + \int_{|\gamma|_4} \vec{u} \cdot d\vec{r} = \int_c^d u_2(b, y, e) dy + \int_b^a u_1(x, d, e) dx + \int_d^c u_2(a, y, e) dy + \int_a^b u_1(x, c, e) dx = \iint_A \text{rot } \vec{u} \cdot d\vec{A} \quad ((\text{Der errechnete Ausdruck stimmt mit dem oben überein!}))$$

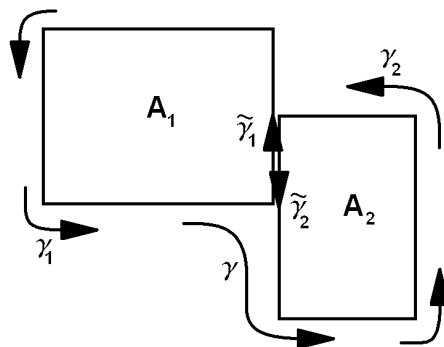
• *L'expression calculée concorde avec celui d'en haut!*  $\leadsto \oint_{|\gamma|} \vec{u} \cdot d\vec{r} = \iint_A \text{rot } \vec{u} \cdot d\vec{A}$

### Figur aus Rechtecken zusammengesetzt — Figure composée de rectangles

Es gilt (vgl. Fig.): • *Il vaut (voir fig.):*

$$\tilde{\gamma}_2 = -\tilde{\gamma}_1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \iint_A \text{rot } \vec{u} \cdot d\vec{A} &= \iint_{A_1 \cup A_2} \text{rot } \vec{u} \cdot d\vec{A} \\ &= \iint_{A_1} \text{rot } \vec{u} \cdot d\vec{A} + \iint_{A_2} \text{rot } \vec{u} \cdot d\vec{A} \end{aligned}$$



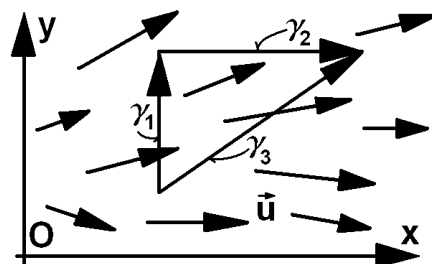
$$\begin{aligned} &= \oint_{|\gamma|_1} \vec{u} \cdot d\vec{r} + \oint_{|\gamma|_2} \vec{u} \cdot d\vec{r} = \oint_{|\gamma|_1 \setminus |\tilde{\gamma}|_1} \vec{u} \cdot d\vec{r} + \oint_{|\tilde{\gamma}|_1} \vec{u} \cdot d\vec{r} + \oint_{|\gamma|_2 \setminus |\tilde{\gamma}|_2} \vec{u} \cdot d\vec{r} + \oint_{|\tilde{\gamma}|_2} \vec{u} \cdot d\vec{r} \\ &= \oint_{|\gamma|_1 \setminus |\tilde{\gamma}|_1} \vec{u} \cdot d\vec{r} + \oint_{|\tilde{\gamma}|_1} \vec{u} \cdot d\vec{r} + \oint_{|\gamma|_2 \setminus |\tilde{\gamma}|_2} \vec{u} \cdot d\vec{r} - \oint_{|\tilde{\gamma}|_1} \vec{u} \cdot d\vec{r} = \oint_{|\gamma|_1 \setminus |\tilde{\gamma}|_1} \vec{u} \cdot d\vec{r} + \oint_{|\gamma|_2 \setminus |\tilde{\gamma}|_2} \vec{u} \cdot d\vec{r} = \oint_{|\gamma|} \vec{u} \cdot d\vec{r} \\ &\Rightarrow \iint_A \text{rot } \vec{u} \cdot d\vec{A} = \oint_{|\gamma|} \vec{u} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

Dieses Argument lässt sich jetzt durch Induktion ausdehnen:  $\leadsto$  Der Satz von Stokes ist richtig für beliebig viele zusammengesetzte achsenparallele Rechtecke. • *Maintenant cet argument se laisse étendre par l'induction:  $\leadsto$  Le théorème de Stokes est correct pour les rectangles parallèles aux axes et composés.*

Bei beliebigen Flächen mit vernünftigem Rand kann man sich  $A$  durch Rechtecke approximiert denken, wie das bei mehrdimensionalen Integralen auch gemacht wird. Falls  $A$  und  $\vec{u}$  genügend brav sind, wird der Fehler bei der Approximation vernachlässigbar. • *Pour aires quelconques, on peut s'imaginer  $A$  approximé par des rectangles, comme ça se fait aussi pour les intégrales à plusieurs dimensions. Si  $A$  et  $\vec{u}$  sont suffisamment raisonnables, l'erreur de l'approximation devient négligeable.*

Dabei muss man sich noch überlegen, dass achsenparallele Wege durch andere ersetzt werden dürfen, dass also gilt: • *On doit encore réfléchir à ce que des chemins parallèles aux axes peuvent être remplacés par d'autres, qu'ainsi il vaut:*

$$\oint_{|\gamma|_1 \cup |\gamma|_2} \vec{u} \cdot d\vec{r} = \oint_{|\gamma|_1} \vec{u} \cdot d\vec{r} + \oint_{|\gamma|_2} \vec{u} \cdot d\vec{r} = \oint_{|\gamma|_3} \vec{u} \cdot d\vec{r}$$

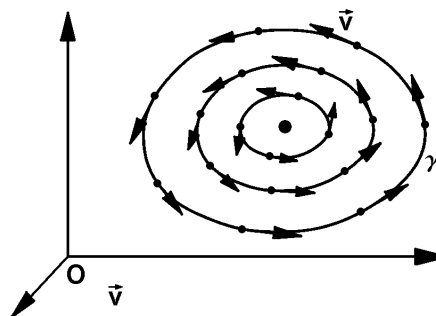


## 6.7 Zirkulation, Vektorpotential — Circulation, potentiel vectoriel

### 6.7.1 Zirkulation und Rotation — Circulation et rotationnel

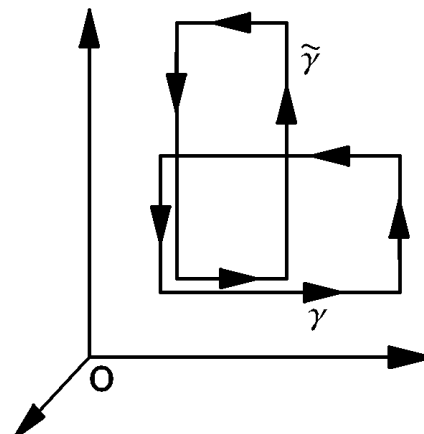
#### Definition der Zirkulation — Definition de la circulation

Wir betrachten einen **Wirbel** in einem **Fluid** (d.h. in einer idealen Flüssigkeit oder auch in einem idealen Gas), dessen Geschwindigkeitsfeld gegeben ist. Dabei ist zu bemerken, dass jedes andere Feld formal immer als Geschwindigkeitsfeld interpretiert werden kann. • *Nous considérons un tourbillon dans un fluide (c.-à.-d. dans un liquide idéal ou bien dans un gaz idéal), dont le champ de vitesse est donné. Il faut remarquer que chaque autre champ donné peut toujours être formellement interprété comme un champ de vitesse.*



Sei  $|\gamma|$  die Spur eines geschlossenen Weges um ein Zentrum, die eine Strömungslinie beschreibt.  $\vec{v}$  sei der Geschwindigkeitsvektor, der tangential zur Strömungslinie gerichtet ist. • *Soit  $|\gamma|$  la trace d'un chemin fermé autour d'un centre qui décrit une ligne de courant.  $\vec{v}$  soit le vecteur de vitesse qui est dressé tangentiellement à la ligne de courant.*

Zur Vereinfachung der Situation sei  $|\gamma|$  ein Rechteck. Solche Rechtecke können verschieden geformt sein. Sei der Umfang  $s$  und  $\vec{v}$  sei konstant. • *Pour la simplification de la situation soit  $|\gamma|$  un rectangle. De tels rectangles peuvent être formés différemment. Le périmètre soit  $s$  et  $\vec{v}$  constant.*



**Idee:** • **Idée:** Wir lassen uns von der Idee leiten, dass das, was wir unter Strömung verstehen könnten mit  $s$  und auch mit  $\vec{v}$  proportional grösser wird. Als **Mass für die Strömung** auf einer Stromlinie könnte man daher hier  $Z = \vec{v} \cdot s$  verwenden. Dass dieses  $Z$  seine Berechtigung hat, sieht man an seiner physikalischen Bedeutung: • *Nous nous laissons guider de l'idée que ce que nous pourrions comprendre par courant devient avec  $s$  et aussi avec  $\vec{v}$  proportionnellement plus grand. Nous pourrions donc prendre comme mesure du courant sur une ligne de courant  $Z = \vec{v} \cdot s$ . Que ce  $Z$  ait son autorisation, se voit par sa signification physique:*

Sei  $A$  der Querschnitt eines „Strömungsschlauches“ mit dem darin strömenden Volumen  $V$ . • *Soit  $A$  la coupe transversale d'un "tuyau de courant" avec le volume  $V$  affluant dans ce volume.*

Wir berechnen den Impuls des darin strömenden Volumens pro Querschnitt:

• *Nous calculons l'impulsion du volume affluant dans ce tuyau par coupe transversale:*

$$\frac{p}{A} = \frac{m_{\text{total}} \cdot |\vec{v}|}{A} = \frac{\rho \cdot V \cdot |\vec{v}|}{A}, \quad m_{\text{total}} = \rho \cdot V, \quad V = s \cdot A$$

$s$  ist der mittlere Umfang. •  *$s$  est le périmètre moyen.*

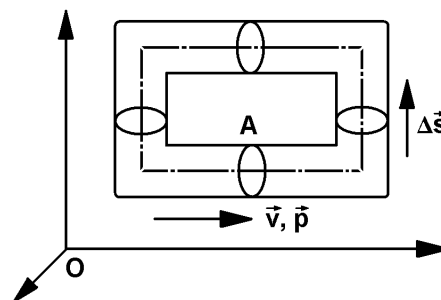
$$\leadsto \frac{p}{A} = \frac{\rho \cdot s \cdot A \cdot |\vec{v}|}{A} = \rho \cdot s \cdot |\vec{v}| = \rho \cdot Z$$

Für  $\rho = 1$  gilt also: • *Pour  $\rho = 1$  il vaut donc:*  $Z = \vec{v} \cdot s = \frac{p}{A}$

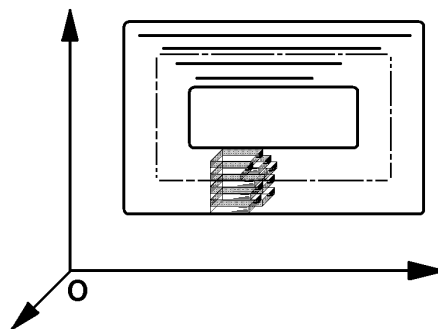
Allgemeinfall: • *Cas général:*  $Z = \vec{v} \cdot s = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{p}{A}$

$Z$  ist somit der **Impuls pro Querschnitt** in einem **Strömungsschlauch** mit **Einheitsdichte**. Oder anders gesagt:  $Z$  ist die **Flächendichte des Impulses bei normierter Dichte**. Wir nennen  $Z$  **Zirkulation**. •  *$Z$  est par conséquent l'impulsion par coupe transversale dans un tuyau de courant avec la densité d'unité. Ou dit différemment:  $Z$  est la densité de surface de l'impulsion si la densité est normalisée. Nous appelons  $Z$  circulation*

**Verallgemeinerung:** • **Généralisation:**



Die folgende Ausdehnung ist unproblematisch: • *L'élargissement suivant n'est pas problématique:*

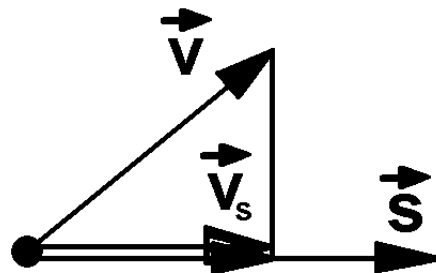


$$Z = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{p}{A} = \frac{1}{\rho \cdot A} \cdot \sum \Delta p_i = \frac{1}{\rho \cdot A} \cdot \sum \Delta m_i \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{\rho \cdot A} \cdot \sum \Delta V_i \cdot \rho \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{\rho \cdot A} \cdot \sum \Delta s_i \cdot A \cdot \rho \cdot \vec{v}_i$$

$$= \frac{1}{\rho \cdot A} \cdot A \cdot \rho \sum \Delta s_i \cdot \vec{v}_i = \sum \vec{v}_i \cdot \Delta s_i \rightarrow Z = \int_{s_1}^{s_2} |\vec{v}| ds$$

Für  $\vec{v} \nparallel \Delta \vec{s}$  trägt nur die Komponente  $\vec{v}_s$  zum Impuls in Richtung  $\Delta \vec{s}$  bei: • *Pour  $\vec{v} \nparallel \Delta \vec{s}$  seulement la composante  $\vec{v}_s$  en direction  $\Delta \vec{s}$  contribue à l'impulsion:*

$$|\vec{v}_s| \cdot |\Delta \vec{s}| = |\vec{v}| \cdot |\Delta \vec{s}| \cdot \cos(\theta) = \vec{v} \cdot \Delta \vec{s}$$

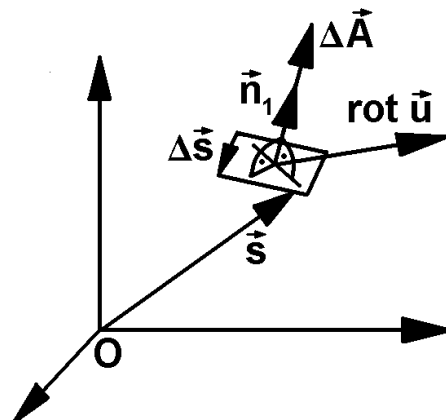
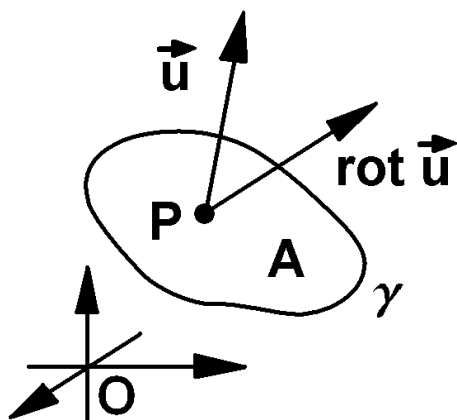


Das bedeutet, dass der Ausdruck unter dem Integral bei der Zirkulation  $\vec{v} \cdot d\vec{s}$  wird: • *Ça signifie que l'expression sous l'intégrale devient  $\vec{v} \cdot d\vec{s}$  à la circulation:*  $\leadsto \int_{s_1}^{s_2} \vec{v} \cdot d\vec{s}$

Mit dieser Formel kann man die Zirkulation für beliebige geschlossene Wege und beliebige Vektorfelder  $\vec{u}$  definieren. Dabei ist die Bedeutung als Flächendichte des Impulses längs einer Strömungslinie von den Fluiden entlehnt: • *A l'aide de cette formule, on peut définir la circulation pour les chemins fermés et quelconques et pour les champs vectoriels quelconques  $\vec{u}$ . La signification est emprunté des fluides comme densité par surface de l'impulsion au long d'une ligne de courant:*

**Definition:** • **Définition:**  $Z = \int_{|\gamma|} \vec{u} \cdot d\vec{s}$  heisst **Zirkulation**. • *s'appelle circulaïton.*

## Bedeutung der Rotation — Signification du rotationnel



Nach Stokes gilt nun: • *D'après Stokes il vaut:*  $Z = \int_{|\gamma|} \vec{u} \cdot d\vec{s} = \iint_A \text{rot } \vec{u} \cdot d\vec{A}$

Für sehr kleine  $A = \Delta A$  gilt: • *Pour des  $A = \Delta A$  très petits il vaut:*  $\Delta \vec{A} = \vec{n} \cdot \Delta A$

Und nach dem Mittelwertsatz: • *Et d'après le théorème de la moyenne:*

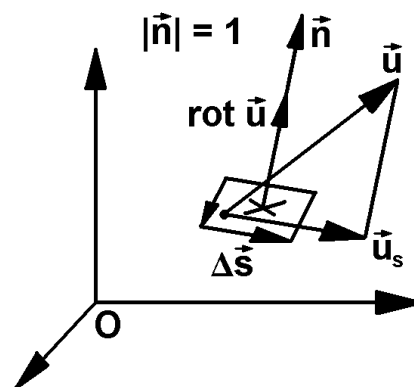
$$Z = \iint_{\Delta A} \text{rot } \vec{u} \cdot d\vec{A} \approx \text{rot } \vec{u}(P_0) \cdot \Delta \vec{A} = \text{rot } \vec{u}(P_0) \cdot \vec{n} \cdot \Delta A \Rightarrow \text{rot } \vec{u} \cdot \vec{n} \approx \frac{Z}{\Delta A} = \frac{1}{\Delta A} \cdot \int_{|\gamma|_{\Delta A}} \vec{u} \cdot d\vec{s}$$

Exakt: • *Exactement:*  $\text{rot } \vec{u} \cdot \vec{n} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta A} \cdot \int_{|\gamma|_{\Delta A}} \vec{u} \cdot d\vec{s}$

Sei • *Soit  $\vec{n} = 1 \leadsto$*

$$\text{rot } \vec{u} \cdot \vec{n} = |\text{rot } \vec{u}| \cdot 1 \cdot \cos(\theta) = |\text{rot } \vec{u}| \cdot \cos(\theta)$$

$$\text{rot } \vec{u} \parallel \vec{n} \parallel \vec{A}, \theta = 0 \Rightarrow \cos(\theta) = 1 \\ \Rightarrow \text{rot } \vec{u} \cdot \vec{n} = |\text{rot } \vec{u}|$$



$\leadsto$  **Konsequenz:** • **Conséquence:** Bedeutung von  $|\text{rot } \vec{u}|$ : • *Signification de  $|\text{rot } \vec{u}|$ :*

$$\text{rot } \vec{u} \parallel \vec{n} \Rightarrow |\text{rot } \vec{u}| = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta A} \cdot \int_{|\gamma|_{\Delta A}} \vec{u} \cdot d\vec{s}$$

D.h.  $|\text{rot } \vec{u}|$  ist der maximale Grenzwert von  $\frac{Z(\Delta A)}{\Delta A}$  bei  $\Delta A \rightarrow 0$  oder der Grenzwert der Zirkulation pro umströmte Fläche  $\Delta A$  bei  $\Delta A \rightarrow 0$  und optimal gerichtetem Flächennormalenvektor  $\vec{n}$ . • *C.-à-d.  $|\text{rot } \vec{u}|$  est le maximum de la valeur limite de  $\frac{Z(\Delta A)}{\Delta A}$  pour  $\Delta A \rightarrow 0$  ou la valeur limite de la circulation par surface bornée de la ligne de courant  $\Delta A$  pour  $\Delta A \rightarrow 0$  et le vecteur normal à la surface avec direction*



optimale  $\vec{n}$ .

**Konsequenz:** • **Conséquence:** Bei  $\Delta A \rightarrow P_0$  kann  $|\operatorname{rot} \vec{u}|$  als **lokale Zirkulation pro Fläche in  $P_0$**  oder kurz als Zirkulation in  $P_0$  verstanden werden. Damit hat man ein **Mass für die Wirbelbewegung in  $P_0$** .  $\operatorname{rot} \vec{u}$  gibt dann die Richtung der Fläche, in der diese Wirbelbewegung stattfindet.  
 • Pour  $\Delta A \rightarrow P_0$  on peut interpréter  $|\operatorname{rot} \vec{u}|$  comme **circulation locale par surface à  $P_0$**  ou brièvement comme **circulation à  $P_0$** . On a ainsi une **mesure pour le mouvement tourbillonnaire à  $P_0$** .  $\operatorname{rot} \vec{u}$  nous donne la direction de la surface dans laquelle ce mouvement tourbillonnaire a lieu.

Wenn  $\vec{u}$  kein Geschwindigkeitsfeld ist, kann man es formal immer als solches umdeuten. • Si  $\vec{u}$  n'est pas un champ de vitesse, on peut toujours le réinterpréter formellement comme un tel champ.

## 6.7.2 Das Vektorpotential — Le potentiel vectoriel

**Definition — Définition**

**Problem:** • **Problème:** Berechne • Calculer  $\Phi_A = \iint_A \vec{\omega} \cdot d\vec{A} = ?$

Dabei ist  $A$  eine beliebige vernünftige Fläche mit einer Randkurve  $|\gamma|$ . •  $A$  est une surface raisonnable quelconque avec une courbe frontière  $|\gamma|$ .

**Idee:** • **Idée:** Suche eine Funktion  $\vec{v}$  mit  $\vec{\omega} = \operatorname{rot} \vec{v}$ . Dann gilt nach dem Satz von Stockes:  
 • Chercher une fonction  $\vec{v}$  avec  $\vec{\omega} = \operatorname{rot} \vec{v}$ . D'après Stockes il vaut donc:

$$\Phi_A = \iint_A \vec{\omega} \cdot d\vec{A} = \iint_A \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{A} = \oint_{|\gamma|} \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

Man hat somit jetzt das Problem, das Vektorfeld  $\vec{v}$  zu finden! • On a donc maintenant le problème de trouver le champ vectoriel  $\vec{v}$ !

**Problem:** • **Problème:** **Geg.:** • **Donné:**  $\vec{\omega} = \vec{\omega}(\vec{x})$   
**Ges.:** • **Trouver:**  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x})$  mit • avec  $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{\omega}$

**Definition:** • **Définition:** Sei • Soit  $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{\omega} \rightsquigarrow \vec{v}$  heisst **Vektorpotential zu  $\vec{\omega}$**   
 •  $\vec{v}$  s'appelle **potentiel vectoriel de  $\vec{\omega}$**

**Eindeutigkeit — Univocité**

Sei  $f = f(x, y, z)$  eine beliebige Potentialfunktion. Wir wissen, dass dann gilt: • Soit  $f = f(x, y, z)$  une fonction de potentiel quelconque. Nous savons qu'il vaut donc:  $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \vec{0}$

$$\rightsquigarrow \operatorname{rot}(\vec{v} + \operatorname{grad} f) = \operatorname{rot}(\vec{v}) + \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \operatorname{rot}(\vec{v}) + \vec{0} = \operatorname{rot}(\vec{v})$$

( $\operatorname{rot}$  ist bekanntlich ein linearer Operator.) • ( $\operatorname{rot}$  est un opérateur linéaire, comme nous savons.)  
 $\rightsquigarrow$  **Konsequenz:** • **Conséquence:**  $\vec{v}$  ist nicht eindeutig. •  $\vec{v}$  n'est pas univoque.

**Lemma:** • **Lemme:**     **Vor.:** • **Hyp.:**

$\vec{v}$  Vektorpotential zu • *potentiel vectoriel pour  $\vec{\omega}$*   
 $f$  beliebige Potentialfunktion • *fonction de potentiel quelconque*

**Beh.:** • **Thè.:**

$\vec{v} + \text{grad } f$  ist ebenfalls Vektorpotential zu  $\vec{\omega}$  • *est aussi potentiel vectoriel pour  $\vec{\omega}$*

**Wichtig:** • **Important:** Insbesondere lässt sich eine Komponente eines Vektorpotentials beliebig aus der Menge vernünftiger Funktionen auswählen: • *On peut choisir une composante d'un potentiel vectoriel librement de manière quelconque dans l'ensemble de fonctions raisonnables:*

**Bsp.:** • **Exemple:** **Geg.:** • **Donné:**  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1(x, y, z) \\ v_2(x, y, z) \\ v_3(x, y, z) \end{pmatrix}, \quad v_3(x, y, t)$

$$\leadsto \text{Sei} \bullet \text{Soit } f(x, y, z) = - \int_{z_0}^z v_3(x, y, t) dt \Rightarrow \text{grad } f(x, y, z) = \begin{pmatrix} - \int_{z_0}^z (v_3(x, y, t))_x' dt \\ - \int_{z_0}^z (v_3(x, y, t))_y' dt \\ -v_3(x, y, z) \end{pmatrix}$$

$\leadsto \vec{v}^*(x, y, z) = \vec{v} + \text{Grad } f$  ist wieder Vektorpotential. • *est de nouveau potentiel vectoriel.*

$$\begin{aligned} \leadsto \vec{v}^*(x, y, z) &= \begin{pmatrix} v_1(x, y, z) \\ v_2(x, y, z) \\ v_3(x, y, z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} - \int_{z_0}^z (v_3(x, y, t))_x' dt \\ - \int_{z_0}^z (v_3(x, y, t))_y' dt \\ -v_3(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(x, y, z) - \int_{z_0}^z (v_3(x, y, t))_x' dt \\ v_2(x, y, z) - \int_{z_0}^z (v_3(x, y, t))_y' dt \\ v_3(x, y, z) - v_3(x, y, z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_1(x, y, z) - \int_{z_0}^z (v_3(x, y, t))_x' dt \\ v_2(x, y, z) - \int_{z_0}^z (v_3(x, y, t))_y' dt \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Satz:** • **Théorème:**     **Vor.:** • **Hyp.:**

$\vec{v}$  Vektorpotential zu • *potentiel vectoriel pour  $\vec{\omega}$ ,*  
 Z.B. • *P.ex.  $f(x, y, z) := - \int_{z_0}^z v_3(x, y, t) dt$*

**Beh.:** • **Thè.:**

$\vec{v}^*(x, y, z) = \vec{v} + \text{Grad } f$  Vektorpotential, dessen 3. Komponente 0 ist • *De nouveau potentiel vectoriel dont la troisième composante est 0*  
 Entsprechend für die andern Komponenten • *Correspondamment pour les autres composantes*

**Existenz — Existence**

Für ein beliebiges vernünftiges Vektorfeld  $\vec{v}$  gilt: • *Pour un champ vectoriel raisonnable et quelconque  $\vec{v}$  il vaut:*  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}) = 0$

$\leadsto \vec{\omega} = \operatorname{rot} \vec{v} \Rightarrow \operatorname{div}(\vec{\omega}) = \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}) = 0 \leadsto$  Notwendige Bedingung für die Existenz eines Vektorpotentials! • *Condition nécessaire pour l'existence d'un potentiel vectoriel!*

**Satz:** • **Théorème:**      **Beh.:** • **Thè.:**

Zum Vektorfeld  $\vec{\omega}$  existiere ein Vektorpotential  $\vec{v}$  • *Pour le champ vectoriel  $\vec{\omega}$  il existe un potentiel vectoriel  $\vec{v}$*

**Beh.:** • **Thè.:**       $\operatorname{div} \vec{\omega} = 0$  notwendig • *nécessaire*

**Konstruktion des Vektorpotentials — Construction du potentiel vectoriel**

**Geg.:** • **Donné:**  $\vec{\omega}$

Es muss gelten: • *Nécessairement on a:*  $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rot} \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} v_3 - \frac{\partial}{\partial z} v_2 \\ \frac{\partial}{\partial z} v_1 - \frac{\partial}{\partial x} v_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} v_2 - \frac{\partial}{\partial y} v_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (v_3)_y' - (v_2)_z' \\ (v_1)_z' - (v_3)_x' \\ (v_2)_x' - (v_1)_y' \end{pmatrix}$

Sei • *Soit*  $v_3 = 0 \Rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(v_2)_z' \\ (v_1)_z' \\ (v_2)_x' - (v_1)_y' \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = -\int \omega_1 dz + C_2, \quad v_1 = \int \omega_2 dz + C_1$

$\leadsto$  Genauer: • *Plus exacte:*  $v_2(x, y, z) = -\int_{z_0}^z \omega_1(x, y, t) dt + C_2(x, y)$

$\leadsto$  Ansatz: • *Supposition:*  $C_2(x, y) = 0 \leadsto \omega_2 = (v_1)_z'$  und • *et*

$$\omega_3 = (v_2)_x' - (v_1)_y' = \left(-\int_{z_0}^z \omega_1(x, y, t) dt + C_2(x, y)\right)_x' - (v_1)_y' = \int_{z_0}^z \omega_1(x, y, t)_x' dt + C_2(x, y)_x'$$

$\leadsto$  Es gilt: • *Il vaut:*

$$\begin{aligned} v_1(x, y, z) &= \int_{z_0}^z \omega_2(x, y, t) dt + C_1(x, y) = \int_{y_0}^y (v_2)_x'(x, t, z) dt - \int_{y_0}^y (\omega_3)_x'(x, t, z) dt + C_3(x, z) \\ &= -\int_{y_0}^y (\omega_3)(x, t, z) dt + C_3(x, z) + \int_{y_0}^y \frac{\partial}{\partial x} \left(-\int_{z_0}^z \omega_1(x, t, s) ds + \underbrace{C_2(x, t)}_{=0}\right) dt \\ &= -\int_{y_0}^y (\omega_3)(x, t, z) dt + C_3(x, z) + \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z (-\omega_1(x, t, s))_x' ds dt \end{aligned}$$

Verwende: • *Utiliser:*

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}) = \operatorname{div}(\vec{\omega}) = 0 \Rightarrow (\omega_1)_x' + (\omega_2)_y' + (\omega_3)_z' = 0 \Rightarrow (\omega_1)_x' = -(\omega_2)_y' - (\omega_3)_z'$$

$$\begin{aligned}
\leadsto v_1(x, y, z) &= - \int_{y_0}^y (\omega_3)(x, t, z) dt + C_3(x, z) + \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z (-(\omega_2)_y'(x, t, s) - (\omega_3)_z'(x, t, s)) ds dt \\
&= - \int_{y_0}^y (\omega_3)(x, t, z) dt + C_3(x, z) + \int_{z_0}^z \int_{y_0}^y (\omega_2)_y'(x, t, s) dt ds + \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z (\omega_3)_z'(x, t, s) ds dt \\
&= - \int_{y_0}^y (\omega_3)(x, t, z) dt + C_3(x, z) + \int_{z_0}^z \omega_2(x, y, s) - \omega_2(x, y_0, s) ds + \int_{y_0}^y \omega_3(x, t, z) - \omega_3(x, t, z_0) dt \\
&= C_3(x, z) + \int_{z_0}^z \omega_2(x, y, s) - \omega_2(x, y_0, s) ds + \int_{y_0}^y -\omega_3(x, t, z_0) dt \\
&= C_4(x, z) + \int_{z_0}^z \omega_2(x, y, s) ds + \int_{y_0}^y -\omega_3(x, t, z_0) dt \quad (v_1)_z' = \omega_2 \Rightarrow C_4(x, z) = C_4(x) \\
\Rightarrow \vec{v} &= \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{z_0}^z \omega_2(x, y, s) ds + \int_{y_0}^y -\omega_3(x, t, z_0) dt + C_4(x) \\ - \int_{z_0}^z \omega_1(x, y, t) dt \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

**Satz:** • **Théorème:** **Vor.:** • **Hyp.:**

$$\text{Sei} \bullet \text{ Soit } \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \text{rot } \vec{v}, \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \text{ fix } \bullet \text{ fix}$$

**Beh.:** • **Thè.:**

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \int_{z_0}^z \omega_2(x, y, s) ds - \int_{y_0}^y \omega_3(x, t, z_0) dt + C(x) \\ - \int_{z_0}^z \omega_1(x, y, t) dt \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist ein mögliches Vektorpotential • *est un potentiel vectoriel possible*

$$\text{Bsp.:} \bullet \text{ Exemple: } \text{Sei} \bullet \text{ Soit } \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} \int_{z_0}^z b ds - \int_{y_0}^y c dt + C(x) \\ - \int_{z_0}^z a dt \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bz - cy + C(x) \\ -az \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rot } \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 - (-a) \\ b - 0 \\ 0 - (-a) \end{pmatrix} = \vec{\omega} \quad \text{☺ ☺}$$

## Kapitel • Chapitre 7

# Rayleigh–Quotient (Anhang 1) — Annexe 1 (sans traduction)

- *Ici, il y a pour le moment seulement le texte allemand à disposition. Momentanément, la traduction française manque encore.*

## 7.1 Grundlagen zur Methode mit dem Rayleigh-Quotienten

### 7.1.1 Übersicht: Problem und Ziel

Im Rahmen der Behandlung der Knickung mag bald auch das Problem auftreten, die Knickfestigkeit eines Trägers mit grossem Eigengewicht und konstantem Querschnitt zu berechnen. Dabei stösst man auf ein Randwertproblem mit einer Differentialgleichung der folgenden Art:

$$y''(x) = -\frac{M(y(x), x)}{(E I_y)}, \quad M(y(x), x) = (F + \rho \cdot A \cdot x) \cdot y(x), \quad y(0) = y(x_L) = 0$$

Im Spezialfall  $F = 0$  und  $\frac{M(y(x), x)}{(E I_y)} = \frac{(F + \rho \cdot A \cdot x) \cdot y(x)}{(E I_y)} = \frac{\rho \cdot A \cdot x \cdot y(x)}{(E I_y)} = k \cdot x \cdot y(x)$  erhalten wir damit das Randwertproblem:

$$y''(x) = -k \cdot x \cdot y(x), \quad k > 0, \quad y(0) = y(x_L) = 0$$

Die Lösung dieses Problems ist allerdings nicht eindeutig, denn setzt man mit einer Lösung  $y(x)$  eine andere Lösung  $C \cdot y(x)$  ( $C =$  beliebige Konstante) in das Randwertproblem ein, so stimmen alle Gleichungen immer noch.

Diese Aufgabe kann man als Eigenwertproblem lesen. In der Praxis stellt sich hier das Problem, den kleinsten möglichen Eigenwert  $k = \frac{\rho \cdot A}{E I_y}$  bei gegebenen  $\rho$  und  $E$  zu berechnen, d.h.  $\frac{A}{I_y}$  und damit den Querschnitt zu bestimmen, bei der sich eine Biegelinie einstellt, welche der gegebenen Differentialgleichung genügt. Z.B. im Falle eines Rechteckquerschnitts ist  $I_y = \frac{b \cdot h^3}{12}$  und  $A = b \cdot h$ , d.h.  $\frac{A}{I_y} = \frac{12}{h^2}$ . Macht man  $h$  und damit den Querschnitt kleiner, so wird der Quotient und damit der Eigenwert grösser. Da es sich um die Grenzlage der Biegelinie handelt, wird bei kleinerem Querschnitt die Spannungen auf den Querschnitt grösser, das Grenzmass der Biegelinie wird also überschritten. Damit kommt es bei Vergrösserung von  $k$  zum Bruch. Es ist daher unbedingt erforderlich, das kleinste positive  $k$  zu finden, so dass das Randwertproblem erfüllt ist.

Dem Autor ist aufgefallen, dass in der lokal zugänglichen technischen Literatur zur Lösung des Problems auch mit der Methode mit dem Rayleigh-Quotienten gearbeitet wird, ohne dass sich korrekte Hinweise auf die mathematische Gültigkeit dieser Methode finden lassen. Um dieser Situation des methodischen Defizits ein Ende zu bereiten, wird die Gültigkeit der Methode in dieser Darlegung nachgewiesen.

Bei der Behandlung der Angelegenheit kommt man aber nicht darum herum, sich erst einige tiefere Grundlagen aus der zugehörigen höheren Mathematik zu erarbeiten.

### 7.1.2 Theorie bezüglich Rayleigh-Quotient

#### Bilinearformen und Hilbertraum

Unter einem **Operator** wollen wir in unserem Zusammenhang eine Funktion verstehen, deren Definitionsbereich nicht nur Zahlen, sondern auch Funktionen selbst sein können.

**Bsp.:** Sei  $A(f) = \int_a^b f(x) dx$ .  $A$  ist hier ein Operator  $\mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$ , also eine Abbildung der Menge der integrierbaren Funktionen  $\mathcal{F}$  in die Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen. Analog können wir das Skalarprodukt

$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$  als Operator auf der Menge der Vektorpaare  $V^2 = V \times V$  auffassen, der jedem Vektorpar eine reelle Zahl (eben das Skalarprodukt) zuordnet.

Wir betrachten nun Operatoren  $A$ , deren Definitionsbereiche Paarmengen  $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$  (Mengen von Paaren  $(m_1, m_2) \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ ) sind. Der Bildbereich sei ein Körper  $K$ , so wie etwa  $\mathbb{R}$ . Sonst stellen wir im Moment keine weiteren Bedingungen. Solche Operatoren haben dann immer zwei Argumente, hier sind es  $(m_1, m_2)$ , und ein Bild, hier  $z \in K \rightsquigarrow A : (m_1, m_2) \mapsto z$ .

Speziell seien  $\mathcal{M}_1 = V$  und  $\mathcal{M}_2 = W$  Vektorräume sowie  $K$  wie erwähnt ein Körper. Sei  $v \in V$ ,  $w \in W$ ,  $k = \lambda \in K$ .

**Definition:** Ein Operator  $A : (v, w) \mapsto k$  heisst **Bilinearform**, wenn er linear in  $v$  und auch linear in  $w$  ist.

Das bedeutet, dass folgende Regeln (**Linearitätsregeln**) gelten sollen:

1.  $A(v_1 + v_2, w) = A(v_1, w) + A(v_2, w)$
2.  $A(v, w_1 + w_2) = A(v, w_1) + A(v, w_2)$
3.  $A(\lambda v, w) = \lambda A(v, w) = A(v, \lambda w)$

**Definition:** Ein Operator  $A : (V \times V) \mapsto K$  heisst **symmetrisch**, wenn  $A(v_1, v_2) = A(v_2, v_1)$  gilt.

Man beachte, dass bei symmetrischen Operatoren  $V \times W = V \times V$ , d.h.  $V = W$  gilt.

**Definition:** Eine Bilinearform  $A : (V, V) \mapsto K = \mathbb{R}$  heisst **positiv definit**, wenn für alle  $v \in V$  (also  $v \neq 0$ ) gilt:  $A(v, v) > 0$ .

Bei einer positiv definiten Bilinearform muss somit aus  $A(v, v) = 0$  die Bedingung  $v = 0$  folgen.

**Definition:** Eine Bilinearform  $A : (V, V) \mapsto K = \mathbb{R}$  heisst **positiv semidefinit**, wenn für alle  $v \in V$  gilt:  $A(v, v) \geq 0$ .

Das **Standardbeispiel** einer positiv definiten Bilinearform ist das **Skalarprodukt** von geometrischen Vektoren. Im Weiteren wollen wir uns aber hier in der Anwendung nicht speziell mit solchen Bilinearformen auseinandersetzen, deren Argumente geometrischen Vektoren sind. Unser Interesse gilt vielmehr den Funktionen statt den genannten Vektoren. Momentan nehmen wir aber keinen unmittelbaren Bezug auf die Natur resp. die Interpretation der Elemente des Vektorraumes  $V$ . Wir erwähnen nur, dass hier Funktionenräume bezüglich Addition und Multiplikation mit Skalaren Vektorräume sind, welche somit immer eine Basis besitzen.

**Definition:**

Eine **Skalarprodukt** (inneres Produkt) auf einem Vektorraum  $V$  ist eine Funktion

$$S : (V \times V) \mapsto K = \mathbb{C},$$

die jedem Vektorpaar  $(v_1, v_2)$  aus  $V^2$  eine komplexe Zahl  $\langle v_1, v_2 \rangle \in \mathbb{C}$  zuordnet und die folgende Bedingungen erfüllt:

1. Sesquilinearität:

$$(a) \quad \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$(b) \quad \langle z, x + y \rangle = \langle z, x \rangle + \langle z, y \rangle$$

$$(c) \quad \langle \bar{\lambda} x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = \langle x, \lambda y \rangle$$

2.  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$  (hermitesch)

3.  $\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$  (positiv definit)

**Bemerkung:**

Wenn  $V$  reell ist und  $K = \mathbb{R}$  gilt, so verwandeln sich die konjugiert komplexen Werte in obigen Formeln in reelle Werte.

Für Skalarprodukte gilt allgemein der wichtige Satz:

**Satz:****Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:**

$$|\langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

**Beweis:**

Siehe unter dem nachfolgenden Link:

[http://de.wikipedia.org/wiki/Cauchy-Schwarzsche\\_Ungleichung](http://de.wikipedia.org/wiki/Cauchy-Schwarzsche_Ungleichung).

**Definition:**

Eine **Norm** auf einem Vektorraum  $V$  ist eine Funktion

$$\mathcal{N} : v \mapsto \|v\| \in \mathbb{R},$$

die jedem Element (Vektor) von  $V$  eine nichtnegative Zahl  $\in \mathbb{R}_0^+$  zuordnet und die folgende Bedingungen erfüllt:

1.  $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$  (Definitheit)

2.  $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \Leftrightarrow v = 0$  (Homogenität)

3.  $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$  (Dreiecksungleichung)

**Bemerkung:**

Die **Norm** ist eine Verallgemeinerung des Begriffs der **Länge eines Vektors**. Eine Verallgemeinerung des **Abstands**begriffs, d.h. des Begriffs des **Abstands zwischen zwei Punkten** in einem Punktraum wird dagegen durch den Begriff der **Metrik** gegeben (siehe unten).

**Bemerkung:**

**Skalarproduktnorm:** Es ist einfach einzusehen, dass

$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$  eine Norm ist. (Für den Beweis muss man dabei auf die Ungleichung von Cauchy-Schwarz zurückgreifen!)



**Definition:**

Sei  $X$  eine beliebige Menge. Eine Abbildung  $d : (X \times X) \rightarrow K = \mathbb{R}$  heisst **Metrik**, wenn sie die folgende Bedingungen erfüllt:

1.  $d(x, x) = 0$  (identische Punkte haben Abstand 0)
2.  $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$   
(nicht identische Punkte haben nicht Abstand 0)
3.  $d(x, y) = d(y, x)$  (Symmetrie)
4.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$  (Dreiecksungleichung)

**Folgerung:**

Eine Norm  $\| \cdot \|$  auf einem Vektorraum induziert durch die Definition  $d(x, y) = \|x - y\|$  eine Metrik.

**Definition:**

Ein bezüglich einer gegebenen Metrik **vollständiger** oder **abgeschlossener** Raum  $X$  ist ein Raum, in dem jede Cauchy-Folge im Raum gegen einen Grenzpunkt konvergiert, welcher selbst im Raum  $X$  drin liegt.

Im Folgenden beachten wir, dass eine Funktionenmenge einen Vektorraum bilden kann bezüglich der Addition der Funktionswerte bei gleichem Argument und der Streckung mittels Skalaren. Dazu genügt es schon, die lineare Hülle einer endlichen Funktionenmenge (Erzeugendensystem) zu nehmen. Im Erzeugendensystem findet man dann eine endliche Basis (minimal grosses Erzeugendensystem). (Vgl. Kurs „Lineare Algebra“.)

<http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KAlgGdf.pdf>

<http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KAlgGd.pdf>

**Definition:**

Ein **Hilbertraum** ist ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt, welcher vollständig ist bezüglich der durch die Skalarproduktnorm induzierte Metrik ( $B(x, x) := \langle x, x \rangle = \|x\|^2$ ).

**Eigenwertgleichung und Bilinearform im Hilbertraum**

Seien nun  $A(v_1, v_2)$  und  $B(v_1, v_2)$  zwei symmetrische, positiv definite Bilinearformen auf  $V \times V$ , wobei  $V =$  reeller Hilbertraum. (Damit sind durch  $A$  und  $B$  Skalarprodukte gegeben.)

Inspiziert durch die eingangs erwähnte Differentialgleichung sei weiter eine Eigenwertgleichung  $\mathcal{F}(\varphi) = \lambda \mathcal{G}(\varphi)$  gegeben, von welcher wir wissen, dass sie in eine Gleichung mit den obigen Bilinearformen umgewandelt werden kann, die wir wie folgt schreiben:

$$A(\varphi, h) = \lambda B(\varphi, h) \quad \forall \varphi \in U \subseteq V \quad \text{oder auch} \quad \mu A(\varphi, h) = B(\varphi, h), \quad \mu = \frac{1}{\lambda}$$

$h$  ist dabei ein Hilfsvektor oder Hilfsfunktion,  $U$  ein Unterraum von  $V$ ,  $\varphi$  ist Eigenfunktion,  $\lambda$  ist Eigenwert. (Vektoren kann man als spezielle, nämlich als konstante Funktionen betrachten.)

Für zwei angenommene Eigenfunktionen  $\varphi_i, \varphi_j, i \neq j$  zu  $\lambda_i \neq \lambda_j$  gilt nun:

$$\lambda_j B(\varphi_j, \varphi_i) = A(\varphi_j, \varphi_i) = A(\varphi_i, \varphi_j) = \lambda_i B(\varphi_i, \varphi_j) = \lambda_i B(\varphi_j, \varphi_i) \Rightarrow \underbrace{(\lambda_j - \lambda_i)}_{\neq 0} B(\varphi_j, \varphi_i) = 0$$

Somit folgt unter den gemachten Voraussetzungen:  $B(\varphi_i, \varphi_j) = 0$ .

**Satz:** Gegeben sei das oben in diesem Abschnitt genannte Problem. Zu zwei Eigenfunktionen  $\varphi_i, \varphi_k$  mit verschiedenen Eigenwerten  $\lambda_i, \lambda_k$  gilt  $B(\lambda_i, \lambda_k) = 0$

Weiter sieht man sofort:

**Satz:** Die Eigenfunktionen zum selben mehrfachen Eigenwert  $\lambda$  erzeugen einen linearen Raum.

**Beweis:**

$$\begin{aligned} A(k_1 \varphi_1 + k_2 \varphi_2, h) &= k_1 A(\varphi_1, h) + k_2 A(\varphi_2, h) = k_1 \cdot \lambda \cdot B(\varphi_1, h) + k_2 \cdot \lambda \cdot B(\varphi_2, h) \\ &= \lambda \cdot (k_1 B(\varphi_1, h) + k_2 B(\varphi_2, h)) = \lambda \cdot (B(k_1 \varphi_1 + k_2 \varphi_2, h)) \end{aligned}$$

**Vor.:**

Sei nun für ein beliebiges  $u \in U$ ,  $U =$  Unterraum von  $V$ :  $|u| = \sqrt{A(u, u)}$ ,  $\|u\| = \sqrt{B(u, u)}$ .

Sei weiter:

1.  $U$  abgeschlossen bezüglich der eben definierten Metrik  $|\cdot|$ .

D.h. für eine konvergente Folge  $\langle u_n \rangle$  gilt immer  $u_n \rightarrow u \in U$ , wobei es sich hier um Konvergenz bezüglich der genannten Metrik handelt  $|u| = \sqrt{A(u, u)}$ , d.h. um **Konvergenz im Mittel**.

2.  $\exists_{\alpha \in \mathbb{R}^+} \forall_{u \in U} : \|u\| \leq \alpha |u|$  d.h.  $B(u, u) \leq \alpha^2 \cdot A(u, u)$ .

Aus  $|u_n| \rightarrow 0$  folgt also  $\|u_n\| \rightarrow 0$ , aber nicht umgekehrt:  $\|u_n\|$  konvergiert stärker als  $|u_n|$ .

3.  $\forall_{\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq U} \forall_{h \in U} : \left( \lim_{n \rightarrow \infty} A((u_n - u), h) = 0 \right) \Rightarrow \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| = 0 \right)$ .

Unter diesen Voraussetzungen gilt der folgende Satz:

**Satz:**

1. Das Eigenwertproblem  $A(\varphi, h) = \lambda B(\varphi, h) \forall_{\varphi \in U \subseteq V}$  hat unendlich viele positive Eigenwerte endlich grosser Vielfachheit:  
 $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$  mit  $\lambda_n \rightarrow \infty$ .
2. Es existiert ein System von Eigenfunktionen  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$  mit  $B(\varphi_i, \varphi_k) = \delta_{i,k}$ ,  $A(\varphi_i, \varphi_k) = \lambda_i B(\varphi_i, \varphi_k) = \lambda_i \delta_{i,k}$
3. Sei  $u \in U$  beliebig und  $c_k := B(u, \varphi_k)$  (Fourier-Koeffizient)  $\leadsto$   
 $B(u, u) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ ,  $A(u, u) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k c_k^2$

Wer sich in der Theorie der Fourierreihen mühelos bewegen kann, dem mögen die hier aufgestellten Behauptungen wohl nicht allzu grosse Hindernisse bedeuten. Ansonst sei für den Beweis auf die Literatur verwiesen.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Lit.: Showalter, „Hilbert Spaces Methods for Partial Differential Equations“, Pitman, London

Unter den gemachten Annahmen bilden daher die Eigenwerte in unserem Eigenwertproblem eine unendlich positive Folge, welche gegen  $\infty$  strebt. Die Vielfachheit aller Eigenwerte ist endlich. Und die Eigenfunktionen liefern uns die Fourierkoeffizienten.

Wir definieren nun:

**Definition:**  $R(u) = \frac{A(u, u)}{B(u, u)}$  heisst **Rayleigh-Quotient** zu unserem EWP.

Für  $R(u)$  gilt nun:  $\lambda_1 \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1 c_k^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k c_k^2 = A(u, u) = R(u) \cdot B(u, u) = R(u) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$

$\leadsto$  Daher gilt:  $0 < \lambda_1 \leq R(u)$ .

Andererseits gilt für  $\varphi_1$ :  $\lambda_1 c_1^2 = A(\varphi_1, \varphi_1) = R(\varphi_1) \cdot B(\varphi_1, \varphi_1) = R(\varphi_1) \cdot c_1^2 \Rightarrow \lambda_1 = R(\varphi_1)$

**Satz:**  $\lambda_1 = R(\varphi_1) \leq R(u) \quad \forall u \in U$ .

**Konsequenz:** Der erste Eigenwert lässt sich daher durch den Rayleigh-Quotient mit Hilfe einer beliebigen zulässigen Vergleichsfunktion abschätzen.

### 7.1.3 Berechnung des Rayleigh-Quotienten

Wir betrachten wieder das eingangs erwähnte Problem:

$$-y''(x) = k \cdot x \cdot y(x), \quad k > 0, \quad y(0) = y(x_L) = 0$$

**Bemerkung:** Statt  $y(0) = y(x_L) = 0$  könnte man auch z.B.  $y'(0) = y(x_L) = 0$  fordern.

Dieses Problem formen wir nun um, indem wir zwei Operatoren (positiv devinite Bilinearformen) konstruieren. Dazu multiplizieren wir die Gleichung beidseitig mit  $y(x)$  (statt mit einem beliebigen  $u(x)$ ) und integrieren dann beidseitig von  $x = 0$  bis  $x = x_L$ :

$$-\int_0^{x_L} y''(x) \cdot y(x) dx = k \cdot \int_0^{x_L} x \cdot (y(x))^2 dx$$

partielle Integration ergibt:

$$-\int_0^{x_L} y''(x) \cdot y(x) dx = -\underbrace{(y'(x) \cdot y(x)) \Big|_0^{x_L}}_{=0} - \int_0^{x_L} y'(x) \cdot y'(x) dx = \int_0^{x_L} (y'(x))^2 dx$$

Daher — und weil Integrale der Linearitätseigenschaft genügen, ist  $B(y, u) = k \cdot \int_0^{x_L} x \cdot y(x) u(x) dx$  Bilinearformen im Hilbertraum der  $L^2$ -integrierbaren Funktionen (Lebesque-Integral, vorläufig mit der  $L^2$ -Norm  $\|u\|_{L^2} = \sqrt{\int_0^{x_L} (y(x))^2 dx}$  . (zulässige  $u(x)$  und  $y(x)$  erfüllen wegen dem RWP die Randbedingungen.) Damit ist ein Unterraum  $U$  von  $L^2$  festlegen. Nun gilt:

$$\|u\|_{L^2} = \sqrt{\int_0^{x_L} (y(x))^2 dx} = \frac{1}{\sqrt{x_L}} \cdot \sqrt{x_L \cdot \int_0^{x_L} (y(x))^2 dx} = \frac{1}{\sqrt{x_L}} \cdot \sqrt{\int_0^{x_L} x_L \cdot (y(x))^2 dx}$$

$$\Rightarrow \|u\|_{L^2} \geq \frac{1}{\sqrt{x_L}} \cdot \sqrt{\int_0^{x_L} x \cdot (y(x))^2 dx} \geq \frac{1}{\sqrt{x_L}} \cdot \|y\|_B \geq 0$$

Daher ist  $U$  auch gegenüber der  $B$ -Norm abgeschlossen.

Um dagegen  $A(y, u) = - \int_0^{x_L} y''(x) \cdot u(x) dx = \int_0^{x_L} y'(x) \cdot u'(x) dx = - \int_0^{x_L} u''(x) \cdot y(x) dx = A(u, y)$  bilden zu können, fordern wir  $y, u \in C_2$  (zweimal stetig differenzierbar).  $U_2$  sei die kompakte Hülle zu  $C_2$  bezüglich der Metrik  $|\cdot|$ . Daher sind unsere Funktionen in  $S = U \cap U_2$  zu nehmen. Damit erfüllen wir die auf Seite 224 gemachte Voraussetzung (1).

Sei nun  $u(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k} \cos(\omega k x) + c_k \sin(\omega k x)$  eine konvergente Fourierreihe  $\in S$ . Die Existenz einer solchen Reihe ist schon in  $L^2$  gesichert. Nach der obigen Abschätzung ergibt sich mit  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  unter Benutzung von Fourierreihen:

$$\begin{aligned} 0 \leq B(u, u) &= \int_0^{x_L} x \cdot (u(x))^2 dx \leq x_L \cdot \int_0^{x_L} (y(x))^2 dx = x_L \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^2 dx \\ &\leq x_L \cdot (\max(T, 1))^2 \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{2\pi \cdot k}{T}\right)^2 \cdot c_k^2 dx = x_L \cdot (\max(T, 1))^2 \cdot \int_0^{x_L} (u'(x))^2 dx \\ &= -x_L \cdot (\max(T, 1))^2 \cdot \int_0^{x_L} u''(x) \cdot u(x) dx = x_L \cdot (\max(T, 1))^2 \cdot A(u, u) = \alpha^2 \cdot A(u, u) \\ &\Rightarrow 0 \leq \|u\| = \sqrt{B(u, u)} \leq \alpha \sqrt{A(u, u)} = \alpha |u|, \quad |u_n| \rightarrow 0 \Rightarrow \|u\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Damit ist auch Voraussetzung (2) von Seite 224 erfüllt.

Wir untersuchen jetzt die Voraussetzung (3) von Seite 224:

$$\forall \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq U \quad \forall h \in U : \left( \lim_{n \rightarrow \infty} A((u_n - u), h) = 0 \right) \Rightarrow \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| = 0 \right).$$

Sei also  $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq U$  eine beliebige Folge mit  $A((u_n - u), h) = \int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x)) \cdot h(x) dx \rightarrow 0$ ,  $h(x) \in U$  beliebig. Ersetzen wir  $h$  durch  $(u_n - u)$ , so erhalten wir  $A((u_n - u), (u_n - u)) = |u_n - u|^2$ . Konvergiert die Folge  $\langle u_n - u \rangle$  bei einem beliebigen  $u$ , so liegt der Grenzwert von  $(u_n - u)$  und damit  $u$  in  $U$ . Konvergiert die Folge nicht, so existiert bekanntlich immer eine konvergente Teilfolge, und  $u$  liegt entsprechend wieder in  $U$ . Wir können daher allgemein  $u \in U$  und damit speziell für  $h = (u_n - u)$   $\lim_{n \rightarrow \infty} A((u_n - u), (u_n - u)) = \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - u|^2 = 0$  annehmen.

Wegen  $U \subseteq L^2$  gibt es zu  $(u_n - u)$  eine Fourierreihe  $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \cos(\omega k x) + a_k \sin(\omega k x)$ .

Nach Parseval ist nun

$$|u_n - u|^2 = A((u_n - u), (u_n - u)) = - \int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x))'' \cdot (u_n(x) - u(x)) dx.$$

Dabei ist es möglich, dass  $u''(x) \notin C_2$  gilt, dass z.B.  $u''(x)$  als Limes aufgefasst eine Distribution wird. Wegen der  $L^2$ -Integrierbarkeit findet man daher bei partieller Integration allgemein für  $h$ :

$$-\int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x))'' \cdot h(x) dx = -(u_n(x) - u(x))' \cdot h(x) \Big|_{x=0}^{x=x_L} + \int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x))' \cdot h(x)' dx.$$

$u(x)$  muss nach Konstruktion die Randbedingungen erfüllen (obwohl bei  $x_0 = 0$  oder bei  $x_0 = x_L$  auch  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) \neq u(x_0)$  gelten kann). Damit wird  $(u_n(x) - u(x))' \cdot h(x) \Big|_{x=0}^{x=x_L} = 0$ . Somit gilt:

$$\begin{aligned} A(u_n - u, h) &= -\int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x))'' \cdot h(x) dx = +\int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x))' \cdot h(x)' dx \\ &= (u_n(x) - u(x)) \cdot h'(x) \Big|_{x=0}^{x=x_L} - \int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x)) \cdot h(x)'' dx = -\int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x)) \cdot h(x)'' dx \end{aligned}$$

Wählen wir bei  $\omega = \frac{2\pi}{x_L}$  für  $h(x)$  nacheinander die Basisfunktionen der Fourierreihe

$\varphi_{-k}(t) = \frac{2}{x_L} \cos(\omega k t)$  zur Berechnung des Fourierkoeffizienten  $a_{-k}$  sowie  $\varphi_k(t) = \frac{2}{x_L} \sin(\omega k t)$  entsprechend für  $a_k$  und  $\varphi_0(t) = \frac{2}{x_L}$  für  $a_0$ , so können wir jetzt die Fourierkoeffizienten explizit mittels  $A$  berechnen. (Dabei tritt aber in der Fourierreihe nur  $\frac{a_0}{2}$  statt  $a_0$  auf!)

$$A((u_n - u), \varphi_{-k}) = -\int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x)) \cdot \varphi_{-k}(x)'' dx = -\frac{2}{x_L} \int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x)) \cdot (-1)\omega^2 k^2 \cos(\omega k t) dx = \omega^2 k^2 a_{-k}$$

$$A((u_n - u), \varphi_k) = -\int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x)) \cdot \varphi_k(x)'' dx = -\frac{2}{x_L} \int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x)) \cdot (-1)\omega^2 k^2 \sin(\omega k t) dx = \omega^2 k^2 a_k$$

$$A((u_n - u), \varphi_0) = -\int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x)) \cdot \varphi_0(x)'' dx = -\frac{2}{x_L} \int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x)) \cdot 0 dx = 0 = a_0$$

Wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} A((u_n - u), h) = 0$  gilt daher:  $\omega^2 k^2 a_{-k} \rightarrow 0$ ,  $\omega^2 k^2 a_k \rightarrow 0$  und folglich nach Voraussetzung:

$$(\omega^2 k^2 a_{-k})^2 = \omega^4 k^4 a_{-k}^2 = \varepsilon_{-k} \rightarrow 0, \quad (\omega^2 k^2 a_k)^2 = \omega^4 k^4 a_k^2 = \varepsilon_k \rightarrow 0$$

Infolge unserer Gegebenheiten existiert auch das Integral  $\int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x))^2 dt$  (wegen  $u \in L^2$ ).

$$\begin{aligned} \text{Nach Parseval ist damit: } \|u_n(x) - u(x)\|^2 &= B(u_n(x) - u(x), u_n(x) - u(x)) = \int_0^{x_L} x (u_n(x) - u(x))^2 dt \\ &\leq \int_0^{x_L} x_L (u_n(x) - u(x))^2 dt = x_L \int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x))^2 dt = \text{const.}(n) = x_L^2 \left( \frac{a_0}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_{-k})^2 + (a_k)^2 \right) \\ &= \frac{x_L^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_{-k})^2 + (a_k)^2 = \frac{x_L^2}{2} \left( \sum_{k=1}^m (a_{-k})^2 + (a_k)^2 \right) + \varepsilon_r(m) = \frac{x_L^2}{2} \left( \sum_{k=1}^m \frac{\varepsilon_{-k}}{\omega^4 k^4} + \frac{\varepsilon_k}{\omega^4 k^4} \right) + \varepsilon_r(m). \end{aligned}$$

Wähle nun unter den  $m$  Werten  $\varepsilon_{-1}, \varepsilon_1, \varepsilon_{-2}, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{-m}, \varepsilon_m$  den maximalen Wert  $\varepsilon_{\max}(m)$ :

$$\leadsto \frac{x_L^2}{2} \left( \sum_{k=1}^m \frac{\varepsilon_{-k}}{\omega^4 k^4} + \frac{\varepsilon_k}{\omega^4 k^4} \right) + \varepsilon_r(m) \leq \frac{x_L^2 \cdot 2 \cdot \varepsilon_{\max}(m)}{2\omega^4} \left( \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^4} \right) + \varepsilon_r(m). \text{ Dabei ist } \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \right) \leq \frac{4}{3}.$$

(Abschätzung durch  $f(x) = \frac{1}{x^4}$ .) Mit  $m \rightarrow \infty$  wird nun  $\varepsilon_r(m) \rightarrow 0$  und mit  $\varepsilon_{-k}, \varepsilon_k \rightarrow 0$  wird auch  $\varepsilon_{\max}(m) \rightarrow 0$ . Daher gilt:

$$0 \leq \|u_n(x) - u(x)\|^2 \leq \frac{x_L^2 \cdot 2 \cdot \varepsilon_{\max}(m)}{2\omega^4} \cdot \frac{4}{3} + \varepsilon_r(m) \rightarrow 0$$

Somit ist die Voraussetzung (3) bei unserem Randwertproblem auch erfüllt. Man kann also den ersten Eigenwert mittels des Rayleigh-Quotienten und einer geeigneten Eigenfunktion abschätzen. Folglich gilt bei unserem Problem

$$-y''(x) = k \cdot x \cdot y(x), \quad k > 0, \quad y(0) = y(x_L) = 0$$

die folgende Abschätzung:

$$0 \leq \lambda_1 = R(\varphi_1) \leq R(u) \quad \forall u \in U, \quad R(u) = \frac{A(u, u)}{B(u, u)} = \frac{-\int_0^{x_L} y''(x) \cdot y(x) dx}{\int_0^{x_L} x \cdot y(x)^2 dx}$$

### Beispiel:

Wir wählen bei einer Stablänge von 1 intuitiv 10 Testfunktionen und berechnen jeweils den zugehörigen Rayleigh-Quotienten mit Hilfe von *Mathematica* in einer Tabelle:

### Input:

```
xL = 1;
R[y_, x1_] := -NIntegrate[y''[x] y[x], {x, 0, x1}]/
  NIntegrate[x y[x]^2, {x, 0, x1}];
y[x_, 1] := Sin[(Pi)/xL x];
y[x_, 2] := x Sin[(Pi)/xL x];
y[x_, 3] := Sqrt[x] Sin[(Pi)/xL x];
y[x_, 4] := Sqrt[xL - x] Sin[(Pi)/xL x];
y[x_, 5] := x(x - xL);
y[x_, 6] := x (x - xL)^2;
y[x_, 7] := x^2 (x - xL);
y[x_, 8] := x^2 (x - xL)^2;
y[x_, 9] := x^3 (x - xL)^3;
y[x_, 10] := x^4 (x - xL)^4;
Table[y[x_] := y[x, k]; {k, y[x], R[y, xL]}, {k, 1, 10}] // MatrixForm
```

### Output:

$$\begin{pmatrix} 1 & \sin(\pi x) & 19.7392 \\ 2 & x \sin(\pi x) & 21.7797 \\ 3 & \sqrt{x} \sin(\pi x) & 19.6135 \\ 4 & \sqrt{1-x} \sin(\pi x) & 25.5109 \\ 5 & (x-1) \cdot x & 20.0000 \\ 6 & (x-1)^2 \cdot x & 37.3333 \\ 7 & (x-1) \cdot x^2 & 22.4000 \\ 8 & (x-1)^2 \cdot x^2 & 24.0000 \\ 9 & (x-1)^3 \cdot x^3 & 31.2000 \\ 10 & (x-1)^4 \cdot x^4 & 38.8571 \end{pmatrix}$$

Resultat: Den tiefsten Wert 19.6135 erhalten wir mit der 3. Funktion  $\sqrt{x} \sin(\pi x)$ , wobei hier nur eine Näherung wiedergegeben ist. Somit ist  $k < 19.6136$ .  
(Voller numerisch Ausgebener Wert:  $k > 19.613548583248857$ .)

Um weitere genauere Resultate zu erzielen, müssten wir jetzt die exakte Lösung studieren. *Mathematica* liefert:

**Input:**

```
xL = 1;
solv = DSolve[{y''[x] == -k x y[x], y[0] == 0}, y, x] // Flatten
```

**Output:**

$$\left\{ y \rightarrow \text{Function}\left[\{x\}, \text{AiryBi}\left(-\frac{kx}{(-k)^{2/3}}\right) c_2 - \sqrt{3} \text{AiryAi}\left(-\frac{kx}{(-k)^{2/3}}\right) c_2 \right] \right\}$$

Dabei ist (*Mathematica*-Erklärung):

*AiryAi[z]* gives the Airy function *Ai(z)*.

*AiryBi[z]* gives the Airy function *Bi(z)*.

Um diese Funktionen ein wenig zu verstehen, suchen wir ihre Stammfunktionen:

**Input:**

```
Integrate[AiryAi[z], z]
```

**Output:**

$$-\frac{z \left( \sqrt[3]{3} z \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)^2 {}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{z^3}{9}\right) - 3 \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) {}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{z^3}{9}\right) \right)}{9 \cdot 3^{2/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}$$

**Input:**

```
Integrate[AiryBi[z], z]
```

**Output:**

$$\frac{z \left( 3^{2/3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) {}_1F_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{z^3}{9}\right) + z \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)^2 {}_1F_2\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{z^3}{9}\right) \right)}{3 \cdot 3^{5/6} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}$$

( $\Gamma$  bedeutet die wohlbekannte Gammafunktion.)

Um die exakte Lösung zum 1. Eigenwert zu erhalten, müssten wir jetzt diesen 1. Eigenwert exakt kennen. Für nicht exakte Werte gibt es nur die triviale Nulllösung  $y(x) \equiv 0$ .

An der Stelle  $x_L = 1$  erhalten wir die Gleichung  $Bi\left(-\frac{k}{(-k)^{2/3}}\right)c_2 - \sqrt{3}Ai\left(-\frac{k}{(-k)^{2/3}}\right)c_2 = 0$ . In dieser Gleichung ist  $k$  und  $c_2$  unbekannt. Zufällige Werte für  $c_2$  oder den Näherungswert  $k$  einfach einmal anzunehmen und den jeweils anderen Wert zu berechnen, führt nicht unmittelbar zu brauchbaren Resultaten.

Hier können weitere Studien oder numerische Methoden weiterhelfen, die jedoch in einem anderen Rahmen als dem hiesigen behandelt werden müssen. Eine andere Variante zur Erlangung einer Lösung ist die Behandlung eines exakteren Modells als des hier diskutierten z.B. mit der Shooting-Methode.

#### 7.1.4 Eine genauere numerische Näherung für den 1. Eigenwert

Wir berechnen nochmals die Lösung der Eigenwertgleichung, jedoch ohne die 2. Randbedingung. Damit haben wir nur die Anfangsbedingung  $y(x) = 0$  einzugeben, wodurch wir eine Integrationskonstante  $c_2$  erhalten.

**Input:**

```
solv = DSolve[{y''[x] == -k x y[x], y[0] == 0}, y, x] // Flatten
```

**Output:**

$$c_2 Bi\left(-\frac{k x}{(-k)^{2/3}}\right) - \sqrt{3} c_2 Ai\left(-\frac{k x}{(-k)^{2/3}}\right)$$

Hier sehen wir, dass bei einem reellen Eigenwert  $k$  der Term  $\frac{k x}{(-k)^{2/3}}$  komplex werden muss!

Mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten hatten wir für den 1. Eigenwert  $k$  einen Wert kleiner als 19.6135 ermittelt. Wir können daher numerisch eine Nullstelle als 2. Randbedingung nahe bei  $k = 19.0$  suchen, die in die Nähe von  $x = 1$  zu liegen kommen sollte:

**Input:**

```
FindRoot[Im[(yy[x]/.{c2->1,x->1})],{k,19}]
```

**Output:**

$$k -> 18.9563$$

Kontrolle des 2. Randwerts mit dem erhaltenen Resultat:

**Input:**

```
FindRoot[Im[(yy[x]/.{c2->1,k->18.9563})],{x,1}]
```

**Output:**

$$x -> 0.999999$$



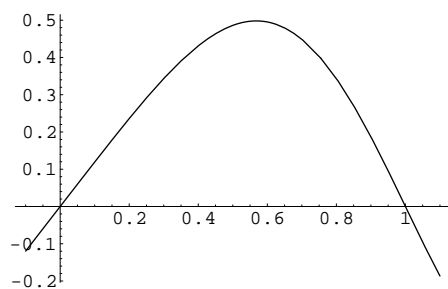
Diese Genauigkeit sollte hier genügen. (Das Programm ist so gebaut, dass die ausgegebenen Ziffern genau sind.)

→ Kontrolle durch Plots für den Realteil und den Imaginäranteil der erhaltenen Funktionen:

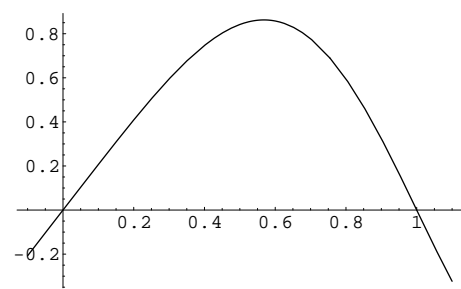
**Input:**

```
Plot[Re[(yy[x]/.{c2->1,k->18.9563})],{x,-0.1,1.1}];
Plot[Im[(yy[x]/.{c2->1,k->18.9563})],{x,-0.1,1.1}];
```

**Output:** Graphiken.



Realanteil



Imaginäranteil

**Input:**

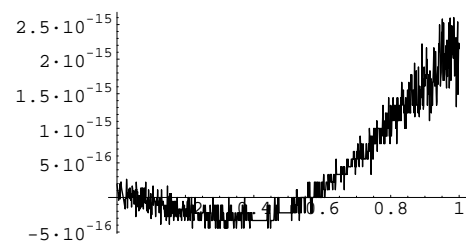
```
Plot[Re[(yy[x]/Re[yy[0.6]]/.{c2->1,k->18.9563})] -
      Im[(yy[x]/Im[yy[0.6]]/.{c2->1,k->18.9563})], {x,0,1}];
```

**Output:** Graphik.

Hier ist zu vermuten, dass die Funktionswerte des Realteils und des Imaginäranteils der gefundenen Lösung zueinander proportional sind:

$$\Re(yy(x)) = \text{const.} \cdot \Im(yy(x))$$

Daher strecken wir die beiden Graphen je mit dem Kehrwert eines Funktionswerts an einer fix gewählten Stelle, z.B. hier bei  $x = 0.6$ .



**Resultat:** Die gefundenen Differenzen zwischen den normierten Funktionen  $\Re(yy(x))$  und  $\Im(yy(x))$  liegen im Bereich der numerischen Ungenauigkeit, wie der wiedergegebene Plot zeigt. Daher können wir als Biegelinie z.B. die Funktion  $\text{const.} \cdot \Re(yy(x))$  verwenden. Die Konstante lässt sich, wie einigangs erwähnt, nicht aus den gemachten Voraussetzungen deduzieren. Somit erhalten wir:

$$yy(x) = \Re \left( Bi \left( -\frac{kx}{(-k)^{2/3}} \right) - \sqrt{3} Ai \left( -\frac{kx}{(-k)^{2/3}} \right) \right), \quad k \approx 18.9563$$

### 7.1.5 Bemerkung zum Ritz–Galerkin–Verfahren

#### 7.1.6 Übersicht

Gegeben sei eine Serie von Vergleichsfunktionen  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ . Das **Ritz–Galerkin–Verfahren** beruht nun darauf, dass man eine Linearkombination dieser Funktionen mit variablen Koeffizienten  $y(x) = \sum_{k=1}^n a_k \cdot y_k(x)$  bildet und dann  $y(x)$  in einen Ausdruck einsetzt, den man aus dem Rayleigh–Quotienten gewinnt. Damit entsteht eine Funktion  $h(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , welche minimal sein soll. Die Minimalitätsbedingung hat nun  $\left(\frac{\partial R}{\partial a_k} = 0 \ \forall a_k\right)$  zur Folge. Daraus kann man ein homogenes Gleichungssystem gewinnen, welches nicht nur die Nulllösung haben soll. So entsteht die Bedingung, dass eine berechenbare Determinante gleich 0 sein soll. Damit gewinnt man ein charakteristisches Polynom, aus dessen Nullstellen man auf den Eigenwert schliessen kann. Wir wollen dieses Verfahren hier beschreiben. Beispiele können hier jedoch des beschränkten Rahmen wegen nicht weiter eingebaut werden. Sie gehören in die Übungen. (Auch ist es fraglich, ob sich der Aufwand für lange Rechnungen vor dem Hintergrund der heute zur Verfügung stehenden Computeralgebra–Methoden beim gegebenen Rahmen noch rechtfertigt. Aus der Kenntnis der Methoden kann aber bei andern Problemen Nutzen gezogen werden.)

#### 7.1.7 Die Methode

Wir wollen hier die Methode im Hinblick auf das gegebene Fachhochschulniveau selbstständig entwickeln, ohne auf Darstellung in der Literatur zu schauen.

Gegeben sei der Rayleigh–Quotient  $\frac{A(u, u)}{B(u, u)} = R(x) \geq \lambda_1 \ \forall u \in U$  eines Problems  $A(u, u) = \lambda B(u, u)$  mit der ersten Eigenfunktion  $u_1$ ,  $A(u_1, u_1) = \lambda_1 B(u_1, u_1)$  wie oben beschrieben, bei gegebenen zulässigen Randbedingungen. Da die verwendeten Operatoren  $A$  und  $B$  positiv definit sind, gilt:

$$0 \leq \lambda_1 B(u, u) \leq A(u, u) \Rightarrow 0 \leq A(u, u) - \lambda_1 B(u, u) := H(u, u, \lambda_1), \quad H(u_1, u_1, \lambda_1) = 0$$

Das heisst:  $H(u, u, \lambda_1)$  ist sicher positiv semidefinit und wird durch eine erste Eigenfunktion  $u_1$  minimiert.

Sei  $M = \{v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x)\} \subset U$  eine Auswahl von Vergleichsfunktionen. Damit bilden wir die Funktion  $v(x) := v_{a_1, a_2, \dots, a_n}(x) := \sum_{i=1}^n a_i v_i(x) \in U$ ,  $a_i \in \mathbb{R} \ \forall i=1, \dots, n$ . Die Koeffizienten  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sollen nun so bestimmt werden, dass  $v(x)$  den Operator  $H(u, u, \lambda_1)$  möglichst klein macht mit der Absicht, dadurch ein Kriterium für eine Schranke von  $\lambda_1$  zu gewinnen. Wir werden sehen, dass  $H(v, v, \lambda_1)$  eine quadratische Funktion in den Koeffizienten  $a_i$  ist, woraus die Existenz eines Minimums folgt. Bei der gewählten endlichen Menge  $M$  ist nun  $v(x)$  eine Linearkombination der bekannten  $v_i(x) \in M$ . Da  $x$  durch die Anwendung des Operators zu einer inneren, gebundenen Variablen wird, können wir setzen:  $H(v, v, \lambda_1) := h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1)$ , wobei  $\lambda_1$  als fixer Parameter zu denken ist. Für ein Minimum erhalten wir somit die Minimalitätsbedingung:

$$\frac{\partial h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1)}{\partial a_i} = 0 \ \forall i=1, \dots, n$$

Um jeweils auf ein spezielles  $a_j$  zugreifen zu können, führen wir eine angepasste Schreibweise ein. Sei also:

$$v(x) := v_{a_1, a_2, \dots, a_n}(x) := a_j v_j(x) + \sum_{i=1, i \neq j}^n a_i v_i(x) := a_j v_j(x) + r_j(x), \quad r_j(x) = \sum_{i=1, i \neq j}^n a_i v_i(x)$$

$r_j(x)$  ist somit unabhängig von  $a_j$ . Daher gilt:

$$h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1) = A(a_j v_j + r_j, a_j v_j + r_j) + \lambda_1 B(a_j v_j + r_j, a_j v_j + r_j)$$

Damit können wir  $A(a_j v_j + r_j, a_j v_j + r_j)$  und  $B(a_j v_j + r_j, a_j v_j + r_j)$  besser „durchleuchten“. Z.B. gilt:

$$\begin{aligned}
A(a_j v_j + r_j, a_j v_j + r_j) &= A(a_j v_j, a_j v_j + r_j) + A(r_j, a_j v_j + r_j) \\
&= A(a_j v_j, a_j v_j) + A(a_j v_j, r_j) + A(r_j, a_j v_j) + A(r_j, r_j) = a_j^2 A(v_j, v_j) + a_j A(v_j, r_j) + a_j A(r_j, v_j) + A(r_j, r_j) \\
&= a_j^2 A(v_j, v_j) + 2 a_j A(v_j, r_j) + A(r_j, r_j)
\end{aligned}$$

Ebenso ist:

$$B(a_j v_j + r_j, a_j v_j + r_j) = a_j^2 B(v_j, v_j) + 2 a_j B(v_j, r_j) + B(r_j, r_j)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1) &= a_j^2 (A(v_j, v_j) - \lambda_1 B(v_j, v_j)) + 2 a_j (A(v_j, r_j) - \lambda_1 B(v_j, r_j)) + (A(r_j, r_j) - \lambda_1 B(r_j, r_j)) \\
&= a_j^2 H(v_j, v_j, \lambda_1) + 2 a_j H(v_j, r_j, \lambda_1) + B(r_j, r_j, \lambda_1)
\end{aligned}$$

Dabei sind hier  $v_j$ ,  $r_j$  und  $\lambda_1$  unabhängig von  $a_j$ . Daher ist es jetzt einfach,  $h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1)$  nach  $a_j$  abzuleiten:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1)}{\partial a_j} &= 2 a_j H(v_j, v_j, \lambda_1) + 2 H(v_j, r_j, \lambda_1) = 0 \quad \forall j=1, \dots, n \\
\Rightarrow a_j H(v_j, v_j, \lambda_1) + H(v_j, r_j, \lambda_1) &= 0 \quad \forall j=1, \dots, n
\end{aligned}$$

Wenn wir den Operator  $H$  wieder durch den Ausdruck in  $A$  und  $B$  ersetzen, so erhalten wir:

$$a_j H(v_j, v_j, \lambda_1) = a_j (A(v_j, v_j) - \lambda_1 B(v_j, v_j)) = (A(v_j, a_j v_j) - \lambda_1 B(v_j, a_j v_j)) \quad \forall j=1, \dots, n$$

$$H(v_j, r_j, \lambda_1) = A(v_j, r_j) - \lambda_1 B(v_j, r_j) = A(v_j, \sum_{i=1, i \neq j}^n a_i v_i) - \lambda_1 B(v_j, \sum_{i=1, i \neq j}^n a_i v_i)$$

Daher ist:

$$\begin{aligned}
0 &= a_j H(v_j, v_j, \lambda_1) + H(v_j, r_j, \lambda_1) = A(v_j, \sum_{i=1}^n a_i v_i) - \lambda_1 B(v_j, \sum_{i=1}^n a_i v_i) \\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i (A(v_j, v_i) - \lambda_1 B(v_j, v_i)) \quad \forall j=1, \dots, n
\end{aligned}$$

Diese Bedingung bedeutet, dass wir ein homogenes System von  $n$  linearen Gleichungen ( $j = 1, \dots, n$ ) mit  $n$  Unbekannten  $a_1, a_2, \dots, a_n$  vor uns haben. Von diesem System suchen wir nicht die Trivallösung  $a_1 = 0, \dots, a_n = 0$ . Nach dem oben Gesagten muss zur Komposition von  $v(x)$  eine nicht triviale Lösung existieren. Daher muss die Determinante dieses Systems  $= 0$  sein.

Die Koeffizientenmatrix dieses Gleichungssystems hat in den Zellen immer Terme der Form  $H(v_j, v_i, \lambda_1) = A(v_j, v_i) - \lambda_1 B(v_j, v_i)$ . Dabei ist  $j$  der Zeilenindex und  $i$  der Spaltenindex. Wir schreiben:

$$d = \det((H(v_j, v_i, \lambda_1))) = \det((A(v_j, v_i) - \lambda_1 B(v_j, v_i))_{j,i=1, \dots, n}) = 0$$

Die Elemente  $A(v_j, v_i)$  und  $B(v_j, v_i)$  sind Zahlen  $\in \mathbb{R}$ , die man mit Hilfe der gegebenen Funktionen  $v_j, v_i$  und den bekannten Operatoren  $A$  und  $B$  berechnen kann. Unbekannt in der Determinante ist bei unserem Ansatz einzig der Eigenwert  $\lambda_1$ . Die Determinante ist nun, wie man aus der Determinantenberechnung weiss, ein Polynom vom Grade  $n$  in  $\lambda_1$  (charakteristisches Polynom). Damit lässt sich für  $\lambda_1$  aus den Elementen der erhaltenen Lösungsmenge eine obere Schranke gewinnen.

Umgekehrt folgt aus  $\det((H(v_j, v_i, \lambda_1))) = 0$ , dass unser Gleichungssystem linear abhängig ist, dass also eine nichttriviale Lösung  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  existiert, welche die Bedingung

$$\frac{\partial h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1)}{\partial a_i} = 0 \quad \forall_{i=1, \dots, n}$$

erfüllen muss, aus der ja das Gleichungssystem gewonnen werden kann. Daher muss die nichttriviale Lösung eine Extremalstelle oder einen sattelartigen Punkt wiedergeben. Daraus kann man ohne weitere Ausführungen plausibel herleiten, dass die kleinste positive Nullstelle des charakteristischen Polynoms den 1. Eigenwert approximiert.

### Konsequenz:

#### Vor.:

Seien  $\{v_1, \dots, v_n\}$  eine zulässige Auswahl von Vergleichsfunktionen  $\in U$ .

#### Beh.:

Die kleinste positive Lösung  $\lambda$  von

$$d = d(\lambda) = \det((A(v_j, v_i) - \lambda B(v_j, v_i))_{j,i=1, \dots, n}) = 0$$

approximiert den 1. Eigenwert.

Der betrachtete Unterraum  $U$ , aus dem unsere Funktionen stammen, lässt sich schreiben als innere direkte Summe der linearen Hülle  $U_1$  der ersten Eigenfunktion  $u_1$  und der der linearen Hülle  $U_1^\perp$  der weiteren Eigenfunktionen  $u_2, u_3, u_4, \dots$ . Dabei wissen wir aus der eingangs behandelten Operatorentheorie, dass die Eigenfunktionen paarweise orthogonal sind. Daher könnten wir dieses Verfahren zur Gewinnung weiterer Eigenwerte ausdehnen. Z.B. um den 2. Eigenwert zu approximieren kann man die Testfunktionen auf  $U_1^\perp$  einschränken, indem man nach der Berechnung die Beiträge aus  $U_1$  entfernt. (Berechnung der 1. Eigenfunktion siehe Seite 230.)

Glücklicherweise ist eine mit Aufwand verbundene Einschränkung der Testfunktionen auf einen Unterraum  $U_1^\perp$  nicht notwendig.

Um das einzusehen betrachten wir unser Eigenwertproblem  $\mathcal{P} : A(\varphi, \varphi) = \lambda B(\varphi, \varphi), \varphi \in U$ . (Mit  $\varphi \in U$  werden unsere Randbedingungen erfüllt.) Nach dem auf Seite 224 dargelegten Satz existiert zu unserem Problem  $\mathcal{P}$  in  $U$  eine abzählbar unendliche Folge von Eigenfunktionen  $\varphi_n$  und dazu eine monoton wachsende Folge von Eigenwerten  $\lambda_n \in \mathbb{R}^+$ . Schränkt man die Menge der zulässigen Funktionen auf  $U_1^\perp \subset U$  ein, so liegen die Eigenfunktionen  $\psi_k$  des eingeschränkten Problems mit  $U_1^\perp$  immer noch in  $U$ , müssen also unter den Funktionen  $\{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  vorkommen. Daher gilt:  $\{\psi_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subset \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Für die zu den  $\psi_k$  gehörigen Eigenwerten  $\mu_k$  gilt entsprechend ebenfalls  $\{\mu_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subset \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Eine Einschränkung unseres Eigenwertproblems auf  $U_1^\perp$  führt also zu Teilmengen der Eigenwerte und der Eigenfunktionen des Eigenwertproblems in  $U$  und etwa nicht zu neuen Eigenwerten oder Eigenfunktionen ausserhalb der Menge derjenigen für  $U$ . Alle Eigenwerte und Eigenfunktionen erfüllen immer die Gleichung  $H(\varphi_k, \varphi_k, \lambda_k) = A(\varphi_k, \varphi_k) - \lambda_k B(\varphi_k, \varphi_k) = 0$  resp.  $H(\varphi_k, \varphi_k, \lambda_k) = 0$ . Zum Eigenwert  $\lambda_2$  ist daher  $H(v, v, \lambda_2)^2 \geq 0$  unabhängig davon, ob  $v$  in  $U$  oder speziell in  $U_1^\perp$  gewählt wird. Sei  $U_M$  die lineare Hülle von  $M$ . Unter Verwendung der schon oben benutzten Bezeichnungen existiert nun wegen  $H(v, v, \lambda_2)^2 \geq 0$  in  $U_M$  für  $H(v, v, \lambda_2)^2 = h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1)^2$  ein Minimum bei einer speziellen Wahl der Koeffizienten  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . (Denn bei  $h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1)^2$  handelt es sich um ein Polynom vom Grade 4.) Dieses Minimum findet man mit Hilfe der Minimalitätsbedingung

$$\frac{\partial h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1)^2}{\partial a_i} = 2 \cdot \frac{\partial h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1)}{\partial a_i} \cdot h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1) = 0 \quad \forall_{i=1, \dots, n}.$$

Bei der Wahl von beliebigen, von den zugehörigen Eigenfunktionen verschiedenen Testfunktionen ist  $h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1) \neq 0$ , und daher  $\frac{\partial(h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1)^2)}{\partial a_i} = 0$ . Somit wird das charakteristische Polynom  $d(\lambda) = 0$ , woraus man den Eigenwerte berechnen kann. Damit ist auch der 2. Eigenwert eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms, falls  $M$  genügend gross gewählt wird (siehe unten). Würde man andererseits zufällig  $M = \{v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x)\}$  aus lauter Eigenfunktionen zum 2. Eigenwert bilden, so wäre  $h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1) \equiv 0$  und somit  $\frac{\partial h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1)^2}{\partial a_i}$  ebenfalls  $= 0$ .

Zur genügend grossen Wahl von  $M$ :

Wählt man zur Approximation von  $\lambda_1$  die Menge  $M = \{\varphi_3\}$  ( $\varphi_3 = 3$ . Eigenfunktion), so wird man  $\lambda_3$  statt  $\lambda_1$  finden. Wählt man zur Approximation von  $\lambda_2$  entsprechend  $M = \{\varphi_3, \varphi_4\}$ , so findet man  $\lambda_3$  und  $\lambda_4$ , aber nicht  $\lambda_2$ , denn man approximiert ja über  $U_M$ .

Um bei der Bildung von  $v(a_1, a_2, \dots, a_n)$  zur Berechnung von  $\lambda_2$  bei einer Approximation über  $U$  einen Funktionsanteil aus  $U_{\{\varphi_2\}}$  mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit nicht ausgeschlossen zu haben, muss  $M$  mindestens  $n = 2$  (linear unabhängige) Testfunktionen enthalten. Geht man entsprechend vor zur Berechnung des 3., 4. oder allgemein des  $n$ -ten Eigenwerts  $\lambda_n$ , so muss  $|M| \geq n$  sein. ( $M$  linear unabhängig.) Zusammengefasst ergibt sich nun

### Konsequenz:

Die Eigenwerte der 2., 3., u.s.w. Eigenfunktionen von  $A(\varphi, \varphi) = \lambda B(\varphi, \varphi)$  werden durch die weiteren Nullstellen  $\lambda_n > \lambda_1$  des charakteristischen Polynoms über  $U$  bei günstiger Wahl der Testfunktionen  $M = \{v_1, \dots, v_n\}$  approximiert. Zur Approximation von  $n$  verschiedenen Eigenwerten ist für die Menge der Testfunktionen  $M$  die Bedingung  $|M| = n$  notwendig, aber nicht hinreichend.

Daher wird es plausibel, bei der Approximation der weiteren Eigenwerte nach dem auf Seite 230 gezeigten Verfahren mit `DSolve` und `FindRoot` Startwerten aus der Nullstellenmenge der charakteristischen Polynoms zu verwenden.

### Bsp.:

#### Input:

```
xL=1;
y1[x_]:=Sin[(Pi)/xL x];
y2[x_]:=x^2 (x-xL)^2;
y3[x_]:=x(x-xL);
A[ya_,yb_]:= -Integrate[D[ya[x],{x,2}] yb[x],{x,0,xL}];
B[ya_,yb_]:= Integrate[x ya[x] yb[x],{x,0,xL}];
H[ya_,yb_,lambda_]:= A[ya,yb] - lambda B[ya,yb];
m = {{H[y1,y1,lambda],H[y1,y2,lambda],H[y1,y3,lambda]},
      {H[y2,y1,lambda],H[y2,y2,lambda],H[y2,y3,lambda]},
      {H[y3,y1,lambda],H[y3,y2,lambda],H[y3,y3,lambda]}};
Print[m//Simplify//MatrixForm];
Print[Det[m]//N//ExpandAll//Simplify];
NSolve[Det[m]==0,{lambda}]
```

#### Output (Matrix):

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}(2\pi^2 - \lambda) & -\frac{2(-12 + \pi^2)(2\pi^2 - \lambda)}{\pi^5} & \frac{2(\lambda - 2\pi^2)}{\pi^3} \\ -\frac{2(-12 + \pi^2)(2\pi^2 - \lambda)}{\pi^5} & \frac{24 - \lambda}{1260} & \frac{1}{840}(3\lambda - 56) \\ \frac{2(\lambda - 2\pi^2)}{\pi^3} & \frac{1}{840}(3\lambda - 56) & \frac{20 - \lambda}{60} \end{pmatrix}$$

**Output (Determinante):**

$$-5.93327 * 10^{-14}(\lambda - 692.818)(\lambda - 178.23)(\lambda - 19.739)$$

**Output (Lösungen für  $\lambda$ ):**

$$\{\{\lambda \rightarrow 19.739\}, \{\lambda \rightarrow 178.23\}, \{\lambda \rightarrow 692.818\}\}$$

Wir kontrollieren und verbessern nun die Resultate mit *Mathematica*. Dabei benutzen wir das auf Seite 230 beschriebene Verfahren und auch die dazugehörigen Programme:

**Zur Approximation = 178.23:**

**Input:**

```
FindRoot[Re[(yy[x]/.{c2->1,x->1})],{k,178.23}]
```

**Output:**

$$x- > 189.221$$

**Input:**

```
FindRoot[Im[(yy[x]/.{c2->1,x->1})],{k,189.221}]
```

**Output:**

$$x- > 189.221$$

**Input:**

```
FindRoot[Re[(yy[x]/.{c2->1,x->189.221})],{x,1.}]
```

**Output:**

$$x- > 1.$$

**Input:**

```
FindRoot[Im[(yy[x]/.{c2->1,x->189.221})],{x,1.}]
```

**Output:**

$$x- > 1.$$

**Resultat:** Der 2. gefundene Eigenwert liegt bei 189.221. (Die Approximation ergab 178.23.)

**Zur Approximation = 692.818:**

**Input:**

```
FindRoot[Re[(yy[x]/.{c2->1,x->1})],{k,692.818}]
```

**Output:**

$$x- > 777.698$$

**Input:**

```
FindRoot[Im[(yy[x]/.{c2->1,x->1})],{k,777.698}]
```

**Output:**

$$x- > 777.698$$

**Input:**

```
FindRoot[Re[(yy[x]/.{c2->1,x->777.698})],{x,1.}]
```

**Output:**

$$x- > 1.$$

**Input:**

```
FindRoot[Im[(yy[x]/.{c2->1,x->777.698})],{x,1.}]
```

**Output:**

$$x- > 1.$$

**Resultat:** Der 3. gefundene Eigenwert liegt bei 777.698. (Die Approximation ergab 692.818.)





## Kapitel • Chapitre 8

# Partielle Differentialgleichungen (Anhang 2) — Annexe 2 (sans traduction)

- *Ici, il y a pour le moment seulement le texte allemand à disposition. Momentanément, la traduction française manque encore.*

## 8.1 Partielle Differentialgleichungen

Für die Ableitungen werden wir folgende Notationsarten verwenden:

$$u_y := \frac{du}{dy} \Big|_{x=\text{const.}} = u'_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_{yx} := u''_{yx} = \frac{\partial^2 u}{\partial xy}$$

### 8.1.1 Quasilineare part. D'gl 1. Ordnung mit zwei Variablen

#### Die Charakteristikmethode

Sei  $u_x := u'_x(x, y)$ ,  $u_y := u'_y(x, y)$  und  $z := u(x, y)$  ( $\leadsto$  Fläche). Wir studieren das Problem

$$\mathcal{D}(u) := a(x, y, z) u_x + b(x, y, z) u_y = \left\langle \begin{pmatrix} a(x, y, z) \\ b(x, y, z) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \right\rangle = c(x, y, z).$$

**Sprechweise:** Eine Funktion  $z = u(x, y)$ , welche obige Gleichung erfüllt, eine Lösungsfunktion also, stiftet eine Fläche, die wir **Integralfläche** nennen.

Wir setzen fest:  $v(x, y, z) := u(x, y) - z = 0 = \text{const.}$ . Der Gradient  $\vec{n} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ -1 \end{pmatrix}$  ist bekanntlich ein Normalenvektor auf die Integralfläche zum Niveau 0 in  $(x, y, z)$ . Weiter gilt wegen der D'gl.:

$$\left\langle \vec{n}, \begin{pmatrix} a(x, y, z) \\ b(x, y, z) \\ c(x, y, z) \end{pmatrix} \right\rangle = a(x, y, z) u_x + b(x, y, z) u_y - c(x, y, z) = 0$$

Da obiges Skalarprodukt gleich  $a(x, y, z) u_x + b(x, y, z) u_y + c(x, y, z)(-1) = 0$  ist, erkennen wir  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x, y, z) \\ b(x, y, z) \\ c(x, y, z) \end{pmatrix}$  als Tangentialvektor an die Integralfläche. Wir definieren nun:

**Definition:**

Eine Kurve  $\vec{\gamma} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$  mit  $t \mapsto \vec{\gamma}(t)$  heisst **Charakteristik** oder **charakteristische Kurve** von  $\mathcal{D}(u) = c$ , wenn sie eine Integalkurve des nachfolgenden Vektorfeldes ist:

$$\vec{\gamma}_t' = \begin{pmatrix} a(\vec{\gamma}^T(t)) \\ b(\vec{\gamma}^T(t)) \\ c(\vec{\gamma}^T(t)) \end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} a(x, y, z) \\ b(x, y, z) \\ c(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

( $\vec{\gamma}^T(t)$  ist transponiert, also Zeilenvektor). Wir wollen folgendes Lemma beweisen:

**Lemma:**

**Vor.:**

Die Charakteristik  $\gamma$  hat mit der Integralfläche einen Punkt gemeinsam.

**Beh.:**

$\gamma$  liegt in der Integralfläche.

Mit Hilfe dieses Lemmas werden wir die Integralfläche mittels Charakteristiken erzeugen oder beschreiben können.

**Beweis:**

Betrache  $u(\vec{\gamma}^T(t)) - z(t) := u(x(t), y(t)) - z(t) = v(t)$ .

$$\leadsto v_t' = u_x \cdot x_t + u_y \cdot y_t + (-1) z_t = \left\langle \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{\gamma}_t' \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad \forall t$$

$$\Rightarrow v_t' = \text{const.}$$

Wegen  $v_t' = \text{const.}$  ist mit  $v(t_0) = 0$  auch  $v(t) \equiv 0$ . D.h.  $u(\vec{\gamma}^T(t)) = z(t)$ . ☺

Damit können wir den folgenden Satz formulieren:

**Satz:****Vor.:**

1. Sei  $\vec{\Gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Kurve auf der Integralfläche zu  $\mathcal{D}(u) = c$ , welche die Charakteristiken transversal schneidet (Schnittwinkel  $\neq 0$ ).
2. Für jedes  $s$  sei die Kurve  $\vec{\gamma}_s(t)$  eine Charakteristik mit  $\vec{\gamma}_s(0) = \vec{\Gamma}(s)$

**Beh.:**

$(s, t) \mapsto \vec{\gamma}_s(t)((s, t))$  ist eine Parameterdarstellung der Integralfläche in einer Umgebung  $\Gamma$  (in der Nähe von  $\Gamma$ ).

Damit können wir zur Lösung einer gegebenen part. D'gl.  $\mathcal{D}(u) = c$  versuchen die Charakteristiken zu bestimmen. Mit Hilfe von  $\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} = \vec{\gamma}_t' = \begin{pmatrix} a(\vec{\gamma}^T(t)) \\ b(\vec{\gamma}^T(t)) \\ c(\vec{\gamma}^T(t)) \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \vec{\gamma}(t)$  ist dies bei einer als Nebenbedingung gegebenen Kurve  $\vec{\Gamma}(s)$  meist nicht schwierig.

**Bsp.:** Gegeben:  $\mathcal{D}(u) = 2u_x + y \cdot u_y - x = x_0 u_x + y \cdot u_y + z(-1) = 0$ ,  $u(2, y) = 2y - 3$ ,  $0 \leq y \leq 4$

$$1. \leadsto u(2, y) = 2y - 3 \Rightarrow \Gamma : s \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ y \\ u = z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ y \\ 2y - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ s \\ 2s - 3 \end{pmatrix}$$

$$2. \leadsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ y \\ x \end{pmatrix} = \vec{\gamma}_t' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{aligned} x_t'(t) = 2 &\Rightarrow x(t) = 2t + c_1 \\ y_t'(t) = y(t) &\Rightarrow y(t) = e^t \cdot c_2 \\ z_t'(t) = x(t) &\Rightarrow z(t) = t^2 + t \cdot c_1 + c_3 \\ \leadsto \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t + c_1 \\ e^t \cdot c_2 \\ -t^2 + t \cdot c_1 + c_3 \end{pmatrix} &\Rightarrow \vec{\gamma}(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$4. \vec{\gamma}_s(0) = \vec{\Gamma}_s = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ s \\ 2s - 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\gamma}_s(t) = \begin{pmatrix} 2t + 2 \\ e^t \cdot s \\ t^2 + t \cdot 2 + 2s - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow t = \frac{x-2}{2}, \quad s = y \cdot e^{-t} = y \cdot e^{-\frac{x-2}{2}}$$

$$5. \quad u(x, y) = z = t^2 + 2t + 2s - 3 = \left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{x-2}{2}\right) + 2y e^{-\frac{x-2}{2}} - 3 = \frac{x^2}{4} + 2e^{1-\frac{x}{2}}y - 4$$

### 8.1.2 Klassifikation bei part. D'gl. 2. Ordnung

Eine **partielle Differentialgleichung** ist eine Differentialgleichung, in der Ableitungen nach verschiedenen Variablen vorkommen. Wir werden hier in unserem kurzen Ausblick nur Differentialgleichungen bis 2. Ordnung studieren und auch von einer eingehenden Betrachtung von Fällen mit mehr als zwei Variablen des gesteckten Rahmens wegen absehen müssen. Zuerst wollen wir eine heute überall verwendete nützliche Klassifikation erklären. Gegeben sei dazu eine Differentialgleichung mit zwei Ortsvariablen  $x$  und  $y$  und technisch unauffälligen, vernünftigen Lösungen, so dass wir von  $u_{xy} = u_{yx}$  ausgehen können:

$$a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + b_1 u_x + b_2 u_y + c u = f \quad (=0)$$

Mit  $\vec{D} := \begin{pmatrix} \frac{\partial \cdot}{\partial x} \\ \frac{\partial \cdot}{\partial y} \end{pmatrix} = \text{grad}(\cdot)$  können wir diese Gleichung unter Beachtung der Symmetrie  $a_{12} = a_{21}$

kürzer schreiben: 
$$\vec{D}^T \cdot u(x, y) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{=A} \cdot \vec{D} + u \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cdot \vec{D} + u \cdot c = f$$

Dabei ist  $\det(A) = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2$ .

Wir transferieren das Problem jetzt formal in die analytische Geometrie, indem wir setzen:

$$u_x = \alpha, \quad u_y = \beta, \quad u_{xx} = \alpha^2, \quad u_{yy} = \beta^2, \quad u_{xy} = \alpha \cdot \beta, \quad u = 1$$

Damit wird die Differentialgleichung zu einer Kegelschnittgleichung:

$$\Rightarrow P(\alpha, \beta) = a_{11} \alpha^2 + 2a_{12} \alpha \cdot \beta + a_{22} \beta^2 + b_1 \alpha + b_2 \beta + c = 0$$

Hier verwendet man die folgende Klassifikation der Kegelschnitte:

$$\begin{array}{lll} a_{12}^2 - a_{11} a_{22} = -\det(A) & > 0 & \text{Hyperbel} \\ a_{12}^2 - a_{11} a_{22} = -\det(A) & = 0 & \text{Parabel} \\ a_{12}^2 - a_{11} a_{22} = -\det(A) & < 0 & \text{Ellipse} \end{array}$$

Aus formalen Gründen übernehmen wir diese Klassifikation auch für die partiellen Differentialgleichungen:

$$\begin{array}{lll} \det(A) & < 0 & \text{Differentialgleichung hyperbolisch} \\ \det(A) & = 0 & \text{Differentialgleichung parabolisch} \\ \det(A) & > 0 & \text{Differentialgleichung elliptisch} \end{array}$$

### 8.1.3 Verfeinerung der Klassifikation

Allgemeiner sein eine partielle Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten auf  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  gegeben:

$$(*) \quad \mathcal{D}(u) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c u = 0$$

(Dabei ist  $a_{ij}, b_i, c = \text{const.}$ )

**Definition:**

1. (\*) **elliptisch**  $\Leftrightarrow$  alle Eigenwerte von  $(a_{ij})$  entweder positiv oder negativ, kein Eigenwert  $= 0$ .
2. (\*) **hyperbolisch**  $\Leftrightarrow$  es gibt positive und negative Eigenwerte von  $(a_{ij})$ , keiner ist  $= 0$ .
3. (\*) **parabolisch**  $\Leftrightarrow (a_{ij})$  hat einen Eigenwert  $= 0$ , d. h. nicht nach allen Variablen wird zweimal abgeleitet.

Nun gelten folgende Sachverhalte:

1. Diese Typeneinteilung ist unabhängig von den Variablen.
2. Bei einer bijektiven Variablentransformation bleibt der Typ erhalten.
3. Es gilt die Erfahrungsregel:
  - (a) Beim elliptischen Typ braucht es Randbedingungen.
  - (b) Beim parabolischen Typ braucht es Randbedingungen und Anfangsbedingungen.
  - (c) Beim hyperbolischen Typ braucht es Bedingungen für Werte und Ableitungen und ev. Randbedingungen.

**Beispiele:**

1.  $\Delta u = 0$ : Laplace-Gleichung, elliptisch.
2.  $\Delta u = f$ : Poisson-Gleichung, elliptisch.
3.  $u_t = a^2 \Delta u$ : Wärmeleitgleichung, parabolisch.
4.  $u_{tt} = c^2 \Delta u$ : Wellengleichung, hyperbolisch.

Sei (\*)  $\mathcal{D}(u) = f$ .

Diese Gleichung nennen wir **homogen**, wenn  $f \equiv 0$  gilt.  
 (\*) heisst hingegen **inhomogen**, wenn  $f \not\equiv 0$  ist.

Entsprechend für die Nebenbedingungen.

Nun gilt das Superpositionsprinzip für die homogene Gleichung mit homogenen Nebenbedingungen:

**Satz:**

Gegeben sei  $\mathcal{D}(u) = 0$  mit homogenen Nebenbedingungen.  
 $\{u_i \mid i \in I\}$  sein eine Menge von Lösungen (Basislösungen).

Dann ist  $\sum_{i=1}^n c_i u_i$  ebenfalls Lösung ( $c_i \in \mathbb{R}$ ).

### 8.1.4 Das Beispiel der Wärmeleitungsgleichung

#### Homogene Randbedingungen in $x$

Die Wärmeleitungsgleichung ist eine parabolische Differentialgleichung ( $\det(A) \cdot 0^2 - a_{11} \cdot 0 = 0$ ). Wir studieren den folgenden Fall eines 1-dimensionalen Drahtes (oder Welle, Stab, Stange oder Rute):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < x_L$$

Dabei stellen wir die Rand- und Anfangsbedingungen:

$$\text{RBD: } u(0, t) = 0 = u(x_L, t) \text{ für } t \geq 0$$

$$\text{ABD: } u(x, 0) = f(x) \text{ für } 0 \leq x \leq x_L$$

$u(x, t)$  bedeutet dabei die Temperatur an der Stelle  $x$  zur Zeit  $t$ .  $k$  ist die Temperaturleitfähigkeit<sup>2</sup>.  $u(0, t) = 0 = u(x_L, t)$  bedeutet, dass man die Temperatur so geeicht hat, dass am Rand des Stabs die Temperatur 0 herrscht.

Für  $f(x)$  fordern wir:  $f \in L^2$  über  $I = [0, x_L]$ . Wenn wir also für  $f$  eine ungerade, stückweise stetige,  $2x_L$ -periodische Funktion voraussetzen, ist die eben gestellte Forderung erfüllt.

Jetzt versuche wir einen Separationsansatz:  $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ .

Diesen Ansatz setzen wir in die Gleichung ein und erhalten:

$$X(x) \cdot T'(t) = k \cdot X''(x) \cdot T(t) \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{k} \cdot \frac{T'(t)}{T(t)}}_{=h_1(t)} = \underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_{=h_2(x)}$$

Daraus folgt:  $k \cdot h_2(x) = h_1(t) = \text{const.}$ , denn für ein fixes  $t_0$  ist  $c_1 = k \cdot h_2(x) = h_1(t_0)$  und für ein fixes  $x_0$  folgt  $k \cdot h_2(x_0) = h_1(t) = c_2 \Rightarrow c_1 = c_2 = \text{const.} = c$ . Damit erhalten wir ein Gleichungssystem, in dem wir hier gleiche Temperaturen an den Stabsenden voraussetzen. Dabei normieren wir die Temperaturskala so, dass die Temperatur an den Stabsenden 0 wird:

$$\left| \begin{array}{lcl} (1) & \frac{1}{k} \cdot \frac{T'(t)}{T(t)} & = c \\ (2) & \frac{X''(x)}{X(x)} & = c \end{array} \right| \quad \begin{array}{lcl} X(0) \cdot T(t) & = & 0 \\ X(x_L) \cdot T(t) & = & 0 \\ \Rightarrow X(0) = X(x_L) & = & 0 \end{array}$$

Anders geschrieben:

$$(1) T'(t) = c \cdot T(t), \quad (2) X''(x) = c \cdot X(x)$$

Auf die eingangs gestellte Anfangsbedingung  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $0 \leq x \leq x_L$  werden wir erst später zurückgreifen.

Damit erhalten wir mit (2) ein Eigenwertproblem für  $X$ :

$$X''(x) = c \cdot X(x), \quad X(0) = X(x_L) = 0$$

Die Basislösungen dieses Problems kennen wir bereits ( $c = c_n$  ist Eigenwert,  $X(x) = X_n(x)$  ist Eigenfunktion,  $A_n$  ist beliebig):

$$X_n(x) = A_n \cdot \sin(\sqrt{c_n} \cdot x) = A_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{x_L} \cdot x\right), \quad c_n = -\frac{n^2 \cdot \pi^2}{x_L^2}$$

<sup>2</sup>Lit.: Siehe z.B. bei Jürgen Eichler, Physik, Grundlagen für das Ing'studium, Vieweg 2004, p. 107

Die Eigenwerte erhält man übrigens durch Einsetzen der Eigenfunktion in die Eigenwertgleichung infolge der 2. Ableitung.

Und der Fall  $n = 0$  fällt hier weg, denn dann wäre  $X_0(x) = A_0 \cdot \sin(\frac{0 \cdot \pi \cdot x}{x_L}) \equiv 0$ ,  $c_0 = -\frac{0^2 \cdot \pi^2}{x_L^2} = 0$ .

Weiter gilt:  $A_{-n} \cdot \sin(\frac{(-n) \cdot \pi \cdot x}{x_L}) = -A_n \cdot \sin(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{x_L})$  bei vorläufig freiem  $A_n$ . Für negative  $n$  erhalten wir also keine neuen Lösungen.

Nun setzen wir die Eigenwerte in Gleichung (1) ein. Es folgt für  $T(t) = T_n(t)$ :

$$T_n'(t) = k \cdot c_n \cdot T_n(t) = -k \cdot \frac{n^2 \cdot \pi^2}{x_L^2} \cdot T_n(t) \Rightarrow T_n'(t) + k \cdot \frac{n^2 \cdot \pi^2}{x_L^2} \cdot T_n(t) = 0$$

Hier kennen wir wiederum die Basislösungen:

$$T_{n,B}(t) = e^{-k \cdot \frac{n^2 \cdot \pi^2}{x_L^2} \cdot t}, \quad T_{n,B}(0) = 1, \quad T_n'(t) = B_n \cdot T_{n,B}(t).$$

Zu einem gegebenen  $k$  existieren demnach mehrere Lösungen  $u_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$ . Solche Lösungen lassen sich jetzt unter Beachtung der gegebenen Differentialgleichung auch strecken und addieren, da alle beteiligten Funktionen die Randbedingungen erfüllen und daher die Summe auch die RBD erfüllen muss. Mit  $C_n = A_n \cdot B_n$  können wir mit Hilfe der Basislösungen schreiben, wobei wir z.B. statt  $T_{n,B}(t)$  nun kurz  $T_n(t)$  setzen:

$$\left| \begin{array}{lcl} C_n \cdot X_n(x) \cdot T_n'(t) & = & k \cdot C_n \cdot X_n''(x) \cdot T_n(t) \\ C_m \cdot X_m(x) \cdot T_m'(t) & = & k \cdot C_m \cdot X_m''(x) \cdot T_m(t) \end{array} \right|$$

$$\Rightarrow C_n \cdot X_n(x) \cdot T_n'(t) + C_m \cdot X_m(x) \cdot T_m'(t) = k \cdot C_n \cdot X_n''(x) \cdot T_n(t) + k \cdot C_m \cdot X_m''(x) \cdot T_m(t)$$

**Lemma:**

Mit  $u_j(x, t) = C_j \cdot X_j(x) \cdot T_j(t)$  ist die Summe zweier Lösungen

$$u_{\text{Summe}}(x, t) = u_n(x, t) + u_m(x, t)$$

wieder Lösung der Wärmeleitungsgleichung.

Wie wir gesehen haben, existieren unabhängige Lösungen nur für  $n > 0$ . Daher können wir formulieren:

**Lemma:** 
$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot X_n(x) \cdot T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right) \cdot e^{-k \cdot \frac{n^2 \cdot \pi^2}{x_L^2} \cdot t}$$

Wegen der Randbedingung  $u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right)$  haben wir für  $u(x, 0)$  eine Fourierreihe (Sinusreihe) gegeben. Dabei ist  $f$ , wie eingangs erwähnt, eine ungerade, stückweise stetige,  $2x_L$ -periodische Funktion.

Demnach haben wir das Problem, die Fourierkoeffizienten  $c_n$  zu berechnen. Von den Fourierkoeffizienten und den Fourierreihen wissen wir:

1.

$$\int_{-x_L}^{x_L} \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right) dx = x_L \cdot \delta_{mn}$$

$\delta_{mn}$  ist das Kronecker-Symbol mit der Bedeutung:  $\delta_{mn} = 1$  für  $m = n$  und  $\delta_{mn} = 0$  sonst.

$$\begin{aligned}
2. \quad \int_{-x_L}^{x_L} f(x) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right) dx &= \int_{-x_L}^{x_L} \left( \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right) \right) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right) dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \int_{-x_L}^{x_L} \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot x_L \cdot \delta_{mn} \\
\Rightarrow \int_{-x_L}^{x_L} f(x) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right) dx &= 2 \int_0^{x_L} f(x) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right) dx = C_m \cdot x_L \\
\Rightarrow C_m &= \frac{2}{x_L} \int_0^{x_L} f(x) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right) dx \quad \text{Damit gilt:}
\end{aligned}$$

**Satz:**

Die Wärmeleitgleichung  $\frac{\partial u}{\partial t} = k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $0 < x < x_L$  mit den Rand- und Anfangsbedingungen

RBD:  $u(0, t) = 0 = u(x_L, t)$  für  $t \geq 0$

ABD:  $u(x, 0) = f(x)$  für  $0 \leq x \leq x_L$

hat bei ungeradem, stückweise stetigem und  $2x_L$ -periodischem  $f$  die folgende Lösung:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{x_L} \int_0^{x_L} f(x) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right) dx \right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right) \cdot e^{-k \frac{n^2 \cdot \pi^2}{x_L^2} \cdot t}$$

**Konsequenz:** Sind die Fourierkoeffiziente von der üblichen Gestalt, dass keine Konvergenzprobleme auftreten, so gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-k \frac{n^2 \cdot \pi^2}{x_L^2} \cdot t} = 0$  und damit auch  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$ . Das ist natürlicherweise auch zu erwarten.

**Bsp.:** Wir berechnen  $u(x, t)$  mit *Mathematica* bei folgenden Bedingungen:

$$x_L = 1, \quad k = 1, \quad f(x) = 8x(1 - x^2)$$

Dann stellen wir  $u(x, t_n)$  graphisch dar für

$$n = 0., 0.03125, 0.0625, 0.09375, 0.125, 0.15625, 0.1875, 0.21875, 0.25$$

**Input:**

```

Remove["Global`*"]
xL = 1; k = 1;
f[x_] := 8 x (1 - x^2);
mm = 10; r = 3.5;
Cc[n_] := 2/xL NIntegrate[f[x] Sin[n Pi x /xL], {x, 0, xL}];
u[x_, t_, n_] := Cc[n] Sin[n Pi x /xL] E^(-k t (n Pi/xL)^2);
uApprox[x_, t_, n_] := Sum[u[x, t, j], {j, 1, n}];
graphs = Table[Plot[uApprox[x, t, mm], {x, 0, xL},
  PlotRange -> {0, r}, Ticks -> {{0, 1},
    Range[0, Floor[r]]},
  DisplayFunction -> Identity], {t, 0, 1/4, 1/32}];
graphsarray = Partition[graphs, 3];

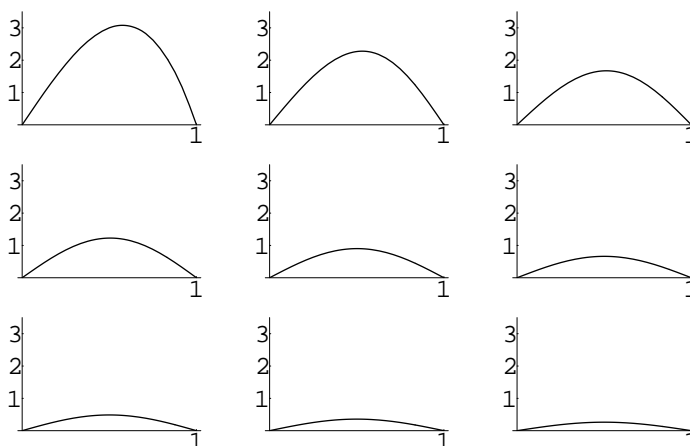
```



```
Show[GraphicsArray[graphsarray],
      DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

**Output:**

Graphik



**Bemerkung:**

Es ist auch möglich, Wärmeleitgleichung mit Hilfe der Laplace-Transformationen zu behandeln. So kann man in  $u(x, t)$  die Variable  $x$  als Parameter auffassen und die Gleichung bezüglich der Variablen  $t$  transformieren:  $u(x, t) \circ \bullet U(x, s)$ . Wenn man dann im Bildraum die Betrachtungsweise wieder vertauscht und  $x$  als Variable und  $s$  als Parameter auffasst, so hat man hier eine gewöhnliche Differentialgleichung, die man einfach lösen und als eine Sinusreihe (Fourierreihe mit der Variablen  $x$ ) schreiben kann. Diese Sinusreihe kann man bezüglich dem Parameter  $s$  zurücktransformieren, wodurch man die oben festgestellte Lösung erhält. Die explizite Durchführung des Verfahrens sei als Übung dem Leser überlassen.

### Inhomogene Randbedingungen in $x$

Wir betrachten nun das verwandte Problem

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad 0 < x < x_L$$

mit inhomogene Randbedingungen und obigen Anfangsbedingungen:

$$\text{RBD: } v(0, t) = a, \quad v(x_L, t) = b \text{ für } t \geq 0$$

$$\text{ABD: } v(x, 0) = g(x) \text{ für } 0 \leq x \leq x_L$$

Dieses Problem vergleichen wir mit dem oben besprochenen Problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < x_L$$

mit den homogene Randbedingungen und den Anfangsbedingungen:

$$\text{RBD: } u(0, t) = u(x_L, t) = 0 \text{ für } t \geq 0$$

$$\text{ABD: } u(x, 0) = f(x) \text{ für } 0 \leq x \leq x_L$$

Sei  $u$  eine Lösung des Problems mit den homogenen Randbedingungen. Es gilt also

$$u(0, t) = u(x_L, t) = 0 \text{ für } t \geq 0, \quad u(x, 0) = f(x) \text{ für } 0 \leq x \leq x_L.$$

Wir setzen nun  $v(x, t) = u(x, t) + h(x)$ ,  $h(x) = \frac{(b-a)}{x_L} x + a$ .

Die Funktion  $h(x)$  hat die folgenden Randwerte:

$$h(0) = \frac{(b-a)}{x_L} \cdot 0 + a = a, \quad h(x_L) = \frac{(b-a)}{x_L} \cdot x_L + a = b - a + a = b.$$

Wegen  $u(0, t) = u(x_L, t) = 0$  ist daher  $v(0, t) = u(0, t) + h(0) = 0 + a = a$ ,  $v(x_L, t) = u(x_L, t) + h(x_L) = 0 + b = b$ . Weiter gilt  $g(x) = v(x, 0) = u(x, 0) + h(x) = f(x) + h(x) \Rightarrow g(x) = f(x) + h(x)$ . Zudem ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial u(x, t) + h(x)}{\partial t} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial h(x)}{\partial t} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + 0 = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x, t) + h(x)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h(x)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + 0 = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

denn  $h$  ist eine lineare Funktion, deren 2. Ableitung ja 0 sein muss. Damit gewinnt man folgende Aussage:

**Satz:**  $u(x, t)$  sei Lösung von  $\frac{\partial u}{\partial t} = k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $0 < x < x_L$   
mit  $u(0, t) = u(x_L, t) = 0$  für  $t \geq 0$ ,  $u(x, 0) = f(x)$  für  $0 \leq x \leq x_L$

Dann ist  $v(x, t) = u(x, t) + h(x)$ ,  $h(x) = \frac{(b-a)}{x_L} x + a$  Lösung von  
 $\frac{\partial v}{\partial t} = k \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ ,  $0 < x < x_L$  mit  $v(0, t) = a$ ,  $v(x_L, t) = b$  für  $t \geq 0$ ,  
 $v(x, 0) = g(x) = f(x) + h(x)$  für  $0 \leq x \leq x_L$ .

Damit kann man die Lösungen des Problems mit inhomogenen Randbedingungen auf die Lösungen des Problems mit homogenen Randbedingungen zurückführen.

### 8.1.5 Koordinatentransformationen bei Operatoren

#### Vorbereitung

Im Folgenden benötigen wir den **Laplace-Operator**  $\Delta \cdot = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  sowie den **biharmonischen Operator**  $\Delta^2 \cdot = \Delta(\Delta \cdot)$  in räumlichen Polarkoordinaten (sphärischen Koordinaten), vorerst allerdings eingeschränkt auf die Grundebene (Polarkoordinaten). Aus diesem Anlass soll hier demonstriert werden, wie man diese Operatoren mit Hilfe von Computeralgebra (hier *Mathematica*) rasch gewinnen kann, wenn man sie aus Zeitgründen nicht von Hand berechnen mag oder keine einschlägige Formelsammlung zur Verfügung hat. Als Input verwenden wir jeweils aus drucktechnischen Gründen die „**FullForm**“.

**Input:**

```
<<Calculus`VectorAnalysis`
```

↪ Start eines Standardpackages, das aus Platzgründen zum Kern hinzugeladen werden muss.

**Definitionen****Input:**

```
MatrixForm [{r, \[Theta], \[CurlyPhi]}]//Transpose ==
MatrixForm [{CoordinatesFromCartesian[{x,y,z}, Spherical]}]//Transpose]
```

**Output:**

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \\ \arctan(x, y) \end{pmatrix}$$

Hier definieren wir die sphärischen Koordinaten eines Punktes  $P$ .  $r$  ist wie üblich der Abstand von  $P$  zum Ursprung,  $\theta$  ist der Winkel von der positiven  $z$ -Achse zum Radiusvektor von  $P$  und  $\varphi$  der Winkel von der positiven  $x$ -Achse zur Projektion des Radiusvektor von  $P$  in die Grundebene. Umgekehrt findet man:

**Input:**

```
MatrixForm [{r, \[Theta], \[CurlyPhi]}]//Transpose ==
MatrixForm [{CoordinatesFromCartesian[{x,y,z}, Spherical]}]//Transpose]
```

**Output:**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ r \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe des totalen Differentials  $df = f_r' dr + f_\theta' d\theta + f_\varphi' d\varphi$  erhält man die Ableitung von  $f(r(x, y, z), \theta(x, y, z), \varphi(x, y, z))$  nach  $x, y$  oder  $z$ . Z.B. nach  $x$ :

**Input:**

```
Dt[f[r[x,y,z], \[Theta][x,y,z], \[CurlyPhi][x,y,z]], x]
```

**Output:**

$$\begin{aligned} & f^{(1,0,0)}(r(x, y, z), \theta(x, y, z), \varphi(x, y, z)) \left( \frac{dz}{dx} r^{(0,0,1)}(x, y, z) + \frac{dy}{dx} r^{(0,1,0)}(x, y, z) + r^{(1,0,0)}(x, y, z) \right) \\ & + f^{(0,1,0)}(r(x, y, z), \theta(x, y, z), \varphi(x, y, z)) \left( \frac{dz}{dx} \theta^{(0,0,1)}(x, y, z) + \frac{dy}{dx} \theta^{(0,1,0)}(x, y, z) + \theta^{(1,0,0)}(x, y, z) \right) \\ & + f^{(0,0,1)}(r(x, y, z), \theta(x, y, z), \varphi(x, y, z)) \left( \frac{dz}{dx} \varphi^{(0,0,1)}(x, y, z) + \frac{dy}{dx} \varphi^{(0,1,0)}(x, y, z) + \varphi^{(1,0,0)}(x, y, z) \right). \end{aligned}$$

Dabei ist hier  $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} = 0$ . Weiter bedeutet z.B.  $f^{(1,0,0)} = f_r'(r, \theta, \varphi)$

**Gradient**

Für den **Gradienten**  $\nabla f = \text{grad}(f) = \begin{pmatrix} f_x' \\ f_y' \\ f_z' \end{pmatrix}$  einer skalaren Funktion  $f$  erhalten wir in sphärischen Koordinaten:

**Input:**

```
{Grad[f[r, \[Theta], f], Spherical[r, \[CurlyPhi], f]]} //Transpose //MatrixForm
```

**Output:**

$$\left( \begin{array}{c} f^{(1,0,0)}(r, \theta, \varphi) \\ \frac{f^{(0,1,0)}(r, \theta, \varphi)}{r} \\ \frac{\csc(\theta) f^{(0,0,1)}(r, \theta, \varphi)}{r} \end{array} \right), \quad \csc(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)}$$

**Divergenz**

Für die **Divergenz**  $\langle \nabla, \vec{f} \rangle = \operatorname{div}(\vec{f}) = f_x' + f_y' + f_z'$  einer Vektorfunktion  $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$  ergibt sich in sphärischen Koordinaten:

**Input:**

```
Div[{
f1[r, \[Theta], \[CurlyPhi]],
f2[r, \[Theta], \[CurlyPhi]],
f3[r, \[Theta], \[CurlyPhi]]
}, Spherical[r, \[Theta], \[CurlyPhi]]]
```

**Output:**

$$\frac{2 f_1(r, \theta, \varphi) + \cot(\theta) f_2(r, \theta, \varphi) + \csc(\theta) f_3^{(0,0,1)}(r, \theta, \varphi) + f_2^{(0,1,0)}(r, \theta, \varphi) + r f_1^{(1,0,0)}(r, \theta, \varphi)}{r} \quad \csc(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)}$$

**Rotation**

Für die **Rotation**  $\nabla \times \vec{f} = \operatorname{rot}(\vec{f}) = \begin{pmatrix} (f_3)_y' - (f_2)_z' \\ (f_1)_z' - (f_3)_x' \\ (f_2)_x' - (f_1)_y' \end{pmatrix}$  einer Vektorfunktion  $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$  ergibt sich in sphärischen Koordinaten:

**Input:**

```
{Curl[{f1[r, \[Theta], \[CurlyPhi]], f2[r, \[Theta], \[CurlyPhi]],
f3[r, \[Theta], \[CurlyPhi]]}, Spherical[r, \[Theta], \[CurlyPhi]]]}
//Transpose//Simplify//MatrixForm
```

**Output:**

$$\left( \begin{array}{c} \frac{\cot(\theta) f_3(r, \theta, \varphi) - \csc(\theta) f_2^{(0,0,1)}(r, \theta, \varphi) + f_3^{(0,1,0)}(r, \theta, \varphi)}{r} \\ - \frac{f_3(r, \theta, \varphi) - \csc(\theta) f_1^{(0,0,1)}(r, \theta, \varphi) + r f_3^{(1,0,0)}(r, \theta, \varphi)}{r} \\ \frac{f_2(r, \theta, \varphi) - f_1^{(0,1,0)}(r, \theta, \varphi) + r f_2^{(1,0,0)}(r, \theta, \varphi)}{r} \end{array} \right), \quad \csc(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)}$$

**Laplace–Operator**

Für die **Laplace–Operator**  $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)) = f_{x,x}'' + f_{y,y}'' + f_{z,z}''$  einer skalaren Funktion  $f$  ergibt sich in sphärischen Koordinaten:

**Input:**

Laplacian[f[r,\[Theta],\[CurlyPhi]], Spherical[r,\[Theta],\[CurlyPhi]]//Simplify

**Output:**

$$\frac{f^{(2,0,0)}(r, \theta, \varphi) r^2 + 2f^{(1,0,0)}(r, \theta, \varphi) r + \csc^2(\theta) f^{(0,0,2)}(r, \theta, \varphi) + \cot(\theta) f^{(0,1,0)}(r, \theta, \varphi) + f^{(0,2,0)}(r, \theta, \varphi)}{r^2},$$

$$\csc(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)}$$

### Biharmonischer Operator

Für den **biharmonischen Operator**  $\Delta^2 f = \Delta(\Delta(f))$  einer skalaren Funktion  $f$  ergibt sich in sphärischen Koordinaten:

**Input:**

Biharmonic[f[r,\[Theta],\[CurlyPhi]], Spherical[r,\[Theta],\[CurlyPhi]]//Simplify

**Output:**

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^4} \cdot (f^{(4,0,0)}(r, \theta, \varphi) r^4 + 4 f^{(3,0,0)}(r, \theta, \varphi) r^3 - \cot^2(\theta) f^{(2,0,0)}(r, \theta, \varphi) r^2 + \csc^2(\theta) f^{(2,0,0)}(r, \theta, \varphi) r^2 \\ & - f^{(2,0,0)}(r, \theta, \varphi) r^2 + 2 \csc^2(\theta) f^{(2,0,2)}(r, \theta, \varphi) r^2 + 2 \cot(\theta) f^{(2,1,0)}(r, \theta, \varphi) r^2 \\ & + 2 f^{(2,2,0)}(r, \theta, \varphi) r^2 - 2 \cot^2(\theta) f^{(1,0,0)}(r, \theta, \varphi) r + 2 \csc^2(\theta) f^{(1,0,0)}(r, \theta, \varphi) r \\ & - 2 f^{(1,0,0)}(r, \theta, \varphi) r + 4 \csc^4(\theta) f^{(0,0,2)}(r, \theta, \varphi) + \csc^4(\theta) f^{(0,0,4)}(r, \theta, \varphi) \\ & + \cot(\theta) \csc^2(\theta) f^{(0,1,0)}(r, \theta, \varphi) + 2 \cot(\theta) f^{(0,1,0)}(r, \theta, \varphi) - 2 \cot(\theta) \csc^2(\theta) f^{(0,1,2)}(r, \theta, \varphi) \\ & - 2 \cot^2(\theta) f^{(0,2,0)}(r, \theta, \varphi) + \csc^2(\theta) f^{(0,2,0)}(r, \theta, \varphi) - f^{(0,2,0)}(r, \theta, \varphi) \\ & + 2 \csc^2(\theta) f^{(0,2,2)}(r, \theta, \varphi) + 2 \cot(\theta) f^{(0,3,0)}(r, \theta, \varphi) + f^{(0,4,0)}(r, \theta, \varphi)) \end{aligned}$$

$$\csc(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)}$$

### Biharmonischer Operator bei ebenen Polarkoordinaten

Nun wollen wir noch den biharmonischen Operator  $\Delta^2$  für ebene Polarkoordinaten herleiten und zwar spezialisiert für den Fall, dass die verwendete Funktion  $f$  vor Radius, jedoch nicht vom Winkel abhängig ist. Dadurch wird der Ausdruck dann relativ kurz.

**Input** (Definition der verwendeten Koordinaten und Berechnung des Gradienten):

```
<<Calculus'VectorAnalysis';
```

```
x[r_,\[CurlyPhi]_] := r Cos[\[CurlyPhi]];
y[r_,\[CurlyPhi]_] := r Sin[\[CurlyPhi]];
rr[xx_,yy_] := Sqrt[xx^2+yy^2];
ff[xx_,yy_] := ArcTan[yy/xx];
```

```
grad = {D[f[r,\[CurlyPhi]],r] D[rr[xx,yy],xx]
+D[f[r,\[CurlyPhi]],\[CurlyPhi]] D[ff[xx,yy],xx],
D[f[r,\[CurlyPhi]],r] D[rr[xx,yy],yy]
+D[f[r,\[CurlyPhi]],\[CurlyPhi]] D[ff[xx,yy],yy]}/Simplify
```

**Output** (Der Schnelle und der Rechnungsumstände halber verzichten wir auf die darstellerisch idealere Spaltenschreibweise):

$$\left\{ \frac{xx f^{(1,0)}(r, \varphi)}{\sqrt{xx^2 + yy^2}} - \frac{yy f^{(0,1)}(r, \varphi)}{xx^2 + yy^2}, \frac{xx f^{(0,1)}(r, \varphi)}{xx^2 + yy^2} + \frac{yy f^{(1,0)}(r, \varphi)}{\sqrt{xx^2 + yy^2}} \right\}$$

**Input** (Die Anpassung der obigen Form mit den Variablen  $xx, yy$  an diejenige mit den Variablen  $r, \varphi$  ist hier nicht wiedergegeben):

```
grad = {-(Sin[\CurlyPhi]*Derivative[0, 1][f][r, \CurlyPhi])/r)
+(Cos[\CurlyPhi]*Derivative[1, 0][f][r, \CurlyPhi]),
(Cos[\CurlyPhi]*Derivative[0, 1][f][r, \CurlyPhi])/r
+(Sin[\CurlyPhi]*Derivative[1, 0][f][r, \CurlyPhi])}
```

**Output:**

$$\left\{ \cos(\varphi) f^{(1,0)}(r, \varphi) - \frac{\sin(\varphi) f^{(0,1)}(r, \varphi)}{r}, \frac{\cos(\varphi) f^{(0,1)}(r, \varphi)}{r} + \sin(\varphi) f^{(1,0)}(r, \varphi) \right\}$$

Berechnung des Laplace-Operators mit Hilfe von  $\text{div}(\text{grad}) = \Delta$ :

**Input:**

```
divGrad = (
D[grad[[1]],r] D[rr[xx,yy],xx]+
D[grad[[1]],\CurlyPhi] D[ff[xx,yy],xx]+
D[grad[[2]],r] D[rr[xx,yy],yy]+
D[grad[[2]],\CurlyPhi] D[ff[xx,yy],yy] //Simplify//InputForm)
/.{xx^2 + yy^2->r^2, xx-> r Cos[\CurlyPhi], yy->r Sin[\CurlyPhi]}/Simplify
```

**Output:**

$$\frac{f^{(0,2)}(r, \varphi) + r f^{(1,0)}(r, \varphi) + r \sqrt{r^2} f^{(2,0)}(r, \varphi)}{r^2}$$

**Input** (Die Ableitungen nach  $\varphi$  werden 0 gesetzt, da  $f$  nicht von  $\varphi$  abhängen soll):

```
Lapl=(Derivative[0, 2][f][r, \CurlyPhi] +
r*Derivative[1, 0][f][r, \CurlyPhi] +
r*r*Derivative[2, 0][f][r, \CurlyPhi])/r^2;
lap[r_,\CurlyPhi_]=Lapl /. {Derivative[0, 2][f][r, \CurlyPhi] ->0};
lap[r,\CurlyPhi]//InputForm
```

**Output:**

$$(r * \text{Derivative}[1, 0][f][r, f] + r^2 * \text{Derivative}[2, 0][f][r, f])/r^2$$

**Input** (Berechnung von  $\Delta^2$  für  $f(r, \varphi) = f(r)$ , nicht abhängig von  $\varphi$ ):

```
(r*Derivative[1, 0][lap][r, \CurlyPhi] +
r^2*Derivative[2, 0][lap][r, \CurlyPhi])/r^2 //Simplify
```

**Output (\*):**

$$\frac{f^{(4,0)}(r, \varphi) r^3 + 2 f^{(3,0)}(r, \varphi) r^2 - f^{(2,0)}(r, \varphi) r + f^{(1,0)}(r, \varphi)}{r^3}$$

**Beobachtung**

Die Herleitung zeigt, dass es ratsam ist, der effizienten Arbeit wegen Computeralgebra-Programme zu nutzen. Vor allem muss man sich dann nicht speziell um zeitraubende Vereinfachungen kümmern, denn bei den heutigen Rechenzeiten ist der Einfluss der Komplexität der Ausdrücke auf die „früher ach so teure Rechenzeit“ meist belanglos. Das gilt auch für nicht so teure Computer.

**8.1.6 Lineare Operatoren**

Einen **Operator**  $L : u \mapsto L(u) \in \mathbb{C}$  resp.  $\in \mathbb{R}$  nennen wir nach dem früher Gesagten **linear**, wenn er die folgenden **Linearitätsregeln** erfüllt:

1.  $L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2)$
2.  $L(\lambda u) = \lambda L(u)$

Durch die Abmachung  $L^2(u) := L(L(u))$ ,  $L^n(u) := L(L^{n-1}(u))$  definieren wir **Potenzen von Operatoren**. Nun gilt der Satz:

**Satz:**  $L \text{ linear} \Rightarrow L^n \text{ linear}$

**Beweis:**

Wir zeigen hier  $L \text{ linear} \Rightarrow L^2 \text{ linear}$ . Daraus folgt dann der Beweis durch Induktion über  $n$ .  
Sei  $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} L^2(u) &= L(L(u)) = L(L(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)) = L(\lambda_1 L(u_1) + \lambda_2 L(u_2)) = \lambda_1 L(L(u_1)) + \lambda_2 L(L(u_2)) \\ &= \lambda_1 L^2(u_1) + \lambda_2 L^2(u_2). \end{aligned}$$

Wegen der Linearität der Ableitung einer Funktion mit einer Variablen und des Integrals einer Funktion mit einer Variablen sind auch die uns bekannten Differentialoperatoren *grad*, *div* und  $\Delta$  linear und wegen dem eben bewiesenen Satz folglich auch  $\Delta^2, \dots, \Delta^n$ . Entsprechend verhält es sich mit mehrdimensionalen Integralen.

**Beispiel des Nachweises für  $\Delta$  bei zwei Variablen:**

In  $\mathbb{R}^2$  gilt mit  $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ :

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)}{\partial y^2} = \lambda_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \lambda_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \\ &= \lambda_1 \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) + \lambda_2 \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) = \lambda_1 \Delta u_1 + \lambda_2 \Delta u_2. \end{aligned}$$

**Konsequenz:**  $\Delta^n$  ist ein linearer Operator.

Wir betrachten die **inhomogene Gleichung**  $L(u) = v$  mit der Lösungsmenge  $\mathbb{L}_{inh}$  und dazu die **homogene Gleichung**  $L(u) = 0$  mit der Lösungsmenge  $\mathbb{L}_{hom}$ .  $v$  kann dabei wieder eine Funktion sein. Wegen der Linearität folgt sogleich:

$$u_1, u_2 \in \mathbb{L}_{hom} \Rightarrow L(u_1) = 0 \text{ und } L(u_2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 L(u_1) = 0 \text{ und } \lambda_2 L(u_2) = 0 \\ \Rightarrow 0 = \lambda_1 L(u_1) + \lambda_2 L(u_2) = L(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = 0$$

**Konsequenz:** Mit zwei Lösungen  $\in \mathbb{L}_{hom}$  ist auch jede Linearkombination dieser Lösungen  $\in \mathbb{L}_{hom}$ .

$\leadsto \mathbb{L}_{hom}$  ist ein linearer Raum.

$$u_1, u_2 \in \mathbb{L}_{inh} \Rightarrow L(u_1) = v \text{ und } L(u_2) = v \Rightarrow 0 = v - v = L(u_1) - L(u_2) = L(u_1 - u_2) \\ \Rightarrow u_1 - u_2 \in \mathbb{L}_{hom}$$

**Konsequenz:** Mit zwei Lösungen  $\in \mathbb{L}_{inh}$  liegt die Differenz dieser Lösungen in  $\mathbb{L}_{hom}$ .

$$u_1 \in \mathbb{L}_{inh}, u_2 \in \mathbb{L}_{hom} \Rightarrow L(u_1) = v \text{ und } L(u_2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 L(u_2) = 0 \\ \Rightarrow v = L(u_1) + \lambda_2 L(u_2) = L(u_1 + \lambda_2 u_2) \Rightarrow u_1 + \lambda_2 u_2 \in \mathbb{L}_{inh}$$

**Konsequenz:** Mit einer Lösung  $u_1 \in \mathbb{L}_{inh}$  und einer Lösung  $u_2 \in \mathbb{L}_{hom}$  liegt  $u_1 + \lambda_2 u_2$  für beliebige  $\lambda_2$  in  $\mathbb{L}_{inh}$ .

**Satz:**  $\mathbb{L}_{hom}$  ist ein linearer Raum und  $\mathbb{L}_{inh}$  eine lineare Mannigfaltigkeit. Man kann daher jede beliebige Lösung  $u_{inh}$  erhalten als Linearkombination einer speziellen, partikulären Lösung  $u_{part}$  und einer Linearkombination von Basislösungen aus  $\mathbb{L}_{hom}$ :  $u_{inh} = u_{part} + \sum_k \lambda_k u_{k,hom}$ .

### 8.1.7 Zur schwingenden Membran

Für die Auslenkung  $u(x, y, t)$  einer **schwingenden Membran** auf einem gegebenen Gebiet  $G$  ergibt sich die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \cdot \Delta u$$

Dabei kommen üblicherweise Randbedingungen wie  $u(x, y, t) = 0$  oder auch  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  für  $(x, y) \in \partial G$  (( $x, y$ ) auf dem Rand) zur Anwendung. Dabei ist  $\frac{\partial u}{\partial n}$  die Richtungsableitung  $\langle \text{grad } u, \vec{e}_n \rangle$  senkrecht zum Rand, d.h.  $\vec{e}_n \perp$  Höhenlinie resp. Tangente an die Höhenlinie.

Wir wollen in unserem Rahmen nur den Fall  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p = \text{const.}$  betrachten. Speziell für  $p = \text{const.} = 0$  redet man von der **Potentialgleichung**. Die Lösungsfunktionen heissen **harmonische Funktionen** resp. in der Physik auch **Potentiale**, wobei bei der Potentialgleichung üblicherweise  $u(x, y) = g(x, y)$  resp.  $\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = g(x, y)$  für  $(x, y) \in \partial G$  mit einer gegebenen Funktion  $g$  gefordert wird. Wie man sofort sieht, ist die Potentialgleichung vom **elliptischen Typ**. Wir heben hervor:

**Definition:** Funktionen, welche die Potentialgleichung  $\Delta u = 0$  erfüllen, heissen **harmonisch**.

Eine Lösungsmenge von  $c^2 \cdot \Delta u = 1$  resp. von  $\Delta u = \frac{1}{c^2} := p$  kann man mit etwas Phantasie leicht erraten:

$$u(x, y) = (c_1 + \frac{p}{2})x^2 - c_1 y^2 + c_2 x + c_3 y + c_4 + f(x + i y), \quad f(x + i y) = f(z) \text{ holomorph}$$



Dabei sind die  $c_k$  beliebige Koeffizienten und  $f(x + iy)$  eine komplexe, holomorphe Funktion. Man sieht leicht, dass die Summe der 2. Ableitungen der Polynomanteile nach  $x$  und  $y$  gerade  $p$  ergibt.

Weiter ist  $\Delta f = 0$ . Denn wegen  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot 1$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot i$  erhält man  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \cdot \underbrace{(i^2)}_{=-1} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

Man erkennt daraus den Satz:

**Satz:** Holomorphe Funktionen sind harmonisch. Sie erfüllen die Potentialgleichung.

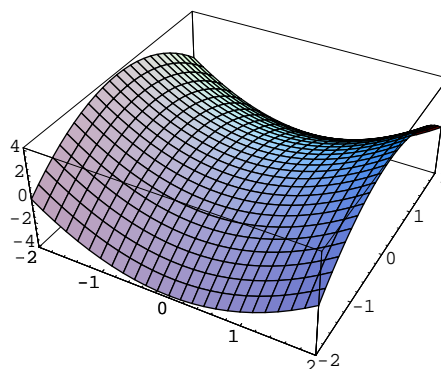
(Hinweis: Vgl. dazu Skript Analysis des Autors.)

Weiter gilt für harmonische Funktionen das wichtige **Maximumprinzip**<sup>3</sup>:

**Satz:** Nimmt eine auf einem Gebiet harmonische Funktion im Innern ein Maximum oder Minimum an, so ist sie konstant.

Zum Beweis muss hier auf die Literatur<sup>3</sup> verwiesen werden, da die Sache sonst unserem Rahmen entgleitet.

Wir betrachten statt dem Beweis das Beispiel  $f(x, y) = x^2 - y^2$ .  $f$  ist offensichtlich harmonisch. Die Form ist hier die eines „Affensattels“.



Als weiteres Beispiel wollen wir eine parabelförmige Lösung für die Gleichung  $\Delta u = p = 6$  finden, welche in den vier Punkten  $(\pm 10, \pm 10)$  die Bedingung  $u(\pm 10, \pm 10) = 20$  sowie in  $(0, 10)$  die Bedingung  $u(0, 10) = 0$  erfüllt.

Ansatz:  $u(x, y) = c_1 x^2 + c_2 x y_2 + c_3 y_2 + c_4 x + c_5 y + c_6$ .

Man findet damit sofort:

$$\Delta u(x, y) = 2c_1 + 2c_3 = 6 \Rightarrow c_1 = 3 - c_3 \Rightarrow u(x, y) = (3 - c_3)x^2 + c_2xy + c_3y^2 + c_4x + c_5y + c_6$$

<sup>3</sup>Lit.: Siehe z.B. René Sperb, Maximum Principles and Their Applications Academic Press 1981

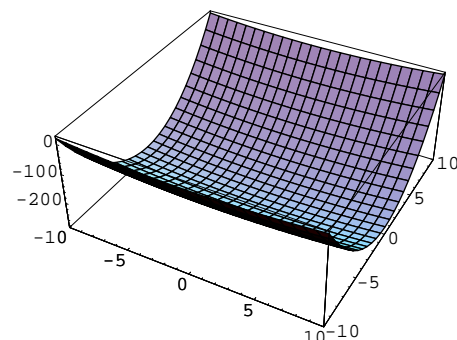
Setzt man hier die Bedingungen

$u(\pm 10, \pm 10) = 20$ ,  $u(0, 10) = 0$  ein,

so findet man die eindeutige Lösung

$$c_2 = c_4 = c_5 = 0, \quad c_3 = \frac{14}{5}, \quad c_6 = -280.$$

Damit wird  $u(x, y) = \frac{x^2}{5} + \frac{14y^2}{5} - 280$ .



### 8.1.8 Die Poisson-Gleichung

Die Poisson-Gleichung lautet:

$$\Delta \Phi(\vec{r}) = f(\vec{r}), \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (x, y, z) \in V, \quad V = \text{gegebenes Volumen}.$$

Dazu sind Randbedingungen gegeben wie z.B.  $\Phi(\vec{r}) = 0$  auf  $\partial V$ .

Z.B. in der Elektrostatik betrachtet man  $f(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$ ,  $\rho$  = Ladungsdichte,  $\varepsilon_0$  = Permittivität oder dielektrische Leitfähigkeit des Vakuums.

In der Gravitationstheorie ist  $f(\vec{r}) = 4\pi\gamma\rho(\vec{r})$ ,  $\gamma$  = Gravitationskonstante,  $\rho$  = Massenverteilung.

**1. Beispiel:** Wir wollen hier die folgende einfache Version der Poissongleichung studieren:

$$\Delta \Phi(\vec{r}) = c = \text{const.}, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in G = K_r(O), \quad O = (0, 0), \quad \Phi(\vec{r}) = 0 \text{ auf } \partial G.$$

Nach dem Maximumprinzip für harmonische Funktionen hat die Gleichung  $\Delta \Phi(\vec{r}) = 0$ ,  $\Phi(\vec{r}) = 0$  auf  $\partial G$  nur die Lösung  $\Phi(\vec{r}) = 0$ . Für die Gleichung  $\Delta \Phi(\vec{r}) = c$ ,  $\Phi(\vec{r}) = 0$  auf  $\partial G$  können wir eine Lösung mit Hilfe eines quadratischen Polynoms konstruieren:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{c}{4} \left( \left( x + \frac{r}{\sqrt{2}} \right) \left( x - \frac{r}{\sqrt{2}} \right) + \left( y + \frac{r}{\sqrt{2}} \right) \left( y - \frac{r}{\sqrt{2}} \right) \right) = \frac{c}{4} \left( x^2 + y^2 - 2 \frac{r^2}{\sqrt{2}^2} \right) = \frac{c}{4} (x^2 + y^2 - r^2)$$

Es gilt:  $\Delta \Phi(\vec{r}) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{c}{4} \cdot 2 + \frac{c}{4} \cdot 2 = c$  sowie  $\Phi(\vec{r}) = \frac{c}{4} (r^2 - r^2) = 0$  für  $(x, y) \in \partial G$ , d.h. für  $x^2 + y^2 = r^2$ .

Diese Lösung ist die einzige Lösung. Denn für eine andere Lösung  $\Psi(\vec{r})$  wäre ebenfalls  $\Delta \Psi(\vec{r}) = c$  und die Randbedingungen wären ebenfalls erfüllt. Man hätte somit  $\Delta (\Phi(\vec{r}) - \Psi(\vec{r})) = c - c = 0 \Rightarrow \Phi(\vec{r}) - \Psi(\vec{r})$  müsste harmonisch sein sowie die Randbedingungen auch erfüllen. Da nun nach dem Maximumprinzip das Maximum und das Minimum einer harmonischen Funktion auf dem Rand angenommen werden muss, kommt dafür wegen den Randbedingungen nur 0 in Frage. Daher ist  $\Phi(\vec{r}) - \Psi(\vec{r}) \equiv 0$ , d.h.  $\Phi(\vec{r}) \equiv \Psi(\vec{r})$ . Damit ist eine andere Lösung immer mit  $\Phi$  identisch. Es gibt somit keine andere Lösung. Wir haben die gefundene Lösung also als eindeutig identifiziert.

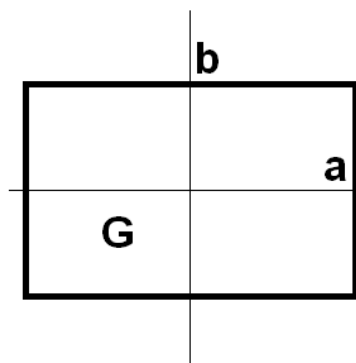
**2. Beispiel:** Wir betrachten die Poissongleichung auf einem Rechteck:

$$\Delta u(x, y) = f(x, y) = 6, \quad (x, y) \in G$$

$$u(x, y) = g(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in \partial G$$

Sei  $a = 4, b = 1$

$$\leadsto G = [-4, 4] \times [-1, 1]$$



**Lösungsstrategie:**

1. Suche eine partikuläre Lösung, z.B.  $u_0(x, y) = 3x^2$

2. Mache den Ansatz:  $u(x, y) = u_0(x, y) + v(x, y)$

$$\leadsto \Delta v(x, y) = \Delta(u(x, y) - u_0(x, y)) = \Delta u(x, y) - \Delta u_0(x, y) = f(x, y) - f(x, y) = 0 \quad \text{und}$$

$$\leadsto v(x, y) = u(x, y) - u_0(x, y) = g(x, y) - u_0(x, y) \quad \text{auf } \partial G$$

Damit wird das inhomogene Dirichletproblem  $\Delta u(x, y) = f(x, y)$  in  $G$ ,  $u(x, y) = g(x, y)$  auf  $\partial G$  übergeführt in das homogene Dirichletproblem  $\Delta v(x, y) = 0$  in  $G$ ,  $v(x, y) = g(x, y) - u_0(x, y)$  auf  $\partial G$ .

**Lösung** von  $\Delta u(x, y) = f(x, y) = \text{const.} = 6$ ,  $G = [-4, 4] \times [-1, 1]$ ,  $u(x, y) \equiv 0$  auf  $\partial G$ :

1. Sei  $u_0(x, y) = mx^2 + nx + k \Rightarrow \Delta u = 2m = 6 \Rightarrow m = 3$ . Wir nehmen aus Symmetriegründen  $n = 0$  an. (Wir brauchen nur eine partikuläre Lösung.) Weiter soll  $k$  so sein, dass auf einer Seite die Randbedingungen erfüllt sind:

$$u_0(-4, y) = 3(-4)^2 + k = 48 + k = 0 \Rightarrow k = -48 \Rightarrow u_0(x, y) = 3x^2 - 48 = u_0(-x, y).$$

$$\text{Hier gilt: } v(\pm 4, y) = u(\pm 4, y) - u_0(\pm 4, y) = 0 - (3(\pm 4)^2 - 48) = 0 \Rightarrow v(\pm 4, y) = 0$$

$$\text{sowie } v(x, \pm 1) = u(x, \pm 1) - u_0(x, \pm 1) = 0 - (3x^2 - 48) = -3x^2 + 48 = 0 \Rightarrow v(x, \pm 1) = -3x^2 + 48.$$

$$2. u(x, y) = u_0(x, y) + v(x, y) = 3x^2 - 48 + v(x, y) \Rightarrow 6 = \Delta u = 6 + \Delta v \Rightarrow \Delta v = 0$$

$$\Delta v(x, y) = 0 \text{ in } G, v(x, y) = g(x, y) - u_0(x, y) = 0 - u_0(x, y) \Rightarrow v(x, y) = -u_0(x, y) \text{ auf } \partial G.$$

Das Problem  $\Delta v(x, y) = 0$ ,  $v(x, y) = -u_0(x, y)$  auf  $\partial G$ , kann man mit einem **Separationsansatz** angehen, um **Basislösungen** zu finden:

$$v(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \Rightarrow \Delta v(x, y) = X_{xx}''(x) \cdot Y(y) + X(x) \cdot Y_{yy}''(y) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{X_{xx}''(x)}{X(x)} = -\frac{Y_{yy}''(y)}{Y(y)} = \pm \omega^2 = \text{const.}$$

Man hat damit zwei neue Randwertprobleme: [1]:  $\frac{X_{xx}''(x)}{X(x)} = \pm\omega^2$  mit  $X(-4) = X(4) = 0$  sowie [2]:  $-\frac{Y_{yy}''(y)}{Y(y)} = \pm\omega^2$  mit  $X(x) \cdot Y(\pm 1) \rightsquigarrow -3x^2 + 48$ . Um für  $Y$  ein Randwertproblem formulieren zu können, muss  $X$  schon bekannt sein. Daher berechnen wir zuerst  $X$ .

**Berechnung der Lösung von [1]:**  $\frac{X_{xx}''(x)}{X(x)} = \pm\omega^2$  mit  $X(-4) = X(4) = 0$ :

$\rightsquigarrow X_{xx}''(x) = \pm\omega^2 \cdot X(x)$ ,  $X(-4) = X(4) = 0 \rightsquigarrow$  Verwende bekannte Basislösungen:

- $\pm\omega^2 = 0 \Rightarrow X_{xx}''(x) = 0 \Rightarrow X(x) = c_1 x + c_2$ ,  
 $X(-4) = X(4) = -4c_1 + c_2 = +4c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$ : Fällt weg.
- $\pm\omega^2 > 0 \Rightarrow X_{xx}''(x) = \omega^2 X(x) \Rightarrow X(x) = c_1 e^{+\omega x} + c_2 e^{-\omega x}$   
 $\Rightarrow X(4) = c_1 e^{4\omega} + c_2 e^{-4\omega} = 0 \Rightarrow c_1 e^{4\omega} = -c_2 e^{-4\omega} \Rightarrow c_1 e^{8\omega} = -c_2$  und  
 $\Rightarrow X(-4) = c_1 e^{-4\omega} + c_2 e^{4\omega} = 0 \Rightarrow c_1 e^{-4\omega} = -c_2 e^{4\omega} \Rightarrow c_1 e^{-8\omega} = -c_2$   
 $\Rightarrow e^{-8\omega} = e^{8\omega} \Rightarrow \omega = 0$ . Widerspruch!  $\rightsquigarrow$  Fällt weg.
- $\pm\omega^2 < 0 \Rightarrow X_{xx}''(x) = -\omega^2 X(x) \Rightarrow X(x) = c_1 \sin(\omega x) + c_2 \cos(\omega x)$ .  
 $0 = X(4) = X(-4) \Rightarrow 0 = c_1 \sin(4\omega) + c_2 \cos(4\omega)$  und  
 $0 = c_1 \sin(-4\omega) + c_2 \cos(-4\omega) = -c_1 \sin(4\omega) + c_2 \cos(4\omega)$   
 $\Rightarrow 2c_1 \sin(4\omega) = 0 \Rightarrow 4\omega = n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  und  $2c_2 \cos(4\omega) = 0 \Rightarrow 4\omega = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$   
 $\Rightarrow X(x) = c_1 \sin(\frac{n\pi}{4}x)$  oder  $X(x) = c_2 \cos(\frac{(1+2k)\pi}{8}x) \Rightarrow \omega = \frac{n\pi}{4}$ ,  $\omega = \frac{(1+2k)\pi}{8}$   
Wegen  $v(x, \pm 1) = X(x) \cdot Y(\pm 1) = -3x^2 + 48 = -3(-x)^2 + 48 = v(-x, \pm 1) = X(-x) \cdot Y(\pm 1)$   
muss  $X(x) = X(-x)$  gelten, d.h.  $X(x)$  ist eine gerade Funktion. Da  $X(x)$  aus den gefundenen Basislösungen  $\sin(\frac{n\pi}{4}x)$  und  $\cos(\frac{(1+2k)\pi}{8}x)$  ausgewählt werden muss, kann nur  $X(x) = \cos(\frac{(1+2k)\pi}{8}x)$  richtig sein, denn der Sinus ist ungerade. Damit fallen die Sinusanteile weg, d.h.  $c_1 = 0$ . Somit wird  $X(x) = X_k(x) = a_k \cos(\frac{(1+2k)\pi}{8}x)$  mit  $c_2 := a_k$ .

- Wir erhalten somit:  $-\frac{Y_{yy}''(y)}{Y(y)} = -\omega^2 = -(\frac{(1+2k)\pi}{8})^2 \Rightarrow +Y_{yy}''(y) = +(\frac{(1+2k)\pi}{8})^2 \cdot Y(y)$   
 $\Rightarrow Y(y) = Y_k(y) = d_{k,1} \cdot e^{\frac{(1+2k)\pi}{8}y} + d_{k,2} \cdot e^{-\frac{(1+2k)\pi}{8}y}$  mit  $Y_k(-1) = Y_k(+1) \neq 0$   
 $\Rightarrow Y_k(-1) = Y_k(+1) = d_{k,1} \cdot e^{\frac{(1+2k)\pi}{8}} + d_{k,2} \cdot e^{-\frac{(1+2k)\pi}{8}} = d_{k,1} \cdot e^{-\frac{(1+2k)\pi}{8}} + d_{k,2} \cdot e^{\frac{(1+2k)\pi}{8}}$   
 $\Rightarrow d_{k,1} \cdot e^{\frac{(1+2k)\pi}{4}} + d_{k,2} = d_{k,1} + d_{k,2} \cdot e^{\frac{(1+2k)\pi}{4}} \Rightarrow d_{k,1} \cdot (e^{\frac{(1+2k)\pi}{4}} - 1) = d_{k,2} \cdot (e^{\frac{(1+2k)\pi}{4}} - 1)$   
 $\Rightarrow d_{k,1} = d_{k,2} := \frac{d_k}{2} \Rightarrow Y_k(y) = \frac{d_k}{2} \cdot (e^{\frac{(1+2k)\pi}{8}y} + e^{-\frac{(1+2k)\pi}{8}y}) = d_k \cdot \cosh(\frac{(1+2k)\pi}{8}y)$

- $\rightsquigarrow v_k(x, y) = X_k(x) \cdot Y_k(y) = a_k \cdot \cos(\frac{(1+2k)\pi}{8}x) \cdot d_k \cdot \cosh(\frac{(1+2k)\pi}{8}y)$   
 $\Rightarrow v_k(x, y) = X_k(x) \cdot Y_k(y) = c_k \cdot \cos(\frac{(1+2k)\pi}{8}x) \cdot \cosh(\frac{(1+2k)\pi}{8}y)$

- Die Allgemeine Lösung erhält man jetzt nach dem Superpositionsprinzip:

$$v(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) \cdot Y_k(y) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \cos(\frac{(1+2k)\pi}{8}x) \cdot \cosh(\frac{(1+2k)\pi}{8}y)$$

$$v(x, \pm 1) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \cos(\frac{(1+2k)\pi}{8}x) \cdot \cosh(\frac{(1+2k)\pi}{8}) = -u_0(x, y) = -3x^2 + 48$$

$r_k = c_k \cdot \cosh\left(\frac{(1+2k)\pi}{8}\right)$  sind nun Fourierkoeffizienten zu  $n = 1 + 2k$  für die Funktion  $-3x^2 + 48$ .

$$\text{Es gilt: } r_n = \frac{1}{4} \int_{-4}^4 (-3x^2 + 48) \cos\left(\frac{n\pi x}{2 \cdot 4}\right) dx = -\frac{768 \left( n\pi \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right)}{n^3 \pi^3}$$

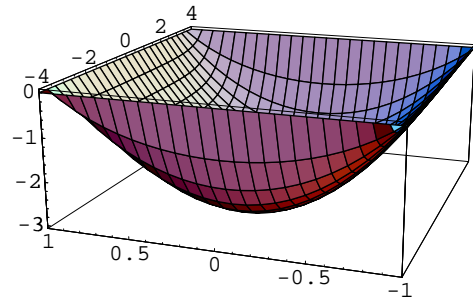
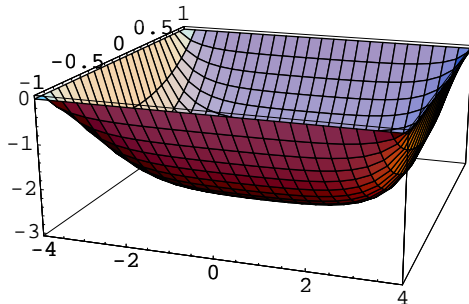
$$\Rightarrow c_k = r_{2k+1} \cdot \left( \cosh\left(\frac{(1+2k)\pi}{8}\right) \right)^{-1} = \frac{-\frac{768 \left( (1+2k)\pi \cos\left(\frac{(1+2k)\pi}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{(1+2k)\pi}{2}\right) \right)}{(1+2k)^3 \pi^3}}{\cosh\left(\frac{(1+2k)\pi}{8}\right)}$$

$$\Rightarrow c_k = -\frac{768 \left( (1+2k)\pi \cos\left(\frac{(1+2k)\pi}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{(1+2k)\pi}{2}\right) \right)}{(1+2k)^3 \pi^3 \cosh\left(\frac{(1+2k)\pi}{8}\right)}$$

Somit folgt:

$$u(x, y) = 3x^2 - 48 + v(x, y), \quad v(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{768 \left( (1+2k)\pi \cos\left(\frac{(1+2k)\pi}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{(1+2k)\pi}{2}\right) \right)}{(1+2k)^3 \pi^3 \cosh\left(\frac{(1+2k)\pi}{8}\right)} \cdot \cos\left(\frac{(1+2k)\pi}{8} \cdot x\right) \cdot \cosh\left(\frac{(1+2k)\pi}{8} \cdot y\right)$$

Wir berechnen die Glieder in der letzten Formel bis zu  $k = 14$  und ein zweites Mal bis  $k = 20$ . Dann brechen wir die Summen jeweils ab. Beim Zeichnen von Graphiken mit dem Computer ist bei so verändertem  $k$  kein Unterschied zu erkennen. Man erhält folgende Formen:



### 8.1.9 Exkurs: Wichtige Formeln

Im letzten Abschnitt (Seite 255) haben wir bereits das Maximumprinzip kennengelernt. Im Zusammenhang mit diesem Prinzip und weiter mit dem Laplace-Operator sowie harmonischen Funktionen kennt man eine Anzahl wichtiger Formeln. Einige davon sollen der Vollständigkeit halber hier wiedergegeben werden. (Auf Beweise müssen wir allderdings des gesetzten Rahmens wegen hier verzichten. Man konsultiere dazu die einschlägige Literatur über Analysis und partielle Differentialgleichungen):

**Satz:**

**(Greensche Formel)**

$$\int_G (\varphi \Delta \Psi - \Psi \Delta \varphi) dV = \int_{\partial G} \left( \varphi \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{n}} - \Psi \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right) d\sigma$$

Die Greensche Formel „verallgemeinert“ die partielle Integration für den Laplace-Operator.

**Satz:** (Poissonsche Integralformel)

**Vor.:** Gegeben sei das Dirichletproblem  $\Delta u = 0$  in  $G$

$G =$  Kreisscheibe  $K_{r_0}(\vec{0})$ , Randbedingungen:  $u(\vec{x}) = f(\vec{x})$  auf  $\partial G$

$\leadsto u(\vec{x}) = \tilde{u}(r, \varphi) = f(\varphi)$  auf  $\partial K_{r_0}(\vec{0})$

**Beh.:**

$$\tilde{u}(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 - 2r_0 r \cos(t - \varphi) + r^2} dt, \quad r < r_0$$

Aus dieser Formel kann man den Mittelwertsatz für harmonische Funktionen herleiten:

**Satz:** (Mittelwertsatz für harmonische Funktionen)

**Vor.:** Sei  $K_{r_0}(x_0, y_0) \subseteq G = D_u$ ,  $u$  harmonisch

**Beh.:**

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \cos(t), y_0 + r \sin(t)) dt, \quad r < r_0$$

Aus dem Mittelwertsatz wiederum ist es möglich, auf das Maximumprinzip zu schliessen. Die Erfahrung zeigt, dass diese hier genannten Formeln sehr nützliche Dienste leisten bei der Untersuchung von Differentialgleichungen im Zusammenhang mit harmonischen Funktionen.

### 8.1.10 Plattengleichung und biharmonischer Operator

Wir betrachten die folgende Gleichung, welche ein Modell für die Biegung einer dünnen Platte darstellt:

$$\Delta^2 u(x, y) = \Delta(\Delta u(x, y)) = \frac{q(x, y) \cdot 12(1 - \nu^2)}{E \cdot h^3} = \text{const.} \cdot q(x, y)$$

Wir nennen diese Gleichung die **Plattengleichung**.  $\Delta^2$  heisst dabei **biharmonischer Operator**.  $E, \nu$  und  $h$  sind in der Physik beheimatete Konstanten, die wir hier nicht weiter besprechen wollen.  $q(x, y)$  ist eine Funktion, welche oft auch konstant ist. Wir werden solgleich sehen, dass die Modellierung der Randbedingungen sehr ins Physikalische hineingreifen und die Auffindung einer Lösung daher in der Folge nicht von der Mathematik aus alleine steuerbar ist.

Die Ein Spezialfall der Plattengleichung ist die Gleichung  $\Delta^2 u(x, y) = 0$ . Es handelt sich dabei um den homogenen Fall der Plattengleichung. Wir wollen die Lösungen dieser Gleichung **biharmonische Funktionen** nennen. Trivialerweise gilt wegen  $\Delta u(x, y) = 0 \Rightarrow \Delta^2 u(x, y) = 0$ :

**Satz:** Die Menge der harmonischen Funktionen ist eine echte Teilmenge der biharmonischen Funktionen.

So ist z.B.  $\Delta(x^3) = 6x \neq 0$ , jedoch  $\Delta^2(x^3) = \Delta(6x) = 0$ .

Um zu Lösungen der Plattengleichungen zu kommen genügt es also, eine Trivialsolution zu finden und dazu Linearkombinationen von biharmonischen Funktionen zu addieren. Das Problem einer genaueren Erforschung der Menge der biharmonischen Funktionen wollen wir hier nicht angehen. Dafür besprechen wir zwei Spezialfälle:

### 8.1.11 Das Modellierungsbeispiel der an vier Punkten aufgehängten Platte

Sei  $\frac{q(x, y) \cdot 12(1 - \nu^2)}{E \cdot h^3} = \text{const.} \cdot q(x, y) = p = 6$ .

Zudem sei eine quadratische Platte mit den Eckpunkten  $(\pm x_0, \pm y_0)$  gegeben.

Wir suchen wieder eine achsensymmetrische Lösung bei der Bedingung, dass die Platte an vier Punkten befestigt ist. Daher machen wir den Ansatz für die Auslenkung bzw. Durchbiegung:

$$u(x, y) = c_6 x^4 + c_5 x^2 y^2 + c_4 y^4 + c_3 x^2 + c_2 y^2 + c_1$$

Damit wird:

$$\Delta u(x, y) = 2c_5 x^2 + 12c_6 x^2 + 12c_4 y^2 + 2c_5 y^2 + 2c_2 + 2c_3 \Rightarrow \Delta^2 u(x, y) = 24c_4 + 8c_5 + 24c_6 = 6$$

Weiter stellen wir die „Querkräftebedingung“:  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0$  für  $x = \pm x_0$   
und  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0$  für  $y = \pm y_0$ .

$$\leadsto 4c_5 x + 24c_6 x = 0, \quad 24c_4 y + 4c_5 y = 0.$$

Für  $\pm x_0$  und  $\pm y_0$  erhalten wir jedoch damit nur 2 und nicht 4 Bedingungen. Damit haben wir bis jetzt aber 3 Gleichungen für die Unbekannten  $c_4, c_5, c_6$ . Fordert man weiter noch  $u(\pm x_0, \pm y_0) = 0$ , so hat man noch eine weitere Gleichung. Weitere Bedingungen kann man mittels der Biegemomente auf dem Rand erhalten, womit die fehlenden Konstanten aufgrund der Modellierung bestimmbar werden. Damit erkennen wir, dass es möglich ist, durch einen Ansatz (hier ein Polynom vom Grade 4) eine Lösung quasi vorauszubestimmen. Denn bei diesem Lösungskonzept geht es nicht um die Frage, welche Lösung aus der Menge aller möglichen Lösungen die richtige sei, sondern um die Frage, ob ein angenommenes Modell für eine Lösung wohl dem Modell der Differentialgleichung der Platte genügen kann und diese Lösung daher nicht zum Vornherein ausgeschlossen werden muss.

Wir haben somit hier infolge unserer **Ansatzmethode** eine **nicht ausschliessbare Lösung** und nicht eine **zwingend einschliessbare** vor uns.

### 8.1.12 Das Modellierungsbeispiel Kreisplatte

Sei wieder  $\frac{q(x, y) \cdot 12(1 - \nu^2)}{E \cdot h^3} = \text{const.} \cdot q(x, y) = p = 6$ . Zudem sei eine kreissymmetrische Platte mit dem Radius  $R$  gegeben, welche am Rande gelenkig gelagert ist, d.h. es gilt  $u(R \cos(\varphi), R \sin(\varphi)) = 0$ .

Um das Problem behandeln zu können, müssen wir zuerst den Laplace-Operator in Polarkoordinaten schreiben. Dazu benutzen wir die Formeln ab Seite 248, speziell Formel (\*) von Seite 252.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 u(r, \varphi)}{\partial r^4} + 2 \frac{\partial^3 u(r, \varphi)}{\partial r^3} \frac{1}{r} - \frac{\partial^2 u(r, \varphi)}{\partial r^2} \frac{1}{r^2} + \frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial r} \frac{1}{r^3} &= p \quad | \cdot r^4 \\ \Rightarrow \frac{\partial^4 u(r, \varphi)}{\partial r^4} r^4 + 2 \frac{\partial^3 u(r, \varphi)}{\partial r^3} r^3 - \frac{\partial^2 u(r, \varphi)}{\partial r^2} r^2 + \frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial r} r &= p r^4 \end{aligned}$$

Diese Gleichung kennt man unter dem Namen „Eulersche Differentialgleichung“. Der Schnelle halber lösen wir sie mit der Maschine:

**Input:**

```
solv = DSolve[r^4 u''''[r]+2 r^3 u'''[r]-r^2 u''[r]+r u'[r]== p r^4,u,r]//Flatten
```

**Output:**

$$\left\{ u \rightarrow \text{Function}\left[\{r\}, \frac{p r^4}{64} + \frac{c_2 r^2}{2} - \frac{c_3 r^2}{4} + \frac{1}{2} c_3 \log(r) r^2 + c_4 + c_1 \log(r)\right] \right\}$$

Da bei der Platte  $u(0)$  endlich sein muss, muss  $c_1 = 0$  sein. Ebenso muss die Krümmung — und damit  $u''(r)$  an der Stelle  $r = 0$  endlich sein. Somit muss auch der Term  $c_3 = 0$  sein. Wir erhalten:

$$u(r) = \frac{p r^4}{64} + \frac{c_2 r^2}{2} + c_4$$

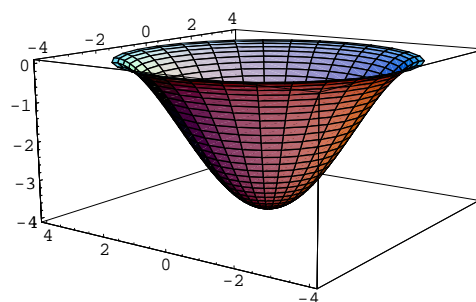
**Input:**

```
u1[r_] := (u[r] /. solv) /. {C[3] -> 0, C[1] -> 0}; Print["u1(r) = ", u1[r]];
solv1 = Solve[Evaluate[{u1[R] == 0, (u1'[r] /. r -> R) == 0}], {C[2], C[4]}] // Flatten;
Print[solv1];
u2[r_] := u1[r] /. solv1; Print["u2(r) = ", u2[r]];
u3[r_] := u2[r] /. {R -> 4, p -> -1}; Print["u3(r) = ", u3[r]];
ParametricPlot3D[{r Cos[fi], r Sin[fi], u3[r]}, {r, 0, 4}, {fi, 0, 2 Pi}]
```

Man beachte, dass die hier gewählten Werte für  $R$  und  $p$  nur der gut erkennbaren Dokumentation des Verfahrens dienen, jedoch darüber hinaus keine praktische Bedeutung haben.

**Output:**

$$\begin{aligned} u1(r) &= \frac{p r^4}{64} + \frac{c_2 r^2}{2} + c_4 \\ \left\{ c_4 \rightarrow \frac{p R^4}{64}, c_2 \rightarrow -\frac{p R^2}{16} \right\} \\ u2(r) &= \frac{p r^4}{64} - \frac{1}{32} p R^2 r^2 + \frac{p R^4}{64} \\ u3(r) &= -\frac{r^4}{64} + \frac{r^2}{2} - 4 \end{aligned}$$





### 8.1.13 Numerische Methoden

Im Kurs Analysis haben wir die Differentiationsmethode mit Hilfe der zentralen Differenzen kennen gelernt. Wir erinnern uns:

**Definition:**

1.  $y_k' := \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{x_{k+1} - x_{k-1}} = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}$  heisst **zentraler Differenzenquotient** in  $x_k = x_0 + k \cdot h$ .
2.  $(y_k')_{fw} := \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{y_{k+1} - y_k}{h}$  heisst **Vorwärtsdifferenzenquotient** in  $x_k = x_0 + k \cdot h$ .
3.  $(y_k')_{bw} := \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} = \frac{y_k - y_{k-1}}{h}$  heisst **Rückwärtsdifferenzenquotient** in  $x_k = x_0 + k \cdot h$ .

**Satz:**

**Vor.:**

Sei  $f(x)$ ,  $f(x, y)$  in  $I$  genügend oft differenzierbar,  
 $x_k = x_0 + k h_x \in I$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ ,  $h = h_x$   
 $y_j = y_0 + k h_y \in I$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$   
 $f(x) := y(x)$  oder  $f(x, y) := w(x, y)$

**Beh.:**

1.  $y_k' = f'(x_k) = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + O[h^2]$
2.  $y_k'' = f''(x_k) = \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + O[h^2]$
3.  $y_k''' = \frac{y_{k+2} - 2y_{k+1} + 2y_{k-1} - y_{k-2}}{2h^3} + O[h^2]$
4.  $y_k^{(4)} = \frac{y_{k+2} - 4y_{k+1} + 6y_k - 4y_{k-1} + y_{k-2}}{2h^3} + O[h^2]$
5.  $\frac{\partial f(x_k, y_j)}{\partial x} = w'_{x|k,j} \approx \frac{w_{k+1,j} - w_{k-1,j}}{2h_x} + O[h - x^2]$
6.  $\frac{\partial f(x_k, y_j)}{\partial y} = w'_{y|k,j} \approx \frac{w_{k,j+1} - w_{k,j-1}}{2h_y} + O[h_y^2]$
7.  $\frac{\partial^2 f(x_k, y_j)}{\partial x \partial y} = w''_{xy|k,j} \approx \frac{w_{k+1,j+1} - w_{k+1,j-1} - w_{k-1,j+1} + w_{k-1,j-1}}{4h_x h_y} + O[\text{Max}(h_x^2, h_y^2)]$
8.  $\frac{\partial^4 f(x_k, y_j)}{\partial x^2 \partial y^2} = w_{xxyy|k,j}^{(4)} \approx O[\text{Max}(h_x^2, h_y^2)] +$   

$$\frac{w_{k+1,j+1} + w_{k+1,j-1} + w_{k-1,j+1} + w_{k-1,j-1} - 2w_{k+1,j} - 2w_{k,j+1} - 2w_{k,j-1} - 2w_{k-1,j} + 4w_{k,j}}{h_x^2 h_y^2}$$

Auf dieser Basis können wir den Laplace-Operator sowie den biharmonischen Operator diskretisieren und auf partielle Differentialgleichungen anwenden. Da die Indices in den hier nachfolgend behandelten Fällen sternförmig angeordnet sind, sprechen wir von **Differenzestern**.

Nach Ausführung der notwendigen Additionen erhalten wir als Resultat:

**Korollar:**

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Rightarrow \Delta w_{k,j} \approx \frac{w_{k+1,j} + w_{k-1,j} - 4w_{k,j} + w_{k,j+1} + w_{k,j-1}}{h^2}$$

$$\Delta^2 f(x, y) = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \Rightarrow \Delta \Delta w_{k,j} \approx \frac{1}{h^4} (20w_{k,j} - 8(w_{k+1,j} + w_{k-1,j} + w_{k,j+1} + w_{k,j-1}) + 2(w_{k+1,j+1} + w_{k+1,j-1} + w_{k-1,j+1} + w_{k-1,j-1}) + (w_{k+2,j} + w_{k-2,j} + w_{k,j+2} + w_{k,j-2}))$$

### 8.1.14 Numerische Beispiele: Differenzenverfahren

#### 1. Beispiel:

Wir behandeln das Randwertproblem  $y''(x) + x y(x) = (10 - x)$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y(10) = 0$ . Wir lösen das Problem zuerst einmal exakt mit der Maschine *Mathematica*:

**Input**

```
Remove["Global`*"];
solv=DSolve[
{y'[x]+ x y[x]== (10-x), y[0]==0, y[10]==0}, y, x]//Flatten;
z[x_]:=y[x]/.solv;
z[x]//N//InputForm
```

Da der Output mit der exakten Lösungsfunktion sehr umfangreich ist und daher hier so nicht wiedergegeben werden kann, formatieren wir diesen Output um. In eine numerische Form umgerechnet wird er kürzer, jedoch auch ungenau. Das Symbol  $I$  ersetzen wir noch durch  $i$  (imaginäre Einheit). Die **Ausgabe des Outputs** erfolgt bis auf  $i$  in der InputForm:

```
(-0.08964587887974669 + 0.15527121690888887 * i) * ((-164.5127163185611 - 6.802642361168156 * i) *
AiryAi[(0.5000000000000001 + 0.8660254037844386 * i) * x] + (90.44636614419267 - 3.9275073984206585 * i) *
AiryBi[(0.5000000000000001 + 0.8660254037844386 * i) * x] - (8.761118449750352 + 15.174702286096874 *
i) *
AiryAiPrime[(0.5000000000000001 + 0.8660254037844386 * i) * x] *
AiryBi[(0.5000000000000001 + 0.8660254037844386 * i) * x] + (8.761118449750352 + 15.174702286096874 *
i) *
AiryAi[(0.5000000000000001 + 0.8660254037844386 * i) * x] * AiryBiPrime[(0.5000000000000001 +
0.8660254037844386 * i) * x] + (107.74890041919937 + 5.258016244624741 *^- 13 * i) * x *
AiryAi[(0.5000000000000001 + 0.8660254037844386 * i) * x] *
HypergeometricPFQ[0.3333333333333333, 0.6666666666666666, 1.3333333333333333, -0.1111111111111111 *
x^3] - (62.20885666191094 + 3.126388037344441 *^- 13 * i) * x *
AiryBi[(0.5000000000000001 + 0.8660254037844386 * i) * x] *
HypergeometricPFQ[0.3333333333333333, 0.6666666666666666, 1.3333333333333333, -0.1111111111111111 *
x^3] + (19.637536992104444 + 34.01321180583861 * i) * x^2 *
AiryAi[(0.5000000000000001 + 0.8660254037844386 * i) * x] *
HypergeometricPFQ[0.6666666666666666, 1.3333333333333333, 1.6666666666666667, -0.1111111111111111 *
x^3] + (11.337737268612731 + 19.63753699210468 * i) * x^2 *
AiryBi[(0.5000000000000001 + 0.8660254037844386 * i) * x] *
HypergeometricPFQ[0.6666666666666666, 1.3333333333333333, 1.6666666666666667, -0.1111111111111111 *
x^3])
```

Da hier komplexe Funktionen vorkommen, verzichten wir aus Zeitgründen auf den Versuch, damit einen Plot herzustellen. Statt dessen verwenden wir das vorgegebene Programm zur Auffindung einer numerischen Lösung:

**Input:**

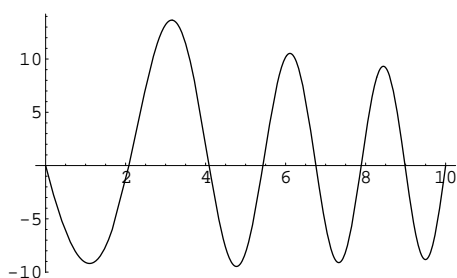
```
Remove["Global`*"];
Nsolv=NDSolve[
{y''[x]+ x y[x]== (10-x),y[0]==0, y[10]==0},y,x]//Flatten;
Plot[y[x]/.Nsolv,{x,0,10}];
```

**Output siehe unten!**

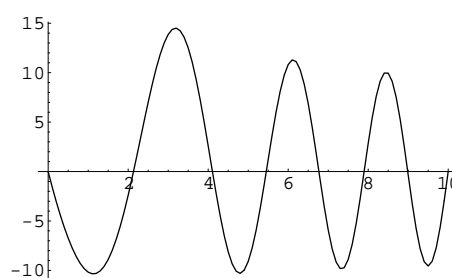
Nun versuchen wir, die Lösung selbst einmal numerisch mit Hilfe von Differenzengleichungen zu berechnen. Nachstehend das Programm:

**Input:**

```
Remove["Global`*"];
s=100; h=10/s;
x[k_]:=k h;
tab1=Table[x[k],{k,0,s,10/s}];
y[0]=0; y[s]=0;
tab2=Table[y[k],{k,1,s-1}];
y2[k_]:= (y[k+1]-2 y[k]+y[k-1])/h^2;
gleich[k_]:= (y2[k]+x[k] y[k]==(10-x[k]));
solv = Solve[Table[gleich[k],{k,1,s-1}],tab2]//Flatten;
z[k_]:=y[k]/.solv; z[0]=y[0];z[s]=y[s];
tab=Table[{x[k],z[k]}/N,{k,0,s}];
ListPlot[tab,PlotJoined->True];
```

**Output:**

Hergestellt mit NDSolve (*Mathematica*)



Hergestellt mittels Berechnung mit Hilfe von Differenzengleichungen (*Mathematica*)

**2. Beispiel: Verfahren von Richardson, biharmonischer Operator.**

Wir behandeln das Randwertproblem (eingespannte Platte)

$$\Delta^2 z(x, y) = \Delta(\Delta(z(x, y))) = 2, \quad (x, y) \in G = [0, 10] \times [0, 10]$$

$$z(0, y) = z(10, y) = z(x, 0) = z(x, 10) = 0, \quad \frac{\partial z(x, y)}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ für } (x, y) \in \partial G$$

$$\Rightarrow \frac{dz(x, y)}{dx} = 0 \text{ für } x = 0, \quad x = 10, \quad \frac{dz(x, y)}{dy} = 0 \text{ für } y = 0, \quad y = 10$$

Auf dem Rand kann der zentrale Differenzenquotient nicht ohne Gebietserweiterung verwendet werden. Wir benutzen daher für die Umsetzung der Randbedingungen den Vorwärtsdifferenzenquotient und den Rückwärtsdifferenzenquotient. Daraus schliesst man, dass für  $k = 1, k = s - 1, j = 1, j = s - 1$  die Werte der Lösungsfunktion ebenfalls 0 gesetzt werden müssen.

Im Verfahren von Richardson wird ein Rechteckgebiet der Länge nach in  $s_k \in \mathbb{N}$  und der Breite nach in  $s_j \in \mathbb{N}$  Teilrechtecke aufgeteilt. Dadurch entstehen  $s_k \cdot s_j$  gleich grosse Teilrechtecke. Im Beispiel ist  $s_k = s_j = s$ .

Wenn das gegebene Gebiet jedoch kein Rechtecksgebiet ist, so wählen wir bei derselben Rasterung diejenigen Punkte, welche dem Rande am nächsten liegen, als Randpunkte. Damit verändern wir die Gebietsform ein klein wenig. Dieses Vorgehen kann mit rechtem Aufwand verbunden sein, denn man muss dabei peinlich darauf achten, dass die Anzahl der zu berechnenden Punkte (Variablen) mit der Anzahl Gleichungen übereinstimmt und dass in jeder Zeile und Spalte genügend bekannte Randbedingungen dafür bereitgestellt werden.

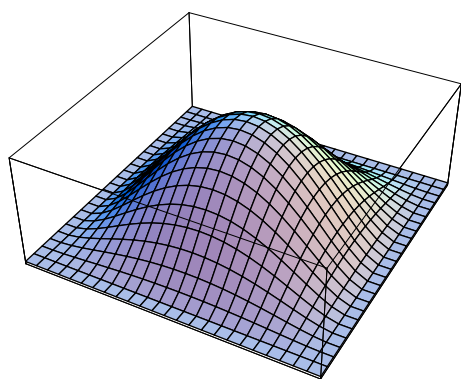
Folgendes Programm liefert nun den Output für unser Beispiel:

#### Input:

```
Remove["Global' *"];
breite = 10; laenge=breite;
s=24; h=breite/s;
x[k_]:=k h;
y[j_]:=k h;
tab1=Table[{x[k],y[j]},{k,0,s,breite/s},{j,0,s,breite/s}];
z[0,j_]=0; z[s,j_]=0;
z[1,j_]=0; z[s-1,j_]=0;
z[k_,0]=0; z[k_,s]=0;
z[k_,1]=0; z[k_,s-1]=0;
tab2=Table[z[k,j]},{k,2,s-2},{j,2,s-2}]/Flatten;
zBH[k_,j_]:= 1/(h^4) (20 z[k,j]-
8(z[k+1,j]+z[k-1,j]+z[k,j+1]+z[k,j-1])+
2(z[k+1,j+1]+z[k+1,j-1]+z[k-1,j+1]+z[k-1,j-1])+
(z[k+2,j]+z[k-2,j]+z[k,j+2]+z[k,j-2])
);
gleich[k_,j_]:= (zBH[k,j]==2);
solv = Solve[Table[gleich[k,j]},{k,2,s-2},{j,2,s-2}]/Flatten,tab2]/Flatten;
w[k_,j_]:=z[k,j]/.solv;
w[0,j_]=0; w[s,j_]=0;
w[1,j_]=0; w[s-1,j_]=0;
w[k_,0]=0; w[k_,s]=0;
w[k_,1]=0; w[k_,s-1]=0;
tab=Table[w[k,j]//N,{k,0,s},{j,0,s}];
ListPlot3D[tab,Axes->False];
Print["Maximale Höhe = ",w[s/2,s/2]//N];
```

#### Output:

Maximale Höhe = 21.1238



Die Berechnung erfolgte mit Hilfe von Differenzengleichungen und *Mathematica 5.2* auf einem alten PC aus dem Jahre 2003. Bei den verwendeten  $25 \times 25$  Punkten ist das Programm genügend leistungsfähig, sodass der Output sofort erscheint.

Da der Graph als geplottete Liste erzeugt worden ist, werden hier bei der Grundeinstellung die Achsen nach den verwendeten Indices skaliert statt nach Länge und Breite. Um den Programmieraufwand für eine dem Problem angepasste Skalierung zu sparen, wurde diese weggelassen.

**Hinweis:** Wenn irgend eine partielle Differentialgleichung in eine Differenzengleichung umgewandelt wird, so sind jeweils die **Konvergenzbedingungen** zu beachten. Z.B. bei zwei Variablen  $x$  und  $y$  können  $h_x$  und  $h_y$  nicht beliebig gewählt werden. Abhängig von der Gleichungsart muss für die Sicherung der Konvergenz üblicherweise eine gewisse Beziehung zwischen  $h_x$  und  $h_y$  bestehen. Man konsultiere dazu die Fachliteratur.

### 3. Beispiel: Verfahren von Richardson, Potentialproblem (Dirichletproblem).

Wir behandeln das Randwertproblem (Potentialproblem)

$$\Delta z(x, y) = 0, \quad (x, y) \in G = [0, 10] \times [0, 10]$$

$$z(0, y) = z(10, y) = \sin(y \frac{\pi}{10}), \quad z(x, 0) = \sin(x \frac{\pi}{10}), \quad \frac{\partial z(x, y)}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ für } (x, y) \in \partial G.$$

In diesem Fall müssen wir den Operator  $\Delta$  diskretisieren:

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Rightarrow \Delta w_{k,j} \approx \frac{w_{k+1,j} + w_{k-1,j} - 4w_{k,j} + w_{k,j+1} + w_{k,j-1}}{h^2},$$

$$\Delta f(x, y) = 0 \Rightarrow \frac{w_{k+1,j} + w_{k-1,j} - 4w_{k,j} + w_{k,j+1} + w_{k,j-1}}{h^2} = 0$$

Folgendes Programm liefert nun den Output für unser Beispiel:

#### Input:

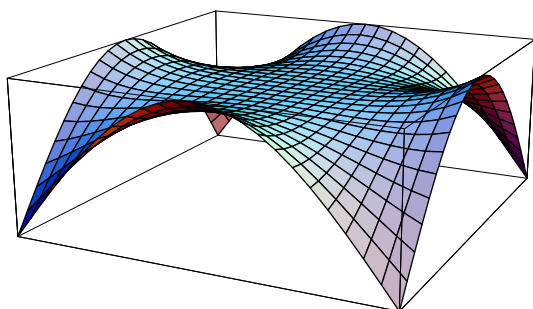
```
Remove["Global`*"];
gleichungen[
s_] := Module[{breite, h, x, y, k, j, z, tab1, tab2, fkt, zBH, solv, w, tab},
  breite = 10; laenge = breite;
  h = breite/s;
  x[k_] := k h;
  y[k_] := k h;
  fkt[x_, y_] := 0;
  tab1 = Table[{x[k], y[j]}, {k, 0, s, breite/s}, {j, 0, s, breite/s}] // N;
  tab2 = Table[z[k, j], {k, 1, s - 1}, {j, 1, s - 1}] // Flatten;
  z[0, j_] := Sin[j Pi / s] // N;
  z[s, j_] := Sin[j Pi / s] // N;
```

```

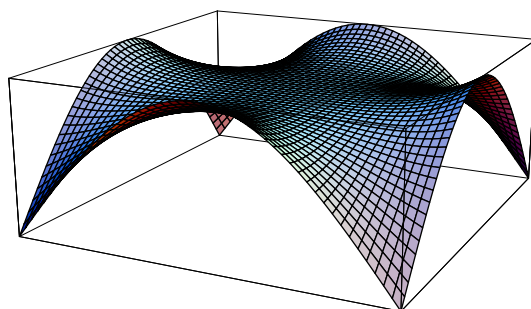
z[k_, 0] := Sin[k Pi /s] // N;
z[k_, s] := Sin[k Pi /s] // N;
zBH[k_, j_] := 1/(h^2) (-4 z[k, j] + z[
    k + 1, j] + z[k - 1, j] + z[k, j + 1] + z[k, j - 1]);
gleich[k_, j_] := (zBH[k, j] == 0);
solv = Solve[Table[gleich[k, j], {k, 1,
    s - 1}, {j, 1, s - 1}] // Flatten, tab2] // Flatten;
w[k_, j_] := z[k, j] /. solv;
w[0, j_] = Sin[j Pi /s] // N; w[s, j_] = Sin[j Pi /s] // N;
w[k_, 0] = Sin[k Pi /s] // N; w[k_, s] = Sin[k Pi /s] // N;
tab = Table[w[k, j] // N, {k, 0, s}, {j, 0, s}];
ListPlot3D[tab, Axes ->
    False, ViewPoint -> {-2.682, -1.311, 0.856}, PlotRange -> {0, 1}];
Print["Zentrale Höhe = ", w[s/2, s/2] // N];];
gleichungen[24];
gleichungen[50];
gleichungen[80];
gleichungen[100];

```

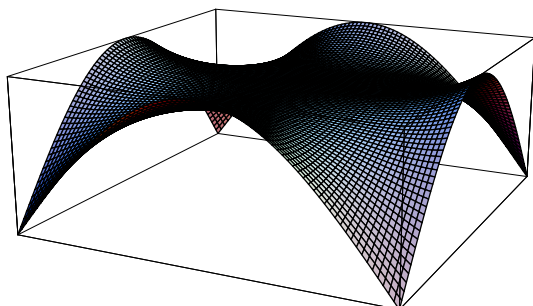
Output:



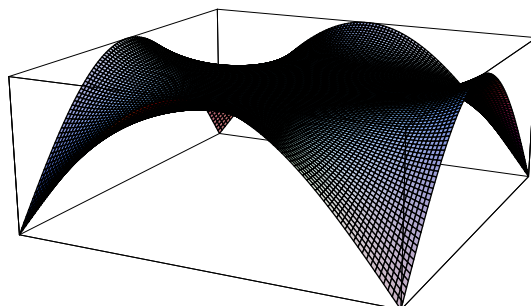
$s = 24$ , zentrale Höhe = 0.798711



$s = 50$ , zentrale Höhe = 0.797451



$s = 80$ , zentrale Höhe = 0.797221



$s = 100$ , zentrale Höhe = 0.797168

### 8.1.15 Numerische Beispiele: Iterationsverfahren

#### Das Gauss–Seidelschen Relaxationsverfahren

Oben haben wir beim biharmonischen Operator mit  $25 \cdot 25 = 625$  Punkten resp. Gleichungen gearbeitet. Nimmt man mehr Punkte, so kann je nach Aufgabe und Punktzahl die Rechenzeit untragbar gross werden. Für viele Bedürfnisse ist jedoch eine höhere Genauigkeit erforderlich, z.B.  $1000 \cdot 1000 = 10^6$  Punkte resp. Gleichungen. In diesem Fall kann es einfacher sein, eine Iteration zu versuchen.

Dabei geht man von gegebenen Differenzensternen resp. vergleichbaren Gebilden z.B. der Art  $w_{k,j} = q(w_{k-2,j}, w_{k-1,j-1}, w_{k-1,j}, w_{k-1,j+1}, \dots)$  aus.

Man kann nun für eine gegebene Gleichung  $\mathcal{D}(z(x, y)) = f(z(x, y), x, y)$  eine Iteration folgender Art versuchen:

1. Bestimme aus dem zugehörigen Differenzenstern die notwendigen Gleichungen für die Werte  $w_{k,j}$ .
2. Wähle für alle Punkte, an denen der Funktionswert unbekannt ist, eine vernünftige Startnäherung  $w_{k,j}^0 = c_{k,j}$ .
3. Iteriere das System nach Umschreibung der Gleichungen in Rekursionsgleichungen, z.B.

$$w_{k,j}^{n+1} = q(w_{k-2,j}^n, w_{k-1,j-1}^n, w_{k-1,j}^n, w_{k-1,j+1}^n, \dots)$$

4. Falls sich die Werte quasi stabil verhalten, so hat man vielleicht eine Lösung gefunden. Ohne die Beschaffung von Konvergenzkriterien zum jeweiligen Problem kann es aber leicht zu Irrtümern kommen. Probleme sind hier **numerische Instabilität** und **langsame Konvergenz**, so dass Abbruchbedingungen fälschlicherweise greifen, also den Programmabbruch auslösen. Man kann das Resultat kontrolliere durch Überprüfung der Gleichung  $\mathcal{D}(z(x, y)) = f(z(x, y), x, y)$ , welche für diese Überprüfung wiederum zu diskretisieren ist. Bei langsamer Konvergenz kann jedoch die Überprüfung bei Mangel an Genauigkeit keine Information liefern. Nachfolgende Beispiele können das veranschaulichen.
5. Bezüglich Konvergenzbeweisen muss des Rahmens wegen auf die einschlägige Fachliteratur verwiesen werden.

### 1. Beispiel: Relaxationsverfahren, Potentialproblem (Dirichletproblem).

Wir behandeln wiederum wie vorhin das Randwertproblem (Potentialproblem)

$$\Delta z(x, y) = 0, \quad (x, y) \in G = [0, 10] \times [0, 10]$$

$$z(0, y) = z(10, y) = \sin(y \frac{\pi}{10}), \quad z(x, 0) = \sin(x \frac{\pi}{10}), \quad \frac{\partial z(x, y)}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ für } (x, y) \in \partial G.$$

$$\frac{w_{k+1,j} + w_{k-1,j} - 4w_{k,j} + w_{k,j+1} + w_{k,j-1}}{h^2} = 0 \Rightarrow w_{k,j} = \frac{w_{k+1,j} + w_{k-1,j} + w_{k,j+1} + w_{k,j-1}}{4}$$

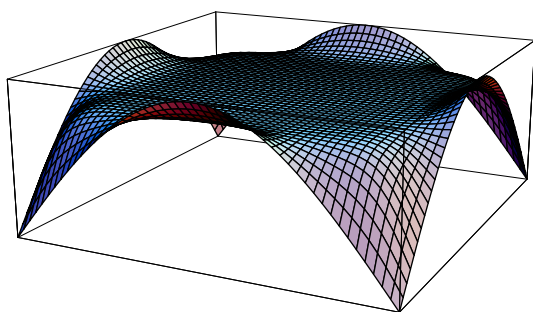
Diese Gleichung können wir in eine Iterationsgleichung verwandeln:

$$w_{k,j,n} = \frac{w_{k+1,j,n-1} + w_{k-1,j,n-1} + w_{k,j+1,n-1} + w_{k,j-1,n-1}}{4}$$

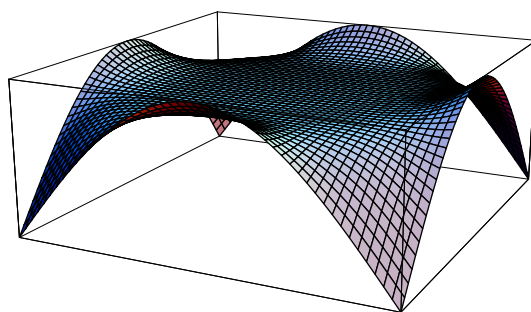
$$|w_{k,j,n}| \leq \text{Max}(|w_{k+1,j,n-1}|, |w_{k-1,j,n-1}|, |w_{k,j+1,n-1}|, |w_{k,j-1,n-1}|)$$

Da die Werte auf dem Rande gegeben sind und für das Dirichletproblem das Maximumprinzip gilt, können die Werte von  $w_{k,j,n}$  das Intervall der Randextrema nicht verlassen. Daraus kann man auf die Konvergenz schließen. Wie wir aber sehen werden, ist die Konvergenz sehr langsam. Wir starten unsere Iteration mit konstanten Werten im innern:  $wert = c$ .

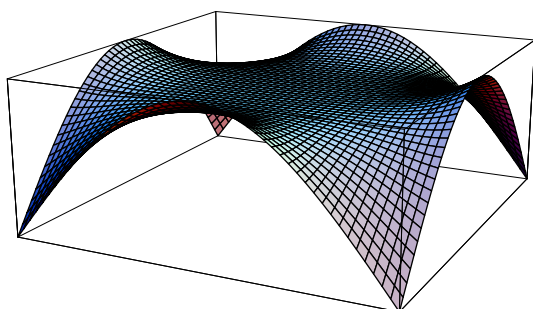
**Output** (hier mit  $wert = c = 0.797221183398142 = \text{Resultat von vorhin}$ ):



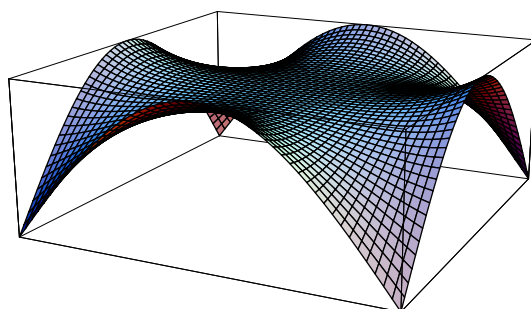
20 Schritte, zentrale Höhe = 0.797221



50 Schritte, zentrale Höhe = 0.797221



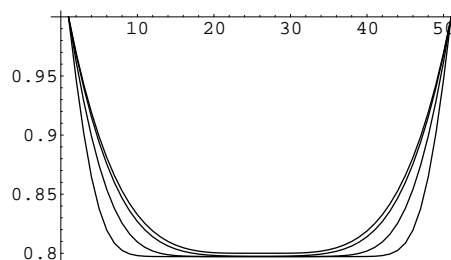
100 Schritte, zentrale Höhe = 0.797418



1000 Schritte, zentrale Höhe = 0.800046

Hier sieht man das Verhalten der Kurven in der Mitte des Bildes.

D.h. für  $x = \frac{Laenge}{2}$  oder  $y = \frac{Breite}{2}$ .



### Verwendetes Programm (Input):

```
Remove["Global`*"];
bild[s_, end_, wert_] := Modul[{breite, fkt, h, x, y, k, j, u, w, uu},
  Remove[u, w, uu, fkt, x, y];
  breite = 10; laenge = breite;
  h = breite/s; x[k_] := k h; y[j_] := j h;
  fkt[x_, y_] := wert;
  tab1 = Table[{x[k], y[j]}, {k, 0, s, breite/s}, {j, 0, s, breite/s}];
  tab2 = Table[z[k, j, n], {k, 1, s - 1}, {j, 1, s - 1}] // Flatten;
  u[k_, j_, 0] = fkt[x[k], y[j]];
  u[0, j_, n_] := Sin[j Pi /s]; u[s, j_, n_] := Sin[j Pi /s];
  u[k_, 0, n_] := Sin[k Pi /s]; u[k_, s, n_] := Sin[k Pi /s];
  w[0, j_, n_] := Sin[j Pi /s]; w[s, j_, n_] := Sin[j Pi /s];
  w[k_, 0, n_] := Sin[k Pi /s]; w[k_, s, n_] := Sin[k Pi /s];
  Do[(w[k, j, 1] = (u[k + 1, j, 0] + u[k - 1, j, 0] + u[k, j + 1, 0]
    + u[k, j - 1, 0])/4), {k, 1, s - 1}, {j, 1, s - 1}];
  Do[(uu[k, j, 0] = w[k, j, 1] // N), {k, 0, s}, {j, 0, s}];
  For[n = 1, n = end,
    Table[w[k, j, 1] = (uu[k + 1, j, 0] + uu[k - 1, j, 0]
```

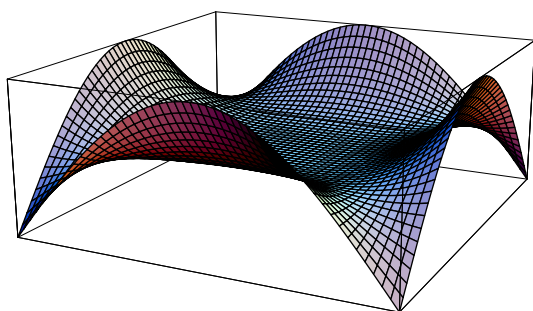


```

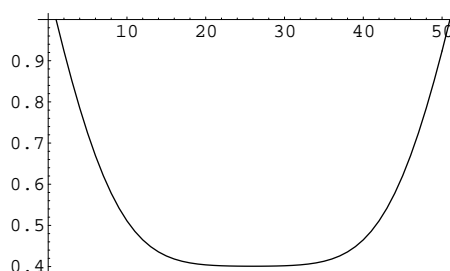
+ uu[k, j + 1, 0] + uu[k, j - 1, 0])/4)// N, {k, 1, s - 1}, {j, 1, s - 1}];
Table[(uu[k, j, 0] = w[k, j, 1]), {k, 1, s - 1}, {j, 1, s - 1}];
n++;];
tab3D = Table[w[k, j, 1] // N, {k, 0, s}, {j, 0, s}];
tab2D = Table[w[k, s/2, 1] // N, {k, 0, s}];
(*Print[tab];*)
pl3D[s, end, wert] = ListPlot3D[tab3D, Axes ->
    False, ViewPoint -> {-2.682, -1.311, 0.856}, PlotRange -> {0, 1}];
pl2D[s, end, wert] = ListPlot[tab2D, PlotJoined -> True];
Print["Zentrale Höhe = ", w[s/2, s/2, 1] // N]; end];
s = 50; end = 20; wert = 0.797221183398142;
bild[50, end, 0.797221183398142];
bild[50, 50, 0.797221183398142];
bild[50, 100, 0.797221183398142];
bild[50, 1000, 0.797221183398142];
Show[pl2D[s, 20, wert], pl2D[s, 50, wert], pl2D[s, 100, wert], pl2D[s, 1000, wert]];

```

Eine Iteration mit  $end = 100$  Schritten,  $s = 50$  Intervallen und einem Startwert der erwarteten Funktion von  $wert = c = 0.4$  ergibt:

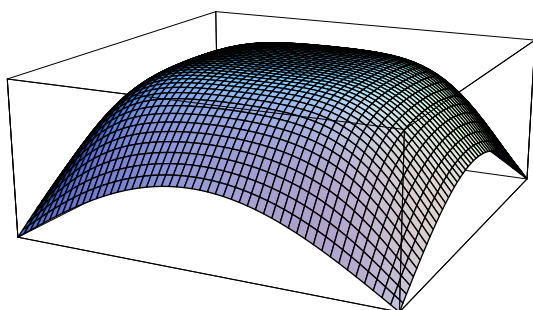


Zentrale Höhe = 0.400824

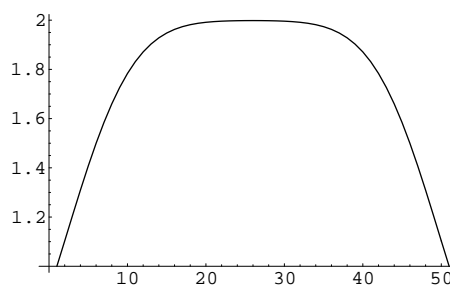


Wie man sieht, ist bei einer Starthöhe von 0.4 in 100 Schritten die erwartete zentrale Höhe  $\approx 0.8$  längst noch nicht erreicht: Es hat sich dort praktisch noch nichts bewegt.

Eine Iteration mit  $end = 100$  Schritten,  $s = 50$  Intervallen und einem Startwert der erwarteten Funktion von  $wert = c = 2.0$  ergibt:



Zentrale Höhe = 1.9983

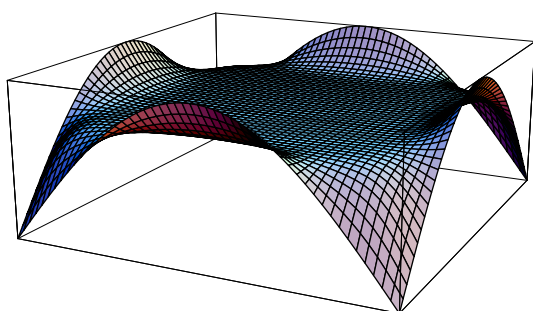


Wie man wiederum sieht, ist auch hier bei einer Starthöhe von 2.0 in 100 Schritten die erwartete zentrale Höhe  $\approx 0.8$  längst noch nicht erreicht. Um ein brauchbares Resultat zu erhalten, muss  $end$  sehr gross gewählt werden.

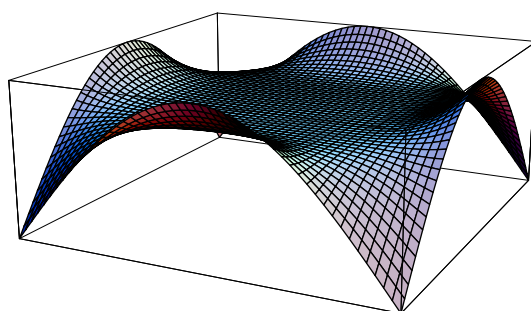
Wir untersuchen noch das Verhalten der Iteration bei einer Starthöhe (Funktionswerte)  $wert = c = 0.7$ :

```
s=50;end=20;wert=0.7;
bild[s,end,wert];
s=50;end=50;wert=0.7;
bild[s,end,wert];
s=50;end=100;wert=0.7;
bild[s,end,wert];
s=50;end=3000;wert=0.7;
bild[s,end,wert];
Show[p12D[50,20,0.7],p12D[50,50,0.7],p12D[50,100,0.7],p12D[50,3000,0.7]];
```

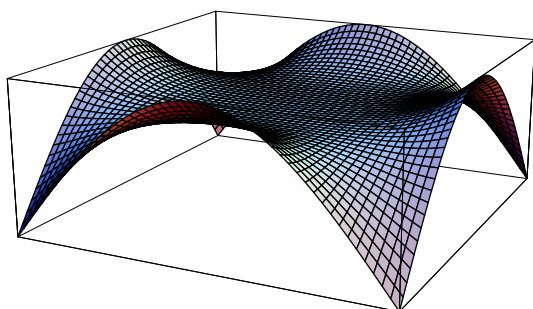
**Output** (hier mit  $wert = c = 0.7$ ):



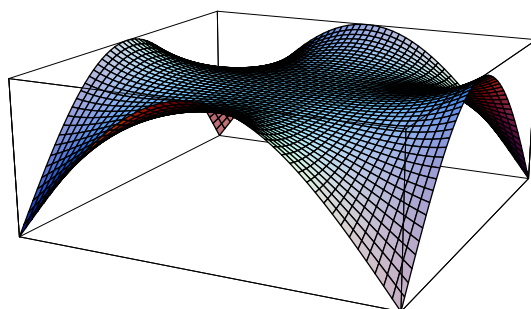
20 Schritte, zentrale Höhe = 0.7



50 Schritte, zentrale Höhe = 0.7

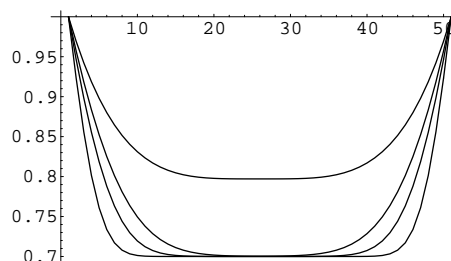


100 Schritte, zentrale Höhe = 0.700351



3000 Schritte, zentrale Höhe = 0.797081

Bei 3000 Schritten dauerte die Wartezeit zur Berechnung und Generierung des 3D-Graphen bei Verwendung eines PS's aus dem Jahre 2003 nur ein paar Sekunden. Man sieht jedoch, dass bei einem beliebig geschätzten und gewählten Startwert ohne eine grosse Schrittzahl mit diesem Verfahren nichts auszurichten ist.



## 2. Beispiel: Relaxationsverfahren, Problem der eingespannten Platte:

Wir behandeln wie auf Seite 265 das Randwertproblem:

$$\Delta^2 z(x, y) = \Delta(\Delta(z(x, y))) = 2, \quad (x, y) \in G = [0, 10] \times [0, 10]$$

$$z(0, y) = z(10, y) = z(x, 0) = z(x, 10) = 0, \quad \frac{\partial z(x, y)}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ für } (x, y) \in \partial G$$

$$\Rightarrow \frac{dz(x, y)}{dx} = 0 \text{ für } x = 0, \quad x = 10, \quad \frac{dz(x, y)}{dy} = 0 \text{ für } y = 0, \quad y = 10$$

Zu iterieren wäre hier das System der Gleichungen (in jedem innern Punkt eine Gleichung):

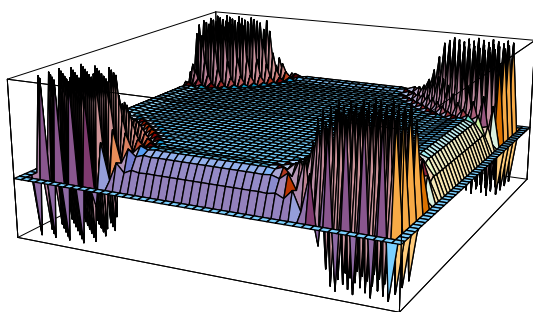
$$\begin{aligned} u(k, j, n) = & \frac{1}{20} (fkt(x(k), y(j)) h^4 - u(k-2, j, n-1) - 2u(k-1, j-1, n-1) \\ & + 8u(k-1, j, n-1) - 2u(k-1, j+1, n-1) - u(k, j-2, n-1) + 8u(k, j-1, n-1) + 8u(k, j+1, n-1) \\ & - u(k, j+2, n-1) - 2u(k+1, j-1, n-1) + 8u(k+1, j, n-1) - 2u(k+1, j+1, n-1) - u(k+2, j, n-1)) \end{aligned}$$

Wir verwenden das folgende Programm:

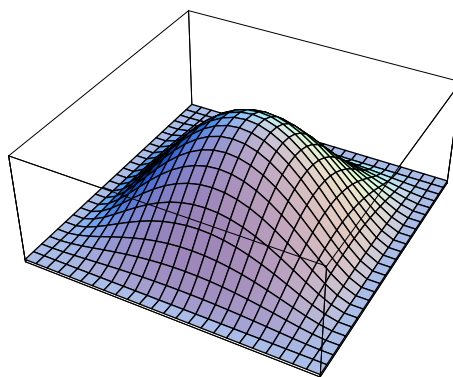
**Input:**

```
Remove["Global'"];
end = 20; fkt[x_, y_] := 0.2;
breite = 10; laenge = breite; s = 48; h = breite/s;
x[k_] := k h; y[j_] := j h;
tab1 = Table[{x[k], y[j]}, {k, 0, s, breite/s}, {j, 0, s, breite/s}];
tab2 = Table[z[k, j, n], {k, 2, s - 2}, {j, 2, s - 2}] // Flatten;
solv = Solve[1/(h^4) (20 u[k, j, n] - 8(u[k + 1, j, n - 1]
+ u[k - 1, j, n - 1] + u[k, j + 1, n - 1] + u[k, j - 1, n - 1])
+ 2(u[k + 1, j + 1, n - 1] + u[k + 1, j - 1, n - 1] + u[k - 1, j
+ 1, n - 1] + u[k - 1, j - 1, n - 1]) + (u[k + 2, j, n - 1]
+ u[k - 2, j, n - 1] + u[k, j + 2, n - 1] + u[k, j - 2, n - 1]))
== fkt[x[k], y[j]], {u[k, j, n]}] // Flatten;
w[kk_, jj_, nn_] := (u[k, j, n] /. solv) /. {k -> kk, j -> jj, n -> nn};
u[k_, j_, 0] = 0;
u[0, j_, n_] = 0; u[s, j_, n_] = 0;
u[1, j_, n_] = 0; u[s - 1, j_, n_] = 0;
u[k_, 0, n_] = 0; u[k_, s, n_] = 0;
u[k_, 1, n_] = 0; u[k_, s - 1, n_] = 0;
w[0, j_, n_] = 0; w[s, j_, n_] = 0;
w[1, j_, n_] = 0; w[s - 1, j_, n_] = 0;
w[k_, 0, n_] = 0; w[k_, s, n_] = 0;
w[k_, 1, n_] = 0; w[k_, s - 1, n_] = 0;
Do[
  Do[w[k, j, n], {k, 2, s - 2}, {j, 2, s - 2}];
  Do[u[k, j, n] = w[k, j, n], {k, 2, s - 2}, {j, 2, s - 2}]
, {n, 1, end}];
tab = Table[w[k, j, end] // N, {k, 0, s}, {j, 0, s}];
ListPlot3D[tab, Axes -> False, ViewPoint -> {-2.682, -1.311, 0.856}];
```

**Output** (hier mit Startwert 0.2,  $48 \times 48$  Intervalle, 20 Iterationsschritte):



Erhaltene Situation, beginnende Divergenz



Erwartete Situation

Wie man beobachten kann, funktioniert das Verfahren beim biharmonischen Operator nicht. Auch kann man aus unserer Rekursionsgleichung keine sofort ins Auge springende Abschätzung gewinnen, welche auf eine Konvergenz hindeuten würde.

### Konsequenz:

Bevor von einem erhaltenen Resultat auf eine Konvergenz geschlossen werden kann, muss ein Konvergenzbeweis vorliegen. Es könnte sich auch um eine Scheinkonvergenz handeln, welche innerhalb der numerischen Genauigkeit in der Rechnung nicht von einer Divergenz unterscheidbar ist. Da es sich beim verwendeten Iterationsverfahren um eine Approximation einer Lösung eines Gleichungssystems handelt, das selbst wiederum nur eine Approximation liefert, zeigt sich die Sache hier als doppelt kritisch. Daher ist ein nicht begründetes Resultat unbrauchbar.

### Bemerkung zur Methode der finiten Elemente:

Auf den ersten Blick scheint es aufwändiger, statt einem Rechtecksgitter ein der Geometrie des zu untersuchenden Gebiets angepasstes Gitter zu verwenden. Jedoch zeigen die Verfahren der finiten Elemente, welche diese Idee nutzbar machen, dass die Effizienz recht gross sein kann. Zu nennen sind die **Verfahren von Ritz** und **von Galerkin**. (Mehr darüber in einem der weiter hinten folgenden Abschnitte mit Hilfe der unten dargestellten Variationsrechnung.)

## 8.2 Schritte in die Variationsrechnung

### 8.2.1 Der Begriff der ersten Variation

In der Absicht, weitere Methoden zur Modellierung mathematischer Beschreibungen physikalischer oder technischer Vorgänge zu finden, befassen wir uns noch mit den Grundideen der Variationsrechnung. Dabei handelt es sich um eine mathematische Methode, welche auf Leonard Euler zurückgeht.

**Demonstrationsmodell:** Als Demonstrationsmodell wählen wir in Anlehnung an die fachliche Tradition ein **Minimumproblem**, welches wir physikalisch interpretieren können. Wir betrachten das Integral

$$E(w) = \int_{G=V} J(\vec{x}, w, \nabla w) dV.$$

Dabei ist es hilfreich, bei  $E(w)$  an eine Energie zu denken.  $w = w(\vec{x})$  soll eine Funktion sein aus der Klasse der im Gebiet  $G = V \in \mathbb{R}^3$  differenzierbaren Funktionen mit fix gegebenen Randwerten:

$$w \in M = \{w(\vec{x}) \mid \vec{x} = \overrightarrow{OP}, (P \in G \Rightarrow w(\vec{x}) \in \mathcal{D}_{x,y,z}), (P \in \partial G \Rightarrow w(\vec{x}) = g(\vec{x}))\}$$

**Gesucht:** Eine Funktion  $u(\vec{x})$  so, dass  $E(w)$  minimal auf  $M$ .

**Annahme:** Sei  $u(\vec{x})$  eine Funktion, die  $E(w)$  in  $M$  minimiert. Sei  $\varphi(\vec{x})$  eine genügend differenzierbare Funktion mit  $\varphi(\vec{x}) = 0$  auf  $\partial G$ . Sei  $w(\vec{x}, \varepsilon) = u(\vec{x}) + \varepsilon \varphi(\vec{x}) \Rightarrow w(\vec{x}, \varepsilon) \in M$ .

$\Rightarrow w(\vec{x}, \varepsilon)$  nimmt das Minimum  $u(\vec{x})$  in  $M$  für  $\varepsilon = 0$  an.  $\Rightarrow \frac{\partial E(w(\vec{x}, \varepsilon))}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = 0$ .

**Definition:** 
$$\frac{\delta E}{\delta u} := \frac{\partial E(w(\vec{x}, \varepsilon))}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial E(u(\vec{x}) + \varepsilon \varphi)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}$$
  
 $\leadsto \frac{\delta E}{\delta u}$  heisst **erste Variation** von  $E$  in **Richtung**  $\varphi$ .

**Konsequenz:** Wenn  $u$  eine minimalisierende Funktion für  $E$  ist, so ist an der Stelle  $u$  die erste Variation von  $E$  in jede Richtung gleich 0 (d.h. für alle zulässigen  $\varphi$ ).

**Bemerkung:**

$E(w)$  ist ein **Funktional**. Mit Funktional bezeichnet man in der Mathematik meist eine Funktion aus einem Vektorraum  $V$  in den Körper  $K$ , über dem der Vektorraum betrachtet wird. Der Vektorraum ist oft ein Funktionenraum, d.h. ein Vektorraum, dessen Elemente reell- oder komplexwertige Funktionen sind. Ein Funktional ist somit eine Funktion auf Funktionen. Das Gebiet der **Funktionalanalysis** erhielt seinen Namen, da es aus dem Studium solcher Funktionale entstand.

### 8.2.2 Die Euler–Lagrange–Differentialgleichung

Im Folgenden schreiben wir kurz:  $w_x' := w_x$ ,  $w_x'' := w_{xx}$  u.s.w. Es gilt dann mit  $w_x = u_x + \varepsilon \varphi_x$ , ...:

$$\begin{aligned} \frac{\delta E}{\delta u} &= \frac{\partial E(w(\vec{x}, \varepsilon))}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial E(u(\vec{x}) + \varepsilon \varphi(\vec{x}))}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \int_G \frac{\partial J(\vec{x}, \overbrace{u(\vec{x}) + \varepsilon \varphi(\vec{x})}^{=w}, \overbrace{\nabla(u(\vec{x}) + \varepsilon \varphi(\vec{x}))}^{=(w_x, w_y, w_z)^T})}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} dV = \\ &= \int_G \left( \frac{\partial J(\vec{x}, \dots)}{\partial \vec{x}} \underbrace{\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varepsilon}}_{=0} + \frac{\partial J(\dots, w, \dots)}{\partial w} \underbrace{\frac{\partial w}{\partial \varepsilon}}_{=\varphi} + \frac{\partial J(\dots, w_x)}{\partial w_x} \underbrace{\frac{\partial w_x}{\partial \varepsilon}}_{=\varphi_x} + \frac{\partial J(\dots, w_y)}{\partial w_y} \underbrace{\frac{\partial w_y}{\partial \varepsilon}}_{=\varphi_y} + \frac{\partial J(\dots, w_z)}{\partial w_z} \underbrace{\frac{\partial w_z}{\partial \varepsilon}}_{=\varphi_z} \right) dV \\ &= \int_G \left( \frac{\partial J(\dots, w, \dots)}{\partial w} \varphi + \frac{\partial J(\dots, w_x)}{\partial w_x} \varphi_x + \frac{\partial J(\dots, w_y)}{\partial w_y} \varphi_y + \frac{\partial J(\dots, w_z)}{\partial w_z} \varphi_z \right) dV = 0 \quad \forall \varphi \end{aligned}$$

Wir verwenden nun den Divergenzsatz von Gauss, z.B. für den Vektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} r s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ :

$$\Rightarrow \int_G \underbrace{\operatorname{div} \vec{v}}_{=r_x s + r s_x} dV = \int_{\partial G} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle dO \Rightarrow \int_G \left( \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial J}{\partial w_x} \right) \cdot \varphi + \frac{\partial J}{\partial w_x} \cdot \frac{d\varphi}{dx} \right) dV = \int_{\partial G} \frac{\partial J}{\partial w_x} \cdot \underbrace{\varphi}_{\partial G: \varphi=0} dO = 0$$

Damit erhalten wir: 
$$\int_G \frac{\partial J}{\partial w_x} \varphi_x dV = - \int_G \left( \frac{d}{dx} \frac{\partial J}{\partial w_x} \right) \varphi dV. \quad \text{Ebenso für } y \text{ und } z.$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\delta E}{\delta u} \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial E}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \int_G \left( \frac{\partial J}{\partial w} \cdot \varphi - \left( \frac{d}{dx} \frac{\partial J}{\partial w_x} \right) \varphi - \left( \frac{d}{dy} \frac{\partial J}{\partial w_y} \right) \varphi - \left( \frac{d}{dz} \frac{\partial J}{\partial w_z} \right) \varphi \right) dV$$

$$\Rightarrow 0 = \int_G \varphi \cdot \left( \frac{\partial J}{\partial w} - \frac{d}{dx} \frac{\partial J}{\partial w_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial J}{\partial w_y} - \frac{d}{dz} \frac{\partial J}{\partial w_z} \right) dV \quad \forall \varphi \Rightarrow \frac{\partial J}{\partial w} - \frac{d}{dx} \frac{\partial J}{\partial w_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial J}{\partial w_y} - \frac{d}{dz} \frac{\partial J}{\partial w_z} = 0$$

**Definition:** 
$$\frac{\partial J}{\partial w} - \frac{d}{dx} \frac{\partial J}{\partial w_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial J}{\partial w_y} - \frac{d}{dz} \frac{\partial J}{\partial w_z} = 0$$

heisst **Euler–Lagrange–Differentialgleichung**.

**Bemerkung:**

Bei der Euler–Lagrange–Differentialgleichung handelt es sich um eine **partielle** Differentialgleichung.

Damit können wir eine notwendige Bedingung für eine Minimalfunktion  $w = u$  von  $E(w)$  folgern:

**Satz:**

**Vor.:**

$$u = w \text{ minimisiert } E(w) = \int_{G=V} J(\vec{x}, w, \nabla w) dV$$

**Beh.:**

$$\frac{\partial J}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial J}{\partial u_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial J}{\partial u_y} - \frac{d}{dz} \frac{\partial J}{\partial u_z} = 0$$

Damit lässt sich aus einer Minimalitätsforderung für eine Funktion  $E(w) = \int_{G=V} J(\vec{x}, w, \nabla w) dV$ , welche ein physikalisches System beschreibt, eine partielle Differentialgleichung, die Euler–Lagrange–Differentialgleichung, als mathematisches Modell herleiten. Man hat so das physikalische System **mathematisch modelliert** resp. in die Sprache der Mathematik übersetzt, wo man mit mathematischen Methoden Lösungen gewinnen kann.

Wir wollen uns jetzt einigen Anwendungsbeispielen zuwenden.

### 8.2.3 Die Herleitung der Potentialgleichung

Wir wissen:  $\text{grad}(u) = \nabla u \Rightarrow \langle \text{grad}(u), \text{grad}(u) \rangle = |\text{grad}(u)|^2 = |\nabla u|^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$ . Dabei ist  $|\text{grad}(u)|$  die Richtungsableitung von  $u$  in der Richtung der grössten Steigung im betrachteten Punkt. Damit wollen wir ein Potential modellieren, indem wir fordern, dass  $|\text{grad}(u)|^2$  im Mittel möglichst klein sein soll, d.h. dass das Integral über  $|\text{grad}(u)|^2$  pro Volumen möglichst klein werden soll. Bei konstantem Volumen muss damit  $\int_G |\nabla u|^2 dV$  minimal werden. Damit können wir wie folgt schliessen:

$$\text{Sei } \int_G |\nabla u|^2 dV \rightarrow \text{Min}, \quad u = g \text{ auf } \partial G. \quad \text{Wir setzen: } J(\vec{x}, u, \nabla u) = |\nabla u|^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2.$$

$$\text{Hier ist } \frac{\partial J}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial u_x} = 2u_x, \dots$$

$$\text{Die Euler–Lagrange–Differentialgleichung lautet damit: } 0 - 2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0 \Rightarrow \Delta u = 0.$$

$u$  erfüllt also die Potentialgleichung.  $u$  ist daher eine Potentialfunktion.

### 8.2.4 Die Kettenlinie

Eine zwischen zwei horizontal auseinanderliegenden Punkten  $P_1(x_1, y_1)$  und  $P_2(x_2, y_2)$  aufgehängte Kette nimmt bekanntlich etwa die Form einer Parabel an. Wir werden aber gleich erfahren, dass es sich bei dieser Form nicht um eine exakte Parabel handelt. Um später eine Handhabe für das Studium der

Abweichungen zur Parabel zu haben, wollen wir die Differentialgleichung der Kettenlinie herleiten. Wir gehen dabei von der physikalisch begründeten Feststellung aus, dass die Kette eine Form annimmt, in der ihre potentielle Energie minimal ist. Sonst müsste sie sich ja bewegen, um den energietiefsten Zustand zu erreichen. Daher muss  $\int_{x_1}^{x_2} dE_{pot} = \int_{x_1}^{x_2} dm g y(x)$  minimal sein. Wir können hier also die Variationsrechnung einsetzen.

Es gilt:  $m = \rho \cdot V \Rightarrow dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot A ds$ . Dabei ist  $A$  ein angenommener gleichmässiger Querschnitt und  $ds$  die infinitesimale Kettenlänge.

Wir wissen, dass gilt:  $ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx \Rightarrow dm = \rho \cdot A \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$ .

Damit wird  $E_{pot} = \int_{x_1}^{x_2} g \cdot \rho \cdot A \cdot y(x) \cdot \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = c \int_{x_1}^{x_2} y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$   
mit  $J(x, y(x), y'(x)) = c y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2}$ .

Auf  $J$  können wir nun die Euler–Lagrange Differentialgleichung anwenden:

$$\begin{aligned} \leadsto \frac{\partial J}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial J}{\partial y'} \right) &= 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} (c y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2}) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial}{\partial y'} (c y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2}) \right) = 0 \\ \leadsto 0 &= \sqrt{1 + (y')^2} - \frac{d}{dx} \left( \frac{y \cdot 2 y'}{2 \sqrt{1 + (y')^2}} \right) = \sqrt{1 + (y')^2} - \frac{(y' y' + y y'') \sqrt{1 + (y')^2} - \frac{y y' \cdot 2 y' y''}{2 \sqrt{1 + (y')^2}}}{(\sqrt{1 + (y')^2})^2} \\ \leadsto 0 &= (1 + (y')^2)^{3/2} - \left( ((y')^2 + y y'') \sqrt{1 + (y')^2} - \frac{y (y')^2 y''}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right) \\ \leadsto 0 &= (1 + (y')^2)^2 - (((y')^2 + y y'') (1 + (y')^2) - y (y')^2 y'') \\ &= 1 + 2 (y')^2 + (y')^4 - (y')^2 - (y')^4 - y y'' - y y'' (y')^2 + y (y')^2 y'' = 1 + (y')^2 - y y'' \end{aligned}$$

Damit erhalten wir eine **erste Form der Differentialgleichung der Kettenlinie**:

$$\Rightarrow y y'' - (y')^2 = 1$$

Differenzieren nach  $x$  ergibt:

$$0 = 2 y' y'' - y' y'' - y y''' = y' y'' - y y''' = \frac{y' y'' - y y'''}{(y'')^2} = \left( \frac{y}{y''} \right)' = 0 \Rightarrow \frac{y}{y''} = c \Rightarrow y = c y''$$

Da  $c = 0$  für die Lösung wegfällt (mit „unendlicher Kraft“ gestreckte Kette), können wir mit  $\gamma = \frac{1}{c}$  auch schreiben:  $y'' - \gamma y = 0$ . Von dieser homogenen Gleichung kennen wir die Basislösungen:  $y(x) = c_1 e^{\sqrt{\gamma} x} + c_2 e^{-\sqrt{\gamma} x}$ . Dies führt für negative  $\gamma$  auf Sinus und Cosinus, welche in unserem Fall nicht in Frage kommen. Für positive  $\gamma$  erhalten wir als Basislösungen die Exponentialfunktionen  $e^{\sqrt{\gamma} x}$  und  $e^{-\sqrt{\gamma} x}$ , aus denen wir durch Basiswechsel die neue Basis  $\{\cosh(\sqrt{\gamma} x), \sinh(\sqrt{\gamma} x)\}$  gewinnen.

Nehmen wir an, dass die Kette symmetrisch im Koordinatensystem liegt, d.h. ihr Minimum auf der  $y$ -Achse annimmt, so muss wegen  $y(-x) = y(x)$  der  $\sinh$ -Anteil wegfallen. Als Lösung bleibt:

$$y(x) = c_1 \cosh(\sqrt{\gamma} x)$$

Setzt man diese Lösung in die Gleichung  $y y'' - (y')^2 = 1$  ein, so folgt:



$$c_1 \cosh(\sqrt{\gamma} x) c_1 \gamma \cosh(\sqrt{\gamma} x) - (c_1 \sqrt{\gamma} \sinh(\sqrt{\gamma} x))^2 = c_1^2 \gamma \underbrace{(\cosh^2(\sqrt{\gamma} x) - \sinh^2(\sqrt{\gamma} x))}_{=1} = 1 \Rightarrow \gamma = \frac{1}{c_1^2}$$

Wir setzen  $c_1 = a \Rightarrow$  im Falle einer symmetrischen Lösung erkennen wir:  $y(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ .

$a$  wird durch die Randbedingungen festgelegt. Eine Rechnung ergibt, dass  $a$  gerade der Krümmungsradius im Minimum der Kettenlinie ist.

## 8.2.5 Ein isoperimetrisches Problem und die Lagrange-Funktion

**Situation:** Gegeben sei die Länge  $l$  einer unbekannten Kurve  $C$  sowie zwei Punkte  $P_1 = P_1(x_1, 0)$  und  $P_2 = P_2(x_2, 0)$  auf der  $x$ -Achse.  $C$  soll von  $P_1$  nach  $P_2$  führen. Selbstverständlich setzen wir dabei voraus, dass  $l \geq |x_2 - x_1|$  ist.

**Aufgabe:** Bestimme  $C$  so, dass der Inhalt der zusammen mit der  $x$ -Achse **umschlossenen Fläche maximal** wird. Einschränkung:  $C$  soll durch eine Funktionskurve einer integrierbaren Funktion  $u : x \mapsto y = u(x)$  beschrieben werden können, also rechtseindeutig sein. Der Flächeninhalt soll damit als Integral berechenbar sein  $\leadsto A(u) = \int_{x_1}^{x_2} u(x) dx$ .

Wenn  $P_1 = P_2$  gilt, so vermutet man wahrscheinlich sofort, dass die Kurve ein Kreis sein muss. Denn der Kreis ist diejenige Kurve, bei welcher die Krümmung konstant ist. Und wenn die Fläche möglichst gross sein soll, so muss wohl die Krümmung möglichst überall möglichst klein sein, um möglichst viel zu umschliessen. Denn grosse Krümmung bedeutet wenig umschliessen. Daraus könnte man vermuten, dass die Krümmung überall gleich klein sein muss. Das wollen wir nun mit den Methoden der Variationsrechnung exakt untersuchen.

Sei  $A(w) := E(w) = \int_{x_1}^{x_2} w(x) dx$ ,  $J(x, w(x), w_x'(x)) = w(x)$ .  $\leadsto$  Gesucht ist eine Funktion  $u(x)$  mit  $E(u) = \text{Min}(E(w))$ ,  $w \in M = \{w(x) \mid w(x_1) = w(x_2) = 0\}$ . Dabei gilt noch die **Nebenbedingung**  $l = N(w) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{(w_x'(x))^2 + 1} dx = \text{const.}$  Mit  $E(w)$  und  $N(w)$  bilden wir nun die Lagrange-Funktion:

**Definition:**  $L(w, \lambda) := E(w) + \lambda N(w)$  heisst **Lagrange-Funktion** zu  $E$  und  $N$ .

Da  $N(w) = N(u) = \text{const.}$  ist, können wir für  $L(w, \lambda)$  unmittelbar die Eigenschaft festhalten:

**Satz:** Für  $N(w) = N(u) = \text{const.}$  ist mit  $E(u)$  auch  $L(w, \lambda)$  zu gegebenem konstantem  $\lambda$  minimal.

**Korollar:** Damit erfüllt  $L(w, \lambda)$  die Euler-Lagrange-Differentialgleichung.

**Folgerung:**  $L(w, \lambda) = \int_{x_1}^{x_2} (w(x) + \lambda \sqrt{(w_x'(x))^2 + 1}) dx \rightarrow \text{Min} = L(u, \lambda)$ .

$$\Rightarrow J(x, u, u_x', \lambda) = u(x) + \lambda \sqrt{(u_x'(x))^2 + 1} \quad \text{mit} \quad \frac{\partial J}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial J}{\partial u_x} = 0.$$

$$\leadsto \frac{\partial(u(x) + \lambda \sqrt{(u_x'(x))^2 + 1})}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial(u(x) + \lambda \sqrt{(u_x'(x))^2 + 1})}{\partial u_x} = 1 - \frac{d}{dx} \lambda \frac{2 u_x'}{2 \sqrt{(u_x'(x))^2 + 1}} = 0$$



$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{\left(\frac{d}{dx} \frac{u_x'}{\sqrt{(u_x')^2 + 1}}\right)} = \frac{\sqrt{(1 + u'(x)^2)^3}}{u''(x)} = \rho(x) = \text{Krümmungsradius.}$$

Da die Minimalitätsbedingung unter der Voraussetzung eines konstanten  $\lambda$  gilt, finden wir eine Kurve mit konstanter Krümmung  $\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\lambda} = \frac{u''(x)}{\sqrt{(1 + u'(x)^2)^3}}$ . Bekanntlich ist diejenige Kurve, bei der die

Krümmung konstant ist, ein Kreis. Von diesem Kreis wissen wir damit, dass er durch die Punkte  $(x_1, 0)$  und  $(x_2, 0)$  geht, dass die Kurvenlänge  $= l$  ist und dass der Kreismittelpunkt wegen der Krümmung und der Forderung nach einer Funktion nicht auf derselben Seite der  $x$ -Achse liegen kann wie die Kurve  $u(x)$ .  $u(x)$  soll ja Funktion und nicht nur Abbildung sein. Aus geometrischen Gründen liegt der Kreismittelpunkt auf der Mittelsenkrechten durch  $(x_1, 0)$  und  $(x_2, 0)$ :  $P_m = P_m\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, y_m\right)$ .

Damit wird  $r = \rho = \sqrt{(x_2 - x_m)^2 + y_m^2}$  und  $(u(x) + y_m)^2 + (x - x_m)^2 = r^2$ . Daraus kann man eine Gleichung für  $u(x) = u(x, y_m)$  herleiten. Aus der Bedingung  $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{(u_x')^2 + 1} dx$  folgt dann  $y_m$ . Die Durchführung der Berechnung von  $y_m$  und damit von  $u(x)$  sei dem Leser überlassen.

### 8.2.6 Das Prinzip der kleinsten Wirkungen und erste Variation

#### Das Prinzip

##### Definition:

Als **Wirkung** oder **Wirkungsintegral** bezeichnen wir in der Mechanik den Ausdruck

$$A = \int_{t_1}^{t_2} (E_{kin}(t) - E_{pot}(t)) dt.$$

(Entsprechend für die Elektrodynamik.)

Pierre-Louis Moreau de Maupertuis und allgemeiner William Rowan Hamilton haben ein Prinzip formuliert, das eine Bewegung eines Körpers oder den Zustand eines Systems bezüglich der Wirkung  $A$  beschreibt. Dieses Prinzip ist in der Physik akzeptiert. Wir setzen es daher als physikalisch gegeben voraus.

**Das Prinzip der kleinsten Wirkungen:** Die Zustandsänderung eines Systems resp. die Bewegung eines Körpers ohne äusseren Eingriff erfolgt in der Mechanik in der Weise, dass das Wirkungsintegral  $A$  minimal wird, d. h. dass die erste Variation von  $A = A(w)$  gleich 0 wird.

$w = w(t)$  ist dabei eine Ortsfunktion in Abhängigkeit von der Zeit, ein Potential u.s.w. Es gilt daher der Satz:

**Satz:**

$$\frac{\delta A}{\delta u} := \left. \frac{\partial A(w(\vec{t}, \varepsilon))}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{\partial A(u(t) + \varepsilon \varphi(t))}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad \text{und damit}$$

$$J(t, u, u_t) = E_{kin}(t, u, u_t) - E_{pot}(t, u, u_t) \quad \text{mit} \quad \frac{\partial J}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial J}{\partial u_t} = 0$$

#### Beispiel 1: Ein Massenpunkt in einem Gravitationsfeld

Es ist  $A = \int_{t_1}^{t_2} J(t, u, u_t) dt = \int_{t_1}^{t_2} (E_{kin}(t, u, u_t) - E_{pot}(t, u, u_t)) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{1}{2} \cdot m \cdot (u_t'(t))^2 - m \cdot g \cdot u(t) \right) dt.$

$$\leadsto \frac{\partial J}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial J}{\partial u_t} = \frac{\partial(\frac{1}{2} \cdot m \cdot (u_t'(t))^2 - m \cdot g \cdot u(t))}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial(\frac{1}{2} \cdot m \cdot (u_t'(t))^2 - m \cdot g \cdot u(t))}{\partial u_t} = 0$$

$$\Rightarrow -m \cdot g - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \cdot m \cdot u_t'(t) = -m \cdot g - \frac{1}{2} \cdot m \cdot u_t''(t) = 0 \Rightarrow F = m \cdot g = -\frac{1}{2} \cdot m \cdot u_t''(t).$$

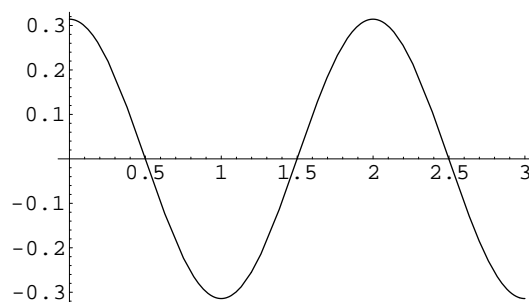
Wir erhalten somit das bekannte Bewegungsgesetz (Fallgesetz) einer Masse  $m$  im Gravitationsfeld mit der Feldstärke  $g$ .

### Beispiel 2: Das mathematische Pendel im Gravitationsfeld

Wir betrachten das mathematische Pendel mit einer Masse  $m$  an einem Faden mit der Pendellänge  $l$  und dem Auslenkungswinkel  $\varphi$  im Gravitationsfeld mit der Feldstärke  $g$ . Es wird somit  $E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (r \cdot \varphi_t)^2$  und  $E_{pot} = m \cdot g \cdot (r - r \cdot \cos(\varphi))$ .

$$\begin{aligned} \text{Damit erhalten wir } J(t, \varphi, \varphi_t) &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot (r \cdot \varphi_t)^2 - m \cdot g \cdot (r - r \cdot \cos(\varphi)) \Rightarrow \frac{\partial J}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial J}{\partial \varphi_t} = ? \\ \frac{\partial J}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial J}{\partial \varphi_t} &= \frac{\partial(\frac{1}{2} \cdot m \cdot (r \cdot \varphi_t)^2 - m \cdot g \cdot (r - r \cdot \cos(\varphi)))}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial(\frac{1}{2} \cdot m \cdot (r \cdot \varphi_t)^2 - m \cdot g \cdot (r - r \cdot \cos(\varphi)))}{\partial \varphi_t} \\ &= -m \cdot g \cdot r \cdot \sin(\varphi) - m \cdot r^2 \cdot \varphi_{tt}'' \Rightarrow \varphi_{tt}'' + \frac{g}{r} \cdot \sin(\varphi) = 0. \end{aligned}$$

Interessanterweise hat hier die Masse keinen Einfluss auf die Auslenkung, denn sie fällt aus der Gleichung heraus. Wir lösen das Problem für  $g = 10$ ,  $r = 1$ ,  $\varphi(0) = \frac{\pi}{8}$  und  $\varphi'(0) = 0$ . Die Lösung suchen wir am einfachsten numerisch im Bereich  $t \in [0, 3]$ . Damit erhalten wir eine Vorstellung von der Lösung. (Dabei benutzen wir *Mathematica*).



Output

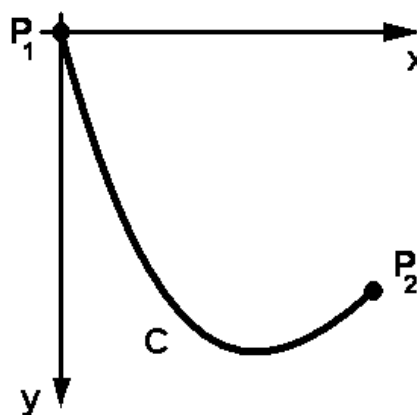
**Input:**

```
a=b;
solv=NDSolve[{f'[t]+10 Sin[f[t]]==0, f[0]==Pi/10, f'[0]==0},f[t],{t,b}];
Plot[f[t]/.solv,{t,0,b}];
```

### 8.2.7 Bernoullis Brachystochronen-Problem

In nebenstehender Skizze ist eine Kurve  $C$  von  $P_1 = P_1(0, 0) = P_1(x_1, y_2)$  nach  $P_2 = P_2(x_2, y_2)$  gezeigt, wobei der einfache Fall  $x_1 = x_2$  hier nicht studiert werden soll. Die Kurve kann daher als Funktionskurve  $y(x)$  verstanden werden. Der einfacheren Rechnung wegen ist die  $y$ -Achse nach unten gerichtet.  $P_2$  soll weiter unten liegen als  $P_1$ . Setzt man nun in  $P_1$  eine kleine Kugel hin und lässt man diese Kugel rollen oder ohne namhaften Widerstand gleiten, so gelangt sie nach  $P_2$ .

**Frage:** Für welche Kurve braucht die Kugel die kürzeste Zeit um nach  $P_2$  zu gelangen?



Zur Vereinfachung wollen wir die Rotationsenergie oder die in die Reibung geleitete Energie nicht beachten.

**Problem:** Es gilt somit eine Kurve  $C$  in der Form  $y = y(x)$  zu finden, für welche die gesamte Durchlaufzeit  $T(x_2, y_2)$  minimal ist.  $t$  sei dabei die laufende Zeit.

Zur Lösung wollen wir die Euler-Lagrange-Differentialgleichung nutzen und zu diesem Zweck ein Minimumproblem formulieren.

Wir beginnen mit der Energiebilanz  $E_{pot} + E_{kin} = E_{total} = E_{initial} = 0$ . Denn zu Beginn ist die Energie in  $P_1 = P_1(0, 0)$  gleich 0.

$$\Rightarrow E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = -E_{pot} = -m g (-y) \Rightarrow v = \sqrt{2 g y}$$

$$\text{mit } x = x(t), \quad y = y(t), \quad v = v(t) = \sqrt{(x_t'(t))^2 + y_t'(t))^2}.$$

$$\text{Nun gilt: } v \approx \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta t} = \frac{\sqrt{1 + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}}}{\Delta t} \cdot \Delta x$$

$$\leadsto v = \sqrt{2 g y} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{dt} \cdot dx \Rightarrow \text{Separation: } dt = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2 g y}} dx = \frac{\sqrt{1 + (y_x')^2}}{\sqrt{2 g y}} dx$$

$$T(t_1) = \int_0^{t_1} dt = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y_x')^2}}{\sqrt{2 g y}} dx \rightarrow \text{Min} \Rightarrow J(x, y, y_x') = \frac{\sqrt{1 + (y_x')^2}}{\sqrt{2 g y}}$$

Damit können wir auf  $J(x, y, y_x')$  die Euler-Lagrange-Differentialgleichung anwenden:  $\frac{\partial J}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial J}{\partial y_x} = 0$ .

Wenn wir die Gleichung  $\frac{\partial J}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial J}{\partial y_x} = 0$  mit  $y_x$  multiplizieren, so bringt uns das weiter. Dabei beachten wir, dass  $J$  nicht explizit von  $x$  abhängig ist, dass die partielle Ableitung  $\frac{\partial J}{\partial x}$  also 0 ist.

$$\leadsto 0 = \frac{\partial J}{\partial y} \cdot y_x - y_x \cdot \frac{d}{dx} \frac{\partial J}{\partial y_x} = \frac{\partial J}{\partial y} \cdot y_x + \left[ \frac{\partial J}{\partial y_x} \cdot y_{xx} \right] - \left( \frac{d}{dx} \frac{\partial J}{\partial y_x} \right) \cdot y_x - \left[ \frac{\partial J}{\partial y_x} \cdot y_{xx} \right] = \frac{d}{dx} (J - J_{y_x} \cdot y_x).$$

Damit ist die totale Ableitung  $\frac{d}{dx} (J - J_{y_x} \cdot y_x) = 0$ , also der Ausdruck  $J - J_{y_x} \cdot y_x = \text{const.}$

$$\leadsto J - J_{y_x} \cdot y_x = \frac{\sqrt{1 + (y_x')^2}}{\sqrt{2gy}} - \frac{2y_x \cdot y_x}{2\sqrt{1 + (y_x')^2} \sqrt{2gy}} = \frac{1}{\sqrt{2gy}} \cdot \frac{1 + (y_x')^2 - (y_x')^2}{\sqrt{1 + (y_x')^2}} = \text{const.}$$

$$\leadsto c_1 = \frac{1}{\sqrt{2gy}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (y_x')^2}} \Rightarrow y = \frac{c_2}{1 + (y_x')^2} \quad \text{oder} \quad y_x' = \pm \sqrt{\frac{c_2}{y} - 1}$$

Mit  $c_2 = 2r$  finden wir:

$$(y_x')^2 = \frac{c_2 - y}{y} := \frac{2r - y}{y}$$

Diese Gleichung kennt man als die **Zykloidengleichung**  $(y_x')^2 = \frac{2r - y}{y}$ .

Mit Hilfe von  $y_t' = y_x' \cdot x_t'$  kann man nun verifizieren, dass die folgende parametrisierte Kurve (Zykloide) das Problem löst resp.  $(y_x')^2 = \frac{2r - y}{y}$  erfüllt:

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t - \sin(t)) \\ y(t) &= r(1 - \cos(t)) \end{aligned}$$

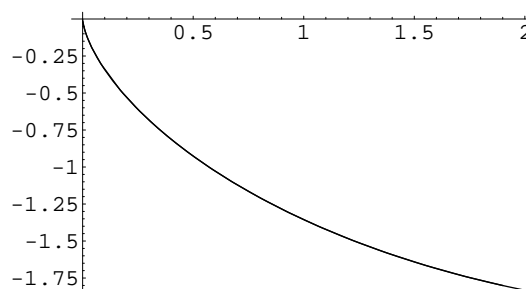
Wir testen das Gefundene anhand eines Beispiels mit *Mathematica*. Dazu wählen wir  $r = 1$  und erzeugen die Kurven einerseits numerisch als Lösungskurve der Differentialgleichung und andererseits als Plot der parametrisierten Zykloide:

**Input:**

```
r=1;
x[t_]:=r (t-Sin[t]);
y[t_]:=-r (1-Cos[t]);
p1=ParametricPlot[{x[t],y[t]},{t,0,2.5},
DisplayFunction->Identity];
solv=NDSolve[{y1'[x1]==Sqrt[2r/y1[x1]-1], y1[0]== 0.0001}, y1[x1],{x1,2}]
p2=Plot[-y1[x1]/.solv,{x1,0.001,2},
DisplayFunction->Identity];
Show[p1,p2,
DisplayFunction-> $DisplayFunction];
```

**Output:**

Die beiden Kurven liegen ununterscheidbar übereinander!



### 8.2.8 Variation und finite Elemente: Triangulationsmethode

#### Die Idee der Umkehrung der Methode mittels Euler–Lagrange

**Problem:** Gegeben ist für ein einfach zusammenhängendes Gebiet  $G$  das Randwertproblem:

$$a \cdot u_{xx} + b \cdot u_{yy} + c \cdot u = d, \quad (x, y) \in G, \quad \text{RBD: } u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial G$$

Hier handelt es sich um eine Verallgemeinerung der Potentialgleichung. Für  $a = b = 1$  und  $c = 0$  erhalten wir  $\Delta u = d$ .

Die Gleichung  $a \cdot u_{xx} + b \cdot u_{yy} + c \cdot u - d = 0$  können wir als Euler–Lagrange–Gleichung interpretieren:

$$\begin{aligned} a \cdot u_{xx} + b \cdot u_{yy} + c \cdot u - d &= \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial}{\partial u_x} \frac{a \cdot u_x^2}{2} + \frac{\partial}{\partial u_y} \frac{b \cdot u_y^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{2} c \cdot u^2 - d \cdot u \right) = 0 \\ \leadsto \frac{\partial}{\partial u} \left( d \cdot u - \frac{1}{2} c u^2 \right) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial}{\partial u_x} \frac{a u_x^2}{2} + \frac{\partial}{\partial u_y} \frac{b u_y^2}{2} \right) &= 0 \leadsto \text{setze } J(x, u, \nabla u) = d \cdot u - \frac{1}{2} c u^2 + \frac{a u_x^2}{2} + \frac{b u_y^2}{2} \end{aligned}$$

#### Konsequenz:

Eine Lösung von

$$E(u) = \int_G J(x, u, \nabla u) \, dx \, dy \rightarrow \text{Min}$$

mit  $J(x, u, \nabla u) = d \cdot u - \frac{1}{2} c u^2 + \frac{a u_x^2}{2} + \frac{b u_y^2}{2}$ ,  $u(x, y) = g(x, y)$  in  $\partial G$ , ist auch Lösung des Problems  $a \cdot u_{xx} + b \cdot u_{yy} + c \cdot u = d$  in  $G$ ,  $u(x, y) = g(x, y)$  auf  $\partial G$ .

**Konzept:** Statt eine Lösung der gegebenen Differentialgleichung zu suchen, kann man daher auch versuchen  $u$  derart zu konstruieren, dass damit  $E(u)$  minimiert wird, wobei die Randbedingungen erfüllt sein müssen. (In der Fachsprache sagt man an Stelle von *minimal* auch, dass  $u$  **stationär** wird.)

Dieses Konzept wollen wir nun in eine Methode umgießen:

#### Die Idee zur Methode nach Ritz

Wir wähle eine linear unabhängige Menge von „**Basisfunktionen**“ wie folgt:

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= g(x, y), \quad (x, y) \in \partial G \\ u_k(x, y) &= 0, \quad (x, y) \in \partial G, \quad k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Damit machen wir den **Ansatz**:

$$u(x, y) \approx u_A(x, y) := u_0(x, y) + \sum_{k=1}^n c_k \cdot u_k(x, y), \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Die  $c_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  müssen dabei so gewählt werden, dass  $u_A(x, y) := u_{c_1, \dots, c_n}(x, y)$  das Funktional  $E(w)$  über der Menge der Funktionen  $u_0(x, y) + \sum_{k=1}^n c_k \cdot u_k(x, y)$  minimiert.

$u_A(x, y)$  erfüllt wegen den Randwerten  $u_0(x, y) = g(x, y)$  und  $u_k(x, y) = 0$  auch die Randbedingungen, ist

also ein Kandidat für die gesuchte Funktion. Für ein auffindbares absolutes Minimum haben wir dann die beste Approximation über der gegebenen Funktionenmenge  $M$  gefunden. Daher gilt für das Minimum:

$$E(u) \approx E(u_A) = E\left(u_0(x, y) + \sum_{k=1}^n c_k \cdot u_k(x, y)\right) := E(c_1, \dots, c_n) = \text{Min}(M)$$

Als notwendige Bedingung für das gesuchte Minimum können wir daher wie üblich setzen:

$$\frac{\partial E}{\partial c_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

Sei nun  $u = u_A$ . Wegen  $E(u) = \int_G J(x, u, \nabla u) dx dy = \int_G d \cdot u - \frac{1}{2} c u^2 + \frac{a u_x^2}{2} + \frac{b u_y^2}{2} dx dy$  finden wir in  $J(x, u, \nabla u)$  die  $c_k$  in den Termen  $u$ ,  $u^2$ ,  $u_x^2$  und  $u_y^2$ . Da die  $c_k$  in  $u$  linear eingehen, kommen sie danach in den genannten Termen quadratisch oder linear vor.  $E(u)$  ist also eine quadratische Funktion von den  $c_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Somit erscheinen diese  $c_k$  in  $\frac{\partial E}{\partial c_k}$  höchstens linear.

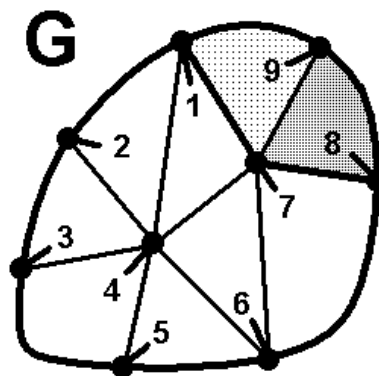
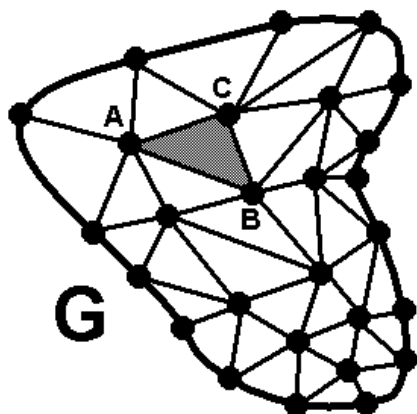
### Konsequenz:

Das System  $\frac{\partial E}{\partial c_k} = 0$ ,  $k = 1, \dots, n$  ist ein lineares Gleichungssystem in den  $c_k$ . Wir haben hier  $n$  Gleichungen und  $n$  Unbekannte. In der Regel können wir ein solches Gleichungssystem mit Hilfe einer entsprechend grossen Matrix schreiben.

Nun ist noch die Frage zu klären, wie eine etwaige Basis  $\{u_k \mid k = 0, \dots, n\}$  konstruiert werden soll und ob die zu erwartende grosse Matrix sich allenfalls als Bandmatrix schreiben lässt, was wegen der damit verbundenen vereinfachten Berechnungsmöglichkeiten ja wünschenswert wäre.

### Triangulationsmethode, Basiswahl, Komposition der Funktion

Eine mögliche Wahl einer Basis stützen wir auf eine **Triangulation** von  $G$ . Unter Triangulation verstehen wir dabei eine Einteilung des Gebiets  $G$  in  $n$  Dreiecke, wobei jene „Dreiecke“, welche an den Rand stossen, auch eine „krumme Kante“ haben dürfen (siehe Bilder unten). Wir sind dann natürlich bestrebt die Einteilung so fein zu machen, dass diese Ungereimtheit zu keinem grossen Fehler führt.



Wir betrachten im linken Bild das Dreieck  $\triangle ABC := \triangle A_k B_k C_k$ . In diesem Dreieck definieren wir  $u_k(x, y)$  wie folgt:

$$u_{k,\alpha,\beta,\gamma}(x,y) = \begin{cases} \alpha_k x + \beta_k y + \gamma_k & (x,y) \in \triangle ABC \\ 0 & (x,y) \notin \triangle ABC \end{cases}$$

Dabei wählen wir zu jedem  $k$  die Koeffizienten  $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$  auf drei Arten, so dass gilt:

$$\begin{aligned} (A) \quad & u_{k,\alpha,\beta,\gamma} = u_{k,A} : u_{k,A}(B_k) = u_{k,A}(C_k) = 0, \quad u_{k,A}(A_k) = 1, \\ (B) \quad & u_{k,\alpha,\beta,\gamma} = u_{k,B} : u_{k,B}(C_k) = u_{k,B}(A_k) = 0, \quad u_{k,B}(B_k) = 1, \\ (C) \quad & u_{k,\alpha,\beta,\gamma} = u_{k,C} : u_{k,C}(A_k) = u_{k,C}(B_k) = 0, \quad u_{k,C}(C_k) = 1. \end{aligned}$$

Mit  $u_{k,A}$ ,  $u_{k,B}$  und  $u_{k,C}$  können wir jetzt eine neue Funktion  $u_k$  konstruieren, welche in den Eckpunkten  $A_k, B_k, C_k$  einsetzbare Werte zulässt. Wir setzen:

$$u_k(x,y) := c_{k,A} \cdot u_{k,A} + c_{k,B} \cdot u_{k,B} + c_{k,C} \cdot u_{k,C}$$

Diese Funktion  $u_k$  nimmt ausserhalb des Dreiecks  $\triangle_k$  immer den Wert 0 an und innerhalb des Dreiecks sowie auf dem Rande erhalten wir aufgrund der Linearkombination von drei Ebenengleichungen wieder eine Ebenengleichung, welche in den Eckpunkten die eingegebenen Werte  $c_{k,A}, c_{k,B}, c_{k,C}$  annimmt. Mit solchen Funktionen können wir  $G$  überziehen und so eine Funktion  $u = \sum_{k=1}^n u_k(x,y)$  definieren, welche an den Dreiecksrändern nahtlos zusammengeschweisst, also stetig und daher integrierbar ist, und für welche in den Eckpunkten die Funktionswerte als Parameter definierbar sind. Unerfasst bleibt hier einzig noch die ungenaue Approximation des Randes, was aber bei vernünftigen Rändern und vernünftigen Randfunktionen  $g(x,y)$  kein Problem für unser Integral  $E(u)$  mit sich bringt.

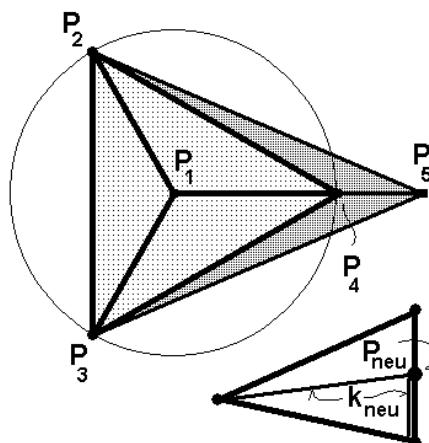
Ein Organisationsproblem entsteht noch infolge möglicher „wilder Triangulationen“. In jedem Dreieck  $\triangle_k$  gilt es einen Punkt  $A_k$ , einen Punkt  $B_k$  und einen Punkt  $C_k$  zu bezeichnen. Doch wie soll man dabei vorgehen? Wir wollen darüber kurz nachdenken und erinnern uns zu diesem Zweck an den eulerschen Polyedersatz.

Nach diesem Satz gilt bei einem räumlichen Polyeder die Beziehung  $e + f - k = 2$ . ( $e$  = Eckenzahl,  $f$  = Flächenzahl,  $k$  = Kantenzahl). Schneidet man ein Polyeder längs einer Kante auf und dehnt es dann in die Ebene aus, so gilt dort wegen dem Duplizieren der Kante beim Aufschneiden:  $e + f - (k+1) = 2 - 1 \Rightarrow e + f - k = 1$ . Bei einem regelmässigen  $n$ -Eck als Beispiel finden wir aussen  $n$  Ecken und bei einer regulären Triangulation noch eine Ecke im Zentrum. Man hat daher  $n+1$  Ecken,  $2n$  Kanten und  $n$  Flächen.  $(n+1) + n - (2n) = 1$  ist erfüllt. Aber einen eindeutigen unwillkürlichen Bezug zwischen Ecken und Flächen zwecks einfacher Abzählbarkeit lässt sich hier wegen  $e \neq f$  nicht stiften.

*Hinweis:* Wir verwenden hier die Sprache der Graphentheorie. *Ecke* bedeutet ein zu beachtender Zusammenstosspunkt von Kanten, auch Knoten genannt. In einer Ecke stossen bei unserer Triangulation immer mindestens drei Kanten zusammen. (Vgl. Kapitel „Graphentheorie“ im Skript „Diskrete und angewandte Mathematik“ des Autors, zu finden auf <http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html>, aufgeführt in der Liste unter dem zitierten Link als „Themen aus der diskreten Mathematik“.)

Wählen wir nun eine Triangulation, welche gleich viele Flächen wie Ecken aufweist, so gilt:  $2e = k + 1$ . Wir wollen eine solche Triangulation hier eine **EGF-Triangulation** nennen. (EGF-Triangulation ist die Abkürzung für „Ecken gleich Flächen-Triangulation“.) Die Kantenzahl muss daher bei einer solchen EGF-Triangulation immer ungerade sein. Solche Triangulationen sind möglich. Im erwähnten rechten Bild oben gilt  $k = 17$ ,  $e = f = 9$ . Löscht man aber z.B. beim Dreieck mit der Nummer 9 die Aussenkante weg, so bleiben 16 Kanten, 8 Flächen und 9 Ecken. Die notwendige Zuordnungsart der Flächen zu den Ecken ist dann also nicht mehr möglich, da  $8 \neq 9$  ist.

Wir wollen nun zeigen, dass der natürlich triangulierte Graph eines regulären  $n$ -Ecks mit zentralem Punkt immer zu einer EGF-Triangulation erweitert werden kann. Nebenstehend ist als einfachstes Beispiel ein reguläres Dreieck mit zentralem Punkt gezeigt. Hier ist  $e = 4$ ,  $f = 3$  und  $k = 6$ . Allgemein ist bei einem solchen  $n$ -Eck  $e = n + 1$ ,  $f = n$  und  $k = 2n$ , also  $e + f - k = n + 1 + n - 2n = 1$ . Fügt man nun aussen einen weiteren Punkt  $P_{n+2}$  an (in der Skizze  $P_5$ ), so wird  $e = n + 2$ . Verbindet man diesen Punkt  $P_{n+2}$  mittels drei neuen Kanten mit drei aufeinanderfolgenden Nachbarnpunkten wie in der Skizze gezeigt, so entstehen zwei neue Flächen. Dann gilt:



$$e + f - k = (n + 2) + (n + 2) - (2n + 3) = 2n - 2n + 4 - 3 = 1 \Rightarrow e_{\text{neu}} = f_{\text{neu}}$$

Damit können wir hier einen neuen Satz formulieren:

**Satz:** Die natürliche Triangulation eines regulären und damit auch eines beliebigen konvexen  $n$ -Ecks lässt sich durch anfügen eines einzigen äusseren Punktes in eine EGF-Triangulation verwandeln. Es existieren somit unendlich viele EGF-Triangulationen.

Weiter kann man in einem bestehenden Dreieck immer eine neue Ecke in eine bestehende gewählte Kante setzen und dann diese neue Ecke mit der im Dreieck gegenüberliegenden Ecke verbinden. (Siehe Skizze oben, Teilfigur rechts.) Dadurch entsteht ein neuer Graph mit einer Ecke mehr, zwei Kanten mehr und auch einer Fläche mehr. Man hat dann  $e + f - k = (e + 1) + (f + 1) - (k + 2) = 1$ . Das ergibt einen weiteren Satz:

**Satz:** Eine EGF-Triangulation kann durch einsetzen einer Ecke in eine bestehende Kante in einem Dreieck und durch verbinden dieser neuen Ecke mit der gegenüberliegenden Ecke des Dreiecks in eine neue EGF-Triangulation verwandelt werden, welche eine Fläche mehr besitzt.

Damit kann man jetzt beliebig EGF-Triangulationen erzeugen.

Bei einer EGF-Triangulation kann man die Flächen und die darauf bezogenen Ecken von 1 bis  $n$  durchnummerieren. Zum Dreieck  $\triangle_k$  gehört so die Ecke  $P_k$ , welche wir bezüglich diesem Dreieck  $A_k$  nennen.  $B_k$  und  $C_k$  kann man nun bezüglich  $\triangle_k$  durch Abzählung nach rechtsdrehendem Umlauf ebenfalls eindeutig definieren. Da eine Ecke immer zu mehreren Dreiecken gehört, bekommt sie so bezüglich jedem anstossenden Dreieck eine andere Nummer.  $A_9$  kann daher in einem bestimmten Fall z.B. durchaus gleich  $B_4$  sein u.s.w.

Schliesslich bekommen wir bei diesem Verfahren eine Funktion  $u_{\text{innen}}(x, y) = \sum_{k=1}^n c_k \cdot u_k(x, y)$ , welche in den innern Punkten die Parameterwerte  $c_k$  aufweist und auf dem Rande die Werte 0. Diese Funktion überlagern wir mit einer analog konstruierten Funktion  $u_0(x, y)$ , welche in den Randpunkten die gegebenen Randwerte und in den innern Punkten immer den Wert 0 aufweist.  $u(x, y) = u_0(x, y) + u_{\text{innen}}(x, y)$  enthält damit  $n$  Parameter  $c_1, \dots, c_n$ , welche durch die numerische



Auswertung von  $E(u) = \int_G J(x, u, \nabla u) dx dy$  in ein quadratisches Polynom mit  $n$  Variablen  $c_k$  einfließen. Wir erhalten also die Zuordnung  $E(u_A) \rightarrow p_2(c_1, \dots, c_n)$ . Daraus bestimmen wir die  $c_k$  als Lösung des linearen Gleichungssystems  $\frac{\partial E}{\partial c_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n$ .

Beim Lösen des erwähnten Gleichungssystems muss wie erwähnt darauf geachtet werden, dass man die Vorteile von Bandmatrizen ausnutzen kann.

### Weitere Methoden

Solange keine praktische Erfahrung mit der Sache der finiten Elemente vorliegt, macht es wenig Sinn, auf das anschnittsweise vorgestellte und in diesem Sinne besprochene Verfahren weitere Theorie aufzubauen. An dieser Stelle soll nur noch auf weitere Themenkreise oder Methoden hingewiesen werden:

1. Die Methode des gewichteten Fehlers (Orthogonalisierungsmethode nach Galerkin).
2. Die Kollokationsmethode resp. Methode der kleinsten Quadrate.

### 8.2.9 Weitere Probleme

Weitere interessante Probleme, welche sich mit Hilfe der Variationsrechnung gut modellieren lassen:

1. Weitere praktisch nützliche Kurvengleichungen
2. Das Doppelpendel
3. Der elektrische Schwingkreis (siehe auch Seite 89)
4. Das Brechungsgesetz (Snellius)
5. Wellenphänomene

Des beschränkten Rahmens wegen verzichten wir hier auf weitere Ausführungen zu diesen Problemen wie auch allgemein auf weitere Ausführungen zur Variationsrechnung. Man konsultiere dazu die einschlägige Literatur oder versuche selbst, eine Lösung zu finden.

Eine Herleitung mit Animation zum Doppelpendel findet man unter

<http://scienceworld.wolfram.com/physics/DoublePendulum.html>

Mit Hilfe der Variationsrechnung gelingt jetzt auch der Einstieg in die heute in der Anwendung sehr weit verbreitete Theorie der **finiten Elemente**, angewandt auf partielle Differentialgleichungen.

Eine ausführliche Darstellung der heute üblichen Verfahren übersteigt jedoch den hier möglichen Rahmen. Der Leser ist gebeten, in dieser Sache wiederum die einschlägige Fachliteratur zu konsultieren.

## 8.3 Schwingungen und partielle Differentialgleichungen

### 8.3.1 Die homogene Wellengleichung, Voraussetzungen

Die lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung

$$c^2 \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (c^2 \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2})(u) = v(x_1, x_2, \dots, x_N, t)$$

trägt in der Physik den Namen **Wellengleichung**, da ihre Lösungen zur Modellierung der Ausbreitung von Wellen in diversen Gebieten benutzt werden können (Mechanik, Akustik, Elektrodynamik, moderne Physik u.s.w.). Wir wollen diesen Namen hier ebenfalls benutzen. Die Funktion  $u = u(x_1, x_2, \dots, x_N, t) := u = u(\vec{x}, t)$  nennen wir für unsere Bedürfnisse kurz **Auslenkung** oder **Amplitude**.

Speziell betrachten wir die **homogene Wellengleichung** auf einem Gebiet  $G \subseteq \mathbb{R}^N$ :

$$c^2 \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \text{ oder } \Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2})(u) = \square u = 0$$

**Definition:**

$\square := \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$  heisst **d'Alembert-Operator** (auch **Quablaoperator** oder **Viereckoperator**).

**Voraussetzung:**

Das betrachtete Gebiet  $G \subseteq \mathbb{R}^N$  soll hier einfach zusammenhängend und beschränkt sein. Wegen den Fraktalen setzen wir noch fest:  $\dim(\partial G) = N - 1$ . Zur Beschreibung der notwendigen Randbedingungen gehen wir, sofern nicht anders vermerkt, von einer vernünftigen (nicht fraktalen) Zerlegung des Randes in zwei disjunkte Teilmengen aus:  $\partial G = M_1 \cup M_2$ ,  $M_1 \cap M_2 = \{\}$ .  $M_1$  und  $M_2$  seien dabei stückweise zusammenhängend und glatt. Weiter sei  $c \neq 0$ .

Auf  $M_1$  gelte die homogene **Dirichlet'sche** Randbedingung:  $u(x_1, \dots, x_N, t) = 0$ ,  $(x_1, \dots, x_N) \in \partial G$ .

Auf  $M_2$  gelte die **von Neumann'sche** Randbedingung:  $\frac{\partial u(x_1, \dots, x_N, t)}{\partial \vec{n}} = 0$ ,  $(x_1, \dots, x_N) \in \partial G$ .

Randbedingungen lassen sich damit **mischen**:  $\alpha u(x_1, \dots, x_N, t) + \beta \frac{\partial u(x_1, \dots, x_N, t)}{\partial \vec{n}} = 0$  mit  $u(x_1, \dots, x_N, t) = 0$  auf  $M_1$  und  $\frac{\partial u(x_1, \dots, x_N, t)}{\partial \vec{n}} = 0$  auf  $M_2$ .

Daneben muss man natürlich für die Variable  $t$  noch Anfangsbedingungen stellen.

### 8.3.2 Separationsansatz und stehende Welle

**Ziel:** Wir wollen Lösungen der homogenen Wellengleichung suchen, welche stehende Wellen oder Schwingungen von Punkten aus Kurven, Flächen oder Volumen darstellen. Diese Schwingungen sollen bei praktischen Beispielen verwendet werden können.

**Methode:** Zur Erreichung des Ziels machen wir den Separationsansatz  $u(\vec{x}, t) := U(\vec{x}) \cdot T(t)$ . Die so angesetzte Funktion setzen wir in der homogenen Wellengleichung  $c^2 \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  ein, wodurch wir eine Separation erreichen können:

$$\begin{aligned}
c^2 \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 (U(\vec{x}) \cdot T(t))}{\partial x_i^2} &= T(t) \cdot c^2 \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 U(\vec{x})}{\partial x_i^2} = T(t) \cdot \Delta U(\vec{x}) = \frac{\partial^2 (U(\vec{x}) \cdot T(t))}{\partial t^2} = U(\vec{x}) \cdot \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = U \cdot T'' \\
&\Rightarrow \frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \cdot \frac{\Delta U(\vec{x})}{U(\vec{x})} = \text{const.} := \pm \omega^2
\end{aligned}$$

$\frac{T''(t)}{T(t)}$  ist hier nur noch von  $t$  abhängig und  $c^2 \cdot \frac{\Delta U(\vec{x})}{U(\vec{x})}$  nur noch von  $\vec{x}$ . Damit ergeben sich zwei getrennt behandelbare Gleichungen:

$$T''(t) = \pm T(t) \cdot \omega^2 \quad \text{und} \quad c^2 \cdot \Delta U(\vec{x}) = \pm U(\vec{x}) \cdot \omega^2$$

1. Wir behandeln zuerst  $T''(t) - T(t) \cdot \omega^2 = 0$ . Hier kennen wir die Basislösungen  $e^{\pm \omega t}$  resp.  $\sinh(\omega t)$ ,  $\cosh(\omega t)$ .  $\leadsto (e^{\pm \omega t})'' = \omega^2 e^{\pm \omega t} \Rightarrow (e^{\pm \omega t})'' - \omega^2 e^{\pm \omega t} = 0$ . Problem: Die reelle Exponentialfunktion liefert uns zwar eine Lösung, jedoch keine Schwingung. Wir erhalten bloss eine monotone Funktion, die entweder mit der Zeit  $t$  über alle Massen wächst oder sich gedämpft asymptotisch der  $t$ -Achse annähert. Diese Lösung dürfen wir daher für den Zweck der Beschreibung von Schwingungen **verwerfen**.

2.  $T''(t) + T(t) \cdot \omega^2 = 0$ . Hier kennen wir die Basislösungen ebenfalls:  $e^{\pm i \omega t}$  resp.  $\sin(\omega t)$ ,  $\cos(\omega t)$ .

Wir machen den Ansatz:  $T(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) = \tilde{A} e^{i \omega t} + \tilde{B} e^{-i \omega t}$ .  
 $\Rightarrow T(t)'' = -\omega^2 A \sin(\omega t) - \omega^2 B \cos(\omega t) = -\omega^2 T(t) \Rightarrow T(t)'' = -\omega^2 T(t)$ .

Hier erhalten wir mit  $\sin$  und  $\cos$  eine Schwingung. Damit ergibt sich:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -\omega^2 = c^2 \cdot \frac{\Delta U(\vec{x})}{U(\vec{x})} \Rightarrow c^2 \Delta U + \omega^2 U = 0 \Rightarrow \Delta U + \frac{\omega^2}{c^2} U = 0$$

Die partielle Differentialgleichung für  $U(\vec{x})$  trägt in der Physik oder der Elektrotechnik auch den Namen **Helmholtz-Gleichung**.

Wir setzen:  $\frac{\omega^2}{c^2} = \lambda > 0 \leadsto \omega = c \cdot \sqrt{\lambda}$ . (ein eventuelles Vorzeichen ist in  $c$  enthalten.)

Damit können wir zusammenfassen:

### Resultat:

Die gefundenen Lösungen der Wellengleichung  $(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2})(u) = 0$ , welche auf „Schwingungen“ führen, sind durch Funktionen der Form  $u(\vec{x}, t) = U_\lambda(\vec{x}) \cdot T(t) = U_\lambda(\vec{x}) \cdot (A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t))$  gegeben.

Da  $u(\vec{x}, t) = U_\lambda(\vec{x}) \cdot T(t)$  durch  $T(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$  zeitlich gestreckt wird, haben wir eine **stehende Welle** vor uns.  $U_\lambda(\vec{x})$  ist dabei Lösung der **Helmholtz-Gleichung**  $\Delta U_\lambda + \lambda U_\lambda = 0$ .

Die Lösungen von  $U_\lambda(\vec{x}) = 0$  heissen **Knoten**, **Knotenlinien**, **Knotenflächen** u.s.w.

### 8.3.3 Schwingung eines dünnen Balkens

Wir betrachten einen beidseitig eingespannten **dünnen Balken**, den wir vereinfacht als eine **Saite** verstehen können. Dabei soll die Form des Querschnitts vernachlässigbar sein. Damit haben wir räumlich ein 1-dimensionales Problem vor uns. In der Physik wird dafür folgendes Modell erarbeitet:

$$u_{tt} = c \cdot u_{xx} = c \Delta(u), \quad u(0, t) = u(x_L, t) = 0 \quad (\partial G), \quad t \geq 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, x_L]$$

Dabei schreiben wir kurz:  $u_{tt}'' := u_{tt}$ ,  $u_{xx}'' := u_{xx}$ .  $f$  und  $g$  sind gegebene Funktionen.

Weiter ist  $c^2 = \frac{\sigma}{\rho}$ .  $\sigma$  bedeutet die Spannung,  $\rho$  die Längendichte (Masse pro Länge).

Wir wissen:  $u(\vec{x}, t) = U_\lambda(\vec{x}) \cdot T(t) = U_\lambda(\vec{x}) \cdot (A \sin(\omega(t)) + B \cos(\omega(t)))$ ,  $(U_\lambda)_{xx} + \lambda \cdot U_\lambda = 0$ .

Hier gilt es nun, die Helmholtz-Gleichung  $(U_\lambda)_{xx} + \lambda \cdot U_\lambda = 0$  unter Berücksichtigung der homogenen Randbedingungen zu lösen, wobei wir die dazu möglichen Basisfunktionen wiederum kennen. Wegen den homogenen Randbedingungen kommen wiederum keine Exponentialfunktionen resp. der Sinus- und Cosinus hyperbolicus-Funktionen in Betracht, wie man sich sofort durch Nachrechnung überzeugt. Damit bleibt als Kandidatenmenge die parametrisierte Linearkombination:

$$U_\lambda(x) = \alpha \cos(\sqrt{\lambda} x) + \beta \sin(\sqrt{\lambda} x), \quad \lambda > 0$$

Die Randbedingungen ergeben:

$$0 = U_\lambda(0) = \alpha \Rightarrow \alpha = 0, \quad U_\lambda(x_L) = \beta \sin(\sqrt{\lambda} x_L) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} \cdot x_L = k \cdot \pi \neq 0 \Rightarrow k \in \mathbb{N}.$$

( $k$  kann keine negativen Werte tragen, denn es gilt  $\sqrt{\lambda}, x_L, \pi > 0$ .)

Mit der Helmholtz-Gleichung ist ein **Eigenwertproblem** gegeben. Die Eigenwerte und Eigenfunktionen sind somit:

$$\lambda_k = \frac{k^2 \pi^2}{x_L^2}, \quad U_k(x) = \sin\left(\frac{k \pi}{x_L} \cdot x\right), \quad k \in \mathbb{N}$$

Mit  $\omega = c \cdot \sqrt{\lambda} = c \cdot \frac{k \pi}{x_L}$  erhalten wir als Basisfunktionen der Schwingungsgleichung des dünnen Balkens:

$$u_k(x, t) = U_k(x) \cdot T_k(t) = \sin\left(\frac{k \pi}{x_L} \cdot x\right) \left(A \sin\left(\frac{c \cdot k \pi}{x_L} t\right) + B \cos\left(\frac{c \cdot k \pi}{x_L} t\right)\right)$$

Für  $k = 1$  ergibt sich so die **Grundschiwingung**, für  $k = 2$  die **1. Oberschiwingung** u.s.w.

Da die Helmholtz-Gleichung  $u_{tt} = c u_{xx}$  eine homogene Gleichung ist, können wir auf die obigen Basisfunktionen das Superpositionsprinzip anwenden um die Anfangsbedingungen zu erfüllen.

$$\Rightarrow u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k \pi}{x_L} \cdot x\right) \left(A_k \sin\left(\frac{c \cdot k \pi}{x_L} t\right) + B_k \cos\left(\frac{c \cdot k \pi}{x_L} t\right)\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k \pi}{x_L} \cdot x\right) \underbrace{\left(A_k \sin\left(\frac{c \cdot k \pi}{x_L} 0\right) + B_k \cos\left(\frac{c \cdot k \pi}{x_L} 0\right)\right)}_{=1} = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k \pi}{x_L} \cdot x\right) \cdot B_k$$

$$g(x) = u_t(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k \pi}{x_L} \cdot x\right) \left(A_k \underbrace{\frac{c \cdot k \pi}{x_L} \cos\left(\frac{c \cdot k \pi}{x_L} 0\right)}_{=1} + B_k \underbrace{\left(-\frac{c \cdot k \pi}{x_L}\right) \sin\left(\frac{c \cdot k \pi}{x_L} 0\right)}_{=0}\right)$$

Damit haben wir:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin\left(\frac{k\pi}{x_L} \cdot x\right), \quad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{c \cdot k\pi}{x_L} \sin\left(\frac{k\pi}{x_L} \cdot x\right)$$

Jetzt sind die Funktionen  $f$  und  $g$  als Fourierreihen erkannt. Speziell in diesem Beispiel sind es Sinusreihen.  $A_k$  und  $B_k$  können daher mit Hilfe der Fourierkoeffizienten berechnet werden:

$$A_k = \frac{2}{c k \pi} \int_0^{x_L} g(x) \sin\left(\frac{k\pi}{x_L} x\right) dx, \quad B_k = \frac{2}{x_L} \int_0^{x_L} f(x) \sin\left(\frac{k\pi}{x_L} x\right) dx$$

Diese Fourierkoeffizienten kann man bei geeigneten gegebenen Funktionen  $f$  und  $g$  damit bis zu einem gewissen  $k = m$  berechnen und damit die gesuchte Lösung approximieren:

$$u_{approx}(x, t) = \sum_{k=1}^m \sin\left(\frac{k\pi}{x_L} \cdot x\right) \left( A_k \sin\left(\frac{c \cdot k\pi}{x_L} t\right) + B_k \cos\left(\frac{c \cdot k\pi}{x_L} t\right) \right)$$

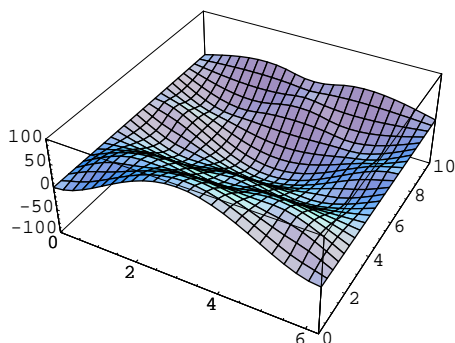
### Beispiel

Seien  $c = 1$ ,  $x_L = 2\pi$ ,  $f(x) = x^2(x - 2\pi)^2$ ,  $g(x) = -\frac{x^7}{645120} + \frac{x^5}{3840} - \frac{x^3}{48} + \frac{x}{2}$ ,  $m = 17$

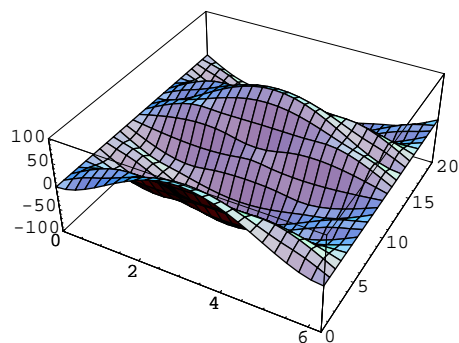
**Input:** (Mathematica)

```
Remove["Global`*"];
c=1; xL=2 Pi; f[x_]:= x^2 (x-2 Pi)^2;
g[x_]:=x/2 - x^3/48 + x^5/3840 - x^7/645120; m=17;
A[k_]:= 2/(c k Pi) Integrate[g[x] Sin[k Pi x/xL],{x,0,xL}]/N//Chop;
B[k_]:= 2/xL Integrate[f[x] Sin[k Pi x/xL],{x,0,xL}]/N//Chop;
tab1 = Table[{A[k]//Chop,B[k]//Chop},{k,1,m}];
AA[k_]:=tab1[[k]][[1]]; BB[k_]:=tab1[[k]][[2]];
uApprox[x_,t_,m_]:= Sum[Sin[k Pi x/xL] (AA[k] Sin[c k Pi t/xL]
+BB[k] Cos[c k Pi t/xL]),{k,1,m}];
Plot3D[uApprox[x,t,m],{x,0,xL},{t,0,20}]
```

**Output:**



Plot für  $t = 10$



Plot für  $t = 20$

Die weitere praktische Durchführung dieses Unterfangens soll in den Übungen erledigt werden.

### 8.3.4 Die schwingende dünne Platte

Eine dünne Platte soll hier als vereinfachtes Modell einer Bodenplatte, einer Decke, einer Wand oder einer in der Technik genutzten Membran dienen. Man denke etwa an die Membran einer Trommel. Aus dem Grunde der in der Technik bei Bodenplatten am häufigsten vorkommenden Rechtecksform wollen wir uns beim theoretischen Studium auf **rechteckige Platten** beschränken. Für andere Formen muss die Herleitung entsprechend angepasst werden. Weiter können wir das auf Seite 289 gefundene Resultat betreffend der stehenden Wellen und der Helmholtz-Gleichung verwenden.

Sei also:

$$G = I_x \times I_y = [0, a] \times [0, b], \quad x \in I_x = [0, a], \quad y \in I_y = [0, b], \quad u(x, y, t) = U_\lambda(x, y) \cdot (A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t))$$

$u_\lambda(x, y)$  erfüllt das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \Delta U_\lambda(x, y) + \lambda U_\lambda(x, y) &= 0, & (x, y) \in G \\ U_\lambda(x, y) &= 0, & (x, y) \in \partial G \\ U_\lambda(0, y) = U_\lambda(a, y) &= 0, & x \in I_x \\ U_\lambda(x, 0) = U_\lambda(x, b) &= 0, & y \in I_y \end{aligned}$$

Separationsansatz:

$$U(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \Rightarrow \Delta U_\lambda + \lambda \cdot U_\lambda = \Delta (X(x) \cdot Y(y)) + \lambda \cdot (X(x) \cdot Y(y)) = X_{xx} \cdot Y + X \cdot Y_{yy} + \lambda \cdot X \cdot Y = 0$$

Wenn wir die letzte Gleichung mit  $X \cdot Y$  kürzen, erhalten wir eine Separation:

$$\frac{X_{xx}}{X} + \frac{Y_{yy}}{Y} + \lambda = 0 \Rightarrow \frac{X_{xx}}{X} + \lambda = -\frac{Y_{yy}}{Y} := \pm \mu^2$$

Man beachte, dass in  $\frac{X_{xx}}{X} + \lambda = -\frac{Y_{yy}}{Y}$  die linke Seite nur von  $x$  und die rechte Seite nur von  $y$  abhängig ist. Beide Seiten müssen für sich also konstant sein ( $= \pm \mu^2 \rightsquigarrow$  Separation). Daher müssen hier also zwei Gleichungen bestehen:

$$\frac{X_{xx}}{X} + \lambda = \pm \mu^2, \quad -\frac{Y_{yy}}{Y} = \pm \mu^2$$

- Der Fall „–“: Da wir die Basislösungen kennen, können wir den Fall  $Y(y) = e^{\pm \mu y}$  resp.  $Y(y) = A \sinh(\pm \mu y) + B \cosh(\pm \mu y)$  ausschliessen, denn sonst würde folgen:  
 $-\frac{Y_{yy}}{Y} = -\mu^2 \Rightarrow \frac{Y_{yy}}{Y} = \mu^2$  ist gültig, wie die Nachkontrolle zeigt. Jedoch funktioniert dies mit unseren Randbedingungen nicht:  
 $U(x, 0) = 0 = X(x) \cdot Y(0) = X(x) \cdot (A \sinh(\pm \mu \cdot 0) + B \cosh(\pm \mu \cdot 0)) = X(x) \cdot (A \cdot 0 + B \cdot 1)$   
 $\Rightarrow 0 = X(x) \cdot B \Rightarrow B = 0$ , da ja  $X(x) \not\equiv 0$  sein muss (sonst wäre  $u(x, y) \equiv 0$ ).  
 $\Rightarrow U(x, b) = X(x) \cdot A \cdot \sinh(\pm \mu \cdot b) = 0 \Rightarrow A \cdot \sinh(\pm \mu b) = 0 \Rightarrow A = 0$  oder  $\mu = 0$ .  
 Das aber würde wiederum zu  $U(x, y) = 0$  führen: Widerspruch!

Daher können wir den Fall „–“ wegstreichen.

- Es bleibt noch der Fall „+“:  $-\frac{Y_{yy}}{Y} = +\mu^2 \Rightarrow Y_{yy} + \mu^2 Y = 0$ . Hier kennen wir wiederum die Basislösungen  $\sin(\mu y)$  und  $\cos(\mu y) \rightsquigarrow Y(y) = A \sin(\mu y) + B \cos(\mu y)$ .

Ein etwaiges Vorzeichen von  $\mu$  spielt beim Cosinus wegen der Symmetrie keine Rolle. Beim Sinus könnte man ein solches in den Koeffizienten  $A$  „verpacken“. Einsetzen der Randbedingungen ergibt nun:

$$\begin{aligned} Y(0) = 0 &= A \sin(0) + B \cos(0) = A \cdot 0 + B \cdot 1 = B \Rightarrow B = 0, \\ Y(b) = 0 &= A \cdot \sin(\mu b) + 0 \cdot \cos(\mu b) = A \sin(\mu b) \Rightarrow \mu b = n \pi \Rightarrow \mu = \frac{n \pi}{b}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Eine Forderung  $n \in \mathbb{Z}$  ist nicht notwendig, denn das Vorzeichen von  $n$  lässt sich in  $A$  „verpacken“. Zudem fällt  $n = 0$  weg, da dies nur zur Nulllösung führen würde.

$$\leadsto \mu_n^2 = \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \text{ ist } \mathbf{Eigenwert} \text{ und } s_n(y) = \sin\left(\frac{n \pi}{b} y\right) \text{ ist } \mathbf{Eigenfunktion} \text{ von } Y_{yy} + \mu^2 Y = 0.$$

Zudem gilt im Falle „+“:

$$\frac{X_{xx}}{X} + \lambda = +\mu^2 = +\frac{n^2 \pi^2}{b^2} \Rightarrow X_{xx} + \left(\lambda - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}\right) X = 0$$

Hier muss wiederum  $\left(\lambda - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}\right) > 0$  gelten, ansonst wir Exponentialfunktionen resp. hyperbolische Funktionen als Lösungen erhalten würden, mit denen die Randbedingungen bei  $x = 0$  und bei  $x = a$  nicht erfüllbar wären, wie man sofort nachkontrolliert. Daher bleiben als Basislösungen für  $X(x)$  nur noch  $\sin$  und  $\cos$ :

$$X(x) = A \cos\left(\sqrt{\lambda - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}} x\right) + B \sin\left(\sqrt{\lambda - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}} x\right)$$

Die Randbedingungen bewirken:

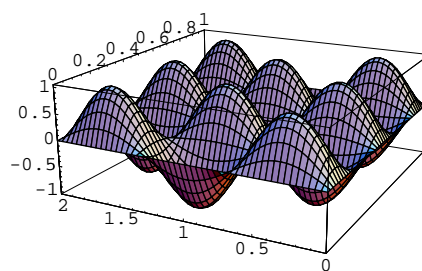
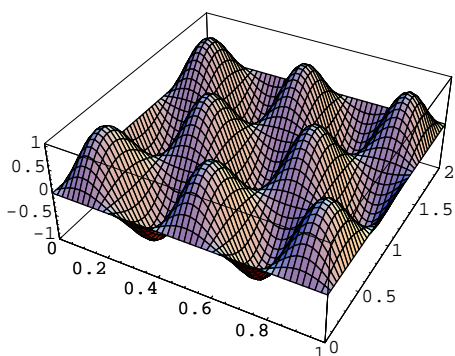
$$\begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow X(0) = 0 = A \cos(0) + B \sin(0) = A \Rightarrow A = 0. \\ x = a &\Rightarrow X(a) = 0 = 0 \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}} a\right) + B \sin\left(\sqrt{\lambda - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}} a\right) = B \sin\left(\sqrt{\lambda - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}} a\right). \\ &\Rightarrow \sqrt{\lambda - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}} \cdot a = m \cdot \pi \text{ mit } a > 0, \quad \sqrt{\lambda - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}} > 0 \Rightarrow m \in \mathbb{N} \Rightarrow \lambda = \frac{m^2 \cdot \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \cdot \pi^2}{b^2} \end{aligned}$$

Damit kennen wir die Eigenwerte und die Eigenfunktionen von  $X_{xx} + \left(\lambda_n - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}\right) X = 0$ :

$$\lambda_{m,n} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \quad \left(\lambda_{m,n} - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}\right) = \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \quad X_m = \sin\left(\frac{m \pi}{a} \cdot x\right)$$

$$U_{m,n}(x, y) = X_m(x) \cdot Y_n(y) = \sin\left(\frac{m \pi}{a} \cdot x\right) \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{n \pi}{b} \cdot y\right)}_{=s_n}$$

Für den Fall  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $n = 3$ ,  $m = 4$  zeigt das Bild von  $U_{m,n}(x, y)$  eine Eierschachtel wie in den nachstehenden Figuren wiedergegeben. Anschliessend ist der *Mathematica-Code* zu finden.



**Code:**

```
a=1; b=2; n=3; m=5;
f[x_,y_]:=Sin[m Pi/a x] Sin[n Pi/b y];
Plot3D[f[x,y],{x,0,a},{y,0,b},PlotPoints->50];
Plot3D[f[x,y],{x,0,a},{y,0,b},PlotPoints->50,ViewPoint->{-2.648,-1.364, 0.972}];
```

$U(x, y, t)$  erhalten wir jetzt wie gewohnt durch Superposition, indem wir die Anfangsbedingungen erfüllen. Denn wir sind ja von einer homogenen Gleichung, der Helmholtz-Gleichung  $\Delta u_\lambda(x, y) + \lambda \cdot u_\lambda(x, y) = 0$ , ausgegangen. Mit den „Zutaten“ erhalten wir:

$$\Rightarrow u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \underbrace{\sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right)}_{=U_{m,n}(x,y)} \cdot \underbrace{(A_{m,n} \sin(\omega_{m,n} t) + B_{m,n} \cos(\omega_{m,n} t))}_{=T_{m,n}(t), \text{ siehe Seite 289}}$$

$$\omega = c \cdot \sqrt{\lambda} \Rightarrow \omega_{m,n} = c \cdot \sqrt{\lambda_{m,n}}, \quad \lambda_{m,n} = \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right), \quad c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Nun befassen wir uns noch mit den Anfangsbedingungen:  $u(x, y, 0) = f(x, y)$ ,  $u_t(x, y, 0) = g(x, y)$ .

**Beispiel:**

Wir nehmen als Beispiel einmal an, dass sich  $u(x, y, t)$  beim Start zeitlich noch nicht so sehr ändert, d.h. dass gilt:  $g(x, y) \equiv 0$ . Dann erhalten wir:

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot (A_{m,n} \sin(\omega_{m,n} \cdot t) + B_{m,n} \cos(\omega_{m,n} \cdot 0))$$

$$\Rightarrow u_t(x, y, 0) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot (A_{m,n} \cdot \omega_{m,n} \cdot \underbrace{\cos(\omega_{m,n} \cdot 0)}_{=1} - B_{m,n} \cdot \omega_{m,n} \cdot \underbrace{\sin(\omega_{m,n} \cdot 0)}_{=0})$$

$$\Rightarrow u_t(x, y, 0) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot A_{m,n} \cdot \omega_{m,n} = g(x, y) \equiv 0 \Rightarrow A_{m,n} = 0$$

Denn eine Sinusreihe ist nur dann identisch 0, wenn alle Koeffizienten 0 sind.

Da zudem  $\omega_{m,n} = c \cdot \sqrt{\lambda_{m,n}} = c \cdot \sqrt{\pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} = c \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \neq 0$  gilt, muss  $A_{m,n} = 0$  sein.

$$\Rightarrow u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot (B_{m,n} \cos(\omega_{m,n} \cdot t))$$



$$\Rightarrow u(x, y, 0) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot \underbrace{(B_{m,n} \cos(\omega_{m,n} \cdot 0))}_{=1} = f(x, y)$$

Somit ist wegen (\*)  $f(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot B_{m,n}$  eine Fourierreihe (Sinusreihe) in  $x$  und in  $y$ . Wir können daher versuchen, die Fourierkoeffizienten zu berechnen. Dazu machen wir den Ansatz:

$$f(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} B_{m,n}(y) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right)$$

$$\text{Daraus können wir folgern: } B_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) dx.$$

$$B_m(y) \text{ ist wegen (*) wieder eine Sinusreihe in } y: \quad B_m(y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right).$$

$$\text{Daraus folgt: } B_{m,n} = \frac{2}{b} \int_0^b B_m(y) \sin\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) dy = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) dy dx \text{ sowie}$$

$$f(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} B_{m,n} \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right).$$

Damit lassen sich die Fourierkoeffizienten und damit  $u(x, y, t)$  approximieren:

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^N \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot \left( \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) dy dx \right) \cos(c \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \cdot t)$$

### Beispiel

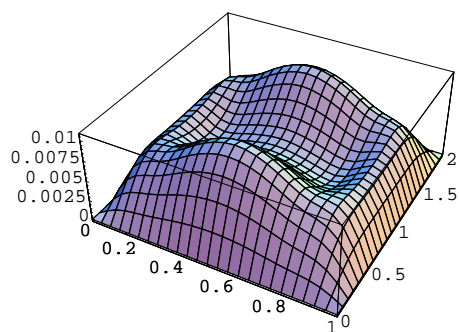
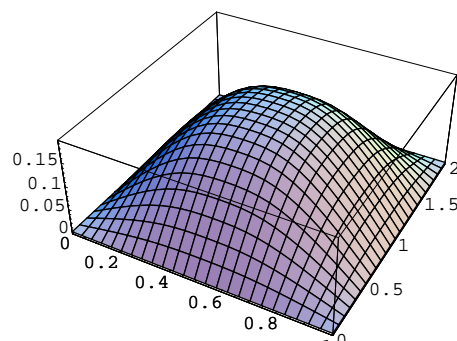
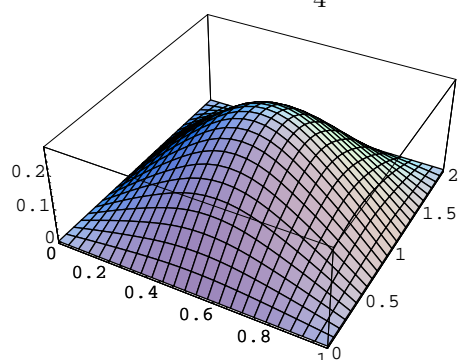
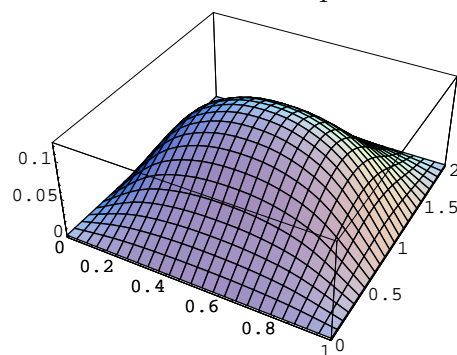
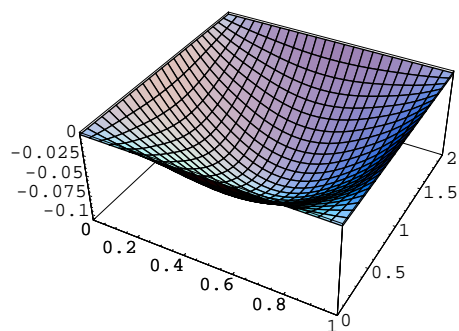
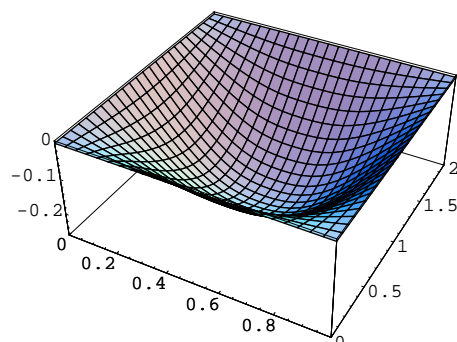
Seien  $c = 1$ ,  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $f(x) = x(x-a)y(y-b)$ ,  $g(x) = 0$ ,  $mm = 9$ ,  $nn = 9$ .  
Die Parameter  $mm$  und  $nn$  bedeuten die maximalen Werte für die Indices  $m$  und  $n$ .

**Input:** (*Mathematica*)

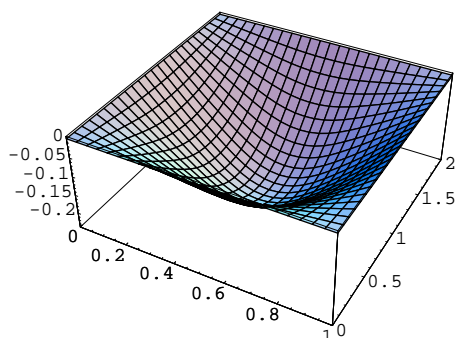
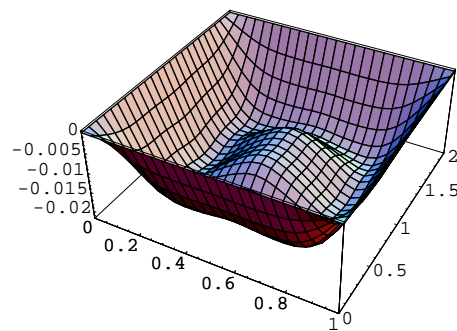
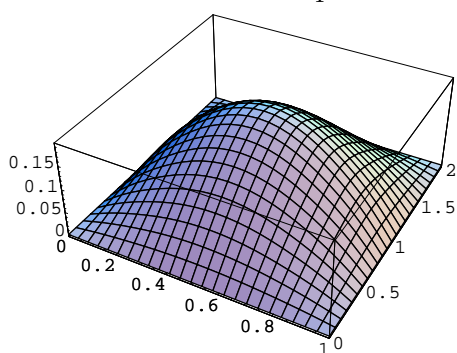
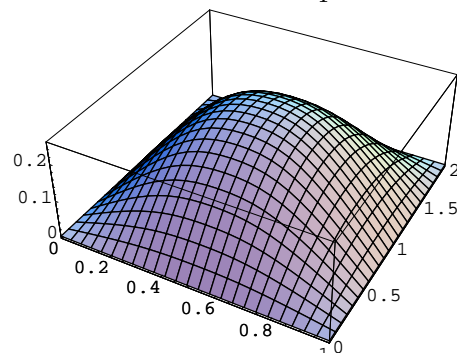
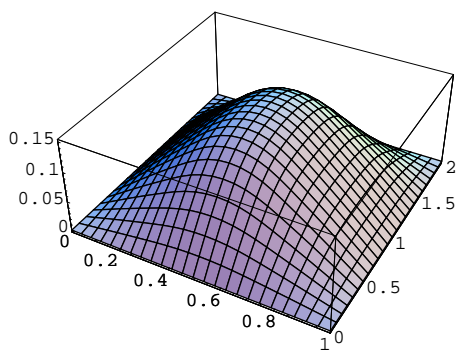
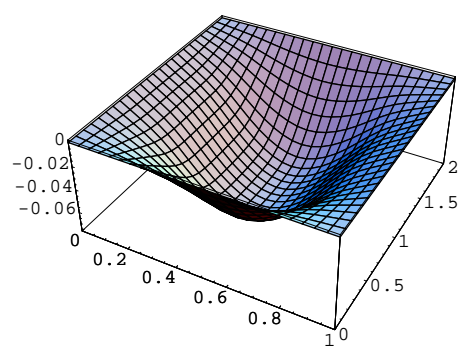
```
Remove["Global`*"];
c=1; a=1; b=2; f[x_,y_]:= x (x-a) y(y-b); g[x_]:=0; mm=9; nn=9;
A[m_,n_]:= 4/(a b) Integrate[f[x,y] Sin[m Pi x/a] Sin[n Pi y/b],
  {x,0,a},{y,0,b}]/N//Chop;
tab1 = Table[A[m,n],{m,1,mm},{n,1,nn}];
AA[m_,n_]:=tab1[[m]][[n]];
tab2 = Table[AA[m,n],{m,1,mm},{n,1,nn}];
uApprox[x_,y_,t_,mm_,nn_]:= Sum[Sin[m Pi x/a] Sin[n Pi y/b] AA[m,n]
  * Cos[c Pi t Sqrt[(m^2)/(a^2)+(n^2)/(b^2)]], {m,1,mm},{n,1,nn}];
Table[p[t]=Plot3D[uApprox[x,y,t/4+Pi,mm,nn],{x,0,a},{y,0,b}],{t,0,11}];
```

**Output:**

Nachstehend sind die Schwingungszustände für  $t = \pi, \pi + \frac{1}{4}, \pi + \frac{2}{4}, \dots, \pi + \frac{11}{4}$  wiedergegeben.

Plot für  $t = \pi + \frac{0}{4}$ Plot für  $t = \pi + \frac{1}{4}$ Plot für  $t = \pi + \frac{2}{4}$ Plot für  $t = \pi + \frac{3}{4}$ Plot für  $t = \pi + \frac{4}{4}$ Plot für  $t = \pi + \frac{5}{4}$ 

Um mehr zu sehen, müsste man eine grössere Anzahl Bilder bei einer kleineren zeitlichen Distanz ploten und damit eine Animation herstellen. Es ist leider aus verständlichen Gründen nicht möglich, dies auf Papier wiederzugeben. Ein interessantes Phänomen wird jedoch auch schon hier sichtbar: Die zwischendurch auftretende Delle (Beule nach innen), welche aber sogleich wieder verschwindet. Weil ich diese Beule nicht erwartet habe, nenne ich sie scherzhalber die **Überraschungsbeule**.

Plot für  $t = \pi + \frac{6}{4}$ Plot für  $t = \pi + \frac{7}{4}$ Plot für  $t = \pi + \frac{8}{4}$ Plot für  $t = \pi + \frac{9}{4}$ Plot für  $t = \pi + \frac{10}{4}$ Plot für  $t = \pi + \frac{11}{4}$ 

Für weitere praktische Rechnungen sei hier auf die Übungen verwiesen.

### 8.3.5 Ausblick über Eigenwerte und Eigenfunktionen

Ohne Beweis sei noch auf einen allgemeinen Sachverhalt betreffend Helmholtzgleichung  $\Delta u + \lambda u = 0$  und ihre Eigenwerte und Eigenfunktionen verwiesen.

Sei  $\Delta u + \lambda u = 0$  in  $G$ ,  $u = 0$  auf  $M_1 \subset \partial G$  und  $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0$  auf  $M_2 \subset \partial G$ . Dann gilt:

**Satz:**

1. Für die Eigenwerte ist  $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \rightarrow \infty$ .  
Für  $M_1 \neq \{\}$  findet man  $0 < \lambda_1$ . Sonst gilt  $0 = \lambda_1$
2. Zu  $\lambda_k$  existieren höchstens endlich viele linear unabhängige Eigenfunktionen (Basis). Jede Eigenfunktion zu  $\lambda_k$  ist Linearkombination der Basis.
3. Für  $\lambda_k \neq \lambda_j$  ist  $u_k \perp u_j$ , d.h. es gilt  $\int_G u_k u_j dG = 0$
4. Jede Funktion auf  $G$  lässt sich in der Basis der  $u_k$  in eine Reihe entwickeln:

$$f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(\vec{x}), \quad \{\vec{x} \mid k \in \mathbb{N}\} \text{ orthonormiert}, \quad c_k = \int_G f(\vec{x}) \cdot u_k(\vec{x}) dG$$

## 8.4 Fouriertransformationen und partielle Diff'gleichungen

### 8.4.1 Entwicklung der Methode an einem Beispiel

**Bsp.:** Wir studieren das Beispiel einer einfachen Wellengleichung mit nur einer Ortsvariablen. Sei dabei  $|u(x, t)|$  beschränkt und  $t \in \mathbb{R}_0^+$ :

$$\begin{aligned} c^2 u''_{xx} - u''_{tt} &= 0 & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_0^+ \\ u(x, 0) &= f(x) & x \in \mathbb{R}, (ABD) \\ u_t'(x, 0) &= g(x) & x \in \mathbb{R}, (ABD) \end{aligned}$$

Wir machen den Separationsansatz:  $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ . Daraus folgt:

$$X \cdot T''_{tt} = c^2 \cdot X''_{xx} \cdot T \Rightarrow \frac{1}{c^2} \cdot X \cdot T''_{tt} = X''_{xx} \cdot T \Rightarrow \frac{1}{c^2} \cdot \frac{T''_{tt}}{T} = \frac{X''_{xx}}{X} := \pm \lambda^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Da die linke und die rechte Seite der letzten Gleichung von verschiedenen Variablen abhängen, erhalten wir daraus zwei separate Gleichungen. Jeweils der linke Ausdruck ist gleich  $\pm \lambda^2$ .  $\leadsto$

$$T''_{tt} = \pm \lambda^2 c^2 T \quad \text{und} \quad X''_{xx} = \pm \lambda^2 \cdot X$$

Je nach „+“ oder „-“ erhalten wir damit die Lösungspaare:

$$T = C_1 \cdot e^{\pm \lambda c t}, \quad X = C_2 \cdot e^{\pm \lambda x} \quad \text{und} \quad T = A \cdot e^{\pm i \lambda c t}, \quad X = B \cdot e^{\pm i \lambda x}$$

Das ergibt die folgenden Kombinationen:

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= C_1 \cdot e^{i \lambda (x - c t)} \\ u_2(x, y) &= C_2 \cdot e^{i \lambda (x + c t)} \\ u_3(x, y) &= C_3 \cdot e^{-i \lambda (x - c t)} \\ u_4(x, y) &= C_4 \cdot e^{-i \lambda (x + c t)} \end{aligned}$$

Diese vier Funktionen lassen sich trigonometrisch als Linearkombinationen von  $\cos(\pm\lambda(x+ct)) = \cos(\lambda(x+ct))$  und  $\cos(\pm\lambda(x-ct)) = \cos(\lambda(x-ct))$  sowie  $i \sin(\pm\lambda(x+ct)) = \pm i \sin(\lambda(x+ct))$  und  $i \sin(\pm\lambda(x-ct)) = \pm i \sin(\lambda(x-ct))$  linear zusammensetzen. Dafür genügt aber schon die Basis  $\{\cos(\lambda(x+ct)), \cos(\lambda(x-ct)), i \sin(\lambda(x+ct)), i \sin(\lambda(x-ct))\}$ . Diese Basis lässt sich, wie man leicht sieht, aus  $u_1(x, y)$  und  $u_2(x, y)$  gewinnen, womit  $u_1(x, y)$  und  $u_2(x, y)$  als Basislösungen genügen. Damit ist bei gegebenen  $\lambda$  die folgende Funktion  $u_\lambda(x, t)$  eine Lösung:

$$u_\lambda(x, t) = C_1(\lambda) \cdot e^{i\lambda(x-ct)} + C_2(\lambda) \cdot e^{i\lambda(x+ct)} = e^{i\lambda x} \cdot (C_1(\lambda) \cdot e^{-i\lambda ct} + C_2(\lambda) \cdot e^{i\lambda ct})$$

Wir definieren nun:

$$l := \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \nu := \frac{c}{l}, \quad \omega = 2\pi\nu \Rightarrow \frac{\omega}{2\pi} = \nu = \frac{c}{l} = \frac{c\lambda}{2\pi} \Rightarrow \lambda c = \omega$$

Damit wird:

$$u_\lambda(x, t) = e^{i\lambda x} \cdot (C_1(\lambda) \cdot e^{-i\omega t} + C_2(\lambda) \cdot e^{i\omega t})$$

Nun gilt für  $c^2 u''_{xx} - u''_{tt} = 0$  das „Superpositionsprinzip“: Zu zwei Lösungen  $u_{\lambda_1}(x, t)$  und  $u_{\lambda_2}(x, t)$  ist auch jede Linearkombination  $\alpha u_{\lambda_1}(x, t) + \beta u_{\lambda_2}(x, t)$  Lösung. Speziell ist also  $u_{\lambda_1}(x, t) + u_{\lambda_2}(x, t)$  eine Lösung. Da für  $\lambda$  einzig die Forderung  $\lambda \in \mathbb{R}$  gemacht worden ist, kann  $\lambda$  nicht als diskreter Summationsindex angenommen werden. Statt von einer Summenlösung mit beliebig vielen Summanden müssen wir daher von einer Integrallösung als „Superposition“ ausgehen:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} (C_1(\lambda) \cdot e^{-i\omega t} + C_2(\lambda) \cdot e^{i\omega t}) \cdot e^{i\lambda x} d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} (C_1(\lambda) \cdot e^{-i\lambda ct} + C_2(\lambda) \cdot e^{i\lambda ct}) \cdot e^{i\lambda x} d\lambda$$

Dabei erhalten wir als Anfangsbedingungen für  $t = 0$  die Anfangsintegrale:

$$u(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} (C_1(\lambda) + C_2(\lambda)) \cdot e^{i\lambda x} d\lambda = f(x) \quad \text{und}$$

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} i\lambda c (-C_1(\lambda) + C_2(\lambda)) \cdot e^{i\lambda x} d\lambda = g(x)$$

Diese Integrale erkennen wir aber als die **Fourier-Rücktransformaten** von  $v(\lambda) := (C_1(\lambda) + C_2(\lambda))$  und von  $w(\lambda) := i\lambda c (-C_1(\lambda) + C_2(\lambda))$ . Daher sind  $v(\lambda)$  und  $w(\lambda)$  die **Fourier-Transformierten** von  $f(x)$  und  $g(x)$ .

Dazu kennen wir die Formeln:

$$v(\lambda) := (C_1(\lambda) + C_2(\lambda)) = \hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i\lambda x} dx$$

$$w(\lambda) := i\lambda c (-C_1(\lambda) + C_2(\lambda)) = \hat{g}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot e^{-i\lambda x} dx$$

$$\Rightarrow C_1(\lambda) = \frac{1}{2} \left( v(\lambda) - \frac{w(\lambda)}{i\lambda c} \right) = \frac{1}{2} \left( \hat{f}(\lambda) - \frac{\hat{g}(\lambda)}{i\lambda c} \right), \quad C_2(\lambda) = \frac{1}{2} \left( v(\lambda) + \frac{w(\lambda)}{i\lambda c} \right) = \frac{1}{2} \left( \hat{f}(\lambda) + \frac{\hat{g}(\lambda)}{i\lambda c} \right)$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} (C_1(\lambda) \cdot e^{-i\lambda ct} + C_2(\lambda) \cdot e^{i\lambda ct}) \cdot e^{i\lambda x} d\lambda$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \left( \hat{f}(\lambda) - \frac{\hat{g}(\lambda)}{i\lambda c} \right) \right) (\lambda) \cdot e^{-i\lambda ct} + \frac{1}{2} \left( \hat{f}(\lambda) + \frac{\hat{g}(\lambda)}{i\lambda c} \right) (\lambda) \cdot e^{i\lambda ct} \cdot e^{i\lambda x} d\lambda$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\hat{f}}{2} (e^{-i\lambda ct} + e^{i\lambda ct}) - \frac{1}{\lambda c} \frac{\hat{g}}{2i} (e^{-i\lambda ct} - e^{i\lambda ct}) \right) \cdot e^{i\lambda x} d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \hat{f} \cos(\lambda ct) - \frac{1}{\lambda c} \hat{g} \sin(\lambda ct) \right) \cdot e^{i\lambda x} d\lambda$$

**Folgerung:** Damit erhalten wir die folgende **Lösung** von  $c^2 u''_{xx} - u''_{tt} = 0$  und obigen Anf'bed.:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \hat{f}(\lambda) \cos(\lambda ct) - \frac{1}{\lambda c} \hat{g}(\lambda) \sin(\lambda ct) \right) \cdot e^{i\lambda x} d\lambda \quad \text{mit}$$

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i\lambda x} dx, \quad \hat{g}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot e^{-i\lambda x} dx$$

## 8.4.2 Beispiel einer konkreten Anwendung

**Bsp.:** Sei  $c = 1$  und  $f(x) = 1$ ,  $x \in [-1, 1]$ ,  $f(x) = 0$  sonst. Sei  $g(x) = 0$ . Damit ergibt sich:

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(\lambda)}{\lambda}, \quad \hat{g}(\lambda) = 0.$$

Z.B. für die Werte  $x = 1$  und  $t = 1$  erhält man mit der Formel für  $u(x, t)$  den Wert  $u(1, 1) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ .  
 $u(x, t)$  kann also jetzt berechnet werden.

## 8.5 Zur Idee der Greenschen Funktion

### 8.5.1 Einführung und Begriff

Sei  $B$  jetzt ein Gebiet im  $\mathbb{R}^n$ ,  $\partial B$  vernünftig. Sei  $P_0 \in B$ ,  $P, P_k \in \bar{B}$ ,  $\bar{b} = B \cup \partial B$ .

Der Einfachheit halber verwenden wir hier als Bezeichnungen für die Punkte  $P_k$  die bisher für die gewöhnlichen eindimensionalen Variablen verwendeten Buchstaben:  $x = P$ ,  $x_k = P_k$ ,  $z = P_0$ . Damit können wir schreiben:

**Definition:** Eine Funktion  $G_z : B \setminus \{z\} \mapsto \mathbb{R}$  heisst **Greensche Funktion** des Laplace-Operators  $\Delta \Leftrightarrow$

1.  $\forall z \in B, x \in \partial B \quad \lim_{x_n \rightarrow x} G_z(x_n) = 0$
2.  $\forall z \in B \quad \Delta G_z(x) = \delta(z) \quad (\delta = \text{Dirac-Distribution})$

Sei nun die „Testfunktion“  $\varphi(x)$  eine vernünftige (genügend oft diff'bare u.s.w.) Funktion mit  $\varphi(x) = 0$  auf  $\partial B$ . Dann gilt für das Skalarprodukt nach der Greenschen Formel:

$$\langle \Delta G_z(x), \varphi(x) \rangle = \int_B G_z(x) \cdot \Delta \varphi(x) dB = \underbrace{\int_B \underbrace{\Delta G_z(x)}_{\delta(z)} \cdot \varphi(x) dB}_{\varphi(z)} + \underbrace{\int_{\partial B} \underbrace{G_z(x)}_{=0} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial \vec{n}} d\sigma}_{=0} - \underbrace{\int_{\partial B} \frac{\partial G_z(x)}{\partial \vec{n}} \underbrace{\varphi(x)}_{=0} d\sigma}_{=0}$$

$$\Rightarrow \int_B G_z(x) \cdot \Delta \varphi(x) dB = \varphi(z), \quad \Delta \varphi(x) = f(x) \Rightarrow \int_B G_z(x) \cdot f(x) dB = \varphi(z)$$

Damit erhalten wir den folgenden Satz:

**Satz:** Das Dirichlet-Problem  $\Delta u(x) = f(x)$  in  $B$ ,  $u(x) = 0$  auf  $\partial B$  wird durch die Greensche Funktion gelöst wie folgt:

$$u(z) = \int_B G_z(x) \cdot f(x) dx \quad \text{oder} \quad u(x) = \int_B G_z(x) \cdot f(z) dz$$

Aus der zweiten Formel kann man folgern:

$$\Delta u(x) = \Delta \int_B f(z) G_z(x) dB = \int_B f(z) \Delta G_z(x) dB = \int_B f(z) \delta(x - z) dB = f(x) \\ \Rightarrow u(x) \text{ löst unser Dirichlet-Problem.}$$

### 8.5.2 Ein Schulbeispiel

Wir wollen hier noch das bekannte Beispiel der Potentialfunktion  $\gamma_z(x)$  einer Punktladung in  $z$  studieren. Diese Funktion entpuppt sich nämlich als eine Greensche Funktion. Aus der Physik weiss man, dass für das besagte Potential gilt:

$$\gamma_z(x) = -\frac{1}{4\pi|x-z|}, \quad x, z \in \mathbb{R}^3, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \gamma_z(x) = 0$$

Dabei dürfen wir wegen der Möglichkeit der Translation o.B.d.A.  $z = 0$  annehmen.

$$\leadsto \gamma_0(x) := \gamma(x) = -\frac{1}{4\pi|x|} = -\frac{1}{4\pi r} := \gamma(r).$$

$\gamma(r)$  ist eine vernünftige, diff'bare Funktion ausser für  $r = 0$ .

Für das Folgende schreiben wir den Laplace-Operator  $\Delta$  in Polarkoordinaten, denn  $\gamma(r)$  ist zentralsymmetrisch (siehe Seite 248):

$$\Delta \varphi(r) = \frac{d^2 \gamma}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\gamma}{dr} \Rightarrow \Delta \gamma(r) = -\frac{1}{4\pi} (-2r^{-3} - 2r^{-1}(-1)r^{-2}) \Big|_{r \neq 0} \rightarrow 0 \quad \text{mit } r \rightarrow 0$$

Wir benutzen nochmals die Greensche Formel wie vorhin:  $\int_B (\varphi \Delta \Psi - \Psi \Delta \varphi) dV = \int_{\partial B} (\varphi \frac{\Psi}{n} - \Psi \frac{\varphi}{n}) d\sigma$

Sei nun  $\Psi = \gamma$ ,  $\varphi$  = Testfunktion mit  $\varphi(x) = 0$  auf dem Rand und vernünftigen Ableitungen. Da  $\gamma(x)$  im Ursprung nicht als reelle Funktion definiert ist, berechne wir:

$$\begin{aligned} \int_{B=\mathbb{R}^3 \setminus K_r(0)} (\varphi \Delta \Psi - \Psi \Delta \varphi) dV &= \int_{B=\mathbb{R}^3 \setminus K_r(0)} (\varphi \underbrace{\Delta \gamma}_{=0} - \gamma \Delta \varphi) dV = \int_{B=\mathbb{R}^3 \setminus K_r(0)} -\gamma \Delta \varphi dV \\ &= \int_{\partial B} (\varphi \frac{\Psi}{n} - \Psi \frac{\varphi}{n}) d\sigma = \int_{\partial(\mathbb{R}^3 \setminus K_r(0))} \underbrace{\left( \underbrace{\varphi \frac{\gamma}{n}}_{!} - \underbrace{\gamma \frac{\varphi}{n}}_{!} \right)}_{=0, \quad r \rightarrow \infty} d\sigma = \int_{\partial K_r(0)} (\varphi \frac{\gamma}{n} - \gamma \frac{\varphi}{n}) d\sigma \end{aligned}$$

1. Wegen der Zentralsymmetrie von  $\gamma(r)$  gilt in bezüglich der Kugeloberfläche:

$$\left| \int_{\partial K_r(0)} \gamma \frac{\varphi}{n} d\sigma \right| = |\gamma| \cdot \left| \int_{\partial K_r(0)} \frac{\varphi}{n} d\sigma \right| \leq \left( \frac{1}{4\pi r} \right) \cdot (4\pi r^2 \cdot \text{Max}(\text{grad}(\varphi))) = r \cdot \text{Max}(\text{grad}(\varphi)) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0$$

2. Wegen der Zentralsymmetrie von  $\gamma(r)$  ist  $\frac{\gamma}{\vec{n}} \parallel \vec{r} \Rightarrow \frac{\gamma}{\vec{n}} = -\gamma'(r)$ . Das Minuszeichen entsteht, weil der Gradient in Richtung des stärksten Wachstums von  $\gamma(r) = -\frac{1}{4\pi r}$  zeigt, also weg vom Ursprung.  $\vec{n}$  dagegen zeigt zum Ursprung hin.  $\gamma(r)$  ist konstant auf der Kugeloberfläche.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\partial K_r(0)} \varphi \frac{\gamma}{\vec{n}} d\sigma &= -\gamma'(r) \int_{\partial K_r(0)} \varphi d\sigma = (-(-(4\pi r)^{-1})') \cdot (4\pi r^2 \varphi(\xi)) \Big|_{\xi \in K_r(0)} \\ &= (-1) \cdot (4\pi)^{-1} \cdot r^{-2} \cdot (4\pi r^2) \cdot \varphi(\xi) \Big|_{\xi \in K_r(0)} = -\varphi(\xi) \Big|_{\xi \in K_r(0)} \rightarrow -\varphi(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{B=\mathbb{R}^3 \setminus K_r(0)} -\gamma \Delta \varphi dV &= \int_{\partial K_r(0)} \left( \varphi \frac{\gamma}{\vec{n}} - \gamma \frac{\varphi}{\vec{n}} \right) d\sigma = -\varphi(\xi) \Big|_{\xi \in K_r(0)} - r \cdot \text{Max}(\text{grad}(\varphi)) \rightarrow -\varphi(0) - 0 \text{ für } r \rightarrow 0 \\ &\Rightarrow \int_{B=\mathbb{R}^3 \setminus K_r(0)} \gamma \Delta \varphi dV \rightarrow \varphi(0) \quad \text{für } r \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$\gamma(r) = -\frac{1}{4\pi r}$  ist also Greensche Funktion zu  $\Delta u(x) = f(x)$  in  $\mathbb{R}^3$  und  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$ . Daher können wir zu diesem jetzt hier dargestellten Problem gleich  $u(x)$  mit Hilfe dieser Greensche Funktion berechnen. Die dabei entstehende Formel ist bekannt unter dem Namen „Poissonsche Formel“.

**Korollar:**

**(Poissonsche Formel)**

**Vor.:**

$$\Delta u(x) = f(x) \text{ in } \mathbb{R}^3, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$$

**Beh.:**

$$u(x) = -\frac{1}{r\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(z)}{|x-z|} dz$$

**Bemerkung:**

Bei der Anwendung der Methode mit der Greenschen Funktion besteht das grosse **Problem** darin, die gesuchte **Greensche Funktion zu konstruieren**. Im uns gesetzten engen Rahmen ist es nicht möglich darauf weiter einzugehen. Der Leser möge dazu die sehr umfangreich vorhandene Fachliteratur über partielle Differentialgleichungen konsultieren.

Zu gewissen oft vorkommenden Differentialoperatoren und Randbedingungen findet man heute die zugehörigen Greenschen Funktionen auch in „Formeln- und Tafelbüchern“ tabelliert.



## 8.6 Bemerkung zur Delta-Funktion

Auf Seite 85 ist bemerkt worden, dass die früher gegebene Einführung der Delta-Funktion nicht ganz der sonst üblichen Art in der Mathematik entspricht. Daher soll hier die Sache nochmals auf eine andere Weise dargestellt werden.

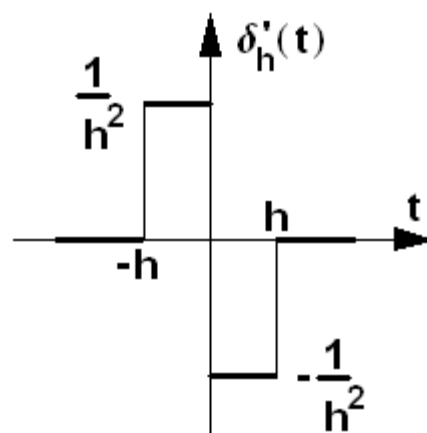
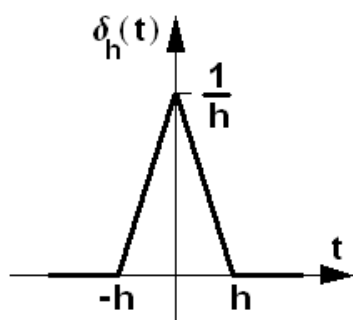
Die **Delta-Funktion**  $\delta(t)$  ist eine **verallgemeinerte Funktion**. Wir definieren sie hier wie folgt:

**Definition:** 
$$\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \delta_h(t),$$

wobei  $\delta_h(t)$  die im linken Bild unten dargestellte Funktion ist.

Die Delta-Funktion hat also an der Stelle  $t = 0$  einen „Pic“. Im rechten Bild ist die Ableitung  $\delta'_h(t)$  von  $\delta_h(t)$  gezeichnet.

**Definition:** 
$$\delta'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \delta'_h(t)$$

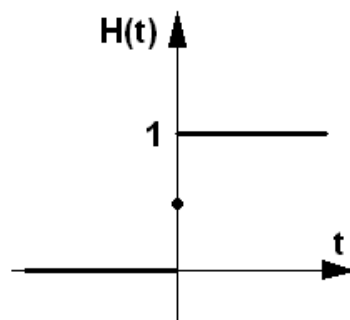


Die Ableitung der so definierten Delta-Funktion kann man hier mit Hilfe der linksseitigen und der rechtsseitigen Ableitung von  $\delta_h(t)$  gewinnen.

Weiter definieren wir hier die **Heaviside-Sprungfunktion** wie folgt:

**Definition:**

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



$H(t - a)$  ist verschobene Sprungfunktion mit Sprung an der Stelle  $t = a$ . Ebenso ist  $\delta(t - a)$  ist verschobene Delta-Funktion mit Pic an der Stelle  $t = a$ .

Wie man unter Verwendung von  $\delta_h(t)$ ,  $\delta_h'(t)$  u.s.w. und des Grenzübergangs nachvollziehen kann, haben  $\delta(t)$ ,  $\delta'(t)$  und  $H(t)$  u.s.w. die folgenden Eigenschaften:

1.  $t \neq 0 \Rightarrow \delta(t) = 0 \quad \delta(0) = +\infty$
2.  $\delta(t)$  ist gerade:  $\delta(t) = \delta(-t)$
3.  $\delta(at) = \frac{1}{a} \delta(t)$ ,  $a \neq 0$
4.  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ ,  $\delta(0) = +\infty$ ,  $\int_{-a}^a \delta'(t) dt = 0$  für  $a > 0$
5.  $\int_{-\infty}^{\infty} |\delta^{(n)}(t)| dt = +\infty$  für  $n \geq 1$
6.  $\int_{-\infty}^t \delta(q) dq = H(t)$
7.  $H(t) = \frac{1}{2} (\operatorname{sgn}(t) + 1)$
8.  $H'(t) = \delta(t) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}'(t) \Rightarrow \operatorname{sgn}'(t) = 2 H'(t)$
9.  $f(t) \delta(t - a) = f(a) \delta(t - a)$  für  $f$  stetig in  $t = a$  (denn  $\delta(t - a) = 0$ ,  $t \neq a$ )
10.  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - a) dt = f(a)$  für  $f$  stetig in  $t = a$ ,  $\int_{-\infty}^t \delta(q - a) dq = H(t - a)$
11.  $(f(t) - f(a)) \delta'(t - a) = f'(a) \delta(t - a)$  für  $f'$  stetig in  $t = a$   
 $\leadsto f(t) \delta'(t - a) = f(a) \delta'(t - a) + f'(a) \delta(t - a)$
12.  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta'(t - a) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) \delta(t - a) dt = -f'(a)$  für  $f'$  stetig in  $t = a$
13.  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta^{(n)}(t - a) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(t) \delta(t - a) dt = (-1)^{(n)} f^{(n)}(a)$  für  $f^{(n)}$  stetig in  $t = a$
14.  $f(t) \delta^{(n)}(t - a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(a) \delta^{(n-k)}(t - a)$
15.  $f * \delta^{(n)}(t) = f^{(n)}(t)$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$
16. U.s.w.

## 8.7 Ausblick

Der bis jetzt zum Thema „partielle Differentialgleichungen“ besprochene Stoff behandelt nur Grundschritte in dieses Gebiet. Weiterer grundlegender Stoff ist hier weggelassen worden. Speziell sei daraus auf folgende Gebiete hingewiesen:

1. Die Weiterführung der Methode der Greenschen Funktion und die Umformung von Differentialgleichungen in Integralgleichungen sowie deren Lösung. Zur Greenschen Funktion gehört die Theorie der Distributionen.
2. Weitere Methoden aus dem Gebiet der Variationsrechnung.
3. Behandlung der Wellengleichung, Methode von d'Alembert, Methode der Charakteristiken.
4. Diverse diskrete oder numerische Verfahren wie Taylor-Methoden oder die Methoden der finiten Elemente, die zum Teil an anderer Stelle dargestellt sind.
5. Diverse praktische Beispiele, auch aus dem Gebiet der Hydrodynamik, oder Diffusionsprobleme im Zusammenhang mit dem Bauwesen.

Der geneigte Leser ist gebeten, im Falle des Bedarfs solcher Kenntnisse wiederum auf die einschlägige Literatur zurückzugreifen, die in sehr reichlicher Masse vorhanden ist.



## Kapitel • Chapitre 9

# Mathematische Modellierung (Anhang 3) — Annexe 3 (sans traduction)

- *Ici, il y a pour le moment seulement le texte allemand à disposition. Momentanément, la traduction française manque encore.*

In diesem Kapitel sind einige Beispiele von praktischen Anwendungen aus dem Interessebereich von Ingenieuren dargestellt. Ein spezieller Augenmerk wird dabei auf die Darstellungen der Überlegungen bei den Modellbildungen gelegt, welche hier in der Regel zu Differentialgleichungen als Modelle der beschriebenen Realität führen.

## 9.1 Einige Kurven

### 9.1.1 Die Klothoide

#### Modellierung

Die **Klothoide** ist bekannt als diejenige Kurvenart, nach welcher u.a. Biegungen von Strassen geformt werden müssen, damit diese möglichst gefahrlos befahren werden zu können.

Zur Modellierung einer idealen Kurvenform verwenden wir folgende Überlegung: Will man z.B. mit einem Auto von einer geraden Strecke in eine Kurve einbiegen, so kann das nur unter der Bedingung geschehen, dass man ab Kurvenbeginn langsam und „gleichmässig“ am Steuerrad zu drehen beginnt. Aus Erfahrung weiss man, dass abrupte Drehungen am Steuerrad den Wagen zum Schleudern bringen können.

Die langsame und gleichmässige Drehung des Steuerrades wird dann über einen Zahnrad- oder Gelenkmechanismus übersetzt in eine langsame und gleichmässige Änderung des Winkels der Räder zur Mittelachse des Wagens. Statt der Mittelachse kann man auch eine andere Achse für die Betrachtung benutzen. So ist es statthaft zu sagen, dass die Winkeländerung der Ebene durch die Vorderräder beziehungsweise die Winkeländerung des Normalenvektors oder einer etwaigen vorderen Radachse pro Zeiteinheit konstant sein muss. Wenn wir annehmen, dass es sich um ein altmodisches Fahrzeug handelt, welches eine vordere, bewegliche und eine hintere, fixe Radachse besitzt, so muss bei einer gleichmässigen Drehung am Steuerrad der Winkel zwischen der hinteren und vorderer Radachse ebenso gleichmässig zunehmen.

Hört man auf mit der Drehung am Steuerrad, so bleibt der Winkel zwischen den Radachsen konstant und der Wagen fährt einen Kreis mit konstanter Krümmung, d.h. einer konstanten Änderung des Tangentenwinkels pro Zeiteinheit. Dreht man wieder gleichmässig am Steuerrad, so nimmt die Änderung des Tangentenwinkels gleichmässig zu, d.h. die Krümmung wird gleichmässig grösser. (Die Krümmung ist im Skript „Analysis“ definiert worden als die Änderung des Tangentenwinkels pro Bogenlänge, was bei konstanten Reisegeschwindigkeit gleichbedeutend ist mit der Änderung des Tangentenwinkels pro Zeit.)

Daher erheben wir zur Modellierung einer idealen gefahrlosen Kurve die Forderung, dass wegen der gleichmässigen Drehung am Steuerrad die Kurvenkrümmung beim Durchfahren mit konstanter niedriger Geschwindigkeit gleichmässig zunehmen muss.

Das ergibt mit  $\kappa$  = Krümmung und  $L$  = Bogenlänge folgende **Modellierungsbedingung**:

$$\frac{d\kappa}{dL} = c = \text{const.}$$

Aus dieser Differentialgleichung für  $\kappa(L)$  folgt:  $\kappa = c \cdot L + C_1$ .

Da beim Kurvenbeginn, d.h. für  $L = 0$ , die Krümmung  $\kappa$  gleich null sein muss, folgt:

$$\kappa(L) = c \cdot L$$

Sei  $\tau$  der Winkel zwischen der Tangente an die Kurve und der vorangegangenen geraden Strecke.

Dann gilt wegen der Definition der Krümmung:  $\kappa = \frac{d\tau}{dL} = c \cdot L \Rightarrow \tau = c \cdot L^2 + C_2$

Da  $\tau$  als Winkel der Tangente zur vorangegangenen geraden Strecke bei Kurvenbeginn null sein muss, folgt für  $L = 0$  dass gilt:  $0 = c \cdot 0^2 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$ . Damit wird:

$$\tau = c \cdot L^2$$

Wir betrachten die Kurve in einem Koordinatensystem mit der  $x$ -Achse parallel zur vorangegangenen geraden Strecke. Dann gilt an der Kurve die Beziehung:  $(\Delta L)^2 \approx (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$  mit  $\Delta x \approx \cos(\tau) \cdot \Delta L$

und  $\Delta y \approx \sin(\tau) \cdot \Delta L$ . Dabei ist  $\tau = c \cdot L^2$ . (Der Leser ist gebeten, sich selbst dazu eine Skizze zu machen.) Das führt zu

$$\begin{aligned} dx &= \cos(c \cdot L^2) dL \\ dy &= \sin(c \cdot L^2) dL \end{aligned}$$

Damit haben wir zwei separierte Differentialgleichungen vor uns. Die Integration ergibt:

$$\begin{aligned} x_0 &= \int_0^{L_0} \cos(c \cdot L^2) \cdot dL \\ y_0 &= \int_0^{L_0} \sin(c \cdot L^2) \cdot dL \end{aligned}$$

Als Vektor geschrieben erhalten wir die **Vektorfunktion der Klothoide** oder **Spinnlinie** oder auch **Cornu-Spirale** :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int_0^L \begin{pmatrix} \cos(c \cdot t^2) \\ \sin(c \cdot t^2) \end{pmatrix} dt$$

Allgemeiner werden zentrisch gestreckte solche Kurven ebenfalls **Klothoiden** genannt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \int_0^L \begin{pmatrix} \cos(c \cdot t^2) \\ \sin(c \cdot t^2) \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} a \sqrt{\frac{\pi}{2c}} \text{FresnelC}\left(\sqrt{c} \sqrt{\frac{2}{\pi}} L\right) \\ a \sqrt{\frac{\pi}{2c}} \text{FresnelS}\left(\sqrt{c} \sqrt{\frac{2}{\pi}} L\right) \end{pmatrix}$$

**Bemerkung:**

*FresnelC* und *FresnelS* sind die **Fresnel Cosinus**- und **Fresnel Sinus**-Integrale. In heute üblichen Computeralgebraprogrammen sind diese Funktionen implementiert und können daher verwendet werden.

Wir wollen hier nicht auf die technischen Feinheiten eingehen, mit welchen in der Verkehrstechnik die Klothoiden-Parameter behandelt und die Kurven damit eingeteilt werden. Erwähnt werden soll hier nur der Fall  $a = 1$  und  $c = \frac{1}{2}$ :

**Definition:**

Die Klothoide  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int_0^L \begin{pmatrix} \cos(\frac{1}{2} \cdot t^2) \\ \sin(\frac{1}{2} \cdot t^2) \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \sqrt{\pi} \text{FresnelC}\left(\frac{L}{\sqrt{\pi}}\right) \\ \sqrt{\pi} \text{FresnelS}\left(\frac{L}{\sqrt{\pi}}\right) \end{pmatrix}$  heisst **Einheitsklothoide**.

**Plot und Approximation**

Sir wollen nun einerseits die Einheitsklothoiden plotten. Andererseits ist es sehr einfach, die Fresnel-Integrale durch Potenzreihen darzustellen und diese im Vergleich zur exakten Kurve graphisch zu zeigen. Wir verwenden der Einfachheit halber dazu *Mathematica*:

**Input 1**

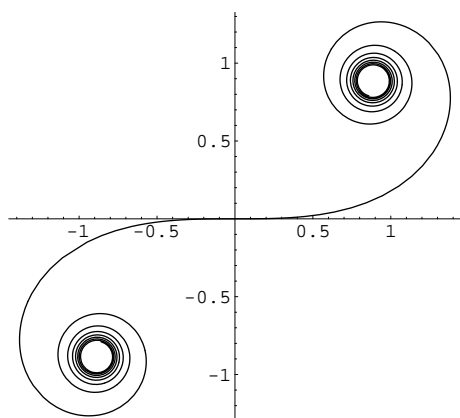
```
v[xL_]:= {Integrate[Cos[t^2 /2], {t,0,xL}], Integrate[Sin[t^2 /2], {t,0,xL}]};
ParametricPlot[Evaluate[v[xL]], {xL,-10,10}, AspectRatio->Automatic]
```

**Input 2**

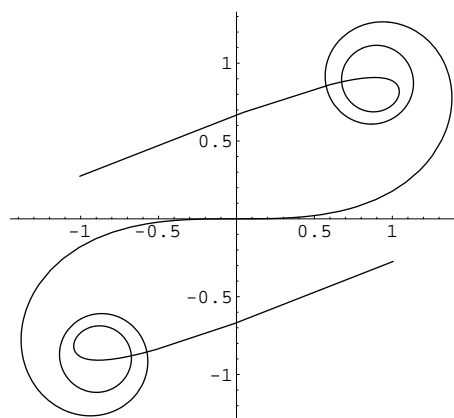
```
n=70; b=5.6;
vPot[xL_]:= {Integrate[Normal[Series[Cos[t^2 /2], {t,0,n}]], {t,0,xL}],
Integrate[Normal[Series[Sin[t^2 /2], {t,0,n}]], {t,0,xL}]};
p2=ParametricPlot[Evaluate[vPot[xL]], {xL,-b,b}, AspectRatio->Automatic]
```

**Input 3** (Überlagerung der beiden Graphiken)

```
Show[p1,p2]
```

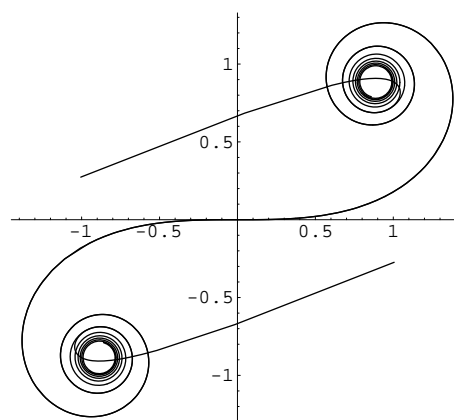
**Output**

Kurve exakt



Kurve mit Potenzreihe bis zur Ordnung 70

Rechts sieht man die Überlagerung der exakt gerechneten Kurve und derjenigen Kurve, welche mit Potenzreihen bis zur Ordnung 70 erzeugt worden ist. Die letztere reist plötzlich aus nach „Irgendwohin“, abhängig von der Abbruchordnung der Potenzreihe.

**9.1.2 Kettenline contra Seilkurve**

Auf Seite 278 haben wir herausgefunden, dass eine Kettenlinie in der Form einer Cosinus hyperbolicus-Funktion dargestellt beschrieben werden muss. Unter Berücksichtigung von Verschiebungen im Koordinatensystem ergibt sich:  $y(x) = a \cosh\left(\frac{x-x_0}{a}\right) + y_0$ .  $a$  ist dabei der Krümmungsradius im tiefsten Punkt der Kettenlinie.

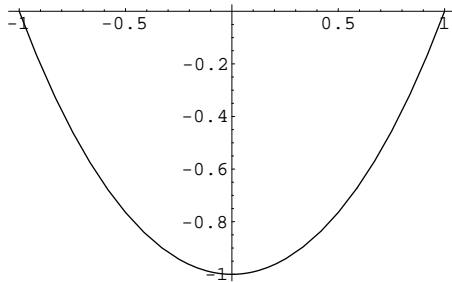


Zur Vereinfachung nehmen wir hier folgende Werte an:

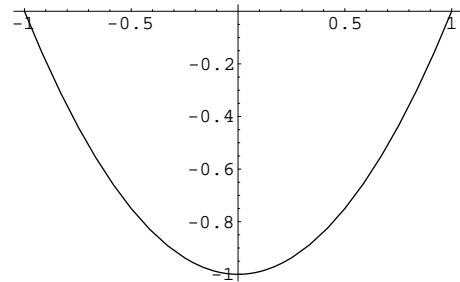
$$a = \frac{1}{\cosh(1) - \cosh(0)}, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = -\frac{\cosh(0)}{\cosh(1) - \cosh(0)} - 1$$

$$\leadsto y(x) = a \cosh\left(\frac{x - x_0}{a}\right) + y_0 = \frac{1}{\cosh(1) - \cosh(0)} \cosh(x) - \frac{\cosh(0)}{\cosh(1) - \cosh(0)} - 1 = \frac{\cosh(x) - \cosh(1)}{\cosh(1) - 1}$$

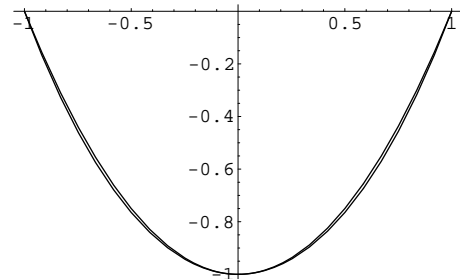
Zwischen  $x = -1$  und  $x = 1$  erhält man damit die nachstehend links gezeigte Graphik:



Rechts sieht man nun die Überlagerung der beiden obigen Bilder. Dieses Bild spricht für sich.



Berechnen wir die **Längen** der beiden Kurven, so erhalten wir hier für die Kettenlinie  $L_K \approx 2.47008$  und für die Parabel  $L_P \approx 2.45982$ . Die Abweichung bezogen auf  $L_K$  beträgt etwa 0.415 Prozent.



Die **Kettenlinie** haben wir mit Hilfe einer Energiebetrachtung hergeleitet. Sie ist durch einen **Cosinus hyperbolicus** gegeben. Nun wollen wir zeigen, dass wir mit einer anderen Modellierung über die Kräfte und Momente eine sogenannte **Seilkurve** erhalten, welche dann durch eine **Parabel** gegeben ist.

Zur **Modellierung** stellen wir uns auf einer Seilkurve zwei nahe beieinander gelegene Punkte  $P_i = P_i(x, y)$  und  $P_{i+1} = P_{i+1}(x + \Delta x, y + \Delta y)$  vor. (Der Leser mache sich dazu eine Skizze.) Die Distanz der Punkte, welche etwa der dazwischen liegenden Seillänge entspricht, beträgt  $\Delta L = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ . Wir nehmen weiter an, dass das Seil überall gleich dick sei mit dem Gesamtgewicht  $Q$ . Die Gewichtskraft pro Länge beträgt dann im Grenzwert  $q(l) = Q'(l) = \frac{dQ}{dl}$ , wobei  $l$  hier die Variable für die Länge ist.

Links im Punkt  $P_i$  hat man dann die in die Horizontal- und die Vertikalkomponente aufgegliederte Kraft  $\vec{F}_i = \begin{pmatrix} -F_H \\ -F_V \end{pmatrix}$ . Und rechts ist die Kraft  $\vec{F}_{i+1} = \begin{pmatrix} F_H + \Delta F_H \\ F_V + \Delta F_V \end{pmatrix}$ . Weiter greift am Seilstück zwischen  $P_i$  und  $P_{i+1}$  die Gewichtskraft  $\Delta Q = -q(x)\Delta x$  an. Da wegen der Gleichgewichtsbedingung für die Kräfte die Summe der Kräfte null sein muss, gilt:

$$\Delta F_H = 0, \quad \Delta F_V = q(x)\Delta x \Rightarrow q(x) = \frac{dF_V}{dx}$$

Weiter muss wegen der Gleichgewichtsbedingung für die Momente auf das kleine Seilstück zwischen  $P_i$  und  $P_{i+1}$  in  $P_i$  gelten (Momentensumme null):  $(F_V + \Delta F_V) \cdot \Delta x - (F_H + \Delta F_H) \cdot \Delta y = (q(x)\Delta x) \cdot \frac{\Delta x}{2}$ .

$$\leadsto F_V \cdot \Delta x + \Delta F_V \cdot \Delta x = F_H \cdot \Delta y + \Delta F_H \cdot \Delta y + \frac{q(x) \cdot (\Delta x)^2}{2} \rightarrow F_V dx = F_H dy$$

Hier sind quadratisch vorkommende Differentiale im Vergleich zu den nur linear vorkommenden ohne weitere Untersuchung gleich null gesetzt worden. Damit haben wir die separierte Differentialgleichung  $F_V dx = F_H dy$  und damit  $F_V = F_H \cdot \frac{dy}{dx}$  erhalten. Daraus ergibt sich durch ableiten:

$\frac{dF_V}{dx} = \frac{dF_H}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} + F_H \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = F_H \cdot y''(x)$ , denn  $\Delta F_H$  wurde ja als gleich null erkannt, womit  $\frac{dF_H}{dx} = 0$  gelten muss. Damit hat man wegen  $\frac{dF_V}{dx} = q(x)$  für die Seillinie die Differentialgleichung:

$$q(x) = F_H \cdot y''(x) \Rightarrow y''(x) = \frac{q(x)}{F_H}$$

Dabei war nach Voraussetzung  $q(l) = \text{const.}$  Ebenso ist  $F_H = \text{const.}$  Gehen wir hier unter der **Annahme** einer **schwachen Biegung** von der Approximation  $q(x) \approx q(l) = \text{const.}$  aus, so haben wir zwar einen Fehler in Kauf genommen. Damit vereinfacht sich aber die Differentialgleichung sehr und wir erhalten:

$$y''(x) = \text{const.} = \frac{q}{F_H} \Rightarrow y(x) = x^2 \cdot \frac{q}{F_H} + C_1 \cdot x + C_2 = C_1 \cdot x^2 + C_2 \cdot x + C_3$$

Somit haben wir tatsächlich unter der fehlerbehafteten Annahme  $q(x) \approx q(l)$  eine **Parabel** erhalten:

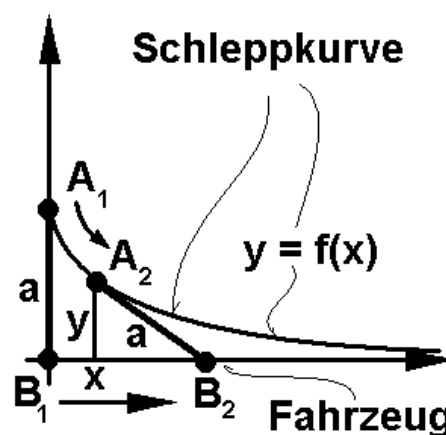
$$y(x) = C_1 \cdot x^2 + C_2 \cdot x + C_3$$

Dabei hängen  $C_1$ ,  $C_2$  und  $C_3$  von den zu wählenden Randbedingungen sowie den Seilbedingungen ab.

### 9.1.3 Eine Schleppkurve

Das nebenstehende Bild zeigt die Situation, welche wir behandeln wollen.

Ein Fahrzeug bewegt sich von  $B_1$  nach  $B_2$ . Hinten am Fahrzeug ist ein Baumstamm angehängt, welcher am Anhängepunkt angehoben ist und nur mit dem hintesten Ende mit dem Kontaktpunkt  $K$  bei  $A_1$  den Boden berührt. Wenn das Fahrzeug bei  $B_2$  ankommt, ist der Berührungspunkt  $K$  nach  $A_2$  gewandert.  $K$  beschreibt eine Schleppkurve. Man suche dafür die Kurvengleichung.



**Modellierung:**

Wir lesen aus der Skizze ab:  $(x_{B_2} - x)^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y'(x) = -\frac{y}{x_{B_2} - x} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$

$\leadsto \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$  ist eine separable Differentialgleichung:  $-dx = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy = \sqrt{\left(\frac{a}{y}\right)^2 - 1} dy$ ,

$-\int dx = \int \sqrt{\left(\frac{a}{y}\right)^2 - 1} dy \Rightarrow -x = \int \sqrt{\left(\frac{a}{y}\right)^2 - 1} dy + C$ . Da  $\frac{a}{y} \geq 1$  ist, können wir substituieren:

$$\frac{a}{y} = \cosh(t) \Rightarrow y = \frac{a}{\cosh(t)} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{a \sinh(t)}{\cosh^2(t)} \Rightarrow dy = -\frac{a \sinh(t)}{\cosh^2(t)} dt$$

$$\Rightarrow -x = \int \sqrt{(\cosh(t))^2 - 1} \cdot (-1) \cdot \frac{a \sinh(t)}{\cosh^2(t)} dt + C = - \int \sinh(t) \frac{a \sinh(t)}{\cosh^2(t)} dt + C = - \int \frac{a \sinh^2(t)}{\cosh^2(t)} dt + C$$

$$\Rightarrow x = a \int \tanh^2(t) dt + C = a(t - \tanh(t)) + C$$

Weiter folgt für  $t = 0$  aus  $\frac{a}{y} = \cosh(t) = \cosh(0) = 1 \Rightarrow y = a$  ( $\Leftrightarrow x = 0$ , siehe Skizze oben).

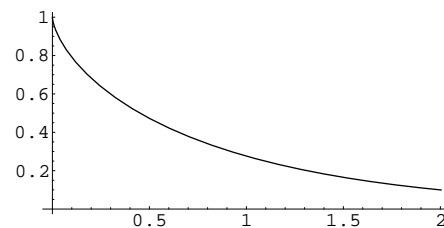
Das ergibt wiederum für  $t = 0$  resp.  $x = 0$ :

$$x = a(t - \tanh(t)) + C \Rightarrow 0 = a(0 - \tanh(0)) + C = a \cdot 0 + C = C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow x = x(t) = a(t - \tanh(t)).$$

Andererseits gilt:  $\frac{a}{y} = \cosh(t) \Rightarrow y = y(t) = \frac{a}{\cosh(t)}$ . Das ergibt:

$$\text{Schleppkurve: } \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t - \tanh(t)) \\ \frac{a}{\cosh(t)} \end{pmatrix}.$$

Wir ermitteln noch die genaue Kurvenform für den Wert  $a = 1$ :



Dazu der Input:

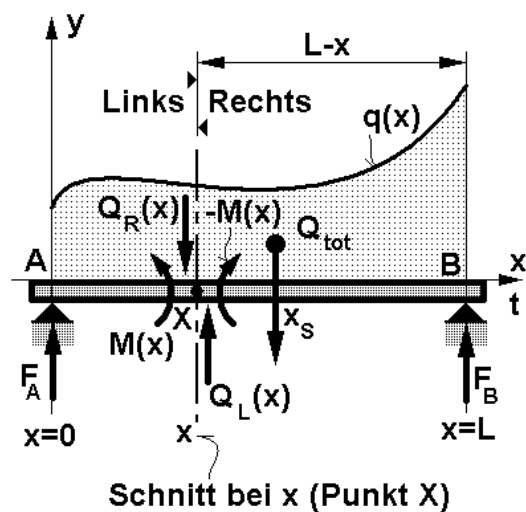
```
ParametricPlot[{t-Tanh[t],1/Cosh[t]},{t,0,3},AspectRatio->Automatic]
```

## 9.2 Balken und Biegelinie

### 9.2.1 Schnittkräfte und Momente am Balken

Wir betrachten einen gelenkig gelagerten Balken, wie er im nebenstehenden Bild dargestellt ist. Der Balken ist mit einer ortsabhängigen Streckenlast belastet, welche durch die Funktion  $q(x)$  gegeben ist. Für gewisse Betrachtungen kann man diese Streckenlast durch die aufsummierte Gesamtlast  $Q = \int_0^L q(x) dx$  ersetzen und davon ausgehen, dass  $Q$  im Schwerpunkt mit der  $x$ -Koordinate  $x_S$  angreift. Die Berechnung von  $x_S$  ist im Analysis-Skript behandelt worden. Wir aber wollen hier folgende Größen berechnen:

Einmal die **Auflagereaktionen**  $F_A$  und  $F_B$ . Dann aber auch die **Schnittkräfte**  $Q(x)$  und **Momente** oder **Biegemomente**  $M(x)$ . Diese definiert man wie folgt:



Wir denken uns den Balken irgendwo an einer Stelle  $x$  vertikal (wie in der Skizze gezeigt) entzweiggeschnitten. Danach bringen wir an den neuen Balkenenden, also an den Schnittenstellen, Kräfte  $Q(x)$  und  $M(x)$  so an, dass wieder Gleichgewicht herrscht. Diese Schnittkräfte und Momente existieren dann je paarweise. Auf der linken Seite (siehe Bild oben) nennen wir sie  $Q_L(x)$  und  $M_L(x)$ , auf der rechten Seite sind es  $Q_R(x)$  und  $M_R(x)$ . Dabei ist  $x \in [0, L]$ .

## Berechnungen

1. Gleichgewichtsbedingung in  $B$ : Die Summe der Momente muss null sein.

$$\leadsto F_A \cdot L - \int_0^L (L-x) \cdot q(x) dx = 0 \Rightarrow F_A = \frac{1}{L} \int_0^L (L-x) \cdot q(x) dx.$$

Weil wir später bei der Betrachtung des Schnittes an der fixen Stelle  $x$  (Punkt  $X$  auf der Achse) die Variable  $x$  für die Bezeichnung eben dieser Stelle benötigen, müssen wir die Laufvariable bei der Integration zur Unterscheidung von  $x$  anders benennen. Daher wählen wir als Integrationsvariable neu  $t$ , was am Resultat ja nichts ändert.

$$\Rightarrow F_A = \frac{1}{L} \int_0^L (L-t) \cdot q(t) dt$$

2. Gleichgewichtsbedingung in  $A$ : Ebenso muss auch hier die Summe der Momente null sein.

$$\leadsto -F_B \cdot L + \int_0^L t \cdot q(t) dt = 0 \Rightarrow F_B = \frac{1}{L} \int_0^L t \cdot q(t) dt.$$

$$\Rightarrow F_B = \frac{1}{L} \int_0^L t \cdot q(t) dt$$

3. Gleichgewichtsbedingung auf der linken Balkenseite zwischen  $A$  und  $X$ : Die Summe der Kräfte muss null sein.

$$\leadsto Q_L(x) - F_A + \int_0^x q(t) dt = 0 \Rightarrow Q_L(x) = F_A - \int_0^x q(t) dt.$$

$$\Rightarrow Q_L(x) = F_A - \int_0^x q(t) dt$$

Fügt man den Balken wieder zusammen, dann muss gelten:  $Q_R(x) = F_B - \int_x^L q(t) dt$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Q_L(x) + Q_R(x) &= F_A + F_B - \int_0^x q(t) dt - \int_x^L q(t) dt = \frac{1}{L} \int_0^L (L-t) \cdot q(t) dt + \frac{1}{L} \int_0^L t \cdot q(t) dt - \\ &\int_0^x q(t) dt - \int_x^L q(t) dt = \frac{1}{L} \int_0^L L \cdot q(t) dt - \frac{1}{L} \int_0^L t \cdot q(t) dt + \frac{1}{L} \int_0^L t \cdot q(t) dt - \int_0^L q(t) dt = 0 \leadsto \text{☺} \end{aligned}$$

Damit ist also  $Q_L(x) = -Q_R(x)$  richtig.

4. Gleichgewichtsbedingung auf der linken Balkenseite zwischen A und X: Die Summe der Momente muss null sein.

$$\begin{aligned} \leadsto M(x) - F_A \cdot x + \int_0^x (x-t) q(t) dt &= 0 \\ \Rightarrow M(x) = F_A \cdot x - \int_0^x (x-t) q(t) dt &= x \cdot \frac{1}{L} \int_0^L (L-t) \cdot q(t) dt - \int_0^x (x-t) q(t) dt. \\ \Rightarrow M(x) = x \cdot \frac{1}{L} \int_0^L (L-t) \cdot q(t) dt - \int_0^x (x-t) q(t) dt \end{aligned}$$

Wie bei den Kräften  $Q_L(x) = -Q_R(x)$  gilt, gilt auch bei den Momenten  $M(x) = M_L(x) = -M_R(x)$ . Der Nachweis sei dem Leser überlassen.

5. Die Lage des Momentenextremums und der Nullstelle von  $Q(x)$ :

Aus  $M(x) = F_A \cdot x - \int_0^x (x-t) q(t) dt$  folgt für ein etwaiges Extremum von  $M(x)$  die Beziehung

$$\begin{aligned} M'(x) = 0 &= F_A - \underbrace{(x-x)}_{=0} q(x) + \underbrace{(0-0)}_{=0} q(0) - \int_0^x \frac{d}{dx} ((x-t) q(t)) dt = F_A - \int_0^x q(t) dt = Q_L(x) \\ \Rightarrow (Q_L(x) = 0 &\Leftrightarrow M'(x) = 0) \end{aligned}$$

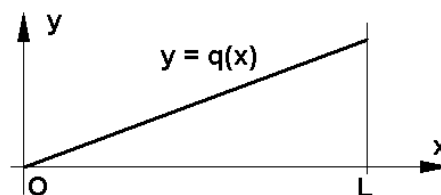
**Konsequenz:**

1.  $F_A = \frac{1}{L} \int_0^L (L-t) \cdot q(t) dt$
2.  $F_B = \frac{1}{L} \int_0^L t \cdot q(t) dt$
3.  $Q_L(x) = F_A - \int_0^x q(t) dt, \quad Q_L(x) = -Q_R(x)$
4.  $M(x) = x \cdot \frac{1}{L} \int_0^L (L-t) \cdot q(t) dt - \int_0^x (x-t) q(t) dt, \quad M(x) = M_L(x) = -M_R(x)$
5.  $Q_L(x) = 0 \Leftrightarrow M'(x) = 0$  (Extremum von  $M(x)$ !)

## Ein Beispiel

Sei  $q(x) = \frac{a}{L} \cdot x$ ,  $a$  = Steigung mal  $L$  (mit  $a = 1$  und  $L = 10$  für die Plots).

Dann können wir die Werte in den obigen Formeln berechnen:



$$1. \quad F_A = \frac{1}{L} \int_0^L (L-t) \cdot q(t) dt = \frac{a}{L^2} \int_0^L (L \cdot t - t^2) dt = \frac{a}{L^2} \left( \frac{L}{2} \cdot t^2 - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^L = \frac{a \cdot L}{6}$$

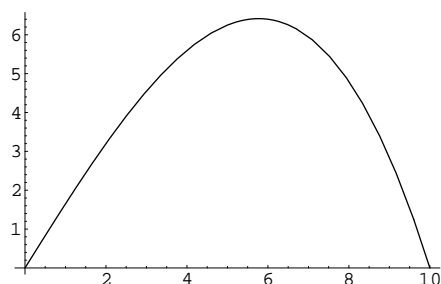
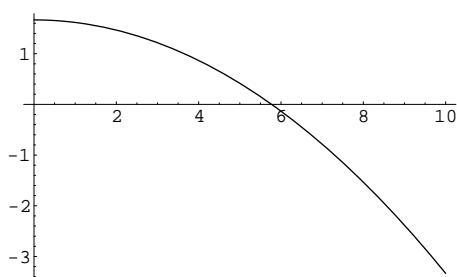
$$2. \quad F_B = \frac{1}{L} \int_0^L t \cdot q(t) dt = \frac{a}{L^2} \int_0^L t^2 dt = \frac{a}{L^2} \left( \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^L = \frac{a \cdot L}{3}$$

$$3. \quad Q_L(x) = F_A - \frac{a}{L} \int_0^x t dt = \frac{a \cdot L}{6} - \frac{a}{L} \left( \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^x = \frac{a}{2} \left( \frac{L}{3} - \frac{x^2}{L} \right)$$

$$4. \quad M(x) = F_A \cdot x - \frac{a}{L} \int_0^x (x-t) t dt = \frac{a \cdot L \cdot x}{6} - \frac{a}{L} \left( \frac{x t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^x = \frac{a \cdot L \cdot x}{6} - \frac{a}{L} \left( \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{3} \right)$$

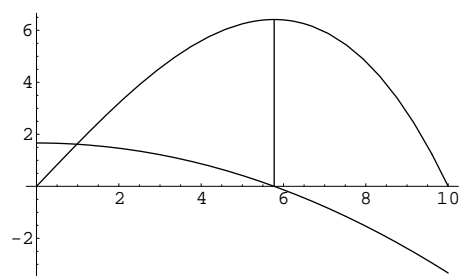
$$M(x) = \frac{a \cdot L \cdot x}{6} - \frac{a}{L} \frac{x^3}{6} = \frac{a}{6} \left( x L - \frac{x^3}{L} \right)$$

$$5. \quad Q_L(x) = 0 \Leftrightarrow M'(x) = 0 \leadsto 0 = M'(x) = \frac{a}{6} \left( L - \frac{x^2}{3L} \right) \Rightarrow x = \sqrt{\frac{L^2}{3}} = \frac{L}{\sqrt{3}}$$



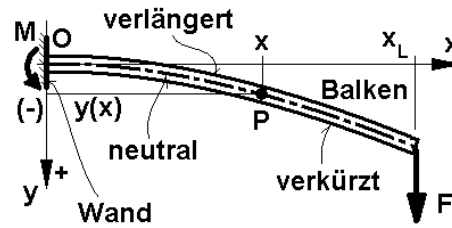
Das erste Bild oben zeigt den Verlauf von  $Q(x)$ , das zweite Bild zeigt denjenigen von  $M(x)$ .

Im dritten Bild rechts sieht man die Überlagerung der beiden Funktionen sowie die Übereinstimmung der Lage der Nullstelle von  $Q(x)$  mit und derjenigen des Maximums von  $M(x)$ .



### 9.2.2 Die Biegelinie des Balkens

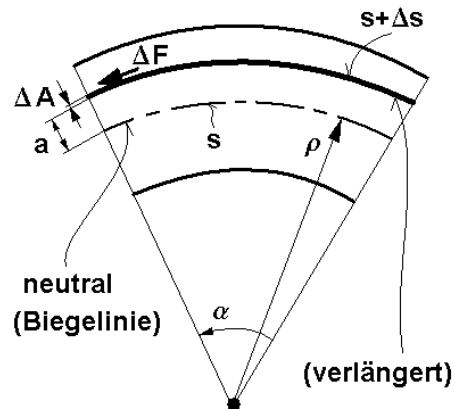
Bei der Biegung eines Balkens wird die der Biegerichtung näher gelegene Oberfläche verkürzt, jedoch die der Biegerichtung am weitesten entfernt gelegene Oberfläche wird verlängert. Zwischen beiden liegt die neutrale Fläche, auch „**neutrale Faser**“ oder „**Biegelinie**“ genannt.



In O hat man hier (Skizze) das **Einspannmoment**  $M = -x_L \cdot F$ . Und in P hat man das **Biegemoment**  $M(x) = -(x_L) \cdot F$ .

Dabei beachte man, dass hier (Skizze und Rechnungen) die Vorzeichen nach der Usanz der Baustatik gewählt worden sind, welche nicht der in der Mathematik sonst üblichen Konvention entspricht. Wenn man Konventionen beliebig in vernünftiger Weise ändert, so hat das keinen Einfluss auf die numerischen Resultate, solange man die Änderungen mit der notwendigen Strenge handhabt.

In der nebenstehenden Skizze ist ein Ausschnitt aus dem Balken stark übertrieben herausgezeichnet.



Wir **modellieren** nun die **Biegelinie**. Dazu leiten wir aus der nebenstehenden Skizze eine geometrische Relation ab, welche wir mit bekannten physikalischen Gesetzen und geometrischen Sachverhalten kombinieren. Es gilt:

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{(s + \Delta s) - s}{s} = \frac{\alpha \cdot (\rho + a) - \alpha \cdot \rho}{\alpha \cdot \rho}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta s}{s} = \frac{a}{\rho}.$$

Weiter gilt nach dem Hookschen Gesetz mit der Spannung pro Flächeneinheit  $\sigma$  und der spezifischen Verlängerung  $\varepsilon$  (auch Dehnung):

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon}, \quad \sigma = \frac{\Delta F}{\Delta A}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta s}{s}$$

$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$  ist die „Spannung pro Dehnung“ resp. der Elastizitätsmodul.

(Üblicherweise rechnet man z.B. für Baustahl mit  $E = 210'00 \text{ N/mm}^2$ .)

$$\leadsto \frac{\Delta F}{\Delta A} = \sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{\Delta s}{s} = E \cdot \frac{a}{\rho} \Rightarrow \Delta F = \frac{E}{\rho} \cdot a \cdot \Delta A. \text{ Damit ist der Beitrag von } \Delta F \text{ zu } M(x):$$

$$\Delta M = -a \Delta F = -\frac{E}{\rho} \cdot a^2 \cdot \Delta A \Rightarrow M \approx \sum \Delta M \rightarrow M(x) = \int_A dM = -\frac{E}{\rho} \cdot \int_A a^2 \cdot dA$$

Hier ist  $\int_A a^2 \cdot dA$  das faktorbefreite axiale Trägheitsmoment  $I_y \leadsto M(x) = -\frac{E}{\rho} \cdot I_y$ .

Der **eigentliche Modellierungsschritt zur Biegelinie** geschieht nun wie folgt: Den Radius  $\rho$  kann man gleichsetzen dem Krümmungsradius einer Funktion  $y = y(x)$ , welche die Biegelinie beschreibt:

$$\rho = \frac{(1 + (y'(x))^2)^{3/2}}{|y''(x)|} \approx \frac{(1 + 0)}{|y''(x)|} = \frac{1}{|y''(x)|} = \frac{1}{y''(x)}$$

Die hier verwendete Approximation ist zulässig für  $|y'(x)| \ll 1$ . Dabei ist bei dem oben skizzierten Balken wegen dem bekannten Krümmungsverlauf  $y''(x) > 0$ . (Die Biegung ist auf der Wandseite am grössten.) Damit haben wir:

$$M(x) = -E \cdot I_y \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{y''(x)}\right)} = -E \cdot I_y \cdot y''(x) \text{ und auch } M(x) = -(x_L - x) \cdot F. \text{ Daraus folgt:}$$

$$y''(x) = \frac{F}{E \cdot I_y} \cdot (x_L - x)$$

Dies ist die **vereinfachte Differentialgleichung für die Biegelinie**.

(Vereinfacht deshalb, weil unter der Annahme  $|y'(x)| \ll 1$  oben  $y'(x) = 0$  gesetzt worden ist.)

**Bemerkung:** Man beachte in unserem Umfeld die folgenden Formeln:

$$\sigma = E \cdot \frac{a}{\rho}, \quad M(x) = -E \cdot \frac{I_y}{\rho} \Rightarrow \sigma_x(x, a) = E \cdot \frac{M(x)}{I_y} \cdot a$$

Die **Lösung der Differentialgleichung der Biegelinie** ist geradezu trivial:

$$y'(x) = \int y''(x) dx = \frac{F}{E \cdot I_y} \cdot (x_L \cdot x - \frac{x^2}{2} + C_1)$$

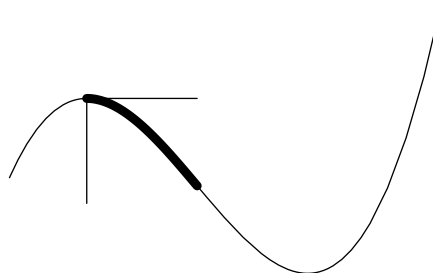
$$\Rightarrow y(x) = \int y'(x) dx = \frac{F}{E \cdot I_y} \cdot (x_L \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot x + C_2)$$

Dabei ist in unserer Skizze oben das Anfangswertproblem  $y(0) = 0$  gezeigt. Damit wird beim betrachteten Beispiel  $C_2 = 0$ . Da unser Balken horizontal eingespannt ist, stellen wir bei  $x = 0$  eine horizontale Tangente fest. Damit können wir schliessen:  $y'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$ . Damit ist unsere Biegelinie gegeben durch die Funktion:

$$y(x) = \frac{F}{E \cdot I_y} \cdot (x_L \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6})$$

Es ist zu beachten, dass wir hier mit den Konventionen der Statik arbeiten und dass somit die  $y$ -Achse nach unten und nicht nach oben zeigt.

Die nebenstehende Skizze zeigt die Biegelinie (dick gezeichnet) eingebettet in den globalen Funktionsverlauf der Parabel 3. Ordnung.

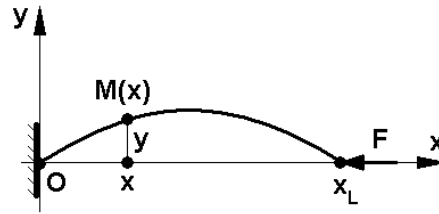




### 9.2.3 Zur Knickung

Wir betrachten die nebenstehende Skizze eines Stabes, welcher links rechtwinklig an eine Wand anliegt, auf den aber rechts eine Kraft  $F$  wirkt.

**Modellierung:** Als Stabform unter der gezeigten Biegebeanspruchung erwarten wir eine Biegelinie. Unter dieser Voraussetzung muss gelten:



$$y''(x) = -\frac{M(x)}{E \cdot I} = -\frac{F}{E \cdot I} \cdot y(x) \Rightarrow y'' + \frac{F}{E \cdot I} \cdot y = 0, \quad y(0) = y(x_L) = 0$$

Damit ist eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten für dieses Knickproblem gefunden. Die charakteristische Gleichung dafür lautet:

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \frac{F}{E \cdot I} &= 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{F}{E \cdot I}} \\ \Rightarrow y(x) &= C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{F}{E \cdot I}} \cdot x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{F}{E \cdot I}} \cdot x\right) \end{aligned}$$

Aus den Randbedingungen folgt:  $y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$ .  $y(x_L) = 0$  ist hier jetzt nur erfüllbar für  $x_L = \pi \sqrt{\frac{E \cdot I}{F}} + n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Die Grundlösung erhalten wir für  $n = 0$ . Wird in dieser Gleichung  $F$  kleiner, so wird  $x_L$  grösser. Umgekehrt muss man  $F$  so gross machen, dass bei einem gegebenen  $x_L^*$  das  $x_L$  der Formel gleich klein wird, damit die Annahme der Biegelinie (Modellannahme) erfüllt werden kann. Aus der Gleichung  $x_L = \pi \sqrt{\frac{E \cdot I}{F}}$  kann man daher die kritische Kraft berechnen, bei welcher die Modellannahme gerade gültig ist. Bei einer grösseren Kraft kann der Stab die Biegung dann nicht mehr im „Gleichgewicht“ halten: Er bricht. Für das kritische  $F$  finden wir

$$F_{kritisch} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{x_L^2}$$

Für  $y$  ergibt sich:

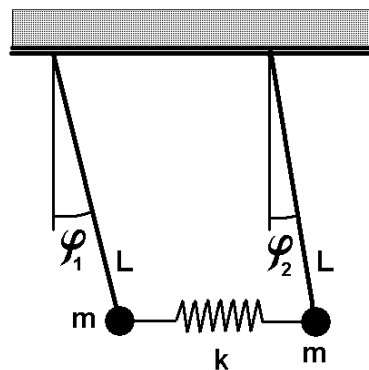
$$y(x) = C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{F}{E \cdot I}} \cdot x\right)$$

Der Koeffizient  $C_2$  lässt sich aus unseren Angaben nicht ermitteln.

## 9.3 Gekoppelte Pendel

### 9.3.1 Problemmodellierung

Wir betrachten das nebenan gezeigte gekoppelte Pendel. Zwei durch eine Feder mit der Federkonstanten  $k$  verbundene Massen  $m$  sind an gleich langen Stangen aufgehängt, welche wir als gewichtslos annehmen.  $\varphi_1, \varphi_2$  sind die Ausschlagswinkel. Diese nehmen wir als klein an, sodass  $L \cdot \sin(\varphi(t))$  den Ausschlag  $y(t)$  approximiert und die Höhenänderung  $h = L \cdot \cos(\varphi(t))$  einer Masse etwa konstant ist. Nun stellen wir durch Betrachtung der durch die Massen verursachten Drehmomente eine Gleichungen auf:



**Gekoppelte Pendel**

Rücktreibende Kraft infolge Auslenkung  $= -m g \sin(\varphi_2) \approx -m g \varphi_2$ .

Rücktreibendes Moment infolge Auslenkung  $= -L m g \sin(\varphi_2) \approx -L m g \varphi_2$ .

Federkraft  $= k L \sin(\varphi_2) \approx k L \varphi_2$ .

Entgegengesetzt wirkendes Moment der Feder  $\approx -L k L \varphi_2 = -k L^2 \varphi_2$ .

Kompensation dieses Moments durch das andere Pendel:  $k L^2 \varphi_1$ .

Gleichgewicht mit „Trägheitsmoment mal Winkelbeschleunigung“  $= (m L^2) \varphi_2''$ .

Gleichung für das zweite Pendel:  $(m L^2) \varphi_2'' = -L m g \varphi_2 - k L^2 \varphi_2 + k L^2 \varphi_1$ .

Gleichung für das erste Pendel:  $(m L^2) \varphi_1'' = -L m g \varphi_1 - k L^2 \varphi_1 + k L^2 \varphi_2$ .

Anfangsbedingungen:  $\varphi_1(0) = a, \varphi_1'(0) = 0, \varphi_2(0) = \varphi_2'(0) = 0$

$$\varphi_2''(t) + \frac{g}{L} \varphi_2(t) + \frac{k}{m} \varphi_2(t) - \frac{k}{m} \varphi_1(t) = 0,$$

$$\varphi_1''(t) + \frac{g}{L} \varphi_1(t) + \frac{k}{m} \varphi_1(t) - \frac{k}{m} \varphi_2(t) = 0,$$

$$\varphi_1(0) = a, \varphi_1'(0) = 0, \varphi_2(0) = 0, \varphi_2'(0) = 0$$

%

### 9.3.2 Beispiellösung mit *Mathematica*

Input:

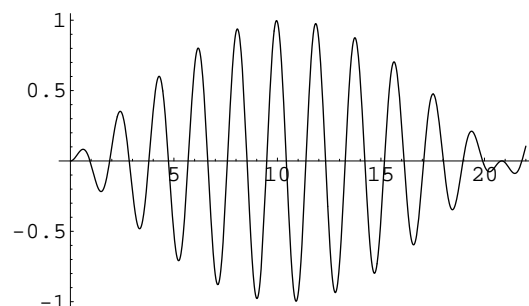
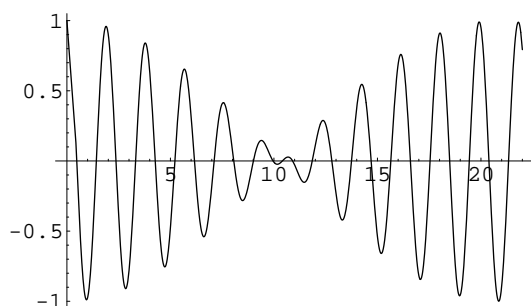
```
Remove["Global`*"];
links1 = LaplaceTransform[y2''[t] + g/L y2[t] - k/m y2[t] + k/m y1[t], t, s] /.
{LaplaceTransform[y1[t], t, s] -> Y1[s],
LaplaceTransform[y2[t], t, s] -> Y2[s], y1[0] -> a, y1'[0] -> 0, y2[0] -> 0, y2'[0] -> 0};
links2 = LaplaceTransform[y1''[t] + g/L y1[t] - k/m y1[t] + k/m y2[t], t, s] /.
{LaplaceTransform[y1[t], t, s] -> Y1[s],
LaplaceTransform[y2[t], t, s] -> Y2[s], y1[0] -> a, y1'[0] -> 0, y2[0] -> 0, y2'[0] -> 0};
solv=Solve[{links1 == 0, links2 == 0},{Y1[s],Y2[s]}] // Flatten;
U1[s]:=Y1[s]/. solv[[1]];
U2[s]:=Y2[s]/. solv[[2]];
u1[t_]:=InverseLaplaceTransform[U1[s],s,t]//Simplify; Print["u1(t) = ",u1[t]];
u2[t_]:=InverseLaplaceTransform[U2[s],s,t]//Simplify; Print["u2(t) = ",u2[t]];
u1P[t]:=u1[t]/. {g -> 10, m->1, L->1, k->1, a->1};
u2P[t]:=u2[t]/. {g -> 10, m->1, L->1, k->1, a->1};
Plot[Evaluate[u1P[t]],{t,0,25}];
Plot[Evaluate[u2P[t]],{t,0,25}];
```

Output:

$$u_1(t) = \frac{1}{4}a \left( 2 \cos\left(\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{L}} t\right) + e^{-\frac{\sqrt{2kL-gm}}{\sqrt{L}\sqrt{m}} t} + e^{\frac{\sqrt{2kL-gm}}{\sqrt{L}\sqrt{m}} t} \right)$$

$$u_2(t) = \frac{1}{4}a \left( 2 \cos\left(\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{L}} t\right) - e^{-\frac{\sqrt{2kL-gm}}{\sqrt{L}\sqrt{m}} t} \left( 1 + e^{\frac{2\sqrt{2kL-gm}}{\sqrt{L}\sqrt{m}} t} \right) \right)$$

$g - > 10$ ,  $m - > 1$ ,  $L - > 1$ ,  $k - > 1$ ,  $a - > 1$  ergibt die Plots:



## 9.4 Weitere Beispiele zur Modellierung

### 9.4.1 Ausblick auf weitere Beispiele und Themenbereiche

Weitere Beispiele zur hier betrachteten **mathematischen Modellierung** findet man gleich haufenweise in der einschlägigen Literatur, oft auch publiziert und frei zugänglich auf dem Internet. Eine inzwischen recht nützlich gewordene Adresse dort ist Wikipedia. Oder man „googelt“ die Sache. (Auf den allgemeinen, ausufernden Modellierungsbegriff wollen wir hier nicht eintreten.)

Einige Beispiele sind für den zugelassenen Benutzer passwortgeschützt gespeichert und abrufbar unter der Adresse

<http://rowicus.ch/Wir/Scripts/restricted/Linkp1.html>.

Hier noch ohne Anspruch auf Vollständigkeit ein Hinweis auf Themenbereiche aus der Technik und den Wissenschaften, deren Studium sich lohnt:

1. Hilfsmaterial: Diverse Trägheitsmomente von Rotationskörpern
2. Der Raketenflug
3. Der Fallschirmsprung
4. Kräfte am Schwungrad
5. Weitere Biegelinien
6. Weitere Knickprobleme
7. Die Ausflusszeiten von Flüssigkeiten, Fliessprobleme
8. Diverse Federschwingungen
9. Weitere Schwingungsprobleme, z.B. Schiffe, ein Turm u.s.w.
10. Wellenphänomene
11. Diffusionsprobleme
12. Die Temperaturverteilung in einem Stab
13. Wärmeabstrahlung
14. Allgemein das Thema „Modellbildung in der Physik“
15. Chemische Reaktionen
16. Wachstumsprobleme, speziell logistisches Wachstum
17. Populationsdynamik
18. Epidemiemodelle
19. Modelle aus der Pharmakologie
20. Das Räuber–Beute–Modelle, z.B. Lotka–Volterra–Gleichungen und allgemein **autonome Systeme von Differentialgleichungen, Stabilität und Gleichgewichtslösungen**
21. Wettermodelle
22. Modelle aus der Systemtheorie
23. Modelle aus den Wirtschaftswissenschaften
24. Modelle aus den Wirtschaftswissenschaften
25. Modelltheorie in Logik (und formaler Semantik)

Damit ist der Leser angehalten, sich über den bis anhin gebotenen Stoff hinaus eingehend mit der Fachliteratur zu beschäftigen. Diese Beschäftigung ist die eigentliche Tätigkeit während einem „Studium“! Ein kostenfreien Einstieg bietet;

[http://de.wikipedia.org/wiki/Mathematisches\\_Modell](http://de.wikipedia.org/wiki/Mathematisches_Modell).

### 9.4.2 Bemerkung zu autonomen und dynamischen Systemen

Autonome Systeme sind in der Praxis sehr bedeutsam. Obwohl diese unseren gesetzten Rahmen sprengen, gehen wir der Information wegen noch kurz darauf ein.

**Definition:**

Unter einem autonomen System wollen wir hier ein Differentialgleichungssystem verstehen, in dem eine unabhängigen Variable (hier mit  $t$  bezeichnet) nicht explizit vorkommt. Jedoch kommen von  $t$  abhängige Variablen  $x, y, \dots$  vor sowie auch Ableitungen von diesen nach  $t$ .

**Beispiel eines einfachen, allgemeinen, explizit gegebenen autonomen Systems 1. Ordnung:**

$$\begin{cases} x_t' = f(x, y) \\ y_t' = g(x, y) \end{cases}$$

Statt  $x_t'$  und  $y_t'$  benutzt man vor allem in der Physik auch die Bezeichnungen  $\dot{x}$  und  $\dot{y}$ .  $f$  und  $g$  sind gegebene **vernünftige** Funktionen.

Die Lösung in unserem Beispiel kann man als Vektor  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  verstehen. Damit haben wir **Kurven** oder **Bahnen** über einem Intervall  $I$  für  $t \in I$ . Da wir hier in der Regel Anfangswertprobleme betrachten, können wir von  $I = [0, \infty]$  ausgehen. Allgemeiner und trivialerweise gilt jedoch:

Mit einer Lösung  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  ist auch  $\begin{pmatrix} x(t-c) \\ y(t-c) \end{pmatrix}$  Lösung, wobei  $c$  eine Konstanten ist.

Wegen  $\frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{dy}{dx}$  gilt:

$$y_x' = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}, \quad |g(x, y)| + |f(x, y)| > 0$$

An den Punkten  $(x, y)$ , an denen  $y_x'$  definiert ist, hat man lokal eine eindeutige Lösung. An den Punkten  $(x_k, y_k)$  mit  $|g(x_k, y_k)| + |f(x_k, y_k)| = 0$ , d.h. für  $g(x_k, y_k) = f(x_k, y_k) = 0$ , wo also  $y_x'$  nicht definiert ist, können sich die Lösungskurven jedoch schneiden.

**Definition:**

Konstante Lösungen  $\vec{v}(t) = \vec{a}$  heissen **Gleichgewichtslösungen** oder **stationäre Lösungen**.

Da für Gleichgewichtslösungen  $\vec{v}(\vec{t})' = \vec{a}' = \vec{0}$  gilt, definieren wir:

**Definition:**

Punkte  $P(x_k, y_k)$  mit  $\overrightarrow{OP} = \vec{a}$  = stationäre Lösung heissen **Gleichgewichtspunkte** oder **stationäre Punkte**.

In stationären Punkten muss eine Lösung nicht mehr eindeutig sein. Es können sich dort mehrere Bahnkurven treffen.

Weiter definieren wir selbstverständlich:

**Definition:** Gleichgewichtspunktfreie Lösungen mit geschlossenen Bahnkurven nennen wir **periodische Lösungen**.

Geschlossene Bahnkurven können wegen der Definition des Funktionsbegriffs nicht in der Form  $y = f(x)$  dargestellt werden. Eine vereinfachte Parametrisierung mit  $x = t$  ist daher nicht allgemein möglich.

Wir betrachten nun konkret ein einfaches, jedoch instruktives **Beispiel**:

$$\begin{array}{lcl} x_t' & = & -2y \\ y_t' & = & +3x \end{array}$$

Daraus erhalten wir:  $y_x' = -\frac{3x}{2y} \Rightarrow y dy = -\frac{3}{2} x dx \Rightarrow \int y dy = -\frac{3}{2} \int x dx + C$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} y^2 = -\frac{3}{2 \cdot 2} x^2 + C \Rightarrow y_{1,2}(x) = \pm \sqrt{C - \frac{3}{2} x^2} \text{ oder } \frac{y^2}{C \cdot 3} + \frac{x^2}{C \cdot 2} = 1 \rightsquigarrow \text{Ellipse!}$$

Im weiteren Rahmen sind autonome Systeme Spezialfälle von **dynamischen Systemen**. Solche wiederum sind mathematische Modelle von zeitabhängigen Prozessen. Beispiele dafür finden wir bei Pendelbewegungen, in Klimamodellen oder in der theoretischen Biologie z.B. bei Räuber–Beute–Modellen, bei Epidemien, allgemeiner bei Populationsdynamik oder auch bei chemischen Reaktionen.

Ein damit in Zusammenhang stehender Begriff ist noch der des Phasenraums (Zustandsraum). Dabei handelt es sich um einen mathematischen Raum, der von den zeitlich veränderlichen Variablen eines dynamischen Systems aufgespannt wird.

Bezüglich der heute sehr zahlreich vorhandenen Literatur über dynamische Systeme ist der Leser gebeten, sich selbst auf die Suche nach einem für ihn in seiner jeweiligen Situation zu seinen Voraussetzungen passenden geeigneten Werkes zu machen. Dasselbe gilt für die im Zusammenhang mit autonomen Systemen wichtige Frage der **Stabilität der Lösungen**.

# Kapitel • Chapitre 10

## Anhang 4 — Annexe 4

### 10.1 Hinweise – Indications

#### 10.1.1 Häufig verwendete Abkürzungen – Abréviations fréquemment utilisées

**Vor.** • *Hyp.*

**Beh.** • *Thèse*

**Bew.** • *Pre.*

$\vec{x} \cdot \vec{y}$ ,  $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$

...

Voraussetzung • *Hypothèse*

Behauptung • *Thèse*

Beweis • *Preuve*

Skalarprodukt • *Produit scalaire*

...

#### 10.1.2 Literatur — Littérature

Hier eine kleine Auswahl, die jeweils den grössten Teil des gesamten Stoffes abdeckt:

...

Leupold u.a., Mathematik 1, 2

Swobowsky, Analyse

Swobowsky, Calculus

Glyn James, Modern Engineering

Mathematics,

Glyn James, Advanced Modern

Engineering Mathematics ...

• *Voilà un choix limité qui concerne la plus grande partie de la matière:*

...

*Leupold u.a., Mathematik 1, 2*

*Swobowsky, Analyse*

*Swobowsky, Calculus*

*Glyn James, Modern Engineering*

*Mathematics,*

*Glyn James, Advanced Modern*

*Engineering Mathematics ...*

Ende • Fin