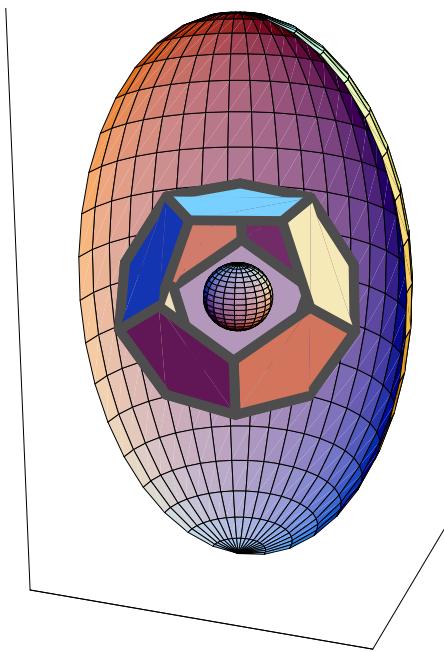


Script ◇ Math ◇ Ing  
◇ Pflichtwahlfach ◇ Sonnenuhren ◇  
◇ kurz & bündig ◇



**Scripta monolingua nach dem Inversionsprinzip im 3. Studienjahr an der  
HTA Biel (neu HTI/ HSB)**

Deutsche Fassung (aufgrund des bisherigen Bedarfs)

von

Rolf Wirz

BFH-AHB, BFH-TI (alt HSB/ HTI, HTA Biel-Bienne)

V.2.07.4 / Umfang vom 1. Januar 2008

Produziert mit PCTEX, diverser Graphic–Software und *Mathematica* und auf WIN98/ WIN XP.

*Du gleichst dem Geist den Du begreifst . . . nicht mir . . .*

*Goehte, Faust*

*Zwei Dinge erfüllen das Gemüt mit immer neuer und zunehmender Bewunderung und Ehrfurcht, je öfter und anhaltender sich das Nachdenken damit beschäftigt: Der bestirnte Himmel über mir und das moralische Gesetz in mir.*

*Kant*

*Geh mit aus der Sonne!*

*Diogenes von Sinope, im Fass*

*Mach es mit der Sonnenuhr, zähl die heitern Stunden nur*

*Gassenhauer*

Aktuelle Adresse des Autors (2007):

Rolf W. Wirz-Depierre

Prof. für Math.

Berner Fachhochschule (BFH), Dep. AHB und TI

Pestalozzistrasse 20

Büro B112 CH-3400 Burgdorf/BE

Tel. ++41 (0)34 426 42 30 / intern 230

Mail: Siehe <http://rowicus.ch/Wir/indexTotalF.html> unter „Koordinaten von R.W.“

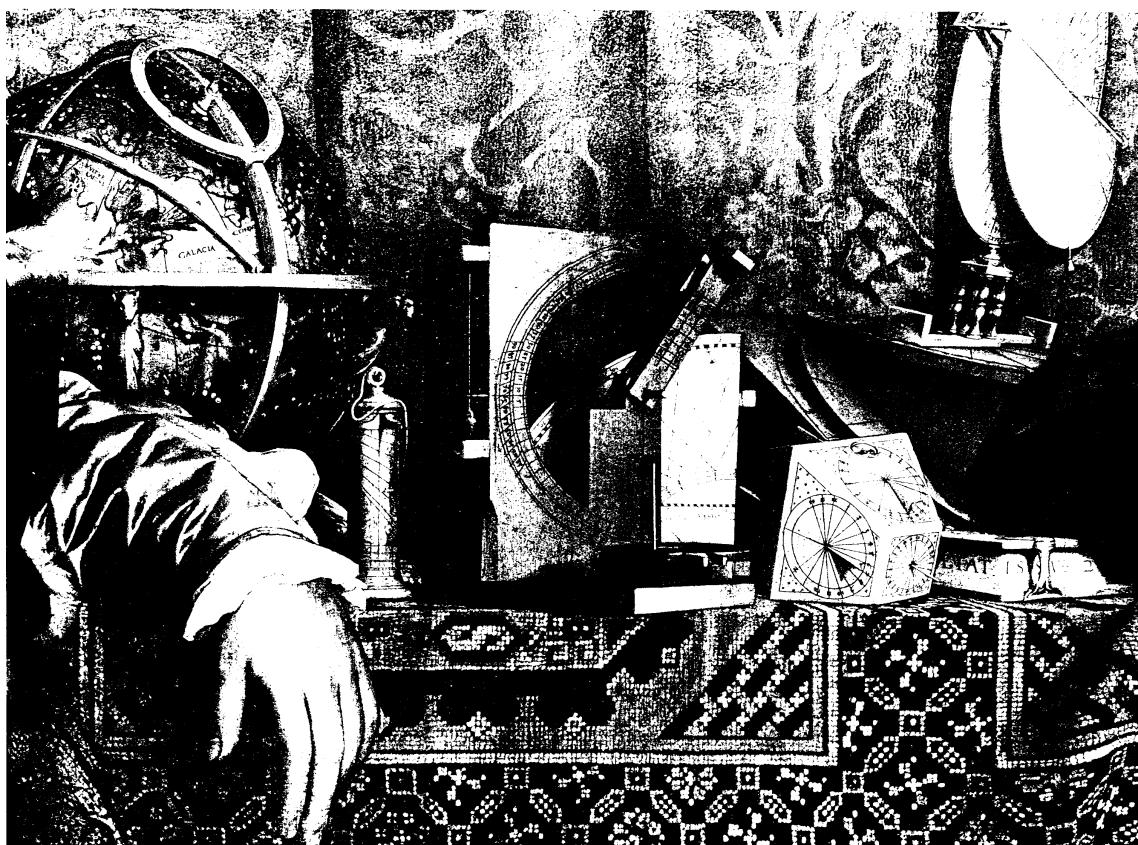
(Alt: Ingenieurschule Biel (HTL), Ing'schule des Kt. Bern, Fachhochschule ab 1997) // BFH HTA Biel // BFH HT/

Die Urheberrechte für das verwendete graphische Material gehören dem Autor.

©2003/ 04/ 05 / 07

# Mathematik und Konstruktion von Sonnenuhren

Abbildung 1: Astronomie-Instrumente aus der Renaissance-Zeit. (vgl. Bildnachweis Seite 132)



# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Organisatorisches – Quant à l'organisation</b>	<b>1</b>
<b>2 Grundlagen</b>	<b>3</b>
2.1 Astronomische Begriffe und Situation . . . . .	3
2.1.1 Koordinatensysteme . . . . .	3
2.1.2 Bewegung von Erde und Sonne . . . . .	6
2.1.3 Zeit . . . . .	7
2.1.4 Mond und Monat . . . . .	11
2.2 Sonnenuhren . . . . .	12
<b>3 Stabsonnenuhren</b>	<b>13</b>
3.1 Äquatoriale Sonnenuhr . . . . .	13
3.1.1 Poluhr, Ombrix . . . . .	13
3.1.2 Ombrix weg vom Pol . . . . .	13
3.1.3 Zylindrisches Zifferblatt . . . . .	15
3.1.4 Schiefer Ombrix . . . . .	16
3.1.5 Das Problem des zu kleinen Zifferblatts . . . . .	19
3.1.6 Geometrische Konstruktion des Ombrix-Zifferblatts . . . . .	20
<b>4 Prinzip und Struktur von Punktsonnenuhren</b>	<b>21</b>
4.1 Zur Berechnung des Schattens des Stabendes . . . . .	21
4.1.1 Die Grösse des Schatten eines Loches . . . . .	21
4.1.2 Der Schatten eines Loches im Horizontsystem . . . . .	22
4.2 Gnomonische Projektion . . . . .	23
4.2.1 Horizontsystem der Astronomen mit Azimut zum Süden . . . . .	23
4.2.2 Fixes Äquatorsystem der Astronomen (Ortsäquatorsystem) . . . . .	23
4.2.3 Das Prinzip der gnomonischen Projektion . . . . .	24
4.2.4 Die Berechnung der Koordinaten bei der gnomonischen Projektion . . . . .	26
4.2.5 Koordinatentransformation . . . . .	27
4.3 Der Weg der Sonne im Tierkreis, Transformationen, Formeln . . . . .	33
4.3.1 Wichtige Konstanten und Daten zum Sonnenlauf . . . . .	33
4.3.2 Wichtige Koordinatentransformationen . . . . .	35
4.3.3 Koordinatentransformation für beliebige Lagen . . . . .	41
4.3.4 Sonnenauf- und Untergang und Deklination . . . . .	46
4.4 Sphärische Trigonometrie . . . . .	48
4.4.1 Begriffe . . . . .	48
4.4.2 Eigenschaften, Sätze . . . . .	49
4.4.3 Formeln für die Verpfanzung . . . . .	51
4.5 Ellipsenbeziehungen und Flächensatz . . . . .	53
4.5.1 Die Erde im Ekliptikalsystem . . . . .	53
4.5.2 Beziehungen an der Ellipse . . . . .	53

4.5.3	Keplers Flächensatz . . . . .	58
4.5.4	Zeitgleichung und Deklinationsbestimmung . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Berechnung von Zifferblättern, Gestaltung</b>	<b>77</b>
5.1	Ausgestaltung einer Sonnenuhr an einem einfachen Beispiel . . . . .	77
5.2	Programm–Module (z.B. zur Verpfanzung nichthorizontaler Zifferblätter) . . . . .	78
5.2.1	Arbeitsprogramm . . . . .	78
5.2.2	Lauffähige und getestete Module . . . . .	78
5.3	Sonnenuhr für die mittlere Zeit . . . . .	89
5.4	Sonnenuhr für die Zonenzeit . . . . .	89
5.5	Sonnenuhr für babylonische und italienische Stunden . . . . .	90
5.6	Sonnenuhr für antike Stunden . . . . .	96
5.7	Sonnenuhr für die Sternzeit . . . . .	98
<b>6</b>	<b>Besondere Sonnenuhren und andere</b>	<b>105</b>
6.1	Brunnensonnenuhr . . . . .	105
6.2	Analematische Sonnenuhr . . . . .	106
6.3	Sonnenkompass . . . . .	107
6.4	Bifiliaruhr . . . . .	107
6.5	Ägyptische Sonnenuhr . . . . .	107
6.6	Zylindersonnenuhr . . . . .	107
6.7	Höhensonnenuhren . . . . .	110
6.8	Sonnenglobus . . . . .	110
6.9	Walzensonnenuhr . . . . .	110
6.10	Helios . . . . .	110
6.11	Astrolabische Sonnenuhr . . . . .	111
6.12	Sonnenuhr nach Regiomontanus . . . . .	111
6.13	Sonnenuhr von Ozanam . . . . .	111
6.14	Breitenunabhängige Sonnenuhr . . . . .	111
6.15	Kombinierte Sonnenuhren . . . . .	112
6.16	Monduhren . . . . .	112
6.17	Ausblick . . . . .	112
6.17.1	Ein Plot–Beispiel . . . . .	113
6.17.2	Zur Durchlaufrichtung der Schlaufen . . . . .	113
<b>7</b>	<b>Zeitgenössische Stimmen und Anschauungsmaterial</b>	<b>115</b>
7.1	Zwei Artikel aus der Zeitung . . . . .	115
7.2	Beispiele spezieller existierender Uhren . . . . .	119
<b>8</b>	<b>Anhang: Mathematica-Material, Module</b>	<b>129</b>

# Kapitel 1

## Organisatorisches – Quant à l'organisation

### Kurze Übersicht

1. Organisation, Rahmen
2. Stoff
3. Ziel, Weg, Methoden, Feedback, Team
4. Übungen, Selbststudium
5. Lerntechnik, Arbeitstechnik, Selfmanagement
6. Rechte und Pflichten des Studenten und der Schule
7. Prinzipien, Grundsätze
8. Rechner, Computer, Mathematiksoftware
9. Semesterorganisation (Noten, Prüfungsreglement, formale Anforderungen, Benotungskriterien, Benotung der Projekte, Arbeitsnachweismappe, Kurssprecher, Kursbetreuer, Kopierchef, Sprechstunden)
10. Hilfsmittel (Bibliothek, Taschenrechner, Mathematiksoftware, Literatur)
11. Zeitplanung
12. Einführung
  - (a) Modell und Wirklichkeit
  - (b) Geschichtlicher Rahmen und Auftrag

**Vorausgesetzte Mathematikkenntnisse:**

Euklidsche Geometrie, Projektionen, Vektorrechnung, Koordinatensysteme, Matrixmultiplikation, Drehmatrizen, Grundbegriffe der Analysis (z.B. Potenzreihen, Newton–Algorithmus), Umgang mit Computern (mindestens eine Programmiersprache, am besten *Mathematica*).

Eine Einführung in *Mathematica* findet man zur Zeit in den Kurs–Files des Autors unter:

<http://www.rowicus.ch/Wir/MathemDF/Mathem.html>

Für eine Bearbeitung (Run) ist das *Mathematica*–Programm der Firma Wolfram notwendig.

*Weiter ist ein Interesse an der Sache notwendig, da sonst kein praktisches Ziel erreicht werden kann.*

# Kapitel 2

## Grundlagen

### 2.1 Astronomische Begriffe und Situation im kosmischen Geschehen

#### 2.1.1 Koordinatensysteme

Begriffe:

**Kartesisches Koordinatensystem:** Bekannt aus der Vektorgeometrie.

**Sphärisches Koordinatensystem:** Bekannt aus der Vektorgeometrie und Analysis.

**Himmelssphäre:** Gedachte Kugel mit der Erde im Zentrum (vgl. antikes Weltbild).

**Geographisches Koordinaten- system:** Grundebene durch Äquatorgrosskreis (Grundkreis). Dazu gehören im Raum Nord- und Südpol.  
⇒ **geographische Breite** = Winkelabstand vom Grundkreis oder vom Pol ⇒ Breitenkreise.  
**Längskreise (Meridiane)** = Grosskreise von Pol zu Pol. Ausgangspunkt: Nullmeridian durch Greenwich ⇒ **geographische Länge**.

**Zenit:** Punkt auf der Himmelssphäre auf der Vertikalen *über* dem Beobachter (oberer Pol).

**Nadir:** Punkt auf der Himmelssphäre auf der Vertikalen *unter* dem Beobachter (unterer Pol).

**Meridiane Ebene (Meridian):** Ebene die bestimmt ist durch den Nord- und Südpunkt des Horizonts sowie den Zenit.

**Nordpunkt des Horizonts:** Punkt auf der Himmelsphäre in Richtung Norden, wenn sich der Beobachter an einem beliebigen Punkt der Erde (ausser an einem Pol) befindet.

<b>Südpunkt des Horizonts:</b>	Punkt auf der Himmelsphäre in Richtung Süden, wenn sich der Beobachter an einem beliebigen Punkt der Erde (ausser an einem Pol) befindet.
<b>Horizontsystem:</b>	Natürliches System des Beobachters. Grundkreis = Horizont. Oberer Pol = Zenit. Unterer Pol = Nadir. Längskreise: Grosskreise durch Zenit = Vertikalkreise oder Höhenkreise. <b>Nulllängskreis = Vertikale durch den Südpunkt = Meridian.</b>
<b>Koordinaten: Höhe und Azimut.</b>	
<b>Höhe:</b>	Winkel vom Horizont nach oben zum Objekt.
<b>Azimut:</b>	Winkel zwischen Vertikalen durch das Objekt und Meridian. (Links- und Rechtssysteme)
<b>Windrose der Astronomen:</b>	Azimut $a$ von der Südrichtung aus zum Objekt im Uhrzeigersinn gemessen.
<b>Windrose der Geometer und Navigatoren:</b>	Azimut $a_n$ von der Nordrichtung aus zum Objekt im Uhrzeigersinn gemessen, $a_n = a + 180^\circ$ .
<b>Knoten:</b>	Schnittlinie zweier Ebenen.
<b>Äquatorsystem:</b>	Projektion des Erdnetzes vom Erdmittelpunkt aus an den Himmel (festes System, bewegliches System).
<b>Festes Äquatorsystem:</b>	Grundkreis = Himmelsäquator fix zu Erde, Nord- und Südpol = Verlängerung der Erdachse. Null-Längenkreis = Grosskreis Pol-Zenit-Südpunkt = Meridian. Nordpol sehr nahe beim Polarstern. Koordinaten: <b>Deklination</b> und <b>Stundenwinkel</b> . (Verwendung: Astronomie, Fernrohre.)
<b>Deklination <math>\delta</math>:</b>	Abstand vom Äquator. $\delta$ bleibt für einen Stern im Laufe des Tages unverändert. ( $\delta$ ist für einen Stern fix am Himmel.)
<b>Stundenwinkel <math>t</math>:</b>	Abstand des Längskreises durch ein Objekt vom Meridian. Links- und Rechtssysteme. $t$ durchläuft im Laufe des Tages alle Werte. $t$ wird meist nicht im Gradmass, sondern im Zeitmass gemessen (z.B. seit dem Meridiandurchgang eines Sterns vergangene Zeit).
<b>Bewegliches Äquatorsystem:</b>	Grundkreis = Himmelsäquator, Nord- und Südpol = Verlängerung der Erdachse. Null-Längenkreis = Stundenkreis durch Frühlingspunkt. Koordinaten: <b>Deklination</b> und <b>Rektaszension</b> . (Verwendung: Astronomie, Kataloge.)
<b>Frühlingspunkt:</b>	Ort der Sonne an der Sphäre zu Frühlingsbeginn = Schnittpunkt der Sonnenbahn mit Äquatorebene.

<b>Rektaszension <math>\alpha</math>:</b>	Winkelabstand der Stundenkreise durch das Objekt (z.B. Stern) und Frühlingspunkt. ( $\alpha$ ist für einen Stern fix am Himmel.)
<b>Stundenwinkel</b>	
<b>Frühlingspunkt:</b>	$\Theta = t + \alpha$
<b>Ekliptik:</b>	Bahn der Sonne im Laufe des Jahres resp. Erdbahn = Finsternislinie (griech. ekliptis). Mit „Finsternislinie“ wird mitgeteilt, dass nur entlang dieser Linie Sonnen- und Mondfinsternisse stattfinden können.
<b>Schiefe der Ekliptik <math>\varepsilon</math>:</b>	Neigung der Ekliptik gegen den Äquator = Abstand Nordpol–Ekliptikpol $\equiv 23.5^\circ$ .
<b>Ekliptikebene:</b>	Erdbahnebene oder Sonnenbahnebene.
<b>Erdbahn um Sonne:</b>	Ca. Ellipse. Für die Mechanik muss der Schwerpunkt Erde–Mond betrachtet werden! Dieser liegt etwa 3/4 Erdradien vom Erdmittelpunkt entfernt, d.h. noch innerhalb der Erde. (Erde–Mond–Sonne: Dreikörperproblem.)
<b>Perihel:</b>	Sonnennächster Punkt.
<b>Aphel:</b>	Sonnenfernster Punkt.
<b>Perigäum:</b>	Kleinste Entfernung Erde–Mond.
<b>Apogäum:</b>	Grösste Entfernung Erde–Mond.
<b>Wahre Anomalie:</b>	Winkel von der Sonne aus gesehen zwischen Perihel und Erde.
<b>Ekliptikalsystem:</b>	Grundkreis = Ekliptik. Null–Längenkreis = Grosskreis durch Frühlingspunkt $\Rightarrow$ Schnittpunkt Äquator–Ekliptik. Koordinaten: <b>Ekliptikale Breite <math>\beta</math></b> und <b>Ekliptikale Länge <math>\lambda</math></b> . (Rechtssystem, Verwendung: Mechanik des Planetensystems.)
<b>Galaktisches System:</b>	Grundkreis = galaktischer Äquator, 0 in Milchstrassenebene. Null–Längenkreis alt $\Rightarrow$ Schnittpunkt mit Äquatorebene. Null–Längenkreis neu $\Rightarrow$ Zentrum der Milchstrasse. Koordinaten: <b>Galaktische Breite <math>b^I</math>, <math>b^{II}</math></b> und <b>Galaktische Länge <math>l^I</math>, <math>l^{II}</math></b> . (Rechtssystem, Verwendung: Milchstrassenforschung.)
<b>Sphärische Trigonometrie:</b>	Trigonometrie an Dreiecken auf Kugelsphären, vgl. Abschnitt oder Literatur.

**Nautisches****Dreieck:**

Dreiecke auf einer Kugelsphäre.

**Astronomisches****Dreieck:**

Nautisches Dreieck.

**Meridiankon-****vergenz:**

Abweichung der senkrechten Koordinatenlinien der Landkarte von der Nordrichtung. Betrifft die Landkarten der Schweizerischen Landestopographie. Koordinatenursprung ist die alte Sternwarte Bern. (Vgl. Seite 15)

**Arbeit**

Mache Dir die erwähnten Begriffe klar mit Hilfe von Skizzen und Modellen! Konsultiere auch die Literatur!

**Material:** Stricknadeln, Schaumstoff, Styroporkugeln, Karton, ...

**2.1.2 Bewegung von Erde und Sonne****Begriffe:**

**Rotation:** Drehung der Erde um die eigene Achse.  $\Rightarrow$  Tag und Nacht.

**Revolution:** Drehung der Erde um die Sonne. Erdachse schief zur Erdbahnebene (Ekliptik)  $\Rightarrow$  Jahreszeiten.

**Präzession:** Kegelartige Rotation der Erdachse (25'700 Jahre  $\Rightarrow$  Platonisches Jahr).

**Platonisches Jahr:** Zeit für einen Rotationsumlauf der Erdachse bei der Präzession.

**Nutation:** Der Präzession aufgelagerte Nickbewegung der Erdachse.

**Kardinalpunkte**

**des lichten Tages:** Sonnenaugang, Sonnenuntergang, wahrer Mittag (Kulmination).

**Kulmination:** Zeitpunkt des Sonnenhöchststandes.

**Äquinoktiums:** Tag- und Nachtgleiche. (Frühjahr, Herbst, Widder- und Waagepunkt, Frühlingspunkt und Herbstopunkt.)

**Solstitionen:** „Solstitium“ bedeutet Sonnenstillstand. Sommersolstitium  $\Rightarrow$  längster Tag, Wintersolstitium  $\Rightarrow$  kürzester Tag. (Wendepunkte des Krebs und des Steinbocks.)

**Tierkreis:** Hauptsächlich durch Ptolemäus (Nordhalbkugel) und durch Seefahrer sind 88 Sternbilder genannt worden. 12 davon bilden den Tierkreis ⇒ Sternbilder entlang eines Bandes um die Ekliptik:  
 Widder (Aries), Stier (Taurus), Zwillinge (Gemini), Krebs (Cancer), Löwe (Leo), Jungfrau (Virgo), Waage (Libra), Skorpion (Scorpius), Schütze (Sagittarius), Steinbock (Capricornus), Wassermann (Aquarius), Fische (Pisces).

**Zodiac:** Tierkreis.

### Arbeit

Mache Dir die erwähnten Begriffe klar mit Hilfe von Skizzen und Modellen! Konsultiere auch die Literatur!  
*Hinweis: Geographische Koordinaten von Biel (BE, CH): 47.09 N / 7.16 E.*  
 Achtung: Es existiert noch ein Biel im Wallis (CH) und eines in Spanien! (vgl. Bibl. A14).

### 2.1.3 Zeit

#### Begriffe:

**Antike Stunden:** Einteilung des lichten Tages in 12 Stunden (in der Antike). Mittag = Ende der 6. Stunde (nach fortlaufender Zählung).  
 ⇒ Antike Sommerstunden sind länger als antike Winterstunden (Jan. ~ 40', Juni/Juli ~ 1h 20').  
 Der antike Tag beginnt am Mittag.

**Temporäre Std.:** = antike Stunden.

**Äquinoktiale Std.:** Tag zu 24 Stunden der antiken Astronomen mit konstanter Tageslänge. (Die Länge wird gemessen zur Zeit des Äquinoktiums.)

**Babylonische Std.:** Stundenzählung seit Sonnenaufgang. (24-Stunden-Tage.)

**Griechische Std.:** = babylonische Stunden.

**Italienische Std.:** Stundenzählung seit dem vorangegangenen Sonnenuntergang.  
 (24-Stunden-Tage.)

**Spanische Std.:** = italienische Stunden.

**Böhmisches Std.:** = italienische Stunden.

**Neuezeitliche Stundenzählung:** Seit 1. Jan 1925, Zählung der Stunden ab Mitternacht, Datumwechsel um Mitternacht. (Vorher Datumwechsel am Mittag → engl. AM oder ante meridian, PM oder post meridian).

<b>Sonnentag:</b>	Lichter Tag, durch die Bewegung der Sonne definierter Tag von Aufgang bis zu Untergang.
<b>Kalender:</b>	Abendländische Kalender (Gregorianischer und Julianischer Kalender), jüdischer Kalender, mohamedanischer Kalender, Mayakalender, Babylonischer Kalender, altösterreichische und griechische Kalender, Mondkalender der Nomadenvölker des Ostens etc. etc..
<b>Gregorianischer Kalender:</b>	Kalender seit Papst Gregor XIII, 1582 mit Schaltjahrregel. (Alt 4.10.1582= neu 15.10.1582.)
<b>Julianischer Kalender:</b>	Kalender seit Julius Cäsar bis Gregor XIII.
<b>Zeitgleichung:</b>	Differenz $ZG = \text{wahre Zeit} - \text{mittlere Zeit}$ (ändert täglich).
<b>Wahre Zeit:</b>	Zeit (Stundenzeit), die am betrachteten „wahren“ Tage durch den Sonnenlauf bestimmt ist = Stundenwinkel der wahren Sonne $+12^h$ . (Ungleichmässig: Geschwindigkeit der Sonne variabel $\Rightarrow$ ganzjährige Periode, die Sonne läuft in der Ekliptik, d.h. schief zur Rotationsachse der Erde, geometrischer Effekt, Projektionseffekt auf den Äquator $\Rightarrow$ halbjährige Periode).
<b>Wahre Ortszeit (WOZ):</b>	WOZ = wahre Zeit.
<b>Stundenwinkel:</b>	Vgl. Behandlung der Koordinatensysteme.
<b>Mittlere Zeit:</b>	Mittlere Sonnenzeit, 1790 erstmals in Genf eingeführt: Alle Stunden gleich lang (mittlere Sonnenzeit). Man definiert eine „mittlere Sonne“, die bei gleicher Umlaufzeit mit konstanter Geschwindigkeit auf dem Äquator unläuft. Sommer $\Rightarrow$ 186 Tage, Winter $\Rightarrow$ 179 Tage. (Mechanische Uhren!)
<b>Sternzeit:</b>	Stundenwinkel des Frühlingspunktes, definiert durch das Äquatorsystem.
<b>Mittlere Sternzeit:</b>	Linear mit der mittleren Sonnenzeit, bezogen aber auf das siderische Jahr.
<b>Siderische Zeit:</b>	Sternzeit.
<b>Synodische Zeit:</b>	Sonnenzeit.

<b>Sterntag:</b>	Zeit zwischen zwei Meridiandurchgängen des Frühlingspunktes, = 24 Sternstunden. Wegen der Präzession ist der Sterntag um $0^s.0084$ kürzer als die tatsächliche ideale siderische Rotationszeit der Erde. Während eines Jahres wandert der Mittagspunkt der Sonne einmal durch den Tierkreis. Die Sonne bewegt sich unter den Sternen von W nach O. Die Erde bewegt sich um die Sonne und rotiert gleichzeitig um die eigene Achse. Wegen der Vorwärtsbewegung um die Sonne muss sie sich von Sonnenkulmination zu Sonnenkulmination um mehr als einen vollen Winkel drehen, da sie die eigene Position ja ändert. Es gilt somit: 365 Sonnentage = 366 Sterntage. Der Sonnentag ist um 4 Minuten länger als der Sterntag.
<b>Zeitdefinition:</b>	1790 erstmals in Genf eingeführt: Alle Stunden gleich lang.
<b>Weltzeit:</b>	= Greenwichzeit = Universal Time (UZ).
<b>Zonenzeit:</b>	Zeitzonen von meist $15^\circ$ Länge mit gleicher bürgerlichen Zeit. Bei uns MEZ (mitteleuropäische Zeit).
<b>Mitteleuropäische Zeit, MEZ:</b>	Vgl. Zeitzonen.
<b>Ephemeridenzeit:</b>	Zeit, gemessen in Ephemeridensekunden, vgl. unten.
<b>Tropisches Jahr:</b>	Von Frühlingspunkt bis Frühlingspunkt (ideales Kalenderjahr, tropos: griech. wenden). Jahresbeginn: Nach Bessel (1784–1846), Zeitpunkt, wenn die „mittlere Sonne“ (vgl. Theorie im Text) die Rektaszension $280^\circ$ erreicht.
<b>Siderisches Jahr:</b>	Von Fixstern zu Fixstern. Der Frühlingspunkt wandert Jahr ca. $20'$ länger.
<b>Anomalistisches Jahr:</b>	Von Perihel zu Perihel.
<b>Gregorianisches Jahr:</b>	Seit 1582 nach Papst Gregor XIII in katholischen Ländern (Basel 1700/01 ausser Fasnacht, St.Gallen, Appenzell, evangelisch Glarus 1724, England 1752, Schweden 1753 (1844), evangelisch Graubünden 1780, bündner Gemeinden Schiers und Grüschen 1812! <sup>1)</sup> ), heutige Schaltjahrregel, nicht immer nur alle 4 Jahre: Alle Jahre, deren Jahreszahl durch 100, aber nicht durch 400 teilbar ist, ist kein Schaltjahr. Fehler zum tropischen Jahr: In 3300 Jahren ein Tag.
<b>Julianisches Jahr:</b>	Seit Julius Cäsar, beraten vom griechischen Gelehrten Sosigenes, 46 v. Chr., 365 Tage, Schaltjahr alle 4 Jahre. Jahresbeginn 1. Januar.

<sup>1)</sup>Schiers und Grüschen werden manchmal als die letzten Gemeinden Westeuropas genannt, die den neuen Kalender eingeführt haben. Das gibt zu denken, wenn man dazu in Betracht zieht, dass in unseren Breiten 1782 die letzte Hexe verbrannt worden ist (Anna Göldin, Glarus) oder dass in der Schweiz das Frauenstimmrecht erst 1971 auf Bundesebene eingeführt werden konnte (dazu in Appenzell erst später infolge eines Bundesgerichtsentscheides).

<b>Lunisolarjahr:</b>	Griechisch–römisches Jahr, gegeben durch den Jahreszeitenwechsel. Etwa zwölf Monate, manchmal aber muss ein dreizehnter Monat eingeschoben werden. Jahresbeginn am 1. März.
<b>Altägyptisches Jahr:</b>	365 Tage, gegeben durch den Jahreszeitenwechsel. (Nilüberschwemmungen!)
<b>Synodischer Monat:</b>	29.53059 Tage, von Phasenwechsel zu Phasenwechsel. Traditionelle Grundlage der Kalender der Juden und Mohamedaner. (Mohamedanischer Kalender: Mondjahr zu 12 synodischen Monaten.)
<b>Platonisches Jahr:</b> Zeit für einen Rotationsumlauf der Erdachse bei der Präzession.	
<b>Ostern:</b>	Nach dem Konzil von Nicäa (325): Erster Sonntag nachdem ersten Frühlingsvollmond. Berechnung problematisch, Abweichungen zwischen Ost– und Westkirche. Bei uns: Berechnung nach der Osterregel von Gauss (1777–1855).
<b>Christliche Jahreszählung:</b>	Seit Abt Dionysius Exiguus, 525 n. Chr.. Problem: Es existiert kein Jahr 0. (In der Antike war 0 als Zahl nicht allgemein gebräuchlich. Eine römische Zahl 0 existiert nicht. Erst durch arabische Vermittlung (also mit der arabischen Expansion, nach Mohameds (Mohammed, Mohammad ...) Flucht nach Medina 622 n. Chr.) ist 0 als Schriftzeichen aus dem Indischen in den Westen gelangt. Nummerierungen hat man vor– und rückwärts mit 1 begonnen. Daher kann in diesem alten System kein Jahr null möglich sein. Es ist also kein Fehler. Zählen durch teilen!)
<b>Ptolemäus:</b>	Im Almagest: Jahreszählung seit dem babylonischen König Nobonassar, 747 v. Chr.
<b>Römische Jahreszählung:</b>	Jahreszählung nach Regierungsantritt der Kaiser oder Konsule. Daneben kontinuierlich seit der Erbauung Roms, 753 v. Chr..
<b>Momamedanische Jahreszählung:</b>	Mondjahre seit der Flucht nach Medina, 622 n. Chr..
<b>Jüdische Jahreszählung:</b>	Seit der „Erschaffung der Welt“, 3761 v. Chr..
<b>Kurzlebige Kalender:</b>	Während der französischen Revolution in Frankreich (Dezimalsystem!) und während der faschistischen Ära in Italien.
<b>SI–Sekunde:</b>	1956 als Teil des tropischen Jahres 1900 festgelegt. Genauigkeit war nicht ausreichend ⇒ 1967 festgelegt als 9192631770–fache Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes von Atomen des Nukleids $^{133}Cs$ entsprechenden Strahlung.

**Ephemeriden-sekunde:** Länge der astronomischen, durch die Bewegung der Erde definierte Sekunde zu Beginn des letzten Jahrhunderts, 1900.0.

### Bemerkungen zum Kalender

Weitere Auskunft erhält man unter dem folgenden Link:

[http://de.wikipedia.org/wiki/Liste\\_der\\_Kalendersysteme](http://de.wikipedia.org/wiki/Liste_der_Kalendersysteme)

Der urprüngliche altrömische Kalender war eine unausgereifte Mischform eines astronomisch an der Sonne orientierten Lunarkalenders. Die Jahre zählte man seit dem 4. vorchristlichen Jahrhundert von der Einweihung des Jupitertempels im Jahre 507 v. Chr. an. Später wechselte man zu einer Zählung beginnend mit der angenommenen Gründung der Stadt Rom im Jahre 753 v. Chr.. Aus dieser alten Periode stammen auch die Monatsnamen. Das Jahr begann mit dem 1. März. Im Jahre 153 v. Chr. verlegte der Senat angeblich den Jahresbeginn auf den Beginn der Amtszeit der Konsuln, den 1. Januar. Im Julianischen Kalender (eine Korrektur auf Geheiss von Julius Cäsar, Einführung von Schaltjahren), war der Jahresbeginn am 1. Januar verbindlich. Mit der Einführung des Christentums änderte das vielerorts wieder: So wurde Neujahr plötzlich am 25. März, am Datum der vermuteten Zeugung Christi gefeiert (nach Julius Africanus, 221 n. Chr.). Andernorts aber auch an Ostern, dem Tag der Auferstehung Christi, womit das Problem des nicht konstanten Osterdatums auf dem Tisch war. In Byzanz wählte man als Jahresbeginn auch den 1. September (dem heute so bezeichneten meterologischen Herbstbeginn), und andernorts begann das Jahr sogar am 25. Dezember, dem seit dem 3. Jahrhundert n. Chr. so geglaubten Tag der Geburt Christi. 1582 wurde der Gregorianische Kalender eingeführt, der sich heute mit wenigen Ausnahmen praktisch überall durchgesetzt hat (sogar in China seit 1949). Damit wurde die Verschiebung des Frühlingsbeginns im Julianischen Kalender beseitigt. Im Jahre 1582 folgte damit auf Donnerstag, 4. Oktober, der Freitag, 15. Oktober. Der Frühlingsanfang ist seither der 21. März, der Tag des Primäräquinoktiums. Von da aus konnte der 1. Januar und damit der Jahresbeginn exakt bestimmt werden. Unter Papst Innozenz XII. verlegte dann schliesslich auch die römische Kirche 1691 offiziell den Jahresbeginn vom 25. Dezember auf den 1. Januar. Damit ist das Problem des Jahresbeginns vor allem in römisch-christlichen Kulturbereich beleuchtet. Wie es damit in andern Kulturbereichen steht, mag der Leser selbst nach Massgabe seiner Interessen abklären.

### Arbeit

Mache Dir die erwähnten Begriffe klar mit Hilfe von Skizzen und Modellen! Konsultiere auch die Literatur!

#### 2.1.4 Mond und Monat

**Siderischer Monat:** Zeit Fixsterndurchgang–Fixsterndurchgang, ca.  $27.32166^d$ .

**Synodischer Monat:** Zeit Mondphase–Mondphase, ca.  $29.53059^d$ .

**Drakonitischer Monat:** Zeit Knoten–Knoten, ca.  $27.21222^d$ .

**Tropischer Monat:** Zeit Frühlingspunkt–Frühlingspunkt, ca.  $27.32158^d$ .

**Anomalistischer**

**Monat:** Zeit Perigäum–Perigäum, variation  $27^d$ – $29^d$ .

## 2.2 Sonnenuhren

**Prinzip:** Die Sonne bescheint einen Gegenstand, der einen Schatten auf eine Fläche im Raum wirft. Dadurch wird die Zeit ablesbar. Der Puls des kosmischen Geschehens wird so fühlbar. Die künstlerische Phantasie in der Ausschmückung trägt das ihre dazu bei.

**Einteilung:** Nach der Art des Schattenwurfs: Punkt– und Stabsonnenuhren.

**Punktsonnenuhr:** Schatten eines punktförmigen Gegenstands massgebend (Stabspitze, Lochscheibe, sich nicht schneidende Kurven, windschiefe Drähte . . .). (Punktsonnenuhren sind älter als Stabsonnenuhren).

**Gnomon:** Stab oder Träger der Lochscheibe bei der Punktsonnenuhr (griech Anzeiger).

**Gnomonik:** Lehre von den Sonnenuhren.

**Stabsonnenuhr:** Schatten eines Stabs massgebend. Stabsonnenuhren sind einfacher als Punktsonnenuhren und geben in der Regel weniger Information.

**Polstab:** Stab einer Stabsonnenuhr, parallel zur Erdachse.

**Polos:** Polstab.

**Historisch:** Räderuhren als Turmuhren erscheinen erstmals an gotischen Kirchen und Kathedralen (Hochgotik). Die Pendeluhr gilt als eine Erfindung von Huygens (Barockzeitalter.) Vorarbeiten: Leonardo da Vinci! Taschenuhren sind dann im Zuge der industriellen Revolution populär geworden. Atom- und Quarzuhren Erschienen erst in der 2. Hälfte des 20. Jahrhunderts auf der Bildfläche der globalen Wirklichkeit. Noch gegen Ende des 19. Jahrhunderts hat man Sonnenuhren als Referenz für Turmuhren verwendet. Oft dienten Sonnenuhren auch zur Kontrolle der Bahnuhren (Kollisionen!!)

**Ebene Sonnenuhr:** Normalfall. Die Projektionsfläche ist eine Ebene. *Wenn nichts anderes vorausgesetzt wird, ist bei uns eine Sonnenuhr immer eine ebene Sonnenuhr.*

# Kapitel 3

## Stabsonnenuhren

### 3.1 Äquatoriale Sonnenuhr

#### 3.1.1 Poluhr, Ombrix

##### Situation:

Sommerhalbjahr am Nordpol. Der Schatten eines senkrechten Stabs  $g$  auf den horizontalen Boden oder eine horizontale Unterlage wandert in 24 Stunden einmal um den Fusspunkt des Stabes. In einer Stunde wandert der Schatten um  $15^\circ$  im Uhrzeigersinn. Das Zifferblatt zeigt eine gleichmässige oder **homogene** Stundeneinteilung.

Den senkrechten Stab, der im Punkte  $G$  in der horizontalen Unterlage (z.B. Kartonscheibe) steckt, nennen wir hier (in Anlehnung an Asterix) **das Modell Ombrix**, bestehend aus Ombrixebene und Ombrixstab.

Analog am Südpol im Winterhalbjahr. Der Schatten wandert hier im Gegenuhrzeigersinn.

Tragen wir Ombrix vom Nordpol weg an den Südpol, indem wir den Stab bei dieser Verschiebung immer parallel zur Erdachse halten, so sind wir am Südpol dann gezwungen, zur bequemen Benützung die untere Seite der Scheibe zu verwenden und diese auch mit einem Zifferblatt zu versehen, wenn wir nicht für die Ablesung der Zeit Ombrix hoch über dem Kopfe halten und von unten betrachten wollen.

Ombrix hat somit jetzt ein **oberes** und ein **unteres Zifferblatt**.

##### Homogenes Zif-

ferblatt: Gleichmässige Zeiteinteilung.

#### 3.1.2 Ombrix weg vom Pol

Tragen wir Ombrix vom Nordpol weg an irgend einen Ort der Erde, indem wir den Stab  $g$  bei dieser Verschiebung immer parallel zur Erdachse  $a$  halten, so beobachten wir bei Tag exakt denselben Schattenverlauf wie am Nordpol. Die Achse von Ombrix steht aber schief zum horizontalen Boden. Die Zifferblatteinheit liegt parallel zur Äquatorebene. Am Äquator liegt die Achse sogar horizontal.

**Mittagslinie:** Gerade auf der Ombrixebene, auf die der Schatten am wahren Mittag fällt.

Am wahren Mittag überquert die Sonne den Meridian des Beobachters von Ost nach West.

$\rightsquigarrow$  Wahrer Mittag =  $(13^h + \lambda - ZG) MEZ$ ,  $\lambda$  = geographische Länge des Beobachters im Zeitmass ( $1^\circ = 4 \text{ min}$ ), positiv westlich v. Greenwich.

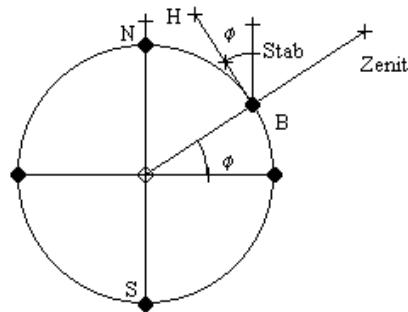
**Äquatoriale Sonnenuhr** Ombrix.

**Stundenebene bei Ombrix:** Ebene, die den Polstab enthält (Steht rechtwinklig zur Äquatorebene oder zur Zifferblattebene A).

**Stundenwinkel  $t$  bei Ombrix:** Winkel im Zeitmass (Oder Gradmass), abzulessen auf dem Zifferblatt.  $1^\circ \hat{=} 4$  Minuten. Stundenwinkel der Sonne = Winkel des Schattens mit der Mittagslinie, gibt die wahre Ortszeit an.

## Arbeit

Abbildung 3.1: Achse des schiefen Ombrix ...



Baue Dir den Ombrix und beobachte ihn, nachdem Du den möglicherweise vorhandenen Nebel verjagt hast!

**Achtung:** Das Zifferblatt muss auf beiden Seiten der Zifferblattebene aufgemalt sein! Im Sommerhalbjahr fällt der Schatten des Stabes auf die nördliche, obere Seite der Ebene, im Winterhalbjahr auf die untere, südliche Seite. Man bedenke dazu die Situation, wenn die Uhr am Nordpol steht. Nur im Sommerhalbjahr steht die Sonne über dem Horizont. Im Winterhalbjahr herrscht ununterbrochen die **Polarlichter**.

### Zum Problem der Auffindung der Nordrichtung:

Mit dem Kompass lässt sich die Nordrichtung nur näherungsweise bestimmen, da der magnetische Nordpol derart vom geographischen Nordpol abweicht, dass die dadurch entstehende Ungenauigkeit die Ablesung an einer Sonnenuhr stark verfälscht. (Der magnetische Nordpol liegt heute auf Prince of Wales Island in Canada, südlich der Barrow-Strasse und nördlich der Hudson-Bay Länder, auf weniger als etwa  $75^\circ$  nördlicher Breite). Zudem führen die lokale Beschaffenheit der Erdkruste und des Erdinneren oft zu Abweichungen vom erwarteten Verlauf der magnetischen Feldlinien der Erde.

Um die Nordrichtung einigermaßen genau zu bestimmen, benutzt man am besten Kartenmaterial. Aber auch hier aufgepasst! Das Koordinatennetz der schweizerischen Landestopographie weicht in Nord-Süd-Richtung je nach Ort mehr oder weniger ab von den Meridianen! (Man konsultiere dazu verschiedene

Karten und Atlanten.) Die Abweichung wird im Kurs zu einer späteren Zeit genauer berücksichtigt, wenn eine grössere Präzision erforderlich ist. *Hinweis:* Die Koordinaten des Nullpunktes der Schweizerischen Landeskarte ist die alte Sternwarte von Bern:

$$\lambda = -7^\circ 26' 22''.3, \varphi = 46^\circ 57' 07''.9$$

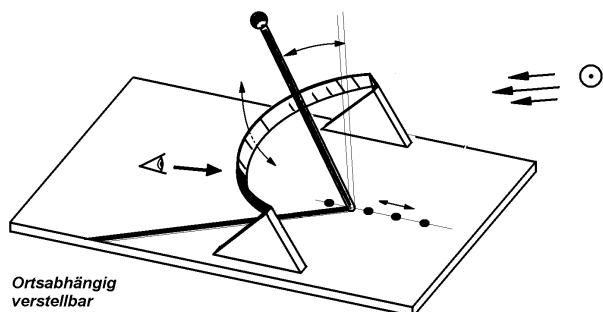
Die Meridiankonvergenz beträgt in Genf  $-56' 36''$  und in Chur  $+1^\circ 32'$ .

Eine andere Möglichkeit ist der Einsatz der Satellitennavigation. Man suche drei genügend weit auseinander liegende Punkte auf der Erdoberfläche auf und bestimme mit Hilfe dieser Navigationsmöglichkeit die Winkel-Koordinaten von Länge und Breite. So erhält man ein bekanntes (sphärisches) Dreieck. Darin kann man mit Hilfe der (ev. sphärischen) Trigonometrie die Winkelabweichung einer geeigneten Dreiecksseite von der Nordrichtung bestimmen. Damit kennt man die Nordrichtung.

Für den Moment kann man sich experimentell behelfen. Man stelle einen Stab exakt senkrecht auf eine horizontale (Wasserwaage!) Papier- oder Kartonunterlage, die mit Klebstreifen so auf einer Auflagefläche befestigt ist, dass sie fix bleibt. Nun beobachtet man zu verschiedenen Zeiten die Position des Schattens der Stabspitze auf dem Papier, sodass man mit genügender Genauigkeit die Kurve des Schattenverlaufs aufzeichnen und erkennen kann. Dazu werden die Positionen bei jeder Beobachtung mit Bleistift möglichst exakt markiert. Zur Zeit Äquinoktiums (Frühlings- und Herbstbeginn) sollte man eine Gerade erhalten. (Schnittrichtung der durch die Stabspitze gehenden Parallelebene zur Sonnenbahnebene mit der Ebene des Aufzeichnungsblattes.) Anschliessend zieht man um den Fusspunkt  $F$  des Stabes mit dem Zirkel einen Kreisbogen mit einem Radius, der günstig gewählt werden muss, um mit der Schattenverlaufskurve zwei brauchbare Schnittpunkte  $S_1$  und  $S_2$  zu erhalten. Die Nord-Süd-Richtung ergibt sich nun aus Symmetriegründen wegen der für uns gleichmässigen Erdbewegung als Winkelhalbierende des Winkels  $S_1FS_2$ . *Hinweis:* Die Genauigkeit nimmt offensichtlich mit der Grösse der Anordnung zu.

### 3.1.3 Zylindrisches Zifferblatt

Abbildung 3.2: Achse des schiefen Ombrix ...



Statt den Schatten auf einem ebenen Zifferblatt abzulesen, kann man auch einen stabparallelen, halbierten Hohlzylinder verwenden, der auf der oberen Seite derart offen ist, dass die Sonne den Schatten des Stabes auf das Innere des vorhandenen Halbzylinders werfen kann. Oft wird dazu auch eine Halbkugel verwenden, oder der Halbzylinder ist auf ein schmales Band reduziert (vgl. Skizze). Auf dem Zylinderinnern ist es nun kein Problem, ein Zifferblatt zu konstruieren, da infolge der für uns gleichmässigen Erdrotation vom Stab aus gesehen der Winkelabstand zwischen den Stundenmarken auf dem Halbzylinder je  $\frac{360^\circ}{24}$  sein muss.

Nach diesem Prinzip lassen sich einfachste Sonnenuhren bauen, die auch oft an öffentlichen Orten anzutreffen sind (meist Metallkonstruktionen).

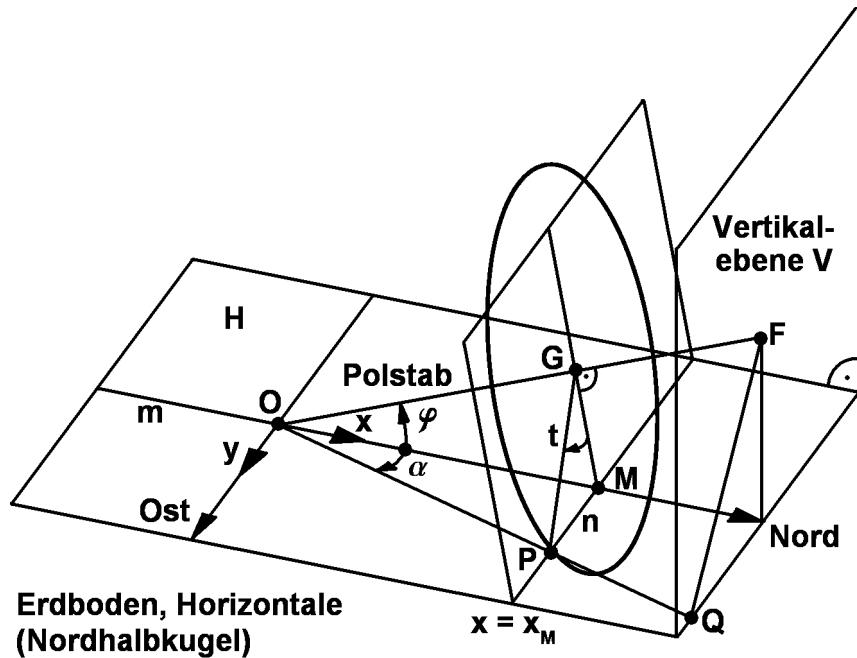
### 3.1.4 Schiefer Ombrix

**Schiefer Ombrix** Behalte die Richtung des Polstabes von Ombrix bei, stelle aber die Zifferblattebene beliebig schief ( $\sim H$ ), sodass noch ein Schattenwurf beobachtet werden kann.  $H$  enthält den Polstab nicht.

Auch beim schiefen Ombrix hat jede Stundenebene mit  $H$  eine Schnittgerade gemeinsam. Auf so eine Gerade fällt auch der Schatten des Polstabes in dem Moment, wenn die Sonne die Stundenebene überquert. Die so entstehende Sonnenuhr hat nun allgemein kein homogenes Zifferblatt mehr, ist jedoch aber gleichwohl einfach konstruierbar. Zur Konstruktion kombiniert man am besten den rechtwinkligen und den schiefen Ombrix. Man hat jetzt zwei Zifferblätter ( $\sim A, H, A \perp g$ ), von denen wir eines längs des Polstabes  $g$  parallel verschieben. Dabei sei  $O = g \cap H$ ,  $G = g \cap A$ ,  $x = A \cap H$ .

Wählen wir  $H$  speziell **horizontal** am Ort des Beobachters, so ist der Neigungswinkel  $\varphi$  des Polstabes zur Horizontalen gerade die Geographische Breite des Ortes  $O$ . Der Stundenwinkel  $t$  kann in  $A$  gemessen werden. Der Schatten des Polstabes in  $H$  erzeugt auf  $x$  einen Punkt  $P$ .  $M$  ist der Mittagspunkt auf  $x$ .  $OM$  und  $OP$  schliessen den Winkel  $\alpha$  ein.

Abbildung 3.3: Schiefer Ombrix ...



### Arbeit

1. Skizziere das horizontale Zifferblatt für den Ombrix Deines Aufenthaltsortes. Sei  $O = (0/0)$ . Bestimme  $\varphi$  (aus einer Karte ...)
2. Skizziere auch das vertikale Zifferblatt für den Ombrix Deines Aufenthaltsortes. (Berechne die Stundenlinien trigonometrisch.)

3. Wähle z.B.  $|\overline{OG}| = 1 \text{ Meter}$ . Berechne die Gleichungen der Geraden  $m$ ,  $n$  und  $g = \overline{OG}$  in einem vernünftig gewählten Koordinatensystem.  
Berechne dann für ein beliebiges  $t$  den Winkel  $\alpha$  und den Punkt  $P$ .
4. Schreibe ein Programm für die Berechnungen (z.B. mit *Mathematica*), das für eine Serie von  $t$  auch gleich die Geraden  $\overline{OP}$ , d.h. ein Zifferblatt für  $\varphi$  zeichnet.
5. Mache auch ein Zifferblatt für eine vertikale Stabsonnenuhr.
6. Baue damit ein Modell und teste es aus. (Zeichne das Zifferblatt exakt, baue die Uhr und teste sie aus.) *Hinweis: Mathematica*.
7. Stelle auch ein Zifferblatt her für einen gewählten Ort auf der Südhalbkugel.
8. Beschriffe die Zifferblätter mit dem richtigen Zeitmass und den Parametern des Ortes.

**Formel:****Geg.:**  $\varphi, a, t$ Sei  $|\overline{OG}| = a \sim$  Mit Hilfe der Trigonometrie findet man:

$$1. x_P = x_M = |\overline{OM}| = \frac{a}{\cos(\varphi)}$$

$$2. |\overline{GM}| = a \cdot \tan(\varphi)$$

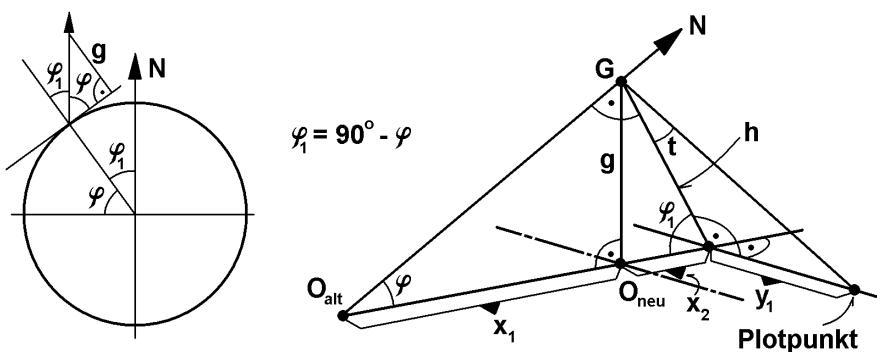
$$3. y_P = |\overline{MP}| = |\overline{GM}| \cdot \tan(t) = a \cdot \tan(\varphi) \cdot \tan(t) = x_m \cdot \sin(\varphi) \cdot \tan(t)$$

$$4. \alpha = \arctan\left(\frac{|\overline{OM}|}{|\overline{MP}|}\right)$$

**Berechnung der Stundengeraden mit dem Computer:**

Für den späteren Gebrauch im Zusammenhang mit den noch zu besprechenden Deklinationslinien ist es nützlich, den Ursprung des Koordinatensystems senkrecht unterhalb von  $G$  zu wählen. Die nachfolgenden Formeln kann man dann unmittelbar aus der folgenden Skizze ablesen:

Abbildung 3.4: Horizontaler Ombrix mit neuem Koordinatenursprung



In der Skizze kann man unmittelbar folgende Beziehungen ablesen:

**Formeln:**

$$\begin{aligned}
 1. \quad x_1 &= -\frac{g}{\tan(\varphi)} \\
 2. \quad x_2 &= \frac{g}{\tan(90^\circ - \varphi)} \\
 3. \quad h &= \frac{g}{\sin(90^\circ - \varphi)} \\
 4. \quad y_1 = h \cdot \tan(t) &= \frac{g \cdot \tan(t)}{\sin(90^\circ - \varphi)}
 \end{aligned}$$

**Mögliche Lösung:**

**Mathematica-Programm:**

---

Beispiel eines Zifferblatts des schiefen Ombrix:

```
(*Geographische Breite des Standorts der Uhr, hier Biel, BE,
CH.\[CurlyPhi] erzeugt das kleine griechische phi*)
(* "Putzmaschine" *) (*Old Form : Remove["Global`*"]*)
Remove["Global`*"];
(* ===> INPUT, Altgrad *) \[CurlyPhi] = 47.09; g = 1;
(* MP berechnen, Formel :*)
hour = 2 Pi/24 (* Tage *);
MP[t_, \[CurlyPhi]_] := g Tan[t hour]/Sin[(90 - \[CurlyPhi]) Degree];
(*MP berechnen für die Werte - 5h, -4h, ..., 0h, ..., 5h*)
(* ===> INPUT, t Stunden (h)*);
tab1[\[CurlyPhi]_] :=
Table[MP[t, \[CurlyPhi]], {t, -5, 5, 1}]; tab1[\[CurlyPhi]];
(*Koordinaten der Punkte P berechnen für die Werte - 5h, -4h, ...,
0h, ..., 5h*)
tab2[\[CurlyPhi]_] :=
Table[{tab1[\[CurlyPhi]][[n]], g/Tan[(90 - \[CurlyPhi]) Degree]}, {n, 1, Length[tab1[\[CurlyPhi]]]}]; tab2[\[CurlyPhi]];
(* Ursprung versetzt, vgl. Gnomonstab parallel Erdachse! *)
ursprung[\[CurlyPhi]_] :=
{0, -g/Tan[\[CurlyPhi] Degree]}; (*Zifferblatt plotten :*)
p1 = Show[
Graphics[Table[
Line[{ursprung[\[CurlyPhi]], tab2[\[CurlyPhi]][[n]]}],
{n, 1, Length[tab1[\[CurlyPhi]]]}], AspectRatio -> Automatic];

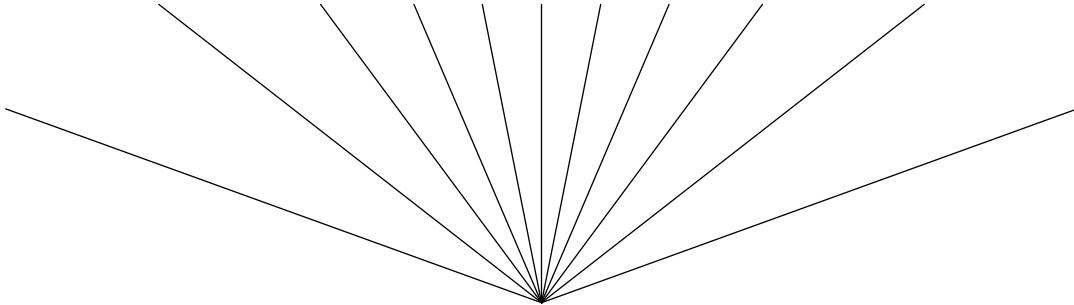
```

**Output:** Vgl. unten!

Um das Zifferblatt für eine senkrechte Wand zu erhalten, machen wir einen Plot für  $90^\circ - \varphi$ :

**Mathematica-Programm:**

Abbildung 3.5: Output: Horizontales Zifferblatt des schiefen Ombrix

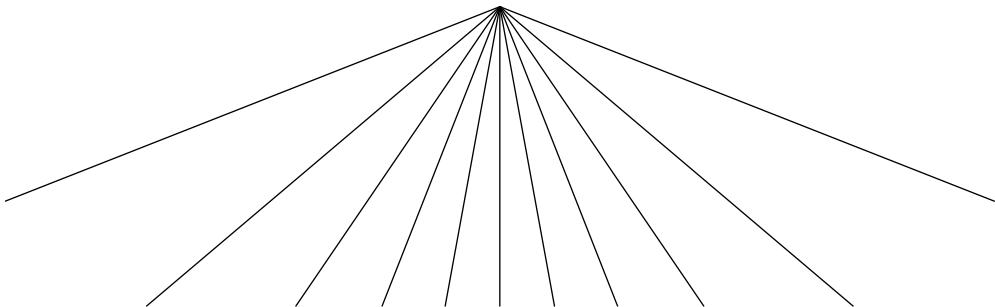


Vertikales Zifferblatt, Ost-West-Wand, Ombrix:

```
(* === > INPUT, Altgrad *)          \[CurlyPhi] = 47.09 - 90;
hour = 2 Pi/24 (* Tage *);
(* MP[t, \[CurlyPhi]], tab1[\[CurlyPhi]],
   tab2[\[CurlyPhi]] definiert im letzten Programm *)
p2 = Show[
  Graphics[Table[
    Line[{ursprung[\[CurlyPhi]], tab2[\[CurlyPhi]][[n]]}], {n, 1,
      Length[tab1[\[CurlyPhi]]]}], AspectRatio -> Automatic];
```

Output:

Abbildung 3.6: Output: Vertikales Zifferblatt des schiefen Ombrix



### 3.1.5 Das Problem des zu kleinen Zifferblatts

Für grosse Winkel  $t$  kann der Punkt  $P$  ausserhalb des Zifferblatts zu liegen kommen. Die Strecke  $y_P$  kann grösser werden als z.B. die zur Verfügung stehende halbe Blattbreite. Was tun? Wie kann man die Sache trotzdem retten und zu einer Zeitmarke kommen?

**Einfacher Trick:** Wir verkleinern einfach die Strecke  $a$  mit einem gescheit gewählten Proportionalitätsfaktor. So erhalten wir einen Punkt  $M'$  auf der Gerade zwischen  $O$  und  $M$ . Nun berechnen wir die Zeitmarken ( $y$ -Koordinaten) für die so entstehende neue Koordinatenlinie durch  $M'$ . Diese Marken benötigen wir ja nur, um die Schattenlinien (Projektionsgeraden) für die gewünschten Stunden zeichnen

zu können.

Umgekehrt kann man für die Rechnung auch links und rechts im Zifferblatt auf dem Rande fixe  $y$ -Koordinaten  $y_1$  und  $y_2$  vorgeben und daraus erst für die benötigten Zeitmarken den zugehörigen Proportionalitätsfaktor sowie die Stablänge  $a$  berechnen. In diesem Fall berechnet sich die  $x$ -Koordinate erst am Schluss.

Geometrisch haben wir hier die Ähnlichkeitsabbildung benutzt (Verkleinerung). Dieses Prinzip kann man auch benutzen, wenn z.B. der Punkt  $O$  ausserhalb des Zifferblatts liegt (kleine Winkel  $\varphi$  oder zu langer Stab). Statt mit  $O$  arbeiten wir dann mit einem vernünftig gewählten Punkt  $G'$ .

### Arbeit

1. Berechne in Deinem Zifferblatt noch einige vernünftige Zeitmarken, die bei der ersten Arbeit auf dem Blatt noch keinen Platz gefunden haben. Baue dafür Dein Programm entsprechend aus.
2. Berechne ein Zifferblatt für die Breite  $\varphi = 5^\circ$ . Baue dazu Dein Programm entsprechend aus. ( $O$  liegt nicht auf dem Zifferblatt.)

#### 3.1.6 Geometrische Konstruktion des Ombrix-Zifferblatts

Die geometrische Konstruktion des Ombrix-Zifferblatts ist von H. R. von Graffenriedt (Bibl.: A2) in „Compendium Sciotericum“ (erschienen in Bern 1629) in einem gut lesbaren Deutsch beschrieben worden. Der Text ist in „Ebene Sonnenuhren“ von Heinz Schilt (Bibl.: A1) (erschienen in Biel 1987) auf den Seiten 10 – 13 wiedergegeben.

### Arbeit

Studiere den erwähnten Text und konstruiere zur Übung nach dieser Anleitung ein Beispiel eines Zifferblatts.

*Hinweis:*

<http://www.rowicus.ch/Wir/Scripts/restricted/TEILSOZ1.pdf>  
<http://www.rowicus.ch/Wir/Scripts/restricted/TEILSOZ2.pdf>

## Kapitel 4

# Prinzip und Struktur von Punktsonnenuhren

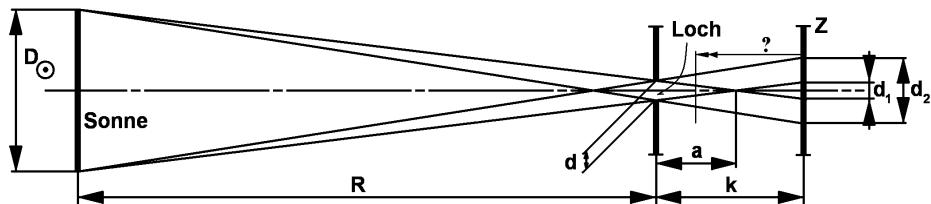
### 4.1 Zur Berechnung des Schattens des Stabendes

#### 4.1.1 Die Grösse des Schatten eines Loches

Am Ende eines Stabes sei eine kleine Lochscheibe angebracht. Durch das kreisförmige Loch fällt der Schatten der Sonne auf eine betrachtete horizontale Ebene (Zeichenblatt **Z**). Die Sonnenstrahlen können wir aus bekannten Gründen als parallel annehmen. Die Sonne selbst erscheint uns aber nicht als Punkt, sondern als Scheibe. So kommt es, dass auf **Z** ein unscharfes Bild des Lochs erscheint. Die Unschärfe kommt daher, dass das Bild des Lochs vom Bild der Sonnenscheibe überlagert ist. Hätten wir ein punktförmiges Loch (Camera obscura), so hätten wir ein scharfes Bild der Sonne.

Aus der Literatur erfährt man die Regel, dass die Abweichung (Unschärfe) etwa 1 Prozent der Entfernung der Lochscheibe vom Zeichenblatt ausmacht.

Abbildung 4.1: Sonnenbild eines Lochs



#### Arbeit

Berechne das Verhältnis  $d_1 : d_2$  (vgl. Skizze) bei gegebenem  $k$  (Hier  $k > a$ ).

**Zur Lösung:**  $\frac{D}{R+a} = \frac{d}{a} \Rightarrow a = \frac{d \cdot R}{D-d} \approx 107.5 \text{ cm}$  mit  $R, D$  vgl. unten.

$$\frac{D/2 - d/2}{R} = \frac{d/2 + d_2/2}{k}, \quad \frac{D/2 + d/2}{R} = \frac{d_1/2 - d/2}{k} \Rightarrow d_1 = d + \frac{dk}{R} + \frac{Dk}{R}, \quad d_2 = d + \frac{dk}{R} - \frac{Dk}{R}$$

(Im Falle  $k < a$  erscheint  $d_2$  bloss mit verändertem Vorzeichen in der Gleichung. Die absoluten Beträge von  $d_1$  und  $d_2$  im Resultat ändern nicht.)

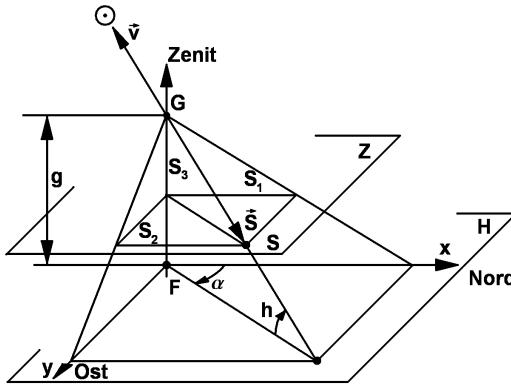
**Bsp.:**  $R \approx 1.496 \cdot 10^{11} m$ ,  $D \approx 2 \cdot 6.9599 \cdot 10^8 m \Rightarrow \frac{d_1}{d_2} = \left| \frac{d + 0.00930468k + 6.68449 \cdot 10^{-14} dk}{d - 0.00930468k + 6.68449 \cdot 10^{-14} dk} \right|$

$$d = 1 \text{ cm}, k = 100 \text{ cm} \Rightarrow \frac{d_1}{d_2} \approx 27.7637 \spadesuit \quad d = 1 \text{ cm}, k = 50 \text{ cm} \Rightarrow \frac{d_1}{d_2} \approx 2.73995 \heartsuit \quad (\text{Fälle } k < a.)$$

In solchen Situationen entscheidet die Erfahrung und der gesunde Menschenverstand, ob die Abweichung zwischen  $d_1$  und  $d_2$  tragbar ist. Wichtig bei der Beurteilung ist, wie hell die schattenfreie Fläche resp. der Kernschatten im Vergleich zum Halbschatten ist.

#### 4.1.2 Der Schatten eines Loches im Horizontsystem

Abbildung 4.2: Geometrische Situation im Horizontsystem ...



$G$  sei das Zentrum des Lochs und  $S$  das Sonnenbild. Im Horizontsystem ist damit der Vektor  $\vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$  gegeben. Mit Hilfe des Höhenwinkels  $h$  und des Azimuts  $\alpha$  schreibt man  $\vec{s}$  in der Form:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} s \cos(-h) \cos(\alpha) \\ s \cos(-h) \sin(\alpha) \\ s \sin(-h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cos(h) \cos(\alpha) \\ s \cos(h) \sin(\alpha) \\ -s \sin(h) \end{pmatrix}, \quad s = |\vec{s}|$$

$\alpha$  ist das Azimut von der Südachse zur Sonne hin oder von der Nordachse zur Horizontalrichtung von  $\vec{s}$  ( $\rightsquigarrow$  problemlose Doppeldeutigkeit).

Wenn der Schatten nicht auf  $Z$ , sondern auf die parallele Ebene  $H$  fällt, die von  $G$  den Abstand  $g$  hat und deren Lotfusspunkt  $F$  ist, so bekommt man wegen der Ähnlichkeit:

$$|x : s_1| = |g : s_3|, \quad |y : s_2| = |g : s_3|, \quad |x| = |g \frac{s_1}{s_3}|, \quad |y| = |g \frac{s_2}{s_3}|, \quad |z| = |g|$$

Umgekehrt ist die Visierlinie zur Sonne (oder zu einem Stern) durch den Vektor  $\vec{v} = \lambda \vec{s}$  bestimmt ( $\lambda < 0$ ).

## 4.2 Gnomonische Projektion

### 4.2.1 Horizontsystem der Astronomen mit Azimut zum Süden

In der Astronomie benutzt man für Beobachtungen häufig das feste Horizontsystem mit  $x$ -Achse nach Süden und  $y$ -Achse nach Westen. Das Azimut  $\alpha$  ist hier der Winkel zur positiven  $x$ -Achse. Die Höhe  $h$  bleibt wie oben.  $\vec{v}$  hat in diesem System die Form  $\vec{v} = \vec{v}_H = \begin{pmatrix} v \cos(h) \cos(\alpha) \\ v \cos(h) \sin(\alpha) \\ v \sin(h) \end{pmatrix}$ ,  $v$  vernünftig normiert.

Wenn nun  $\vec{v} = \vec{v}(t)$  ständig der Sonne nachgeführt werden muss, ändert die Höhe  $h$  und das Azimut  $\alpha$  nicht linear. Es scheint daher zweckmäßig, das Koordinatensystem so zu wählen, dass man diese Änderungen darin einfach erfassen kann.

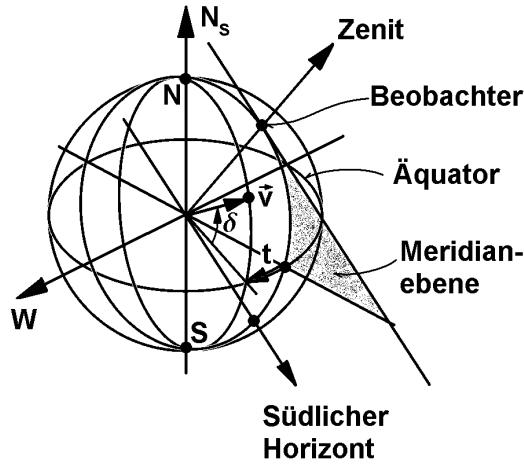
(Vorgehen: Erst  $\vec{v} = -\vec{s}$ , dann Rotation um die  $z$ -Achse um  $180^\circ \rightsquigarrow$  3. Koordinate ändert das Signum.)

### 4.2.2 Fixes Äquatorsystem der Astronomen (Ortsäquatorsystem)

In diesem System zeigt die  $z$ -Achse gegen den nördlichen Himmelssp (Polarstern). Die  $x$ -Achse liegt in der Meridianebe des Beobachters (bei uns in der Schweiz liegt sie vom Zenit aus gegen Süden), die  $y$ -Achse zeigt gegen Westen. Die letztgenannten beiden Achsen liegen in der Äquatorebene. Der spitze Winkel  $\delta$  zwischen dieser Ebene und  $\vec{v}$  ist die **Deklination**. Der Vektor  $\vec{v}$  und die  $z$ -Achse definieren eine Ebene  $\Phi$ . Der Winkel zwischen dieser Ebene und der Meridianebe des Beobachters ist der **Stundenwinkel**  $t$ . Das fixe Ortsäquatorsystem erhält man demnach aus dem Horizontsystem der Astronomen durch eine Drehung um die  $y$ -Achse um  $90^\circ - \varphi$ ,  $\varphi$  = geographische Breite.

Bei *Fixsternen* ist die Deklination  $\delta$  innerhalb unserer benötigten Genauigkeit mit der Zeit konstant, der Stundenwinkel  $t$  ändert gleichmäßig (d.h. linear) mit der Erdrotation ( $\rightsquigarrow$  siderische Zeit). Im Ortsäquatorsystem übernimmt  $t$  die Rolle von  $\alpha$  und  $\delta$  die Rolle von  $h$ . Daher erhält man:  $\vec{v} = \vec{v}_{O \text{ fix}} = \begin{pmatrix} v \cos(\delta) \cos(t) \\ v \cos(\delta) \sin(t) \\ v \sin(\delta) \end{pmatrix}$ . — Wie ist das nun entsprechend bei der *Sonne*?

Abbildung 4.3: Ortsäquatorsystem auf der Erde



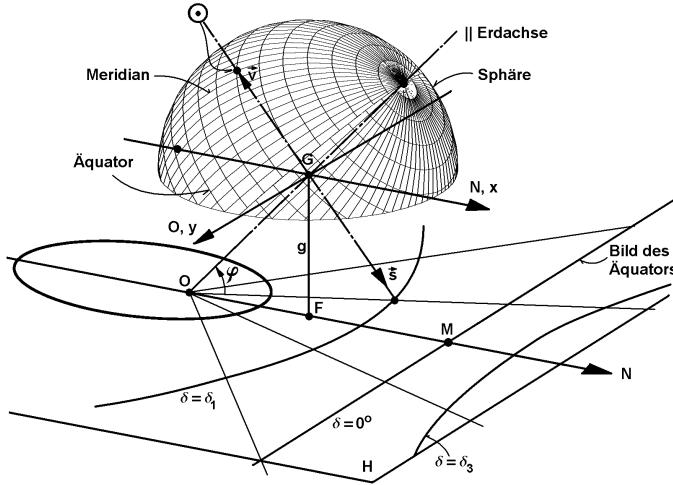
### Arbeit

Wenn die Sonne über dem Horizont steht, ist  $h > 0$ . Was ist die entsprechende Bedingung, ausgedrückt in  $\delta$ , falls  $\varphi$  und  $t$  gegeben sind?

Zur Lösung: Für Objekte am Horizont erhält man die Äquivalenz  $h = 0 \Leftrightarrow \cos(t) = -\tan(\delta) \tan(\varphi)$  (vgl. Seite 47 sowie  $\vec{n}_H \perp \vec{v}$  für Sonne am Horizont).

### 4.2.3 Das Prinzip der gnomonischen Projektion

Abbildung 4.4: Prinzip der gnomonischen Projektion



Wir betrachten wieder unsere Stabspitze resp. unsere Marke  $G$  mit dem Fußpunkt  $F$  in der Horizontalebene  $H$  (vgl. Abb. 4.2).  $O$  ist der Schnittpunkt der Parallelen zur Erdachse durch  $G$  mit der Ebene  $H$ , deren Neigungswinkel  $\varphi$  beträgt.

Jetzt tragen wir sämtliche möglichen Vektoren der Länge  $v$  von  $G$  aus in alle Richtungen ab und betrachten die so erhaltenen Endpunkte der verwendeten Pfeile. Die so entstehende Punktmenge ist eine Sphäre mit Radius  $v$  und Zentrum  $G$ . Denken wir uns die Sonne  $So$  auf diese Sphäre gehetzt, so erzeugt  $G$  einen Schattenpunkt exakt im der Sonne gegenüberliegenden Punkt  $So'$  der Sphäre (Punktspiegelung an  $G$ ). Den Schatten auf dem horizontalen Zifferblatt  $H$  erhalten wir durch eine Punktabbildung der Sonnenposition  $So$  resp. des Spiegelpunktes  $So'$  auf die Horizontalebene  $H$ . Dabei handelt es sich ersichtlicherweise um eine Zentralprojektion des Punktes  $So$  resp.  $So'$  vom Zentrum  $G$  aus auf  $H$ . Jeder Punkt auf  $H$  ist das Bild eines Punktes  $So$  und auch des entsprechenden Punktes  $So'$ . Wir erhalten demnach alle Bilder, wenn wir uns auf die obere Halbkugel beschränken und nur die Punkte  $So$  projizieren.

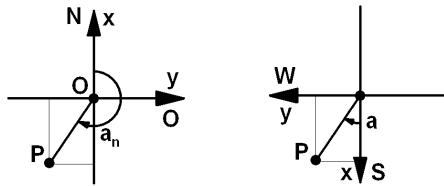
**Definition:**

Diese Zentralprojektion heißt **gnomonische Projektion**.

**Wichtig:** Bei der gnomonischen Projektion verwenden wir die **Windrose der Geometer und Navigatoren**. Die  $x$ -Achse schaut gegen Norden, die  $y$ -Achse gegen Osten und die  $z$ -Achse gegen den Zenit. Das Azimut wird von der  $x$ -Achse aus im Uhrzeigersinn (linksorientiert) gemessen. Bei der **Windrose der Astronomen** dagegen schaut die  $x$ -Achse gegen Süden, die  $y$ -Achse gegen Westen und die  $z$ -Achse ebenfalls gegen den Zenit. Das Azimut wird von der  $x$ -Achse aus im Uhrzeigersinn (linksorientiert) gemessen. Die beiden Systeme können ineinander übergeführt werden durch eine Achsendrehung um einen gestreckten Winkel ( $180^\circ$ ) um die  $z$ -Achse.

**Es gilt:**  $a = a_{geogr} = a_{Karte CH} + \text{Meridiankonvergenz}, a_n = a + 180^\circ$  (**Azimut**.)

Abbildung 4.5: Windrose der Geometer und Astronomen



**Achtung:** Wenn wir  $\varphi$  kleiner und dann schliesslich 0 machen, fällt die Achse der benutzten Sphäre im Grenzfall  $\varphi = 0$  in die Projektionsebene. (Das geschieht „exakt“ an Orten auf dem Erdäquator.) Die Idee der Projektion ist dann zum Scheitern verurteilt, weil die zu projizierende Gnomonspitze in die Ebene  $H$  fällt, man andererseits aber einen Ursprung des Koordinatensystems  $O$  braucht, den man vorher als Schnittpunkt der Sphärenachse mit  $H$  definiert hat. Es handelt sich hier um einen ausgesprochenen Spezialfall, der in der Realität wohl praktisch nie exakt eintritt. Falls das doch geschieht, kann man sich damit behelfen, dass man die Ebene  $H$  parallel zur Sphärenachse wählt, sodass  $G$  nicht in  $H$  liegt. Dann kann man wieder projizieren.

Das wirklich ernstzunehmende Problem, mit dem wir später konfrontiert sein werden, taucht aber auf, wenn  $\varphi$  negativ wird, wir uns also auf der Südhalbkugel befinden. Dann liegt nämlich die Projektions-ebene  $H$  bei Beibehaltung des Koordinatenursprungs  $O$  auf derselben Seite der Sphäre wie die Sonne. Eine Projektion ist zwar möglich, doch es erfolgt dann kein Schattenwurf mehr von der Gnomonspitze  $G$  auf  $H := H_1$ . (Vgl. Skizze Seite 28. Wie dort gezeigt wird, können wir das Problem beheben, indem wir statt  $H$  eine zweite, zu  $H = H_1$  parallele Ebene  $H_2$  wählen, die nun auf der andern Seite von  $G$  oder der Sphäre liegt, aber gleich weit entfernt von  $G$ . u.s.w.. Ich werde im Folgenden in diesem Script  $H_1$  die **gnomonische Nordebene** und  $H_2$  die **gnomonische Südebene** nennen.)

Die gnomonische Projektion hat sehr wichtige, unmittelbar einsichtige Eigenschaften, die wir für das Folgende festhalten wollen:

#### Eigenschaften:

1. Die gnomonische Projektion ist bijektiv auf der Halbsphäre ohne den Rand resp. auf den Punkten von  $H$ .
2. Grosskreisbogen (konstantes Azimut!) werden auf Geraden abgebildet.  
(Schnittgeraden der Ebenen durch die Grosskreisbogen mit  $H$ .)
3. Kleinkreisbogen werden auf Kegelschnitte abgebildet.  
(Schneidet man einen Projektionskegel, d.h. ein Gebilde, das durch lineare und quadratische Ausdrücke ( $\sim$  Kleinkreise) beschrieben wird, mit einer Ebene, die durch eine lineare Gleichung beschrieben wird, so erhält man bekanntlich ein Lösungsgebiilde, das durch höchstens quadratische Ausdrücke beschrieben wird.  $\sim$  Kegel( $G$ , Kleinkreis)  $\cap H$ .)

**Beispiele:** Sei  $N$  der den Himmelspol markierende Punkt auf der Sphäre. Der zugehörige Bildpunkt in der Ebene  $H$  ist  $O$ , falls  $H$  nicht parallel zur Erdachse verläuft, der Beobachter sich also exakt auf dem Äquator befindet.

Punkte der Sphäre mit konstantem Azimut  $a$  liegen auf einem Grosskreisbogen durch den Zenit. Die Bildgerade eines solchen Bogens geht somit durch  $F$  (Geradenbüschel).

Zu jedem Stundenwinkel  $t$  gehört auf der Sphäre ein Meridian (Stundenkreis, Grosskreis). Das Bild in der Ebene ist eine Gerade (Stundengerade). Alle Meridiane auf der Sphäre schneiden sich in  $N$ . Alle

Stundengeraden schneiden sich daher in  $O$ .

Im Falle wo sich der Beobachter auf dem Äquator befindet,  $H$  also parallel zur Erdachse liegt, existiert der Schnittpunkt  $O$  nicht. Alle Meridianebenen der Sphäre schneiden sich in der Polachse der Sphäre, d.h. einer Geraden durch  $G$ , die in diesem Falle parallel zu  $H$  verläuft. Die Bilder der Stundenkreise in  $H$  sind dann allesamt parallele Geraden.

Die Schnittkurven der Normalebenen zur Erdachse mit der Sphäre sind Kleinkreise, ausser bei der Äquatorialebene, wo ein Grosskreis entsteht. Die Punkte dieser Kreislinien haben alle dieselbe Deklination. Die Bilder sind wie erwähnt Kegelschnitte.

### Arbeit

Wir befinden uns auf der Nordhalbkugel. Überlege Dir anhand einer Skizze, dass die folgenden Aussagen richtig sind:

1. Wenn die Deklination grösser als  $90^\circ - \varphi$  ist, ist das Bild eines achsennormalen Kleinkreises eine Ellipse. (Polarregion, Polartag im Sommer!)
2. Wenn die Deklination gleich  $90^\circ - \varphi$  ist, ist das Bild eines achsennormalen Kleinkreises eine Parabel.
3. Wenn die Deklination kleiner als  $90^\circ - \varphi$  ist, ist das Bild eines achsennormalen Kleinkreises eine Hyperbel. (Unsere Breiten: Sonne am Horizont  $\rightsquigarrow H \parallel \vec{v}_{\text{Sonnen}} \rightsquigarrow$  Asymptote.)

#### 4.2.4 Die Berechnung der Koordinaten bei der gnomonischen Projektion

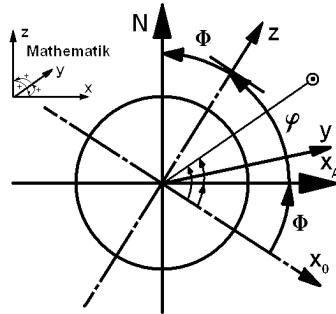
Die Erde bewegt sich bekanntlich in der Ekliptikebene im Jahr einmal um die Sonne. Sie tut das auf einer Bahn, die sich in erster Näherung als Kreisbahn und in zweiter Näherung als kreisnahe Ellipsenbahn manifestiert. Pro Tag bewegt sie sich je nach Position mit leicht veränderlicher Geschwindigkeit vorwärts, wobei diese Geschwindigkeit in erster Näherung als konstant erscheint, in zweiter Näherung jedoch als variabel nach dem Keplerschen Flächensatz: Die Strecke von der Sonne zur Erde überstreicht pro fixe Zeitabstände (z.B. pro Tag) Flächen gleichen Inhalts. In erster Näherung allerdings legt die Erde pro Tag ca.  $\frac{1}{365} \approx 0.0027$  ihrer Bahnlänge um die Sonne zurück. Gerundet auf zwei Stellen hinter dem Komma gibt das den 0.00-ten Teil der Bahnlänge. Diese Wegstrecke wollen wir für diese Überlegungen hier einmal vernachlässigen. Pro Tag dreht sich die Erde bezüglich der Sonne aber einmal um ihre Achse. Diese Bewegung ist für die Sonnenuhr zentral.

Denken wir uns als ruhige Erdbewohner die Erde fix (wie im geozentrischen System) und die Sonne als beweglich, die von uns aus gesehen ihren täglichen Lauf am Firmament vollführt, so ist es offensichtlich, dass sich bei dieser Betrachtungsweise die Sonne in erster Näherung auf einer Kreisbahn um die Erdachse bewegt. Je nach Jahreszeit jedoch schneidet diese Kreisbahnebene der Sonne die Erdachse in einem mehr nördlichen oder mehr südlichen Punkt. Die Deklination der Sonne im fixen Äquatorsystem durchläuft im Jahr einmal die Winkelwerte von  $-23.5^\circ$  bis  $+23.5^\circ$  und wieder zurück. Pro Tag macht das durchschnittlich  $0.258^\circ \approx \frac{1}{4}^\circ$ , was bei einer gewöhnlichen Sonnenuhr nicht so sehr ins Gewicht fällt. Wir können daher davon ausgehen, dass die Deklination der Sonne innerhalb eines Tages in erster Näherung konstant bleibt.

Die Sonne bewegt sich also während eines Tages auf einer Kreisbahn um die Erdachse mit einer in erster Näherung konstanten Deklination  $\delta$  und konstanten Geschwindigkeit. Das heisst, dass der Stundenwinkel  $t$  pro Tag linear zunimmt und den Wertebereich von  $0 h$  bis  $24 h$  durchläuft. Der Ortsvektor der Sonne in diesem System ist auf Seite 23 bestimmt worden:  $\vec{v} = \vec{v}_{O \text{ fix}} = \begin{pmatrix} v \cos(\delta) \cos(t) \\ v \cos(\delta) \sin(t) \\ v \sin(\delta) \end{pmatrix}$ . Für einen einzigen Tag betrachtet ist in dieser Formel in erster Näherung nur  $t$  variabel. Das fixe Ortsäquatorsystem wäre daher das für die Beschreibung des Sonnenlaufs einfachste System. Am Nordpol stimmt es mit dem

Ortshorizontsystem überein, und bis aufs Vorzeichen der Polachse auch am Südpol. Doch leider sonst nicht.

Abbildung 4.6: Horizont- und Äquatorialsystem, Drehung um die  $y$ -Achse



Im Moment studieren wir ein Zifferblatt einer Sonnenuhr, das an unserem Standort horizontal positioniert ist. Daher müssen wir den Schattenverlauf eines Punktes der vertikalen  $z$ -Achse des Ortshorizontsystems in einer zur Grundebene parallelen Ebene berechnen können. Wir lesen die Schattenposition und somit die Zeit an einer Stabspitze einer Sonnenuhr also im Ortshorizontsystem ab. Daher müssen wir die Beschreibung des Sonnenverlaufs durch  $\vec{v}_{O \text{ fix}}$  (und gespiegelt die Beschreibung des Schattenverlaufs) ins Ortshorizontsystems umrechnen. Beachtet man, dass die Koordinaten eines Vektors im Ortsäquatorsystem durch eine Drehung um  $\Phi = 90^\circ - \varphi$  um die  $y$ -Achse in die Koordinaten des Ortshorizontsystems übergehen, so kann man die Koordinatentransformation als Matrixprodukt erhalten (vgl. Algebra-Script des Autors (Bibl.: A8), Matrizenrechnung, Drehungen von Vektoren in Koordinatensystemen):

#### Formel:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{H \text{ fix}} &= D_{y, \Phi} \cdot \vec{v}_{O \text{ fix}} = \begin{pmatrix} \cos(\Phi) & 0 & -\sin(\Phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\Phi) & 0 & \cos(\Phi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \cos(\delta) \cos(t) \\ v \cos(\delta) \sin(t) \\ v \sin(\delta) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (v \cos(\delta) \cos(t)) \cdot \cos(\Phi) - (v \sin(\delta)) \cdot \sin(\Phi) \\ v \cdot 1 \cdot \cos(\delta) \sin(t) \\ (v \cos(\delta) \cos(t)) \cdot \sin(\Phi) + (v \sin(\delta)) \cdot \cos(\Phi) \end{pmatrix} = v \cdot \begin{pmatrix} \cos(\delta) \cdot \cos(t) \cdot \cos(\Phi) - \sin(\delta) \cdot \sin(\Phi) \\ \cos(\delta) \sin(t) \\ \cos(\delta) \cdot \cos(t) \cdot \sin(\Phi) + \sin(\delta) \cdot \cos(\Phi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

#### 4.2.5 Koordinatentransformation System der gnomonischen Projektion – Horizontsystem

##### Horizontale Projektionebene

Im Horizontsystem der Astronomen zeigt die  $x$ -Achse gegen Süden, die  $y$ -Achse gegen Westen und die  $z$ -Achse gegen den Zenit. Im Koordinatensystem der gnomonischen Projektion zeigt die  $x$ -Achse jedoch gegen Norden, die  $y$ -Achse gegen Osten und die  $z$ -Achse ebenfalls gegen den Zenit. Das eine System erhält man somit aus dem andern durch eine Rotation um die  $z$ -Achse um einen gestreckten Winkel. Analog berechnen sich die Koordinaten eines fixen geometrischen Vektors im einen System, wenn man die Koordinaten im andern System kennt. Will man nun die Koordinaten des Vektors  $\vec{s}$  der gnomonischen Projektion (vgl. Seite 22) aus den Koordinaten des Vektors  $\vec{v}_{H \text{ fix}}$  berechnen, so muss man daher nur die Vektorlänge anpassen (Streckung) und das Vorzeichen der  $z$ -Koordinate wechseln:

$$\vec{v}_{H \text{ fix}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad |\vec{v}_{H \text{ fix}}| = v, \quad |\vec{s}_{Gnomon}| = s \Rightarrow \vec{s}_{Gnomon} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \frac{s}{v} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ -v_3 \end{pmatrix}.$$

Damit wir mit Hilfe von  $\vec{s}_{Gnomon}$  einen Punkt des Zifferblattes finden können, müssen wir  $\vec{s}_{Gnomon}$  mit dem Faktor  $\frac{-g}{s_3} = \frac{-g}{-v_3} = \frac{g}{v_3}$  strecken, damit die 3. Koordinate des Vektors in die Zifferblatteinene zeigt und also  $s_3 = -g$  gilt. Die Vektoren der Punkte  $P$  des Zifferblatts in der Grundebene des Koordinatensystems der gnomonischen Projektion (in der Ebene  $H_1$ ) haben somit die Koordinaten

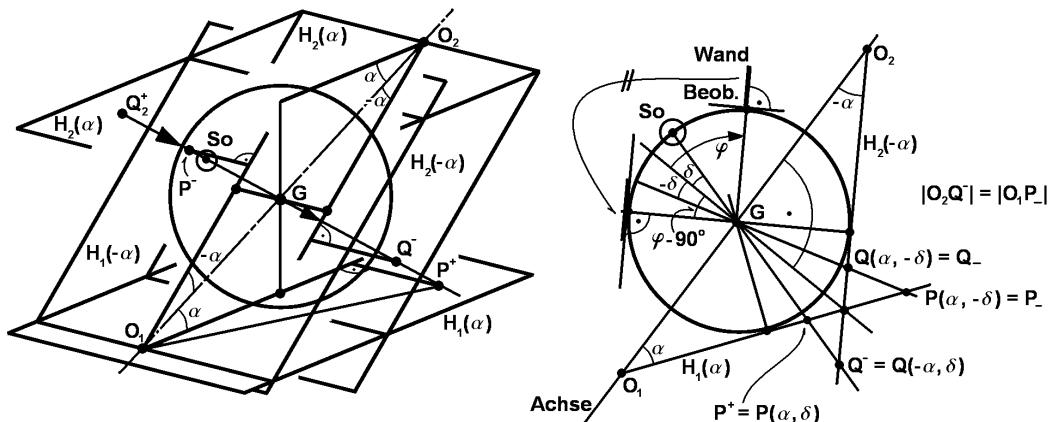
$$\overrightarrow{OP} = \frac{g}{v_3} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{g}{\cos(\delta) \cos(t) \cdot \sin(\Phi) + \sin(\delta) \cdot \cos(\Phi)} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\delta) \cos(t) \cdot \cos(\Phi) - \sin(\delta) \cdot \sin(\Phi) \\ \cos(\delta) \sin(t) \end{pmatrix}$$

### Verallgemeinerung für vertikale Projektionsebenen

Beachten wir noch das für die Südhalbkugel und die Ebene  $H_2$  Gesagte (vgl. Seite 25), so erhalten wir eine allgemeinere Formel. Wenn wir uns auf der Südhalbkugel befinden, so liegt die Projektionsebene  $H$  bei Beibehaltung des Koordinatenursprungs  $O$  auf derselben Seite der Sphäre wie die Sonne. Eine Projektion ist zwar möglich, doch es erfolgt dann kein Schattenwurf mehr von der Gnomonspitze  $G$  auf  $H := H_1$ . (Vgl. Skizze unten.) Das Problem können wir aber beheben, wenn wir statt  $H$  eine zweite, zu  $H = H_1$  parallele Ebene  $H_2$  wählen, die nun auf der andern Seite von  $G$  oder der Sphäre liegt, aber gleich weit entfernt von  $G$ . Der Koordinatenursprung  $O_2$  von  $H_2$  erhalten wir durch Spiegelung des Ursprungs  $O_1$  von  $H_1$  an  $G$ . Wenn wir so  $H_1$  mit  $H_2$ ,  $O_1$  mit  $O_2$  und auch die Deklination der Sonne  $\delta_1$  mit  $-\delta_1 = \delta_2$  vertauschen, ändert sich an den Absolutwerten der neuen Koordinaten in  $H_2$  nichts. Nur das Vorzeichen ist zu beachten. Man kann dann bezüglich  $H_2$  statt mit  $\varphi$  neu mit  $|\varphi|$  rechnen.  $x$  Werte, die bezüglich  $H_1$  und  $O_1$  positiv waren, werden jetzt bezüglich  $H_2$  und  $O_2$  negativ und umgekehrt. Mit  $\theta = \text{sgn}(\varphi) \cdot \delta$  an Stelle von  $\delta$  erreicht man die Vertauschung von  $\delta_1$  mit  $-\delta_1 = \delta_2$ , wenn wir uns auf der Südhalbkugel befinden. Dann ist nämlich  $\varphi$  negativ und somit  $\text{sgn}(\varphi) = -1$ . Der Vorzeichenwechsel der  $x$ -Koordinate auf der Südhalbkugel ( $H_2$ ) kann mit  $x_2 = \text{sgn}(\varphi) \cdot x_1$  gesteuert werden. Wie früher schon erwähnt, nennen wir im Folgenden  $H_1$  die **gnomonische Nordebene** und  $H_2$  die **gnomonische Südebene**.

**Idee:** Eine vertikale Wand in Ost-West-Richtung an unserem Standort mit der geographischen Breite  $\varphi$  entspricht einer horizontalen Wand auf dem selben Meridianhalbkreis mit der Breite  $90^\circ - \varphi$ .

Abbildung 4.7: Gnomonische Projektion auf der Nord- und Südhalbkugel



**Formel** Sei  $\Phi = 90^\circ - \varphi$ ,  $\theta = \delta \cdot \text{sgn}(\varphi)$ ,  $\rightsquigarrow \vec{OP} =$

$$\frac{g}{\cos(\theta) \cdot \cos(t) \cdot \sin(|\Phi|) + \sin(\theta) \cdot \cos(\Phi)} \cdot \begin{pmatrix} \text{sgn}(\varphi) \cdot (\cos(\theta) \cdot \cos(t) \cdot \cos(\Phi) - \sin(\theta) \cdot \sin(|\Phi|)) \\ \cos(\theta) \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

**Bemerkung:** Im Falle einer vertikalen Wand in exakter West–Ost–Richtung auf der Nordhalbkugel ist mit  $\varphi_1 = \varphi - 90^\circ$  rechnen ( $\rightsquigarrow$  Südhalbkugel).

**Achtung:** In einem Plot schaut die  $x$ –Achse jetzt ungewohnterweise nach Norden und die  $y$ –Achse nach Westen!

## Arbeiten

1. Wir wählen die Stabspitze  $G$  als Ursprung des Ortshorizontsystems. Erstelle einen Parametric Plot 3D (z.B. mit *Mathematica*, Befehl „ParametricPlot3D“) der Sonnenbahnen im Raum um die Erde, die durch das Ortshorizontsystem gegeben sei, während eines Tages. Wähle dazu ein fixes, sinnvolles  $v$ , eine Serie von Deklinationen  $\delta$  und halte  $t$  variabel. Dabei ist  $\Phi = 90^\circ - \varphi$  und  $\varphi = 47.09N$  (Biel).
2. Sei wieder  $G$  der Ursprung des Ortshorizontsystems. In diesem Koordinatensystem bestimmt  $\vec{v}_{H \text{ fix}} = \vec{v}_{H \text{ fix}}(t, \delta, \Phi)$  als Ortsvektor eine Gerade  $p$  durch  $G$ , die wir hier projizierende Gerade nennen. Man beachte, dass das Zentrum der Sonne  $S_0$  ebenfalls auf dieser Geraden liegt. Die Bewegung der Sonne „führt diese Gerade  $p$  quasi mit“. Weiter sei die horizontale Projektionsebene  $H$  (Zifferblatt) mit  $z = -g$  gegeben. Die Richtung der Geraden  $p$  gibt daher die Projektionsrichtung des Schattenpunkts  $P$  in  $H$ .  
Stelle  $p$  und  $H$  algebraisch dar. Halte  $\delta$ ,  $\Phi$  und  $g$  als Parameter fest,  $t$  sei variabel.  $\rightsquigarrow P = P(t)$ . Berechne nun den Schnittpunkt  $P = P(t) = p(t) \cap H$ . Plote danach z.B. mit *Mathematica* eine sinnvolle Auswahl der Kurven, die gegeben sind durch die Punktmenge:  

$$\{P(t) \mid t \in (-6, +6), \text{ Zeitmass } t \text{ in Stunden}, \delta, \Phi \text{ Parameter}\}.$$

Als Ergänzung kann man in den Plot noch die Stundengeraden aufnehmen, um ein etwas aussagenkräftigeres Bild zu erhalten.
3. Zeichne entsprechend wie bei der horizontalen Ebene für die geographische Breite  $\varphi$  ein Zifferblatt zu einer senkrechten Wand in exakter Ost–West–Richtung. (Beachte, dass ein solches Zifferblatt einem horizontalen Zifferblatt auf der Südhalbkugel für die Breite  $\varphi - 90^\circ$  entspricht. Skizze!)

## Zur Lösung

Bsp.:

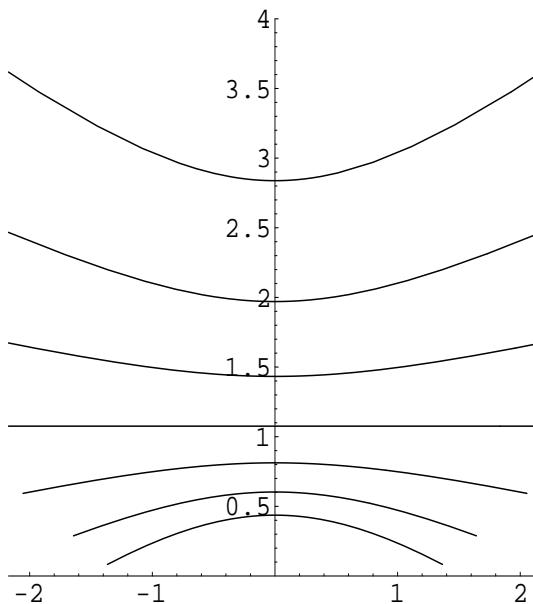
*Mathematica*–Programm für den Plot einer Serie von Deklinationslinien ( $23^\circ.5, 16^\circ, 8^\circ, 0^\circ, -8^\circ, -16^\circ, -23^\circ.5$ ), mit Output:

**Mathematica-Programm:**

```
(* \[CurlyPhi] generiert den kleinen griechischen Buchstaben fi *)
(* ===> INPUT, Altgrad *) \[CurlyPhi] = 47.09;
Print[{"Test: 180 Degree = ", 180 Degree // N}];
g = 1; hour = 2 Pi/24 (* Tage *);
fi = (90 - Abs[\[CurlyPhi]]);
d1 = 23.5; d2 = 16; d3 = 8; d4 = 0; d5 = -8; d6 = -16; d7 = -23.5;
(* Ursprung versetzt, vgl. Gnomonstab parallel Erdachse! *)
ursprung[\[CurlyPhi]_] := {0, -g/Tan[\[CurlyPhi] Degree]};
v[d_, fi_, t_] :=
  g/(Cos[d Degree] Cos[t hour] Sin[fi Degree] +
    Sin[d Degree] Cos[fi Degree]) {(Cos[d Degree] Sin[t hour]),
    Sign[\[CurlyPhi]]((Cos[d Degree] Cos[t hour] Cos[fi Degree] -
      Sin[d Degree] Sin[fi Degree])) );
p2 = ParametricPlot[
  Evaluate[{v[d1, fi, t], v[d2, fi, t], v[d3, fi, t], v[d4, fi, t],
    v[d5, fi, t],
    v[d6, fi, t], v[d7, fi, t]}], {t, -4.1, 4.1},
  AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> {0, 4}];
```

**Output:**

Abbildung 4.8: Deklinationslinien bei  $23^{\circ}.5$ ,  $16^{\circ}$ ,  $8^{\circ}$ ,  $0^{\circ}$ ,  $-8^{\circ}$ ,  $-16^{\circ}$ ,  $-23^{\circ}.5$



Eine Überlagerung des Outputs von Seite 30 mit demjenigen von Seite 18 erzieht man *anschliessend* mit dem folgenden Programm:

**Mathematica-Programm:**

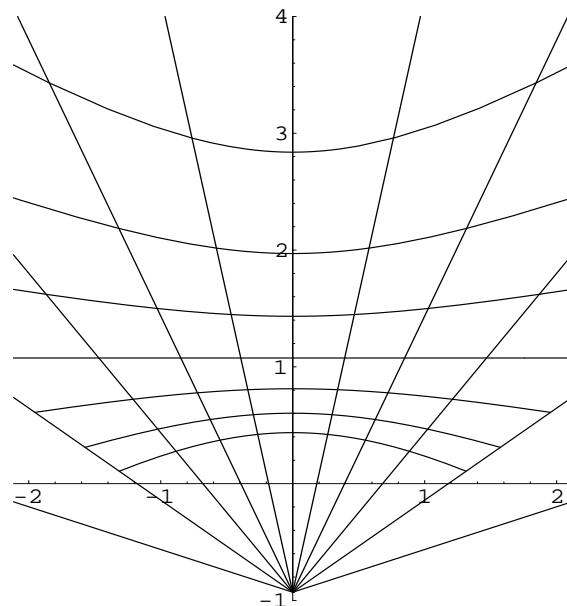
---

```
Show[Graphics[
  Table[Line[{ursprung[\[CurlyPhi]], tab2[\[CurlyPhi]][[n]]}],
  {n, 1, Length[tab1[\[CurlyPhi]]]}], AspectRatio -> Automatic];
p3 = ParametricPlot[
  Evaluate[{v[d1, fi, t], v[d2, fi, t], v[d3, fi, t], v[d4, fi, t],
    v[d5, fi, t],
    v[d6, fi, t], v[d7, fi, t]}], {t, -4.0, 4.0},
  AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> {-1, 4},
  Epilog -> {Table[
    Line[{ursprung[\[CurlyPhi]],
      4(tab2[\[CurlyPhi]][[n]] - ursprung[\[CurlyPhi]]) +
      ursprung[\[CurlyPhi]]}], {n, 1,
      Length[tab1[\[CurlyPhi]]]}]}];
```

---

**Output:**

Abbildung 4.9: Ueberlagerung der Deklinationslinien mit den Stundengeraden



Zifferblatt für eine vertikale Wand in Ost-West-Richtung,  $\varphi = 47.09^\circ$ ,  $\delta = 23.5^\circ, 16^\circ, \dots, -23.5^\circ$ ,  $t$  in Stunden,  $t = -5, -4, -3, \dots, 5$ ,  $t = 0$  für 12<sup>00</sup> Uhr mittags:

**Mathematica-Programm:**

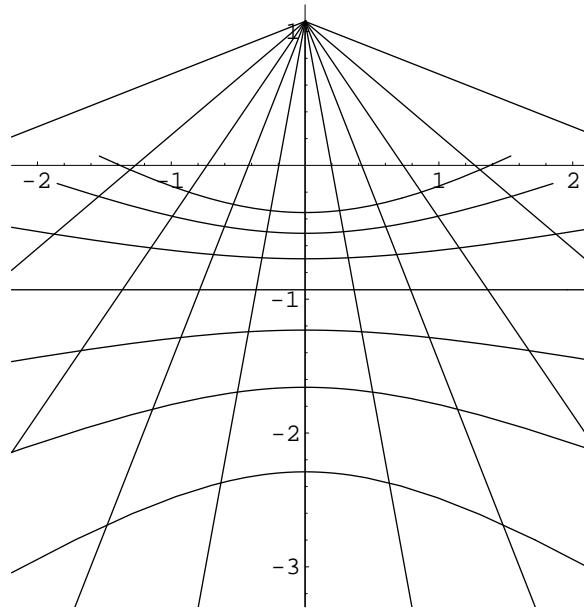
---

```
(* \[CurlyPhi] generiert den kleinen griechischen Buchstaben fi *)
(* "Putzmaschine" *) (*Old Form : Remove["Global`*"]*)
Remove["Global`*"];
(* ===> INPUT, Altgrad *) \[CurlyPhi] = 47.09 - 90;
d1 = 23.5; d2 = 16; d3 = 8; d4 = 0; d5 = -8; d6 = -16; d7 = -23.5;
fi = (90 - Abs[\[CurlyPhi]]); g = 1;
(* Definitionen und Rechnungen *)
hour = 2 Pi/24 (* Tage *);
MP[t_, \[CurlyPhi]_] := g Tan[t hour]/Sin[(90 - \[CurlyPhi]) Degree];
tab1[\[CurlyPhi]_] :=
Table[MP[t, \[CurlyPhi]], {t, -5, 5, 1}]; tab1[\[CurlyPhi]];
tab2[\[CurlyPhi]_] :=
Table[{tab1[\[CurlyPhi]][[n]], g/Tan[(90 - \[CurlyPhi]) Degree]}, {n, 1, Length[tab1[\[CurlyPhi]]]}]; tab2[\[CurlyPhi]];
v[d_, fi_, t_] :=
g/(Cos[Sign[\[CurlyPhi]] d Degree] Cos[t hour] Sin[fi Degree] +
Sin[Sign[\[CurlyPhi]] d Degree] Cos[fi Degree]) {(Cos[
Sign[\[CurlyPhi]] d Degree] Sin[t hour]),
Sign[\[CurlyPhi]]((Cos[Sign[\[CurlyPhi]] d Degree] Cos[t hour] Cos[
fi Degree] -
Sin[Sign[\[CurlyPhi]] d Degree] Sin[fi Degree]))};
(* Ursprung versetzt, vgl. Gnomonstab parallel Erdachse! *)
ursprung[\[CurlyPhi]_] := {0, -g/Tan[\[CurlyPhi] Degree]};
ParametricPlot[
Evaluate[{v[d1, fi, t], v[d2, fi, t], v[d3, fi, t], v[d4, fi, t],
v[d5, fi, t],
v[d6, fi, t], v[d7, fi, t]}], {t, -4.4, 4.4},
AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> {-3.3, 1.2},
Epilog -> {Table[
Line[ {ursprung[\[CurlyPhi]],
3.7 (tab2[\[CurlyPhi]][[n]] - ursprung[\[CurlyPhi]]) +
ursprung[\[CurlyPhi]]}, {n, 1,
Length[tab1[\[CurlyPhi]]}]}];

```

---

**Output:**

Abbildung 4.10: Zifferblatt für eine vertikale Wand in Ost-West-Richtung,  $\varphi = 47.09^\circ$ 

## 4.3 Der Weg der Sonne im Tierkreis, Transformationen, Formeln

### 4.3.1 Wichtige Konstanten und Daten zum Sonnenlauf

**Länge des tropischen Jahres:** 365.2422 Tage.

**Maximale Deklination:**  $23^\circ.44$  (= Schiefe der Ekliptik  $\varepsilon$ , Sommersonnenwende).

**Minimale Deklination:**  $-23^\circ.44$  (Wintersonnenwende).

**Deklination =  $0^\circ$ :** Tag-und-Nacht-Gleiche, Vorzeichenwechsel.

**Problem beim Stundenwinkel der Sonne:** Ungleichförmige, ständige Zunahme.

Da sich die Erde um die Sonne dreht und sie zugleich um die eigene Achse rotiert, sind wir mit der Überlagerung von zwei Bewegungen konfrontiert. Nach einem Tag ist die Erde um die Sonne durchschnittlich um ca.  $\frac{1}{365}$  ihrer Bahnlänge weitergewandert, je nach Definition der Jahreslänge. Bezuglich der Fixsterne (siderischer Tag) dauert der **Sonnentag** (wahrer Tag) ca. 3 Minuten und 56 Sekunden weniger lang. (Vgl. unter 2.1.3: 365 Sonnentage = 366 Sterntage.)

### Positionsmessung der Sonne an der Himmelssphäre (Tierkreis):

- ~ Bewegliches Aequatorsystem: Vom Frühlingspunkt  $\Upsilon$  (Tag–und–Nacht–Gleiche) aus. Z.B. **Rektaszension AR**: Winkel zwischen der Ebene (Erdachse, Frühlingspunkt) und der Ebene (Erdachse, Sonne). Positiv im Gegenuhrzeigersinn vom nördlichen Himmelpol aus gesehen.
- ~ Ekliptikalsystem: **Länge L**: Winkel zwischen Visierlinie zur Sonne und Visierlinie zum Frühlingspunkt, Orientierung analog Rektaszension (hier geozentrisch).

### Zur Position des Frühlingspunktes:

Infolge der Präzession wandert der Frühlingspunkt in einem platonischen Jahr einmal durch den Tierkreis. Pro 2160 Jahren rückt er um durchschnittlich  $30^\circ$  weiter, das macht in 72 Jahren ca.  $1^\circ$ . Vor ca. 2000 Jahren, zu Lebzeiten des Claudius Ptolemaeus v. Alexandria, ca. 150 n Chr. (Lehrer des geozentrischen Systems, Hauptwerk *Almagest* oder *Megale syntaxis* oder *Constructio mathematica*), standen die Sternbilder ungefähr gerade noch in den Tierkreiszeichen mit gleichen Namen. Der Frühlingspunkt stand noch an der Grenze zum Widder (hochmittags, heute 12h 00, alter Tagesbeginn!) und ging dann ins Sternbild des Fisches über (rückläufig!). Das Fischzeitalter begann (Zeitenwende, Beginn des Christentums). Heute und in Zukunft ist der Frühlingspunkt daran, ins Sternbild des Wassermanns zu wandern. Das Zeitalter des Wassermanns beginnt. Der Tierkreisabschnitt des Widders ist jedoch geblieben. Der Tierkreis hat sich von den Zeichen weggeschoben. Dieser Sachverhalt ist den Astrologen wichtig!

### Bewegung der Sonne im Tierkreis:

Nach alter babylonischer Tradition: 12 gleiche Abschnitte der Ekliptik auf der Sphäre ~ **Tierkreiszeichen**, je  $30^\circ$ . Der Tierkreis ist ein Band, dessen Mittellinie die Ekliptik an der Himmelssphäre ist. Die Sonne bewegt sich von der Nordhalbkugel der Erde aus gesehen von Ost nach West und somit ebenso der Tierkreis. Im April/ Mai steht die Sonne am Mittag 12h 00 im Widder, im März/ April entsprechend im Widder, im Februar/ März im Wassermann etc.. Wenn im April/ Mai um 12h 00 wahre Zeit die Sonne im Sternbild des Widders (Tierkreiszeichen Stier) steht, steht der Widder also zu dieser Zeit im Süden. Um 13h 00 steht schon langsam das Sternbild des Stiers im Süden (Tierkreiszeichen Zwillinge), das Sternbild des Widders ist um eine Stunde (Winkelstunde) nach Westen gewandert etc..

### Arbeit

1. Verfolge auf einer Sternkarte (z.B. Bibl. A13) den Weg der Sonne durch den Tierkreis. Suche die entsprechenden Sternbilder.
2. Zeichne den Tierkreis graphisch auf und versehe ihn mit der Gradeinteilung ( $360^\circ$ ), vermutlich sumerisches Jahr. Beginne mit  $0^\circ \cong \Upsilon$ , Widder, 21. März, Sonnendeklination  $0^\circ.00$ . Anschliessend kommt  $30^\circ$ , Stier, 20. April, Sonnendeklination  $11^\circ.47$ .
3. Stelle ein Kalenderprogramm her  
Eingabe: Tag im Monat und Monat.  
Ausgabe: Anzahl Tage seit seit 31.12. letzten Jahres und seit Frühlingspunkt.
4. Suche eine mathematische Beziehung zwischen Länge  $L$ , Schiefe der Ekliptik  $\varepsilon$ , Deklination  $\delta$  und Rektaszension  $AR$ . (Lösung vgl. unten.)
5. Entwerfe mit dem Computer Zifferblätter, die verschiedene Varianten von Deklinationslinien enthalten:
  - (a) Beginn Tierkreiszeichen, 12h 00
  - (b) Beginn Jahreszeiten, 12h 00

(c) Erster Tag des Monats, 12h 00

**Problem:** Im Laufe einer Schaltjahrperiode können Abweichungen auftreten in der Größenordnung von  $0^\circ.3$  in der Länge und  $0^\circ.2$  in der Deklination

**Mathematica-Programm:**

---

```
(* Monatslängen *) Remove[m];
m[n_] := 31; m[2] = 28; m[4] = 30; m[6] = 30; m[9] = 30; m[11] = 30;
m[14] = 28;
(* Für Schaltjahre *) m[-1] = 1;
(* Anzahl Tage seit 31.12. letzten Jahres *)
tage[tag_, mon_] := Sum[m[n], {n, 1, mon}] - m[mon] + tag;
(*Anzahl Tage seit Frühlingsbeginn*)
fpTage[tag_, mon_] := tage[tag, mon] - tage[21, 3];

(* Test des Programms: *)

{{"Test", "21.3.", fpTage[21, 3]}, {"Test", "29.8.", fpTage[29, 8]}, {"Test",
"21.12.", fpTage[21, 12]}, {"Test", "31.12.", fpTage[20, 15]},
 {"Test", "21.3.", tage[21, 3]}, {"Test", "29.8.", tage[29, 8]}, {"Test",
"21.12.", tage[21, 12]}, {"Test", "31.12.", tage[31, 12]}}
```

---

**Output:**

---

```
{{"Test", "21.3.", 0}, {"Test", "29.8.", 161}, {"Test", "21.12.",
275}, {"Test", "31.12.", 364}, {"Test", "21.3.", 80}, {"Test", "29.8.",
241}, {"Test", "21.12.", 355}, {"Test", "31.12.", 365}}
```

---

### 4.3.2 Wichtige Koordinatentransformationen

Wir betrachten sphärische Koordinaten (räumliche Polarkoordinaten) mit  $r = \text{const.} = 1$  und die zugehörigen Polarkoordinaten. Dabei greifen wir auf die bekannten Umrechnungsformeln zurück.

#### Systempaare und Orientierung

Die auf den folgenden Seiten gezeigten Abbildungen zeigen die Systeme des **Ortshorizonts** (Abb. Seite 36), des **Ortsäquators** (Seite 36 und 39), der **Ekliptik** (Seite 38), des **Himmelsäquators** (Seite 38 und 39).

		Ortshorizont	Ortsäquator	Himmelsäquator	Ekliptik
	Orientierung	Gemeinsame Achse			
Ortshorizont H	links	*	y		
Ortsäquator OA (A)	links	y	*	z	
Himmelsäquator HA (A)	rechts		z	*	x
Ekliptik (E)	rechts			x	*

**Konsequenz**  $\leadsto$  Damit erhält man folgende **Verkettung** (unter Einbezug weiterer notw. Systeme):

Ortshorizont gnom.  $\xleftrightarrow{z}$  Ortshorizont astr.  $\xleftrightarrow{y}$  Ortsäquator  $\xleftrightarrow{z}$  Himmelsäquator  $\xleftrightarrow{x}$  Ekliptik

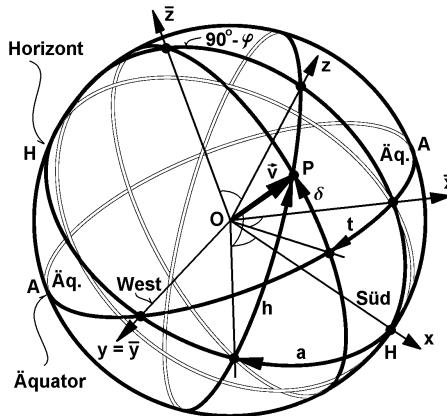
*Ortshorizont:* gnomonisch horizontal  $\longleftrightarrow$  gnomonisch schief, parallel verpflanzt.

*Ekliptik:* gewöhnlich ekliptikal  $\xrightarrow{z}$  anomalistisch ekliptikal.  $\rightsquigarrow$  **6 Koordinatensysteme!**

**Wichtig:** über diese Verkettung lässt sich jedes dieser Systeme durch eine einfache Achsendrehung ( $\rightsquigarrow$  Drehmatrix!) und eventuell eine Spiegelung an einer Ebene (bei Umkehrung der Orientierung) in jedes andere dieser Systeme überführen.

### Systempaar Ortshorizont–Ortsäquator

Abbildung 4.11: Horizontsystem und Ortsäquatorialsystem, beide linksorientiert



Bekanntlich gilt (vgl. Skizze Seite 36):

$$\vec{v}_H = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(h) \cos(a) \\ \cos(h) \sin(a) \\ \sin(h) \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_{AO} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\delta) \cos(t) \\ \cos(\delta) \sin(t) \\ \sin(\delta) \end{pmatrix}$$

Wegen der Lage der Achsen gilt  $y = \bar{y}$ , denn die  $y$ -Achse ist Drehachse. Der Vektor  $\vec{v}_{AO}$  im  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ -System wird in positiver Drehrichtung um  $\Phi$  in den entsprechenden Vektor  $\vec{v}_H$  im  $(x, y, z)$ -System gedreht. Umgekehrt kann man  $\vec{v}$  fix halten und das  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ -System um  $-\Phi$  in das  $(x, y, z)$ -System drehen. Mit  $\Phi = 90^\circ - \varphi$  erhält man mit Hilfe der Drehmatrix  $D_{\Phi,y}$ :

$$\vec{v}_H = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = D_{\Phi,y} \cdot \vec{v}_{AO} = \begin{pmatrix} \cos(\Phi) & 0 & -\sin(\Phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\Phi) & 0 & \cos(\Phi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \cos(\Phi) - \bar{z} \sin(\Phi) \\ \bar{y} \\ \bar{x} \sin(\Phi) + \bar{z} \cos(\Phi) \end{pmatrix}$$

Mit der vorhin gewonnenen Beziehung erhalten wir somit:

$$\vec{v}_H = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(h) \cos(a) \\ \cos(h) \sin(a) \\ \sin(h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\delta) \cos(t) \cos(\Phi) - \sin(\delta) \sin(\Phi) \\ \cos(\delta) \sin(t) \\ \cos(\delta) \cos(t) \sin(\Phi) + \sin(\delta) \cos(\Phi) \end{pmatrix}$$

Im Ortshorizontsystem lässt sich aus  $x$  und  $y$  wieder  $a$  und aus  $z$  wieder  $h$  berechnen. Dazu sind die *Arcus*-Funktionen notwendig. Diese sind jedoch als Umkehrfunktionen von periodischen Funktionen nur willkürlich und somit nur künstlich eindeutig definierbar. Es ist daher notwendig, mit Hilfe der Betragsfunktion das Vorzeichen der  $x$  und  $y$ -Werte in die Arcusfunktionen einzubinden und den Definitionsbereich jener auf diese Weise auszudehnen.

### Zur Ausdehnung der Arcus–Funktionen

Wir betrachten einen Punkt  $P$  des  $(x, y)$ -Koordinatensystems. In kartesischen Koordinaten sei  $P = P(x, y)$  und in Polarkoordinaten  $P = P(r, \alpha)$ . Zwischen  $x, y$  und  $\alpha$  gelten die Beziehungen:

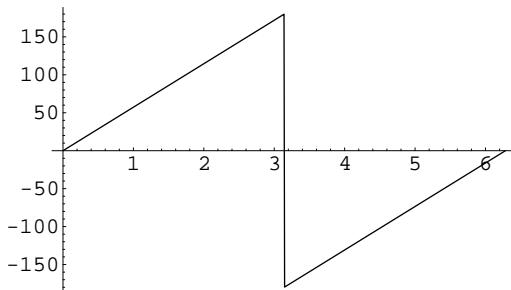
$x$	$y$	$\alpha$	Formel
0	$> 0$	$+90^\circ$	$\alpha = 90^\circ \cdot \text{sgn}(y), \text{ sgn}(y) = \frac{y}{ y }$
0	$< 0$	$-90^\circ$	$\alpha = 90^\circ \cdot \text{sgn}(y)$
$> 0$	0	$0^\circ$	$\alpha = 90^\circ \cdot (1 - \text{sgn}(x))$
$< 0$	0	$180^\circ$	$\alpha = 90^\circ \cdot (1 - \text{sgn}(x))$
$\neq 0$	$\neq 0$		$\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 90^\circ \cdot \text{sgn}(y) \cdot (1 - \text{sgn}(x))$ $\leadsto \alpha := \text{GradTan}(x, y)$

Die folgenden Mathematica-Zeilen führen nun zum unten gezeigten Diagramm.

**Mathematica-Programm:**

```
a[x_, y_] := 180/Pi ArcTan[y/x] + 90 Sign[y] (1 - Sign[x]);
x[t_] := Cos[t]; y[t_] := Sin[t];
Plot[Evaluate[a[x[t]], y[t]]], {t, 0, 2Pi}];
```

Abbildung 4.12:  $\text{GradTan}$



$\text{GradTan}$  gibt zu beliebigen  $x$  und  $y$ -Werten den Winkel in Grad in einem Intervall von  $-180^\circ$  bis  $+180^\circ$ . Das Sprungverhalten an den Sprungstellen wird durch den  $\arctan$  bestimmt. Es hängt bei der Verwendung von Computerprogrammen, die diese Funktion implementiert haben, von der Programmierung der Funktion ab. Damit erhalten wir nun:

**Formel:**  $a = \text{GradTan}(x, y)$  (Horizontalsystem)

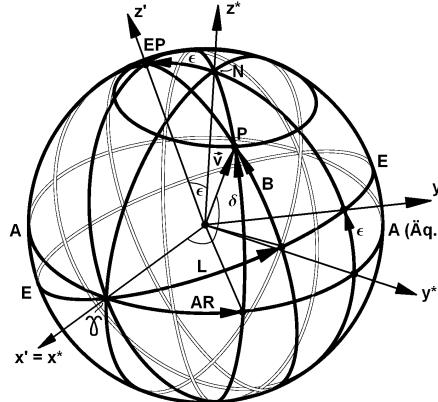
Für die Rückrechnung der Höhe  $h$  in Grad aus der  $z$ -Koordinate genügt der herkömmliche  $\arcsin$  vollends. Üblicherweise gibt  $\arcsin$  für Input-Werte  $\in [-1, 1]$  Werte zurück aus dem Intervall  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

Das genügt um  $h$  zu berechnen. Sei  $\text{GradSin}(z) = \arcsin(z) \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$

**Formel:**  $h = \text{GradSin}(z)$

### Systempaar Himmelsäquator–Ekliptik

Abbildung 4.13: Himmelsäquatorsystem und Ekliptikalsystem, beide rechtsorientiert



Es gilt (vgl. Skizze Seite 38):

$$\vec{v}_{AH} = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\delta) \cos(AR) \\ \cos(\delta) \sin(AR) \\ \sin(\delta) \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_E = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(B) \cos(L) \\ \cos(B) \sin(L) \\ \sin(B) \end{pmatrix}$$

Wegen der Lage der Achsen gilt hier  $x^* = x'$ , denn die  $x$ -Achse ist Drehachse. Der Vektor  $\vec{v}_{AH}$  im  $(x^*, y^*, z^*)$ -System wird in negativer Drehrichtung um  $\epsilon$  in den entsprechenden Vektor  $\vec{v}_E$  im  $(x', y', z')$ -System gedreht. In positiver Drehrichtung muss somit  $-\epsilon$  verwendet werden. Umgekehrt kann man  $\vec{v}$  fix halten und das  $(x', y', z')$ -System um  $-\epsilon$  in das  $(x^*, y^*, z^*)$ -System drehen. Man erhält mit Hilfe der Drehmatrix  $D_{\epsilon,x}$ :

$$\vec{v}_{AH} = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = D_{\epsilon,x} \cdot \vec{v}_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\epsilon) & -\sin(\epsilon) \\ 0 & \sin(\epsilon) & \cos(\epsilon) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \cos(\epsilon) - z' \sin(\epsilon) \\ y' \sin(\epsilon) + z' \cos(\epsilon) \end{pmatrix}$$

Mit der vorhin gewonnenen Beziehung erhalten wir somit:

$$\vec{v}_{AH} = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\delta) \cos(AR) \\ \cos(\delta) \sin(AR) \\ \sin(\delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(B) \cos(L) \\ \cos(B) \sin(L) \cos(\epsilon) - \sin(B) \sin(\epsilon) \\ \cos(B) \sin(L) \sin(\epsilon) + \sin(B) \cos(\epsilon) \end{pmatrix} \stackrel{B=0^\circ}{=} \begin{pmatrix} \cos(L) \\ \sin(L) \cos(\epsilon) \\ \sin(L) \sin(\epsilon) \end{pmatrix}$$

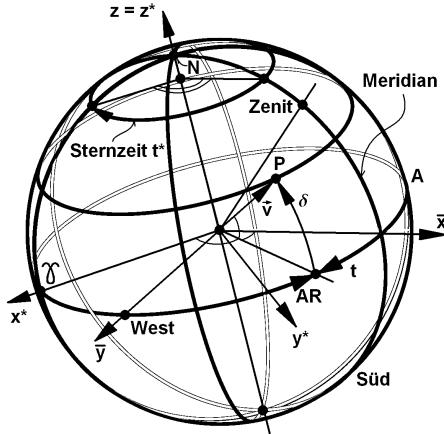
Der Letzte Ausdruck entsteht, da für die Sonne die ekliptikale Breite  $B = 0^\circ$  ist: Die Sonne liegt in der Ekliptikebene.

Weiter gilt hier analog zu Horizont- und Ortsäquatorsystem:  $AR = \text{GradTan}(x^*, y^*)$ ,  $\delta = \text{GradSin}(z^*)$

### Systempaar Ortsäquator–Himmelsäquator

Diese beiden Systeme sind verschieden orientiert. Die  $z$ -Achse ist gemeinsam. Der Winkel  $t^*$  zwischen den beiden  $x$ -Achsen ist die **Sternzeit**. Die **Rektaszension**  $AR$  ist gegenüber von **Ortszeit**  $t$  und

Abbildung 4.14: Ortsäquatorsystem und Himmelsäquatorsystem verschieden orientiert



Sternzeit  $t^*$  umgekehrt orientiert. Die Rektaszension wird im Diagramm nach rechts *positiv* gemessen, der Stundenwinkel und die Sternzeit aber nach links *positiv*:  $AR = |AR|$ ,  $t = |t| \dots$  Es gilt somit die Beziehung (vgl. Skizze Seite 39):

$$t^* = t + |AR| = t + AR \Rightarrow t = t^* - AR = t^* - |AR|$$

Daraus folgt:

$$\vec{v}_{AO} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\delta) \cos(t) \\ \cos(\delta) \sin(t) \\ \sin(\delta) \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_{AH} = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\delta) \cos(AR) \\ \cos(\delta) \sin(AR) \\ \sin(\delta) \end{pmatrix}$$

Wegen der Lage der Achsen gilt hier  $\bar{z} = z^*$ , denn die  $z$ -Achse ist Drehachse. Die  $\bar{x}$ -Achse wird um den Winkel  $t^*$  in die  $\bar{x}_D = x^*$ -Achse gedreht. Das geschieht mit der Drehmatrix  $D_{t^*,z}$ . Anschliessend erfolgt eine Umkehrung der  $y$ -Achse:  $\bar{y}_D \longmapsto y^*$ .

Eine Achsenumkehr hat eine Umkehr der Orientierung des Koordinatensystems zur Folge. Vor der Achsenumkehr ausgeführte Linksdrehungen werden so zu Rechtsdrehungen. Noch nicht ausgeführte Drehungen behalten die alte Orientierung, wenn sie sich auf die alte Situation beziehen. Wenn sie sich auf die neue Situation beziehen, muss die Richtung ändern. Hier liegt ein Potential zu Verwechslungen, die manchen Ärger nach sich ziehen können. Dieses Problem ist aber durchaus künstlich und keinenfalls nötig, denn es lässt sich dadurch einfach vermeiden, dass man die Orientierung zweier zu vergleichender Koordinatensysteme von Anfang an gleich wählt. Die Wahl der Orientierung ist willkürlich, denn es gibt kein Naturgesetz das vorschreibt, welches der erste Basisvektor eines Koordinatensystems ist. In der Vektorgeometrie baut man die Theorie mit ihren Resultaten auf gleich orientierte Koordinatensysteme. Es macht daher wenig Sinn, aus der Betriebsblindheit heraus von diesem Konzept abzuweichen und dann mit komplizierteren Beschreibungen und grösserer Komplexität als notwendig die Fehleranfälligkeit zu erhöhen.

Daher wählen wir hier versuchsweise das Himmelsäquatorsystem neu in der Form  $(y^*, x^*, z^*)$ . Das Ortsäquatorsystem  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  bleibt wie es ist. Der Vektor  $\vec{v}_{AH}$  wird so zu

$$\begin{pmatrix} y^* \\ x^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\delta) \sin(AR) \\ \cos(\delta) \cos(AR) \\ \sin(\delta) \end{pmatrix} := \vec{v}_{AHy}$$

Der Drehwinkel, der das alte Ortsäquatorsystem in das neue Himmelsäquatorsystem überführt wird üblicherweise in Grad gemessen:  $\zeta = t^* - 90^\circ$ . Dreht man die  $\bar{x}$ -Achse um  $\zeta$  in die  $y^*$ -Achse, so wird ein Vektor im  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ -System um  $-\zeta$  in einen Bildvektor im  $(y^*, x^*, z^*)$ -System gedreht. Daher gilt:

$$\vec{v}_{AHy} = \begin{pmatrix} y^* \\ x^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\delta) \sin(AR) \\ \cos(\delta) \cos(AR) \\ \sin(\delta) \end{pmatrix} = D_{-\zeta, z} \cdot \vec{v}_{AO} = \begin{pmatrix} \cos(-\zeta) & -\sin(-\zeta) & 0 \\ \sin(-\zeta) & \cos(-\zeta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme finden wir:

$$\begin{aligned} \cos(-\zeta) &= \cos(\zeta) = \cos(t^* - 90^\circ) = \cos(t^*) \cdot \cos(-90^\circ) - \sin(t^*) \cdot \sin(-90^\circ) = 0 - \sin(t^*) \cdot (-1) = \sin(t^*) \\ \sin(-\zeta) &= -\sin(\zeta) = -\sin(t^* - 90^\circ) = -\sin(t^*) \cdot \cos(-90^\circ) - \cos(t^*) \cdot \sin(-90^\circ) = 0 - \cos(t^*) \cdot (-1) = \cos(t^*) \end{aligned}$$

$$\text{Das ergibt: } \begin{pmatrix} \cos(-\zeta) & -\sin(-\zeta) & 0 \\ \sin(-\zeta) & \cos(-\zeta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t^*) & -\cos(t^*) & 0 \\ \cos(t^*) & \sin(t^*) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Daher ist:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{AHy} &= \begin{pmatrix} \cos(\delta) \sin(AR) \\ \cos(\delta) \cos(AR) \\ \sin(\delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t^*) & -\cos(t^*) & 0 \\ \cos(t^*) & \sin(t^*) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \sin(t^*) - \bar{y} \cos(t^*) \\ \bar{x} \cos(t^*) - \bar{y} \sin(t^*) \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\delta) \cos(t) \sin(t^*) - \cos(\delta) \sin(t) \cos(t^*) \\ \cos(\delta) \cos(t) \cos(t^*) - \cos(\delta) \sin(t) \sin(t^*) \\ \sin(\delta) \end{pmatrix} \text{ mit } t = t^* - |AR| = t - AR. \end{aligned}$$

Diese Transformationsformel kann man je nach Verwendungszweck noch in alle jene Formen umgüssen, die nützlich erscheinen.

## Arbeit

Zeichne (Plot) eine Serie von Deklinationslinien und eine beliebig, aber fix gewählte Stundengerade zum Stundenwinkel  $t_0$  in allgemeiner Lage. Die Deklinationslinien entstehen als gnomonische Bilder von Kleinkreisen, die Schnittkreise von Normalenenebenen zum Polstab mit der gewählten Kugelssphäre sind (vgl. gnomonische Projektion). Die Stundengerade wiederum ist Projektion eines Grosskreises. Durch die Schnittpunkte dieses Stunden-Grosskreises mit den genannten Kleinkreisen legen wir Grosskreise, die die Kleinkreise nur berühren. Mache eine Skizze und überlege, dass sich diese neuen Grosskreise alle auf dem Äquator schneiden, und zwar in zwei symmetrischen Punkten mit den Stundenwinkeln  $t_0 \pm 90^\circ$  resp.  $t_0 \pm 6 h$ . Da wir eine Marke im Zentrum der Sphäre auf eine Ebene projizieren, ist die Projektion eines Grosskreises immer die Schnittgerade der Ebene durch den Grosskreis (und somit durch die Marke im Zentrum) mit der Projektionsebene. Wir erhalten also Geraden. Da die gewählten Grosskreise die Kleinkreise nur berühren, sind die Bildgeraden Tangenten an die Bilder der Kleinkreise, also die Deklinationslinien. Diese Tangenten schneiden sich alle im Bild des Schnittpunktes des Grosskreises auf dem Äquator. Dieser Punkt ist der Schnittpunkt des Äquators mit einer Stundengeraden zu  $t_0 \pm 6 h$ . Zeichne eine solche speziell gewählte Situation auf dem Zifferblatt auf!

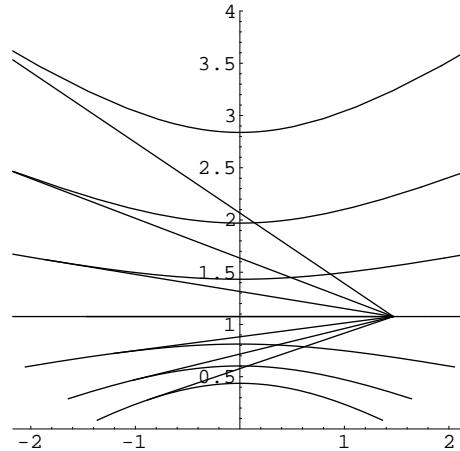
**Zur Lösung:**

**Mathematica-Programm:**

```
(* "Putzmaschine" *) (*Old Form : Remove["Global`*"]*)
Remove["Global`*"];
(* ===> INPUT, Altgrad *) \[CurlyPhi] = 47.09; fi = (90 -
Abs[\[CurlyPhi]]); g = 1;
d[1] = 23.5; d[2] = 16; d[3] = 8; d[4] = 0; d[5] = -8; d[6] = -16;
d[7] = -23.5 ;
hour = 2 Pi /24;
v[d_, fi_, t_] :=
g/(Cos[Sign[\[CurlyPhi]] d Degree] Cos[t hour] Sin[fi Degree] +
Sin[Sign[\[CurlyPhi]] d Degree] Cos[fi Degree]) {(Cos[
Sign[\[CurlyPhi]] d Degree] Sin[t hour]),
Sign[\[CurlyPhi]]((Cos[Sign[\[CurlyPhi]] d Degree] Cos[t hour] Cos[
fi Degree] -
Sin[Sign[\[CurlyPhi]] d Degree] Sin[fi Degree]))};
(*
Achtung! In v[d, fi, t] wird die siderische Zeit benutzt! *)
ParametricPlot[Evaluate[Table[v[d[k], fi, t], {k, 1, 7}]],
{t, -4.1, 4.1}, AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> {0, 4},
Epilog -> {
Table[Line[{v[d[k], fi, -3], v[d[4], fi, 3]}], {k, 1, 7}]
}];
```

**Output:**

Abbildung 4.15: Tangenten an die Deklinationslinien



### 4.3.3 Koordinatentransformation für beliebige Lagen des Zifferblatts

**Problem:** Gegeben sei eine Wand, die ca.  $5^\circ$  gegen innen geneigt ist und deren Ausrichtung nicht parallel zur Nord–Süd–Richtung ist. Die mittlere horizontale Gerade  $m$  weicht um  $12^\circ$  von der West–Ost–Richtung ab. Präziser: Der Winkel zwischen  $m$  zur geographischen Nordrichtung ist bei positivem Drehsinn von  $m$  aus gemessen  $78^\circ$ .

**Problem:** Zeichne das Zifferblatt mit Stundengerade und Deklinationslinien.

**Idee:** Statt durch mühsame Transformationen das Zifferblatt für den Ort zu rechnen, verpflanzen wir die ganze Situation. Wir suchen den Punkt der Erdoberfläche, wo eine im Raum parallel verschobene Wand exakt horizontal zu liegen kommt und rechnen dort das Zifferblatt. Dabei müssen wir berücksichtigen, dass die Zeit um eine additive Konstante verschoben ist, die der Winkeldifferenz zwischen alter und neuer Lage entspricht. Die Stundengeraden müssen also verschoben beschriftet werden.

Schwieriger ist es, den neuen Ort auf der Erdoberfläche zu finden, der das Gewünschte leistet. Dazu kann man wie folgt vorgehen: Die Lage der Wand ist durch zwei Geraden bestimmt, die horizontale und vertikale Neigungsgeraden, deren Neigungen (gegebene Winkel) wir kennen. Damit kennen wir zwei Geraden im Ortsäquatorsystem. Diese Geraden bestimmen eine Ebene am Ort des Beobachters, zu der wir jetzt zwei parallele Vektoren kennen: Parallelvektoren zu den beiden genannten Geraden, welche auf je zwei Arten mit beliebiger Länge bestimbar sind. Wir wählen daher zwei solche Vektoren und können daraus den Normalenvektor rechnen. Dieser Normalenvektor bestimmt zusammen mit dem Ursprung des Ortsäquatorsystems eine Gerade  $n$ , die die Erde (Kugelsphäre) in genau zwei Punkten schneidet. In diesen Schnittpunkten ist nun die Horizontalebene genau parallel zu unserer Wand. Daher rechnen wir für einen der Schnittpunkte das Zifferblatt als horizontale Sonnenuhr und berücksichtigen darin, dass die Zeit eine Winkelverschiebung erfahren hat. D.h. Stundengeraden müssen verschoben beschriftet werden.

## Arbeit

Mache einen Plot für ein Zifferblatt einer Wand mit besagter Lage an Deinem Standort!

### Beispiel einer Situation und Lösung:

Wir rechnen in einem Normalkoordinatensystem (mathematisches KS) an unserem Ort. Da wir mit Vektoren arbeiten, können wir den Koordinatenursprung auch in den Erdmittelpunkt verlegen. Die  $x$ -Achse zeige nach Osten, die  $y$ -Achse nach Norden und die  $z$ -Achse gegen den Zenit. Die Wand weiche um  $\alpha = +30^\circ \hat{=} \frac{30 \cdot 2\pi}{360}$  von der  $x$ -Achse ab und um  $\beta = +6^\circ \hat{=} \frac{6 \cdot 2\pi}{360}$  von der  $z$ -Achse (Neigung nach „innen“). ( $\rightsquigarrow$  **Schief-schiefe Wand.**) Sie wird daher beschrieben durch einen Vektor

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und eine Vektor } \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \sin(\beta) \\ \cos(\alpha) \sin(\beta) \\ \cos(\beta) \end{pmatrix}.$$

Ihr Normalenvektor ist  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ . Ein Normalenvektor eine idealen senkrechten West-Ost-Wand fällt auf die  $x$ -Achse. Wir rechnen bekanntlich das Zifferblatt der senkrechten Wand als horizontales Zifferblatt an dem Ort, wo die  $x$ -Achse die Sphäre durchstößt. Von diesem Normalenvektor gilt es nun, die Koordinaten im Ortsäquatorsystem herauszufinden. Mit diesen Koordinaten können wir die Abweichung zur Länge und Breite an unserem Ort ausrechnen. Dafür müssen wir den Vektor im Ortsäquatorsystem darstellen. Das bedeutet bekanntlich eine Drehung um  $(90^\circ - \varphi)$  um unsere  $x$ -Achse und eine Achsenvertauschung. Den entstehenden Vektor nennen wir  $\vec{R}$ . Der Winkel zwischen  $\vec{R}$  und seiner Projektion in die  $(x, y)$ -Ebene im Ortsäquatorsystem führt auf die gesuchte Breite, der Winkel zwischen der Projektion in die  $(x, y)$ -Ebene und der  $x$ -Achse auf die Längendifferenz und damit die Stundenverschiebung.

Da unsere senkrechte Wand parallel verschoben werden muss bis zu dem Punkt  $P$ , an dem sie Tangentialebene (d.h. Horizontalebene) ist, gelangt so auf die Südhalbkugel. Die Breite ist daher negativ zu nehmen:  $\varphi = -30.^\circ 6534$ . Aus der Drehweise der Wand geht hervor, dass der besagte Punkt  $P$  im Osten liegt, dass also die Zeit  $t = t_P - 2.35414$  Stunden ist.

Damit ist aber der Plot noch nicht zu machen, denn bei Parallelverschiebung eines Vektors auf einer Sphäre ändert der Winkel zwischen dem verschobenen Vektor und dem Meridian am neuen Ort. Nur zu parallelen Geraden bleibt der Winkel konstant. Die Meridiane sind aber nicht parallele Geraden,

sondern Grosskreise. Daher ist die Vertikallinie einer Wand am verschobenen Ort im allgemeinen nicht die Nord–Süd–Linie. Ihre Abweichung von der Nord–Richtung muss berechnet werden. Um die berechnete Winkeldifferenz muss man den Plot dann drehen.

#### Mathematica-Programm:

---

```
(* "Putzmaschine" *) (*Old Form : Remove["Global`*"]*)
(* Remove["Global`*"]; *)
(* Umrechnung mit Vektorprodukt *)
(* ===> INPUT, Altgrad *)      a = 30 ; b = 6 ; \[CurlyPhi] = 47.09; \
\[CurlyPhi]0 = \[CurlyPhi];
dek[1] = 23.5 ; dek[2] = 16 ; dek[3] = 8 ; dek[4] = 0 ; dek[5] = -8 ;
dek[6] = -16 ; dek[7] = -23.5 ; g = 1;
u ={Cos[a Degree], Sin[a Degree],0}; v={-Sin[a Degree]Sin[b Degree],
    Cos[a Degree]Sin[b Degree],Cos[b Degree]};
w = Transpose[{Cross[u, v]}];
d = (90 - \[CurlyPhi]);
dreh = {{1, 0, 0}, {0, Cos[d Degree], -Sin[d Degree]},
{0, Sin[d Degree], Cos[d Degree]}};
r = dreh.w; r1 = Flatten[r];
R = {- r1[[2]], -r1[[1]], r1[[3]]};
Delta1 = ArcCos[
  Sqrt[(R[[1]]^2 + R[[2]]^2)/(R[[1]]^2 + R[[2]]^2 + R[[3]]^2)]];
Delta2 = ArcCos[
  Sqrt[R[[1]]^2/(R[[1]]^2 + R[[2]]^2)]]; dY = Delta1; dZ = Delta2;
Delta1Grad = Delta1/Degree // N; Delta2Grad =
  Delta2/(2 Pi) 360 // N;; Delta2Std = Delta2/(2 Pi) 24 // N;
Print["Delta1Grad = ", Delta1Grad, ", Delta2Grad = ", Delta2Grad,
  ", Delta2Std = ", Delta2Std];
```

---

---

```
(*Umrechnen des Vertikalvektors und zur Drehung des Outputs in Vertikallage \
in Einzelschritten*)
Print["Test Matrixprodukt ===> ", dreh.v == Flatten[dreh.Transpose[{v}]]];
goAeq[vec_] := {-(dreh.vec)[[2]], -(dreh.vec)[[1]], (dreh.vec)[[3]]};
xKS = {1, 0, 0}; yKS = {0, 1, 0}; zKS = {0, 0, 1};
vAeq = goAeq[v]; uAeq = goAeq[u]; xAeq = goAeq[xKS]; yAeq = goAeq[yKS]; zAeq =
    goAeq[zKS];
drehZ = {{Cos[-dZ], -Sin[-dZ], 0}, {Sin[-dZ], Cos[-dZ], 0}, {0, 0, 1}};
drehY = {{Cos[-dY], 0, -Sin[-dY]}, {0, 1, 0}, {Sin[-dY], 0, Cos[-dY]}};
goNew[vec_] := drehZ.(drehY.vec);
xNew = goNew[xKS]; yNew = goNew[yKS]; zNew =
    goNew[zKS]; Print["Kontrolle 1. Koord 0 ===> ",
    solvU = Solve[uAeq == u1 xNew + u2 yNew + u3 zNew, {u1, u2, u3}] // Chop //
        Flatten]
Print["Kontrolle 1. Koord 0 ===> ",
    solvV = Solve[vAeq == v1 xNew + v2 yNew + v3 zNew, {v1, v2, v3}] // Chop //
        Flatten];
uRichtung = {u1, u2, u3} /. solvU;
vRichtung = {v1, v2, v3} /. solvV;
vLen[vec_] := Sqrt[vec.vec];
drehNewArc = ArcCos[vRichtung.zKS/(vLen[vRichtung] vLen[zKS])]; drehNewGrad =
    drehNewArc /(2Pi) 360; Print["Drehung der Vertikalen ", drehNewGrad];
vv = -drehNewArc;
drehPlot = {{Cos[vv], -Sin[vv]}, {Sin[vv], Cos[vv]}};
Print["drehPlot = ", drehPlot // MatrixForm];
```

---

---

```
(* Plot *)
\[CurlyPhi] = -Delta1Grad; fi = (90 - Abs[\[CurlyPhi]]);

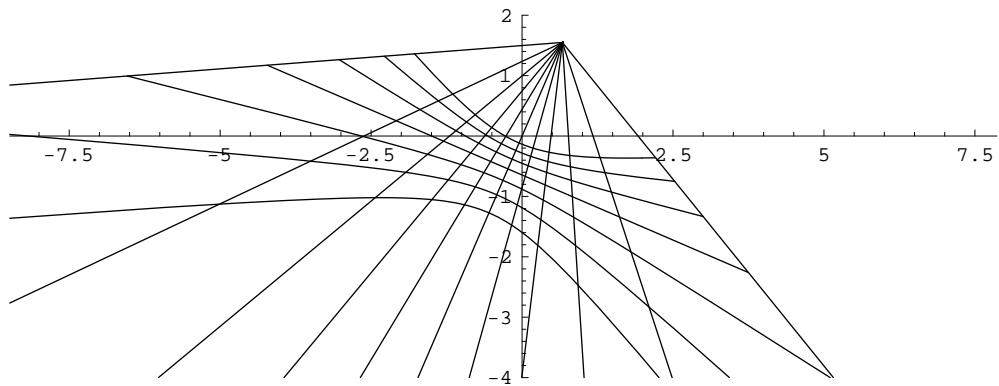
hour = 2 Pi/24 (* Tage *);
MP[t_, \[CurlyPhi]_] := g Tan[t hour]/ Sin[(90 - \[CurlyPhi]) Degree];
tab1[\[CurlyPhi]_] :=
  Table[MP[t, \[CurlyPhi]], {t, -6, 6, 1}]; tab1[\[CurlyPhi]];
tab2[\[CurlyPhi]_] :=
  Table[{tab1[\[CurlyPhi]][[n]], g/Tan[(90 - \[CurlyPhi]) Degree]}, {n, 1, Length[tab1[\[CurlyPhi]]]}]; tab2[\[CurlyPhi]];
vV[h_, fi_, t_] :=
  drehPlot. (g/(Cos[Sign[\[CurlyPhi]] h Degree] Cos[t hour] Sin[
    fi Degree] +
    Sin[Sign[\[CurlyPhi]] h Degree] Cos[fi Degree]) {(Cos[
      Sign[\[CurlyPhi]] h Degree] Sin[t hour]),
    Sign[\[CurlyPhi]]((Cos[Sign[\[CurlyPhi]] h Degree] Cos[
      t hour] Cos[fi Degree] -
      Sin[Sign[\[CurlyPhi]] h Degree] Sin[fi Degree]) )});

(* vV[h_, fi_, t_] :=
  drehPlot.g/(Cos[d Degree] Cos[t hour] Sin[fi Degree] +
    Sin[d Degree] Cos[fi Degree]) {(Cos[d Degree] Sin[t hour]),
    Sign[\[CurlyPhi]]((Cos[d Degree] Cos[t hour] Cos[fi Degree] -
      Sin[d Degree] Sin[fi Degree]) )};*)

(* Ursprung versetzt, vgl. Gnomonstab parallel Erdachse! *)
ursprung[\[CurlyPhi]_] := {0, -g/Tan[\[CurlyPhi] Degree]};
ParametricPlot[Evaluate[Table[vV[dek[k], fi, t], {k, 1, 7}]], {t, -5, 5},
  AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> {-4, 2},
  Epilog -> {Table[Line[{drehPlot.ursprung[\[CurlyPhi]],
    drehPlot.(4( tab2[\[CurlyPhi]][[n]] - ursprung[\[CurlyPhi]]) + ursprung[\[CurlyPhi]])}], {n, 1, Length[tab1[\[CurlyPhi]]]}]}];
```

---

Abbildung 4.16: Zifferblatt einer schief-schiefen Wand ohne Zeitkorrektur



Die Zeitkorrektur erhält man mit dem nachfolgenden Zusatz. Im Plot ist dann die Symmetrielinie der Deklinationskurven etwas kürzer eingetragen. Achtung: Bei der Zeitkorrektur kann eine Gerade soweit gedreht werden, dass sie die Deklinationslinien nicht mehr schneidet. Oder es entstehen Zeiten, für die die Geraden eigentlich in die Nacht fallen und daher für den Tag uneigentlich sind. Diese sollten entfernt werden.

---

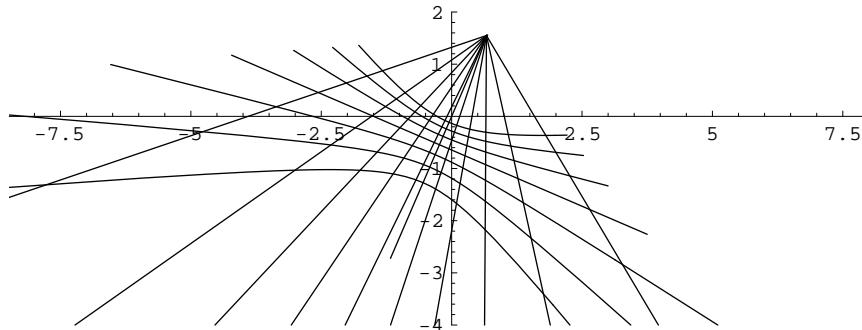
```

tab3[\[CurlyPhi]\_] :=
Table[MP[(t - Delta2Std), \[CurlyPhi]], {t, -2, 7, 1}]; tab3[\[CurlyPhi]];
tab4[\[CurlyPhi]\_] :=
Table[{tab3[\[CurlyPhi]][[n]], g/Tan[(90 - \[CurlyPhi]) Degree]}, {n, 1,
Length[ tab3[\[CurlyPhi]]]}]; tab3[\[CurlyPhi]];
ParametricPlot[Evaluate[Table[vV[dek[k], fi, t], {k, 1, 7}]], {t, -5, 5},
AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> {-4, 2},
Epilog ->
Join[Table[
Line[{drehPlot.ursprung[\[CurlyPhi]],
drehPlot.(4( tab4[\[CurlyPhi]][[n]] - ursprung[\[CurlyPhi]]) +
ursprung[\[CurlyPhi]])}], {n, 1,
Length[ tab3[\[CurlyPhi]]]}], \
{Line[{drehPlot.ursprung[\[CurlyPhi]], 5drehPlot.tab2[\[CurlyPhi]][[6]]}]})];
Print["tab1[\[CurlyPhi]]:= ", tab1[\[CurlyPhi]],
" Plot von -5 bis 5 Std. versetzte Zeit "];
Print["tab3[\[CurlyPhi]]:= ",
tab3[\[CurlyPhi]], " Plot von -3-Delta2Std bis 7-Delta2Std korrigierte \
Zeit."]

```

---

Abbildung 4.17: Zifferblatt einer schief-schiefen Wand mit Zeitkorrektur und nur noch drei Nachmittagstunden



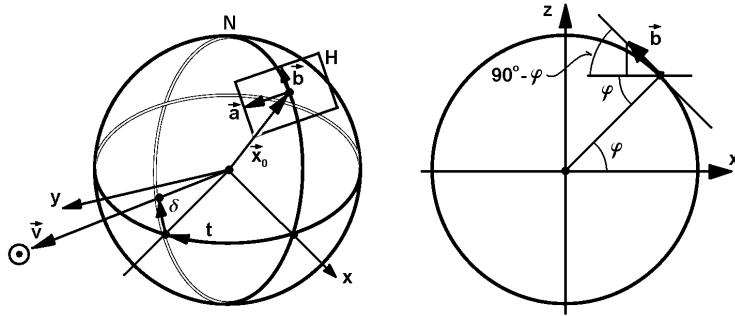
#### 4.3.4 Sonnenauf– und Untergang und Deklination

**Probleme:**

Gegeben sei die Deklination an meinem Geburtstag. Wann geht dann die Sonne auf an meinem Standort? — Wie gross ist die Deklination, wenn an meinem Standort die Sonne um  $7h^{00}$  Ortszeit untergeht? — Wann geht die Sonne an meinem Standort am längsten Tag des Jahres unter? — Solche Fragestellungen sind interessant, wenn spezielle Zifferblätter entworfen werden müssen. Will man Zifferblätter z.B. mit babylonischen oder italienischen Stunden, so hat man ähnliche Fragestellungen, denn am Sonnenauf- und Untergang hängt hier die Stundenzählung.

Wir betrachten das Ortsäquatorsystem sowie die Horizontalebene an unserem Standort (Skizze).

Abbildung 4.18: Horizontebene und Äquatorialsystem



$$\text{Sei } |\vec{v}| = 1 \rightsquigarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} \cos(\delta) \cdot \cos(t) \\ \cos(\delta) \cdot \sin(t) \\ \sin(\delta) \end{pmatrix} \quad (\text{Vgl. Skizze!})$$

Die Parametergleichung der Horizontalebene  $H$  im Ortsäquatorsystem lautet:  $\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$

Wenn man die Brechung in der Atmosphäre nicht berücksichtigt, lautet die **Bedingung für Sonnenaufgang oder Sonnenuntergang**:  $\vec{v} \parallel H$ .

In Wirklichkeit sieht man wegen der Brechung die Sonne rot am Horizont, wenn sie geometrisch schon unter dem Horizont steht. Rot wird am stärksten gebrochen und kommt daher zuletzt noch zum Beobachter. Wenn am Horizont keine Hindernisse vorhanden sind, die die Sicht versperren, versinkt die Sonne nicht etwa am Horizont, sondern wird vorher im Dunst immer schwächer, bis man sie nicht mehr sieht.

$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } \vec{v} \parallel H &\Leftrightarrow \vec{v} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \quad \text{mit} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ 0 \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \vec{v} &= \begin{pmatrix} \cos(\delta) \cdot \cos(t) \\ \cos(\delta) \cdot \sin(t) \\ \sin(\delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mu \sin(\varphi) \\ 0 \\ \mu \cos(\varphi) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \sin(\delta) &= \mu \cos(\varphi) \wedge \cos(\delta) \cdot \cos(t) = -\mu \sin(\varphi) \Rightarrow \mu = \frac{\sin(\delta)}{\cos(\varphi)} \Rightarrow \cos(\delta) \cdot \cos(t) = -\frac{\sin(\delta)}{\cos(\varphi)} \sin(\varphi) \\ &\Rightarrow \cos(t) = -\tan(\delta) \cdot \tan(\varphi) \end{aligned}$$

**Formel:**

Für Sonnenaufgang oder Sonnenuntergang gilt:

$$\Rightarrow \cos(t) = -\tan(\delta) \cdot \tan(\varphi)$$

$$\text{Daraus folgt: } t(\delta, \varphi) = \arccos(-\tan(\delta) \cdot \tan(\varphi)) \quad \text{und} \quad \delta(t, \varphi) = \arctan\left(-\frac{\cos(t)}{\tan(\varphi)}\right)$$

### Arbeit

- Berechne für deinen Standort für  $\delta = \pm 23.5^\circ$  die wahre Zeit für den Sonnenaufgang und den Sonnenuntergang. Wie lang ist dann der längste und der kürzeste Tag an deinem Standort?

2. Berechne für deinen Standort für die Sonnenuntergangszeit  $t = 7 h$  die Deklination der Sonne.
3. Berechne für deinen Standort für eine variable Deklination der Sonne die Halbzeit zwischen wahrem Mittag und Sonnenaufgang resp. Sonnenuntergang. Mache einen Plot (z.B. mit *Mathematica*), auf dem die beiden möglichen Halbzeitlinien als Funktion der Deklination ersichtlich sind. Was für Kurven entstehen?.

*Hinweis zur Lösung:* Sonnenuntergangszeit in Stunden bei gegebener Deklination ab Mittag:  
**Mathematica-Programm:**

```
t[\[Delta]_, \[Phi]_] := ArcCos[-Tan[\[Delta]] Tan[\[Phi]]]24/(2Pi);
(* Test *)
{{23.5, t[23.5 Degree, 47.09 Degree]}, {0,
t[0 Degree, 47.09 Degree]}, {-23.5, t[-23.5 Degree, 47.09 Degree]} }
```

**Output:**

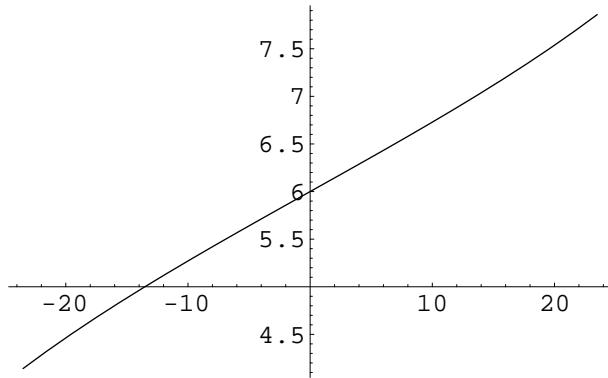
```
| {{23.5, 7.85922}, {0, 6}, {-23.5, 4.14078}} |
```

**Mathematica-Programm:**

```
| Plot[t[x Degree, 47.09 Degree], {x, -23.5, 23.5}]; |
```

Output vgl. Diagramm Seite 48

Abbildung 4.19: Sonnenuntergangszeit in Abhängigkeit von der Deklination



## 4.4 Sphärische Trigonometrie

### 4.4.1 Begriffe

**Bsp.:** Ein Beobachter, der sich in  $O$  befindet, peilt drei Sterne an, die sich in Richtung  $A$ ,  $B$  und  $C$  befinden. Wir können uns die drei Sterne als Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  auf einer Einheitssphäre denken mit

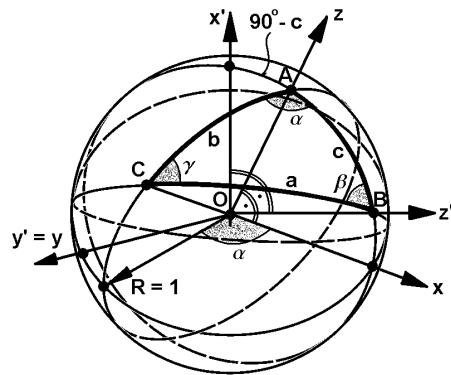
Zentrum in  $O$ . Die drei Punkte seien durch drei Grosskreisbögen  $a$ ,  $b$  und  $c$  (vgl. Skizze) verbunden, deren Bogenlängen gleich den Richtungswinkeln (gemessen von  $O$  aus) zwischen den Punkten ist, denn wir benutzen ja eine Einheitssphäre, d.h.  $R = 1$ . Für jede Bogenlänge existieren zwei Möglichkeiten. Wir wählen jeweils jene Länge, für die gilt:  $\text{Bogenlänge} \leq 180^\circ$ .

#### Definition:

Die Figur, die durch die drei Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  sowie durch die drei Grosskreisbögen  $a$ ,  $b$  und  $c$  gegeben ist, heisst **sphärisches Dreieck**. Die Winkel  $a$ ,  $b$  und  $c$  heissen **Seiten** des sphärischen Dreiecks.

In  $A$ ,  $B$  und  $C$  sind durch die Grosskreise je vier Winkel gegeben. Je einer ist immer **Innenwinkel** des sphärischen Dreiecks. Die drei existierenden Innenwinkel in  $A$ ,  $B$  und  $C$  bezeichnen wir mit  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ .

Abbildung 4.20: Sphärisches Dreieck auf der Sphäre



#### 4.4.2 Eigenschaften, Sätze

Im Falle einer Ebene (Krümmung 0) ist die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks gleich  $180^\circ$ . Auf der Sphäre ( $R \neq \infty$ , Krümmung  $\neq 0$ ) kann die Summe der Innenwinkel grösser sein. Das Krümmen der Fläche führt zu einer Spreizung der Winkel. Das sieht man am besten, wenn man in Gedanken den Radius der Kugel durch die Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  verkleinert. Dann kippen die Grosskreisbögen nach aussen, da das Kugelzentrum, das auf den drei Ebenen durch die Grosskreisbögen liegt, näher zur Dreiecksfläche rückt. Alle Innenwinkel werden dann grösser. Am kleinsten sind sie, wenn  $R$  am grössten, d.h. unendlich ist, man also eine Ebene hat. Maximal kann ein Innenwinkel nach unserer Definition des sphärischen Dreiecks  $180^\circ$  sein. Dann gilt also:

**Lemma:**  $180^\circ \leq \alpha + \beta + \gamma \leq 3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$

**Wichtig:** Durch die Konstruktion ist unmittelbar klar, dass bei gegebener Sphäre die Angabe von  $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma$  das sphärische Dreieck eindeutig bestimmen.

Sei die Sphäre mit  $A$ ,  $B$  und  $C$  gegeben. Wir wählen zwei umgekehrt orientierte kartesische Koordinatensysteme mit gemeinsamer  $y$ -Achse, sodass die  $z$ -Achse durch  $A$  und die  $z'$ -Achse durch  $B$  geht (vgl. Skizze). Der Grosskreisbogen resp. der Winkel zwischen der  $z$ -Achse und der  $z'$ -Achse ist somit  $c$ . Die  $x$ -Achse und die  $x'$ -Achse seien so gewählt, dass sie in der Ebene der  $z$ - und der  $z'$ -Achse liegen (vgl. Skizze). Die  $z$ -Achse kann somit durch eine Drehung um  $90^\circ - c$  um die  $y = y'$ -Achse in die  $x'$ -Achse

übergeführt werden. Die  $x$ -Achse geht dabei in die  $z'$ -Achse über.

Wir betrachten nun den Vektor  $\vec{OC}$  im  $(x, y, z)$ -Koordinatensystem ( $KS_1$ ) und auch im  $(x', y', z')$ -Koordinatensystem ( $KS_2$ ). Dann finden wir durch ablesen:

$$\vec{OC}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(b) \cos(\alpha) \\ \sin(b) \sin(\alpha) \\ \cos(b) \end{pmatrix} \quad \vec{OC}_2 = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(a) \cos(\beta) \\ \sin(a) \sin(\beta) \\ \cos(a) \end{pmatrix}$$

(Den zweiten Ausdruck kann man durch Vertauschung von Achsen und Winkel resp. Bögen gewinnen.) Da nun  $y = y'$  gilt, erhalten wir:  $\sin(b) \sin(\alpha) = \sin(a) \sin(\beta)$ . Das ist der **sphärische Sinussatz**, den wir durch zyklische Vertauschung ausdehnen können:

**Satz:**  $\frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(c)}{\sin(\gamma)}$

Aus der Geometrie ist bekannt, dass einer Achsendrehung (Basis) nach links um  $\tau$  bei festgehaltenem Vektor eine Drehung des Vektors nach rechts (um  $-\tau$ ) bei festgehaltenen Achsen (Basis) entspricht. Somit gilt wegen der Achsendrehung (man beachte die Orientierung!):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} z' \\ x' \end{pmatrix} &= D_{(y, -(\frac{\pi}{2}-c))} \cdot \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = D_{(y, -(\frac{\pi}{2}-c))}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} z' \\ x' \end{pmatrix} = D_{(y, (\frac{\pi}{2}-c))} \cdot \begin{pmatrix} z' \\ x' \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}-c) & -\sin(\frac{\pi}{2}-c) \\ \sin(\frac{\pi}{2}-c) & \cos(\frac{\pi}{2}-c) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(c) & -\cos(c) \\ \cos(c) & \sin(c) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z' \cdot \sin(c) - x' \cdot \cos(c) \\ z' \cdot \cos(c) + x' \cdot \sin(c) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dabei benutzen wir:  $\cos(\frac{\pi}{2}-c) = \sin(c)$ ,  $\sin(\frac{\pi}{2}-c) = \cos(c)$

Mit  $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(b) \cos(\alpha) \\ \cos(b) \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} x' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(a) \cos(\beta) \\ \cos(a) \end{pmatrix}$  folgt daraus:

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(b) \cos(\alpha) \\ \cos(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z' \cdot \sin(c) - x' \cdot \cos(c) \\ z' \cdot \cos(c) + x' \cdot \sin(c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a) \cdot \sin(c) - (\sin(a) \cos(\beta)) \cdot \cos(c) \\ \cos(a) \cdot \cos(c) + (\sin(a) \cos(\beta)) \cdot \sin(c) \end{pmatrix}$$

Aus der  $z$ -Komponente des letzten Vektors erhalten wir den **sphärischen Cosinussatz**:

**Satz:**  $\cos(b) = \cos(a) \cdot \cos(c) + \sin(a) \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(c)$   
(Weitere Gleichungen durch zyklische Vertauschung!)

Und aus der entsprechenden  $x$ -Komponente erhalten wir den **sphärischen Sinus-Cosinussatz**:

**Satz:**  $\sin(b) \cdot \cos(\alpha) = \cos(a) \cdot \sin(c) - \sin(a) \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(c)$   
(Weitere Gleichungen durch zyklische Vertauschung!)

### Anwendung

**Wichtig:** Wenn wir ein Zifferblatt für eine Wand in beliebiger Lage an einem Ort  $P$  berechnen wollen, so können wir auch ein Zifferblatt an einem andern Ort  $Q$  der Erde, wo unsere Wand als Ebene Horizontalebene ist, berechnen.  $P$ ,  $Q$  und der Erdnordpol  $N$  bilden nun ein sphärisches Dreieck, das wir zur Berechnung fehlender Winkel verwenden können.

### 4.4.3 Formeln der sphärischen Trigonometrie für die Verpflanzung der Wand in Horizontallage

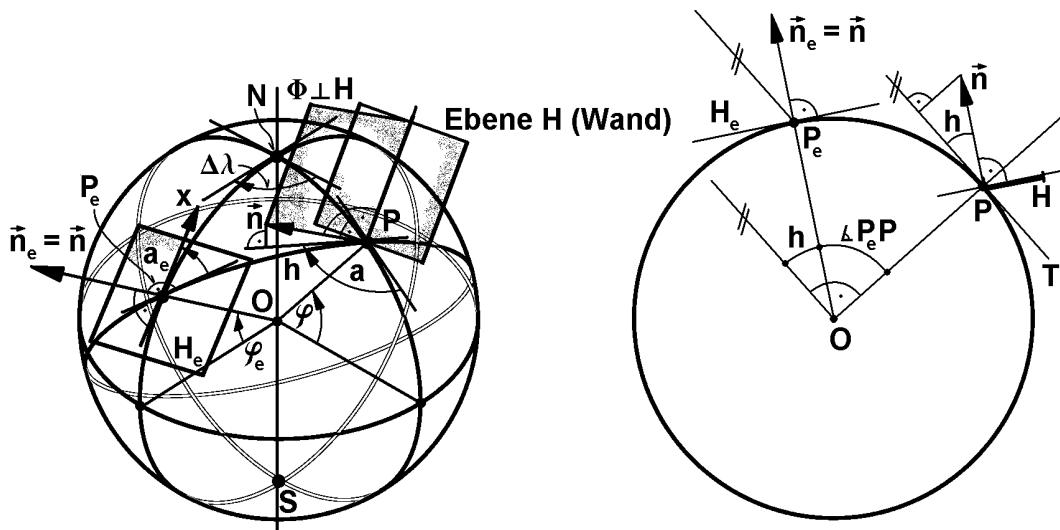
#### Zur Wandvermessung

**Winkel zur Vertikalen:** Mit Hilfe von Wasserwaage, Senkblei, elektronischen Wasserwaagen u.s.w.  $\sim$  Gradient (Richtung der grössten Steigung der Wand).

**Winkel zur Süd-, Nord-, West- oder Ostrichtung:** Mit Hilfe von Wasserwaage oder elektronischen Wasserwaagen findet man auf der Wand eine Horizontallinie. Um den Winkel dieser Line zum Meridian oder zum Breitenkreis zu gewinnen, kann man Katasterpläne der Gemeinde, Kartenmaterial, Polarstern (Nordrichtung), bekannte Geländepunkte, genaue Karte und Vermessung verwenden. (Winkel, Längen: Mit elektronischen Messgeräten, Theodolit, GPS ...) u.s.w.. Der Kompass ist ungenau (Lage des geographischen Nordpols!).  $\sim$  Azimut

Aus den Messdaten errechnet man einen **Normalenvektor** (Vektorprodukt!).

Abbildung 4.21: Wand  $H$  in  $P$  verpflanzt als Horizontalebene  $H_e$  in  $P_e$



#### Formeln

**Gegeben** sei ein Normalenvektor  $\vec{n}$  auf die Wand in Richtung zur Sonnenseite der Wand eines Gebäudes. Dort soll eine Sonnenuhr angebracht werden. Wir verwenden die folgenden Punkte und Winkel (vgl. Skizze,  $\frac{\pi}{2} \hat{=} 90^\circ$ ):

1.  $P$  = Messpunkt in der Wand.
2.  $P_e$  = Messpunkt in der verschobenen, horizontalen Wand.
3.  $N$  = Nordpol.
4.  $h$  = Höhenwinkel von  $\vec{n}$  als Ortsvektor in  $P$  (gemessen in der Vertikalebene  $\Phi$ ).
5.  $a$  = Azimut zum Süden von  $\vec{n}$  als Ortsvektor in  $P$ .

6.  $\varphi$  = geographische Breite von  $P$ .
7.  $\varphi_e$  = geographische Breite von  $P_e$ .
8.  $\Delta\lambda$  = Differenz der geographischen Längen von  $P$  und  $P_e$ .
9.  $\mathcal{A}(NOP) = \frac{\pi}{2} - \varphi$ .
10.  $\mathcal{A}(NOP_e) = \frac{\pi}{2} - \varphi_e$ .
11.  $\mathcal{A}(NPP_e) = \pi - a$ .
12.  $\mathcal{A}(POP_e) = \frac{\pi}{2} - h$ .

Mit Hilfe des sphärischen Cosinussatzes berechnen wir  $\varphi_e$ :

$$\begin{aligned}\cos(b) &= \cos(a) \cos(c) + \sin(a) \sin(c) \cos(\beta) \sim \\ \cos(NOP_e) &= \cos(POP_e) \cos(NOP) + \sin(POP_e) \sin(NOP) \cos(NPP_e) \sim \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_e\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - h\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - h\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \cos(\pi - a) \sim \\ \sin(\varphi_e) &= \sin(h) \sin(\varphi) + \cos(h) \cos(\varphi) (-\cos(a)) \sim\end{aligned}$$

**Formel :**  $\varphi_e = \arcsin(\sin(h) \sin(\varphi) - \cos(h) \cos(\varphi) \cos(a)) \in [\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$

Mit Hilfe des sphärischen Sinuscosinussatzes berechnen wir  $\Delta\lambda$ :

$$\begin{aligned}\sin(b) \cos(\alpha) &= \cos(a) \sin(c) - \sin(a) \cos(c) \cos(\beta) \sim \\ \sin(NOP_e) \cos(\Delta\lambda) &= \cos(POP_e) \sin(NOP) - \sin(POP_e) \cos(NOP) \cos(NPP_e) \sim \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_e\right) \cos(\Delta\lambda) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - h\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - h\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \cos(\pi - a) \sim \\ \cos(\varphi_e) \cos(\Delta\lambda) &= \sin(h) \cos(\varphi) - \cos(h) \sin(\varphi) (-\cos(a)) \sim\end{aligned}$$

**Formel :**  $\Delta\lambda = \arccos\left(\frac{1}{\cos(\varphi_e)} \cdot (\sin(h) \cos(\varphi) + \cos(h) \sin(\varphi) \cos(a))\right) \in [0, \pi]$

Mit Hilfe des sphärischen Sinussatzes berechnen wir ebenfalls  $\Delta\lambda$ , das ja negativ sein könnte! Mit Hilfe des Sinuscosinussatzes erhalten wir nur ein Resultat im Grundintervall  $[0, \pi]$ , das eventuell noch ergänzt werden muss!

$$\begin{aligned}\sin(b) \sin(\alpha) &= \sin(a) \sin(\beta) \sim \\ \sin(NOP_e) \sin(\Delta\lambda) &= \sin(POP_e) \sin(\pi - a) \sim \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_e\right) \sin(\Delta\lambda) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - h\right) \sin(\pi - a) \sim \\ \cos(\varphi_e) \sin(\Delta\lambda) &= \cos(h) \sin(a) \sim\end{aligned}$$

**Formel :**  $\Delta\lambda = \arcsin\left(\frac{1}{\cos(\varphi_e)} \cdot \cos(h) \cdot \sin(a)\right) \in [\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$

Mit Hilfe des sphärischen Sinuscosinussatzes berechnen wir  $a_e$ :

$$\begin{aligned}\sin(b) \cos(\alpha) &= \cos(a) \sin(c) - \sin(a) \cos(c) \cos(\beta) \sim \\ \sin(NOP_e) \cos(a_e) &= \cos(NOP) \sin(POP_e) - \sin(NOP) \cos(POP_e) \cos(NPP_e) \sim \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_e\right) \cos(a_e) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - h\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - h\right) \cos(\pi - a) \sim \\ \cos(\varphi_e) \cos(a_e) &= \sin(\varphi) \cos(h) - \cos(\varphi) \sin(h) (-\cos(a)) \sim\end{aligned}$$

**Formel :**  $a_e = \arccos\left(\frac{1}{\cos(\varphi_e)} \cdot (\sin(\varphi) \cos(h) + \cos(\varphi) \sin(h) \cos(a))\right) \in [0, \pi]$

Mit Hilfe des sphärischen Sinussatzes berechnen wir ebenfalls  $a_e$ , das ja ebenfalls negativ sein könnte! (Mit Hilfe des Sinuscosinussatzes erhalten wir nur ein Resultat im Grundintervall  $[0, \pi]$ , das eventuell noch ergänzt werden muss!)

$$\begin{aligned}\sin(b) \sin(\alpha) &= \sin(a) \sin(\beta) \sim \\ \sin(NOP_e) \sin(a_e) &= \sin(NOP) \sin(\pi - a) \sim \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_e\right) \sin(a_e) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \sin(\pi - a) \sim \\ \cos(\varphi_e) \sin(a_e) &= \cos(\varphi) \sin(a) \sim\end{aligned}$$

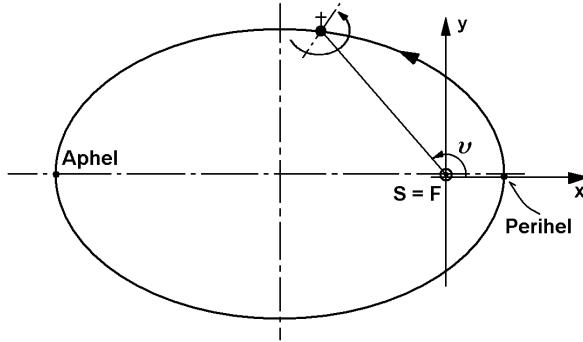
**Formel :**  $a_e = \arcsin\left(\frac{1}{\cos(\varphi_e)} \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(a)\right) \in \left[\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$

## 4.5 Ellipsenbeziehungen und Flächensatz

### 4.5.1 Die Erde im Ekliptikalsystem

Die Erde bewegt sich bekanntlich nach dem **ersten keplerschen Gesetz** auf einer elliptischen Bahn um die Sonne, die in einem der Brennpunkte steht. Den Winkel von der Sonne aus gesehen zwischen der Perihel-Richtung und der Richtung zur Erde nennt man  $\vartheta = \text{wahre Anomalie}$ . Dieser Winkel ist für Beobachtungen wichtig. Die folgende Skizze zeigt die Situation stark verzeichnet von einem Betrachter aus gesehen, der im Nordpol der Ekliptikebene steht.

Abbildung 4.22: Die Erde um die Sonne vom Ekliptik–Nordpol aus gesehen



### 4.5.2 Beziehungen an der Ellipse

Im Folgenden stellen wir einige Tatsachen zusammen, die die Ellipse betreffen. Einige Beziehungen sind nicht trivial und können nicht in wenigen Zeilen hergeleitet werden. Obwohl heutzutage ausgedehnte Behandlungen der Kegelschnitte (Ellipse) in einem Ingenieurstudium nicht mehr grosse Priorität geniessen, gehört der Stoff zur analytischen Geometrie des klassischen Gymnasiums. Daher sei für weitere einschlägige Behandlungen auf die Schulbuchliteratur verwiesen, z.B. auf Bibl. A6.

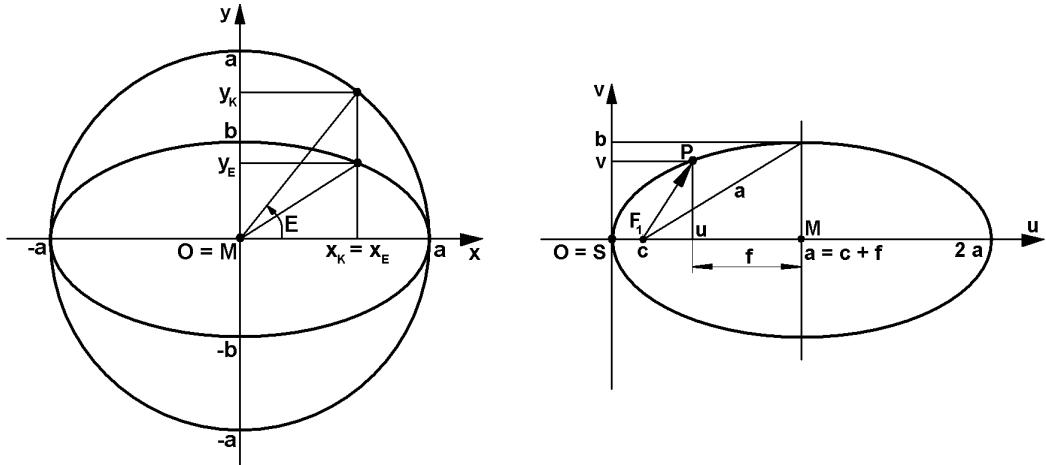
Eine Tatsache ist schon Kindern bekannt, die noch keine Geometrie kennen: Eine Ellipse zeichnet man, indem man in ein Brett zwei Nägel einschlägt, daran dann eine Schnur befestigt, sie mit einem Bleistift spannt und damit dann auf der Unterlage die Kurve aufzeichnet, die die gespannte Schnur ermöglicht. Es ist bekanntlich eine Ellipse. Der Beweis, dass diese Kurve exakt eine Ellipse ist, ist allerdings nicht so trivial wie das Zeichnen. Man kann also sagen: Die Menge der Punkte, deren Abstandsumme zu zwei festen

Punkten (**Brennpunkte**)  $F_1$  und  $F_2$  konstant ist, bildet eine **Ellipse**:  $|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = \text{const.} = 2a$ . Wie kann man das einsehen?

Wir definieren die **Ellipse** als die Figur, die man durch Achsenstreckung aus dem zentrischen Kreis mit dem Radius  $a$  erhält.

Der Streckungsfaktor sei  $\frac{b}{a}$ .  $a$  ist die **grosse Halbachse** der Ellipse und  $b$  die **kleine Halbachse**. Als Koordinatensystem verwenden wir hier ein **Ellipsenmittelpunkt-zentriertes Ekliptikalsystem** (Zentrum im Ellipsenmittelpunkt, Koordinatenachsen auf den Halbachsen).

Abbildung 4.23: Ellipse, Mittelpunkts- und Scheitelpunktskoordinatensysteme



Wir lesen ab (vgl. Skizze 4.23):

$$x_K = x_E = a \cos(E), \quad y_K = a \sin(E), \quad y_E = \frac{b}{a} \cdot a \sin(E) = b \sin(E) = \frac{b}{a} \cdot y_K$$

**Definition:**  $E$  heisst **exzentrische Anomalie**.

Im Kreis gilt:  $x_K^2 + y_K^2 = a^2 \Rightarrow \frac{x_K^2}{a^2} + \frac{y_K^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x_E^2}{a^2} + \frac{y_E^2}{b^2} = 1$

**Formel:** **Mittelpunktgleichung:**

$$\frac{x_E^2}{a^2} + \frac{y_E^2}{b^2} = 1 \quad \text{oder} \quad y_E^2 = b^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 x_E^2$$

Im **Koordinatensystem des Scheitelpunktes** habe ein Ellipsenpunkt die Koordinaten  $u$  und  $v$ :  $P = P(u, v)$ . Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:  $f = \sqrt{a^2 - b^2}$ .  $c$  sei vorerst beliebig. (Später werden wir  $c$  gleich  $a - f$  setzen, vorläufig aber noch nicht.)  $F$  sei der Punkt der  $x$  resp. jetzt der  $u$ -Achse mit der Koordinate  $c$ . Dann gilt:  $|\vec{FP}|^2 = r^2 = (u - c)^2 + v^2$ .

Weiter verwenden wir die Symbole:  $p := \frac{b^2}{a}$  und  $\varepsilon := \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ ,  $a\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2} = f \Rightarrow \varepsilon = \frac{f}{a}$ .

Weiter gilt:  $\varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2$

**Definition:**  $\varepsilon$  heisst **numerische Exzentrizität**.

Es gilt:  $\varepsilon \in [0, 1]$ .

Für das Folgende ist es notwendig, die Mittelpunktsgleichung für das Scheitelpunktskoordinatensystem umzurechnen und neu zu interpretieren. Zwischen den beiden Koordinatensystemen bestehen die Beziehungen  $a + x_E = u$  und  $y_E = v$

$$\begin{aligned} \frac{x_E^2}{a^2} + \frac{y_E^2}{b^2} = 1 &\Rightarrow a^2 y_E^2 + b^2 x_E^2 = a^2 b^2 \Rightarrow a^2 v^2 + b^2 (u - a)^2 = a^2 b^2 \\ &\Rightarrow a^2 v^2 + b^2 u^2 - 2 b^2 u a + b^2 a^2 = a^2 b^2 \Rightarrow a^2 v^2 + b^2 u^2 = 2 b^2 u a \Rightarrow v^2 = -\frac{b^2}{a^2} u^2 + 2 \frac{b^2}{a} u \\ &\Rightarrow v^2 = 2 p u - (1 - \varepsilon^2) u^2. \text{ Diese Gleichung nennen wir Scheitelpunktsgleichung.} \end{aligned}$$

**Formel:** **Scheitelpunktsgleichung:**

$$v^2 = 2 p u - (1 - \varepsilon^2) u^2$$

Mit dieser Gleichung erhalten wir jetzt für ein beliebiges  $c$  mit dem Koordinatenpunkt  $F$  (vgl. oben):  
 $|\overrightarrow{FP}|^2 = r^2 = (u - c)^2 + v^2 = (u - c)^2 + 2 p u - (1 - \varepsilon^2) u^2 = u^2 - 2 u c + c^2 + 2 p u - (1 - \varepsilon^2) u^2 = c^2 + 2 u p - 2 u c + u^2 - u^2 + \varepsilon^2 u^2 = c^2 + 2 u (p - c) + \varepsilon^2 u^2 \stackrel{*}{=} (c \pm \varepsilon u)^2 + 2 u (p - c - (\pm \varepsilon c)) \quad (*)$

Jetzt wählen wir  $c$  speziell so, dass gilt:  $p - c - (\pm \varepsilon c) = p - c (1 \pm \varepsilon) = 0$ .

Diese Gleichung hat wegen '±' zwei Lösungen:  $c_1 = \frac{p}{1 + \varepsilon}$  und  $c_2 = \frac{p}{1 - \varepsilon}$

**Definition:** Die Punkte  $F_1 = F_1(c_1, 0)$  und  $F_2 = F_2(c_2, 0)$ , die diesen beiden Lösungen entsprechen, nennen wir **Brennpunkte**

Wegen der Lage der Ellipse ist  $b \leq a \Rightarrow 0 \leq \frac{b^2}{a^2} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 - \frac{b^2}{a^2} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \leq 1$ .

Wegen  $p = \frac{b^2}{a} > 0$  ist daher  $c_1 > 0$  und  $c_2 > 0$ . Da  $a$  als Streckenlänge sowieso positiv ist, gilt nun:

$$c_1 + c_2 = \frac{p}{1 + \varepsilon} + \frac{p}{1 - \varepsilon} = p \cdot \frac{1 - \varepsilon + 1 + \varepsilon}{(1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon)} = p \cdot \frac{2}{1 - \varepsilon^2} = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{2}{1 - (1 - \frac{b^2}{a^2})} = \frac{2 b^2}{a \cdot \frac{b^2}{a^2}} = 2 a$$

$$\Rightarrow c_1 + c_2 = 2 a, \quad c_1 - a = a - c_2, \quad |a - c_1| = |a - c_2|$$

Daraus folgt, dass  $F_1$  und  $F_2$  symmetrisch zum Ellipsenmittelpunkt  $M$  liegen, denn  $c_{1,2}$  wird vom Scheitelpunkt  $S$  aus gemessen und  $a$  ist die grosse Halbachse, liefert also die erste Koordinate von  $M$ .

$$\begin{aligned} \text{Es gilt weiter: } e := \frac{1}{2} |c_1 - c_2| &= \frac{1}{2} \left| \frac{p}{1 + \varepsilon} - \frac{p}{1 - \varepsilon} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{p - p \varepsilon - p + p \varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \right| = \left| \frac{p \varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \right| = p \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon^2} = \\ &= \varepsilon \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{1 - (1 - \frac{b^2}{a^2})} = \varepsilon \frac{b^2}{a} \cdot \frac{a^2}{b^2} = \varepsilon a \end{aligned}$$

**Definition:**  $e = \varepsilon a$  heisst **lineare Exzentrizität**.

Es gilt:  $e^2 = \varepsilon^2 a^2 = (1 - \frac{b^2}{a^2}) \cdot a^2 = a^2 - b^2$

**Formel:**  $e^2 a^2 = e^2 = a^2 - b^2$

Nun setzen wir  $c_{1,2} = \frac{p}{1 \pm \varepsilon}$  in (\*):  $r^2 = c^2 + 2u(p - c) + \varepsilon^2 u^2$  ein:

$$\Rightarrow r^2 = \left(\frac{p}{1 \pm \varepsilon}\right)^2 + 2u(p - \frac{p}{1 \pm \varepsilon}) + \varepsilon^2 u^2 = \left(\frac{p}{1 \pm \varepsilon}\right)^2 + 2up\left(1 - \frac{1}{1 \pm \varepsilon}\right) + \varepsilon^2 u^2 = \\ = \frac{p^2}{(1 \pm \varepsilon)^2} + 2up\frac{\pm \varepsilon}{1 \pm \varepsilon} + \varepsilon^2 u^2 = \left(\frac{p}{1 \pm \varepsilon} \pm \varepsilon u\right)^2.$$

Diese Gleichung hat zwei Lösungen:  $r_1 = \frac{p}{1 + \varepsilon} + \varepsilon u$  und  $r_2 = \frac{p}{1 - \varepsilon} - \varepsilon u$

$$\Rightarrow r_1 + r_2 = \frac{p}{1 + \varepsilon} + \varepsilon u + \frac{p}{1 - \varepsilon} - \varepsilon u = \frac{p}{1 + \varepsilon} + \frac{p}{1 - \varepsilon} = \text{const.} \quad (\text{Unabhängig von } u!)$$

$$\Rightarrow r_1 + r_2 = p \cdot \left(\frac{1}{1 + \varepsilon} + \frac{1}{1 - \varepsilon}\right) = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1 + \varepsilon + 1 - \varepsilon}{1 - \varepsilon^2} = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{2}{1 - (1 - \frac{b^2}{a^2})} = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{2a^2}{b^2} = 2a$$

**Formel:**  $r_1 + r_2 = 2a = \text{const.}$

Das Kind, das wie oben beschrieben mit zwei Nägeln und einer Schnur eine Kurve zeichnet, bekommt also tatsächlich eine Ellipse.

Für die spezielle Wahl  $P = H$  ( $r_1 = r_2$ ) finden wir daher wegen  $|a - c_1| = |a - c_2|$ :

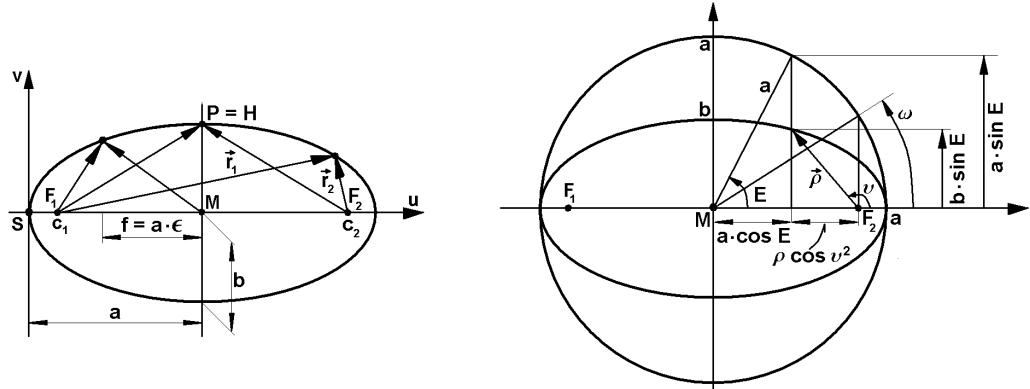
$$r_1 + r_2 = \sqrt{(a - c_1)^2 + b^2} + \sqrt{(c_2 - a)^2 + b^2} = 2\sqrt{(a - c_1)^2 + b^2} = 2a \\ \Rightarrow (a - c_1)^2 + b^2 = a^2 \Rightarrow f^2 = a^2 - b^2 = (a - c_1)^2 \Rightarrow |a - c_2| = a - c_1 = f, \quad (a > c_1).$$

**Formel:** Für den Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkt gilt:

$$|a - c_2| = a - c_1 = \sqrt{a^2 - b^2} = f = e = \varepsilon a$$

**Konsequenz:** Lineare Exzentrizität und Brennpunktsabstand sind bei der Ellipse identisch.

Abbildung 4.24: Beziehungen an der Ellipse



Es gilt weiter:  $b = \sqrt{a^2 - f^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \varepsilon^2} = a \sqrt{1 - \varepsilon^2}$   
 $\Rightarrow \rho^2 = (f - a \cos(E))^2 + (b \sin(E))^2 = (a \varepsilon - a \cos(E))^2 + (a \sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin(E))^2 =$   
 $= a^2 (\varepsilon - \cos(E))^2 + (\sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin(E))^2 = a^2 (\varepsilon^2 - 2 \varepsilon \cos(E) + \cos^2(E) + \sin^2(E) - \varepsilon^2 \sin^2(E)) =$

$$= a^2 (\varepsilon^2 - 2 \varepsilon \cos(E) + 1 - \varepsilon^2 (1 - \cos^2(E))) = a^2 (1 - 2 \varepsilon \cos(E) + \varepsilon^2 \cos^2(E)) = a^2 (1 - \varepsilon \cos(E))^2$$

**Formel:**  $\varrho = a (1 - \varepsilon \cos(E))$

In der letzten Skizze lesen wir ab:

$$f = a \cdot \varepsilon = a \cos(E) - (+\varrho \cos(\vartheta)) \Rightarrow \varrho \cos(\vartheta) = a \cos(E) - a \varepsilon = a (\cos(E) - \varepsilon) (\rightsquigarrow \text{negativ für } \vartheta > 90^\circ!)$$

**Formel:**  $\varrho \cos(\vartheta) = a (\varepsilon - \cos(E))$

**Definition:**  $\vartheta$  heisst **wahre Anomalie**.

Die wahre Anomalie ist bekanntlich für die Beobachtung wichtig.

Wenn wir jetzt die letzten beiden Formeln einerseits addieren und andererseits subtrahieren, bekommen wir zwei Ausdrücken, in deren Quotient sich das  $\varrho$  herauskürzt:

$$\varrho (1 - \cos(\vartheta)) = a (1 - \varepsilon \cos(E)) - a (\cos(E) - \varepsilon) = a (1 + \varepsilon - \cos(E) - \varepsilon \cos(E)) = a (1 + \varepsilon) (1 - \cos(E))$$

$$\varrho (1 + \cos(\vartheta)) = a (1 - \varepsilon \cos(E)) + a (\cos(E) - \varepsilon) = a (1 - \varepsilon + \cos(E) - \varepsilon \cos(E)) = a (1 - \varepsilon) (1 + \cos(E))$$

$$\rightsquigarrow \frac{\varrho (1 - \cos(\vartheta))}{\varrho (1 + \cos(\vartheta))} = \frac{a (1 + \varepsilon) (1 - \cos(E))}{a (1 - \varepsilon) (1 + \cos(E))} \Rightarrow \sqrt{\frac{1 - \cos(\vartheta)}{1 + \cos(\vartheta)}} = \sqrt{\frac{(1 + \varepsilon) (1 - \cos(E))}{(1 - \varepsilon) (1 + \cos(E))}}$$

Aus der Trigonometrie kennen wir die Formel:  $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}}$

$$\rightsquigarrow \tan\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(\vartheta)}{1 + \cos(\vartheta)}} = \sqrt{\frac{(1 + \varepsilon) (1 - \cos(E))}{(1 - \varepsilon) (1 + \cos(E))}} = \sqrt{\frac{(1 + \varepsilon)}{(1 - \varepsilon)} \cdot \sqrt{\frac{(1 - \cos(E))}{(1 + \cos(E))}}} = \sqrt{\frac{(1 + \varepsilon)}{(1 - \varepsilon)} \cdot \tan\left(\frac{E}{2}\right)}$$

Aus der letzten Skizze ersehen wir:  $f = a \cdot \varepsilon = a \cos \omega \Rightarrow \varepsilon = \cos \omega$

**Formel:**  $\varepsilon = \cos \omega$

$$\rightsquigarrow \tan\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \sqrt{\frac{(1 + \varepsilon)}{(1 - \varepsilon)} \cdot \tan\left(\frac{E}{2}\right)} = \sqrt{\frac{(1 + \cos(\omega))}{(1 - \cos(\omega))} \cdot \tan\left(\frac{E}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(1 - \cos(\omega))}{(1 + \cos(\omega))}}} \cdot \tan\left(\frac{E}{2}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)} \cdot \tan\left(\frac{E}{2}\right)$$

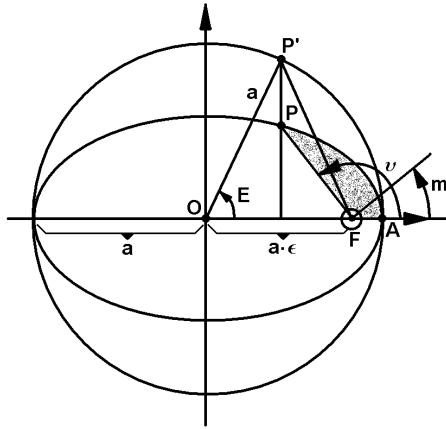
$$\rightsquigarrow \tan\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \cot\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{E}{2}\right) \Rightarrow \tan\left(\frac{E}{2}\right) = \tan\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

**Formel:**  $\tan\left(\frac{E}{2}\right) = \tan\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$

Dies ist eine wichtige Formel, die in der Praxis der Sonnenurberechnung eine Rolle spielen wird. Da im System Sonne–Erde die Ellipsenform weitgehend konstant ist,  $\omega$  also nicht stark ändert, haben wir hier einen direkten Zusammenhang zwischen der wahren Anomalie  $\vartheta$ , die für die wahre Erdposition massgebend ist, und der exzentrischen Anomalie  $E$ , die für die **mittlere Zeit** massgebend ist.

### 4.5.3 Keplers Flächensatz

Abbildung 4.25: Flächensatz und Ellipse



Wir verwenden jetzt auch noch ein **heliozentrisches Ekliptikalsystem** (Sonne im Zentrum,  $x$ -Achse auf der grossen Halbachse der Ellipse). Die vom Radiusvektor zur Erde überstrichene Fläche, gemessen vom Perihel aus, nimmt nach Keplers Flächensatz mit der Zeit linear zu. Anders ausgedrückt: Die pro Zeiteinheit überstrichene Fläche ist konstant.

Um den Inhalt der schraffierten Fläche  $FAPA$  zu berechnen, berechnen wir erst den Inhalt der Fläche  $FAP'F$ . Diese Fläche setzt sich als Differenz zusammen aus dem Kreissektor  $OAP'O$  und dem Dreieck  $OFP'O$ .

$$\rightsquigarrow (FAP'F) = (OAP'O) - (OFP'O) = a^2 \pi \cdot \frac{E}{2\pi} - \frac{(a \varepsilon) \cdot (a \sin(E))}{2} = \frac{a^2}{2} \cdot (E - \varepsilon \sin(E))$$

Die Ellipse geht aus dem Kreis hervor durch Streckung mit dem Faktor  $\frac{b}{a}$  in  $y$ -Richtung. Diese Beziehung überträgt sich auf die Flächen  $FAP'F$  und  $FAPF$

$$\rightsquigarrow (FAPF) = (FAP'F) \cdot \left(\frac{b}{a}\right) = \frac{a^2}{2} \cdot (E - \varepsilon \sin(E)) \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{2} \cdot (E - \varepsilon \sin(E)).$$

**Formel:** 
$$(FAPF) = \frac{a \cdot b}{2} \cdot (E - \varepsilon \sin(E)) := \frac{a \cdot b}{2} \cdot m(E)$$

Dabei hängt nur der Faktor  $(E - \varepsilon \sin(E))$  von  $E$  ab. Der andere Faktor  $\frac{a^2}{2}$  ist konstant. Folgender Begriff ist hier üblich:

**Definition:**  $m(E) := E - \varepsilon \sin(E)$  heisst **mittlere Anomalie**.

Der **Keplersche Flächensatz** besagt nun, dass  $m(E)$  linear mit einer allgemeinen mittleren (z.B. mittlere Sternzeit) wächst:

**Satz:**  $m(E) = \text{const.} \cdot \Delta t_m$ ,  $m(E) = \Delta t_m$  z.B. im gleichen Winkelmaß  
 $(\Delta t_m = t_m - T, t_m = \text{mittlere Zeit}, T = \text{Perihelzeit.})$

Für unsere Zwecke können wir die **mittlere Zeit** durch den Keplersche Flächensatz definieren:

**Definition:**  $\text{Mittlere Zeit } t_m = m(E) + T. \quad (T = T_{\text{Perihel}})$

**Bemerkung:** Die numerische Exzentrizität  $\varepsilon := \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$  ist sehr klein, da sich  $b$  und  $a$  nicht in erster Ordnung unterscheiden. Daher ist  $m(E) \approx E$ .  $m(E)$  hat somit die Bedeutung eines Winkels zu einem imaginären Objekt, das neben der Erde daherwandert.

**Achtung:**  $m(E)$  als Winkel wird in der Literatur oft auch im Gradmass angegeben. Da  $\sin(E)$  dimensionslos ist, muss dann  $\varepsilon$  ins Gradmass umgerechnet werden, was dazu führt, dass noch ein zusätzlicher Faktor auftritt.

### Arbeit

Zeichne die Erdbahnhalbachsen auf einem grossen Blatt massstäblich auf. Berechne die Brennpunkte und Zeichne diese auf den grossen Halbachsen ein. Zeichne auch den Sonnen und den Erddurchmesser ein. Was ergibt sich für ein Bild?

Aus Lit. Bibl. A7 entnehmen wir folgende Approximationswerte für die Erdbahn um die Sonne. Genauere Werte finden sich z.B. in Lit. Bibl. A1:

Aquatorradius	$6.378 \cdot 10^6 \text{ m}$
Grosse Bahnhalbachse	$a \approx 1 \text{ AE} = 149.6 \cdot 10^9 \text{ m}$
Numerische Bahnexzentrizität	$\varepsilon \approx 0.016722$
Siderische Umlaufzeit	$365.256 \text{ d} \doteq 1.00004 \text{ a}$
Siderische Rotationsdauer	$23.9345 \text{ h}$
Neigung zur Ekliptik	$23^\circ 27'$
Sonnenradius	$6.9599 \cdot 10^8 \text{ m}$
Scheinbarer Sonnenradius	$16'00'' \pm 16''$
Scheinb. Sonnenrad. max.	$16'16''$
Scheinb. Sonnenrad. min.	$15'44''$

#### 4.5.4 Zeitgleichung und Deklinationsbestimmung

Für die Umrechnung der Koordinaten im Systempaar Himmelsäquator–Ekliptik haben wir auf Seite 38 die folgenden Formeln gefunden:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{AH} &= \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\delta) \cos(AR) \\ \cos(\delta) \sin(AR) \\ \sin(\delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(L) \\ \sin(L) \cos(\varepsilon) \\ \sin(L) \sin(\varepsilon) \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{y^*}{x^*} = \tan(AR) = \frac{\cos(L)}{\sin(L) \cos(\varepsilon)} \\ &\rightsquigarrow \frac{y^*}{x^*} = \frac{\sin(AR)}{\cos(AR)} = \frac{\sin(L) \cos(\varepsilon)}{\cos(L)} = \tan(L) \cos(\varepsilon) \\ &\rightsquigarrow AR = \arctan\left(\frac{y^*}{x^*}\right) = \text{arc}(x^*, y^*) = \arctan(\tan(L) \cos(\varepsilon)) \text{ und } \delta = \arcsin(\sin(L) \cdot \sin(\varepsilon)) \end{aligned}$$

$\varepsilon$  ist hier die Schiefe der Ekliptik und  $L$  die ekliptikale Länge.

**Achtung:** Die Schiefe der Ekliptik  $\varepsilon$  ist ebenfalls zeitabhängig. Man findet sie in Tabellen. Im Jahr 2000 beträgt sie  $23^\circ.4393$  (im Jahr 1990  $23^\circ.4406$ , 1980  $23^\circ.4419$ ). Die Änderung ist momentan ca.  $0.468''$  pro Jahr.

Damit lassen sich aus der ekliptikalnen Länge  $L$  bei fixer Schiefe die Deklination und die Rektaszension berechnen! Das kann wichtig sein für die Berechnung der **Deklinationslinien** und für die Zeitgleichung.

**Formel:**

$$\begin{aligned}\delta &= \arcsin(\sin(L) \cdot \sin(\varepsilon)) \\ AR &= \arctan(\tan(L) \cos(\varepsilon))\end{aligned}$$

$L, AR$  ab  $\gamma$  gemessen.

Mit  $GradTan(x, y)$  kann dabei dem Problem der nicht-eindeutigen Umkehrfunktion begegnet werden.

Weiter wissen wir:  $t^*$  bedeutet die Sternzeit, d.h. der Stundenwinkel des Frühlingspunktes und  $t$  der Stundenwinkel (der Sonne  $\rightsquigarrow$  wahre Zeit).  $AR$  ist die Rektaszension (der Sonne, ab Frühlingspunkt gemessen). Dann gilt (vgl. p. 39):

$$t^* = t + AR, \quad AR = t^* - t$$

Wegen der Präzession wandert der Frühlingspunkt bekanntlich in einem platonischen Jahr ( $25'700$  Jahre) einmal durch den Tierkreis. Pro 2160 Jahren rückt er um durchschnittlich  $30^\circ$  weiter, das macht in 72 Jahren ca.  $1^\circ$  und in einem Jahr ca.  $0.83' \approx 50''$ . In fünf Jahren sind es etwa  $4.16'$ . Das hat einen Einfluss auf die Berechnung der Zeitgleichung und der Deklination, denn  $\delta$  und  $AR$  sind aus  $L$  zu bestimmen,  $L$  aber ist wegen dem Keplerschen Flächensatz nicht linear, sondern über die Anomalie  $\vartheta$  mit der Zeit verbunden!

Bezüglich des Fixsternhimmels resp. des Tierkreises verschiebt sich also der Frühlingspunkt und auch die Ekliptikhalbachsen (Periheldrehung), wenn auch nur schwach, jedoch stetig mit der Zeit. An einem fernen Zeitpunkt  $t_0^*$  mögen Periheldurchgang und Frühlingsbeginn zusammengefallen sein. Am Frühlingsbeginn ist die Richtung zum Frühlingspunkt bei Sonnenaufgang feststellbar, da dann bei Sonnenaufgang die Sonne auf der Schnittgeraden der Ekliptikebene mit der Äquatorialebene steht. (Vor ca. 2000 Jahren stand dabei das Sternbild des Widders in Osten, heute ist es etwas verschoben.) Wir definieren nun für die Erde im Perihel (mittlere Anomalie  $\vartheta_0 = 0$ ) den Bezugspunkt der ekliptikalnen Länge  $L_0$ :

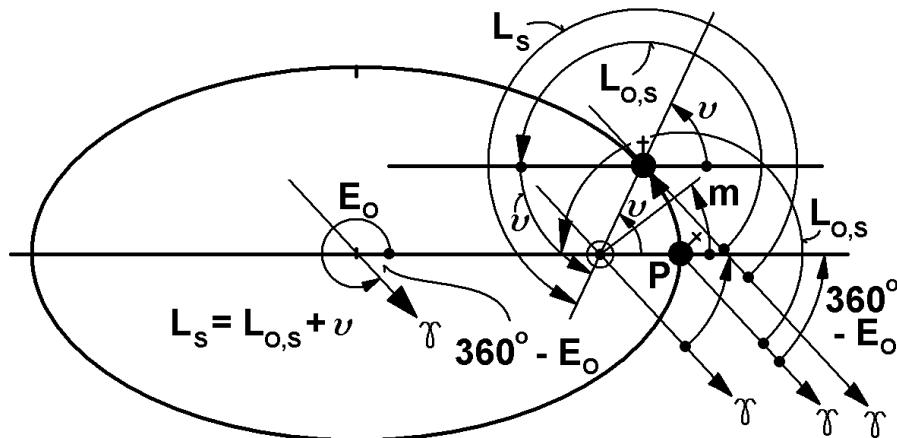
**Definition:** Die ekliptikale Länge der Sonne bezüglich der Erde im Perihel heisst **Perihellänge**  $L_0$ .

Vor schätzungsweise rund  $16'500$  Jahren fielen Frühlingspunkttrichtung und Perihelrichtung zusammen: Es war  $L_0 = L_\infty = 0$ . Die Perihellage bezüglich des Frühlingspunktes  $L_0 = L_0(t)$  verschiebt sich ständig nach Gesetzen, die unten besprochen werden.  $L_\infty$  ist die Perihellänge zu einem fix gewählten Zeitpunkt. Der Frühlingspunkt ist wegen der damit verbundenen Deklination (Deklinationslinien!) entscheidend für die Zeitmessung mit Sonnenuhren. Die Verschiebung des Frühlingspunktes bedeutet, wie erwähnt, eine Änderung der Rektaszension  $AR$  sowie der ekliptikalnen Länge  $L$  bezüglich des Perihels, denn  $L$  und  $AR$  werden vom Frühlingspunkt aus gemessen. Heute hat die Erde im Perihel, wo die mittlere Anomalie 0 ist, eine Länge  $L_0$ , die im Jahr 2000 (0. Jan. am Mittag, Weltzeit) ca.  $282^\circ.93$  beträgt (vgl. Tabelle unten).

Neben dem üblichen geozentrischen Ekliptikalsystem ( $x$ -Achse zum Frühlingspunkt) können wir ein neues, gedrehtes, gleich orientiertes heliozentrisches Koordinatensystem mit paralleler  $z$ -Achse, aber neuer  $x$ -Achse in Richtung Perihel definieren. Ich nenne dieses System hier das **anomalistische heliozentrische Ekliptikalsystem**. Dieses System entsteht aus dem gewöhnlichen geozentrischen Ekliptikalsystem durch eine Drehung um den Winkel  $L_0$  zwischen Frühlingspunkt ( $\gamma$ ) und Perihel von der Sonne aus gesehen, sowie eine Parallelverschiebung ins Zentrum Sonne. Daher gilt für die Länge  $L_S$  der Sonne ab  $\gamma$  das Transformationsgesetz (alle Winkelmasse z.B. im Bogenmass, vgl. Skizze unten):

$$L_S = \vartheta_E + L_0 = \vartheta + L_0$$

Abbildung 4.26: Länge der Sonne, Perihellänge und wahre Anomalie



Damit erhalten wir folgende wichtige **Formeln** (alle Winkelmasse z.B. im Bogenmass):

1.  $\vartheta = L_S - L_0$  (vorhin erwähnt, heliozentr. anomalist. Ekliptikalsystem)
2.  $\tan\left(\frac{E}{2}\right) = \tan\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$  (vgl. Seite 57,  $E$  = exzentrische Anomalie, KS der Ellipse, p. 56)
3.  $m(E) = E - \varepsilon \sin(E) = \text{const.} \cdot \Delta t_m$  (mittlere Anomalie, vgl. Keplerscher Flächensatz, Seite 58)  
 $\varepsilon$  ist hier die numerische Exzentrizität, wie man ihr oft in den Geometrielehrmitteln begegnet. Um einer Verwechslung mit der Schiefe der Ekliptik (auch  $\varepsilon$ ) vorzubeugen, kürzen wir die **numerische Exzentrizität** hier nun mit  $e_n$  ab (nicht zu verwechseln mit der Eulerschen Zahl  $e$ , die wir hier nicht gerade gebrauchen). Damit erhalten wir:  
 $m(E) = E - e_n \sin(E) = \text{const.} \cdot \Delta t_m$ ,  $m(E) = \Delta t_m$  bei Masse in Rad.

Da die wahre Anomalie  $\vartheta$  sich nicht linear mit der Zeit verhält, sondern sich wegen der Ellipsenbahn der Erde mit dem Jahr als Periode ändert, haben wir unter 4.5.3 auf der Grundlage des Keplerschen Flächensatzes die mit der Zeit  $t_m$  lineare mittlere Anomalie  $m = E - e_n \sin(E) = \text{const.} \cdot \Delta t_m$  definiert. Auf dieser Grundlage definieren wir jetzt eine mittlere ekliptikale Länge  $L_m$  eines **fiktiven Punktes**  $Q$  vorerst im geozentrischen Ekliptikalsystem, den wir als **mittlere, fiktive Sonne** bezeichnen. An diesem Punkte  $Q$  mit dem Betrag der Rektaszension gleich mittlerer ekliptikaler Länge am Himmelsäquator (auf der Himmelssphäre) befindet sich im allgemeinen Fall kein Objekt. Es ist ein rein theoretischer Ort, der sich aber mit der Zeit auf dem Himmelsäquator gleichmäßig bewegt und als Positionsgeber einer

mittleren Zeit verwendet werden kann.

**Definition:**

Mittlere ekliptikale Länge von  $Q$ :

$$L_{m,Sonne} = L_m := L_0 + m(E) = L_0 + E - e_n \sin(E) = L_0 + \Delta t_m$$

(alle Winkelmasse z.B. im Bogenmass)

Die **fiktive Sonne**  $Q$  ist somit der Punkt auf der Himmelssphäre mit der Deklination  $\delta = 0$  und der Rektaszension  $AR = L_m$ .

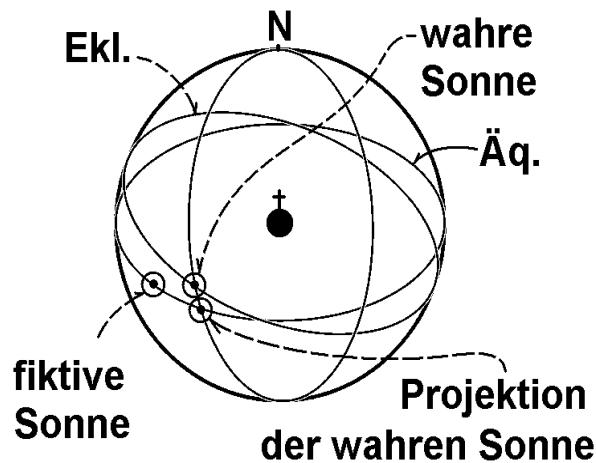
**Konsequenz:**  $\Delta L = L_m - L_0 = \Delta t_m$  (Winkelmasse z.B. im Bogenmass. Sonst gilt  $\Delta L \sim \Delta t_m$ ,  $L_0$  ist dabei die Perihellänge des Frühlingspunktes.)

Für das Vorrücken des Frühlingspunktes am Fixsternhimmel kennt man numerische Werte: In Altgrad gemessen gilt bei einem Startwert von  $L_\infty$  nach  $d$  Tagen:

$$L_0 = L_\infty + L'_0 \cdot d, \quad L'_0 = 0^\circ.0000470684 \text{ (pro d)}$$

Es mag irritieren, dass hier die Rektaszension betragsmäßig gleich einer Länge gesetzt ist. Das ist aber verständlich wenn man bedenkt, dass sich die fiktive Sonne nicht in der Ekliptikebene, sondern in der Äquatorebene des Ortsäquatorsystems der Erde auf einer Kreisbahn (auf der Sphäre!) bewegt, womit die Deklination immer konstant gleich null ist und keinen Einfluss auf die Position hat.

Abbildung 4.27: Sonne in der Ekliptikebene auf die Sphäre projiziert und mittlere Sonne in der Äquatorialebene



**Merke:** Die mittlere, fiktive Sonne bewegt sich also am Himmelsäquator auf der Sphäre, d.h. auf einer Kreisbahn, die wahre Sonne aber in der dazu geneigten Ekliptikebene.

Wegen  $t = t^* - AR$  (vgl. p. 60, Winkel- und Stundenwinkelmasse z.B. im Bogenmass) können wir damit auch die **mittlere Zeit** als Differenz der Sternzeit zur „Rektaszension“  $L_m$  definieren:

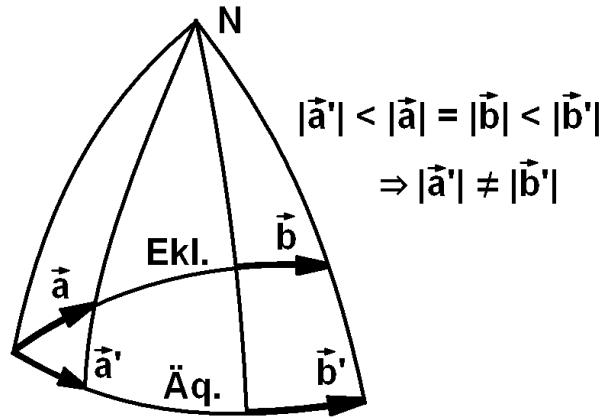
**Definition:**

$$\text{Mittlere Zeit } t_m = t^* - L_m$$

**Achtung:**  $t^*, t$  werden im Ortsäquatorsystem (linksorientiert!) positiv gemessen,  $L_m$  wird jedoch positiv gemessen im beweglichen Himmelsäquatorsystem, das sich nach dem Frühlingspunkt ausrichtet.

Das nachfolgende Bild macht verständlich, dass die mittlere Zeit und die wahre Zeit auch wegen der Schiefe der Ekliptik sich nicht linear zueinander verhalten können. Legt die Sonne an zwei Orten auf ihrer Bahn in der Ekliptikebene jeweils eine fixe Distanz zurück, so ist die Länge der Projektion auf die Äquatorebene des Himmelsäquatorsystems allgemein verschieden: Im Bereich des Frühlingspunktes ist der Winkel zwischen den beiden Bahnen recht gross und die Projektion kürzer als in dem Falle, wo die beiden Bahnen etwa parallel laufen. Daher verschiebt sich die Position der fiktiven Sonne gegenüber der wahren Sonne jeweils nach vorne und nach hinten, währenddem sich die Sonne über dem Himmelsäquator befindet. Entsprechendes gilt im Fall, wenn sich die Sonne unter den Äquator taucht. Einer Halbperiode der Sonne (z.B. Fall über dem Äquator) entspricht daher etwa eine Schwankungsperiode in der Positionsabweichung zwischen wahrer und mittlerer Sonne.

Abbildung 4.28: Zwei leich lange Wege der wahren Sonne an zwei Orten in der Ekliptikebene und entsprechende Wege ihrer Projektion auf die Äquatorialebene



Im Falle der wahren Sonne wird  $t^* = t + AR$  (vgl. Seite 60) zu  $t_{\text{Sonne}}^* = t_{\text{Sonne}} + AR_{\text{Sonne}}$ . Daher erhalten wir für die mittlere Zeit (alle Zeit- resp. Winkelmasse z.B. im Bogenmass):

$$t_m = t + AR_{\text{Sonne}} - L_m = t + AR_{\text{Sonne}} - L_0 - m(E)$$

Die **Zeitgleichung** ist heute (seit 1932) definiert als  $ZG = t - t_m$ . (Vorher galt  $ZG' = t_m - t$ .)

Das ergibt:

$$ZG = t - t_m = t - (t + AR - L_0 - m(E)) = L_0 + m(E) - AR, \quad m(E) = E - e_n \sin(E)$$

$L_0$  ist tabelliert (in Altgrad:  $282^\circ.9399$  für das Jahr 2000, 0. Jan. am Mittag, Weltzeit), ändert jedoch wegen der Periheldrehung mit der Zeit.  $\leadsto$  Wegen  $L_0 = L_\infty + L'_0 \cdot d$  ( $L'_0$  praktisch klein) erhalten wir somit (unter Benutzung der Formel für  $AR$  von Seite 59, alle Winkelmasse z.B. im Bogenmass):

$$ZG = L_\infty + L'_0 \cdot d + m(E) - AR = L_\infty + L'_0 \cdot d + E - e_n \sin(E) - AR = L_\infty + L'_0 \cdot d + E - e_n \sin(E) - \arctan(\tan(L) \cdot \cos(\varepsilon))$$

**Problem:** Bei der Berechnung von  $L$ ,  $E$  etc. mittels Arcus-Funktionen hat man das Problem mit dem eingeschränkten Definitionsbereich bzw. den Sprüngen. So springt z.B.  $E$  im Aphel von  $+180^\circ$  auf  $-180^\circ$ . Das muss man bei Berechnungen berücksichtigen. Zu solchen Zwecken haben wir u.a. die Funktion  $\text{gradtan}$  definiert, vgl. Seite 37.

Für die Zunahme der mittleren Anomalie kennt man ebenfalls numerische Werte. Sei  $d$  die Anzahl Tage und  $m_0$  ein Startwert, dann gilt in Altgrad gemessen:

$$m = m_0 + m' \cdot d, \quad m' = 0^\circ.9856002670$$

Das ergibt mit der Keplergleichung  $m = E - e_n \sin(E)$  (auch hier alle Winkelmasse im gleichen Massensystem, z.B. im Bogenmass):

**Formel:**  $m_0 + m' \cdot d = E - e_n \sin(E)$  (Kepler-Gleichung)

$$\rightsquigarrow ZG = L_\infty + L'_0 \cdot d + m_0 + m' \cdot d - AR = L_\infty + L'_0 \cdot d + E - e_n \sin(E) - \arctan(\tan(L) \cdot \cos(\varepsilon))$$

Hier ist  $m_0$  ein Normierungswert, der ebenfalls ändert (in Tabellen ablesbar, in Altgrad ist  $m_0 \approx 356^\circ.5399$  für das Jahr 2000, 0. Jan. am Mittag, Weltzeit). Weiter ist  $m'$  bekannt,  $e$  ist die numerische Exzentrizität (diese ändert zwar auch mit der Zeit, doch sie ist ebenfalls tabelliert:  $e_n = 0.0167092$  für das Jahr 2000 0. Jan. am Mittag, Weltzeit). Damit kann man aus der letzten Formel (Kepler-Gleichung) mit Hilfe numerischer Verfahren (z.B. Newton-Iteration, Potenzreihen oder Bezug von *Mathematica*) jetzt  $E(d)$  berechnen, d.h.  $E$  in Abhängigkeit von der Zeit  $d$  bestimmen (dabei gibt es 365.242199 tropische Tage pro tropisches Jahr). Als Approximation von  $E - e_n \sin(E)$  kann bei Verwendung der Potenzreihenentwicklung bei kleinem  $e_n$ , je nach der erforderlichen Genauigkeit, ein vernünftiges Taylorpolynom benutzt werden:

$$\text{Z.B. } m_0 + m' \cdot d = E - e_n \sin(E) \approx (1 - e_n) E + \frac{e_n E^3}{6} - \frac{e_n E^5}{120} + \frac{e_n E^7}{5040} - \frac{e_n E^9}{362880} + O[E]^{11}$$

Oder nach Newton: Sei  $f(E) = E - e_n \sin(E) - m_0 - m' \cdot d$

Start:  $E = E_0$  wählen.

$$\text{Iterieren: } E_{n+1} = E_n - \frac{f(E_n)}{f'(E_n)} = E_n - \frac{E_n - e_n \sin(E_n) - m_0 - m' \cdot d}{1 - e_n \cos(E_n)}$$

Abbruchbedingung  $\rightsquigarrow$  z.B.  $|E_{n+1} - E_n| \leq 10^{-k}$ ,  $k$  vernünftig wählen.

In einem tropischen Jahr läuft die Erde einmal um die Sonne. Wenn sich der Frühlingspunkt nicht bewegen würde, wäre in einem tropischen Jahr ( $\Delta d = 365.242199$  Tage) die Zunahme der mittleren Anomalie  $\Delta m$  in Altgrad gleich  $360^\circ$ . (Es ist  $\Delta m = m' \cdot \Delta d$ .) Wegen der Verschiebung des Frühlingspunktes muss man hier eine Störung von  $\Delta L = L'_0 \cdot \Delta d$  berücksichtigen. ( $L'_0$  ist klein. In Altgrad:  $L'_0 = 0^\circ.0000470684$ .  $d$  bedeutet tropische Tage) Daher gilt:

Im tropischen Jahr ist in Altgrad  $(m' + L'_0) \cdot \Delta d = 360^\circ$ . Das macht pro tropischer Tag:  $k = m' + L'_0 = 0^\circ.9856473354$  (Lit. Bibl. A1) Eine numerische Nachrechnung mit dem tropischen Jahr zu 365.242199 Tagen mit Hilfe von *Mathematica* ergibt allerdings folgenden Wert (Abweichung an den letzten beiden Stellen, offenbar ein Problem der Genauigkeit):

**Mathematica-Programm:**

---

```
{SetPrecision[(360.)/(365.242199), 10],
 SetPrecision[N[(360.)/(365.242199), 100], 10]}
```

---

**Output:**

---

```
{0.9856473348, 0.9856473348}
```

---

Damit wäre dann  $m'_0 = 0^\circ.9856002664$  statt  $= 0^\circ.9856002670$ .

Die Keplergleichung lässt sich mit *Mathematica* numerisch direkt derart behandeln, dass man die Nullstelle  $E(d)$  als Funktion von  $d$  wie bei den üblichen, in Rechnern implementierten transzenten Funktionen (z.B. sin) zur Verfügung hat und auch ploten kann. Dazu definieren wir zuerst die Funktion  $f(E, d) := E - e_n \sin(E) - m_0 - m' \cdot d$ , deren Nullstelle wir suchen. Zuerst machen wir uns ein Bild der Funktion:

**Mathematica-Programm:**

---

```
(* Konstanten *)
m0 = (356.5399 - 360) Degree; e = 0.0167092; L0 = (282.9399 -
360) Degree; Eps = 23.4393 Degree;
L01 = 0.0000470684 Degree; m01 = 0.9856002664 Degree;
(* Aus Kalenderprogramm *)
m[n_] := 31; m[2] = 28; m[4] = 30; m[6] = 30; m[9] = 30; m[11] = 30;
m[11] = 30; m[14] = 28; m[-1] = 1;
(* Anzahl Tage seit 31.12. letzten Jahres *)
tage[tag_, mon_] := Sum[m[n], {n, 1, mon}] - m[mon] + tag;
day = 21; month = 12; d0 = tage[day, month];
(* Keplerfunktion *)
f[eE_, d_] := eE - e Sin[eE] - m0 - m01 d;
Plot[{f[x, 0], f[x, 50], f[x, 100], f[x, 200], f[x, 300], f[x, d0]}, {x,
0 - 0.1, 2Pi + 0.1}];
```

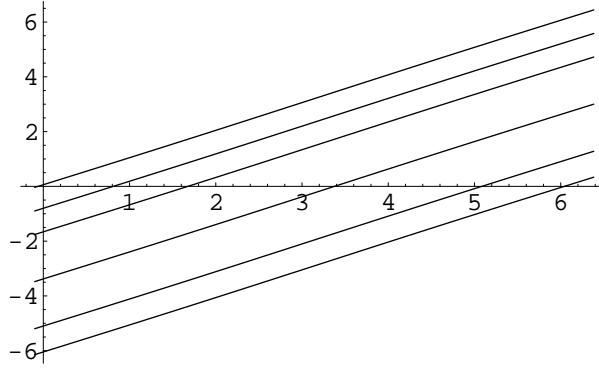
---

**Mathematica-Programm:**

---

```
eE[d_] := eNS /. FindRoot[f[eNS, d] == 0, {eNS, 3}];
tab1 = Table[eE[d], {d, 0, 365.242199, 5}];
tab2 = Table[eE[d] - 2Pi d/365.242199, {d, 0, 365.242199, 5}];
Show[GraphicsArray[{{ListPlot[tab1, DisplayFunction -> Identity],
ListPlot[tab2, DisplayFunction -> Identity]},
{Plot[eE[d], {d, 0, 365.242199}, DisplayFunction -> Identity],
Plot[eE[d] - 2Pi d/365.242199, {d, 0, 365.242199},
DisplayFunction -> Identity]}], DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

---

Abbildung 4.29:  $f(E, d)$  für verschiedene  $d$ 

Weiter mit der Zeitgleichung: Wenn  $E(d)$  gefunden ist, kann damit die wahre Anomalie  $\vartheta$  der Erde in der Ekliptikebene aus der folgenden bekannten Formel gewonnen werden (vgl. Seite 57,  $e_n$  hiess dort „ $\varepsilon$ “ und war die numerische Exzentrizität, die ebenfalls ändert, jedoch tabelliert ist,  $e_n = 0.0167092$  für das Jahr 2000):

$$\tan\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \sqrt{\frac{(1+e_n)}{(1-e_n)}} \cdot \tan\left(\frac{E}{2}\right) \Rightarrow \vartheta = 2 \cdot \arctan\left(\sqrt{\frac{(1+e_n)}{(1-e_n)}} \cdot \tan\left(\frac{E}{2}\right)\right)$$

Wenn man  $\vartheta$  berechnet hat, findet man aus  $\vartheta = L_S - L_0$  mit Hilfe von  $L_0 = L_\infty + L'_0 \cdot d$  jetzt:

$$L_S = \vartheta + L_\infty + L'_0 \cdot d$$

Daraus ergibt sich  $AR = \arctan\left(\frac{y^*}{x^*}\right) = \arctan(\tan(L_S) \cos(\varepsilon))$  (vgl. Seite 59) und  $\delta = \arcsin(\sin(L) \cdot \sin(\varepsilon))$ ,  $\varepsilon \approx 23^\circ.4393$  fürs Jahr 2000, 0. Jan. am Mittag, Weltzeit. Damit ist die Zeitgleichung:

$$\begin{aligned} ZG &= L_0 + m - AR = L_\infty + L'_0 \cdot d + m_0 + m' \cdot d - AR = L_\infty + L'_0 \cdot d + m_0 + m' \cdot d - \arctan(\tan(L_S) \cos(\varepsilon)) = \\ &= L_\infty + L'_0 \cdot d + m_0 + m' \cdot d - \arctan(\tan(\vartheta + L_\infty + L'_0 \cdot d) \cos(\varepsilon)) \\ \Rightarrow ZG &= L_\infty + L'_0 \cdot d + m_0 + m' \cdot d - \arctan\left(\tan\left(2 \cdot \arctan\left(\sqrt{\frac{(1+e_n)}{(1-e_n)}} \cdot \tan\left(\frac{E(d)}{2}\right)\right) + L_\infty + L'_0 \cdot d\right) \cos(\varepsilon)\right) \end{aligned}$$

Dabei ist  $E(d)$  die Lösung der Kepler-Gleichung.

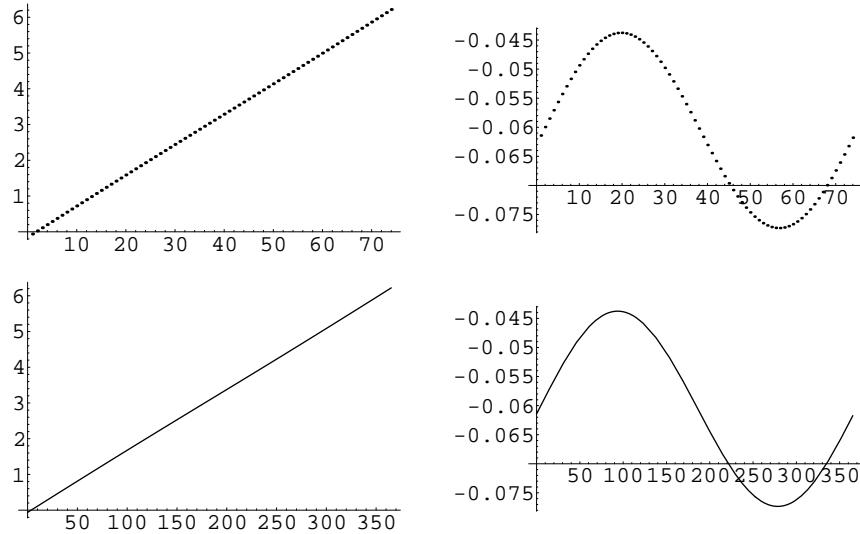
*Hinweis:* Dem Problem der Definitionsbereiche für Winkel beim Rechnen (Sprüngel!) mit der Zeitgleichung kann mit der „Glättungsformel“ mit Hilfe des *GradTan* begegnet werden. (Vgl. Seite 37.)

Ebenso erhalten wir für die Deklination:

$$\begin{aligned} \delta &= \arcsin(\sin(L_S) \cdot \sin(\varepsilon)) = \arcsin(\sin(\vartheta + L_\infty + L'_0 \cdot d) \cdot \sin(\varepsilon)) \\ \Rightarrow \delta &= \arcsin\left(\sin\left(2 \cdot \arctan\left(\sqrt{\frac{(1+e_n)}{(1-e_n)}} \cdot \tan\left(\frac{E}{2}\right)\right) + L_\infty + L'_0 \cdot d\right) \cdot \sin(\varepsilon)\right) \end{aligned}$$

mit  $E(d)$  = Lösung der Kepler-Gleichung  $E - e_n \sin(E) - m_0 - m' \cdot d = 0$ .

Abbildung 4.30: Lösung der Keplergleichung als Funktion von  $d$  und Differenz zu einer mittleren Zeit  $d$  (in tropischen Tagen)



Andererseits könnte man auch mit der folgenden Approximation rechnen, da die Deklinationslinien auf einer Sonnenuhr sowieso schon wegen der Strichdicke nicht sehr exakt gezeichnet werden können:

$$\delta = \arcsin(\sin(L_S) \cdot \sin(\varepsilon)) \approx \arcsin(\sin(L_m) \cdot \sin(\varepsilon)) = \arcsin(\sin(L_0 + m(E)) \cdot \sin(\varepsilon))$$

$$\Rightarrow \delta \approx \arcsin(\sin(L_0 + m(E)) \cdot \sin(\varepsilon)) = \arcsin(\sin(L_\infty + m_0 + (L'_0 + m') \cdot d) \cdot \sin(\varepsilon))$$

↪ Somit erhalten wir aus den hergeleiteten Formeln für die mittlere Zeit und die Deklination die Beziehungen:

**Formeln:**  $ZG = t - t_m =$

$$L_\infty + m_0 + (L'_0 + m') \cdot d - \arctan(\tan(2 \cdot \arctan(\sqrt{\frac{(1+e_n)}{(1-e_n)}} \cdot \tan(\frac{E(d)}{2}))) + L_\infty + L'_0 \cdot d) \cos(\varepsilon))$$

mit  $E(d)$  aus der Kepler-Gleichung  $E - e_n \sin(E) - m_0 - m' \cdot d = 0$ .

Es ist  $m_0 + m' \cdot d = E - e_n \sin(E)$

$$\approx E - e_n \sin(E) \approx (1 - e_n) E + \frac{e_n E^3}{6} - \frac{e_n E^5}{120} + \frac{e_n E^7}{5040} - \frac{e_n E^9}{362880} + O[E]^{11}$$

oder nach Newton

Start:  $E = E_0$  wählen.

$$\text{Iterieren: } E_{n+1} = E_n - \frac{E_n - e_n \sin(E_n) - m_0 - m' \cdot d}{1 - e_n \cos(E_n)}$$

Abbruchbedingung  $\sim$  z.B.  $|E_{n+1} - E_n| \leq 10^{-k}$ ,  $k$  vernünftig wählen.

Es ist:  $L'_0 = 0^\circ.0000470684$ ,  $m' = 0^\circ.9856002670$  ( Mathematica:  $m' = 0^\circ.9856002670$ )

**Deklination** (vgl. Seite 59):

$$\delta = \arcsin(\sin(2 \cdot \arctan(\sqrt{\frac{(1+e_n)}{(1-e_n)}} \cdot \tan(\frac{E}{2}))) + L_\infty + L'_0 \cdot d) \cdot \sin(\varepsilon))$$

Näherung:

$$\delta \approx \arcsin(\sin(L_\infty + m_0 + (L'_0 + m') \cdot d) \cdot \sin(\varepsilon))$$

Für den Mittag Weltzeit des jeweils 0. Jan des aufgeführten Jahres sind nach Lit. Bibl. A1 die folgenden Werte gültig (Perihellänge, mittlere Anomalie, numerische Exzentrizität, Schiefe der Ekliptik):

Jahr	$L_0$	$m_0$	num. Ex. $e$	$\varepsilon$
1980	$282^\circ.5961$	$356^\circ.7299$	0.0167176	$23^\circ.4419$
1985	$282^\circ.6820$	$357^\circ.4216$	0.0167155	$23^\circ.4413$
1990	$282^\circ.7680$	$357^\circ.1277$	0.0167134	$23^\circ.4406$
1995	$282^\circ.8540$	$356^\circ.8338$	0.0167113	$23^\circ.4399$
2000	$282^\circ.9399$	$356^\circ.5399$	0.0167092	$23^\circ.4393$

Aus der Tabelle sieht man, dass sich die Werte nicht alle linear verhalten. Man kann die jeweilige Verlaufskurve überprüfen, z.B. mit Mathematica, "Fit". In der Realität der Natur überlagern sich Präzession, Nutation, Periheldrehung etc.. Man darf eben nicht vergessen, dass die idealen Gesetze der Newtonschen Mechanik für das Modell der idealen Massepunkte, also für die Punktmechanik gelten. In der Realität haben wir es aber mit beweglichen unförmigen Massen zu tun, die sich gegenseitig beeinflussen und auch ihre geometrische Form und die Dichteverteilung immer leicht ändern. Das führt zu Störungen, die sichtbar sind.

Direkte Lösung der Zeitgleichung mit *Mathematica*:

Mathematica-Programm:

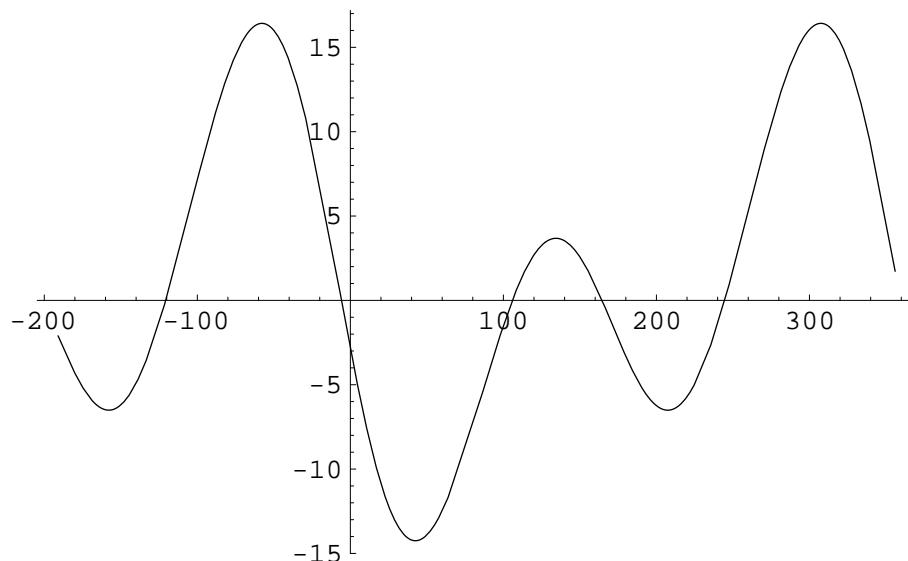
---

```

Remove["Global`*"]
(* Konstanten *)
m0 = (356.5399 - 360) Degree; e = 0.0167092; L0 = (282.9399 -
    360) Degree; Eps = 23.4393 Degree;
L01 = 0.0000470684 Degree; m01 = 0.9856002664 Degree;
(* Keplerfunktion *)
f[eE_, d_] := eE - e Sin[eE] - m0 - m01 d;
eE[d_] := eNS /. FindRoot[f[eNS, d] == 0, {eNS, 3}];
zG[d_] :=
    L0 + m0 + (L01 + m01)d -
    ArcTan[Tan[
        2 ArcTan[Sqrt[(1 + e)/(1 - e)] Tan[eE[d]/2]]] + L0 + L01 d]
    Cos[Eps]];
(* Die Sprünge des Arcustangens durch Stetigmachen resp.
Zusammensetzen überwinden :*)
updown[d_] := (1 - Sign[(zG[d] - 1)])/2 zG[d];
upup[d_] := (1 + Sign[(zG[d] - 1)])/2 (zG[d] - Pi);
up[d_] := updown[d] + upup[d];
downall[d_] := (1 - Sign[(zG[d] + 1)])/2 (zG[d] + Pi);
upall[d_] := (1 + Sign[(zG[d] + 1)])/2 up[d];
glattZG[d_] := (upall[d] + downall[d]);
zgMinuten[d_] := glattZG[d]/(2Pi) 24 60;
Plot[zgMinuten[d], {d, -191, 356}];
```

---

Abbildung 4.31: Zeitgleichung fürs Jahr 2000, Output der direkten Lösung mit *Mathematica*



Die Deklination in Abhängigkeit vom Tag im Jahr 2000, berechnet mit *Mathematica*:

**Mathematica-Programm:**

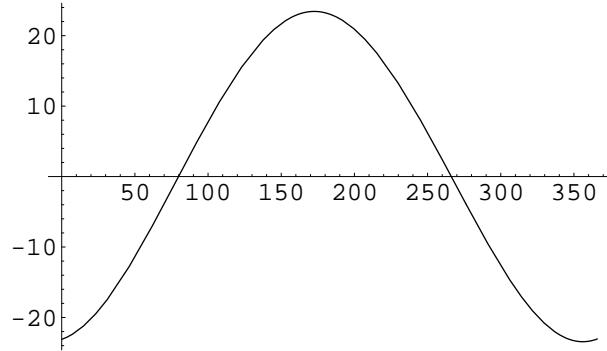
---

```

Remove["Global`*"]
(* Konstanten *)
m0 = (356.5399 - 360) Degree; e = 0.0167092; L0 = (282.9399 -
   360) Degree; Eps = 23.4393 Degree;
L01 = 0.0000470684 Degree; m01 = 0.9856002664 Degree;
(* Keplerfunktion *)
f[eE_, d_] := eE - e Sin[eE] - m0 - m01 d;
eE[d_] := eNS /. FindRoot[f[eNS, d] == 0, {eNS, 3}];
delta[d_] :=
  ArcSin[Sin[
    2 ArcTan[Sqrt[(1 + e)/(1 - e)] Tan[eE[d]/2 ]]] + L0 + L01 d] Sin[
  Eps]];
Plot[delta[d]/(2Pi)360, {d, 0, 366}];
```

---

Abbildung 4.32: Deklinationsverlauf der Sonne fürs Jahr 2000, Output der direkten Lösung mit *Mathematica*



**Näherungslösung für den Deklinationsverlauf in Abhängigkeit von den Tagen im Jahr 2000:  
Mathematica-Programm:**

---

```

Remove[m];
m[n_] := 31; m[2] = 28; m[4] = 30; m[6] = 30; m[9] = 30; m[11] = 30;
m[11] = 30; m[14] = 28; m[-1] = 1;
(* Anzahl Tage seit 31.12. letzten Jahres *)
tage[tag_, mon_] := Sum[m[n], {n, 1, mon}] - m[mon] + tag;
(*Anzahl Tage seit Frühlingsbeginn*)
fpTage[tag_, mon_] := tage[tag, mon] - tage[21, 3];
m0 = 356.5399 Degree; e = 0.0167092; L0 = 282.9399 Degree; Eps =
  23.4393 Degree;
L01 = 0.0000470684 Degree; m01 = 0.9856002670 Degree;
delta[d_] := ArcSin[Sin[m0 + L0 + (L01 + m01) d] Sin[Eps]] / (2 Pi) 360;(*
  Deklination seit 31.12. letzten Jahres *)
day = 21; month = 12; d0 = tage[day, month]; Print[{day, month, d0}];
Plot[delta[d], {d, 0, 365}];
```

---

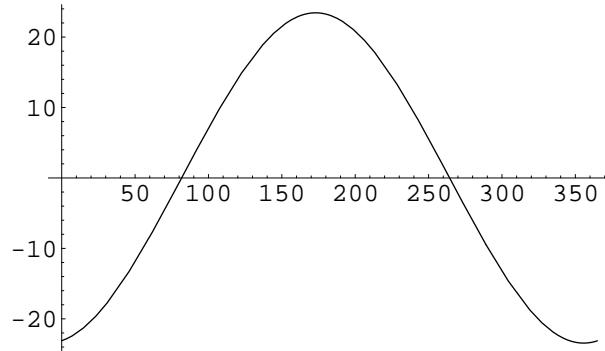
**Output:**

---

{21, 12, 355}
---------------

---

Abbildung 4.33: Deklinationsverlauf seit dem 1. Jahuar 2000



Näherungslösung für den Deklinationsverlauf in Abhängigkeit von den Tagen seit dem 21. März im Jahr 2000:

**Mathematica-Programm:**

---

```
(* Deklination seit 21.3., d.h. Frühlingsbeginn *)
(* Aus Kalenderprogramm *)
m[n_] := 31; m[2] = 28; m[4] = 30; m[6] = 30; m[9] = 30; m[11] = 30;
m[11] = 30; m[14] = 28; m[-1] = 1;
(* Anzahl Tage seit 31.12. letzten Jahres *)
tage[tag_, mon_] := Sum[m[n], {n, 1, mon}] - m[mon] + tag;
day = 21; month = 12; d0 = tage[day, month]; Print[{day, month, d0}];
(*Deklination seit 21.3., d.h.Frühlingsbeginn*)
delta1[d_] := ArcSin[Sin[m0 + L0 + (L01 + m01) (d)] Sin[Eps]]/(2 Pi) 360;
(*Anzahl Tage seit Frühlingsbeginn*)
fpTage[tag_, mon_] := tage[tag, mon] - tage[21, 3];
day = 21; month = 3; d1 = fpTage[day, month]; Print[{day, month, d1}];
Plot[delta1[d - tage[20, 3]], {d, 0, 365}];
```

---

**Output:**

---

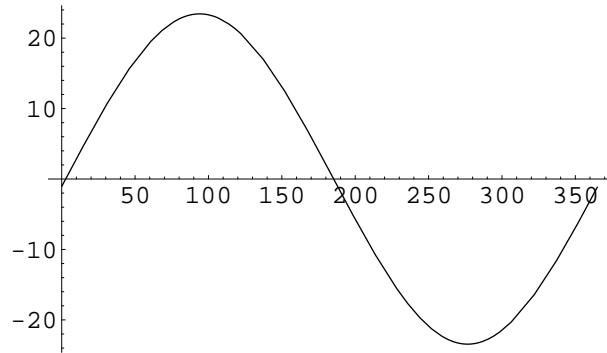
{21, 12, 355}
{21, 3, 0}

---

## Arbeit

1. Schreibe dir ein eigenes Computer-Programm für die Berechnung der Zeitgleichung und somit der mittleren Zeit (z.B. mit *Mathematica*).
2. Schreibe dir ein Computer-Programm für die Berechnung der Deklination (z.B. mit *Mathematica*).
3. Berechne die Zeitschlaufe auf dem Zifferblatt einer Horizontalsonnenuhr für die mittlere Zeit für eine fix gewählte Stunde.

Abbildung 4.34: Deklinationsverlauf seit dem 21. März 2000, Approximation



4. Finde für die Größen in der Tabelle auf Seite 68 realistische Verlaufskurven.  
(Z.B. mit *Mathematica*, "Fit")

**Horizontale Sonnenuhr für mittlere Zeit, Schlaufen für mittlere Zeit:**

**Mathematica-Programm:**

---

```
(* "Putzmaschine" *) (*Old Form : Remove["Global`*"]*)
Remove["Global`"]
(* Konstanten *)
(* ===> Input, Altgrad *) \[CurlyPhi] = 47.09; fi = (90 -
Abs[\[CurlyPhi]]);
dek[1]=23.5; dek[2]=16; dek[3]=8; dek[4]=0; dek[5]=-8 ;
dek[6]=-16; dek[7]=-23.5; g = 1;
hour = 2 Pi /24;
m0 = (356.5399 - 360) Degree; e = 0.0167092; L0 = (282.9399 -
360) Degree; Eps = 23.4393 Degree;
L01 = 0.0000470684 Degree; m01 = 0.9856002664 Degree;
```

---



---

```
(* Keplerfunktion *)
f[eE_, d_] := eE - e Sin[eE] - m0 - m01 d;
eE[d_] := eNS /. FindRoot[f[eNS, d] == 0, {eNS, 3}];
```

---

```

(* Zeitgleichung *)
zG[d_] :=
L0 + m0 + (L01 + m01)d -
ArcTan[Tan[
  2 ArcTan[Sqrt[(1 + e)/(1 - e)] Tan[eE[d]/2]]] + L0 + L01 d] Cos[
  Eps]];
(* Die Sprünge des Arcustangens durch Stetigmachen resp.
  Zusammensetzen überwinden :*)
updown[d_] := (1 - Sign[(zG[d] - 1)])/2 zG[d];
upup[d_] := (1 + Sign[(zG[d] - 1)])/2 (zG[d] - Pi);
up[d_] := updown[d] + upup[d];
downall[d_] := (1 - Sign[(zG[d] + 1)])/2 (zG[d] + Pi);
upall[d_] := (1 + Sign[(zG[d] + 1)])/2 up[d];
glattZG[d_] := (upall[d] + downall[d]);
zgStd[d_] := glattZG[d]/(2Pi) 24;

(* Gnomonische Projektion *)
v[d_, fi_, t_] :=
g/(Cos[Sign[\[CurlyPhi]] d Degree] Cos[t hour] Sin[fi Degree] +
  Sin[Sign[\[CurlyPhi]] d Degree] Cos[fi Degree]) {(Cos[
  Sign[\[CurlyPhi]] d Degree] Sin[t hour]),
  Sign[\[CurlyPhi]] ((Cos[Sign[\[CurlyPhi]] d Degree] Cos[t hour] Cos[
  fi Degree] - Sin[Sign[\[CurlyPhi]] d Degree] Sin[fi Degree]))};
(* Ursprung versetzt, vgl. Gnomonstab parallel Erdachse! *)
ursprung[\[CurlyPhi]_] := {0, -g/Tan[\[CurlyPhi] Degree]};

(* Plot *) parPlot =
ParametricPlot[
  Evaluate[Table[v[dek[k], fi, t], {k, 1, 7}]], {t, -3.5, 3.5},
  AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> {-1, 4},
  Epilog -> {Table[
    Line[{v[dek[7], fi, k], ursprung[\[CurlyPhi]]}], {k, -3, 3, 1}],
    DisplayFunction -> Identity];
tabd[n_] :=
Table[v[ArcSin[
  Sin[2 ArcTan[Sqrt[(1 + e)/(1 - e)] Tan[eE[d]/2]]] + L0 +
  L01 d] Sin[Eps]] /Degree, fi, (n - zgStd[d])], {d, -100, 300}];
listp[n_] :=
ListPlot[tabd[n], PlotJoined -> True, AspectRatio -> Automatic,
  DisplayFunction -> Identity];
listp0 = Show[listp[3], listp[2], listp[1], listp[0], listp[-1], listp[-2],
  listp[-3], DisplayFunction -> Identity];
Show[parPlot, listp0, DisplayFunction -> $DisplayFunction];

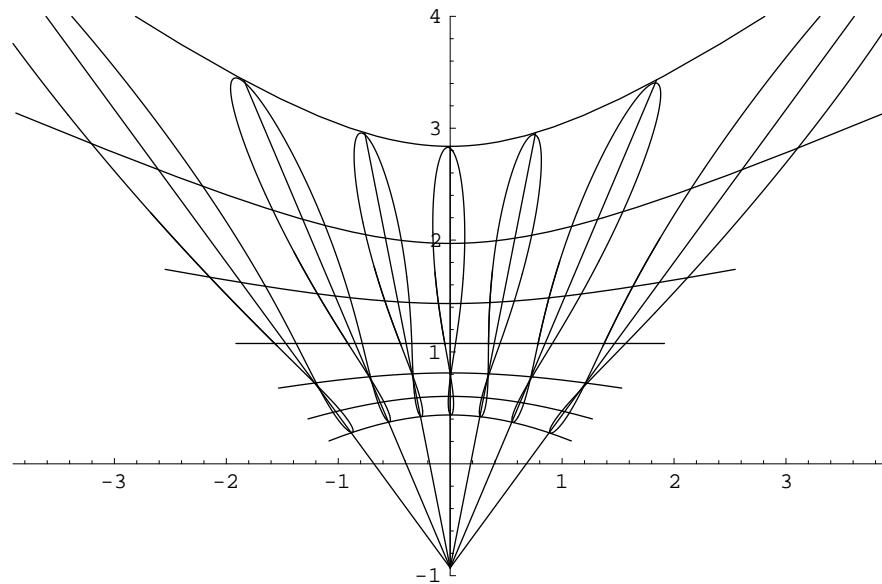
```

**Vertikale Sonnenuhr für mittlere Zeit, Schlaufen für mittlere Zeit:**

Um das Zifferblatt einer vertikalen Sonnenuhr zu plotten, brauchen wir in obigem Programm eingangs nur eine Zahl zu ändern: Statt  $\varphi = 47.^{\circ}09$  zu nehmen nummt man  $\varphi = 47.^{\circ}09 - 90$  (Wand rechtwinklig auf die Horizontalebene  $\sim$  Südhalbkugel). Das Programm beginnt dann so:

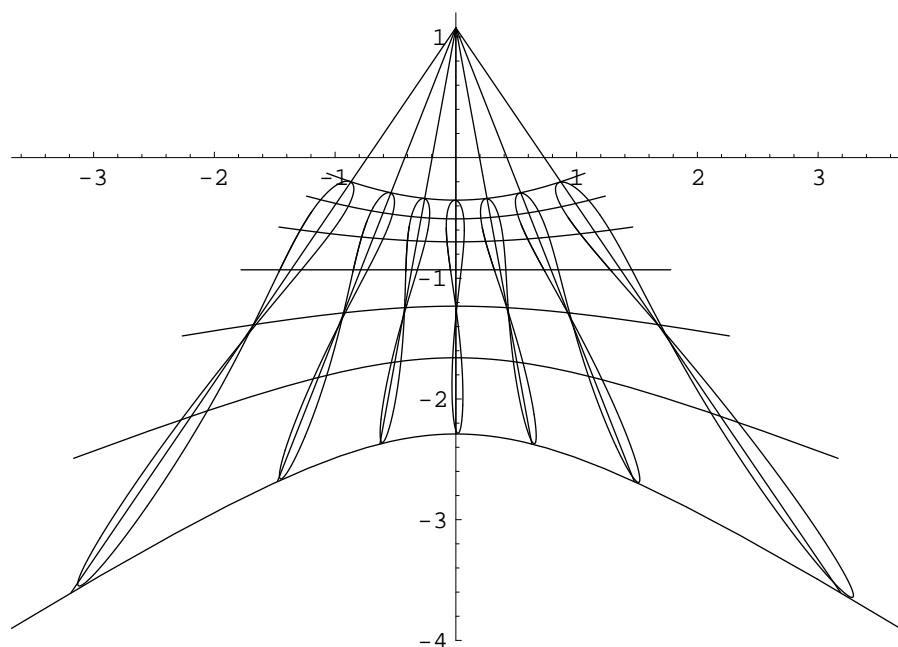
**Mathematica-Programm:**

Abbildung 4.35: Horizontale Sonnenuhr für  $\varphi = 47^{\circ}.09$ , Auswahl von Deklinationslinien und Stundengeraden mit Schlaufen für mittlere Zeit



```
(* "Putzmaschine" *) (*Old Form : Remove["Global`@*"]*) Remove["Global`"]
(* Konstanten *)
(* ===> Input, Altgrad *) \[CurlyPhi] = 47.09 - 90;
..... .
..... u.s.w.
```

Abbildung 4.36: Vertikale Sonnenuhr in exakter West–Ost–Richtung für  $\varphi = 47^\circ.09$ , Auswahl von Deklinationslinien und Stundengeraden mit Schlaufen für mittlere Zeit





## Kapitel 5

# Berechnung von Zifferblätter gewöhnlicher Sonnenuhren mit Modulen und Gestaltung

### 5.1 Ausgestaltung einer Sonnenuhr an einem einfachen Beispiel

In der Literatur finden sich viele schöne Beispiele von ansprechenden Sonnenuhren, die als toller Schmuck empfunden werden können.

Interessant ist es z.B., die Deklinationslinie des eigenen Geburtstags auf dem Zifferblatt der eigenen Sonnenuhr zu haben. Weitere interessante Deklinationslinie sind diejenigen der Kardinalpunkte des Jahres, ev. diejenigen der Monatsersten oder diejenigen des Beginns der heute verschobenen Tierkreisperioden. Ebenso muss man sich gut überlegen, welche Stunden und weitere Linien man auf dem Zifferblatt haben will. Interessant sind die Richtungen zum Sonnenauf- oder Sonnenuntergang an den Solstitien. Auch ist der „künstlerische Outfit“ wichtig, denn schliesslich soll die Sache ja präsentabel sein — und nicht zum schadenfrohen Lachen verleiten.

#### Arbeit

1. Suche in der Literatur Beispiele interessanter Sonnenuhren. Lasse dich zu eigenen Gestaltungsideen anregen.
2. Berechne die und zeichne Deklinationslinie für deinen Geburtstag, deinen Namenstag u.s.w.. Berechne auch die Stundenline für diene Geburtszeit.
3. Entwerfe für deine Sitation ein ideales horizontales Zifferblatt und berechne es (Plot!).
4. Entwerfe und berechne für deine Sitation auch ein ideales Zifferblatt, das in exakter West–Ost–Richtung an einer senkrechten Wand angebracht ist (Plot!).

## 5.2 Programm–Module, z.B. zur Verpfanzung nichthorizontaler Zifferblätter und andere Module

### 5.2.1 Arbeitsprogramm

Arbeite die bis jetzt benutzten Programme in Module um, die du immer wieder verwenden kannst. Dazu gehören:

1. Eingabe der notwendigen Konstanten.
2. Bestimmung der Winkel für die Verpfanzung einer nicht horizontalen Ebene an einen andern Ort als Tangentialebene.
3. Kalenderprogramm:  
Eingabe: Tag im Monat und Monat.  
Ausgabe: Anzahl Tage seit Frühlingspunkt resp. 31. Dezember.
4. Plot der Deklinationslinien.
5. Lösung der Kepler–Gleichung.
6. Lösung der Zeitgleichung.
7. Plot der Stundenlinien und Stundenschläufen.
8. Plot der Deklinationslinien.
9. Zusammensetzung der Plots und Ausgabe.
10. Vergrösserung von Plots auf Originalgrösse.

### 5.2.2 Lauffähige und getestete Module

Hier ist ein Beispiel einer Modulsammlung aufgelistet, das den Test bestanden hat:

```
(* Alle Daten löschen, Neubeginn: *)
(*Old Form : Remove["Global`*"]*)
putz = Remove["Global`*"];(* "Putzmaschine" *) ;

(* Die Modulsammlung, alle Funktionen in einer Zelle definiert, in einem Schritt aktivierbar.
Die Sammlung MUSS AKTIVIERT SEIN, damit die Initialisierungen laufen können! *)

(*****)
(* Standartwerte \[CurlyPhi] von Biel in Altgrad , g = 1 *)
(*****)
dataEntryFixData = Module[{},
  m0 = (356.5399 - 360) Degree;
  e = 0.0167092;
  L0 = (282.9399 - 360) Degree;
  Eps = 23.4393 Degree;
  L01 = 0.0000470684 Degree;
  m01 = 0.9856002664 Degree;
  Print["OUT-Variabeln: m0, e, L0, Eps, L01, m01"];];
(*****)
```

```

dataEntry[TAKE\[CurlyPhi]_, TAKEg_, jahr_] :=
  Module[{ \[CurlyPhi]0 = 47.09, g0 = 1, intYeahr},
    dataEntryFixData;
    (* MP berechnen, Formel :*)
    \[CurlyPhi] = \[CurlyPhi]0(1 - Sign[TAKE\[CurlyPhi]])(1 +
      Sign[TAKE\[CurlyPhi]]) + TAKE\[CurlyPhi];
    Print["\[CurlyPhi] = ", \[CurlyPhi]];
    \[CurlyPhi]Vert = -Sign[\[CurlyPhi]]*(90 - Abs[\[CurlyPhi]]);
    g = g0(1 - Sign[TAKEg])(1 + Sign[TAKEg]) + TAKEg;
    Print["g = ", g];
    (* Stunden ===> Rad - Umrechnungsfaktor *)
    hour = 2 Pi/24 ;
    (* Jahrestage rechnen *)
    jahresTage[intYeahr_] :=
      365 Mod[intYeahr, 2000] + Floor[Mod[Mod[intYeahr, 2000], 2000]/4];
    jahresTage[jahr];
    jahrOut = jahr;
    Print[
      "OUT-Variabeln: \[CurlyPhi], \[CurlyPhi]Vert, g, hour, jahresTage, \
jahrOut"]; ];
(*==== === === === === === === === === === === === === === === === === === === === === *)
(* ===> INPUT, hMin = 1. Stunde, hMax = Letzte Stunde (h) *)
(* Beispiel : Werte hMin = -5h, -4h, ..., 0h, ..., hMax = 5h *)
(*==== === === === === === === === === === === === === === === === === === === === *)
ombrixGzentr[hMin_, hMax_] := Module[{tVar, \[CurlyPhi]Var},
  Print["Der Modul dataEntry wird hier vorausgesetzt!"];
  (* Ost - West - Koordinate :*)
  MP[tVar_, \[CurlyPhi]Var_] :=
    g Tan[tVar hour]/ Sin[(90 - \[CurlyPhi]Var) Degree];
    (* Ursprung versetzt, Nord - Süd - Koordinate *)
    ursprung[\[CurlyPhi]Var_] := {0, -g/Tan[\[CurlyPhi]Var Degree]};
    (* Tabelle der Plotpunkte rechnen *)
    tabPlotPunkte[\[CurlyPhi]Var_] :=
      Table[{MP[tVar, \[CurlyPhi]Var],
        g/Tan[(90 - \[CurlyPhi]Var) Degree]}, {tVar, hMin, hMax, 1}];
    Print["tabPlotPunkte = ", tabPlotPunkte[\[CurlyPhi]] // N];
    (* OmbrixPlot machen ===> Ombrix - Zifferblatt *)
    ombrixPlot =
      Show[Graphics[
        Table[Line[{ursprung[\[CurlyPhi]],
          tabPlotPunkte[\[CurlyPhi]][[n]]}], {n, 1,
          Length[tabPlotPunkte[\[CurlyPhi]]]}],
        AspectRatio -> Automatic];
      Print["OUT-Funktionen: MP, ursprung, tabPlotPunkte, ombrixPlot"]];];
(*==== === === === === === === === === === === === === === === === === === === *)
(* ===> INPUT, hMin = 1. Stunde, hMax = Letzte Stunde (h) *)
(* Beispiel : Werte hMin = -5h, -4h, ..., 0h, ..., hMax = 5h *)
(*==== === === === === === === === === === === === === === === === === === *)
ombrixGzentrDeltaStd[hMin_, hMax_, deltaStd_] :=
  Module[{tVar, \[CurlyPhi]Var, diff},
    Print["Der Modul dataEntry wird hier vorausgesetzt!"];
    (* Ost - West - Koordinate :*)
    MP[tVar_, \[CurlyPhi]Var_, diff_] :=

```

```

g Tan[(tVar - diff) hour]/ Sin[(90 - \[CurlyPhi]Var) Degree];
(* Ursprung versetzt, Nord - Süd - Koordinate *)
ursprung[\[CurlyPhi]Var_] := {0, -g/Tan[\[CurlyPhi]Var Degree]};
(* Tabelle der Plotpunkte rechnen *)
tabPlotPunkte[\[CurlyPhi]Var_] :=
  Table[{MP[tVar, \[CurlyPhi]Var, deltaStd],
    g/Tan[(90 - \[CurlyPhi]Var) Degree]}, {tVar, hMin, hMax, 1}];
Print["tabPlotPunkte = ", tabPlotPunkte[\[CurlyPhi]] // N];
(* OmbrixPlot machen ===> Ombrix - Zifferblatt *)
ombixPlot =
  Show[Graphics[
    Table[Line[{ursprung[\[CurlyPhi]],
      tabPlotPunkte[\[CurlyPhi]][[n]]}], {n, 1,
      Length[tabPlotPunkte[\[CurlyPhi]]]}],
    AspectRatio -> Automatic];
  Print["OUT-Funktionen: MP, ursprung, tabPlotPunkte, ombixPlot"];];
(*==== === === === === === === === === === === === === === === === === === *)
(* tage ===> Berechnung der Anzahl Tage seit 31.12. letzten Jahres *)
(* fpTage ===> Berechnung der Anzahl Tage seit letztem Frühlingsbeginn,
Jan. = 13. Mt., Feb. = 14. Mt. *)
(* tageS, fpTageS ===> für Schaltjahre, ein Tag mehr (ein Tag mehr) *)
(*==== === === === === === === === === === === === === === === === === === *)
kalender[jour_, mois_] := Module[{m, n},
  m[n_] := 31; m[2] = 28; m[4] = 30; m[6] = 30; m[9] = 30; m[11] = 30;
  m[14] = 28; m[0] = 0;
  tage[day_, mon_] = Sum[m[n], {n, 1, mon}] - m[mon] + day;
  tageSJ[day_, mon_] = If[mon < 3, tage[day, mon], tage[day, mon] + 1];
  fpTage[day_, mon_] = tage[day, mon] - tage[21, 3];
  fpTageSJ[day_, mon_] = tage[day, mon] - tage[21, 3] + 1;
  Print[" tage[jour,mois] = ", tage[jour, mois],
    " tageSJ[jour,mois] = ", tageSJ[jour, mois],
    " fpTage[jour,mois] = ", fpTage[jour, mois],
    " fpTageSJ[jour,mois] = ", fpTageSJ[jour, mois]];
  Print["OUT-Funktionen: tage ,tageSJ, fpTage, fpTageSJ"];
  Print["Funktioniert für positiv eingegebene Werte"];
(*==== === === === === === === === === === === === === === === === === === *)
zeitGleichung[plotYes1_, jahr_] := Module[{disp},
  (* putz; *)
  (* Jahr auf 2 Stellen angeben. Z.B. 00 statt 2000 *)
  dataEntry[0, 0, jahr];
  (* Keplerfunktion *)
  f[eE_, d_] := eE - e Sin[eE] - m0 - m01 jahresTage[jahr] - m01 d;
  eE[d_] := eNS /. FindRoot[f[eNS, d] == 0, {eNS, 3}];
  zG[d_] := L0 + m0 + (L01 + m01)d + Mod[(L01 + m01)jahresTage[jahr],
    360] -
    ArcTan[Tan[
      2 ArcTan[Sqrt[(1 + e)/(1 - e)] Tan[eE[d]/2]] + L0 + L01 d +
      L01 jahresTage[jahr]] Cos[Eps]] - jahrOut 2 Pi;
  (* Die Sprünge des Arcustangens durch Stetigmachen resp.
  Zusammensetzen überwinden :*)
  updown[d_] := (1 - Sign[(zG[d] - 1)])/2 zG[d];
  upup[d_] := (1 + Sign[(zG[d] - 1)])/2 (zG[d] - Pi);
  up[d_] := updown[d] + upup[d];

```

```

downall[d_] := (1 - Sign[(zG[d] + 1)]) /2 (zG[d] + Pi);
upall[d_] := (1 + Sign[(zG[d] + 1)]) /2 up[d];
glattZG[d_] := (upall[d] + downall[d]);
zgStd[d_] := glattZG[d]/(2Pi) 24 ;
zgMinuten[d_] := glattZG[d]/(2Pi) 24 60;
If[plotYes1 == 1, Goto[erstens], Goto[zweitens]];
Label[erstens]; Plot[zgMinuten[day] , {day, -191, 356}];
Goto[drittens];
Label[zweitens]; Print["Kein Plot, nur Initialisierung"];
Label[drittens];
Print[
    "OUT-Funktionen: f, eE, zG, updown, upup, up, downall, upall, \
glattZG, zgStd, zgMinuten"];
    Print["Jahr auf 2 Stellen angeben. Z.B. 00 statt 2000"];];
(*==== === === === === === === === === === === === === === === === === === *)
deklin[myTag_, myMonat_] := Module[{dayNow},
    dayNow = tage[myTag, myMonat];
    deltaAngle[dd_] :=
        360/(2 Pi) ArcSin[
            Sin[2 ArcTan[Sqrt[(1 + e)/(1 - e)] Tan[Evaluate[eE[dd]]/2 ] ] +
                L0 + L01 dd] Sin[Eps]];
    Print["OUT-Funktionen: deltaAngle = ",
        deltaAngle[tage[myTag, myMonat]] ];
    deltaAngle[dayNow] ];
(*==== === === === === === === === === === === === === === === === === *)
dekPlot[dataListe_, horVert_, tMin_, tMax_, yRangeMin_, yRangeMax_,
    plotYes1_] := Module[{fi},
        If[horVert == 1, fi = \[CurlyPhi],
        If[horVert == 0, fi = \[CurlyPhi]Vert,
            Print["Vertikal: horVert=0 und horizontal horVert = 1 !!!!!"]];
        (* Definitionen und Rechnungen *)
        v[d_, fi_, t_] :=
            g/(Cos[Sign[\[CurlyPhi]] d Degree] Cos[t hour] Sin[fi Degree] +
                Sin[Sign[\[CurlyPhi]] d Degree] Cos[fi Degree]) {(Cos[
                    Sign[\[CurlyPhi]] d Degree] Sin[t hour]),
                Sign[\[CurlyPhi]]((Cos[Sign[\[CurlyPhi]] d Degree] Cos[
                    t hour] Cos[fi Degree] -
                    Sin[Sign[\[CurlyPhi]] d Degree] Sin[fi Degree]) )};
        If[plotYes1 == 1, Goto[erstens], Goto[zweitens]];
        Label[erstens];
        ParametricPlot[
            Evaluate[
                Table[v[dataListe[[j]], fi, t], {j, 1, Length[dataListe]}]], {t,
                tMin, tMax}, AspectRatio -> Automatic,
                PlotRange -> {yRangeMin, yRangeMax}];
        Print["Goto ist verwendet worden"]; Goto[drittens];
        Label[zweitens]; Print["Kein Plot, nur Initialisierung von v[d,fi,t]!"];
        Print["Goto ist verwendet worden"];
        Label[drittens];
        Print["OUT-Funktionen: v"]; ];
(*==== === === === === === === === === === === === === === === === === *)
zeitSchlaufen[dataListe_, horVert_,
    maxDekNummer_, {paramMin_, paramMax_}, {rangeMin_ ,

```

```

rangeMax_}, {minNumber_, maxNumber_}] := Module[{fi},
  If[horVert == 1, fi = \[CurlyPhi],
  If[horVert == 0, fi = \[CurlyPhi]Vert,
    Print["Vertikal: horVert=0 und horizontal horVert = 1 !!!!!"];
    Goto[endeProgramm]]];
parPlot =
  ParametricPlot[
    Evaluate[
      Table[v[dataListe[[k]], fi, t], {k, 1, Length[dataListe]}]], {t,
        paramMin, paramMax}, AspectRatio -> Automatic,
      PlotRange -> {rangeMin, rangeMax},
      Epilog -> {Table[
        Line[{v[dataListe[[maxDekNummer]], fi, k],
          ursprung[fi]}], {k, minNumber, maxNumber, 1}]},
      DisplayFunction -> Identity];
tabd[n_] :=
  Table[v[ArcSin[
    Sin[2 ArcTan[Sqrt[(1 + e)/(1 - e)] Tan[eE[d]/2]]] + L0 +
    L01 d] Sin[Eps]] /Degree, fi, (n - zgStd[d])], {d, -100,
    300}];
listp[n_] :=
  ListPlot[tabd[n], PlotJoined -> True, AspectRatio -> Automatic,
  DisplayFunction -> Identity];
listp0 =
  Show[Table[listp[j], {j, minNumber, maxNumber, 1}],
  DisplayFunction -> Identity];
Show[parPlot, listp0, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
Label[endeProgramm];
Print["Ende"];
Print["OUT-Funktionen und Variablen: parPlot, tabd, listp, listp0"];
(* Alternativdefinition ohne Klammern *)
zeitSchlaufen[dataListe_, horVert_, maxDekNummer_, paramMin_, paramMax_,
  rangeMin_, rangeMax_, minNumber_, maxNumber_] :=
zeitSchlaufen[dataListe, horVert,
  maxDekNummer, {paramMin, paramMax}, {rangeMin, rangeMax}, {minNumber,
  maxNumber}];
(*===== *)
newPositionWithPrint[ostNord_, zenithNord_, \[CurlyPhi]_] :=
  Module[{a, b, \[CurlyPhi]Old, u, v, w, d, r, r1, R, dY, dZ, xKS, yKS, zKS,
    goAeq, xNew, yNew, zNew, solvU, solvV, uRichtung, vRichtung, u1, u2,
    u3, v1, v2, v3, vv},
    (* Umrechnung mit Vektorprodukt *)
    (* === > INPUT, Altgrad *)
    a = ostNord; b = zenithNord; \[CurlyPhi]Old = \[CurlyPhi];
    u = {Cos[a Degree], Sin[a Degree], 0}; Print["u = ", u // N];
    v = {-Sin[a Degree]Sin[b Degree], Cos[a Degree]Sin[b Degree],
      Cos[b Degree]}; Print["v = ", v // N];
    (* w : Normalenvektor im Ortshorizontsystem *)
    w = Transpose[{Cross[u, v]}]; Print["w = ", w // N // MatrixForm];
    (* Drehung um Ost - West - Achse im Ortshorizontsystem *)
    (* Drehung ins Orstäquatorsystem *)
    \[CurlyPhi]Old = \[CurlyPhi]; d = (90 - \[CurlyPhi]Old) ;

```

```

Print["d = ", d // N];
dreh = {{1, 0, 0}, {0, Cos[d Degree], -Sin[d Degree]}, {0,
    Sin[d Degree], Cos[d Degree]}};
Print["dreh = ", dreh // N // MatrixForm];
r = dreh.w; Print["r = ", r // N // MatrixForm]; r1 = Flatten[r];
Print["r1 = ", r1 // N];
R = {-r1[[2]], -r1[[1]], r1[[3]]}; Print["R = ", R // N];
Delta1 =
  Sign[r1[[3]]] ArcCos[
    Sqrt[(R[[1]]^2 + R[[2]]^2)/(R[[1]]^2 + R[[2]]^2 + R[[3]]^2)]] ;
(* Delta1 ist Winkel zwischen Vektor und Ortsäquatorebene,
   d.h. die neue geographische Breite *)
Delta2 = Sign[r1[[3]]] ArcCos[Sqrt[R[[1]]^2/(R[[1]]^2 + R[[2]]^2)]];
(* Delta2 ist Winkel zwischen Vektorprojektion in Ortsäquatorebene x \
resp. Süd *)
dY = Delta1; dZ = Delta2;
Delta1Grad = Delta1/Degree // N; Delta2Grad = Delta2/(2 Pi) 360 // N;;
Delta2Std = Delta2/(2 Pi) 24 // N;
Print["Delta1Grad = ", Delta1Grad, " Vorzeichen= ", Sign[r1[[3]]]];
Print["Delta2Grad = ", Delta2Grad, ", Delta2Std = ", Delta2Std,
  " Vorzeichen= ", Sign[r1[[2]]]];
(*Umrechnen des Vertikalvektors der Wand zur Drehung des Outputs in \
Vertikallage, in Einzelschritten*)
Print["Test Matrixprodukt ==> ",
  dreh.v == Flatten[dreh.Transpose[{v}]]];
xKS = {1, 0, 0}; yKS = {0, 1, 0}; zKS = {0, 0, 1};
Print["Koordinatensystem : ", {xKS, yKS, zKS} // MatrixForm ]
goAeq[vec_] := {-(dreh.vec)[[2]], -(dreh.vec)[[1]], (dreh.vec)[[3]]};
Print[
  "Prozedur Koord.Umrechnung von - r1[[2]],-r1[[1]],r1[[3]] auf \
dreh.vec anwenden"];
vAeq = goAeq[v]; uAeq = goAeq[u]; xAeq = goAeq[xKS]; yAeq = goAeq[yKS];
zAeq = goAeq[zKS];
Print["==>vAeq = ", vAeq // N];
Print["==>uAeq = ", uAeq // N];
Print["==>xAeq = ", xAeq // N];
Print["==>yAeq = ", yAeq // N];
Print["==>zAeq = ", zAeq // N];
drehZ = {{Cos[dZ], -Sin[dZ], 0}, {Sin[dZ], Cos[dZ], 0}, {0, 0, 1}};
Print["drehZ =", drehZ // N // MatrixForm];
drehY = {{Cos[dY], 0, -Sin[dY]}, {0, 1, 0}, {Sin[dY], 0, Cos[dY]}};
Print["drehY =", drehY // N // MatrixForm];
goNew[vec_] := drehZ.(drehY.vec);
Print["Vektor um Breitendifferenz und dann um Längendifferenz drehen"];
xNew = goNew[xKS]; yNew = goNew[yKS]; zNew = goNew[zKS];
Print["xNew KS =", xNew // N];
Print["yNew KS =", yNew // N];
Print["zNew KS =", zNew // N];
solvU =
  Solve[uAeq == u1 xNew + u2 yNew + u3 zNew, {u1, u2, u3}] // Chop //
  Flatten // N; uRichtung = {u1, u2, u3} /. solvU;
Print[
  "Kontrolle: gedrehtes u im neuen Parallelebenen-KS dargestellt ==> \

```



```

dY = Delta1; dZ = Delta2;
Delta1Grad = Delta1/Degree // N; Delta2Grad = Delta2/(2 Pi) 360 // N;;
Delta2Std = Delta2/(2 Pi) 24 // N;
Print["Delta1Grad = ", Delta1Grad, " Vorzeichen= " , Sign[r1[[3]]]];
Print["Delta2Grad = ", Delta2Grad, ", Delta2Std = ", Delta2Std,
      " Vorzeichen= " , Sign[r1[[2]]]];
(*Umrechnen des Vertikalvektors der Wand zur Drehung des Outputs in \
Vertikallage, in Einzelschritten*)
xKS = {1, 0, 0}; yKS = {0, 1, 0}; zKS = {0, 0, 1};
goAeq[vec_] := {-(dreh.vec)[[2]], -(dreh.vec)[[1]], (dreh.vec)[[3]]};
vAeq = goAeq[v]; uAeq = goAeq[u]; xAeq = goAeq[xKS]; yAeq = goAeq[yKS];
zAeq = goAeq[zKS];
drehZ = {{Cos[dZ], -Sin[dZ], 0}, {Sin[dZ], Cos[dZ], 0}, {0, 0, 1}};
drehY = {{Cos[dY], 0, -Sin[dY]}, {0, 1, 0}, {Sin[dY], 0, Cos[dY]}};
goNew[vec_] := drehZ.(drehY.vec);
xNew = goNew[xKS]; yNew = goNew[yKS]; zNew = goNew[zKS];
solvU =
  Solve[uAeq == u1 xNew + u2 yNew + u3 zNew, {u1, u2, u3}] // Chop //
  Flatten // N;
solvV =
  Solve[vAeq == v1 xNew + v2 yNew + v3 zNew, {v1, v2, v3}] // Chop //
  Flatten // N;
uRichtung = {u1, u2, u3} /. solvU;
vRichtung = {v1, v2, v3} /. solvV;
vLen[vec_] := Sqrt[vec.vec];
drehNewArc = -Sign[vRichtung[[2]]] ArcCos[
  vRichtung.zKS/(vLen[vRichtung] vLen[zKS])];
drehNewGrad = drehNewArc /(2Pi) 360;
vv = drehNewArc;
Print["drehNewGrad = ", drehNewGrad];
drehPlot = {{Cos[vv], -Sin[vv]}, {Sin[vv], Cos[vv]}};
Print["drehPlot = ", drehPlot // MatrixForm];
Print[
  "Out-Variablen: Delta1, Delta1Grad, Delta2, Delta2Std, \
drehNewArc,drehNewGrad, drehPlot, vLen"];];
(*==== === === === === === === === === === === === === === === === === === *)
drehOmbrixDekSlPlot[{hMin_, hMax_}, {t1_, t2_}, {t3_, t4_}, {k1_, k2_}, {k3_,
  k4_}, {pr1_, pr2_}, {faktor1_, faktor2_}, {nMitte_, nZiel_}, {nn1_,
  nn2_}] := Module[{[\CurlyPhi]New, parPlotNow, k5, k6, tabd},
  \CurlyPhi]New = Delta1Grad; fiNew = (90 - Abs[\CurlyPhi]New);
  k5 = Sign[k3]^2 k3 + (1 - Sign[k3]^2)hMin;
  k6 = Sign[k4]^2 k4 + (1 - Sign[k4]^2)hMax;
  v[gNow_, \CurlyPhi]Now_, dNow_, fiNow_, tNow_] :=
    gNow/(Cos[Sign[\CurlyPhi]Now] dNow Degree) Cos[tNow hour] Sin[
      fiNow Degree] +
    Sin[Sign[\CurlyPhi]Now] dNow Degree] Cos[
      fiNow Degree]) {(Cos[
        Sign[\CurlyPhi]Now] dNow Degree] Sin[tNow hour]),
    Sign[\CurlyPhi]Now] ((Cos[Sign[\CurlyPhi]Now] dNow Degree] Cos[
      tNow hour] Cos[fiNow Degree] -
      Sin[Sign[\CurlyPhi]Now] dNow Degree] Sin[
        fiNow Degree]) )};
  vDreh[gNow_, \CurlyPhi]Now_, dNow_, fiNow_, tNow_] :=

```

```

drehPlot.v[gNow, \[CurlyPhi]Now, dNow, fiNow, tNow];
(*==> hMin, hMax eingeben!*)
tabPlotPunkteDelta[\[CurlyPhi]Var_, hMinInt_, hMaxInt_] :=
Table[{MP[tVar - Delta2Std, \[CurlyPhi]Var],
g/Tan[(90 - \[CurlyPhi]Var) Degree]}, {tVar, hMinInt, hMaxInt,
1}];
(* Drehombrix, Deklinationslinien*)
ParametricPlot[
Evaluate[
Table[vDreh[g, \[CurlyPhi]New, d[k], fiNew, t], {k, k1, k2}], {t,
t1, t2}, AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> {pr1, pr2} ,
Epilog ->
Join[Table[
Line[{drehPlot.ursprung[\[CurlyPhi]New],
drehPlot.(faktor1(
tabPlotPunkteDelta[\[CurlyPhi]New, hMin,
hMax][[n]] - ursprung[\[CurlyPhi]New]) +
ursprung[\[CurlyPhi]New])}], {n, 1,
Length[tabPlotPunkteDelta[\[CurlyPhi]New, hMin,
hMax]]}], {Line[{drehPlot.ursprung[\[CurlyPhi]New],
faktor2 \
drehPlot.tabPlotPunkte[\[CurlyPhi]New][[nMitte]]}]}, {n, 1, Length[tabPlotPunkte[\[CurlyPhi]New][[nMitte]]]}]];
nn1 = Sign[nn1]^2 nn1 + (1 - Sign[nn1]^2)hMin;
nn2 = Sign[nn2]^2 nn2 + (1 - Sign[nn2]^2)hMax;
parPlotNow =
ParametricPlot[
Evaluate[
Table[vDreh[g, \[CurlyPhi]New, d[k], fiNew, (t - Delta2Std)], {k,
k1, k2}], {t, t3 + Delta2Std, t4 + Delta2Std},
AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> {pr1, pr2},
Epilog -> {Join[
Table[Line[{vDreh[g, \[CurlyPhi]New, d[nZiel], fiNew,
k - Delta2Std],
drehPlot.ursprung[\[CurlyPhi]New]], {k, k5, k6,
1}], {Line[{drehPlot.ursprung[\[CurlyPhi]New],
faktor2 \
drehPlot.tabPlotPunkte[\[CurlyPhi]New][[nMitte]]}]}, {n, 1, Length[tabPlotPunkte[\[CurlyPhi]New][[nMitte]]]}], {n, 1, Length[tabPlotPunkte[\[CurlyPhi]New][[nMitte]]]}}],
DisplayFunction -> Identity];
tabd[n_] :=
Table[vDreh[g, \[CurlyPhi]New,
ArcSin[Sin[
2 ArcTan[Sqrt[(1 + e)/(1 - e)] Tan[eE[dd]/2 ]] + L0 +
L01 dd + L01 jahresTage[jahrOut]] Sin[Eps]] /Degree,
fiNew, (n - zgStd[dd] - Delta2Std)], {dd, -100, 300}];
listp[n_] :=
ListPlot[tabd[n], PlotJoined -> True, AspectRatio -> Automatic,
DisplayFunction -> Identity];
listp0 =
Show[Table[listp[nn], {nn, nn1, nn2}], DisplayFunction -> Identity];
Show[parPlotNow, listp0, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
drehOmbrixDekSlPlot[hMin_, hMax_, t1_, t2_, t3_, t4_, k1_, k2_, k3_, k4_,
pr1_, pr2_, faktor1_, faktor2_, nMitte_, nZiel_, nn1, nn2] :=
```

Nachfolgend sind Beispiele für eine Initialisation der oben definierten Module gegeben. Die Module funktionieren nur, wenn sie in der gegebenen Reihenfolge initialisiert sind. Ansonst fehlen dem nächsten Modul vielleicht einige Daten, was dazu führt, dass er nicht wie gewünscht abgearbeitet wird.

## Beispiele (\* INITIALISATIONEN \*)

m0

dataEntry[30, 50, 12]

dataEntry[0, 0, 0]

```
dataEntry[0, 0, 0]; \[CurlyPhi]Vert
```

{g, \[CurlyPhi]}

\[CurlyPhi]Vert

```
{jahresTage[12], jahresTage[2012]}
```

```
dataEntry[30, 50, 01]; jahrOut
```

dataEntry[0, 0]; ombrixGzentr[-4, 4]

```
dataEntry[0, 0]; ombrixGzentr[
```

ombrixGzentrDeltaStd[-3, 4, 2]

```
dataEntry[\[CurlyPhi] - 90, 1]; ombrixGzentr[-5, 5]
```

ombrixGzentrDeltaStd[-3, 4, 2]

kalender[21, 3]

```
{tage[21, 3] , tage[6, 5]}
```

```
{ {"Test", "21.3.", kalender[21, 3]},  
  {"Test", "29.8.", kalender[29, 8]},  
  {"Test", "21.12.", kalender[21, 12]}, {"Test", "31.12.", kalender[20, 15]},  
  {"Test", "21.3.", tage[21, 3]},  
  {"Test", "29.8.", tage[29, 8]},  
  {"Test", "21.12.", tage[21, 12]},  
  {"Test", "31.12.", tage[31, 12]} }
```

8

```

zeitGleichung[2, 01]

zeitGleichung[1, 01]

zeitGleichung[2, 01]; zgStd[5]

(* Initialisierung *)
dataEntry[0, 0]; zeitGleichung[0, 01]; kalender[29, 8]; tage[29, 8];

deklin[0, 0]

deltaAngle[0]

(* Kontrollen *) ?eE

e

?deltaAngle

deltaAngle[0]; Plot[deltaAngle[d]/(2Pi)360, {d, 0, 366}];

(* Test *) {deklin[28, 8], deklin[21, 12], deklin[17.805, 3],
deklin[21, 3]} // N

tage[21, 3]

(* === > Input von Hand *)
n = 8; d[1] = deklin[20, 12]; d[2] = deklin[1, 2]; d[3] = deklin[1, 3];
d[4] = deklin[17.805, 3]; d[5] = deklin[1, 5]; d[6] = deklin[1, 6];
d[7] = deklin[21, 6]; d[8] = deklin[29, 8];
(* === > Listengenerierung mit dem Input *)
dlist[n_] := Table[d[k], {k, 1, n}];
dlist[n]

(* === > Plot der Liste *)

dekPlot[dlist[n], 1, -5, 5, -1, 4, 0]

dekPlot[dlist[n], 1, -5, 5, -1, 4, 1]

dekPlot[dlist[n], 0, -5, 5, -4, 1, 1]

zeitSchlaufen[dlist[7], 2, 7, {-3.5, 3.5}, {-4, 1.2}, {-3, 3}]

zeitSchlaufen[dlist[7], 0, 7, {-3.5, 3.5}, {-4, 1.2}, {-3, 3}]

zeitSchlaufen[dlist[7], 1, 7, {-3.5, 3.5}, {-1.2, 4}, {-3, 3}]

newPositionWithPrint[30, 6, \[CurlyPhi]]

newPosition[30, 6, \[CurlyPhi]]

```

```
drehOmbrixDekSlPlot[{-7, 2}, {-4, 4}, {-4, 4}, {1, 8}, {0, 0}, {-4, 2}, {4, 5}, {6, 7}, {-7, 2}]
```

Den Output ist hier nicht wiedergegeben. Um ihn zu erhalten, kann man das File unter der nachfolgend angegebenen Adresse herunterladen und laufen lassen.

#### Adresse:

<http://www.rowicus.ch/Wir/Scripts/SonneModule.nb>

(Mathematica-File für Version 4.0/4.1. Sollte auch unter 3.x laufen.)

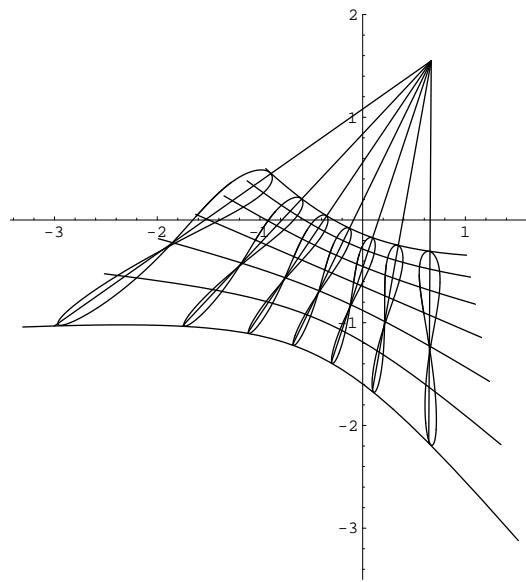
## 5.3 Sonnenuhr für die mittlere Zeit

### Arbeit

Berechne ein Zifferblatt für die mittlere Zeit für eine Wand an Deinem Standort. Benutze die hergestellten Programm-Module.

Der nachfolgende Output (Bild auf der folgenden Seite) zeigt ein Beispiel eines Zifferblatts auf einer schiefen Wand. Diese hat eine Neigung von  $+10^\circ$  im Gegenuhrzeigersinn gegen die Ostrichtung und von  $+6^\circ$  gegen den Zenit nach innen (Norden). Der gerechnete Standort ist Biel (Kanton BE, CH).

Abbildung 5.1: Sonnenuhr für eine schiefe Wand mit schwacher Ausrichtung nach Osten



## 5.4 Sonnenuhr für die Zonenzeit

Nach einer Sonnenuhr, die die mittlere Zeit anzeigt, ist es heute nicht mehr möglich, immer den richtigen Zug am Bahnhof zu erwischen. Denn die Züge fahren nach der Zonenzeit, im Winter nach der Winterzeit (alte Zonenzeit) und im Sommer nach der Sommerzeit (bei gleicher Stundenangabe eine wahre Stunde

früher als im Winter). Die Sonnenuhr jedoch zeigt bei Angabe der wahren Zeit die **wahre Ortszeit WOZ** und bei Angabe der mittleren Zeit die **mittlere Ortszeit MOZ**. Die Ortszeit ist für Fahrpläne, d.h. für Verkehr, Handel etc. ungeeignet, da Orte mit verschiedenen geographischen Längen verschiedene Zeiten aufweisen. Bei uns in der Schweiz gilt daher seit 1894 die **mitteleuropäische Zeit MEZ**, die definiert ist als die wahre Ortszeit des 15. östlichen Länggrades (östlich von Greenwich mit dem 0. Längengrad, wo die **UT**, die **Universal Time** gilt). Die Sommerzeit ist die alte **osteuropäische Zeit OEZ**, definiert als wahre Ortszeit des 30. östlichen Länggrades.

Beim Bau einer Sonnenuhr für die mittlere Zeit muss für Sommer- und Winterzeit das selbe Zifferblatt benutzt werden. Das kann mit doppelter Beschriftung der Linien geschehen. Statt die wahre Zeit, ist die mittlere Zeit zu benutzen, die um eine fixe Konstante von der wahren Zeit abweicht, welche sich z.B. in der Schweiz aus der Abweichung der geographischen Länge des Ortes von  $\lambda_z = 15^\circ$  (resp.  $\lambda_z = 30^\circ$ , östliche Längegrade) ergibt. Sei  $\lambda$  = geographische Länge des Ortes in Altgrad.  $\rightarrow$  In Stunden ist:  $t_m = t_z + (\lambda - \lambda_z) \cdot \frac{24}{360}$ . Denn je weiter östlich man weilt, desto grösser wird  $\lambda - \lambda_z$  und desto später ist es schon in der wahren Zeit, denn die Sonne geht im Osten auf. Daher muss die Differenz  $\lambda - \lambda_z$  zu  $t_z$  addiert werden. Damit wird in Stunden:

**Formel:** 
$$t_z = t_m - (\lambda - \lambda_z) \cdot \frac{24}{360}$$

Bei einer Sonnenuhr für die Zonenzeit müssen wir daher die Zeitschläufen für  $t_z$  statt für  $t_m$  plotten.

### Arbeit

Berechne ein Zifferblatt für die Zonenzeit für eine Wand an Deinem Standort.

## 5.5 Sonnenuhr für babylonische und italienische Stunden

Babylonische resp. griechische oder italienische resp. spanische Stunden sind gleich lang wie die wahren Stunden, die wir bis jetzt benutzt haben. Nur beginnen sie zu einem andern Zeitpunkt. Daher stimmt die babylonische resp. griechische oder die italienische resp. spanische Stundenzählung nicht mit der gewöhnlichen Stundenzählung ab **Mitternacht (Mittag)** überein.

Babylonische resp. griechische Stunden werden ab **Sonnenaufgang** gezählt, italienische resp. spanische Stunden ab **Sonnenuntergang**. Durch Ergänzung auf 24 kann man aus letzteren auf einfache Weise die noch verbleibende Zeit bis Sonnenuntergang resp. bis zum Abend berechnen. Somit ist es notwendig, die wahren Zeitpunkte von Sonnenaufgang und Sonnenuntergang für jeden Tag berechnen zu können. Diese Zeitpunkte hängen von der Deklination und von der geographischen Breite ab. Auf Seite 47 haben wir die folgende Formel für die wahre Zeit von Sonnenaufgang oder Sonnenuntergang gefunden:

$$t(\delta, \varphi) = \arccos(-\tan(\delta) \cdot \tan(\varphi))$$

In wahren Stunden macht das:

$$\tau(\delta, \varphi) = \pm |\arccos(-\tan(\delta) \cdot \tan(\varphi))| \cdot \frac{24}{2\pi}$$

"+" bedeutet Sonnenuntergang, "-" Sonnenaufgang bei Zählung ab Mittag. Für die babylonische oder griechische Stundenzählung gilt daher:

$$t_{wahr} = t_{bab} - |\tau(\delta, \varphi)|, \quad t_{bab} = t_{wahr} + |\tau(\delta, \varphi)|$$

Für die italienische resp. spanische Stundenzählung gilt entsprechend:

$$t_{wahr} = t_{ital} + |\tau(\delta, \varphi)|, \quad t_{ital} = t_{wahr} - |\tau(\delta, \varphi)|$$

Um ein Zifferblatt mit solchen Stundenzählungen zeichnen zu können, gehen wir von einer Überlegung anhand der Skizze auf Seite 24 aus. Da sich die Sonne bei Sonnenauf- oder Untergang am Horizont auf der Sphäre des Ortsäquatorsystems befindet, liegt sie zu diesem Zeitpunkt immer auf demselben Grosskreis der genannten Sphäre (Schnittkreis der Sphäre mit der Ortshorizontebene). Mit den Jahreszeiten ändert sich nur der Deklinationswinkel, d.h. der Ort auf dem Grosskreis, nicht aber dieser Grosskreis selbst. Die Grosskreisebene denken wir uns durch die Gnomonspitze. Sie ist im allgemeinen Fall schief zur Erdachse, was von der geographischen Breite abhängt. Den Grosskreis selbst denken wir uns wie erwähnt als Schnittkurve der Grosskreisebene mit der Sphäre. Da die Sphäre beliebig gross gedacht werden kann, ist im Vergleich dazu die Distanz von Erdachse zur Gnomonspitze beliebig klein. Daher können wir uns die Erdachse durch die Gnomonspitze denken.

Pro Tag dreht sich nun die Sphäre mit der Sonne gleichmässig einmal um die Erdachse, pro Studen ergibt das  $\frac{1}{24}$  des ganzen Drehwinkels oder  $15^\circ$ . Denken wir uns den genannten Grosskreis inklusive die darauf

liegende Sonne auf die Sphäre geheftet, so dreht sich das Ganze pro Tag ebenfalls um  $\frac{1}{24}$  des ganzen Drehwinkels oder um  $15^\circ$ . Das Aufregende dabei ist, dass der Grosskreis bei dieser Drehung Grosskreis bleibt. Allerdings steht er nach dem Wegdrehen aus der Horizontalebene irgendwie schief zu dieser. Da jedoch die Gnomonspitze immer noch das Zentrum des Grosskreises bildet, ist die gnomonische Projektion des Grosskreises in jeder Lage eine Gerade, nämlich die Schnittgerade der Grosskreisebene mit der Projektionsebene (Zifferblatt). Somit sind die Stundenlinien für babylonische resp. griechische oder italienische resp. spanische Stunden immer Geraden.

*Die Stundenlinien für babylonische resp. griechische oder italienische resp. spanische Stunden sind immer Geraden.*

Um eine solche Stundengerade zu finden, brauchen wir jeweils nur zwei Punkte. Einen der zwei Punkte haben wir aber gratis! Denn zur Zeit der Äquinoktien liegt die Sonne in der Äquatorialebene, d.h. auf der Deklinationslinie zu  $\delta = 0^\circ$ , die bekanntlich eine Gerade ist. Dort ist  $\tau = \pm 6.00 \text{ h}$ . Wegen  $t_{bab/ital} = t_{wahr} \pm |\tau(\delta, \varphi)| = t_{wahr} \pm 6.00$  sind die Punkte der wahren Stunden auf dieser Deklinationslinie (-Geraden) identisch mit den entsprechenden, um 6 h verschobenen babylonischen resp. griechischen oder italienischen resp. spanischen Stundenmarken.

Um die gesuchten Stundengeraden zeichnen zu können, brauchen wir also jeweils nur noch einen Punkt. Diesen finden wir einfach nach dem folgenden Rezept: Wir berechnen aus der Gleichung  $\tau(\delta, \varphi) = \pm |\arccos(-\tan(\delta) \cdot \tan(\varphi))| \cdot \frac{24}{2\pi}$  z.B. für die Tageslänge  $10 \text{ h}$ , d.h. für  $\tau = 5$  umgekehrt wieder  $\delta$ . Für  $\varphi = 47.^{\circ}09$  ergibt das in Altgrad  $\delta = -13.^{\circ}5279$ . Zu dieser Deklination plotten wir die Deklinationslinie. Da bei  $\tau = 5 \text{ (h)}$  sich die wahren Stunden von den gesuchten babylonischen resp. griechischen oder italienischen resp. spanischen Stunden um exakt 5 ganze Stunden unterscheiden, können wir auf der Deklinationslinie zu  $\delta = -13.^{\circ}5279$  die Schnittpunkte mit den Stundengeraden für die wahre Zeit jeweils als zweiten Punkt benutzen. Z.B. 3 Uhr wahre Zeit entspricht dann 8 Uhr babylonische resp. griechische oder 22 Uhr italienische resp. spanische Zeit.

## Arbeit

Berechne ein Zifferblatt für die babylonischen resp. griechischen oder italienischen resp. spanischen Stunden für eine Wand an Deinem Standort.

Eine Lösung für ein horizontales Zifferblatt:

Mathematica-Programm:

---

```
(* "Putzmaschine" *) (*Old Form : Remove["Global`*"]*) Remove["Global`*"];
(* === > INPUT, Altgrad *)
\[CurlyPhi] = 47.09; g = 1;
fi = (90 - Abs[\[CurlyPhi]]);(* Print["fi ", Fi]; *)
hour = 2 Pi/24 (* Tage *);(* Print["hour ", hour]; *)
tRad[\[Delta]_, \[Phi]_] := ArcCos[-Tan[\[Delta] Degree] Tan[\[Phi] Degree]];
(* Print["tRad ", tRad[23.4393, \[CurlyPhi]]]; *)
t[\[Delta]_, \[Phi]_] :=
    ArcCos[-Tan[\[Delta] Degree] Tan[\[Phi] Degree]]/hour;
(* Print["t ", t[23.4393, \[CurlyPhi]]]; *)
tAntik[\[Delta]_, \[Phi]_, n_] := -t[\[Delta], \[Phi]] +
    n (2 t[\[Delta], \[Phi]])/12;
(* Print["tAntik ", tAntik[23.4393, \[CurlyPhi], 3]]; *)
tBab[\[Delta]_, \[Phi]_, n_] := -t[\[Delta], \[Phi]] + n ;
(* Print["tBab ", tBab[23.4393, \[CurlyPhi], 3]]; *)
tIt[\[Delta]_, \[Phi]_, n_] := t[\[Delta], \[Phi]] - 24 + n ;
(* Print["tIt ", tIt[23.4393, \[CurlyPhi], 3]]; *)
v[\[Delta]_, fi_, t_] :=
    g/(Cos[\[Delta] Degree] Cos[t hour] Sin[fi Degree] +
        Sin[\[Delta] Degree] Cos[fi Degree]) {(Cos[\[Delta] Degree] Sin[
            t hour]),
        Sign[\[CurlyPhi]]((Cos[\[Delta] Degree] Cos[t hour] Cos[fi Degree] -
            Sin[\[Delta] Degree] Sin[fi Degree]))};
(* Print["v ", v[23.4393, fi, 3]]; *)
plotAntik[\[Delta]_, \[Phi]_, n_] :=
    v[\[Delta], fi, tAntik[\[Delta], \[Phi], n]];
(* Print["plotAntik ", plotAntik[23.4393, fi, 3]]; *)
plotBab[\[Delta]_, \[Phi]_, n_] :=
    v[\[Delta], fi, tBab[\[Delta], \[Phi], n]];
(* Print["plotBab ", plotBab[23.4393, fi, 3]]; *)
plotIt[\[Delta]_, \[Phi]_, n_] := v[\[Delta], fi, tIt[\[Delta], \[Phi], n]];
(* Print["plotIt ", plotIt[23.4393, fi, 18]]; *)
ursprung[\[CurlyPhi]_] := {0, -g/Tan[\[CurlyPhi] Degree]};
menge1 = {plotAntik[\[Delta], \[CurlyPhi], 1],
    plotAntik[\[Delta], \[CurlyPhi], 2],
    plotAntik[\[Delta], \[CurlyPhi], 3],
    plotAntik[\[Delta], \[CurlyPhi], 4],
    plotAntik[\[Delta], \[CurlyPhi], 5],
    plotAntik[\[Delta], \[CurlyPhi], 6],
    plotAntik[\[Delta], \[CurlyPhi], 7],
    plotAntik[\[Delta], \[CurlyPhi], 8],
    plotAntik[\[Delta], \[CurlyPhi], 9],
    plotAntik[\[Delta], \[CurlyPhi], 10],
    plotAntik[\[Delta], \[CurlyPhi], 11]};
```

---

---

```

menge2 = {plotBab[\[Delta], \[CurlyPhi], 1],
          plotBab[\[Delta], \[CurlyPhi], 2], plotBab[\[Delta], \[CurlyPhi], 3],
          plotBab[\[Delta], \[CurlyPhi], 4], plotBab[\[Delta], \[CurlyPhi], 5],
          plotBab[\[Delta], \[CurlyPhi], 6], plotBab[\[Delta], \[CurlyPhi], 7],
          plotBab[\[Delta], \[CurlyPhi], 8], plotBab[\[Delta], \[CurlyPhi], 8],
          plotBab[\[Delta], \[CurlyPhi], 8], plotBab[\[Delta], \[CurlyPhi], 8]};
menge3 = {plotIt[\[Delta], \[CurlyPhi], 16],
          plotIt[\[Delta], \[CurlyPhi], 17], plotIt[\[Delta], \[CurlyPhi], 18],
          plotIt[\[Delta], \[CurlyPhi], 19], plotIt[\[Delta], \[CurlyPhi], 20],
          plotIt[\[Delta], \[CurlyPhi], 21], plotIt[\[Delta], \[CurlyPhi], 22],
          plotIt[\[Delta], \[CurlyPhi], 23]};
menge4 = Join[menge1, menge2, menge3];
menge5 = Join[
  menge4, {v[d1, fi, t], v[d2, fi, t], v[d3, fi, t], v[d4, fi, t],
            v[d5, fi, t],
            v[d6, fi, t], v[d7, fi, t]}];
p1 = ParametricPlot[Evaluate[menge1], {\[Delta], -23.4393, 23.4393},
  AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> {-4, 8}, PlotLabel -> "Antik"];
p2 = ParametricPlot[Evaluate[menge2], {\[Delta], -23.4393, 23.4393},
  AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> {-4, 6},
  PlotLabel -> "Babylonisch - griechisch"];
p3 = ParametricPlot[Evaluate[menge3], {\[Delta], -23.4393, 23.4393},
  AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> {-4, 6},
  PlotLabel -> "Italienisch - spanisch"];
p4 = ParametricPlot[Evaluate[menge4], {\[Delta], -23.4393, 23.4393},
  AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> {-4, 6}, PlotLabel -> "Alle"];
d1 = 23.4393 ; d2 = 16 ; d3 = 8 ; d4 = 0 ; d5 = -8 ; d6 = -16 ; d7 = -23.4393
;
p5 = ParametricPlot[
  Evaluate[{v[d1, fi, t], v[d2, fi, t], v[d3, fi, t], v[d4, fi, t],
            v[d5, fi, t],
            v[d6, fi, t], v[d7, fi, t]}], {t, -4.1, 4.1},
  AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> {-2, 4},
  PlotLabel -> "Mit Deklinationslinien"];
Show[p4, p5];

```

---

**Output:**

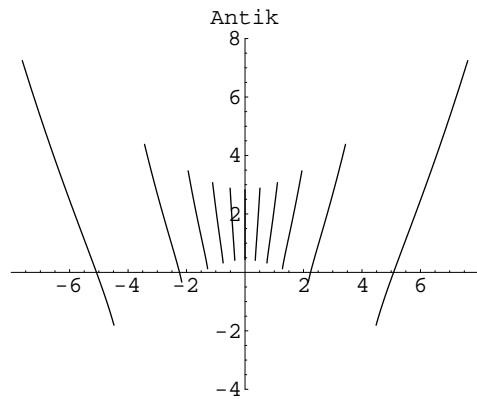
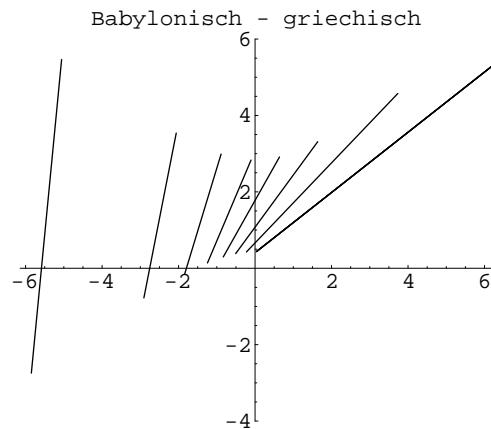
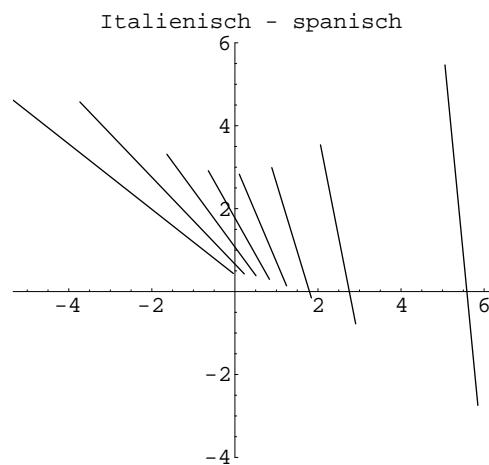
Abbildung 5.2: *Antike Stunden, Horizontaluhr*Abbildung 5.3: *Babylonische oder griechische Stunden, Horizontaluhr*Abbildung 5.4: *Italienische oder spanische Stunden, Horizontaluhr*

Abbildung 5.5: Überlagerung, Horizontaluhr

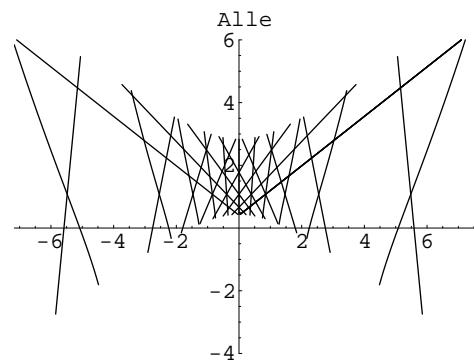


Abbildung 5.6: Deklinationslinien, Horizontaluhr

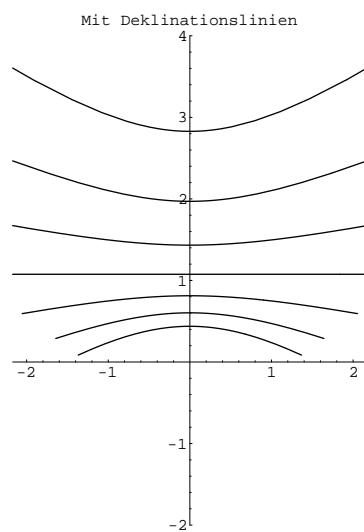
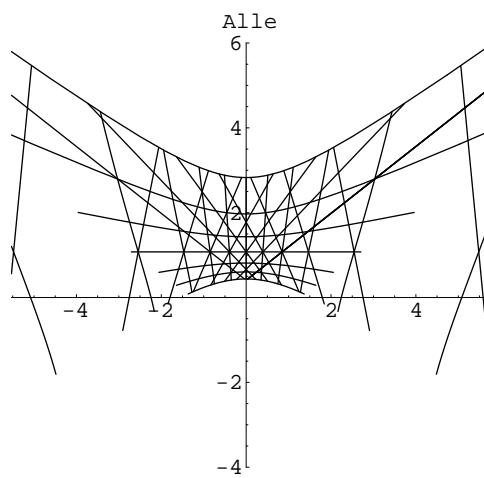


Abbildung 5.7: Überlagerung, Horizontaluhr



## 5.6 Sonnenuhr für antike Stunden

Bis ca. zum Jahr 1200 zählte man die Stunden anders als heute, d.h. nach der Art der Antike. Bei dieser Stundenzählung teilt man die Zeit von Sonnenaufgang bis Sonnenuntergang in exakt 12 gleich lange Stunden ein. Die Stundenlänge ändert also von Tag zu Tag. Daher nennen wir die **antiken Stunden** auch **temporäre Stunden**. Jeder lichte antike Tag hat somit 12 Stunden. Die Stundenlinie für Sonnenaufgang ist die Linie der 0. Stunde, die Mittagslinie diejenige der 6. Stunde und die Linie für Sonnenuntergang diejenige der 12. Stunde seit Sonnenaufgang. Die Abweichung zu den wahren Stunden nimmt mit der geografischen Breite zu. Bei uns sind die antiken Stunden bei Wintersonnenwende ca. 40 Minuten kürzer als bei Sommersonnenwende. Zur Zeit der Tag- und Nachtgleiche sind sie gleich lang wie die wahren Stunden. (Äquinoktialstunden.)

Um die Stundenlinien zu erhalten, gehen wir am besten von den Deklinationslinien aus. Bei einer gegebenen Deklination berechnen wir mit Hilfe unserer Formel

$$t(\delta, \varphi) = \arccos(-\tan(\delta) \cdot \tan(\varphi))$$

die Sonnenaufgangs- und Untergangszeit. Damit erhalten wir die Länge des zugehörigen lichten Tages. Diese Länge teilen wir in zwölf gleiche Zeitabschnitte ein. Damit können wir die wahre Zeit ab Sonnenaufgang zur ersten, zweiten, dritten u.s.w. antiken Stunde berechnen. Damit kennen wir jeweils für die antiken Stundenlinien die wahre Zeit zu einer gegebenen Deklination, woraus wir jedesmal einen Punkt der gnomonischen Projektion berechnen können. Aus der Verbindung dieser Punkte (ListPlot!) erhalten wir die Stundenlinie mit gewünschter Genauigkeit.

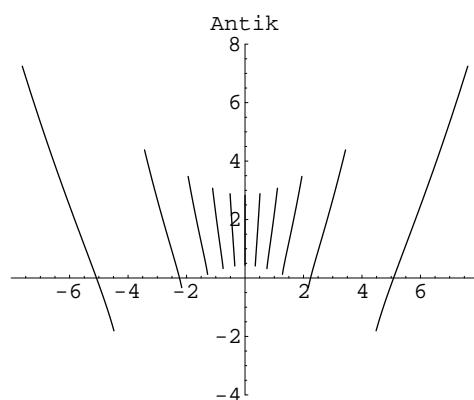
### Arbeit

Berechne ein Zifferblatt für die antiken Stunden für eine Wand an Deinem Standort.

Eine Lösung:

**Output:** (Vgl. Seite 93)

Abbildung 5.8: *Antike Stunden, Horizontaluhr*



**Mathematica-Programm:**

---

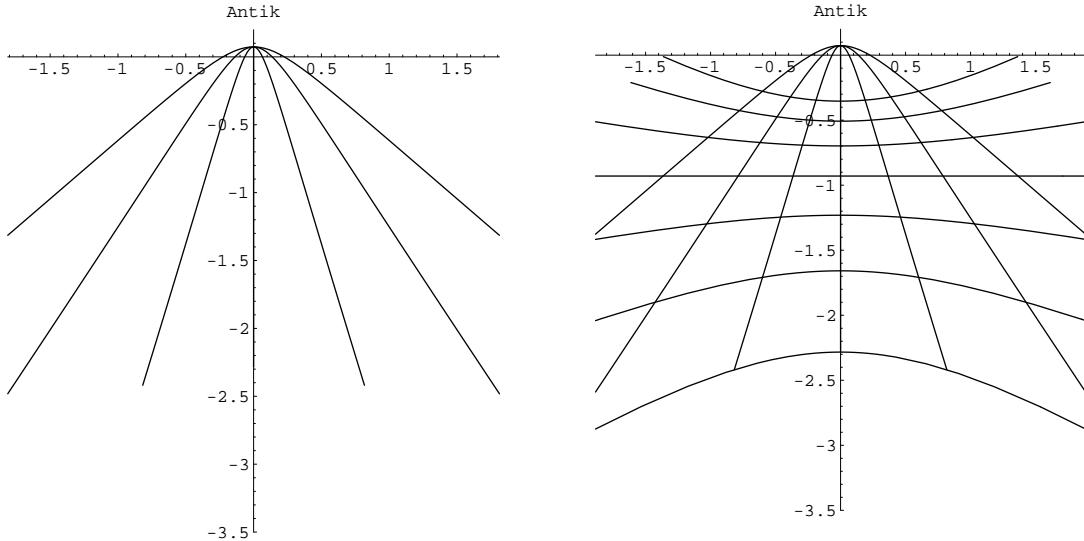
```

(* "Putzmaschine" *) (*Old Form : Remove["Global`*"]*) Remove["Global`*"];
(* === > INPUT, Altgrad *)
(* \[CurlyPhi] = 47.09; *) (*horizontal*)
\[CurlyPhi] = 47.09 - 90; (*vertikal*)
g = 1;
fi = (90 - Abs[\[CurlyPhi]]);(* Print["fi ", Fi]; *)
hour = 2 Pi/24 (* Tage *);(* Print["hour ", hour]; *)
tRad[\[Delta]_, \[Phi]_] := ArcCos[-Tan[\[Delta] Degree] Tan[\[Phi] Degree]];
(* Print["tRad ", tRad[23.4393, \[CurlyPhi]]]; *)
t[\[Delta]_, \[Phi]_] :=
ArcCos[-Tan[\[Delta] Degree] Tan[\[Phi] Degree]/hour];
(* Print["t ", t[23.4393, \[CurlyPhi]]]; *)
tAntik[\[Delta]_, \[Phi]_, n_] := -t[\[Delta], \[Phi]] +
n (2 t[\[Delta], \[Phi]])/12;
(* Print["tAntik ", tAntik[23.4393, \[CurlyPhi], 3]]; *)
v[\[Delta]_, fi_, t_] :=
g/(Cos[\[Delta] Degree] Cos[t hour] Sin[fi Degree] +
Sin[\[Delta] Degree] Cos[fi Degree]) {(Cos[\[Delta] Degree] Sin[
t hour]),
Sign[\[CurlyPhi]]((Cos[\[Delta] Degree] Cos[t hour] Cos[fi Degree] -
Sin[\[Delta] Degree] Sin[fi Degree]))};
(* Print["v ", v[23.4393, fi, 3]]; *)
plotAntik[\[Delta]_, \[Phi]_, n_] :=
v[\[Delta], fi, tAntik[\[Delta], \[Phi], n]];
ursprung[\[CurlyPhi]_] := {0, -g/Tan[\[CurlyPhi] Degree]};
menge1 = {(*plotAntik[\[Delta], \[CurlyPhi], 1],
plotAntik[\[Delta], \[CurlyPhi], 2],*)
plotAntik[\[Delta], \[CurlyPhi], 3],
plotAntik[\[Delta], \[CurlyPhi], 4],
plotAntik[\[Delta], \[CurlyPhi], 5],
plotAntik[\[Delta], \[CurlyPhi], 6],
plotAntik[\[Delta], \[CurlyPhi], 7],
plotAntik[\[Delta], \[CurlyPhi], 8],
plotAntik[\[Delta], \[CurlyPhi], 9],
(*, plotAntik[\[Delta], \[CurlyPhi], 10],
plotAntik[\[Delta], \[CurlyPhi], 11]*)};
\[CurlyTheta] = 47.09;(*Plotbereich*)
p0 = ParametricPlot[Evaluate[menge1], {\[Delta], -23.4393, \[CurlyTheta]},
AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> {-3.5, 0.2},
PlotLabel -> "Antik"];
p1 = ParametricPlot[Evaluate[menge1], {\[Delta], -23.4393, 23.4393},
AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> {-3.5, 0.2},
PlotLabel -> "Antik", DisplayFunction -> Identity];
d1 = 23.4393 ; d2 = 16 ; d3 = 8 ; d4 = 0 ; d5 = -8 ; d6 = -16 ;
d7 = -23.4393;
p2 = ParametricPlot[
Evaluate[{v[d1, fi, t], v[d2, fi, t], v[d3, fi, t], v[d4, fi, t],
v[d5, fi, t],
v[d6, fi, t], v[d7, fi, t]}], {t, -4.1, 4.1},
AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> {-3.5, 0.2},
PlotLabel -> "Mit Deklinationslinien", DisplayFunction -> Identity];
Show[p0, p2, DisplayFunction -> $DisplayFunction]; Show[p1, p2,
DisplayFunction -> $DisplayFunction];

```

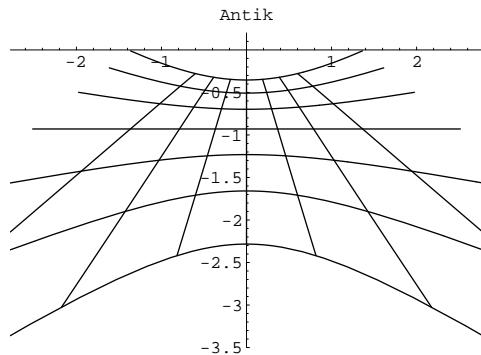
---

**Output:** Hilfs-Plots, vertikale Wand:



In den obigen Diagrammen sind die antiken Stundenlinien für eine *vertikale Wand* bei  $\varphi = 47.09^\circ$  über den sichtbaren Bereich hinaus dargestellt, welcher gegeben ist durch die begrenzenden Deklinationslinien. Sie sind bis zum geometrisch vorhandenen Zentrum gezeichnet, in dem sich die Linien treffen. Dieses Beispiel zeigt, dass diese Stundenlinien *keine Geraden* sein können.

Abbildung 5.9: Antike Stunden, Vertikaluhru



## 5.7 Sonnenuhr für die Sternzeit

Der Fixsternhimmel bleibt in guter Näherung fix bezüglich des Frühlingspunktes. (Jener wandert zwar, jedoch sehr wenig:  $\Delta L = L'_0 = 0^\circ.0000470684$  pro Tag.) Die Sternzeit wird bezüglich des Frühlingspunktes gemessen. Daher ist die Erscheinung des Fixsternhimmels für eine fixe Sternzeit an allen Tagen des Jahres dieselbe. Die Ekliptik als spezielle Line (Sonnenbahn) ändert durchs Jahr fast genauso wenig ihre Position bezüglich des Frühlingspunktes wie der Fixsternhimmel. Im Ortsäquatorsystem der Erde stellt die Ekliptik auf der Sphäre ein Grosskreis dar, der schief zur Erdachse liegt, der die beiden Wendekreise (Kleinkreise, Breitenkreise) berührt und in dessen Zentrum wir uns

die Gnomonspitze denken können (vgl. Begründung in 5.5). Daher ist die gnomonische Projektion der Ekliptik in jedem Moment eine Gerade (Bild eines Grosskreises). Da der genannte Ekliptik–Grosskreis die Wendekreise nur *berührt*, ist seine gnomonische Projektion eine Gerade, die eine der gnomonischen Projektionen der Wendekreise auch nur berührt, d. h. Tangente an die Wendekreisprojektionslinien ist. In der Projektion ist nur der eine Berührungs punkt zu finden, da die eine Hälfte des Raumes vor der Projektionsebene liegt, die andere Hälfte des Raumes aber hinter der Projektionsebene, wodurch für diese Punkte keine reellen Schattenbilder entstehen können. Interessanterweise wird durch einen solchen Berührungs punkt die Projektionsgerade der Ekliptik in zwei Halbgeraden geteilt. Die eine ist wegen der Wendekreiseigenschaft dem Frühlingshalbjahr (21.12.-21.6.) und die andere dem Herbst halbjahr zuzuordnen. Damit ist bekannt, dass die Sonne in Momenten gleicher Sternzeit den Gnomon–Schatten auf das Bild des Ekliptik–Grosskreises, d.h. auf eine Gerade wirft. Wir haben somit noch das Problem, je zwei Punkte einer solchen Geraden zu finden, um die Gerade plotzen zu können.

Wir denken uns eine beliebige Tangente an das gnomonische Bild eines Wendekreises gezeichnet. Wendekreis bedeutet maximale resp. minimale Deklination. Ein solches gnomonisches Bild (Solstitiallinie) ist daher eine der Deklinationslinien für die maximale resp. minimale Deklination ( $\pm 23.5^\circ$  Altgrad). Auf Seite 40 haben wir gesehen, dass alle Tangenten an die Deklinationslinien für eine bestimmte wahre Zeit  $t_0$  sich alle auf der Äquinoktialgeraden bei  $t_0 \pm 6 h$  schneiden. Damit liessen sich die Stundengeraden für die Sternzeit zeichnen, wenn es gelänge, diesen Geraden auch Zeitwerte zuzuordnen.

Für die Sonne gilt bekanntlich nach Seite 60:

$$t^* = t + AR, \quad AR = t^* - t$$

$t^*$  bedeutet die Sternzeit, d.h. der Stundenwinkel des Frühlingspunktes und  $t$  der Stundenwinkel der Sonne  $\leadsto$  wahre Zeit.  $AR$  ist die Rektaszension (der wahren Sonne, ab Frühlingspunkt gemessen). Für  $AR = 0$  steht die Sonne auf dem Frühlingspunkt, d.h. an der Sphäre des Ortsäquatorsystems auf dem Schnittpunkt zwischen Ortsäquator Kreis auf der Sphäre und Ekliptikebene. Dann ist  $t^* = t$ . Nach einem Vierteljahr (in 1. Näherung) steht die Sonne dann an einem der beiden Wendekreise. Am Fixsternhimmel ist die Sonne mittlerweile bei einer gewissen fixen Sternzeit um  $6 h$  weitergewandert. (D.h. um einen Viertel einer ganzen Drehung. Die Sonne durchläuft in einem Jahr die ganze Ekliptik, d.h. vollführt eine ganze Drehung um die Erde am Fixsternhimmel, z.B. bezogen auf eine fixe Stunde Sternzeit von der Erde aus gesehen.)

Wenn die Sonne z.B. im Frühlingspunkt steht, ist die Deklination =  $0^\circ$ , d.h. der Schatten der Gnomonspitze fällt auf die Äquinoktialgerade. Wegen  $t^* = t$  für diesen Zeitpunkt können wir dann hier die Sternzeit an der Stundengeraden für die wahren Stunden ablesen! Bezuglich einer fixen wahren Zeit, z.B. dem wahren Mittag, wandert der Frühlingspunkt in einem tropischen Jahr einmal um die Achse des Ortsäquatorsystems. In diesen Zusammenhang gehört auch, dass ein Sonnentag um 4 Minuten länger ist als der Sterntag (entsprechend  $\frac{1}{365} \hat{=} \frac{24}{365} \cdot 60 \approx 3.94521$ , 365 Sonnentage = 366 Sterntage, vgl. Seite 9). Die wahre Mittagslinie einer Sonnenuhr muss daher von 24 verschiedenen Sternstundengeraden „geschnitten“ werden (abgesehen von den Grehzfällen), denn alle Sternstunden kommen wegen der besagten Wanderung z.B. am Mittag einmal vor, selbstverständlich bei verschiedenen Deklinationen.

**Beispiel der Bestimmung einer Sternstundengeraden:** Wir wollen die Sternstundengerade für  $t^* = 1 h$  Sternzeit zeichnen. Auf der Äquinoktialgerade finden wir, wie oben beschrieben, zur wahren Zeit  $t = 1 h$  einen ersten Punkt dieser Geraden. Da die Sterntage kürzer sind als die Sonnentage, wird die Zeit  $t^* = 1 h$  ab Frühlingspunkt (d.h. ab Frühjahr gegen den Sommer zu) bezüglich der wahren Ortszeit mit ihren fixen Stundengeraden immer früher erreicht: Bald einmal ist es schon  $t^* = 1 h$ , wenn erst  $t = 0 h$  resp.  $t = 12 h$  gilt. Dabei steigt gegen den Sommer hin auch die Deklination der Sonne. Auf einem horizontalen Zifferblatt liegen somit die Linien zu grösseren Deklinationen weiter südlich, d.h. „unten“. Früher, d.h. „schon“ zur wahren Zeit  $t = 0 h$  bedeutet auf dem Zifferblatt „weiter westlich“. Die Sternstundengerade zu  $t^* = 1 h$  verläuft daher vom bekannten Punkt auf der Äquinoktialgerade aus nach Südwesten. Für die wahre Zeit  $t = (1 + 12) h - 6 h = 7 h$  (frühmorgens) ist dann die betrachtete Sternstundengerade Tangente an die südliche Deklinationslinie des damit nördlichen Wendekreises des

Krebs.

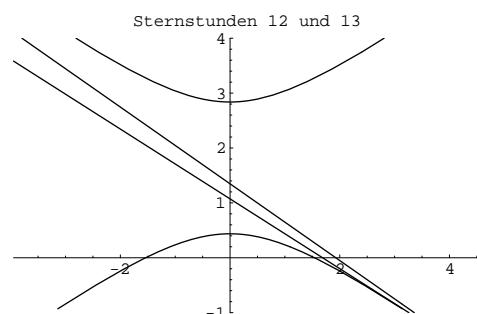
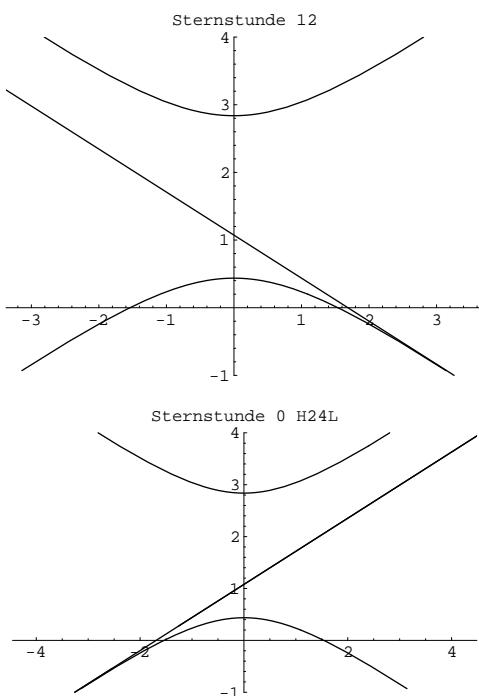
**Problem:** Seit 1925 ist der Datumsechsel um Mitternacht und nicht mehr am Mittag. Der Tag beginnt jetzt um Mitternacht. Die Stunden des Tages zählt man seither ab Mitternacht von 0 h bis 24 h. Bei alten Sonnenuhren mit wahrer Zeitangabe spielt das keine Rolle, da man nach wie von zweimal pro Tag von 0 h bis 12 h zählen darf. Zu den Nachtstunden scheint die Sonne nicht, so dass immer eine Lücke in der Stundenzählung auf der Uhr die Nacht ausmacht. Daher kann es nicht zu Verwechslungen führen, wenn zweimal auf dem Zifferblatt die 6. Stunde aufgezeichnet ist, eben für den Morgen und für den Abend je einmal. Ganz anders bei Sternstunden! Hier kommen alle Stundengeraden von 0 h bis 24 h auf dem Zifferblatt vor. Damit entsteht nun ein Problem: Sollen die Stunden nach neuer Methode ab Mitternacht von 0 h bis 24 h gezählt werden oder nach alter Methode ab Mittag? — Die Lösung bietet wohl die unausweichliche Realität: „Wer zahlt befiehlt!“.

### Arbeit

Berechne ein Zifferblatt für die Stundengeraden der Sternzeit für eine Wand an Deinem Standort.

Eine Lösung:

Orientierungslinien für charakteristische Stunden:



*Hinweis:*

Winkel zur Sonne:  $AR = t - t^* \rightsquigarrow$  für  $AR = 0$  (21. März) ist  $t^* = t$ . In die der Sonne entgegengesetzte Richtung, d.h. Richtung Zifferblatt, ist daher mit  $AR' = AR + 12$  Stunden zu rechnen.

**Mathematica-Programm:**


---

```

(* Braucht viel Rechenzeit! *)
(* "Putzmaschine" *) (*Old Form : Remove["Global`*"]*)
Remove["Global`*"]

(* Monatslängen *)
m[n_] := 31; m[2] = 28; m[4] = 30; m[6] = 30; m[9] = 30; m[11] = 30;
m[13] = 1;
(* Anzahl Tage seit 31.12. letzten Jahres *)
tage[tag_, mon_] := Sum[m[n], {n, 1, mon}] - m[mon] + tag;
day0 = tage[21, 3];

(* Konstanten *)
m0 = (356.5399 - 360) Degree; e = 0.0167092; L0 = (282.9399 -
360) Degree; Eps = 23.4393 Degree;
L01 = 0.0000470684 Degree; m01 = 0.9856002664 Degree;
(* Keplerfunktion *)
f[eE_, day_] := eE - e Sin[eE] - m0 - m01 day;
eE[day_] := eNS /. FindRoot[f[eNS, day] == 0, {eNS, 3}];
zG[day_] :=
ArcTan[Tan[
2 ArcTan[Sqrt[(1 + e)/(1 - e)] Tan[eE[day]/2]] + L0 +
L01 day] Cos[Eps]]/(2Pi) 24;
zG1[day_] := zG[day] + 6;

zG2[day_] := Ceiling[(zG[day] - zG[day + 1])/12];
zG3[day_] := Sum[zG2[n], {n, 0, Floor[day]}];
zG4[day_] := zG1[day] + 12 zG3[day] - zG1[day0];

(* Plot[zG4[day], {day, 0, 480}, PlotLabel -> "AR"]; *)

(* Rektaszension im Stundenmass *)
AR[day_] := zG4[day];

(* Sternzeit im Stundenmass, t in Stunden *)
tStern[day_, t_] := t + AR[day];

(* Keplerfunktion *)
f[eE_, day_] := eE - e Sin[eE] - m0 - m01 day;
eE[day_] := eNS /. FindRoot[f[eNS, day] == 0, {eNS, 3}];
(*Deklination im Grad*)
delta[day_] :=
ArcSin[Sin[
2 ArcTan[Sqrt[(1 + e)/(1 - e)] Tan[eE[day]/2]] + L0 +
L01 day] Sin[Eps]]/(2 Pi) 360;
(* Plot[delta[day], {day, 0, 365}]; *)

\[CurlyPhi] = 47.09; g = 1;
hour = 2 Pi/24 (*Tage*);
fi = (90 - Abs[\[CurlyPhi]]);
```

---

---

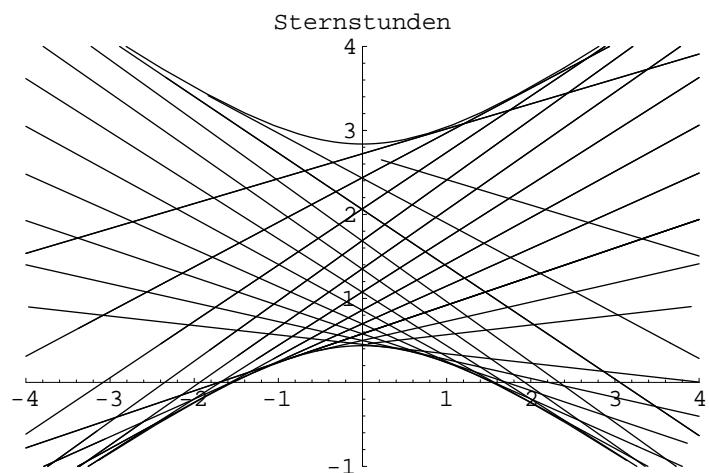
```
(* Plot - Vektor, \[Delta] Degree, t hour, fi Degree *)
v[\[Delta]_, fi_, t_] :=
  g/(Cos[\[Delta] Degree] Cos[t hour] Sin[fi Degree] +
    Sin[\[Delta] Degree] Cos[fi Degree]) {(Cos[\[Delta] Degree] Sin[
      t hour]),
  Sign[\[CurlyPhi]]((Cos[\[Delta] Degree] Cos[t hour] Cos[fi Degree] -
    Sin[\[Delta] Degree] Sin[fi Degree]))};

pt[\[Delta]_, n_] :=
  ParametricPlot[Evaluate[v[\[Delta]], fi, t]], {t, -n, n},
  AspectRatio -> Automatic, DisplayFunction -> Identity];
plot\[Delta]Stern[t_, n1_, n2_] :=
  ParametricPlot[v[delta[day], fi, tStern[day, t]], {day, n1, n2},
  AspectRatio -> Automatic,
  PlotLabel -> "Sternstunden",
  DisplayFunction -> Identity];
Show[plot\[Delta]Stern[0, 25, 180],
  pt[23.5, 6], pt[-23.5, 4], AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> {-1, 4},
  DisplayFunction -> $DisplayFunction, PlotLabel -> "Sternstunde 12"];
Show[plot\[Delta]Stern[0, 25, 180], plot\[Delta]Stern[1, 15, 170],
  pt[23.5, 6], pt[-23.5, 4], AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> {-1, 4},
  DisplayFunction -> $DisplayFunction,
  PlotLabel -> "Sternstunden 12 und 13"];
Show[plot\[Delta]Stern[12, 25 + 182, 180 + 182],
  pt[23.5, 6], pt[-23.5, 4], PlotLabel -> "Sternstunde 0 (24)",
  AspectRatio -> Automatic, PlotRange -> {-1, 4},
  DisplayFunction -> $DisplayFunction]; Show[
  plot\[Delta]Stern[-5, 84, 240],
  plot\[Delta]Stern[-4, 72, 228],
  plot\[Delta]Stern[-3, 60, 215],
  plot\[Delta]Stern[-2, 49, 206],
  plot\[Delta]Stern[-1, 37, 195],
  plot\[Delta]Stern[0, 25, 180],
  plot\[Delta]Stern[1, 15, 170],
  plot\[Delta]Stern[2, 5, 150],
  plot\[Delta]Stern[3, 0, 130],
  plot\[Delta]Stern[3, -8, 130],
  plot\[Delta]Stern[4, -9, 100],
  plot\[Delta]Stern[5, 9, 80],
  plot\[Delta]Stern[-5 + 12, 84 + 182, 240 + 182],
  plot\[Delta]Stern[-4 + 12, 72 + 182, 228 + 182],
  plot\[Delta]Stern[-3 + 12, 60 + 182, 215 + 182],
  plot\[Delta]Stern[-2 + 12, 49 + 182, 206 + 182],
  plot\[Delta]Stern[-1 + 12, 37 + 182, 195 + 182],
  plot\[Delta]Stern[0 + 12, 25 + 182, 180 + 182],
  plot\[Delta]Stern[1 + 12, 15 + 182, 170 + 182],
  plot\[Delta]Stern[2 + 12, 5 + 182, 150 + 182],
  plot\[Delta]Stern[3 + 12, 0 + 182, 130 + 182],
  plot\[Delta]Stern[3 + 12, -8 + 182, 130 + 182],
  plot\[Delta]Stern[4 + 12, -9 + 182, 100 + 182],
  plot\[Delta]Stern[5 + 12, 9 + 182, 80 + 182],
  pt[23.5, 6], pt[-23.5, 4], AspectRatio -> Automatic,
  PlotRange -> {{-4, 4}, {-1, 4}}, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

---

**Output:**

Abbildung 5.10: Sternzeitstunden





# Kapitel 6

## Besondere Sonnenuhren und andere

### 6.1 Brunnensonnenuhr

**Zum Prinzip:** Z.B. die Ablaufröhre eines Trogbrunnens kann als Gnomonspitze verwendet werden. Das Zifferblatt liegt auf dem Trogboden, der horizontal sein soll. Das Problem ist hier, dass die Lichtstrahlen beim Eintritt ins Wasser zum Lot gebrochen werden, was die Formen der zu zeichnenden Linien verändert.

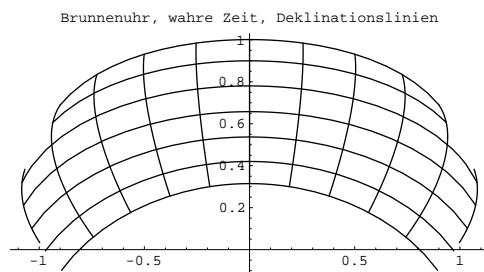
#### Arbeit

Projektarbeit: Studiere das Prinzip mit Hilfe von Literatur oder am vorhandenen Objekt. Berechne dann ein Zifferblatt für eine Uhr an Deinem Standort. Füge eine Erklärung bei.

Eine Lösung:

#### Output:

Abbildung 6.1: Brunnenuhr, wahre Zeit, Deklinationslinien



Mathematica-Programm:

---

```
(*Putzmaschine*)(*Old Form : Remove["Global`*"]*)Remove["Global`*"];
\[CurlyPhi] = 47.09; g = 1;
hour = 2 Pi/24 (*Tage*);
MP[t_, \[CurlyPhi]_] := g Tan[t hour]/Sin[(90 - \[CurlyPhi]) Degree];
tab1[\[CurlyPhi]_] :=
Table[MP[t, \[CurlyPhi]], {t, -5, 5, 1}]; tab1[\[CurlyPhi]];
tab2[\[CurlyPhi]_] :=
Table[{tab1[\[CurlyPhi]][[n]], g/Tan[(90 - \[CurlyPhi]) Degree]}, {n, 1,
Length[tab1[\[CurlyPhi]]]}]; tab2[\[CurlyPhi]];
ursprung[\[CurlyPhi]_] := {0, -g/Tan[\[CurlyPhi] Degree]};
fi = (90 - Abs[\[CurlyPhi]]);
d1 = 23.5; d2 = 16; d3 = 8; d4 = 0; d5 = -8; d6 = -16; d7 = -23.5;
v[d_, fi_, t_] :=
g/(Cos[d Degree] Cos[t hour] Sin[fi Degree] +
Sin[d Degree] Cos[fi Degree]) {(Cos[d Degree] Sin[t hour]),
Sign[\[CurlyPhi]]((Cos[d Degree] Cos[t hour] Cos[fi Degree] -
Sin[d Degree] Sin[fi Degree]))};
v3[vec_] := Append[vec, -g];
len[vec1_] := Sqrt[vec1.vec1];
hvec = {0, 0, -g};
einfall[veC_] := ArcCos[veC.hvec/(len[veC]*len[hvec])];
ausfall[veq_] := ArcSin[Sin[einfall[veq]]/1.333];
new[vq_] := vq * Tan[ausfall[v3[vq]]]/Tan[einfall[v3[vq]]];
vB[d_, fi_, t_] := new[v[d, fi, t]];
pd[t_, m_] := ParametricPlot[Evaluate[vB[d, fi, t]], {d, -m, m},
DisplayFunction -> Identity];
pt[d_, n_] :=
ParametricPlot[Evaluate[vB[d, fi, t]], {t, -n, n},
DisplayFunction -> Identity];
p1 = Show[pd[-5, 13], pd[-4, 23.5], pd[-3, 23.5], pd[-2, 23.5], pd[-1, 23.5],
pd[0, 23.5], pd[1, 23.5], pd[2, 23.5], pd[3, 23.5], pd[4, 23.5],
pd[5, 13], AspectRatio -> Automatic,
PlotLabel -> "Brunnenuhr, wahre Zeit, Deklinationslinien"];
p2 = Show[pt[d1, 5], pt[d2, 5], pt[d3, 5], pt[d4, 5], pt[d5, 5], pt[d6, 4],
pt[d7, 4], AspectRatio -> Automatic,
PlotLabel -> "Brunnenuhr, wahre Zeit, Deklinationslinien"];
Show[p1, p2, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

---

## 6.2 Analematische Sonnenuhr

**Zum Prinzip:** Betrachte eine Poluhr (Zifferblatt: Kreis). Projiziere diese auf irgend eine Ebene. Wähle eine verschiebbare Gnomonmarke auf der Polgeraden, die jeweils so eingestellt ist, dass der Schatten der Marke auf die Kreislinie der Poluhr fällt. Stecke nun ins projizierte Zifferblatt in Projektionsrichtung einen Stab ein, der durch die Gnomonmarke geht. Dann fällt in diesem Moment der Schatten des Stabes auf die Stundenmarke auf der Kreislinie der Poluhr sowohl als auch auf die Projektion (Wand, Unterlage).

Spezialfall:

**Forster–Lambertsche Sonnenuhr.** (Forster, England, 1654 und Lambert, Elsass u. Basel, 1777)

### Arbeit

Projektarbeit: Studiere das Prinzip mit Hilfe von Literatur oder am vorhandenen Objekt. Berechne dann eine Uhr für Deinen Standort. Füge eine Erklärung bei.

## 6.3 Sonnenkompass

**Zum Prinzip:** Beruhend auf der analematischen Sonnenuhr. Abhängigkeit von der Breite umgehen durch Konstruktion von Projektionen (Ellipsen) für eine ganze Serie von Breiten.

### Arbeit

Projektarbeit: Studiere das Prinzip mit Hilfe von Literatur oder am vorhandenen Objekt. Berechne dann einen Sonnenkompass. Füge eine Erklärung bei.

## 6.4 Bifilaruhr

**Zum Prinzip:** Benutze als Gnomonmarke den virtuelle Schnittpunkt der Projektion in „Sonnenrichtung“ eines windschiefen Drahtes (Faden, Schnur) auf einen andern windschiefen Draht (Faden, Schnur). Auf dem Zifferblatt ist die Marke als Schnittpunkt der Schattengeraden der beiden Drähte (Faden, Schnüre) ablesbar.

### Arbeit

Projektarbeit: Studiere das Prinzip mit Hilfe von Literatur oder am vorhandenen Objekt. Berechne dann ein Zifferblatt. Füge eine Erklärung bei.

## 6.5 Ägyptische Sonnenuhr

**Zum Prinzip:** Diese Sonnenuhr besteht aus zwei rechtwinklig zusammengesetzten rechteckigen Leisten. Die eine Leiste wird z.B. in Nord–Südrichtung in die Meridianlinie gelegt (senkrecht auf der Unterlage!), die andere liegt rechtwinklig dazu horizontal auf der Unterlage. Die obere Kante der senkrechten Unterlage dient als Schattenwerfer. Auf der anderen Leiste ist eine Skala angebracht, die zur Ablesung der Stunden dient. Dieser Uhrentyp kann auch vertikal gebaut werden...

**Wichtig:** Zwischen Vor- und Nachmittag muss diese Uhr um  $180^\circ$  gedreht werden, da der Schatten immer nur auf einer Seite ablesbar ist. Daher ist der Mittag in der Zeit etwas ganz besonderes, was den alten **Datumswechsel am Mittag erklärt**. (Man könnte allerdings auch beidseitig der senkrechten Leiste Marken anbringen.)

### Arbeit

Projektarbeit: Studiere das Prinzip mit Hilfe von Literatur oder am vorhandenen Objekt. Berechne dann ein Zifferblatt. Füge eine Erklärung bei.

## 6.6 Zylindersonnenuhr

**Zum Prinzip:** In Anlehnung an eine senkrechte ägyptische Sonnenuhr wird hier statt einer Leiste mit Skala ein Zylinder mit Kurven verwendet. Die schattenwerfende Leiste ist durch einen Zeiger (Gnomon) ersetzt, der um die Vertikalachse drehbar ist. Zur Ablesung müssen Sonne, Gnomonspitze und Vertikalachse in eine Ebene zu liegen gebracht werden. Auf dem Zylinder ordnen wir die Monate rund herum an. Der Zylinder ist so in Monatsstreifen etwa gleicher Breite eingeteilt. Dann berechnen wir z.B. jeweils für die

Monatsmitte u.s.w. die Schattenlängen für die einzelnen Stunden. Die erhaltenen Punkte verbinden wir durch Kurven. (Vgl. Bild Seite **ii.**)

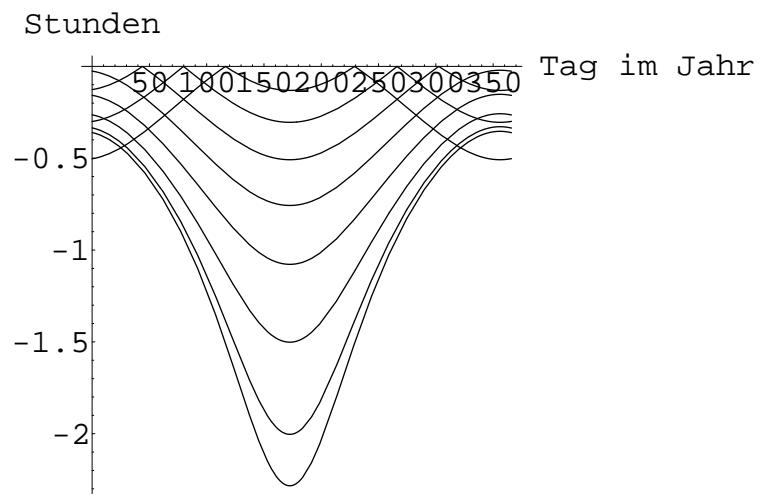
### Arbeit

Projektarbeit: Studiere das Prinzip mit Hilfe von Literatur oder am vorhandenen Objekt. Berechne dann ein Zifferblatt. Füge eine Erklärung bei.

Eine Lösung:

### Output:

Abbildung 6.2: *Zifferblatt einer Zylinderuhr*



## Mathematica-Programm:

```

(* "Putzmaschine" *) (*Old Form : Remove["Global`*"]*)
Remove["Global`"]
(* Konstanten *)

\[CurlyPhi] = 47.09; \[Phi] = (90 - \[CurlyPhi])Degree;
g = 1; (*g=Stablänge*)
(* \[Phi] = 47.09Degree; g = 1; *)
achsverh=1; (*Achsenverhältnis beim Plot*)

len[v_] := Sqrt[v.v];

s1[t_, \[Delta]_, \[Phi]_] := {Cos[\[Delta]] Cos[t] Cos[\[Phi]] -
    Sin[\[Delta]] Sin[\[Phi]], Cos[\[Delta]] Sin[t],
    Cos[\[Delta]] Cos[t] Sin[\[Phi]] + Sin[\[Delta]] Cos[\[Phi]]};
s[t_, \[Delta]_, \[Phi]_] :=
    s1[t, \[Delta]]/len[s1[t, \[Delta]], \[Phi]]];
h1[t_, \[Delta]_, \[Phi]_] := {Cos[\[Delta]] Cos[t] Cos[\[Phi]] -
    Sin[\[Delta]] Sin[\[Phi]], Cos[\[Delta]] Sin[t], 0};
h[t_, \[Delta]_, \[Phi]_] :=
    h1[t, \[Delta]]/len[h1[t, \[Delta]], \[Phi]]];
\[Alpha][t_, \[Delta]_, \[Phi]_] :=
    ArcCos[s[t, \[Delta]], \[Phi]].h[t, \[Delta]], \[Phi]]];
d[t_, \[Delta]_, \[Phi]_] := -g*Tan[\[Alpha][t, \[Delta]], \[Phi]]];

tabelle[\[Delta]_] :=
    Evaluate[Table[d[n 2Pi/24, \[Delta]], \[Phi]], {n, 0, 4}]];
(*Print[tabelle[[\[Delta]]]];*)

m0 = (356.5399 - 360) Degree; e = 0.0167092; L0 = (282.9399 -
    360) Degree; Eps = 23.4393 Degree;
L01 = 0.0000470684 Degree; m01 = 0.9856002664 Degree;
(* Keplerfunktion *)
f[eE_, d_] := eE - e Sin[eE] - m0 - m01 d;
eE[d_] := eNS /. FindRoot[f[eNS, d] == 0, {eNS, 3}];
delta[d_] :=
    ArcSin[Sin[
        2 ArcTan[Sqrt[(1 + e)/(1 - e)] Tan[eE[d]/2]]] + L0 + L01 d] Sin[
        Eps]];
p[n_] := Plot[
    Evaluate[d[n 2Pi/24, \[Delta]], \[Phi]] /. \[Delta] -> delta[d1], {d1,
    0, 366}, AxesLabel -> {"Tag im Jahr", "Stunden"},
    DisplayFunction -> Identity];
t = Table[p[n], {n, 0, 7}]; graph =
    Show[t, DisplayFunction -> $DisplayFunction, AspectRatio -> achsverh];

```

## 6.7 Höhensonnenuhren

Die **Zylinder–Sonnenuhr** ist ein Spezialfall der **Höhensonnenuhr**. Bei einer solchen Uhr wird die Zeit mittels Sonnenhöhe und Deklination bestimmt. Weitere solche Uhren sind:

- ∅ **Sonnenquadrant**
- ∅ **Bauernring**
- ∅ **Habermel'sche Höhensonnenuhr**
- ∅ **Diverse spezielle Projektionstypen**

### Arbeit

Projektarbeit: Studiere das Prinzip mit Hilfe von Literatur oder am vorhandenen Objekt. Berechne dann je einen Typen. Füge eine Erklärung bei.

## 6.8 Sonnenglobus

Auf einem Grosskreis einer Kugel werden z.B. im Stundenabstand senkrecht zur Oberfläche Bolzen angebracht. Dadurch entsteht ein „Boldzenring“. Montiert man die Kugel im Freien in Sonnenexposition derart, dass der Bolzenring parallel zur Äquatorialebene liegt, so lässt sich an den Bolzen die Zeit ablesen. Prinzip: Derjenige Bolzen, der gerade keinen Schatten wirft, zeigt die momentane Stunde an. Keinen Schatten sehen kann man hier allerdings nur zur vollen Stunde.

### Arbeit

Projektarbeit: Baue Dir einen Sonnenglobus.

## 6.9 Walzensonnenuhr

**Zum Prinzip:** Wollen wir eine Poluhr für die mittlere Zeit bauen, so müssen wir eine Serie datumsabhängige Zifferblätter konzentrisch anordnen, was nicht unbedingt übersichtlich wirkt. Andersherum kann man auch mit einem einzigen Zifferblatt arbeiten. Den Polstab müssen wir jetzt aber zu einer Walze ausgestalten, bei der die Dicke (Radius) je nach Datum (Projektionshöhe vom fixen Zifferblatt aus gesehen) ändert. Die „Stundenschlaufen“ werden so auf die Walze übertragen! (Bernhardtsche Walze, Martin Bernhardt: 6.4.1919 -28.1.2001.) Da auf einer Uhr für die mittlere Zeit die Stundenschlaufen zwei Seiten haben (gemeint ist damit: pro Deklination zwei Ablesepunkte), kommen wir nicht mit einer einzigen Walze resp. mit einem einzigen Zifferblatt aus. Es braucht entweder zwei Zifferblätter, was beim Ablesen irritiert. Oder man arbeitet mit einem Zifferblatt, wechselt aber halbjährlich die Walze aus.

Vgl. auch <http://www.praezisions-sonnenuhr.de/funktion.htm>

### Arbeit

Projektarbeit: Studiere das Prinzip mit Hilfe von Literatur oder am vorhandenen Objekt. Berechne dann eine Walze. Füge eine Erklärung bei.

## 6.10 Helios

Helios ist eine Neuentwicklung von Carlo Heller, Wiesbaden. Ein im Zentrum einer halbtransparenten Halbkugel angebrachter Spiegel wirft einen dünnen Sonnenstrahl ins Innere der Halbkugel, auf der mittels Lasertechnologie ein sehr exaktes, feines Liniennetz angebracht ist (verschiedene Linien- und Zeitarten

möglich). Bei Helios wird eine sehr grosse Ablesegenauigkeit erreicht. (Mittlere Zeit  $\sim$  Halbkugel halbjährlich wechseln.)

Vgl. auch <http://www.heliosuhren.de/>

oder <http://www.solarserver.de/store/produkt.kategorie-29.produkt-413.html>

### Arbeit

Projektarbeit: Studiere das Prinzip mit Hilfe von Literatur oder am vorhandenen Objekt. Berechne dann eine Innenkugel für Deinen Standort. Füge eine Erklärung bei.

## 6.11 Astrolabische Sonnenuhr

**Zum Prinzip:** Wie ein Astrolabium. Man projiziert die Himmelskugel mit daraufliegenden Kreisen (z.B. Stundenkreise, Sonnenort) vom Nadir aus z.B. auf die Äquatorialebene, so sind die Bilder der Kreise in der Ebene Kegelschnitt-Kurven, auf denen sich am Schatten eines auf die Ebene senkrecht stehenden Stabes die Zeit ablesen lässt.

### Arbeit

Projektarbeit: Studiere das Prinzip mit Hilfe von Literatur oder am vorhandenen Objekt. Berechne dann ein Uhr. Füge eine Erklärung bei.

## 6.12 Sonnenuhr nach Regiomontanus

**Zum Prinzip:** Uhrentäfelchen nach Regiomontan 1475: Uhrtäfelchen mit Nomogramm. Einstellen der Sonnenhöhe bei gegebener geographischer Breite und Datum. (Vgl. z.B. Bibl. A1)

### Arbeit

Projektarbeit: Studiere das Prinzip mit Hilfe von Literatur oder am vorhandenen Objekt. Berechne dann ein Täfelchen. Füge eine Erklärung bei.

## 6.13 Sonnenuhr von Ozanam

**Zum Prinzip:** Auf eine Beschreibung soll an dieser Stelle des Umfangs wegen verzichtet werden. Vgl. z.B. Lit. Bibl. A16.

### Arbeit

Projektarbeit: Studiere das Prinzip mit Hilfe von Literatur oder am vorhandenen Objekt und erkläre es.

## 6.14 Breitenunabhängige Sonnenuhr

**Zum Prinzip:** Auf eine Beschreibung soll an dieser Stelle des Umfangs wegen verzichtet werden. Eine spezielle Version stammt von J.G. Freemann. Vgl. z.B. Lit. Bibl. A16.

### Arbeit

Projektarbeit: Studiere das Prinzip mit Hilfe von Literatur oder am vorhandenen Objekt und erkläre es.

## 6.15 Kombinierte Sonnenuhren

**Zum Prinzip:** In kombinierten Sonnenuhren werden zwei oder mehrere Typen in einer Uhr vereinigt. Dadurch lässt sich bei einer Ablesung mehr Information gewinnen.

### Arbeit

Projektarbeit: Studiere mögliche Prinzipien mit Hilfe von Literatur oder am vorhandenen Objekt und erkläre es.

## 6.16 Monduhren

**Zum Prinzip:** Menschen aus Kulturen mit Mondkalender sind daran interessiert, wie „voll“ der Mond momentan ist, d.h. wo in welcher Phase man sich gerade befindet. Die „Völle“ des Mondes kann man z.B. durch eine Wasseroberfläche in einem Gefäß darstellen, das einen mit der Höhe veränderlichen Querschnitt aufweist. Die Grösse der Wasseroberfläche wird so durch die Höhe des Wasserspiegels gesteuert. Man kann die Höhenzunahme des Wassers durch gleichmässig laufende Pumpen regeln. Die Volumenzunahme erfolgt dann hier linear, die Querschnittszunahme hingegen ist von der Gefäßform abhängig. Die Kunst ist es, die Gefäßform so zu berechnen, dass das Verhältnis zum Maximum der Oberfläche (Vollmond) gut sichtbar und ablesbar wird.

Dem gleichen Prinzip wie bei Sonnenuhren folgend lassen sich auch Monduhren bauen, bei denen man die Zeit wie bei Sonnenuhren durch den Schattenwurf z.B. eines Stabes ablesen kann. Das Problem dabei ist die schlechte Ablesbarkeit infolge der schwachen Leuchtkraft des Mondes. Am besten geht es natürlich bei Vollmond und wolkenlosem Himmel, doch der Vollmond zeigt sich meist nur einmal pro Monat. Entsprechend findet man Realisationen von Monduhren äusserst selten.

### Arbeit

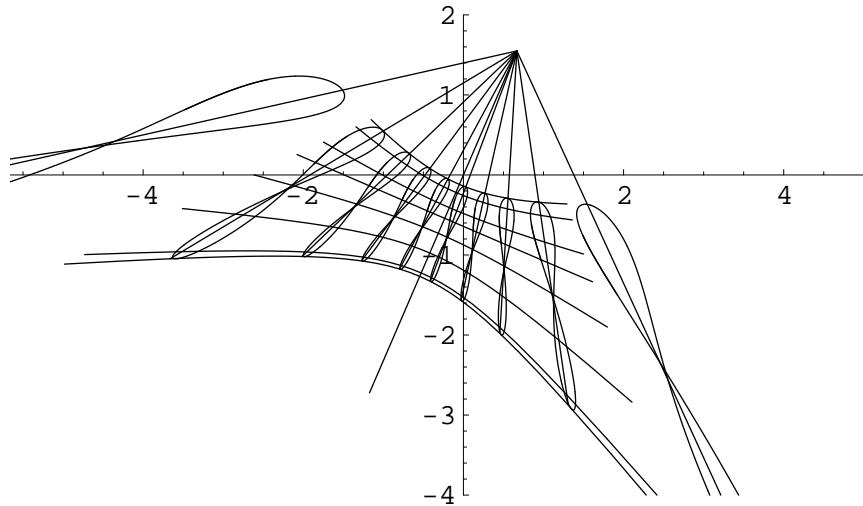
Projektarbeit: Studiere das Prinzip mit Hilfe von Literatur oder am vorhandenen Objekt. Berechne dann ein Gefäß. Füge eine Erklärung bei.

## 6.17 Ausblick

Vorläufig reserviert für Projekte.

### 6.17.1 Ein Plot–Beispiel

Abbildung 6.3: Studie einer Sonnenuhr für eine schiefe Wand



Die benutzte schiefe Wand hat eine Ausrichtung nach Osten und ist vom Gebäudeinnern aus gesehen überhängend, von aussen her gesehen also in Hanglage. Winkel:  $+30^\circ$  zur Ostachse,  $6^\circ$  vom Zenit (Senkrechte).

Zur Erstellung dieser Studie ist das folgende *Mathematica*–File verwendet worden:

<http://www.rowicus.ch/Wir/Scripts/SonneModule.nb>

Der Output ist in Post-Script (EPS) verfügbar (aber auch in BMP, EMF, WMF, BTF, WAV) und kann so einfach elektronisch weiter verarbeitet und vergrössert werden.

### 6.17.2 Zur Durchlaufrichtung der Schlaufen

Aus einem Plot über nur ein halbes Jahr (oder auch aus der Zeitgleichungskurve) entnimmt man, dass im ersten Halbjahr ab Jahreswechsel (ab Januar also) eine Schlaufe im Vergleich entlang dem Buchstaben **S** durchlaufen wird. Der Durchlauf beginnt oben im **S**, ganz nach der Art wie die meisten Menschen den Buchstaben schreiben.

**Merkregel:** Die Schlaufe beginnt mit **S**. So wird sie auch durchlaufen.



## Kapitel 7

# Zeitgenössische Stimmen und Anschauungsmaterial

### 7.1 Zwei Artikel aus der Zeitung

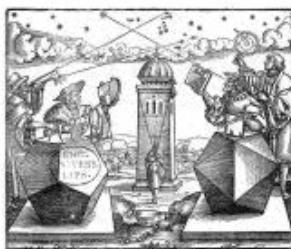
#### Basler Zeitung online

» ONLINE ARCHIV / 16.05.2001

Erschienen am: 16.05.2001

#### Wieder «in»: Zeitmessung mit Licht und Schatten

«Mach es wie die Sonnenuhr, zähle die heitern Stunden nur...»: Der alte Gassenhauer ist insofern wieder aktuell, als sie gegenwärtig eine Renaissance erlebt, die gute alte Sonnenuhr. Nur funktioniert sie leider immer noch nur dann, wenn die Sonne tatsächlich auch scheint...



*Titelblatt des «Instrument Buch» von Peter Apian aus dem Jahre 1533. Es zeigt einige damals übliche Geräte zur Messung des Sonnenwinkels.*

mit denen man sich Nachbildungen alter Modelle basteln kann.

Wir befinden uns zwar gegenwärtig im digitalen Zeitalter, aber trotzdem - oder vielleicht gerade deswegen? - feiert eine der ältesten Methoden, den Tag zu unterteilen, ihre Renaissance: die Zeitmessung mit Hilfe von Licht und Schatten mittels so genannter Sonnenuhren. Jedenfalls tauchen im gehobenen Versandhandel bereits Bausätze aus Holz auf,

Daneben gibt es eine ganze Reihe von Replikaten aus Metall, die ansprechend und präzise sind. Die im 18. Jahrhundert von dem Londoner Instrumentenbauer R. Glynne entworfene Tischsonnenuhr kann ebenso wieder aufgestellt werden, wie man sich den so genannten Bauernring wieder um den Filzwams hängen kann. Man benötigt keine Batterie und muss kein Uhrwerk aufziehen - und es wird einem auch nicht so ergehen wie dem nach Übersee reisenden Besitzer einer funkgesteuerten Uhr, die jenseits des Ozeans beim besten Willen nicht mehr zu stellen war. Gleichwohl ist die Beschäftigung mit der Sonnenuhr heute nicht weniger und nicht mehr als eine interessante physikalische Spielerei. Denn selbst wenn das verwendete Modell seine Angaben präzise machen kann, gibt es zwei Arten von Abweichungen, die Umrechnungen nötig machen. Die erste ist die zwischen Wahrer Ortszeit und Mitteleuropäischer Zeit. Letztere ist eine Norm, die eingeführt werden musste, damit die Menschen sich auf die Fahrpläne der Eisenbahn verlassen können. Nur durch die Festlegung einer einheitlichen Zeit für alle konnte man ein landesweites Verkehrsnetz aufbauen. Die zweite Abweichung ist die Sommerzeit. Auch sie ist eine Norm; ihre Einführung im Zuge der Ölkrise sollte Energiekosten reduzieren, indem das Licht des Tages besser ausgenutzt würde. Der erhoffte Effekt blieb allerdings aus.

### Hochblüte im 17. Jahrhundert

Wenn man sich heute mit den alten Sonnenuhren beschäftigt, dann also nicht, um zu wissen, wie spät es ist, sondern in Anerkennung ihrer gewichtigen Verdienste um die Entwicklung der Uhren. Das war nicht immer so. So wurde die Sonnenuhr am Südpfeiler des Wiener Stephansdomes 1451 kaum aus gestalterischen Überlegungen angebracht, sondern damit die Leute sehen konnten, was es geschlagen hat.

Im 17. Jahrhundert erreicht die Kunst des Sonnenuhrenbaues ihre Hochblüte. Und bis Mitte des 19. Jahrhunderts war zur Kontrolle von Kirchenuhren immer auch noch eine Sonnenuhr erforderlich.

### Von Babylon übernommen

Sonnenuhren mit Schattenstab und Skalen gab es schon im 3. Jahrtausend v. Chr. Die Griechen übernahmen sie und die Zwölfteilung des Tages von den Babylonier. Die Uhren waren zur damaligen Zeit bereits an öffentlichen Plätzen aufgestellt, etwa an Gebäuden, Tempeln, Privathäusern und Villen. Das dritte vorchristliche Jahrhundert brachte die Lösung eines bis dahin schwer wiegenden Problems, nämlich die Korrekturmöglichkeit für die jeweilige geografische Breite. Von da an zeigten die antiken Sonnenuhren stets die Temporalstunden für einen bestimmten Breitengrad an. Die Sonnenuhr des Kaisers Augustus, das Horologium Augusti, war eine Horizontaluhr, ihr «Zifferblatt» lag auf dem Erdboden. Als Schattenwerfer diente ein dreissig Meter hoher Obelisk mit einer Kugel auf der Spitze. Der Schatten dieser Kugel wies auf die im Boden des grossen Platzes eingelassenen Kupfermarken.

Die Sonnenuhren des Mittelalters und der frühen Neuzeit waren üblicherweise an der Südwand eines Gebäudes angebracht. Doch die Menschen wollten auch unterwegs auf die Uhr sehen können. Der Bauernring - ein senkrecht zu haltender Ring mit einem je nach Jahreszeit zu verschiebenden Loch für den Sonnenstrahl - stellte eine einfache Taschensonnenuhr dar. Und ein Astrolabium planisphaerium war bereits bei den Arabern in Gebrauch.

Im zehnten Jahrhundert wurde daraus der Sonnenquadrant entwickelt. Der trug an seiner Oberkante zwei Plättchen, durch welche man den Sonnenstrahl fallen liess. Mittels eines Lotes konnte man dann den Höhenwinkel messen. In seinem «Instrument Buch» beschreibt Peter Apian den Aufbau seines Quadranten. Von der Vorderseite, dem «Angesicht», liefert er vier Varianten, so dass das Instrument vom Benutzer je nach Bedarf für die geografischen Breiten von  $41^\circ$  bis  $52^\circ$  gebaut werden kann. Die Rückseite besteht aus Grundplatte mit aufmontierten beweglichen Scheiben und einem Zeiger.

### Vorläufer des Quadranten

Vom Quadranten entstanden zahlreiche Abarten, die sich sowohl hinsichtlich Form als auch in der Auswahl der Ablesemöglichkeiten unterschieden. Das Venezierschiff, Navicula de Venetiis, wurde wohl im vierzehnten Jahrhundert erfunden und war eine kleine, senkrecht zu haltende Reisesonnenuhr in Schiffsform mit hohem Bug und Heck, über die man die Sonne anpeilen konnte. Der Mast war je nach Jahreszeit verstellbar, und durch einen an ihm angebrachten Schieber konnte die Polhöhe eingestellt werden. Ähnlich ist auch das Folium

populi von Peter Apian aus dem Jahr 1533 aufgebaut. Es besitzt einige bewegliche Teile sowie wiederum zwei Peilmarken. Es sieht wie ein Pappelblatt mit Stiel aus und besticht durch seinen raffinierten Aufbau. Was den Sonnenuhren also gemeinsam ist, ist vor allem die Verschiedenartigkeit der Form und Funktionsweise. Manche Taschenmodelle bestehen aus aufklappbaren Täfelchen, andere aus Ringen. Faszinierend ist an ihnen vor allem die breite Formensprache: Jedes Modell besitzt eine individuelle Ästhetik und muss vom Besitzer erst einmal kennen gelernt werden. Wahrscheinlich macht dies die besondere Ausstrahlung der Sonnenuhren aus: dass derart verschiedenen ausschende Geräte immer dieselbe Zeit anzeigen...

Von Alexander Glück



» BASLER ZEITUNG / 20.03.2002

Erschienen am: 20.03.2002

## Weshalb der Frühling immer früher beginnt

Nur drei Mal werden wir in diesem Jahrhundert den Frühlingsbeginn am 21. März feiern können. Sonst beginnt die Blütezeit fast immer einen oder gar zwei Tage früher. Der Kalender ist durcheinander geraten, weil das Jahr 2000 im 16. Jahrhundert zum Schaltjahr bestimmt worden ist.



### Die Tücke der Schaltjahre.

Weil Papst Gregor XIII. anno 1582 das Jahr 2000 ausnahmsweise zum Schaltjahr erhoben hat, beginnt der Frühling im laufenden Jahrhundert meist einen Tag zu früh. Fotos Ullstein/AKG Berlin

Heute Abend um 20.16 Uhr MEZ wird die Erde auf ihrem Flug um die Sonne herum einen ganz besonderen Punkt erreichen: Trotz der schiefen Erdachse wird die Sonne in diesem Moment ganz genau senkrecht auf den Äquator der Erde scheinen, und zwar auf einen Punkt einige hundert Kilometer östlich der Galapagos-Inseln im Pazifik. An diesem besonderen Tag geht die Sonne praktisch überall ziemlich genau im Osten auf, wandert fast genau zwölf Stunden lang über den Himmel, geht fast genau im Westen wieder unter. Mit dieser ersten Tag- und Nachtgleiche im Jahr beginnt per Definition der astronomische Frühling. Aber Moment mal: Sollte der Frühling denn nicht erst am 21. März sein blaues Band flattern lassen? Im nächsten Jahr ist das auch tatsächlich wieder der Fall. Denn weil die Erde für einen vollen Umlauf um die

Sonne eben nicht genau 365 Tage braucht, sondern fast sechs Stunden länger, rutscht auch der Frühling nächstes Jahr um fast sechs Stunden weiter nach hinten auf dem Kalender und somit wieder in den 21. März hinein. Ohne Korrekturen würde sich der Frühlingsbeginn auch weiterhin Jahr für Jahr um sechs Stunden verspäten. Schon im Jahr 2007 wäre somit erst ab dem 22. März Frühling. Und im Jahr 2100 würde der Kalender gar schon den 11. April anzeigen...

### **Schon unter Cäsar**

Um zu vermeiden, dass der Frühling auf diese Weise im Laufe der Zeit quer durch den Kalender wandert, wurde schon zu Cäsars Zeiten das Schaltjahr erfunden: Alle vier Jahre gibt man der Erde im Februar einen zusätzlichen Tag Zeit, an dem sie ihren Rückstand gegenüber dem Kalender wieder aufholen kann. Im Schaltjahr 2004 fällt der Frühlingsbeginn deshalb wieder zurück auf den 20. März. Ohne Schaltjahr würde er erst am 21. März beginnen. Wegen des Schaltjahrs aber wird der Frühlingsbeginn erst im Jahre 2007 wieder in den 21. März fallen, dann aber zum vorletzten Mal in diesem Jahrhundert! Danach wird der Frühling für lange Zeit nur noch einmal am 21. März beginnen, nämlich 2011, wenn auch nur noch ganz knapp um 0.22 Uhr. Und danach wird er durchgehend in diesem Jahrhundert einen oder sogar zwei Tage früher da sein: Insgesamt 79 Mal in diesem Jahrhundert schon am 20. März und erstmals im Jahre 2048 und dann noch weitere 17 Male sogar schon am 19. März.

Denn zum Leidwesen der Kalendermacher fliegt die Erde ein bisschen zu schnell für eine einfache Schalttags-Kalenderkorrektur im 4-Jahres-Rhythmus. In Wahrheit dauert ihr Umlauf um die Sonne nämlich nur 365 Tage, 5 Stunden, 48 Minuten und 45

Sekunden. Mit einem vollen Schalstag nach jeweils vier Jahren gibt man der Erde also rund 45 Minuten zu viel Zeit. Sie holt deshalb jedes Mal nicht nur ihren Rückstand gegenüber dem Kalender wieder auf, sondern erreicht markante Bahnpunkte wie etwa den Frühlingspunkt mit jedem neuen Schaltjahr sogar um weitere 45 Minuten früher. Spätestens im 16. Jahrhundert konnten die Verantwortlichen der katholischen Kirche nicht mehr übersehen, dass dieser kleine, aber sich alle vier Jahre wiederholende Zeitvorsprung der Erde sich im Laufe von eineinhalb Jahrtausenden zu einem riesigen Kalenderproblem aufsummierter hatte: Der Frühling begann in jener Zeit jedes Jahr bereits um den 11. März herum. Und damit geriet auch Ostern zunehmend in Terminnöte. Denn seit dem Konzil von Nicäa im Jahre 325 n. Chr. muss Ostern jeweils am ersten Sonntag, der auf den ersten Vollmond nach Frühlingsbeginn folgt, gefeiert werden.

### **Gregors Kalenderkur**

Im Jahre 1582 verfügte Papst Gregor XIII. deshalb eine radikale Kalenderkur: Damit der Kalender die ihm damals um zehn Tage vorausseilende Erde wieder einholen konnte, liess er diese zehn Tage einfach ausfallen. Auf den 4. Oktober 1582 folgte sofort der 15. Oktober! Und um den Kalender ein bisschen zu beschleunigen und damit dem Flug der Erde um die Sonne anzupassen, verfügte Papst Gregor XIII. eine weitere Regelung: In Zukunft sollten in jeweils 400 Jahren insgesamt drei Schaltjahre ausfallen. Deshalb waren die Jahre 1700, 1800 und 1900 Normaljahre mit jeweils 365 Tagen. Das Jahr 2000 war dagegen wieder ein Schaltjahr.

Mit diesem ersten Schaltjahr aber nach 400 Jahren, dessen Jahreszahl durch hundert teilbar war, rutschte auch der Frühlingsbeginn im Kalender wieder etwas nach vorn in Richtung 20. März. Und da wir bis zum Jahre 2096 getreulich auch weiterhin alle vier Jahre unsere Schaltjahre einfügen werden, wird der Frühling dadurch jedes Mal um weitere 45 Minuten vorverlegt und immer häufiger sogar schon am 19. März eintreffen. Erst mit den ausfallenden Schaltjahren 2100, 2200 und 2300 wird sich der Frühlingsanfang jeweils wieder etwas verspäten und allmählich wieder in Richtung 21. März rücken.

\* Otto Wöhrbach ist Leiter des Richard-Fehrenbach-Planetariums in Freiburg i. Br.

Von Otto Wöhrbach\*

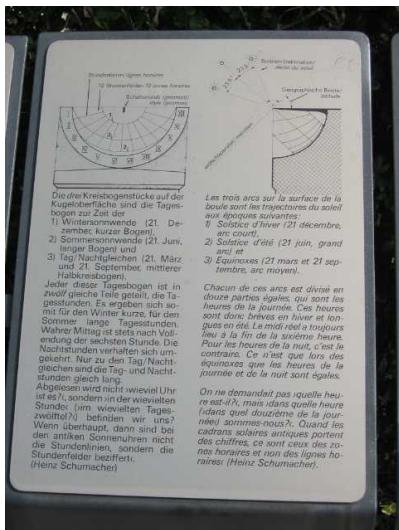
## 7.2 Beispiele spezieller existierender Uhren



P. 2: Augusta Raurica: Römische Sonnenuhr



P. 3: Detail (Kopie, Original aus Grenoble)



P. 4: Orientierungstafel 1

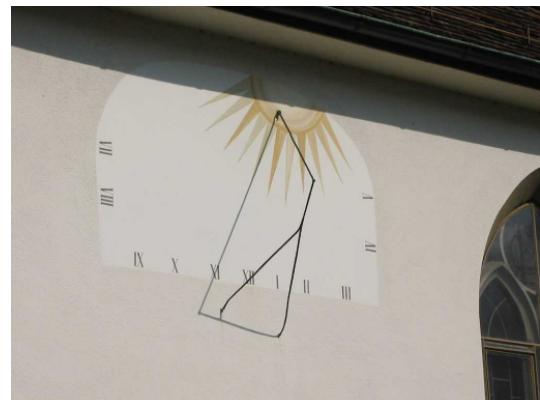


P. 5: Orientierungstafel 2

Früher sah man an Kirchen oft Sonnenuhren. Sie dienten dazu, die Räderuhr am Turm zu richten, bei schönem Wetter natürlich...



P. 6: Kirche in Mumpf bei Stein-Säckingen



P. 7: Uhr an der Kirche Mumpf



P. 8: Johanniterkommandatur Rheinfelden



P. 9: Rest. Sonne, Möhlin, Datumslinien



P. 10: Haus, Altstadt Rheinfelden



P. 11: Haus, Altstadt Rheinfelden



P. 12: Uhrengarten, HTA Muttenz



P. 13: Erklärungstafel, HTA Muttenz

Die nachstehend dargestellte Monduhr zeigt durch die Grösse der Wasseroberfläche den momentan sichtbaren Anteil der Mondoerfläche. Die Steuerung der Wassermenge erfolgt mechanisch durch ein Pumpensystem. (Uhrengarten HTA Muttenz, Realisation: Rudolf W. Lauri.)



P. 14: Monduhr, Teil 1, Muttenz



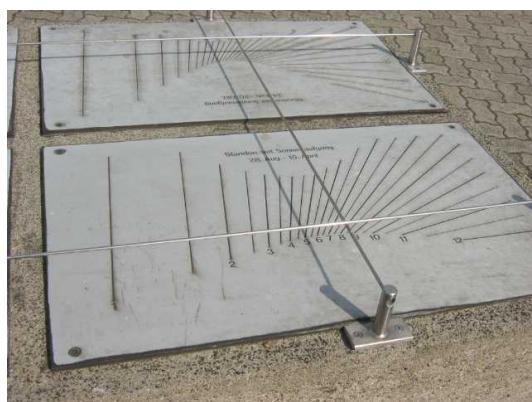
P. 15: Monduhr, Teil , Muttenz



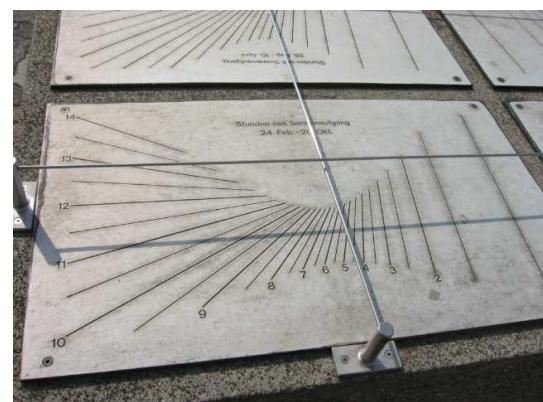
P. 16: Stunden seit Sonnenaufgang, Muttenz



P. 17: Stunden seit Sonnenaufgang, Muttenz



P. 18: Stunden seit Sonnenaufgang, Muttenz



P. 19: Stunden seit Sonnenaufgang, Muttenz



P. 20: Foster–Lambert–Uhr, Muttenz

Bei dieser Foster–Lambert–Uhr (analematische Sonnenuhr) ist neben der Position des Polstabes entsprechend dem Datum auch der Zifferblattring verstellbar (mittlere Zeit!). Die Zifferblattenteilung ist wie bei einer Poluhr gleichmässig.



P. 21: Foster–Lambert–Uhr, Detail



P. 22: Foster–Lambert–Uhr, Detail

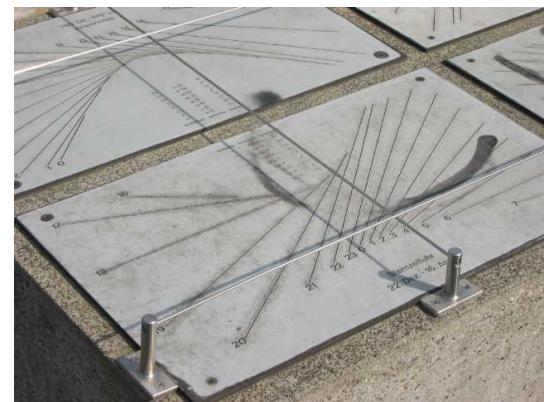


P. 23: Sternzeit-Uhr Muttenz



P. 24: Sternzeit-Uhr, Detail

Wie man sieht, kennen „Vandalen“ heutzutage keine Hemmungen, der Öffentlichkeit zugedachte Kulturgüter für ihre Zwecke zu entfremden... Wem nützt solche Zerstörung?



P. 25: Sternzeit-Uhr, Detail



P. 26: Mittlere Zeit, babylonische, italienische Stunden, an der HTA Biel



P. 27: Lage der Sonnenuhr an der HTA Biel



P. 28: Walzenuhr für mittlere Zeit im botanischen Garten der Universität Basel, bei St. Jakob



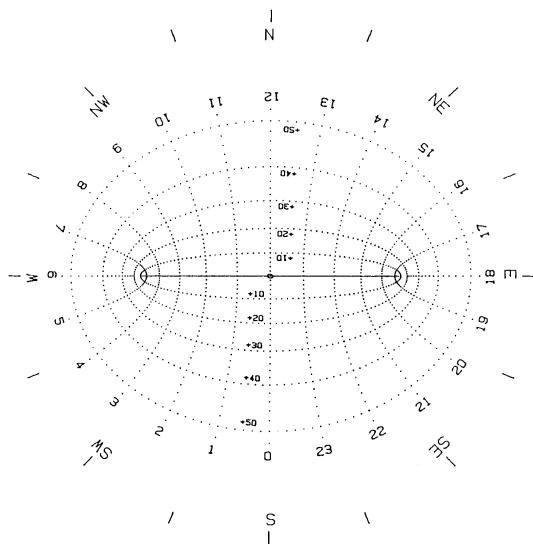
P. 29: Walzenuhr, Detail



P. 30: Walzenuhr, Detail



P. 31: Walzenuhr, Detail



P. 32: Sonnenkompass nach H. Schilt

Die nebenstehende Figur zeigt einen Sonnenkompass für die nördlichen Breiten. Die Breite wird auf den Hyperbeln abgelesen. Der Abstand benachbarter Punkte entspricht hier 2 Grad. Die Zeit wird auf den Ellipsen abgelesen. Der Abstand benachbarter Punkte beträgt auf diesen Kurven 10 Minuten. Die Stundenzählung erfolgt ab Mitternacht.

Beispiel am Prunkbau: Rokoko-Dom, Sommerresidenz des Fürstbischofs von Basel in Arlesheim und Basler Münster:



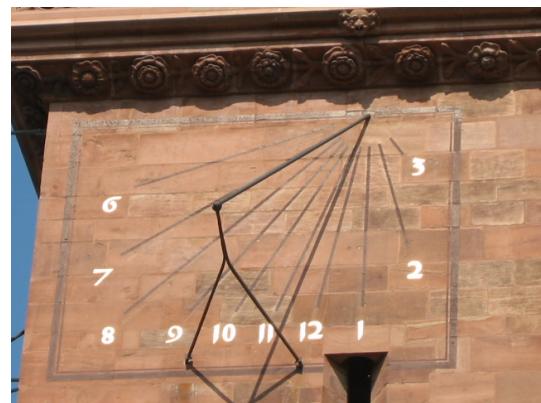
P. 33: Domplatz, Arlesheim



P. 34: Sonnenuhr am Domplatz



P. 35: Sonnenuhr am Domplatz Detail



P. 36: Eck-Sonnenuhr am Basler Münster



P. 37: Eck-Sonnenuhr am Basler Münster



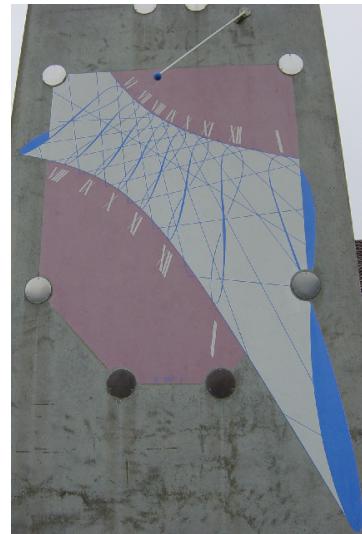
P. 38: Eck-Sonnenuhr am Basler Münster

↔

↔



P. 39: Sonnenuhr von H. Schild in Vignelz  
(Strasse Biel–Neuchâtel)



P. 40: Sonnenuhr in Gals

Die nachfolgend wiedergegebenen Bilder sind freundlichesweise vom Entwickler und Prodzenten der Sonnenuhr Helios, Dr. Carlo Heller, zur Verfügung gestellt worden. Die Home-Page von Helios finden sich unter:

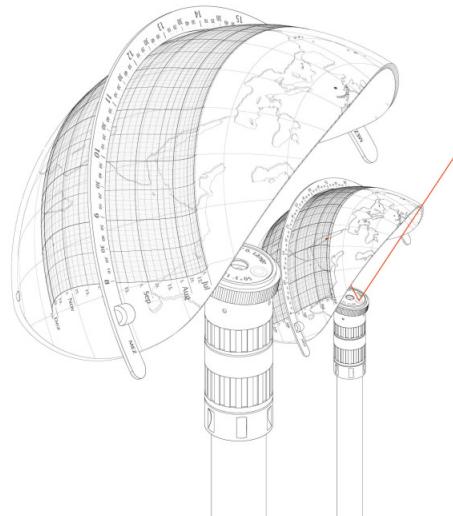
<http://www.heliosuhren.de/>

Weitere Links dazu finden sich auf:

<http://www.rowicus.ch/Wir/Links/Linkpage1.html#Sonnenuhren>



P. 41: Helios-Sonnenuhr, Ansicht



P. 42: Helios-Sonnenuhr, Prinzip

## Kapitel 8

# Anhang: Mathematica-Material, Module

Eine kleine Sammlung an lauffähigen *Mathematica*-Sequenzen und Modulen findet der Leser auf dem Internet via die Home-Page des Autors — oder direkt unter den Adressen:

Die Sammlung der *Mathematica*-Sequenzen, die im Skript im Text eingestreut sind, finden sich unter:

<http://www.rowicus.ch/Wir/Scripts/Sonne.nb>  
(*Mathematica*-File für Version 4.0/4.1. Sollte auch unter 3.x laufen.)

Die *Mathematica*-Sequenzen als PDF-File:

<http://www.rowicus.ch/Wir/Scripts/SonneMathematica.pdf> (PDF-File.)

Eine Sammlung von **Mathematica-Modulen**, mit denen man auch einen Zeitschlaufen-Plot einer Sonnenuhr an einer schrägen Wand erstellen kann, findet sich unter:

<http://www.rowicus.ch/Wir/Scripts/SonneModule.nb>  
(*Mathematica*-File für Version 4.0/4.1. Sollte auch unter 3.x laufen.)

Der Graphik-Output ist in Post-Script (EPS) verfügbar (aber auch in BMP, EMF, WMF, BTF, WAV) und kann so einfach elektronisch weiter verarbeitet und vergrössert werden.

Viele **Internet-Links** zu allen Themen sind zu finden unter

<http://www.rowicus.ch/Wir/Links/Linkpage1.html> oder unter  
<http://www.rowicus.ch/Wir/Links/Linkpage2.html> oder unter  
<http://www.rowicus.ch/Wir/Links/Linkpage3.html>



# Literaturverzeichnis

- [1] Heinz Schilt, Ebene Sonnenuhren, Biel 1987, Bezug über [www.sonnenuhren.ch](http://www.sonnenuhren.ch) (Bibl.: A1)
- [2] H. R. von Graffenriedt, Compendium Sciotericum, Bern 1629 (Bibl.: A2)
- [3] Arnold Zenkert, Faszination Sonnenuhr, Verlag Harri Deutsch 1995 (Bibl.: A3)
- [4] Rudolf Suter, ... Mondbrunnen und Sonnenuhren ..., Basler Stadtbuch 1978 p. 99–103, Christoph Merian Verlag, Basel 1979 (Bibl.: A4)
- [5] Karlheinz Schaldach, Römische Sonnenuhren, Verlag Harri Deutsch 1998 (Bibl.: A5)
- [6] Heinz Bachmann, Vektorgeometrie, Sabe–Verlag (Bibl.: A6)
- [7] DMK/DPK, Formeln und Tafeln (Mathematik – Statistik – Physik), Orell Füssli–Verlag (Bibl.: A7)
- [8] Rolf Wirz, Script ◊ Math ◊ Ing, ◊ Algebra ◊ Algèbre ◊ kurz & bündig ◊ concis  
(DOWNLOAD: <http://www.rowicus.ch/Wir/Scripts/>)  
(resp. direkt ↗ <http://www.rowicus.ch/Wir/Scripts/KAlgGdf.pdf>), HTA Biel 1998/99 (Bibl.: A8)
- [9] Diverse Literatur zur Astronomie (sphärische Astronomie u.a.) wie z.B. Joachim Herrmann, dtv–Atlas zur Astronomie, Deutscher Taschenbuch–Verlag (Bibl.: A9)
- [10] A. Unsöld, B. Baschek, Der neue Kosmosm Springer–Verlag (2002 7. Auflage) (Bibl.: A10)
- [11] Hans–Heinrich Voigt, Abriss der Astronomie I, II, BI–Verlag Mannheim, Hochschulskripten (Bibl.: A11)
- [12] Becker, Friedrich: Einführung in die Astronomie, BI–Verlag Mannheim (Bibl.: A12)
- [13] M. Schürer, H. Suter, Drehbare Sternkarte Sirius, Verlag der Astronomischen Gesellschaft Bern (Bibl.: A13)
- [14] Diverses Atlas– und Kartenmaterial wie z.B. Times Weltatlas (Bibl.: A14)
- [15] Rohr, René: Die Sonnenuhren - Geschichte, Theorie, Funktion, Callwey, München 1982, vergriffen, ISBN 3-7667-0610-1 (Bibl.: A15)
- [16] Sonnenuhren–Handbuch des Arbeitskreises Sonnenuhren in der Deutschen Gesellschaft für Chronometrie 1990, beziehbar über [www.sonnenuhren.ch](http://www.sonnenuhren.ch), resp. DGC, Ziererweg 8, D-71254 Ditzingen. (Bibl.: A16)
- [17] Jenkins, G und Bear, M.: Sonnenuhren zum Ausschneiden; Ludwig 1997, ISBN 3-7787-3615-9 (Bibl.: A17)
- [18] Philipp/Roth/Bachmann: 'Sonnenuhren - Deutschland und Schweiz', Katalog der ortsfesten Sonnenuhren, Herausgeber : Deutsche Gesellschaft für Chronometrie, Bezug : DGC, Ziererweg 8, D-71254 Ditzingen (Bibl.: A18)

- [19] Schwarzinger Karl: 'Katalog der ortsfesten Sonnenuhren in Österreich', Herausgeber: Österreichischer Astronomischer Verein, Wien 1993, Bezug : Karl Schwarzinger, Am Tigls 76a, A-6073 Sistrans/Österreich, Tel u. Fax : 0043 / 512 / 37 88 68 (vergriffen). (Bibl.: A19)
- [20] Sigmund Heinz: "Sonnenuhren", neue Entwürfe und Modelle, 1. Auflage 1998, Eigenverlag Heinz Sigmund, Nüstenbacher, Str. 55, D-74821 Mosbach, Tel : +49 - 6261 - 17692 (Bibl.: A20)
- [21] Loske, L.M.: Die Sonnenuhren; Verständliche Wissenschaft Band 69, Springer, Berlin 1970 (Bibl.: A21)
- [22] Schumacher, H.: Sonnenuhren – Eine Anleitung für Handwerk und Liebhaber – Gestaltung, Konstruktion, Ausführung, Callwey, München, 3. Aufl. 1984, ISBN 3-7667-0725-6 (Bibl.: A22)
- [23] Sadler, H.: Sonne, Zeit und Ewigkeit - Alte Sonnenuhren, Die bibliophilen Taschenbücher Nr. 376, Harenberg, Dortmund 1983, ISBN3-88379-376-0 (Bibl.: A23)
- [24] Daniel: Sundials, Shire Album No. 176, Shire Publications, ISBN 0-85263-808-6 (Bibl.: A24)
- [25] Joachim Schultz, Rhythmen der Sterne, Philosophisch–Antroposophischer Verlag Goetheanum Dornach, Schweiz (Bibl.: A25)
- [26] Ruatti: Die Spur der Sonne, Athesia Verlag Bozen 1995, ISBN 88 -7014 -893 - 9 (Bibl.: A26)
- [27] CD "Sonnenuhren in Franken" Fotoclub Eckental mit über 400 Sonnenuhren –Tel. BRD 09126/7865 (Bibl.: A27)
- [28] Sonnenuhrfreunde Regio Basel <http://www.astro.unibas.ch/~parodi/sonnenuhrenfreunde/sfb.html> (Bibl.: A28)
- [29] Repliken-Verkauf, frei stehende Sonnenuhrtypen, <http://www.sonnenuhren.ch/> Robert Felix Rebasse 41 CH – 4085 Basel, Tel +41 61 681 23 24, Fax +41 61 631 10 34 (Bibl.: A29)

**Hinweis: Geographische Koordinaten von Biel (BE, CH): 47.09 N / 7.16 E.**

Achtung: Es existiert noch ein Biel im Wallis (CH) und eines in Spanien!

Die Koordinaten des Nullpunktes der Schweizerischen Landeskarte ist die alte Sternwarte von Bern:

$$\lambda = -7^\circ 26' 22''.3, \quad \varphi = 46^\circ 57' 07''.9$$

- [30] Diverse Internet–Links unter ~> <http://www.rowicus.ch/Wir/pwf/sonne/g.html> (Bibl.: A30)

### Bildernachweis:

Bild Seite **ii**: Astronomie–Instrumente aus der Renaissance–Zeit./ Ausschnitt aus Holbeins Bild „Die französischen Gesandten am englichen Hof...“ von 1533:  
Originalbild in der National Gallery London. Detail entnommen aus „Paul Ganz, Hans Holbein der Jüngere, Gesamtausgabe der Gemälde, Phaidon, 1949.“

Die Photographien auf den Seiten **119** bis **125** stammen vom Autor.

Ende Script