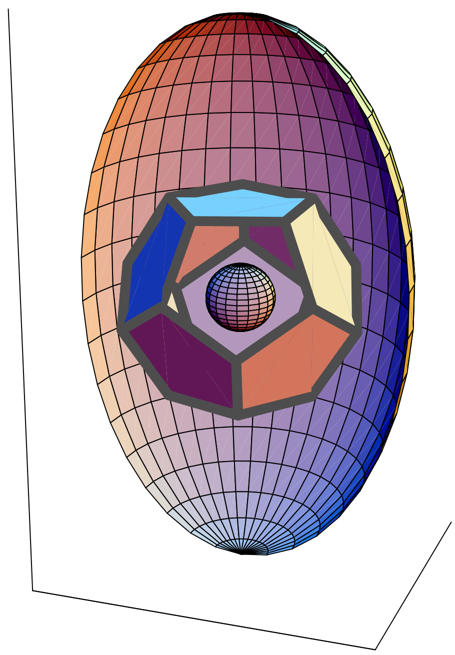
◇ Mathematikkurs für Ingenieure ◇ Teil 6 a ◇

◇ Crash-Kurs ◇

◇ Klassische Wahrscheinlichkeit / Kombinatorik ◇



von

Rolf Wirz

Ingenieurschule Biel / BFH–AHB / BFH–TI

Nach den NeXT–Crash von 1999 restaurierte Ausgabe

V.1.2.4 d 7. August 2012 **Deutsche Version, nicht übersetzt**

WIR / NeXT / Win98 / Win XP / LaTex/Teil6aCrashKurs.tex

Neufassung von Teil 6 eines Repetitoriums und Textbuchs zur Begleitung und Ergänzung des Unterrichts.
Produziert mit LaTeX auf NeXT-Computer/ PCTeX WIN98 / Win XP.

Einige Graphiken sind auch mit *Mathematica* entstanden.

Alles wird einfach — wenn man nur das Komplexe an allen Dingen weglässt. Alles wird einfach — wenn man so denkt wie die einfachen Leute.

Aus den derben und gemeinen Sprüchen des Professors Gagarosto

Glück hilft manchmal, Arbeit immer ...

Brahmanenweisheit

Aktuelle Adresse des Autors (2007):

Rolf W. Wirz-Depierre
Prof. für Math.
Berner Fachhochschule (BFH), Dep. AHB und TI
Pestalozzistrasse 20
Büro B112 CH–3400 Burgdorf/BE
Tel. ++41 (0)34 426 42 30 / intern 230
Mail: Siehe http://rowicus.ch/Wir/indexTotalF.html unter „Koordinaten von R.W.“
Alt: Ingenieurschule Biel (HTL), Ing'schule des Kt. Bern, Fachhochschule ab 1997) // BFH HTA Biel // BFH TI //

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Liebe Leserin, lieber Leser,

Das Thema *Kombinatorik* ist ein klassischer Bestandteil des Mittelschullehrplans. Gleiches gilt für die ersten Schritte in die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Auch an technischen Berufsmittelschulen sollte es eigentlich behandelt werden. Doch was, wenn ein Student aus irgendwelchen Gründen gerade diesem Stoff an der Schule nie begegnet ist — oder ihn gar vergessen hat? Dann heisst es eben „nacharbeiten“ und „repetieren“. Daher ist dieser Text erstens als *Repetitorium* und als *Ausbau* gedacht.
Die Wichtigkeit der Kombinatorik und der Wahrscheinlichkeitsrechnung für den Weg durch die weitere Mathematik ist unbestritten. Es sind Werkzeuge zur Lösung von Problemen, die manchmal unverhofft an einem herantreten. Geradezu grundlegend ist das Thema aber für das Wissensgebiet „affirmativen Statistik“ und der „Prognostik“.
Dieser Text liegt in Skriptform abgefasst vor. Das bedeutet, dass er in äusserst knapper Fassung nur das wesentliche Skelett des zu lernenden Stoffes wiedergibt. Für weitere, ausführliche Erklärungen, Beispiele, exakte Beweise und ergänzende Ausführungen, vor allem betreffend der Wahrscheinlichkeit, ergeht daher an den Studenten der Rat, ein oder mehrere Lehrbücher beizuziehen.
Studieren bedeutet zu einem wesentlichen Teil, sein Wissen selbständig mit Hilfe der Literatur zu erweitern, streckenweise sogar selbständig zu erarbeiten, zu festigen und anzuwenden. Ein Skript ist dabei nur ein Wegweiser, also nie ein Lehrbuchersatz. Welche Lehrbücher jemand verwenden will, ist jedem freigestellt. Das Thema Kombinatorik findet man in praktisch allen Unterrichtswerken für die klassische Gymnasialstufe. Bezüglich der Fachhochschulliteratur sei auf das Beispiel Brenner, Lesky, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 1, verwiesen. Weitere Beispiele finden sich meistens in grosser Zahl in den Hochschulbibliotheken.

Im Sommer 1997, aufgefrischt im Herbst 2009 Der Autor

Kapitel 1

Zum Begriff der Wahrscheinlichkeit

1.1 Über „Wahrscheinlichkeit“ und „Zufall“

1.1.1 Wahrscheinlichkeit und Zufall

Was ist mit „Wahrscheinlichkeit“ gemeint?

„Wahrscheinlichkeit ist das Dingwort (Substantiv) zum Eigenschaftswort (Adjektiv) „wahrscheinlich“. Dieses erkennt man als Zusammenzug von „wahr scheinlich“ in der Bedeutung von „wahr scheinend“. „Wahr scheinend“ aber steht im Gegensatz zu „wahr seiend“. Mit „Wahrscheinlichkeit“ meint man daher, dass die betreffende Sache nicht unbedingt wahr sei, sondern nur so scheine. Die Sache könne daher auch durchaus falsch sein. Die dabei angegebene Wahrscheinlichkeitszahl steht als Gradmesser der Erwartung von Wahrheit. Bei einer hohen Wahrscheinlichkeitszahl erwartet man das Eintreffen der angesprochenen Sache sehr stark. Bei einer tiefen dagegen ist die Erwartung sehr schwach. Über die Sicherheit wird dabei im Einzelfalle nichts ausgesagt, denn es könnte alles auch anders eintreffen, als man es erwartet.

Was ist mit „Zufall“ gemeint?

Bei sprachlichen Konstruktionen wie etwa bei „Wahrscheinlichkeit“ oder bei „Zufall“ taucht ein neues Problem auf: Das Problem der Sinnhaftigkeit abstrakter Begriffe. Solche Begriffe bezeichnen nicht etwa Dinge der sinnlichen Erfahrungswelt, so konkrete Begriffe etwa wie z.B. „Tisch“ oder „Teller“. Abstrakte Begriffe lernt man als Kind nicht aus der eigenen Erfahrung kennen. Sie gehören zum Kulturschatz, den man sich erst mühsam erarbeiten oder erlernen muss wie z.B. die meisten Begriffe der Mathematik. Abstrakte Begriffe haben eine Begriffsgeschichte, eine Konventionsgeschichte und können ihre Bedeutung mit der Zeit auch ändern.
Man kann sagen, dass folgender Sachverhalt wohl feststeht: Mit dem Eigenschaftswort „zufällig“ drückt der Betrachter einer Sache eine Beziehung eines Beobachters zur besagten Sache aus. „Das Unwetter kam für mich zufällig“ meint, dass der Sprecher das Eintreffen des Unwetters nicht persönlich vorausgesehen hat. Es ist ihm einfach „zugefallen“. Was andere in dieser Sache vorausgesehen haben, wird hier nicht angesprochen. Für den amtierenden Wetterfrosch z.B. muss das Unwetter keineswegs Zufall gewesen sein, denn er hatte im Voraus aus vorhandenen Messdaten sein Resultat rechnerisch ermittelt und sogar als Prognose angeboten. Unser Freund, der jetzt verregnet worden ist, konnte das Angebot deshalb nicht annehmen, weil es ihn nicht erreicht hatte. Schade.

Ähnlich verhält es sich, wenn Hans Hansen am Morgen nichts ahnend zur Haustür heraustritt und gleich von einem neben dem Türpfosten versteckt lauernden Mann eine Ohrfeige kassiert. Für Hans Hansen ist das ein unglaublicher, schlimmer, schmerzhafter Zufall, denn das hätte dieser friedfertige Mensch nie erwartet. Für den Spender der Ohrfeige war es aber gewiss Absicht, denn jener hat dem Hans Hansen schon lange aufgelauert und sein Werk mit Hochgenuss ausgeführt. Vermutlich aus Rache, weil ihn Hans

Hansen einmal auf der Strasse vor zwei Jahren öffentlich zurechtgewiesen hatte, als er seinen Fischabfall einfach auf ein fremdes Autodach geschleudert hatte. Hans musste das längst vergessen haben. Der Spender der Ohrfeige übrigens auch. Nur seine Wut auf Hans ist geblieben, denn er war in seinem tiefsten Kern schon immer herabgewürdigt wie auch seiner Freiheit beraubt worden. Die ständigen Zurechtweisungen mochte er nicht mehr. Die Zufälligkeit verhält sich daher hier relativ zum Betrachter. Für Hans war es Zufall. Für den Schläger der Ohrfeige nicht.

Zufällig ist eine Sache für jemanden daher sicher dann, wenn der Betroffene für das Eintreffen der Sache keine Regeln ausmachen kann. Das bedeutet jedoch keineswegs, dass es keine Regeln dafür gibt. Denn es gibt ja immer auch Regeln, welche man noch nicht kennt, welche man vielleicht erst in den Wissenschaften neu entdecken wird und welche man daher vor ihrer Entdeckung nicht exakt kennen konnte. Es ist geradezu die Aufgabe der Wissenschaft, immer wieder solche neuen Regeln zu entdecken. Gäbe es keine unbekannten Regeln mehr, so wäre die Entwicklung der Wissenschaft an ein Ende gekommen. Zudem kann man schon aus Komplexitätsgründen nie alles wissen. Denn es sind ja Regeln denkbar, welche sich aufgrund ihrer Kompliziertheit und Länge nie von einem menschlichen Wesen oder einer Maschine aufschreiben lassen werden, auch mit der grössten Geschwindigkeit nicht. Denn unsere Welt ist endlich, so wie auch jede in ihr vorkommende Geschwindigkeit. Nicht jeder sehr lange Prozess kann daher innerhalb unseres Universum zu unserer Zeit in unserer erreichbaren Umgebung auch ausgeführt werden, bis ein brauchbares Resultat vorliegt. Es gibt Ausdrücke, welche länger sind, als alles bei der gegebenen Endlichkeit Mögliche es je sein kann.
Wir unterscheiden daher zwischen der Menge der wissbaren und in Zeichen aufschreibbaren Fakten und der Menge der noch nicht von uns entdeckten Fakten sowie der Menge der nicht entdeckbaren Fakten, weil es dazu prizipiell, vielleicht aus Komplexitätsgründen, keine praktische Möglichkeit geben kann. Dazu gesellen sich noch die Irrtümmer, die man ebenfalls in einer Menge von wissbaren und in Zeichen aufschreibbaren Fakten zusammengefasst sich denken kann. Nie angeben könnte ein Mensch (oder auch ein anderes Wesen nicht) die prinzipiell nicht in Sprache oder Denkinhalte fassbaren Irrtümmer. Darüber sich auslassen zu wollen macht an dieser Stelle keinen Sinn. Denn solches übersteigt die uns zustehenden Mittel in jeder Weise. Die Frage nach solchem entpuppt sich als wiedersprüchliche Konstruktion wie etwa die Frage nach einem ebenen viereckigen Kreis mit vier Ecken auf dem Rande, an denen spitze Winkel zu finden sind. Oder die Frage nach einem ebenen Dreieck mit einer Winkelsumme von π^2 im Bogenmass.

Eine der bekannten „Frage nach dem absoluten Zufall“ vergleichbare Frage

Frage: „Wo ist das Nichts im Innern einer leeren Büchse?“

Im Innern einer leeren Büchse hier auf Erden befindet sich normalerweise Luft. Schicken wir die Büchse offen ins Weltall, so existiert an jedem Ort im Innern dieser Büchse noch immer der Ort eines geometrischen Punktes. Dort findet man nach der Theorie auch immer die Anwesenheit materieller, physikalischer Felder. Ebenfalls verhält es sich so, wenn wir in der Büchse hier auf Erden Vakuum erzeugen.
An jedem Ort irgendwo im Bereich der Orte existiert so im Voraus immer schon ein geometrischer Ort, also nicht ein Nichts. Daher kann im Innern einer Büchse kein Nichts anzutreffen sein. Und überhaupt, könnte man ein Nichts denn je irgendwo oder irgendwie antreffen? Ist etwas, das es nicht gibt, je zu treffen, anzutreffen, womit man ja eine Begegnung von Angesicht zu Angesicht meint? Und weiter am Rande des Innern unserer Büchse: Im Material der Büchse oder gar aussen, wie verhält es sich dort mit dem Nichts?
Wir gehen davon aus, dass man die Büchse nicht aus dem Universum herausbringen kann. Man kann sie wohl zerstören, jedoch bleibt sie als Geschichte, in der Realität über die Zeit, als Gewesenes dann gleichwohl immer hier in ihrer Zeit. Gewesenes kann nicht ungewesen werden.
Abgesehen vom vermessbaren Ort haben wir im Material der Büchse wohl kein Nichts. Auch zwischen den Atomen nicht, denn wir reden heute ja von Feldern sowie auch von geometrischen Orten. Denn auch zwischen den Atomen und innerhalb dieser befinden sich Felder sowie geometrische Orte. In allfälligen Zwischenräumen existiert also immer mindestens der geometrische Ort. Auch aussen, soweit das Weltall reicht, verhält es sich so. Der Begriff des physikalischen Ortes lässt ist ferner ans Weltall gebunden, nicht

aber derjenige des geometrischen Ortes. Ein Ausserhalb des Weltalls können wir materiell nicht denken, wohl aber geometrisch, zum Beilspiel schon in der euklidschen Geometrie. Ein Nichts im Örtlichen kann so nie ein Es, also ein Objekt sein. Unser Denken und unsere Sprache handelt aber immer von Objekten. Ein Nichts kann daher nie in unserer Sprache ausgedrückt oder durch jemanden gedacht werden.
Die Sprache, und auch schon der Gedanke, lokalisiert das Nichts in sich als Gedankenkonstruktion oder als sprachliche Konstruktion. Formal ist das schon ein Etwas, ein gedankliches Etwas, also kein Nichts. Und wie wäre es mit einem nicht formalen Nichts? — Was nicht sprachlich ist, kann nicht angesprochen werden. Wissen über Existenz setzt Information voraus. Diese muss von irgendwo kommen. Das Nichts müsste daher Spuren hinterlassen haben. Damit wird es zum Spuren erzeugenden Etwas, bleibt also keineswegs ein Nichts.
Somit handelt es sich beim absoluten Nichts um eine sprachlich unkorrekte Konstruktion. Das sieht man auch, wenn man die Menge aller existierenden Dinge gedanklich nimmt, welche physisch real existieren oder welche einmal gedacht worden sind — und noch gedacht sein werden — um diese sich in einer Menge zusammengefasst vorzustellen. Ausserhalb der physikalisch existierenden und der gedachten Dinge befindet sich dann auch die Menge der nicht gedachten Dinge, welche in einer Menge noch möglich wären. Das ist nicht das Nichts. Eine Menge ist kein Nichts. Sie ist ein Etwas, ein Exemplar aus den Mengen.
“Nichts“ bezogen auf Mengen kann man als “nichts von“, “nichts von einer Sache“ sehen. Die Sache wäre vermutlich, sofern sie fassbar ist, als Menge B denkbar, als Teilmenge ($B \subseteq M$) einer anderen Menge M, einer Grundmenge somit, bezüglich der “nichts von jener Sache“ das Komplement, also die Mengendifferenz der „Sache“ A bezüglich der Grundmenge erscheint: $B = \bar{A} = M \setminus A$. Als Komplement ist immer minimal die leere Menge $\{\}$ denkbar, eine Menge ohne Elemente, aber immmer noch eine Menge mit der Mächtigkeit $|\{\}| = 0$ und daher nicht ein Nichts. Sie enthält nur “nichts von den unerwünschten Elementen“, also keines von den Elementen $a_k \in A$.
Auch die leere Menge ist nicht das Nichts, denn sie hat schon eine Mächtigkeit wie eben festgestellt, nämlich die Zahl null. Und selbst in der leeren Menge ist kein Nichts drin, denn sie ist leer von allem, daher also auch vom Nichts. Man landet hier bei einer Konstruktion wie derjenigen von Bertrand Russel, welche von einem Barbier handelt, der sich selber rasiert. Russel zeigt auf, dass bei dieser Konstruktion Regeln zur Anwendung kommen, welche man für die Benennungen von konkreten physikalischen Dingen wohl gebrauchen darf, die aber nicht automatisch auch für abstrakte Dinge Gültigkeit haben. Der entlarvt damit eine naive sprachliche Konstruktion im Abstrakten bezüglich Sinnhaftikgeit als Unsinn.
Das Nichts ist damit kein denkbarer Begriff, keine existierende Sache, sondern eine sprachliche, unüberlegte widersprüchliche Konstruktion einer abstrakten Sache, welche das einfache Denken in seiner Konsequenz weit übersteigt.
Fazit: Konstruktionen wie „das absolute Nichts“ kann man erzeugen, wenn man mit abstrakten sprachlichen Gebilden gedankenlos regelhaft so verfährt wie mit konkreten Dingen. Erst muss man ihre Sinnhaftigkeit prüfen, um sich von deren Existenzberechtigung zu überzeugen. Man kann sich vielleicht davon überzeigen, dass sich im Innern einer Büchse kein Goldstück befindet. Dann ist „nicht ein Goldstück“ drin, jedoch damit nicht automatisch das Nichts mit seiner Absolutheit an der Stelle eines Goldstücks.
Korrekt denken bedeutet daher sprachlich, begrifflich korrekt denken.

„Absoluter Zufall“ oder „absolutes Nichtwissen“?

Ebenso ist es unsinnig darüber nachzudenken, ob es den „absoluten Zufall“ oder etwa nur den „relativen“ (aus der Unwissenheit stammenden) Zufall gibt. Denn soweit reicht unser Denken nicht. Sind wir einmal mit einem unerklärbaren Phänomen konfrontiert, so finden wir nicht automatisch eine Handhabe um zu entscheiden, ob zu diesem Phänomen einmal eine Regel gefunden werden wird oder ob es vielleicht eine Regel gibt, welche so komplex ist, dass man sie schon der Komplexität wegen praktisch nicht zwingend finden kann. Ob zum Phänomen aber eine Regel in der Menge aller möglichen Regeln (nicht nur der heute oder auch später einmal zu unserem Wissen gehörenden Regeln) gehört, bleibt unserer Entscheidungsfähigkeit unnahbar. Denn über für den Menschen nicht fassbares, jedoch potentiell faktisch mögliches Wissen in Opposition zu nicht existierendem Wissen, also auf falschen sprachlichen Konstruktionen beruhendem vermeintlichen Wissen, lässt sich nicht streiten. Denn dazu sind uns keine Regeln

gegeben.
Die Frage nach dem „absoluten Zufall“ im Verlgeich zum besprochenen „relativen Zufall“ in der Angelegenheit Hans Hansen gehört somit zu den nicht sinnvoll gestellten Fragen.

1.2 Zur Entwicklungsgeschichte des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

1.2.1 Die Frage nach der Gewinnchance des Chevaliers de Méré

Am Anfang der Wahrscheinlichkeitsrechnung steht in der Neuzeit die unten gestellte Fragen des Chevaliers de Méré, Philosoph, Literat und begeisterter Spieler. Die Frage war an den Mathematiker, Physiker, Literaten und Philosophen Blaise Pascal gerichtet (1623 – 1662, Frankreich). Bemerkung: Die Fachkompetenzbezeichnungen Mathematiker, Physiker, Literat und Philosoph sind dabei nach dem heutigen Begriffsverständnis genommen zu verstehen.
Aus früheren Zeiten sind dem Autor keine vergleichbaren Fragen überliefert. Damit kann jedoch nicht behauptet werden, dass früher keine solchen Fragen gestellt worden sind.

Eine erste Frage (übersetzt in die heutige Sprechweise) des Chevaliers de Méré lautet:
Welche der beiden Varianten ist wahrscheinlicher: Beim Würfeln mit vier Würfen mindestens mit einem Würfel eine Sechs zu werfen oder beim Würfeln mit 24 Würfen mit zwei Würfeln mindestens eine Doppelsechs zu erhalten? — Wo ist die Gewinnchance gröser? (Die Antwort wird das „Méré-Paradoxon“ genannt.) Wie man sieht impliziert die Frage, dass vorgängig man schon eine Vorstellung von einer „Gewinnchance“ haben muss, um diese Frage überhaupt stellen zu können.
Pierre de Femat (ca. 1607 – 1665) soll dann geholfen haben, die Gewinnchancen genau zu ermitteln.

Eine zweite Frage ist angeblich etwa wie folgt überliefert: Wir betrachten die Situation, in der eine Münze wiederholt einmal geworfen wird. Für immer nur „Zahl“ erhält A einen Punkt und für immer nur „Kopf“ erhält B einen Punkt. A und B spielen. Wer zuerst 5 Punkte erzielt, gewinnt den Einsatz. Nach 7 Würfen hat die Person A 4 Punkte und die Person B 3 Punkte. Das Spiel wird abgebrochen, obwohl noch keiner 5 Punkte gesammelt hat. Welches ist hier die gerechte Aufteilung des Einsatzes: Nach Maßgabe der gewonnenen Spiele (das heisst 4:3) oder nach Maßgabe der noch fehlenden Spiele (also 2:1, denn B braucht noch 2 Punkte und A nur noch einen) oder überhaupt nach anderen Gesichtspunkten?
Man konsultiere dazu auch: `http://de.wikipedia.org/wiki/De-M%C3%A9r%C3%A9-Paradoxon` oder http://de.wikipedia.org/wiki/De-Méré-Paradoxon (falls der Link auf der momentan benutzten Maschine nicht klickbar ist, so kopiere man das URL in die Kopfzeile des Internet–Browsers.) Zu den Personen Méré, Pascal, Fermat, Huygens, Bernoulli Jakob I. und Laplace konsultiere man das Wikipedia

1.2.2 Klassischer contra statistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Die Urheber des klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs

Christiaan Huygens (1629 – 1665) und Jakob(I.) Bernoulli (1655 – 1705) haben die klassische Wahrscheinlichkeitsrechnung weiter entwickelt. Marquis Pierre Simon de Laplace (1749 – 1827) hat diese Rechnungsart dann ausformuliert. Daher sprechen wir von der „Laplace'schen“ oder der „klassischen“ Wahrscheinlichkeit.

Die klassische Wahrscheinlichkeit

Der Einfachheit halber studieren wir hier mit Vorteil das Modell eines idealen Würfels, bei dem gegenüberliegende Seiten immer exakt parallel und gleich weit voneinander entfernt sowie alle Kantenwinkel rechte Winkel sind. Das Material sei exakt homogen, ohne magnetische oder andere vergleichbare Anziehungseigenschaften und die angebrachten Bezeichnungen für die Augen oder Zahlen seien gewichtlos. Ebenso finde beim Würfeln keinerlei weitere Beeinflussung statt, etwa durch Wind, unebene, inhomogene Landeoberfläche u.s.w.

Unter diesen Voraussetzungen kann man postulierend feststellen, dass bei „zufälligem Abwurf“ kein Ergebnis vor allen andern ausgezeichnet sein kann. Die „Chancen“ für jede Zahl sind somit gleich sowie untereinander ohne Einfluss auf die Grösse des Resultats vertauschbar. Diese Symmetrieeingenschaft nennen wir „Gleichwahrscheinlichkeit“. Von ihr wollen wir bei den folgenden Betrachtungen ausgehen.

Sei m die Anzahl der möglichen Fälle und g die Anzahl der günstigen Fälle für ein betrachtetes Ereignis. Zum Beispiel betrachten wir beim Würfeln mit einem indealen Würfel das Ereignis „würfeln einer Zahl grösser als 4“. Günstig sind hier zwei Fälle, nämlich die 5 und die 6. Daher ist $g = 2$. Möglich sind hingegen 6 Fälle. Bekanntlich finden wir bei einem Würfel die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6. Also ist $m = 6$.
Die Gewinnchance drücken wir bei diesem Ereignis durch das folgende Verhältnis aus:

$$g : m = 2 : 6 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Dieses Vorgehen wollen wir bei der klassischen Wahrscheinlichkeit allgemein so halten. Wir definieren daher für diese Wahrscheinlichkeit:

$$P = \frac{g}{m}, \;\; g, m \in \mathbb{N}$$

P steht hier für franz. „probabilité“ oder engl. „probability“.

Die klassische Wahrscheinlichkeit wird somit hier durch ein Verhältnis von natürlichen Zahlen ausgedrückt. Da immer $0 \leq g \leq m$ gilt, finden wir:

$$0 \leq P = \frac{g}{m} \leq 1$$

Denn m ist ja die Anzahl aller Ereigisse, eine grössere Zahl gibt es bei einem betrachteten Experiment nicht. Ebenso kann $g = |G|$ nicht negativ sein.

Wenn $g = m$ gilt, so wird $P = \frac{g}{m} = \frac{m}{m} = 1$. In diesem Fall sprechen wir von einem **sicheren Ereignis**.
Wenn hingegen $g = 0$ gilt, so wird $P = \frac{g}{m} = \frac{0}{m} = 0$. Wir sprechen von einem **unmöglichen Ereignis**.

Weitere Beispiele zur klassischen Wahrscheinlichkeit

Wir wollen nun noch einen Fall studieren, in dem mit zwei Würfeln gewürfelt wird. Gefragt ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erzielte Summe der gewürfelten Zahlen kleiner gleich 3 ist.
Dazu bestimmen wir zuerst die Anzahl der günstigen Fälle g. Wenn wir einen roten und einen blauen Würfel benutzen, so kann beim roten Würfel die 1 kommen und beim blauen Würfel auch. Dann ist die Summe 2. Das erweist sich als die einzige Möglichkeit, um die Summe 2 zu erhalten. Für die Summen 3 gibt es jedoch 2 Möglichkeiten: 1 mit dem roten Würfel und 2 mit dem blauen. Oder auch 1 mit dem blauen Würfel und 2 mit dem roten. Weitere Möglichkeiten kann man nicht ausmachen, denn die Möglichkeiten $1 + 1 = 2$, $1 + 2 = 3$ und $2 + 1 = 3$ zur Bildung der Summe 3 sind damit ausgeschöpft. Die nächste Möglichkeit zur Bildung einer kleinen Summe wäre $1+3$ oder umgekehrt $3+1$ sowie $2+2$. Damit hätte man aber schon die Summe 4. Diese ist grösser als 3. Es gibt somit nur 3 günstige Möglichkeiten: $\Rightarrow \;\; g = 3$.
Um die Anzahl der möglichen Resultate m zu berechnen, argumentieren wir analog: Wenn man mit dem roten Würfel eine 1 würfelt, so kann dazu mit dem blauen eine 1, eine 2, eine 3, eine 4, eine 5 oder eine 6 erzielt werden. Das sind 6 Möglichkeiten. Wenn man mit dem roten Würfel eine 2 würfelt, so kann dazu mit dem blauen ebenfalls eine 1, eine 2, eine 3, eine 4, eine 5 oder eine 6 erzielt werden. Das sind wieder 6 Möglichkeiten. Ebenso gibt es 6 Möglichkeiten, wenn wir mit dem roten Würfel eine 3 erzielen. Genau gleich gibt es je 6 Möglichkeiten, wenn wir mit dem roten Würfel eine 4, eine 5 oder eine 6 erzielen. Somit hat man $6 \cdot 6$ Möglichkeiten, mit zwei Würfeln eine Summe zu bilden. Das macht total 36 Möglichkeiten. Damit ist $m = 36$.
Daraus ergibt sich, dass $P(Summe \;\leq 3) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = 0.083\overline{3}\ldots$ wird.

An diesem Beispiel wird klar, dass man es bei der Berechnung von g und m mit Abzählproblemen zu tun bekommt. Als Beispiel mag dazu noch das Lotto-Spiel dienen: Wieviele Möglichkeit m gibt es, aus 45 Zahlen 6 auszuwählen. Für g gibt es hier nur eine Möglichkeit, denn der Sechser ist immer eindeutig. Um solche Abzählprobleme zu lösen, ist die klassische Kombinatorik eine Hilfe, welche wir im nächsten Kapitel studieren wollen.

Da g und m Mächtigkeiten von Mengen sind, kommt bei der Behandlung der klassischen Wahrscheinlichkeit auch die Mengenlehre zum Zuge. Mengenoperationen sind hier wichig.

Statistische Wahrscheinlichkeitsmodelle

Stellen wir uns einen Händler vor, der rote und gelbe Socken verkaufen will. Um vor Saisonbeginn eine Bestellung aufgeben zu können, muss er irgendwie vorauswissen, mit welcher Chance ein Durchschnittskunde rote und mit welcher Chance ein solcher Kunde gelbe Socken kaufen wird. Ebenso muss er etwa den Umfang der Nachfrage in der Saison abschätzen können. Für diese Abschätzungen hilft ihm die klassische Wahrscheinlichkeitsrechnung kaum, denn er kann nicht davon ausgehen, dass der Verkauf eines Paares roter Socken gleich wahscheinlich ist wie der Verkauf eines Paares gelber Socken. Was also soll er tun?

Hier hilft ihm nur eine statistische Abschätzung weiter. Glücklicherweise hat unser Sockenhändler noch die Verkaufszahlen vom letzen Jahr zur Hand. Er hat mittels elektronischer Registrierung eines jeden Verkaufes durch seine Kasse eine Statistik erstellt. Daher kennt er nun die Häufikgeit des letztjährigen Verkaufs bei den roten Socken $H(rot)$ und auch diejenige bei den gelben Socken $H(gelb)$. Die totale Verkaufsmenge ist $H(rot) + H(gelb)$. Damit erhält er die relativen Häufigkeiten:

$$h(rot) = \frac{H(rot)}{H(rot) + H(gelb)} \text{ und } h(gelb) = \frac{H(gelb)}{H(rot) + H(gelb)}. \text{ Dabei gilt:}$$

$$0 \leq h(rot) = \frac{H(rot)}{H(rot) + H(gelb)} \leq 1, \;\; 0 \leq h(gelb) = \frac{H(gelb)}{H(rot) + H(gelb)} \leq 1$$

Man kann leicht sehen, dass die damit definierbare statistische Wahrscheinlichkeit sich nach den selben Regeln verhält wie die klassische, Laplace'sche Wahrscheinlichkeit. In der Praxis bleibt einem ja keine andere Wahl als mit dieser statistischen Wahrscheinlichkeit zu arbeiten. Das ist Pragmatismus wie ihn schon Descartes für die Modelle der Physik vorschlägt, denn weitere Informationen besitzt man ja nicht. Wenn trotzdem solche weiteren Informationen vorhanden wären, müsste man die relativen Häufigkeiten entsprechend gewichten, womit man sich das verwendete Modell ein wenig verkompliziert. Das dabei verwendete theoretische Gebäude stammt von Kolmogorow.

Das Realitätsdilemma

Wir wollen hier eine Geschichte diskutieren, welche sich auf einer Insel mit dem Namen Boayaky südlich von Samoa zugetragen hat.
Dort hat ein Eingeborener mit dem Namen Yuk im Beisein des Mathematikers Memo ein Würfelexperiment durchgeführt. Vor seiner Hütte sitzend und in Richtung Ost blickend hat er 5692 mal mit zwei nach menschlichem Ermessen als ideal akzeptierbaren Würfeln gewürfelt und dabei 5691 mal die Summe 2 erhalten und 1 mal die Summe 3. Das hat Memo dem Yuk dann nicht glauben wollen und scharf protestiert. Memo hatte während dem Experiment sehr aufmerksam den Vögeln zugeschaut. Er vermutete also gleich Betrug. Das sei Unfug, hat Memo dem Yuk ins Gesicht gesagt, worauf dieser sehr betroffen gewesen sei, denn das schien sehr beleidigend. Darauf sind die beiden übereingekommen, dass Memo jeden Wurf genau beobachten soll und dass das Experiment, troz seiner langen Dauer, wiederholt werden soll. Da hat Memo nicht schlecht gestaunt. Denn diesmal ist, nachdem sich Yuk wieder hingesetzt hatte, nun nach Westen blickend, 5690 mal die Summe 12 gekommen und 2 mal die Summe 11, entgegen jeder Erwartung von Memo. Denn Memo hatte nach der Theorie der

klassischen Wahrschienlichkeit je ein Verhältnis von $1 : 36 = \frac{1}{36}$ für die Summe 2 oder die Summe 12 erwartet. Yuk hat Memo darauf geantwortet, dass er sich jetzt überzeugt zeigen müsse, denn er müsse doch seinen eigenen Beobachtungen mehr Glauben schenken als seiner obskuren Theorie. Er habe ja jetzt selbst gesehen, dass die relative Häufigkeit und damit die statistisch abgestützte Wahrscheinlichkeit für die Summen 2 oder 12 praktisch 1 sei. Im ersten Fall sei sie etwa 0.999824 und im zweiten Fall etwa 0.999649. Und so ein Resultat sei ja nicht unmöglich. Es sie jetzt sogar statistisch erwiesen, denn es sei ja eingetroffen, wie man hätte sehen können. Die relativen Häufigkeiten und somit die statistischen Wahrscheinlichkeiten seinen zudem praktisch 1. Es sei also jeweils fast sicher, dass es so sein müsse: In den Fällen wo er mit dem Gesicht nach dem Osten würfle oder eben nach dem Westen.
Leider endet die Geschichte der Vorkommnisse auf Boayaky hier. Denn Memo sei am folgenden Tag mit seiner Jacht nach Samoa abgereist. Bevor er Gelegenheit hatte, die neu entdeckte Insel Boayaky genau zu erforschen, hatte sich in der Gegend ein Erdbeben ereignet. Ein Sunami hätte, so wird berichtet, die kleine und flache Sandinsel, samt allem was darauf lebte und wuchs oder in der Art der Eingeborenen gebaut war, einfach weggespühlt. Nun erzählt Memo überall, wo er vorbeikommt, seine Geschichte. Und niemand glaubt ihm diese. Die Leute sagen nur: „Armer Memo“, derweil Memo den Leuten sagt: „Armer Yuk“.

Nun wird das Geschehen zur Kriminalgeschichte. Und Memo, der jetzt fast immer ohne Freunde blieb, reiste viel in der Welt herum, um über sein Erlebnis Vorträge vor interessanten Leuten zu halten. So geschah es einmal, als er gerade vor der Handelskammer einer Stadt im Gebirge geredet hatte, dass ihn danach ein sehr böser und übel aussehender Kritiker sehr laut ansprach. Dieser Kritiker rechnete Memo die klassische Wahrscheinlichkeit der von Yuk erzielten Resultate vor. Danach lachte er öffentlich vor der Kamera über Memo, ja lachte ihn geradewegs durchs Mikrofon vor allen Leuten aus. Das war selbst für den sonst immer ruhigen Memo zu viel. Dieser sah den Kritiker verwirrt an und stellte murmelnd fest, dass von den etwa 1000 anwesenden Personen jener üble kritische Mensch der einzige war, der einem exakten Ein-Millimeter-Bürstenschnitt trug. Die Wahrscheinlichkeit für dieses Auftreten war also höchstens 10^{-3}. Ebenso war der Kritiker der einzige, welcher eine Tätowierung am Ohr trug. Die Wahrscheinlichkeit für dieses Auftreten war also wiederum höchstens 10^{-3}. Tätowierung und Bürstenschnitt sind unabhängige Dinge. Somit war die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Auftreten beider Phänomene zusammen höchstens $10^{-3} \cdot 10^{-3} = 10^{-6}$. Weiter trug der Kritiker unabhängig von diesen beiden Dingen kniehohe schwarze Lederstiefel. Also wieder mit einer Wahrscheinlichkeit für das Auftreten in solchen Stiefeln von höchstens 10^{-3}, zusammen damit höchstens von 10^{-9}. Weiter stank der Kritiker wie kein zweiter nach einer Mischung von Wein und Knoblauch. Wieder mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 10^{-3}, zusammen höchstens 10^{-12}. Weiter trug der Kritiker als einziger eine rote Lederhose. Wieder mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 10^{-3}, zusammen höchstens von 10^{-15}. Dann hatte er als einziger noch auf seinen Haaren einen violetten Kreis angefärbt, wieder mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 10^{-3}, zusammen nun mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 10^{-18}. Auf diese Weise entdeckte Memo noch viele andere seltsame und einzigartige Dinge am Kritiker, sodass Memo schliesslich für das Auftreten dieses einzigartigen Wesens eine Wahrscheinlichkeit von 10^{-153} berechnete. Nun folgerte er hieraus streng logisch, dass dieser überaus kritische Erdenbewohner trotz seiner üblen Anwesenheit praktisch nicht mehr zum Universum gehören könne, da die Wahrscheinlichkeit dafür praktisch beinahe null sei. Er stellte daher lauthals fest, dass es dieses kritische Wesen gar nicht geben könne, ja nicht geben dürfe! Denn seine Existenz widerspreche der dafür notwendigen Wahrscheinlichkeit. So zog Memo unverfrohren schnell sein Messer aus der Tasche — und stach den Kritiker mit einem Hieb nieder. Denn es gibt ihn ja nicht, so schrie er! Und trotzdem stand er ihm zuvor im Wege. Nur das Messer konnte Memos Wiederspruch beseitigen. Was nicht sein darf, verstösst gegen die Bedingungen der Existenz. Was nicht sein darf, das kann auch nicht sein. Damit ist es auch nie gewesen. Es hat keinerlei Existenz.

Darauf soll im grossen Saal ein schrecklicher Tumult entstanden sein. Menschen liefen durcheinander, schrien, weinten, stiessen sich an, rannten sich gegenseitig um. Dann ging auf einmal das Licht aus. Denn im Tumult muss jemand auf den Nachbar eingeschlagen haben. Und statt diesem hatte dieser Jemand den Lichtschalter getroffen. Irgendwie sind dann trotzdem einige noch unversehrt ins Freie gelangt. Diese fragten dann später in der Gegend herum, ob da wer sei der wisse, was weiter passiert sein könnte. Die Antworten nahmen ihre Richtungen weit auseinander. Einige Befragten waren fest der Meinung, dass Memo jetzt im Zentralgefängnis einsitze. Andere behaupteten, er habe fliehen können. Er sei längst über alle Berge, ja sogar ausser Landes abgehauen. Man hielt ihn für unauffindbar. Gewiss habe er sein Äusseres verändert, mit Hilfe von Gesichtchirurgie natürlich. Und überhaupt, den Memo könne man so umgeformt jetzt nie mehr ergreifen, da er nicht mehr zu erkennen sei. Wieder andere waren der Ansicht, dass das alles sehr unwahrscheinlich sein müsse. Wahrscheinlicher sei vielmehr, dass es den Memo nie wirklich gegeben habe. Es sei sogar fast sicher, dass diese Geschichte frei erfunden sei, von einem Journalisten nämlich, natürlich, denn man müsse ja Zeitschriften und Zeitungen verkaufen. Man brauche also gute Drehbücher für das Hirn der Leser, hart an der Grenze des Erträglichen, denn nur so liesse sich die Auflage des eigenen Druckerzeugnisses noch steigern. Und wenn man Memo inzwischen nicht gefasst hat, so sucht man ihn heute noch. Wegen seiner Tat. Aber vielmehr auch wegen seiner Geschichte, die ihm trotzdem niemand glaubt — die ihm nie jemand glauben wird.

Beispiel aus der Literatur: Zum Münzwurf

Buffon und Pearson haben je wiederholt eine Münze geworfen, wie man der einschlägigen Literatur entnehmen kann. Damit liegt ein beglaubigtes Datenmaterial vor zum Vergleich der klassischen, idealen und der statistischen Wahrscheinlichkeit:

	Anzahl Würfe	Anzahl „Kopf“	relative Häufigkeit $h(Kopf)$
Buffon	4040	2048	0.5069
Pearson	12000	6019	0.5016
Pearson	24000	12012	0.5005

Wie man vermutet, hat die oben beschriebene Boayaky–Situation eher Seltenheitsweert. Die Resultate zu den hier aufgeliesteten Münzwürfen überraschen dagegen nicht. Sie entsprechen wohl etwa den Erwartungen des „Durchschnittsbetrachters“. Der Leser möge die Resultate selbst interpretieren und kommentieren.

Zusammenfassung

Klassisch versteht man unter Chance oder Wahrscheinlichkeit eine Zahl, welche den Grad des „wahr Scheinens“ eines betrachteten Sachverhalts charakterisiert. „Wahr scheinen“ muss hier von „wahr seiend“, also von „wahr sein“ unterschieden werden. Diese genannte Zahl ist das Verhältnis von günstigen zu möglichen genau definierten Fällen, ein Quotient also von Anzahlen, welche man als Mächtigkeit je einer Menge von Fällen interpretieren kann. Damit hat man es hier mit Mengenlehre und mit Abzählproblemen zu tun. Als Beispiel seien die Würfelprobleme etwa erwähnt.

Beim klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff handelt es sich also um eine theoretische Zahl, die vorerst keine wesenhafte Verbindung zur praktischen Realität besitzt, denn der erwähnte Quotient ist eine gedachte Sache und keine praktisch erfasste relative Häufigkeit. In der praktischen Realität stellt man jedoch fest, dass diese theoretische Zahl mit gemessenen Häufigkeiten überraschend genau übereinstimmt. Dies ist ein induktiv oder heuristisch gewonnenes Ergebnis, also eine von vielen Leuten für evident gehaltene Erfahrung, welche so als eine „Erfahrungstatsache“ oder von andern auch als eine Interpretation der Erfahrung gewertet wird. Die klassische Wahrscheinlichkeit kann man daher als zulässiges Modell ansehen, das das Verhaltens des damit verbundenen Experiments in der Realität in guter Annäherung beschreibt. Die grosse Übereinstimmung von relativer Häufigkeit und theoretischer Wahrscheinlichkeit bedeutet, dass sich das Modell und die Realität analog verhalten. Man findet also hier eine Analogie vor und nicht etwa eine Kausalität.

Es gibt jedoch viele Fälle in der Praxis, wo der klassische Wahrscheinlichkeitsbegriff versagt. Auf der Grundlage der Theorie von Kolmogorow verwendet man hier dann eine statistische Interpretation der Wahrscheinlichkeit: Man interpretiert die durch Datenerfassung gefundene relative Häufigkeit als Wahrscheinlichkeit. Damit hat man einen Versuch zur Modellierung einer diesmal nicht genau bekannten Wahrscheinlichkeitsfunktion unternommen. Dieses pragmatische Vorgehen wält man als Reaktion auf das Fehlen weiterer Informationen. Es bleibt einem nichts anderes übrig, denn man kann eben in solchen Fällen keine Möglichkeiten oder günstige Fälle exakt unterscheiden und abzählen. Falls die modellierte Wahrscheinlichkeitsfunktion dann eine gute Übereinstimmung mit den realen mittleren Häufigkeiten liefert, kann man wiederum vom einem guten Modell reden, das man hier aus der Nachbildung des realen Verhaltens im Sinne einer Analogie der Äusserungen als Zahlenwerte und nicht auf der Grundlage etwa eines Ansatzes aus einem inneren Verständnis des Geschehens heraus gefunden hat, wie etwa durch geometrischer Überlegungen. Für die darauf erhaltenen Resultate ist es einerlei, wieviel man über die Grundlagen weiss. Ohne solches Wissen wird es allerdings schwierig sein, die Modellanwendungen auszudehnen. Wichtig ist jedoch, dass man in jedem der beiden Fälle bei Berechnungen gute Resultate erziehlt, was ja meistens auch den wichtigsten Beweggrund für solche Arbeiten befriedigt.

Kapitel 2

Zum Begriff der Kombinatorik

2.1 Übersicht über die elementaren kombinatorischen Fälle

In der klassischen Kombinatorik unterscheidet man 3 Fälle mit je zwei Ausprägungen. Es geht um die drei Fälle „Auswahl“, „Anordnung“ und „Auswahl mit anschliessender Anordnung“. Die Ausprägungen sind „mit Wiederholung“ und „ohne Wiederholung“. Bei den Auswahl– oder Anordnungsmöglichkeiten geht es um die Anzahl der verschiedenen möglichen Elementauswahlen oder die Reihenfolgen von ausgewählten Elementen. Eine Übersicht dazu bietet die nachfolgende Tabelle.

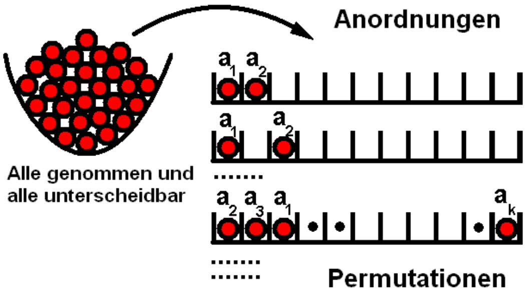
Anzahl Elemente $\|M\| = m$ Daraus $n_1, n_2, \ldots, n_k$ auswählen	Ohne Wiederholung	Mit Wiederholung
Alle wählen Nur **Anordnung** (Reihenfolge) Beispiel: Anzahl Wörter mit m gegebenen Buchstaben	Permutation o.W. $P_m = P(m)$ Alle Elemente sind unterscheidbar	Permutation m.W. $P_m(n_1, \ldots, n_k)$ Je n_j Elemente sind nicht unterscheidbar
k Elemente aus m Elementen wählen Nur **Auswahl** Beispiel: Mannschaftsauswahl bei einem FC.	Kombination o.W. $C(k, m)$	Kombination m.W. $\overline{C}(k, m)$
k Elemente aus m Elementen **auswählen und anordnen** Beispiel: Anzahl Wörter mit k beliebigen Buchstaben	Variation o.W. $V(k, m)$	Variation m.W. $\overline{V}(k, m)$

2.2 Formeln für die elementaren kombinatorischen Fälle

2.2.1 Anordnungen oder Permutationen ohne Wiederholung

Die Formel

Hier wollen wir untersuchen, auf wieviele mögliche Arten man m unterscheidbare Elemente in einer Reihenfolge anordnen kann. Anders gesprochen: Auf wieviele mögliche Arten kann man m unterscheidbare Elemente, z.B. verschiedene Bücher, in eine Rangfolge bringen, d.h. in unserem Beispiel auf einem Bibliotheksregal anordnen oder einreihen.



Ein konkretes Beispiel erhalten wir in der Frage, auf wie viele Arten man m nummerierte Studenten auf m nummerierte Stühle setzen kann. Das heisst: Wie viele Sitzordnungen gibt es zu einer Klasse von m Studenten.

Um dieses Problem zu lösen nehmen wir an, dass die Schulklasse vor der Tür wartet. Nun wird ein Student nach dem andern hinein gelassen. Der Ablauf präsentiert sich dann wie folgt:

1. Der Student mit der Nummer 1 wird hereingelassen. Ihm stehen m freie Plätze zur Auswahl. Er hat m Möglichkeiten sich zu setzen.

2. Der Student mit der Nummer 2 wird hereingelassen. Da der Student mit der Nummer 1 schon sitzt, stehen dem Studenten mit der Nummer 2 nur noch $m-1$ freie Plätze zur Auswahl. Zu jeder der m Platzierungen des Studenten mit der Nummer 1 hat der Student mit der Nummer 2 noch $m-1$ Möglichkeiten. Zusammen haben die ersten beiden Studenten also $m \cdot (m-1)$ Möglichkeiten, sich zu setzen.

3. Der Student mit der Nummer 3 wird hereingelassen. Da die Studenten mit der Nummer 1 und 2 schon sitzen, stehen dem Studenten mit der Nummer 3 nur noch $m-2$ freie Plätze zur freien Auswahl. Zu jeder der $m \cdot (m-1)$ Platzierungen der Studenten mit der Nummer 1 und 2 hat der Student mit der Nummer 3 noch $m-2$ Möglichkeiten. Zusammen haben die ersten drei Studenten also $m \cdot (m-1) \cdot (m-2)$ Möglichkeiten, sich zu setzen.

4. Der Student mit der Nummer 4 wird hereingelassen. Da die Studenten mit der Nummer 1, 2 und 3 schon sitzen, stehen dem Studenten mit der Nummer 4 nur noch $m-3$ freie Plätze zur freien Auswahl. Zu jeder der $m \cdot (m-1) \cdot (m-2)$ Platzierungen der Studenten mit der Nummer 1, 2 und 3 hat der Student mit der Nummer 4 noch $m-3$ Möglichkeiten. Zusammen haben die ersten vier Studenten also $m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3)$ Möglichkeiten, sich zu setzen.

5. Und so fort. Immer wenn wieder ein Student hereinkommt, erhöht sich das Produkt wieder um einen um 1 kleineren Faktor im Vergleich zum vorher geschriebenen oder erhaltenen Faktor.

6. Schliesslich kommt der letzte Student herein. Er hat noch eine Möglichkeit zum Sitzen, denn nur noch einer der m Plätze ist frei. Damit wird das Produkt $= m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 := m!$. Das Zeichen $m!$ liest man als „m Fakultät“. Hier ist die Betrachtung zu einem Ende gekommen. $P_m = m!$ ist die totale Anzahl Möglichkeiten. Diese Formel gilt auch allgemein, ob es sich nun um Studenten oder um andere Objekte handelt, die auf Plätzen angeordnet werden. Daher finden wir den unten angegebene Satz:

Satz: $P_m = m!$

Das Problem der auftretenden grossen Zahlen bei den Permutationen

Wir wollen zu einer Klasse wie der betrachteten einmal alle Sitzordnungen in Gedanken durchspielen. Dabei gehen wir von einer Klasse mit 30 Studenten aus. Wie lange würde es dauern, wenn diese im Sekundentakt alle Sitzordnungen durchprobieren würden? Das ist natürlich viel zu schnell, denn vermutlich würde nicht einmal eine halbe Minute reichen. Wir nehmen zudem zur Vereinfachung weiter an, dass die Studenten nie Pause machen, auch nicht zum Essen und Schlafen. Dass sie also Tag und Nacht immer durcharbeiten, fleissiger als fleissig und schneller als schnell. Nie sollen sie müde werden, nie krank. Gegen alle Regeln der Natur sind sie ständig an der Arbeit. Wie lange würde das wohl dauern? Die Antwort ist sehr einfach: Wir rechnen:

$$s = 30!\, sec = 265252859812191058636308480000000\, sec \approx 2.6525285981219107 \cdot 10^{32}\, sec$$

Das vergleichen wir mit dem Alter des Universums a in Sekunden:

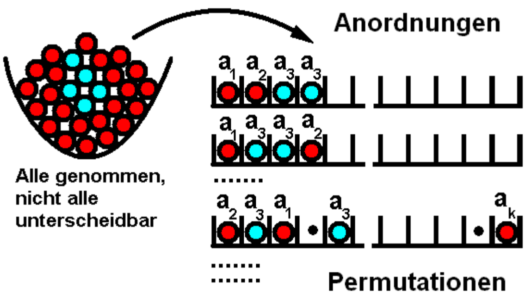
$$a \approx 13.6 \cdot 10^9\, Jahre = 13.6 \cdot 10^9 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60\, sec \approx 4.288896 \cdot 10^{17}\, sec\ (Universenalter)$$

$$\frac{s}{a} \approx 6.18 \cdot 10^{14}\, sec$$

Das werden unsere Studenten trotz ihrem Fleiss nie erleben. Denn nach einem weiteren Universumsalter wird die Sonne längst zu einem roten Riesenstern angewachsen sein, wie man aus Modellrechnungen weiss, und die Erde in sich aufgenommen „aufgefressen“ haben. Dann bleiben immer noch etwa $6.18 \cdot 10^1 4\, Universenalter$, bis alle Sitzordnungen durchgespielt sind !

2.2.2 Permutationen mit Wiederholung

Die Formel



Wir nehmen an, dass sich bei einer Permutation von m Elementen ohne Wiederholung neu k_1 Elemente nicht unterscheiden. Bei jeder Anordnung der $m - k_1$ restlichen Elemente lassen sich daher die k_1 nicht unterscheidbaren Elemente unter sich austauschen oder permutieren. Das kann man nach der oben hergeleiteten Formel für Permutationen ohne Wiederholung auf $k_1!$ mögliche Arten tun.

Sei x_1 die Anzahl Anordnungen der besagten $m - k_1$ restlichen Elemente. Dann gilt: $x_1 \cdot k_1! = P_m = m!$. Daher wird die Permutation von m Elementen bei Ununterscheidbarkeit oder Wiederholung von k_1 Elementen zu $x_1 = P_m(k_1) = \frac{m!}{k_1!}$ berechnet.

Wenn man nun weitere k_2 Elemente unter sich nicht unterscheiden kann, so könnte man gleich wie eben gehabt argumentieren. Sei x_2 die Anzahl Anordnungen der besagten $m - k_1 - k_2$ restlichen Elemente. Dann gilt: $x_2 \cdot x_1 = P_m = m!$. Daher wird $x_2 = P_m(k_1, k_2) = \frac{x_1}{k_2!} = \frac{m!}{k_1! \cdot k_2!}$. Und so fort.

Schliesslich erhalten wir bei Fortsetzung dieser Argumentationsart bei $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$ Elementen, welche je unter sich nicht unterscheidbar sind:

Satz: $$P_m(k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n) = \frac{m!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}$$

Beispiel

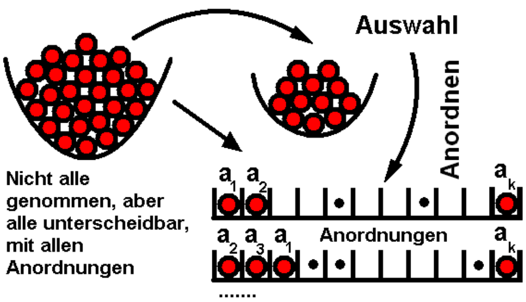
Auf wieviele Arten kann man mit den Buchstaben AABBBCDDDDEFGH Wörter bilden, auch wenn diese nicht sinnvoll sind?

Zur Lösung bemerken wir zuerst, dass ein neues Wort durch eine Umstellung, also durch eine Permutation der Zeichenkette gebildet wird. Daher reduziert sich die Frage auf das Problem: Auf wieviele Arten kann man 14 Buchstaben permutieren, wenn sich eine erste Gruppe von 2 Buchstaben (A), eine zweite Gruppe von 3 Buchstaben (B) und eine dritte Gruppe von 4 Buchstaben (D) nicht unterscheiden? Lösung:

$$P_{14}(2,3,4) = \frac{14!}{2! \cdot 3! \cdot 4!} = 302702400 \approx 3.027024 \cdot 10^8$$

2.2.3 Variationen ohne Wiederholung

Die Formel



Hier geht es darum zu berechnen, auf wie viele Arten man aus einem Vorrat von m Objekten k solche auswählen und diese danach anordnen kann. Dabei argumentieren wir ähnlich wie bei den Permutationen, betrachten aber als erstes die k freien Plätze. Fokussieren wir Nummer 1 dieser Plätze, so können wir aus der Urne jedes der m Objekte auswählen und auf diesen Platz setzen. Für den ersten Platz gibt es also m Möglichkeiten.
Ist dann dieser Platz besetzt, so kann man zu jeder dieser m Besetzungsmöglichkeiten den zweiten Platz auf $m-1$ mögliche Arten besetzen. Denn in der Urne verbleiben immer noch $m-1$ Objekte, von denen jedes ausgewählt werden kann. Total hat man für den ersten und zweiten Platz damit $m \cdot (m-1)$ Möglichkeiten.
Zu jeder dieser $m \cdot (m-1)$ Möglichkeiten für die ersten beiden Plätze kann man den dritten Platz auf $m-2$ mögliche Arten besetzen, denn in der Urne bleiben jetzt noch $m-2$ Objekte. Das gibt $m \cdot (m-1) \cdot (m-2)$ Möglichkeiten für die ersten drei Plätze. Entsprechend sind es für die ersten vier Plätze dann
$m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3)$ Möglichkeiten und für die „ersten“ k Plätze darauf
$m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3) \cdot \ldots \cdot (m-k+1)$ Möglichkeiten. Da es nur k Plätze gibt, hat man also hier für die Anzahl Möglichkeiten ein Produkt mit k Faktoren, in einer Formel also:
$m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3) \cdot \ldots \cdot (m-k+1)$. Nun ist aber

$$m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3) \cdot \ldots \cdot (m-k+1) =$$

$$\frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3) \cdot \ldots \cdot (m-k+1) \cdot (m-k) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(m-k) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{m!}{k!}$$

Daher gilt:

Satz: $$V(k,m) = \frac{m!}{(m-k)!} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3) \cdot \ldots \cdot (m-k+1)$$

Beispiele

1. Wie viele verschiedene Worte zu 6 Buchstaben kann man mit 26 verschiedenen Buchstaben ohne Wiederholung bilden?

   Lösung: Hier geht es um eine Auswahl mit Anordnung, also um eine Variation ohne Wiederholung. Denn Worte besitzen meist eine eindeutige Leserichtung. Damit wird

   $$V(6,26) = \frac{26!}{(26-6)!} = 165765600 \approx 1.657656 \cdot 10^8$$

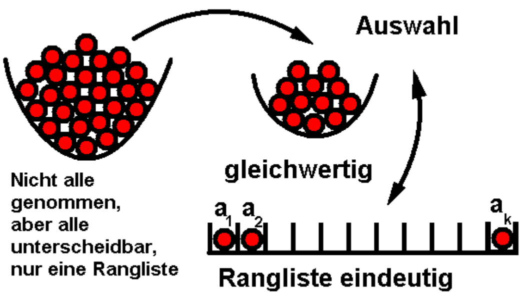
2. An einem Rennen nehmen 100 Pferde teil. Es gibt 10 Preise für die ersten 10 Plätze nach Rangliste. Bei Doppelbesetzung eines Ranges entscheidet das Los vor der Preisverleihung. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Preise auf die 100 Pferde zu verteilen?

   Das Problem ist ähnlich dem Problem oben: Eine Auswahl von 10 aus 100 mit Anordnung. Dann wird:

$$V(10, 100) = \frac{100!}{(100-10)!} = 62815650955529472000 \approx 6.281565095552947 \cdot 10^{19}$$

2.2.4 Kombinationen ohne Wiederholung

Die Formel



Die Formel für die Kombination ohne Wiederholung $C(k, m)$ können wir aus der Variation ohne Wiederholung $V(k, m)$ herleiten. Dabei bemerken wir, dass bei der Kombination die ausgewählten k Objekte im Unterschied zur Variation nicht auch noch angeordnet werden. Für diese Anordnungen gibt es $k!$ Möglichkeiten, welche hier wegfallen. Daher gilt die Gleichung: $V(k, m) = C(k, m) \cdot k! \;\Rightarrow$ $C(k, m) = \frac{V(k, m)}{k!} = \frac{m!}{(m-k)! \cdot k!} := \binom{m}{k}$

Satz:

$$C(k, m) = \frac{m!}{(m-k)! \cdot k!} = \binom{m}{k}$$

Bekanntlich nennt man den Ausdruck $\binom{m}{k} := \frac{m!}{(m-k)! \cdot k!}$ **Binomialkoeffizient**. Diese Binomialkoeffizienten treffen wir in der binomischen Formel:

$$(a+b)^m = \binom{m}{0} a^m\, b^0 + \binom{m}{1} a^{m-1}\, b^1 + \binom{m}{2} a^{m-2}\, b^2 + \binom{m}{3} a^{m-3}\, b^3 + \ldots +$$
$$+ \ldots + \binom{m}{m-1} a^{m-(m-1)}\, b^{m-1} + \binom{m}{m} a^{m-m}\, b^m$$

$$\Rightarrow\; (a+b)^m = a^m + m\, a^{m-1}\, b + \binom{m}{2} a^{m-2}\, b^2 + \binom{m}{3} a^{m-3}\, b^3 + \ldots + m\, a\, b^{m-1} + b^m$$

Beispiele

1. Im pascalschen Dreieck finden wir die eben besprochenen Binomialkoeffizienten. Den Koeffizienten $\binom{m}{k}$ z.B. erhält man aus dem Produkt mit m Faktoren

$$(a+b)^m = (a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b) \cdot \ldots \cdot (a+b) \cdot (a+b),$$

   wenn man aus k Faktoren das b und aus $m-k$ Faktoren das a auswählt. So wählen wir damit in der Reihenfolge der Platznummern diejenigen aus mit dem b. Zum Beispiel wird so $\binom{12}{7} = 792$.

2. Problem: In einem Vorrat befinden sich 34 rote und 28 blaue Steine. Wie viele mögliche Ketten mit unterschiedlichem Anfangs- und Endpunkt zu $34 + 28 = 62$ Steinen können wir damit bilden?

   Lösung: Um die Kette zu bilden, müssen wir alle Steine auswählen. Zur Vereinfachung denken wir uns die Kette als Rangliste mit nummerierten Plätzen. Wählen wir zuerst nur die blauen Steine und platzieren wir diese auf die dafür ausgewählten 28 Plätze, so sind die roten Steine gesetzt. Die Platzierung dieser Steine ändert darauf die Anzahl Möglichkeiten nicht mehr. Daher reduziert sich das Problem auf die folgende Frage: Wie viele Möglichkeiten gibt es, die 28 aus den 62 Plätzen auszuwählen, auf die dann die blauen Steine zu liegen kommen? Man folgert sofort: Es gibt dafür

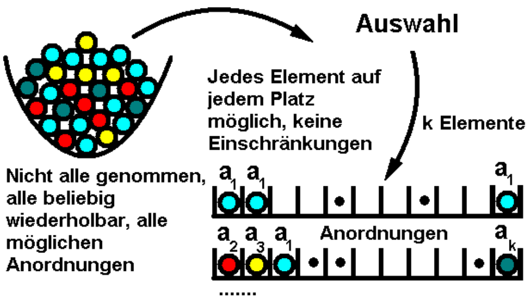
   $$\binom{62}{28} = 349615716557887465 \approx 3.496157165578875 \cdot 10^{17} \quad \text{Möglichkeiten.}$$

3. Lotto: Was ist die Chance, einen 6–er zu haben, wenn mit 45 Kugeln gespielt wird?

   Lösung: Die Chance ist $g \,:\, m = 1 \,:\, \binom{45}{6} = 1 \,:\, 8145060.$

2.2.5 Variationen mit Wiederholung

Die Formel



Bei der Variation mit Wiederholung ist die Sache sehr einfach. Man hat k Plätze und wählt aus m Objekten k Stück für diese aus. Jedes Objekt kann bis k mal wiederholt, also mehrmals ausgewählt werden. Auf den ersten Platz kann man so m mögliche Objekte setzen. Ebenso auf den 2. Platz. Damit hat man für die ersten beiden Plätze $m \cdot m = m^2$ Möglichkeiten. Auch auf den 3. Platz kann man m mögliche Objekte setzen. Damit hat man für die ersten drei Plätze $m^2 \cdot m = m^3$ Möglichkeiten u.s.w..

Bei k Plätzen hat man schliesslich m^k verschiedene Möglichkeiten. Damit sind alle Auswahl– und Anordnungsmöglichkeiten ausgeschöpft.

Satz: $\overline{V}(k, m) = m^k$

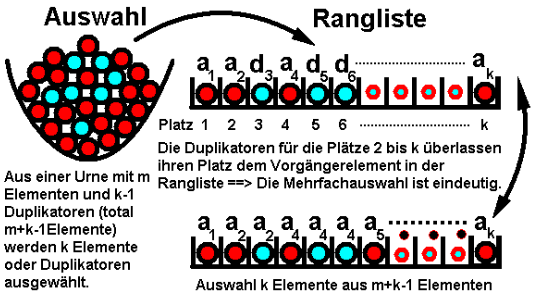
Beispiel

Wie viele Möglichkeiten gibt es, Worte mit 10 Buchstaben zu schreiben, wenn 26 verschiedene Buchstaben zur Verfügung stehen und jeder Buchstabe beliebig oft ausgewählt werden kann?

Lösung: $\overline{V}(k, m) = 26^{10} = 141167095653376 \approx 1.41167095653376 \cdot 10^{14}$.

2.2.6 Kombinationen mit Wiederholung

Die Formel



Bei dieser Formel handelt es sich um die schwierigste bezüglich der Herleitung. Um das Problem zu lösen, führen wir einen neuen Begriff ein: Den Begriff **Duplikator des Vorgängerobjekts für den Platz** k. Dazu beachten wir, dass die gegebenen m unterscheidbaren Objekte in der Urne, aus welcher ausgewählt werden soll, immer mit Nummern versehen gedacht werden können. Und dass zu jeder Auswahl von k Objekten aus den m Objekten dann eindeutig bezüglich der Objektnummern eine Rangliste existiert.

Eine beliebige Auswahl kann so immer unzweideutig als Rangliste interpretiert werden. In dieser Rangliste existieren dann k Plätze, auf denen die Objekte ihren Nummern nach angeordnet gedacht werden können. Durch die Wiederholungen kann es dann passieren, dass auch einmal alles Objekte mit derselben Nummer ausgewählt werden. Wiederholte Objekte wollen wir uns hier immer als Duplikate eines Originals vorstellen. Das ändert die Anzahl der Möglichkeiten nicht. Man stellt aber fest, dass bei jeder möglichen Auswahl immer mindestens ein Originalobjekt dabei ist. Duplikate kann es damit höchstens $k-1$ Stück geben. In den Ranglisten sind dann die Duplikate der gleichen Nummer nach dem Originalobjekt angeordnet, denn dieses Originalobjekt kann man sich zuerst gezogen denken, bevor Duplikate nachgeliefert werden. Statt der Duplikate denken wir uns nun Geräte, Objekte quasi mit dem Namen „Duplikator“, welche die Duplikate aus dem Vorgängerobjekt erzeugen. Diese Erzeugung ist eindeutig. Statt einem duplizierten Element auf Platz Nummer j kann man daher auch den zu dieser Platznummer j gehörenden Duplikator d_j ausgewählt denken. Dieser dupliziert das Objekt vom davor liegenden Platz mit der Nummer $j-1$ und überlässt ihm anschliessend den eigenen Platz mit der Nummer j. Dieser Duplikationsprozess ist eineindeutig. Man kann aus dem Duplikat und seiner Nummer in der Ranglite auch wieder den Duplikator zurückgewinnen. Damit haben wir das Problem, aus m Objekten in der Urne und den Duplikatoren für die Plätze $2,\ 3,\ \ldots,\ k$ für unsere Rangliste k Objekte auszuwählen, wobei dann zuerst die Duplikatoren auf ihre Plätze der Rangliste gesetzt werden und anschliessend die Objekte der Grösse ihrer Nummern oder Ränge nach. Damit ist die Rangliste perfekt. So haben wir das Problem, eine Auswahl von k Elementen aus m Objekten und $k-1$ Duplikatoren zu treffen. Wir wählen also aus $m-k+1$ Elementen k Elemente aus. Das ergibt bekanntlich $\binom{m+k-1}{k}$ Möglichkeiten.

Satz: $$\overline{C}(k,m) = \binom{m+k-1}{k}$$

Beispiele

Zur Auswahl stehen 20 Typen von Häusern. Man soll damit Quartiere zu je 7 Häusern bauen. Wiederholungen desselben Haustyps sind erlaubt. Wie viele mögliche Siedlungen gibt es?

Lösung: $\overline{C}(7,20) = \binom{20+7-1}{7} = 657800.$

2.3 Eine Aufgabe

Löse das Problem des Chevalier de Méré. (Siehe Seite 6.)

2.4 Links zur Fortsetzung

Links zum weiteren Eindringen in den Stoff findet man unter

http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html

Man beachte dort die Skripte „Wahrscheinlichkeit und Statistik, d“ sowie „Anhang zu Wahrscheinlichkeit und Statistik, d“ und auch „Kombinatorik, Teil 6, d “ .

ENDE CRASH–KURS