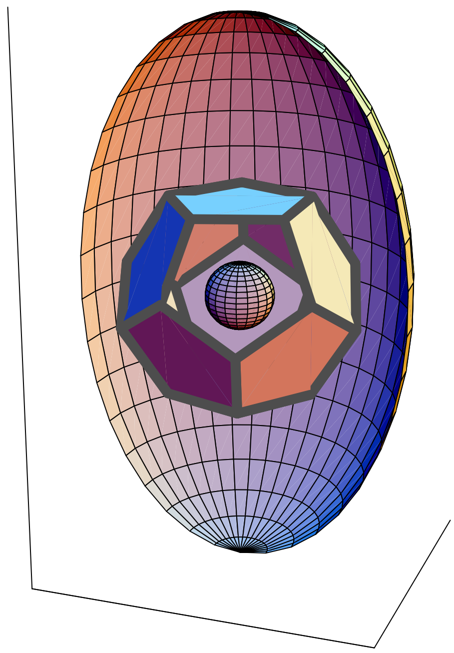
◇ Mathematikkurs für Ingenieure ◇ Teil 7 ◇
◇ Crash-Kurs Infinitesimalrechnung ◇



von

Rolf Wirz

Ingenieurschule Biel / BFH–AHB / BFH–TI

Nach den NeXT–Crash von 1999 restaurierte Ausgabe

V.1.2.0 d 9. Oktober 2009 **Deutsche Version, nicht übersetzt**

WIR/NeXT / Win98 / Win XP / 93/01/05/09 LaTex/Teil7.tex

Teil 7 eines Repetitoriums und Textbuchs zur Begleitung und Ergänzung des Unterrichts.
Produziert mit LaTeX auf NeXT-Computer/ PCTeX WIN98 / Win XP.
Einige Graphiken sind auch mit *Mathematica* entstanden.

1999 hat der Autor einen Computer–Crash erlebt. Infolge des dadurch provozierten Systemwechsels haben einige Graphiken sehr gelitten. Sie werden neu erstellt, sobald die Zeit dafür vorhanden ist.

Wer weit kommen will muss früh aufstehen ...

Volksweisheit

Aktuelle Adresse des Autors (2007):

Rolf W. Wirz-Depierre
Prof. für Math.
Berner Fachhochschule (BFH), Dep. AHB und TI
Pestalozzistrasse 20
Büro B112 CH–3400 Burgdorf/BE
Tel. ++41 (0)34 426 42 30 / intern 230
Mail: Siehe http://rowicus.ch/Wir/indexTotalF.html unter „Koordinaten von R.W.“
(Alt: Ingenieurschule Biel (HTL), Ing'schule des Kt. Bern, Fachhochschule ab 1997) // BFH HTA Biel // BFH TI //

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung und Voraussetzung

Liebe Leserin, lieber Leser

Dieses Skript soll es dem Leser ermöglichen, sich rasch ein einführendes Verständnis von der Infinitesimalrechnung verschaffen zu können. Mit Infinitesimalrechnung ist die Differential– und Integralrechnung gemeint. Diese ist von Leibniz und unabhängig davon auch von Newton um ca. 1675 entdeckt worden.

Das damit gegebene Regelnwerk, auch Calculus oder „Kalkül“, bildet heute praktisch weltweit ein Hauptziel der gymnasialen Schulmathematik, da an der Universität in vielen Wissenschaften nicht mehr darauf verzichtet werden kann. Für Personen, welche die Infinitesimalrechnung noch nicht kennen, jedoch Teile daraus bald brauchen werden, soll diese Einführung gedacht sein.

Es geht hier somit um Fragen wie die folgenden: „Was ist differenzieren?“ „Was ist integrieren?“ „Was ist eine Differentialgleichung?“ Dabei wird vorausgesetzt, dass der Leser weiss, was eine Funktion ist. Der Funktionsbegriff wird hier nicht erklärt.

Im Sommer 1996 Der Autor

Kapitel 2

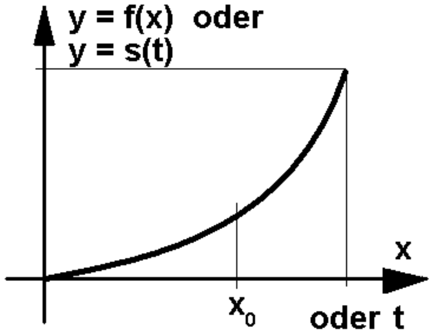
Infinitesimalrechnung — Crash–Kurs

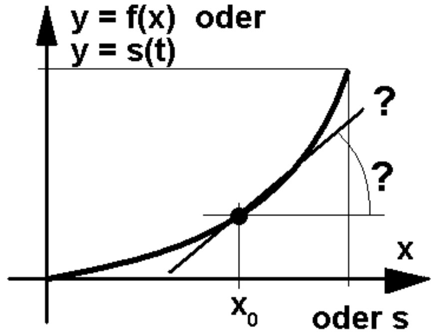
2.1 Differentialrechnung

2.1.1 Zwei Problemstellungen

Ein Problem aus der Geometrie

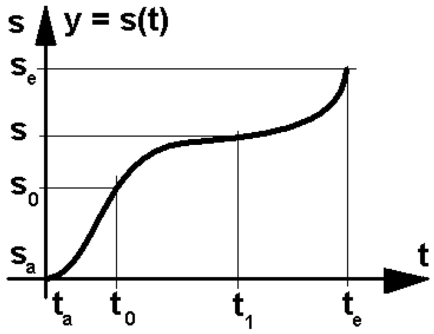
Wir betrachten die Parabel $y = \dfrac{1}{2}\,x^2$. Unter „Parabel“ versteht man üblicherweise eine geometrische Figur, wie sie z.B. als Graph der Funktion $x \longmapsto f(x) = a\,x^2$ mit $a = \dfrac{1}{2}$ vorkommt. Anhand der entstehenden Kurve kann man jetzt geometrische Fragen stellen. Zum Beispiel die Frage: „Wie gross ist die Steigung der Tangente an die Kurve bei $x = 1$? “ Und weiter die Anschlussfrage: „Welche Gerade könnte man hier als Tangente definieren? Und wie könnte man eine solche Tangente exakt konstruieren, also nicht bloss von Auge anpassen?“





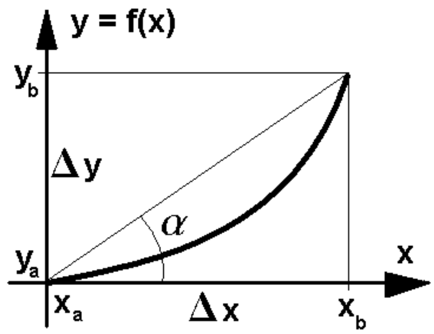
Ein Problem aus der Physik

Ein Autofahrer fährt zur Abfahrtszeit t_a in Bern weg zu einem nahegelegenen Dorf. Noch in Bern wird er zur Zeit t_0 mit übersetzter Geschwindigkeit geblitzt. Dann verlangsamt er sein Tempo. Zur Zeit t_1 liest er $25\,km/h$ auf seinem Tacho ab. Ausserorts dann beschleunigt er wieder stark und erreicht sein Ziel mit grossem Tempo gerade noch rechtzeitig.



Der Autofahrer hatte bei seiner Wegfahrt Zeugen, welche über seine Abfahrtszeit Bescheid wissen. Ebenso hat er Zeugen bei seiner Ankunft. Er kann beweisen, dass er exakt $12\,Minuten$, also $1/5\,h$ unterwegs war. Die Fahrtdistanz ist nach der Strassenkarte auch bekannt. Sie beträgt $10\,km$. Damit hat er also $10\,km$ in $12\,Minuten$ zurückgelegt. In $5 \cdot 12\,Minuten \hat{=} 1\,h$ wären das $5 \cdot 10\,km \hat{=} 50\,km$, also $50\,km/h$. Nachdem er dann per Post die Busse von der Polizei erhalten hat, ruft er diese an und erklärt, er hätte eine Geschwindigkeit von $50\,km/h$ gehabt, was ja erlaubt sei. Er könne das beweisen. Die Polizei jedoch antwortet ihm, dies sei vielleicht eine Durchschnittsgeschwindigkeit. Man habe ihn jedoch nach Abzug einer Messtoleranz bei einer Momentangeschwindigkeit von $65\,km/h$ geblitzt. Dafür müsse er nun kräftig bezahlen. Unser Autofahrer will die Welt nicht mehr verstehen. Er verlangt, dass ihm die Polizei den Begriff „Momentangeschwindigkeit“ erklären soll. Nach langem Hin und Her holt man schliesslich einen Mathematiker, welcher nun ebenfalls sein Glück beim Erklären der Sache versucht. Hat er wohl Glück? Und was sagt er den beiden, dem Autofahrer und dem Polizisten?

Da der Autofahrer und der Polizist in der Schule ein wenig Algebra gehabt haben und sie wissen, dass man x als Variable benutzen kann, verwendet der Mathematiker jetzt für die Zeit diese bekannte Variable x. Aus gleichen Gründen bezeichnet er aus Rücksicht auf die beiden den Weg mit $y = f(x)$. Er argumentiert dann wie folgt:



Im Moment, einem ganz kleinen Zeitabschnitt also, als der Autofahrer geblitzt worden war, verstrich die Zeit von x_a (a wie Anfang) bis x_b (b wie Ende). In dieser Zeit legte das Auto die Strecke von y_a bis y_b zurück. Zur Zeitdifferenz $x_b - x_a$ gehört also die Wegdifferenz $y_b - y_a$. In diesem kleinen Moment erhält man daher eine „Momentangeschwindigkeit“ $\dfrac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. In der Physik schreibt man dafür üblicherweise $\dfrac{s_b - s_a}{t_b - t_a} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$. Die Sache wird umso genauer, je kleiner dabei $t_b - t_a = \Delta t$ gemacht wird.

Das genauste Resultat erhält man im Fall, wo $\Delta t = 0$ wird.

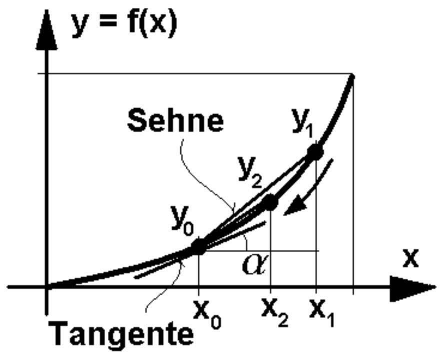
Nun schauen sich der Autofahrer und der Polizist fragend an und schütteln beide die Köpfe. Der dort dividiert ja durch null! Beide wollten davonlaufen, wenn da nicht noch die Busse gewesen wäre und wenn ihnen der Mathematiker nicht erklärt hätte, dass das in ihrem praktischen Fall ja gar nicht so genau sein muss. Denn da gäbe es ja noch die Messtoleranz. Leider wissen wir nicht, wie die drei dann verblieben sind. Denn für unsere Sache müssen wir die Sache exankt zu einem Ende bringen. Die Ausrede der praktischen Ungenauigkeit bringt uns so wenig weiter wie das spätere Davonlaufen der beiden.

2.1.2 Die Lösung des Problems: Von der Sehne zur Tangente

Der theoretische Ansatz

In der letzten Zeichnung im obigem Abschnitt auf Seite 6 sehen wir, dass dort die Momentangeschwindigkeit durch $\frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan(\alpha)$ gegeben wird, also durch die Steigung der Sehne zwischen den Kurvenpunkten $(x_a;\, y_a)$ und $(x_b;\, y_b)$.

Betrachten wir nun an Stelle der gehabten Punkte neu die Punkte $(x_0;\, y_0)$ und $(x_1;\, y_1)$ im nebenstehenden Bild. Da ist wieder die Sehnensteigung zu diesen Kurvenpunkten. Hier können wir beobachten, dass man den Moment enger und damit genauer fassen kann, wenn man zum Punktepaar $\{(x_0;\, y_0),\ (x_2;\, y_2)\}$ übergeht. Die Sehne zwischen $(x_0;\, y_0)$ und $(x_2;\, y_2)$ ist schon näher an der Tangente als die Sehne zwischen $(x_0;\, y_0)$ und $(x_1;\, y_1)$.



Man kann sich diesen Annäherungsprozess weiter fortgesetzt denken. Wählt man einen neuen Punkt x_3 auf der x–Achse zwischen x_0 und x_2, so wird das Resultat noch besser. Und so fort. Δx und Δy werden dabei noch kleiner.

Ein praktisches Beispiel

Wir wollen das Gesagte direkt an einem praktischen Beispiel umsetzen. Gefragt ist die Steigung der Tangente an die Kurve der Funktion $x \longmapsto f(x) = \frac{1}{2}\,x^2$ an der Stelle $x = 1$. Wir betrachten dazu den Punkt $(x = 1;\, y = f(1) = \frac{1}{2}\,1^2 = \frac{1}{2})$ und einen Punkt ein wenig daneben: $(x + d = 1 + d;\, y = f(x + d) = f(1 + d) = \frac{1}{2}\,(1 + d)^2)$. Hier gilt allgemein immer $\tan(\alpha) = \Delta x = (x + d) - x = d$ und $\Delta y = f(x + d) - f(x) = \frac{1}{2}\,(x + d)^2) - \frac{1}{2}\,x^2 =$

$\frac{1}{2}\,((x+d)^2 - x^2) = \frac{1}{2}\,((x+d)+x)((x+d)-x) = \frac{1}{2}\,(2\,x+d)\cdot d$. Damit wird $\tan(\alpha) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{2}\,(2\,x+d)\cdot d}{d} = \frac{1}{2}\,\frac{(2\,x+d)\cdot d}{d} = \frac{1}{2}\,(2\,x+d)$. Lässt man hier $\Delta x = d$ immer kleiner werden, bis der Wert 0 erreicht ist, so bekommt man $\tan(\alpha) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}\,2\,x = x \;\Rightarrow\; \tan(\alpha) = x$. Für $x = 1$ wird so $\tan(\alpha) = 1$ und also $\alpha = \frac{\pi}{4} \hat{=} 45^o$. Damit ist es uns gelungen, für einen Punkt der Kurve der Funktion $x \longmapsto f(x) = \frac{1}{2}\,x^2$ den Steigungswinkel zu berechnen.
Allgemein erhalten wir auf ähnliche Weise für $x \longmapsto f(x) = a\,x^2$ die Steigung $\tan(\alpha) = \tan(\alpha(x)) = 2\,a\,x$. $\alpha(x)$ ist wiederum eine Funktion von x, denn die Steigung der Tangente ändert ja mit x.

Wir nennen die Steigungsfunktion $\tan(\alpha(x))$ nun **Ableitung** von $f(x)$ und schreiben dafür $f\,'(x)$ oder $\frac{d\,f}{d\,x}(x)$. Umgekehrt heisst $f(x)$ **Stammfunktion** von $f\,'(x)$.

2.1.3 Ableitungen und Stammfunktionen nach Tabellen

Ableitungen und Stammfunktionen findet man in Tabellen– oder Formelbüchern. Man darf diese ruhig gebrauchen. Zum Beispiel gilt:

$$p(x) = a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$$
$$\Rightarrow\; p'(x) = n\cdot a_n\cdot x^n + (n-1)\cdot a_{n-1}\cdot x^{n-1} + \ldots + 2\cdot a_2\cdot x + a_1$$

$$f(x) = \sin(x) \;\Rightarrow\; f\,'(x) = \cos(x)$$

$$f(x) = \cos(x) \;\Rightarrow\; f\,'(x) = -\sin(x)$$

$$f(x) = c\cdot e^x \;\Rightarrow\; f\,'(x) = c\cdot e^x$$

$$f(x) = \ln(x) \;\Rightarrow\; f\,'(x) = \frac{1}{x}$$

Für weitere interesseante Ableitungen konsultiere man die eigenen Formelnbücher!

2.1.4 Ein Beispiel

Wie gross ist der Steigungswinkel der Funktion $x \longmapsto f(x) = 3\,x^3 - 4\,x^2 + 2\,x - 7$ an der Stelle $x = 2$?
Man berechnet sofort: $x \longmapsto f\,'(x) = 3\cdot 3\,x^2 - 2\cdot 4\,x + 2 = 9\,x^2 - 8\,x + 2 = 9\cdot 2^2 - 8\cdot 2 + 2 = 36 - 16 + 2 = 22$. Damit wird $\alpha = \arctan(22) \approx 1.52537 \hat{\approx} 87.3974^o$.

2.1.5 Zur Symbolik

Die Differentialrechnung ist ausgehend von Leibniz und Newton sowie auch von Jakob I. Bernoulli in verschiedenen Schulen unabhängig voneinander entwickelt worden. Daher sind seit dem Beginn der Entwicklung entsprechend den Schulen verschiedene Arten von Symbolen in Gegrauch. Wir verwenden hier hauptsächlich folgende Arten:

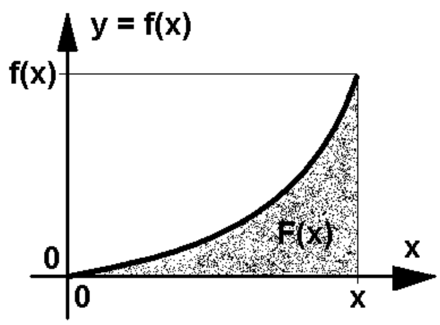
	Nach Newton	Nach Leibniz	Andere
Stammfunktion	$f(x)$	$f(x)$	y(x)
1. Ableitung	$f\,'(x)$	$\frac{d\,f}{d\,x},\ \frac{d\,f}{d\,x}(x)$	z.B. $\dot{y}(x)$
2. Ableitung	$(f\,'(x))\,' = f\,''(x)$	$\frac{d^2\,f}{d\,x^2},\ \frac{d\,f}{d\,x}(x)$	z.B. $\ddot{y}(x)$
n. Ableitung	$f^{\,(n)}(x)$	$\frac{d^n\,f}{d\,x^n},\ \frac{d\,f}{d\,x}(x)$	$\ldots$

2.2 Integralrechnung

2.2.1 Zwei Problemstellungen

Ein Problem aus der Geometrie: Flächeninhaltsberechnung

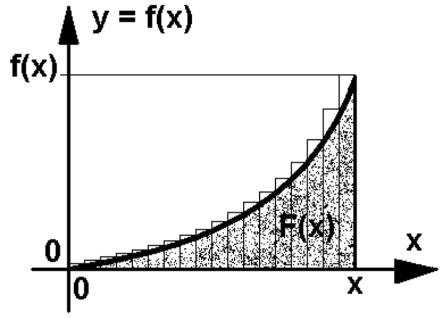
Das Problem: Wie gross ist der Flächeninhalt zwischen einer Funktionskurve und der x–Achse über dem Intervall $[a, b]$, $(x = b)$, das heisst von einem gegebenen Punkt a an bis zu einem variablen Punkt $x = b$? (In der gezeigten Skizze ist $a = 0$.)
Kann man allgemein bei einer gegebenen Funktion einen solchen Flächeninhalt unter einer Kurve (zwischen Kurve und x–Achse) berechnen?



Hier geht es somit darum, einen beliebigen krummlinig begrenzten Flächeninhalt zu berechnen. Der Inhalt komplizierter Flächen kann man in der Regel auf den Inhalt von Flächen zwischen einer Kurve und der x–Achse zurückführen.

Ein Problem aus der Physik: Gewichtsberechnung, Summenberechnung

In der Physik hat man oft das Problem, Summen mit vielen Summanden zu berechnen. Die Summanden kann man als Inhalte von Rechtecksbalken begreifen mit einer Höhe $f(x_k)$ und einer Breite Δx. Die Balkenfläche wird dann $f(x_k) \cdot \Delta x$. Dabei macht man die Balkenbreite oft beliebig fein, d.h. Δx ist ein Wert, der ganz klein gemacht wird. Dafür hat man dann im Gegenzug sehr viele Summanden.



Solche Summen lassen sich als Annäherung eines Inhalts einer Fläche unter einer Kurve auffassen: $F(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x$, n sehr gross oder gar $n \to \infty$.

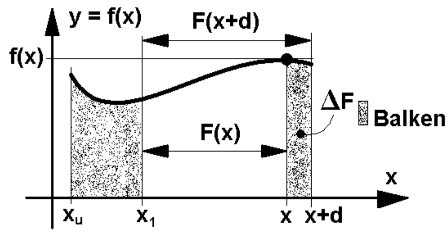
Man kann dabei an die Berechnung des Gewichtes eines kompliziert geformten, krummlinig begrenzten Blechs denken. Oder auch an die Berechnung der potentiellen Energie bei veränderlicher Kraft längs eines immer mehr ansteigenden Weges, wo der Anteil der wirkenden Gewichtskraft in Wegrichtung immer grösser wird:

$$E_{pot} = \sum_{k=1}^{n} G_{Weg}(s) \cdot \Delta s, \;\; G_{Weg} = \;\; \text{Gewichtskraft in Wegrichtung.}$$

2.2.2 Eine Methode zur gemeinsamen Lösung

Da man das physikalische Problem mit den grossen Summen von vielen kleinen Summanden als Approximationsform des geometrischen Problems verstehen kann, muss man nur eine Methode zur Lösung des geometrischen Problems finden. Die gesuchte Lösungsmethode wiederum lässt sich erstaunlicherweise auf die Differentialrechnung zurückführen. Man spricht hier vom „Hauptsatz der Infinitesimalrechnung“. Darauf beruht die grosse Erfolgsgeschichte dieser Theorie.

Um zu einem Resultat zu kommen, wollen wir den Flächeninhalt unter einer Funktionskurve $y = f(x)$ zwischen den Punkten x_1 und x (variabel) auf der x–Achse studieren. Wir nennen diesen Inhalt $F(x)$. Wenn wir x um einen kleinen Wert $d = \Delta x$ vergrössern, so gelangen wir zum Punkt $x + d = x + \Delta x$ auf der x–Achse.



Zwischen x und $x + d$ ist beim Vergrössern bei x ein Flächenstück angefügt worden, das ungefähr die Form eines Balkens hat. Oben stimmt es zwar nicht genau, doch bleibt für den Inhalt der Fehler klein im Vergleich zum angefügten Gesamtinhalt des Balkens. Je kleiner man d macht, desto kleiner wird der relative Fehler im Vergleich zum Balken, da ja die Balkenhöhe jeweils der neuen Situation angepasst werden muss und dann die Kurve in ihrer Höhe im Bereich des Balkens nicht mehr stark ändert. Der neue Inhalt der Fläche unter der Kurve zwischen x_1 und $x + d$ ist dann $F(x + d)$. Für die Balkenfläche ΔF erhalten wir $\Delta F = F(x+d)-F(x) \approx f(x)\cdot((x+d)-x) = f(x)\cdot d$.

Stellen wir uns nun die Frage, was wohl die Ableitungsfunktion von $F(x)$ sei, so machen wir eine höchst interessante Entdeckung. Wir finden:
$F'(x) \approx \dfrac{\Delta F}{\Delta x} = \dfrac{F(x+d)-F(x)}{\Delta x} \approx \dfrac{f(x)\cdot d}{d} = f(x)$. Es wird also $F'(x) = f(x)$, wenn d beliebig klein wird.

Resultat: Die Ableitung von $F(x)$ ist $f(x)$. Oder umgekehrt: $F(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$!

Dabei ist es wichtig zu beachten, dass die Ableitung (die Kurvensteigung) einer Konstanten (horizontale Kurve!) null ist. Das kennen wir schon aus der Formel für die Ableitung von Polynomen.

Somit muss $F(x)$ unter den Stammfunktionen von $f(x)$ zu finden sein. Das Problem ist hier, dass man die Konstante nicht kennt, die bei einer Stammfunktion ja auch anders sein könnte. Doch hier hilft ein kleiner Trick:

Eine zusätzliche unbekannte Konstante zu $F(x)$, etwa $F_{x_0}(x) = F(x) + C := F_C(x)$, lässt sich als Inhalt eines zusätzlichen Flächenstückes, etwa desjenigen unter der Kurve von x_0 bis x_1 deuten. (Dieses Stück kann auch negativ sein, wenn x_0 rechts von x_1 liegt.) $F(x)$ erhalten wir daraus, wenn wir vom Flächeninhalt zwischen x_0 und x denjenigen zwischen x_0 und x_1 subtrahieren: $F(x) = F_C(x) - F_C(x_1) = (F(x) + C) - (F(x_1) + C) = F(x) - \underbrace{F(x_1)}_{=0} + C - C = F(x) - 0 + 0$.

Resultat: Wir erhalten den Flächeninhalt unter einer Kurve $f(x)$ zwischen x_1 und x indem wir eine beliebige Stammfunktion $F_{x_0}(x) = F(x) + C$ suchen und dann damit $F(x) = F_{x_0}(x) - F_{x_0}(x_1)$ berechnen. x_0 muss dabei gar nicht bekannt sein.

2.2.3 Zur Symbolik

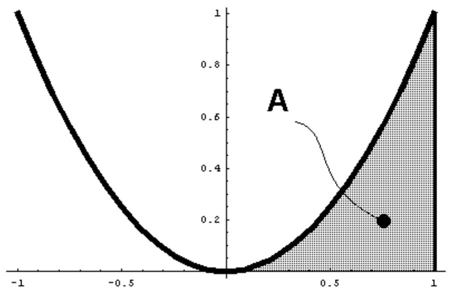
Für den Flächeninhalt unter der Kurve zwischen $x_1 = a$ und $x = b$ schreiben wir in Anlehnung an die Summe der Balkeninhalte $\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x$:

$$Inhalt = \int\limits_a^b f(x)\,dx$$

$\int$ ist das Integralzeichen (aus der Bernoulli-Schule). Dabei handelt es sich um ein stilisiertes grosses **S**, das für die Summe (Σ) steht. $\int f(x)\,dx + C$ steht für eine Stammfunktion von $f(x)$.

2.2.4 Ein erstes Beispiel

Wir wollen nun den Inhalt Fläche unter der Parabel $y = f(x) = x^2$ zwischen $x_1 = 0$ sowie $x = 1$ berechnen.
Als beliebige Stammfunktion finden wir $F_C(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + C$, denn es gilt $F_C{}'(x) = \dfrac{1}{3} \cdot 3 \cdot x^2 + 0 = x^2$.



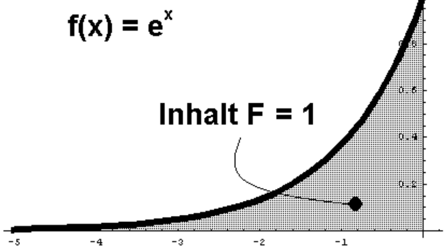
Damit ergibt sich:

$$Inhalt\ A = F_C(1) - F_C(0) = (\frac{1}{3} \cdot 1^3 + C) - (\frac{1}{3} \cdot 0^3 + C) = \frac{1}{3} \cdot 1 + C - \frac{1}{3}\,0 - C) = \frac{1}{3}.$$

Damit hat man erstmals einen Inhalt einer krummlinigen Fläche berechnet, welche sich nicht direkt auf die Kreisfläche zurückführen lässt.

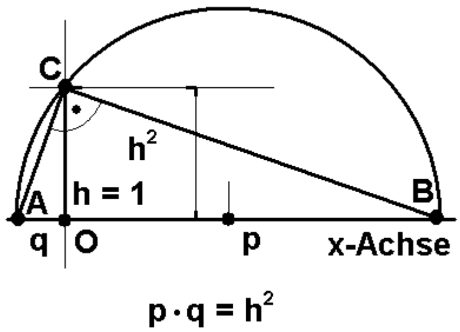
2.2.5 Ein zweites, fast unglaubliches Beispiel

Wir wollen noch den Inhalt unter der Kurve von $f(x) = e^x$ zwischen $x_1 < 0$ und $x = 0$ berechnen. Eine Stammfunktion zu e^x ist $F_C(x) = e^x + C$. Damit berechnen wir den Inhalt zu $I(x_1) = (e^0 + C) - (e^{x_1} + C) =$
$1 + C - e^{x_1} - C = 1 - e^{x_1}$.
Sei $z = -x_1,\ x_1 < 0 \ \Rightarrow\ z > 0$. Wir schreiben $e^{x_1} = e^{-z} = \dfrac{1}{e^z},\ z > 0$.



Geht nun x_1 gegen $-\infty$, so geht z gegen $+\infty$. $\frac{1}{e^z}$ ist daher von der Form $\frac{1}{\infty} = 0$. Daraus folgt: $I(-\infty) = 1$. Damit haben wir eine unendlich lange und krummlinig begrenzte Fläche gefunden, welche keinen unendlichen Inhalt hat. Denn dieser ist exakt 1.

Wir haben eben verwendet, dass, wenn ein Zahlenwert w gegen unendlich geht, dann der inverse Wert $\frac{1}{w}$ gegen 0 gehen muss. Das sieht man am Höhensatz. In einem rechtwinkligen Dreieck gilt $h^2 = p \cdot q$, siehe Skizze. Sei nun $h = 1$ Dann wird $p \cdot q = h^2 = 1$ und damit $q = \frac{1}{p}$. Setzen wir $w = p$ und lassen wir p unendlich gross werden, so wandert B ins „Unendliche“.



Das heisst konkret, dass dann die Gerade $\overline{BC}$ parallel zur x-Achse wird. Dieser Fall der Parallelität tritt nur einmal auf. In allen andern Fällen gibt es einen Schnittpunkt B und auch $A \neq O$. Im Falle der Parallelität ist $A = O$, also $p = \pm\infty$ und $q = \frac{1}{p} = 0$.
Wir schreiben $p = \pm\infty$, weil B auch links vom Ursprung liegen kann, wobei dann A rechts von O zu liegen kommt.

2.3 Differentialgleichungen

2.3.1 Was ist eine Differentialgleichung?

Viele Beschreibungen von realen Situationen in der physikalisch–chemischen Natur führen auf „Differentialgleichungen“. Das sind Gleichungen, in denen eine unbekannte Funktion $y(x)$ und auch Ableitungen von $y(x)$ vorkommen. Es gilt dann, diese unbekannte Funktion $y(x)$ aus der Differentialgleichung zu berechnen.

2.3.2 Beispiel einer Differentialgleichung

Gegeben sei eine Anzahl $A(t_0) = A(0) = 100$ von Hasen zum Zeitpunkt t_0. Die Anzahl A ändert mit der Zeit, da sich die Hasen vermehren $\rightsquigarrow$ $A = A(t)$. Dass auch Hasen umkommen, wollen wir hier zur Vereinfachung des Problems einmal nicht beachten. Wir gehen davon aus, dass sich die Hasen ständig, wenn die Weibchen nicht trächtig sind, paaren und damit eben vermehren. Es scheint vernünftig zu sein, wenn wir annehmen, dass die Anzahl der pro betrachtete Zeiteinheit Δt neu geborenen Hasen ΔA (Differenz der Anzahlen zur Zeit $t + \Delta t$ und zur Zeit t) proportional ist zur gerade vorhandenen Anzahl Hasen. Denn wenn die Population doppelt so gross ist, so werden eben pro Zeiteinheit doppelt soviele Hasen neu geboren. Damit ist $A(t)$ proportional zu $\dfrac{\Delta A}{\Delta t}$, $\Delta t \to 0$. Das kann man mit Hilfe eines Proportionalitätsfaktors λ durch die folgende Beziehung ausdrücken:

$$\lambda \cdot \frac{\Delta A}{\Delta t} \approx A'(t) = A(t) \text{ also } \quad \Rightarrow \; A'(t) = A(t).$$

Dabei ist $A(0) = 100$ eine Startbedingung, denn bei $t_0 = 0$ beginnt die Zunahme der Population.

$A'(t) = A(t)$ ist hier eine Differentialgleichung, deren Lösung wir schon erraten können: $A(t) = c \cdot e^t$, denn für diese Funktion ist die Stammfunktion gleich ihrer Ableitung (siehe Seite 8). c kann hier beliebig gewählt werden. Wir können somit durch die Wahl von c die Bedingung $A(0) = 100$ erfüllen. Das gelingt durch die Wahl $c = 100$. Damit wird $A(t) = 100 \cdot e^t$. So haben wir eine Differentialgleichung gelöst und die gesuchte Funktion $A(t)$ aufgefunden.

2.4 Links zur Fortsetzung

Ein Crashkurs kann nie sehr weit führen. Da Begriffe und Zusammenhänge erlernt werden müssen und das Lernen ein zeitintensiver Prozess ist, den man nicht ungestraft abkürzen kann, wird der in unserer hiesigen Sache unerfahrene Leser noch nicht virtuos differenzieren und integrieren können. Weiteres und viel länger dauerndes Lernen ist jetzt angesagt. Ein Trost: Die Eindringtiefe in den Stoff nimmt natürlicherweise mit der Zeit zu. Links zum notwendigen weiteren Eindringen in den Stoff findet man unter

`http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html`

Man beachte dort z.B die Skripte über „Grundschritte in den Zoo der Funktionen“ sowie über „Analysis“ und „Mathematik II“ .

ENDE CRASH–KURS

Notizen: