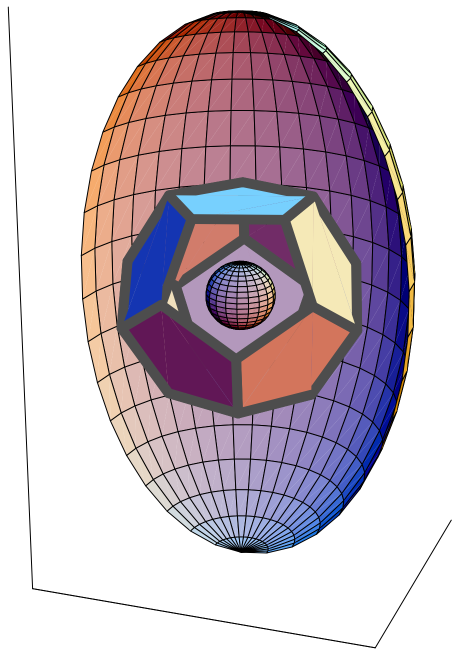
Cours en mathématiques pour ingénieurs
Supplément ◇ français
Logique propositionnelle



de

Rolf Wirz

Scripta bilingua

V.2.03 18 septembre 2007

WIR/93/99/2005/2007logik_f.tex

Partie d'un cours de répétition et livret d'accompagnement et complément des leçons.
(Partie 2 de la version 1 allemande.) Le nombre projeté de parties: Encore ouvert.
Produit avec LaTeT/PCTX/*Mathematica* et NeXT/Win98.
Ce texte est une traduction du texte original allemand.

Avec mon remerciement chaleureux à Danielle pour l'examen de la traduction.

L'esprit qui n'est que l'acuité, mais pas étendue, hésite à chaque point et n'avance pas ... Un esprit, qui est seulement de la logique, ressemble à un couteau qui n'est que lame. La main devient sanglante à l'emploi. ...

Tagore

Adresse actuelle de l'auteur (2007):

Rolf W. Wirz-Depierre
Prof. de math.
Haute école spécialisée bernoise, HES Bienne, Dep. AHB et TI
Pestalozzistrasse 20
Bureau B112 CH–3400 Burgdorf/BE
Tel. ++41 (0)34 426 42 30 / interne 230
Mail: Voir http://rowicus.ch/Wir/indexTotalF.html sous „coordonnées de R.W.“
(Alt: Ecole d'ingénieurs de Bienne, école d'ingénieurs du canton de Berne, haute école spécialisée depuis 1997) // HESB HES–TI Bienne

Logique propositionnelle

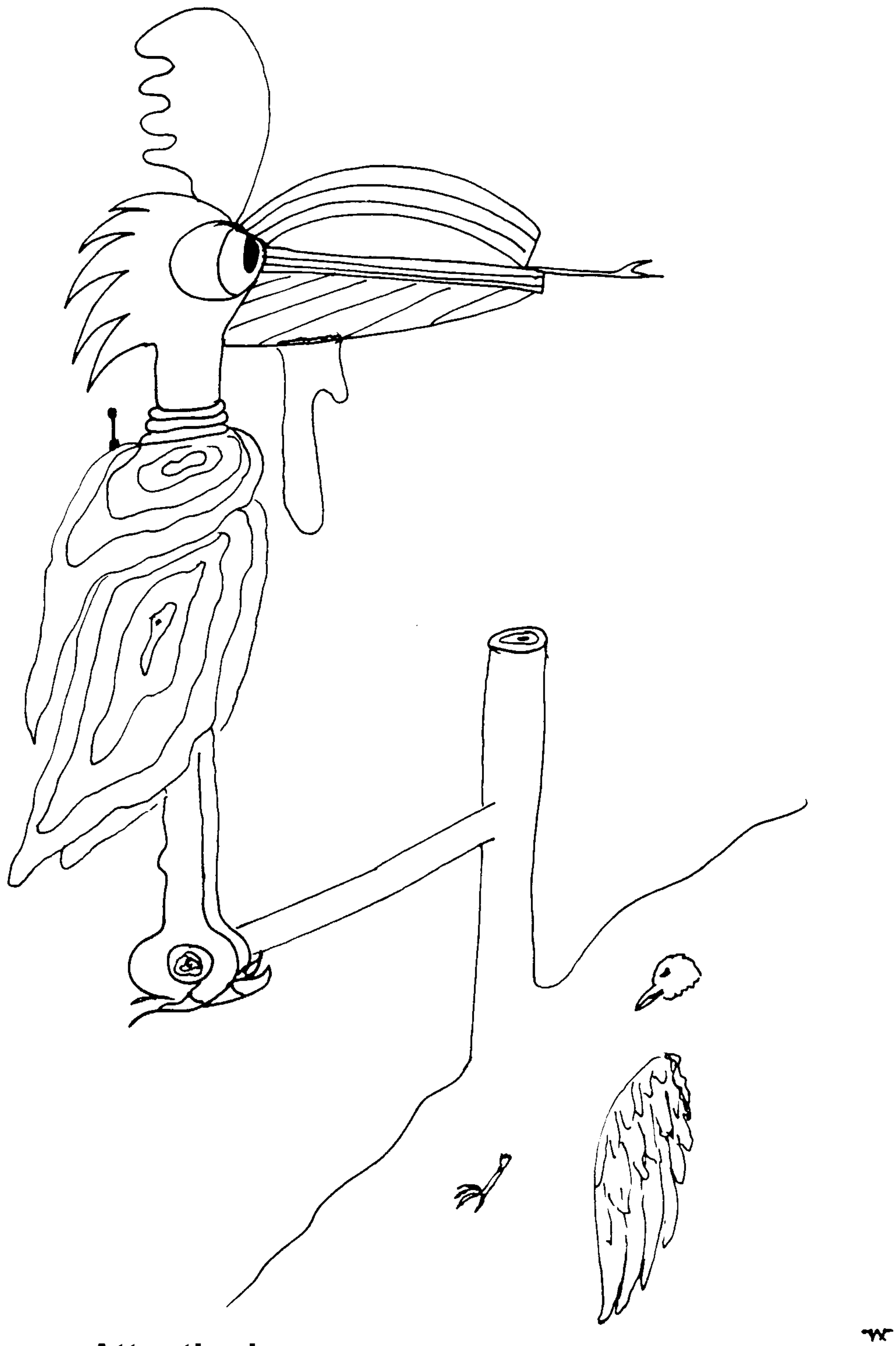
Table des matières

Préface

Chère lectrice, cher lecteur,

Nous nous sommes proposé d'étudier ainsi les mathématiques strictement composées afin de les comprendre d'une façon cohérente et de pouvoir les employer en tant qu'outil professionnel. L'étudiant mûr aura compris depuis longtemps que dans la vie l'on ne peut rien atteindre en aucun champ d'activité sans de bonnes connaissances et sans habilités dans l'application des outils. Cela n'est pas différent pour les mathématiques. L'outil le plus important des mathématiques est donc la logique. Sans la logique la compréhension reste difficile. Car les mathématiques sont considérées comme la science basée sur les preuves, comme domaine de la certitude, des résultats attestés et des formules exactes, qui n'admettent aucun malentendu. Et l'outil, pour le fait de prouver ou le fait de formuler exactement, le fait de définir, pour le fait de déduire, c'est la logique. En particulier c'est justement la logique à deux valeurs de vérité qui est encore très simple, du point de vue mathématiques. Nous commençons par celle-là. ça nous donne une base solide pour une mise au courant dans des domaines plus vastes, conformément au niveau: D'abord dans la théorie des ensembles, après, basé sur cela, dans le domaine des rapports. Alors ici nous pouvons appuyer de façon satisfaisante l'idée très centrale de l'application mathématique et de la fonction mathématique, sur laquelle on construit une grande partie des mathématiques consécutives. P.ex. plus tard dans le calcul différentiel– et intégral, on ne fait proprement rien d'autre que d'examiner des fonctions. En pratique on peut facilement résoudre des problèmes à l'aide de fonctions. D'autres régions aussi, par exemple l'algèbre de Boole — ou alors spécialement l'algèbre des circuits électriques — s'appuient directement sur la logique. Le fondement "logique" doit être solide afin que le bâtiment qu'on construit tienne. Essayons ainsi de nous y appliquer avec rigeur. Et n'oublions jamais le conseil: Un clou n'est rarement bien placé après un coup de marteau. Ne te laisse décourager; travaille avec persévérance et avec la pensée que tes facultés se développent de plus en plus. Mais n'oublions pas de rire à cause de cette matière difficile.ça porte de l'énergie et de la fraîcheur à la tête chaude, fumante et fatiguée.

Automne 1994/99 L'auteur



Attention!
Oiseau artificiellement intelligent

Warnung vor dem künstlich
intelligenten Vogel

Chapitre 1

Idée, origine de la logique propositionnelle bivalente

1.1 Pourquoi insistons–nous sur la logique dans les mathématiques?

Dans les écoles inférieures d'orientation principalement technique, on entend aujourd'hui assez souvent le terme de "logique " , peut-être dans le contexte des couplages électriques. C'est cependant une vue très spéciale qui ne laisse pas deviner l'ampleur de la matière à laquelle on fait allusion ici. Qu'est-ce qu'on comprend alors par "logique" dans les sciences exactes, dans les mathématiques?

Le terme de *logique* comprend aujourd'hui un domaine scientifique qui est réclamé par beaucoup de sciences comme partie d'elles–mêmes: Entre autres la philosophie, la théologie, la linguistique, la jurisprudence, les mathématiques. Il n'y a par conséquent pas de logique unique. La logique juridique n'a peut–être pas beaucoup à faire avec "la logique transcendentale" de Kant, qui appartient à la philosophie. Et ceci de nouveau, n'est pas à confondre avec la logique mathématique, que cette partie va traiter. La logique mathématique est une *logique formelle.* ça signifie que l'intérêt principal ne va ni au message, ni au contenu, ni au contenu intentionnel d'une construction linguistique, mais à la forme. Plus simplement: L'intérêt est pour la construction grammaticale. En outre nous pouvons nous consacrer ici seulement à une *partie très restreinte* de la logique mathématique: A la logique bivalente (à deux valeurs de vérité), avec une petite perspective dans le domaine incomparablement plus grand de la logique mathématique des prédicats. Tout le reste ne sera pas considéré.
On peut se demander maintenant quels sont les devoirs de la logique formelle des mathématiques. On discerne dès l'abord trois domaines de devoirs: Premièrement la logique est un domaine indépendant où se situent les questions inhérentes, qui appartiennent à la théorie de la connaissance. Deuxièmement la logique est aussi très apparentée aux autres domaines mathématiques, tels que la théorie des treillis, par conséquent l'algèbre de Boole — et basé sur cela l'algèbre des circuits ou bien la théorie des ensembles. La logique est le fondement ici. Troisièmement chaque science a son langage, ainsi donc aussi les mathématiques. Les mathématiques se servent, pour formuler les exposés et pour la construction des règles, du langage de la logique. Ici, la logique est donc utilisée comme le langage. *Retenons donc:*

Le langage des mathématiques est la logique formelle.

1.2 Comment et quand est-ce que la logique s'est formée? — Quel âge a–t–elle?

Le titre fait allusion à l'histoire. Faisons un saut en arrière. On peut trouver les premiers commencements de la "logique" formelle, plus tard nommée ainsi par Kant[1], chez Aristote[2]. Inspiré par Platon[3], Aristote c'est mis à raisonner sur la vérité et la fausseté d'ennoncés. Il a reconnu qu'on peut dériver des axiomes considérés comme vrais, par l'usage de règles d'opération, certaines propositions nouvelles qu'on doit considérer comme vraies à cause des règles. On appelle ces règles de déduction des *syllogismes*. Hormis quelques tentatives de Leibnitz[4], qui a essayé d'utiliser peut-être le premier une langue artificielle, ou de Lambert[5], la logique mathématique et formelle a dormi plus ou moins un sommeil de Belle au bois dormant jusque au 19ème siècle. Par les travaux de De Morgan[6] et Boole[7], la logique formelle a commencé à fleurir. Et au tournant du vingtième siècle nous constatons soudainement un début frénétique de la recherche, et une augmentation explosive du savoir, en particulier liés aux noms de Schröder[8], de Peano[9], de Peirce[10], de Frege[11], de Whitehead[12], de Russel[13], de Hilbert[14] et de Ramsey[15], de Turing[16], de Gödel[17], de Skolem[18], de Tarski[19] et d'autres. En particulier par les théorèmes de complétude et d'incomplétude, publiés par Gödel en 1931, a pu naître une conception du monde tout à fait différente. Analogiquement aux limites du monde matériel on a trouvé aussi des limites au monde de la pensée exacte et maintenant on sait donc où on ne pourra jamais parvenir.
A part tout ce qu'on vient de dire, il est important de retenir que la logique formelle qui se développe maintenant, n'est pas une chose ancienne mais plutôt récente.

1.3 Quant à l'objet

1.3.1 La logique, qu'est–ce que c'est?

Dans la logique philosophique on s'occupait autrefois des "lois de la nature" de la raison, de l'art de penser resp. de la pensée correcte. Dans cette logique, on traite les questions concernant les règles de la déduction raisonnable qui apparaissent contraignantes, les raisons pourquoi ces règles sont ainsi et les rapports entre la cause et l'effet. La logique philosophique actuelle s'occupe plutôt des déductions qui mènent à des propositions justes seulement à cause de la forme ou pour des raisons linguistiques, donc à l'aide de la logique symbolique ou formelle. La logique mathématique aussi est logique formelle. Elle traite des propositions formulées dans une langue "exacte", *logique propositionnelle,* ou bien, exprimé de façon peu floue, de propositions qu'on peut subdiviser, *logique des prédicats*. Principalement on s'intéresse à des questions telles que les suivantes:

1. Kant: philosophe allemand, 1724–1804
2. Aristote: Elève de Platon, 384–322 V. Chr.
3. Platon: Philosophe grec, 427–347 av.J.Chr.
4. Leibnitz: mathématicien et philosophe allemand 1646–1716
5. Lambert: mathématicien allemand 1728–1777
6. De Morgan: mathématicien anglais 1808–1871
7. Boole: mathématiciens anglais 1815–1864
8. Schröder: mathématicien allemand 1841 – 1902
9. Peano: mathématicien italien 1858 – 1932
10. Peirce: mathématicien américain 1839 – 1941
11. Frege: mathématicien allemand 1848 – 1925
12. Whitehead: mathématicien anglais 1861 – 1947
13. Russel: mathématicien anglais 1847 – 1970
14. Hilbert: mathématicien allemand 1862 – 1943
15. Ramsey: mathématicien anglais 1904 – 1930
16. Turing: mathématicien anglais 1912 – 1954
17. Gödel: mathématicien austrichien, né en 1906
18. Skolem: mathématicien norvégien 1887 – 1963
19. Tarski: mathématicien polonais, 20ème siècle

– L'intégralité d'une langue composée formellement, possibilité de prover : Est-ce que toutes les propositions vraies sont aussi deduisibles dans la langue elle-même?
– Possibilité de décision concernant un problème: Est-ce qu'un chemin de décision existe? Quelles constructions linguistiques sont déduisibles?
– Possibilité de définir : Est–ce que la langue est suffisamment riche (ample) ou est–ce que quelque chose dont on "voudrait parler" ne peut pas du tout être défini?
– La sécurité: Un ensemble de règles (un système d'axiomes) est–il exempt de contradictions — et par conséquent la théorie basée sur cela — ?
– La faisabilité: Comment la théorie est-elle à construire maintenant?
– Problème de la représentation: Quel est le minimum d'outils linguistiques qu'on nécessite pour pouvoir rendre quelque chose?
– Niveau de la langue: Combien doit–elle être une langue compliquée pour pouvoir exprimer quelque chose qu'on veut exprimer?
– La forme: Quand est–ce que le niveau de vérité d'une proposition dépend seulement de la forme et non du contenu?
– Le contenu: Comment est–ce que le contenu et la forme sont liés?
– Etc.

1.3.2 Où est-ce qu'on va s'arrêter?

Et on doit alors savoir tout cela? — Oh non, justement pas. Ici nous développerons le langage de la logique seulement autant qu'il est essentiel et de valeur pour ce qui suit et pour la formation commune. Ça signifie que nous allons à peine quitter le vieux "niveau aristotélien" . Nous n'avancerons pas dans la logique mathématique moderne, dans la *méthodologie des sciences exactes* resp. dans la *logique des prédicats de niveau élevé* (ou dans la *logique graduée*). Là le temps, la formation et la nécessité manquent.

Nous poursuivons ici le chemin *non–sévère*, dit *"naïf"*. Ça suffira.

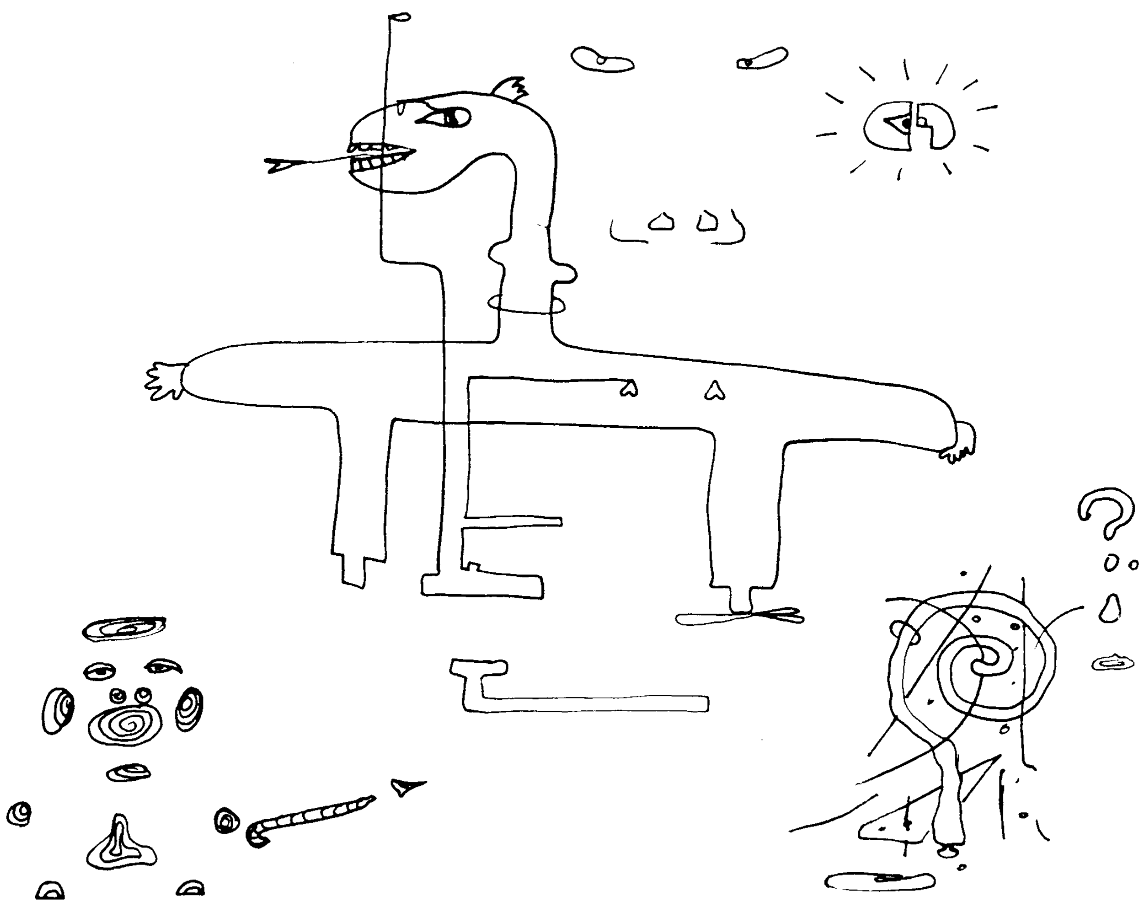
1.4 Littérature conseillée

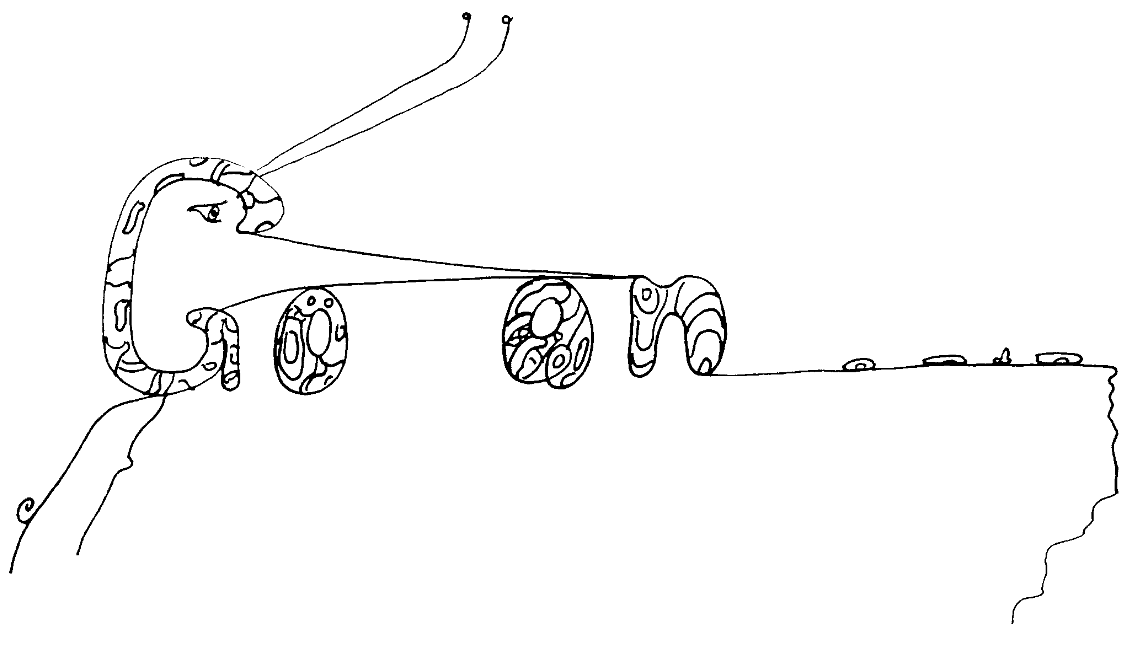
La littérature sur la logique formelle est extrêmement étendue. Mais la plupart des livres ne sont pas écrits pour l'étudiant ingénieur. De tels livres paraissent à l'amateur, quant au niveau de la langue, illisibles, incompréhensibles, inutilisables. Une littérature étendue existe en anglais et en allemand. Les oeuvres suivantes, que l'auteur connaît, peuvent être considérées comme conformes au niveau: Mendelson, SCHAUM (Bibl.: mendelson), Lipschutz, SCHAUM (Bibl.: lipschutz). Ou bien aussi des livres spéciaux pour les collèges supérieurs, (éditions scolaires)(Bibl.: jehle , deller). Malheureusement on constante que le chapitre "logique" manque d'ordinaire dans les livres techniques mathématiques pour les ingénieurs.
Indications pour les avancés: La littérature de niveau plus élevé se trouve entre autres dans Bibl.: asser, church, hermes, hilbert, shoen, tarski, vandalen. En ce qui concerne la littérature en langue française, les étudiants sont priés de s'adresser à l'auteur.

1.5 Exercices

Les exercices pour la partie deux se trouvent aussi sur les feuilles d'excercices *DIYMU*. (Voir Bibl.: wirz [20]

20. Livre d'exercice *DIYMU*: "En guise d'introduction" (Bibl.: wirz).





Chapitre 2

Logique propositionnelle

2.1 Propositions, variables propositionnelles et valuations

2.1.1 Propositions

Nous allons nous demander ce que signifie la notion de *proposition.* Afin que nous puissions parler de *propositions*, nous devons en développer d'abord une idée. Comme nous n'avons encore défini aucune notion simple sur laquelle nous pourrions nous baser, nous allons suivre l'idée ci–dessous(" idée de notion" pseudo − définition, pas encore stricte:

Explication de la notion 1 (Proposition) *: Une* **proposition** *est une création linguistique, qui exprime une "vérité" ou une "fausseté".*

Jusqu'à maintenant nous n'avons pas défini ce que *" vrai "* ou " pas vrai " (resp. *" faux "*) devrait signifier. Nous supposons que chacun est si raisonnable qu'il peut apprécier quand quelque chose est compréhensiblement vrai ou non [1]. Ce qui doit être considéré comme "raisonnable" peut être décidé par des personnes retenues raisonnables au moyen d'une discussion démocratique.

L'homme n'a pas d'autre possibilité pour parvenir à la " vérité " par la raison. En outre nous supposons aussi que nous savons suffisamment ce qu'est une " création linguistique ". Ici les propositions sont donc des *créations de la raison* –, semblablement au point dans la géométrie, qui ne peut non plus être défini plus précisément. Aujourd'hui cela ne dérange plus personne sérieusement.

Nous trouvons des propositions spécialement claires du point de vue de leur nature dans le *propositions mathématiques* ou (si cela est important) dans les *théorèmes mathématiques* qu'on estime vrais, si on accepte les conditions de l'hypothèse. Par exemple les équations ou les inéquations avec des nombres sont des propositions mathématiques simples. *Pour cette raison nous appliquerons principalement dans les exemples suivants des propositions mathématiques.*

Exemples:

$a :\equiv$ "$2 + 2 = 4$"	(proposition math. vraie [2])
$b :\equiv$ "$2 + 2 = 5$"	(proposition math. fausse)
$c :\equiv$ "$2 + 2 + 5$"	(pas de proposition)
$d :\equiv$ "Est-ce que tu vas dormir?"	(pas de proposition)
$e :\equiv$ "Viens, s.t.p.!"	(pas de proposition)
$f :\equiv$ "Le bouleau est un arbre!"	(pas de proposition)

1. Le problème de la nature de la vérité comme "problème de la connaissance" est de toute façon un problème fondamental de la philosophie. La philosophie connaît trois problèmes de fond: Le problème de l'*être* , le problème de la *reconnaissance* et le *problème de la morale*.
2. Si on accepte l'arithmétique avec les nombres.

$g :\equiv$ "1.1111 n'est pas un nombre" (proposition math. fausse)
$h :\equiv$ "Si l'interrupteur est ouvert, le courant passe." (proposition fausse)

Remarque 1 (quant aux symboles utilisés): Ici a, b, c, d et e sont des noms pour les propositions. Le signe ":≡" signifie "définit comme équivalent". "≡" seul signifie équivalent. Nous utilisons ce signe pour éviter des confusions avec le signe d'égalité dans les propositions mathématiques (p.ex. dans $2 + 3 = 5$).

Remarque 2 (quant à la logique bivalente):
Dans la *logique bivalente* on considère seulement des propositions qui sont *vraies* ou *fausses* et qui ne laissent ouverte *aucune autre possibilité* pour la valeur de vérité. Dans la langue quotidienne, cette situation représente plutôt une exception qu'on aime repousser dans les mathématiques. P.ex. un objet n'est pas "clair" ou "non clair" (à l'occasion on pourrait dire "sombre".) L'objet possède une certaine clarté. La même chose vaut pour noir et blanc. Entre les deux extrêmes il y a beaucoup, beaucoup de nuances de gris. Prenons comme autre exemple le chat, "cher" animal domestique , mais qui peut être très méchant quand il nous griffe. Et aussi le bon chien de maison, qui n'éveille pas du tout d'enthousiasme, quand il mord au moment où on ne s'y attend pas ... Le contraire de la déclaration (ici *proposition*) "le chien est *bon*" n'est donc pas la déclaration "le chien est *mauvais*" ou "le chien n'est *pas bon*", mais: "Le chien n'est *parfois pas bon*". Car le chien se montre une fois bon, une autre fois nous le subissons comme chien mauvais, une fois plutôt comme bon et mauvais en même temps, et une quatrième fois ni bon ni mauvais ni autre chose, car il n'est plus rentré à la maison depuis quelques jours, il n'est simplement pas pas présent.
Ici les notions de "vrai" et de "faux" ne suffisent plus. On a besoin de degrés intermédiaires variés, qu'on ne peut pas ranger dans une échelle graduée unidimensionnelle, semblablement aux couleurs. Ainsi nous arrivons à une *logique polyvalente* . Si on introduit encore la valeur de vérité *indéterminée*, on parvient donc à une *logique trivalente*[2]. On ne peut pas encore décider si la phrase "Dans deux cent ans la Suisse sera un royaume!" exprime une vérité, elle reste donc d'abord absolument indéterminée pour nous, parce que nous ne le savons pas encore. Mais la déclaration n'est pas "variable", car nous ne pouvons rien changer ou remplacer à la réalité de l'avenir. Ce que nous pouvons changer, c'est seulement notre idée de l'avenir. Même si nous interrogeons maintenant un oracle. Seule une génération postérieure connaîtra avec sûreté absolue la réalité. Aujourd'hui la vérité nous reste inaccessible — peut–être nous pouvons l'influencer encore par nos actions, mais seulement dans la direction qui existerait une fois fixement. Car il y a seulement un passé et aussi seulement un avenir.
Un autre exemple peut-être plus frappant: Pendant une croisière un groupe de passagers aisés et menacés par un passager clandestin armé soudainement émergé, évidemment appauvri, en chiffons et qui a faim. On voit tout de suite qu'il n'hésitera pas à se servir de son arme pour demander de la nouriture −, peut–être il ne lui reste aucun choix d'agir ainsi. Le capitaine aussi armé découvre la chose et tire tout de suite, le passager clandestin tombe mort sur le pont, abatu. — Est–ce que la façon d'agir du capitaine est bonne ou mauvaise? — Voici un problème de morale qui ne pourra jamais être résolu. Ici on n'avance pas avec "vrai" ou "faux" seulement. Chaque jugement pour ou contre ton opinion peut être identifié comme idéologie. Des questions pareilles émergent quand il s'agit de héros nationaux (qui peuvent être les propres idoles — ou bien les idoles odieuses des ennemis) de martyrs, de petits amis, de gens admirés et autres. Mais ici nous cesserons de considérer la logique polyvalente.

En ce qui concerne les propositions (déclarations), il faut mentionner qu'ici nous voulons diriger notre intérêt principal vers les *propositions (déclarations) mathématiques.* Plus tard d'autres déclarations telles que *"le courant passe parce que l'interrupteur est fermé. "* jouent un rôle dans l'*algèbre des circuits électriques* (spécialement l'algèbre de Boolsche).

2. P.ex. logique de Lukasiewicz et Post ainsi que la logique intuitioniste.

2.1.2 Variables propositionnelles

Exemple: Nous considérons l'équation "$x = y$" .

Si on remplace les variables x et y par 1, l'équation se transforme en proposition (déclaration) $a :\equiv'' 1 = 1''$. Nous acceptons naturellement cette proposition (déclaration) comme vraie. Mettons par contre $x = 2$ et $y = 3$, ainsi l'équation se transforme en proposition (déclaration) $b :\equiv'' 2 = 3''$. Cette proposition représente selon notre compréhension une équation numérique fausse. Cependant à l'équation $A :\equiv'' x = y''$ n'est liée aucune valeur de vérité *ni vrai, ni faux*. A peut être transformé en proposition (déclaration) par l'introduction des valeurs pour x et y. Mais A elle–même est provisoirement une *place neutre*, un *remplaçant* ou un *support de place* pour une proposition (déclaration), par exemple comme à un ordinateur une place dans la mémoire qui peut prendre un symbole, mais qui n'est elle–même pas un symbole, mais justement et simplement une place vide. Par conséquent nous déterminons:

Explication de la notion 2 (Variable propositionnelle) *: Nous appelons un signe orthographique qui se transforme après le remplacement par une création linguistique en une proposition (déclaration)* **variable propositionnelle***.*

Remarque:

Symbole 1 (pour propositions et variables propositionnelles) *Pour garantir en tout temps la distinction entre propositions (déclarations) et variables propositionnelles, nous appliquons pour les propositions des lettres* **minuscules***, par exemple $a, b, c \ldots$, et pour les variables propositionnelles des* **majuscules***, par exemple $A, B, C \ldots$.*

P.ex. on peut donc mettre pour la variable A ou la place vide A une proposition (déclaration) déterminée a, qui peut être vraie ou fausse. Dans la *logique bivalente* on a ici toujours deux possibilités. A peut passer à une proposition *vraie* ou à une proposition *fausse*.

Schématiquement:

Tableau 3. 0: Variable propositionnelle, propositions et valeurs de vérité

Variable propositionnelle A	valeur de vérité liée	
	Variante 1	Variante 2
Remplacé par proposition *vraie* a_1	w	1
Remplacé par proposition *fausse* a_2	f	0

Explication de la notion 3 (Valeurs de vérité) *: Les abréviations utilisées telles que w, f resp. 1, 0 s'appellent* **valeurs de vérité***. Elles signifient "vrai" ou "faux".*

Si nous pouvons nous engager à déterminer une méthode claire à la constatation de la valeur de vérité d'une proposition (par exemple par *vérification interpersonale*, obtention d'un accord dans une commission de gens raisonnables avec la même langue), ainsi nous pouvons définir:

Définition 2.1 (Valeurs de vérité d'une proposition a) *:*
La **valeur de vérité** *$t(a)$ d'une proposition a est définie par*

$$t(a) := \begin{cases} 0 & , \text{ si } a \text{ est reconnu comme faux.} \\ 1 & , \text{ si } a \text{ est reconnu comme vrai.} \end{cases}$$

(*Remarque:* "t" dans $t(A)$ signifie *"truth"*[3] . $t(a)$ est aussi une *fonction* dans le domaine de définition "ensemble de propositions" dans le domaine de valeurs {0,1}.)

Dans la logique propositionnelle, on ne s'intéresse pas en premier lieu au *contenu* d'une proposition mais plustôt à la *forme*. Concernant la forme, jusqu'ici nous avons rencontré seulement *des propositions*

3. anglais "vérité"

non démontables, c.–à.–d. *élémentaires* ou *atomiques.* Par contre il existe aussi des propositions *composées.* Les propositions élémentaires n'ont pas de forme particulière. Elles ne se laissent pas décomposer en propositions partielles sensées, qui sont à leur tour encore vraies ou fausses. La qualité unique, qu'elles ont encore, est d'être vraies ou fausses elles-mêmes. Quant à cela un exemple: "Le sapin est un arbre." Cette proposition ne peut plus être décomposée en propositions partielles plus petites. Pour les études ultérieures, par conséquent, nous pouvons ignorer le contenu d'une proposition et regarder seulement encore sa valeur de vérité, car celle–ci suffit ici.

Définition 2.2 (Proposition élémentaire) *:* **Propositions élémentaires** *sont des propositions qui ne sont pas décomposables en des propositions partielles.*

Comme nous savons maintenant, les variables propositionnelles se laissent remplacer par des propositions auxquelles sont appliquées chaque fois les valeurs de vérité 1ou 0. A une proposition est donc *adjointe* une valeur de vérité. Considérons maintenant à la place d'une variable propositionnelle (comprise comme espace libre) non seulement une proposition a, mais aussi sa valeur de vérité adjointe $t(a)$, alors nous attribuons dans ce cas une valeur de vérité à la variable propositionnelle par la proposition. Nous disons que nous *occupons* ou *recouvrons* la variable propositionnelle par une valeur de vérité resp. nous mettons la valeur de vérité comme *poids* ou comme *valuation* à la variable.

Définition 2.3 (Poids) *: Si on applique une valeur de vérité* 0 *ou* 1 *à une variable propositionnelle A, on dit: "***poids** *des valeurs de vérité" sur A ("valuation" de A).*

Par l'application d'un poids des valeurs de vérité sur une variable propositionnelle, la variable est par conséquent tacitement remplacée par une proposition de la forme "cette place est occupée par 0" ou "la place est occupée par 1". La variable propositionnelle est transformée ainsi en une *proposition abstraite*, car à part la valeur de vérité qu'on y a placée, le contenu et la forme de la nouvelle proposition ne jouent pas de rôle pour notre intention. Le contenu et la forme des propositions originales a_i ne doivent pas nécessairement être connus. Dans la *logique formelle* nous nous intéressons par conséquent uniquement aux poids et aux liaisons des variables propositionnelles (voir chapitre prochain), mais au le contenu des propositions.

Tableau 3. 1: Valeurs de vérité comme poids à une variable propositionnelle

Variable propositionnelle	A	Signification	proposition adjointe
Poids	1	valeur "vrai"	proposition a_1, avec contenu vrai quelconque
	0	valeur "faux"	proposition a_2, avec contenu faux quelconque

Chapitre 3

Propositions sur des propositions: Propositions composées

3.1 La négation

Pour obtenir la négation d'une proposition, nous acceptons la convention suivante. A une proposition a_1 est liée une nouvelle proposition a_2 comme il suit: a_1 est exactement vrai quand a_2 est faux.

Exemples: (1) $a_1 :\equiv$ "Il pleut." (3) $b_1 :\equiv$ "$3 = 5$"
(2) $a_2 :\equiv$ "Il ne pleut pas." (4) $b_2 :\equiv$ "$3 \neq 5$"

D'après notre sentiment naturel de la langue nous considérons les proposition a_2 (resp. b_2) comme le *contraire* de a_1 (resp. b_1). Par conséquent personne ne s'opposera si nous définissons:

Définition 3.1 (Négation, "$\neg$") *: Une proposition a_2 adjointe à la proposition a_1 qui est exactement vraie quand a_1 est fausse, s'appelle "**négation** $\neg a_1$" de a_1.*

On peut rendre cette définition aussi par un tableau avec des *variables propositionnelles*, dans lequel on donne une collection complète de tous les poids possibles de valeurs de vérité. Chaque poids représente un type de proposition. Nous appelons un tel tableau *tableau de vérité*. Comme nous avons ainsi décrit la notion de *tableau de vérité* de façon utile et compréhensible, mais seulement exemplairement et non pas de façon complète sans lacunes, nous ne pouvons pas parler ici d'une *définition mathématique* exacte d'une notion. Mais l'explication donnée de la notion suffira pour notre intention.

Explication de la notion 4 (Tableau de vérité) *: Nous appelons un tableau de tous les poids possibles de variables de propositions avec les valeurs de vérité* **tableau de vérité**.

On peut définir donc la négation par le tableau suivant:

Tableau 3.0: Tableau de vérité pour la définition de $\neg$

A	$\neg A$
0	1
1	0

La proposition $\neg A$ est maintenant formellement composée, c'est à dire par les signes $\neg$ et A. Nous qualifions le signe $\neg$ comme *signe logique* .

Attention: La proposition $a_3 :\equiv$ "Le soleil brille" n'est pas la négation de $a_1 :\equiv$ "il pleut". Il peut pleuvoir même quand le soleil brille. Pensons aux arcs–en–ciel merveilleux. Alors attention! Méfie–toi d'introduire, en interprétant les propositions, des relations internes qui n'ont effectivement rien à faire avec la chose.

Remarque: Dans la logique, nous appliquons le signe $\neg$ (par exemple dans $\neg A$, mais non dans $\bar{A}$), pour éviter des confusions avec la théorie des ensembles (ensemble complémentaire), l'algèbre des circuits électriques, ou avec les nombres complexes (nombre complexe conjugué). Car dans les définitions mathématiques, nous employons les symboles logiques comme éléments de langue déjà connus (méta–langage) pour définir des symboles mathématiques. Cette orthographe a techniquement l'avantage qu'elle est *unidimensionnelle*. Elle pourrait être lue par une machine dans une trace. Ça joue aussi un grand rôle pour les études des relations entre la logique et des machines.

3.2 La conjonction (liaison "et")

Ici et dans les sous–chapitres suivants, nous aimerons considérer des liaisons logiques, qui consistent en un signe logique (aussi appelée *symbole logique*), et deux variables propositionnelles. Pour pouvoir définir ces liaisons de façon raisonnable, nous suivons d'une part le sentiment de la langue. D'autre part nous ne voulons inspirer le soupçon qu'ici il règne l'arbitraire absolu. Alors nous baserions les mathématiques sur des produits du hasard. Pour rendre plus acceptables les définitions, on a confiance en des "sentiments raisonnables" pendant un *dialogue philosophique* sur le thème momentanément en question. Un préconiseur *(proponent)* et un antagoniste *(opposant)* devraientt discuter à fond le sujet en question, toutes les possibilités "raisonnables" incluses. Si une proposition paraît suspecte on se demande, si le contraire (le complément) vaudrait peut–être mieux. S'il arrive que l'antagoniste ne peut pas nous convaincre du contraire d'une proposition faite, tous les deux acceptent la proposition. Car dans le cadre de la logique bivalente, en dehors de *vrai* et de *faux*, il n'existe aucune troisième possibilité.

D'après ce qu'on vient de dire on ne peut probablement rien objecter au classement suivant des valeurs de vérité appliquées à la proposition composée ou totale:
Exemples du calcul commun avec des nombres:

$a :\equiv$ "$2+2=4$" et "$3\cdot 3=9$"	(proposition vraie)
$b :\equiv$ "$2+2=5$" et "$3\cdot 3=9$"	(proposition fausse)
$c :\equiv$ "$2+2=4$" et "$3\cdot 3=6$"	(proposition fausse)
$d :\equiv$ "$2+2=5$" et "$3\cdot 3=6$"	(proposition fausse)

Ici, nous produisons donc, de deux propositions partielles, au moyen de "et" une nouvelle proposition totale, qui est soit vraie soit fausse. (P. ex. de la propositions $a_1 :\equiv$ " $2+2=4$" et de la proposition $a_2 :\equiv$" $3\cdot 3=9$" il résulte la nouvelle proposition a.) Ecrit symboliquement nous avons le classement suivant:

$$(a_1, a_2) \mapsto a :\equiv a_1 \wedge a_2.$$

"$\wedge$" est donc le symbole pour " et ". Par conséquent nous pouvons définir "$\wedge$" par le tableau de vérité suivant:

Définition 3.2 (Conjonction, "$\wedge$") *:*

Tableau 3.1: Définition de la conjonction

Var	A	B	$A\wedge B$
$t(Var)$	0	0	0
	0	1	0
	1	0	0
	1	1	1

La proposition $a :\equiv de \wedge a_1 a_2$ n'est par conséquent vraie que si a_1 aussi bien que a_2 sont vraies. Sinon a est faux!

Remarque: Dans *l'algèbre des circuits électriques* on applique souvent le point de multiplication à la place de "et" (p.ex. $a_1 \cdot a_2$ au lieu de $a_1 \wedge a_2$). Mais dans la logique pure ceci peut causer des *confusions*.
Exemple:

$$(a_1 \wedge a_2) :\equiv (\underbrace{3 \cdot 3 = 9}_{a_1} \wedge \underbrace{6 + 5 = 11}_{a_2}) \not\equiv (3 \cdot 3 = \underbrace{9 \cdot 6 + 5}_{59} = 11)$$

3.3 Adjonction, disjonction (liaison "ou")

Nous étudions encore quelques propositions mathématiques. Celles-ci n'ont pas le désavantage de propositions du langage familier qu'on ne peut pas bien considérer uniquement dans leur réduction abstraite et simple quant à leurs valeurs de vérité, pour des raisons d'habitude. Qui arrive facilement à considérer une proposition comme "Napoléon est mort ou Pierre a une barbe longue" indépendamment de l'intention spécifique? Plus d'un se demandera tout de suite ce que Napoléon a à faire avec la barbe de Pierre — et secouera la tête. Mais une éventuelle relation entre le contenu des deux propositions partielles n'est d'aucun intérêt maintenant! C'est ce que nous voulons finalement ignorer.

Exemples: Nous pouvons accepter tout de suite les valeurs de vérité des propositions composées totales qui suivent ci–dessous. Si non on devrait accepter le contraire, ce qui correspond beaucoup moins au sentiment naturel. Une troisième proposition est impossible, car nous traitons la logique bivalente:

$a :\equiv$ "$2 + 2 = 4$" ou "$3 \cdot 3 = 9$"	(proposition vraie)
$b :\equiv$ "$2 + 2 = 5$" ou "$3 \cdot 3 = 9$"	(proposition vraie)
$c :\equiv$ "$2 + 2 = 4$" ou "$3 \cdot 3 = 6$"	(proposition vraie)
$d :\equiv$ "$2 + 2 = 5$" ou "$3 \cdot 3 = 6$"	(proposition fausse)

Nous pouvons accepter une proposition totale liée par *"ou"* comme *vraie*, dès qu'une proposition partielle est reconnue pour vraie. Lorsque "ou" relie deux propositions, il suffit qu'une soit vraie.

Nous écrivons symboliquement:

$$(a_1, a_2) \mapsto a :\equiv a_1 \vee a_2.$$

Le signe "$\vee$", qui signifie maintenant "ou", symbolise la lettre initiale du mot latin "vel" [1]. "$\wedge$" est le "$\vee$" renversé. Maintenant nous pouvons accepter la définition suivante comme raisonnable:

Définition 3.3 (Adjunktion, "$\vee$") *:*

Tableau 3.2: Définition de l'adjonction

Var	A	B	$A \vee B$
$t(Var)$	0	0	0
	0	1	1
	1	0	1
	1	1	1

Remarque quant à la composition du tableau: Il apparaît pratique de choisir l'ordre des valeurs de vérité de A et de B de façon que elles-ci représentent exactement une *énumération des nombres binaires*. Alors on peut lire les lignes sous les variables au début comme nombres binaires. Lors de quatre variables au début, on aurait d'abord 0000, puis 0001, puis 0010, puis 0011, puis 0100, puis 0101 etc. .

1. lat vel. " vel" signifie "ou".

3.4 L' exclusion (liaison "soit – soit / ou – ou")

"Exclusion" signifie ici *ou exclusif*. Si on entend: "La terre est soit une planète — soit elle n'est pas une planète", généralment personne n'a rien à objecter à cela. Mais soyons attentifs maintenant! Ne nous laissons pas séduire par le contenu. Nous ne voulons pas considérer des propositions partielles où, à part la valeur de vérité, la structure du contenu joue un rôle.

Nous écrivons une proposition $a :\equiv a_1$ "soit – ou soit" a_2 comme il suit:

$$(a_1, a_2) \mapsto a :\equiv a_1 \dot{\vee} a_2.$$

Maintenant nous définissons "soit ou – ou" par le tableau de vérité ci–dessous. Retenons qu'en cas de doute la valeur de vérité est à accepter, si personne n'a rien à objecter:

Définition 3.4 (Exclusion, "$\dot{\vee}$") *:*

Tableau 3.3: Définition de l'exclusion

Var	A	B	$A \dot{\vee} B$
$t(Var)$	0	0	0
	0	1	1
	1	0	1
	1	1	0

Cette définition est en accord avec la façon usuelle de raisonner logiquement. Il est difficile d'y contredire.

3.5 La subjonction de propositions indépendantes

Dans ce sous–chapitre il s'agit de propositions du type *si–alors*. "Si la baignoire est pleine, alors l'eau commence à déborder" est un exemple familier d'une telle proposition. – Mais exactement de tels exemples familiers ne nous servent à rien dans la logique mathématique parce qu'entre les parties de la phrase il existe une relation du contenu et non une relation purement formelle. (L'eau de la baignoire exige la baignoire.) Ici nous ne voulons *pas* examiner spécialement les propositions "si–alors" liées quant au contenu.

Il s'agit plutôt de composer des propositions par des propositions qui existent indépendamment les unes des autres. Dit différemment: Nous voulons produire de nouvelles propositions en liant les propositions disponibles par des symboles logiques et en produisant de cette manière de nouvelles propositions. Et nous dérivons les signes (symboles) logiques de conjonctions gammaticales[2]. Dans l'exemple l'eau débordant de la baignoire a à faire nécessairement avec la baignoire: Quant au contenu les propositions ne sont pas indépendantes. La valeur de vérité de la deuxième proposition est ainsi influencée substantiellement par le contenu de la première proposition. D'autre part plus d'un trouvera bizarre si nous essayons de lier des propositions quotidiennes et indépendantes par "si–alors". Exemple: "Si la lune a des oreilles, mon oncle réussit à faire un saut de 40 mètres". Chacun ressentira propablement une telle liaison de propositions comme un *non–sens*, parce que contraire à l'usage quotidien. Ici naturellement les propositions partielles sont indépendantes. Mais pourquoi dire: "Si la lune a des oreilles"? — Si l'on respecte la réalité physique, il s'agit ici d'une proposition fausse. Mais toutefois d'une proposition. Mais sur un dessin d'enfant, on peut même découvrir une chose pareille et par conséquent là c'est vrai. — Comment devrait–on juger par conséquent la valeur de vérité d'une proposition composée, si déjà le contenu non essentiel nous cause énormément de peine? De telles constructions sont inhabituelles et inaccoutumées dans le langage familier. Souvent nous reconnaissons la deuxième partie de propositions de la langue parlée comme la spécialisation de la première partie, c.–à.–d. nous constatons une liaison interne. Par

2. Conjonction: C'est une des 10 espèces de mots.

contre dans le monde des contes:"Blanche-Neige est devenue vieille. Par conséquent elle a été mangé par le loup." Comment est-ce qu'on veut argumenter contre cela?
Comment traiter des propositions mathématiques dont une est indépendante de l'autre? La disposition suivante offre une méthode: Si nous trouvons une proposition drôle et ne pouvons pas tout de suite l'accepter ou la repousser, nous nous demandons si la proposition est donc fausse, et pensons ainsi que le contraire doit donc être vrai. Il y n'a pas de troisième valeur de vérité dans la logique bivalente. Si on ne peut pas accepter la vérité du contraire, c.–à.–d. si on doit la repousser, nous acceptons la proposition.

Prenons par exemple une équation. Ici, il s'agit d'une proposition indépendante, qui peut être vraie ou fausse. De telles équations ne sont pas liées en ce qui concerne le contenu, parce qu'aucune n'est utilisée pour garantir l'existence de l'autre. Ainsi nous obtenons p.ex. des propositions composées de deux équations:

$a :\equiv$ S'il vaut "$2+2=4$", il vaut aussi "$3\cdot 3=9$". (proposition vraie)
$b :\equiv$ S'il vaut "$2+2=5$", il vaut aussi "$3\cdot 3=9$" (proposition vraie)
$c :\equiv$ S'il vaut "$2+2=4$", il vaut aussi "$3\cdot 3=6$" (proposition fausse)
$d :\equiv$ S'il vaut "$2+2=5$", il vaut aussi "$3\cdot 3=6$" (proposition vraie)

On ne peut rien objecter si quelqu'un conclut quelque chose de vrai ou bien quelque chose de faux d'une proposition fausse. Cela va toujours bien, car le cas, où cela pourrait aller mal, n'existe pas du tout. Sous la condition d'une équation fausse, nous pouvons déduire un équation vraie ou une équation fausse, c.–à.–d. conclure n'importe quoi. Car le cas, dans lequel on trouve et accepte la condition, n'existe pas. Par conséquent ici nous ne pouvons jamais effectuer une conclusion fausse. Par conséquent nous devons accepter *vrai*.
De quelque chose de vrai, nous pouvons naturellement conclure quelque chose de vrai. Mais de quelque chose de vrai nous ne devons jamais déduire quelque chose de faux, ça voudrait dire faire des fautes. Partant de vérités, il ne faut pas pouvoir déduire du non–sens .
Par conséquent nous pouvons définir la liaison "si–alors", marquée symboliquement par le signe " $\Rightarrow$", comme il suit:

Définition 3.5 (Subjonction, "$\Rightarrow$") *:*

Tableau 3.4: Définition de la subjonction

Var	A	B	$A \Rightarrow B$
$t(Var)$	0	0	1
	0	1	1
	1	0	0
	1	1	1

Remarque concernant les flèches: Dans les mathématiques, nous appliquons encore d'autres sortes de flèches: P.ex. $A \mapsto B$ signifie une *application* de A à B. $x \to x_0$ signifie "converger" resp. "raprocher" (constituer une valeur limite) etc.. Au lieu de $A \Rightarrow B$ nous écrivons aussi $B \Leftarrow A$.

Façons d'exprimer: Nous lisons $A \Rightarrow B$ comme "si A vaut, il suit que B vaut aussi". Ou bien comme "si A donc B". Ou "si A est vrai, B est aussi vrai" etc.. Généralement on trouve les expressions *"implication"*, *"implique"*, *"est nécessaire"* ou *"est suffisant"* seulement dans le contexte des subjonctions vraies. (Mais dans les mathématiques, qui depuis Aristote ont toujours été acceptées comme "internationales", les auteurs ont encore la liberté de constituer un lexique raisonnable et adapté à la situation en question. La conséquence en est malheureusement que tous n'appliquent pas exactement la même langue, ce qui crée rarement des inconvénients. Cela ne joue aucun rôle, car les bons mathématiciens livrent leur langue technique directement avec la théorie, et d'autres bons mathématiciens réussissent à les comprendre.)

3.6 La bijonction de propositions indépendantes

Sous "bijonction" on entend les *liaisons précisément (exactement)–quand–alors–si*. Les exemples suivants peuvent clarifier la situation concernant les valeurs de vérité. Considérons que nous utilisons de nouveau des propositions indépendantes en ce qui concerne le contenu, parce que seulement les valeurs de vérité et la liaison logique "précisément–quand–alors–si" sont importants et non pas la relation qu'on a éventuellement quant au contenu.

$a :\equiv$ "$2+2=4$" exactement si "$3 \cdot 3 = 9$".	(proposition vraie)
$b :\equiv$ "$2+2=5$" exactement si "$3 \cdot 3 = 9$"	(proposition fausse)
$c :\equiv$ "$2+2=4$" exactement si "$3 \cdot 3 = 6$"	(proposition fausse)
$d :\equiv$ "$2+2=5$" exactement si "$3 \cdot 3 = 6$"	(proposition vraie)

Si on juge correcte la dernière ligne, c.–à.–d. "incorrect quand 'exactement si' faux", nous ne pouvons rien objecter à cela. Car on ne peut repousser cette exactitude. Ainsi on doit l'accepter. Symboliquement nous utilisons pour "exactement si alors" le signe " $\Leftrightarrow$". Nous définissons la liaison logique comme il suit:

Définition 3.6 (Bijonction, "$\Leftrightarrow$") *:*

Tableau 3.5: Définition de la Bijonction

Var	A	B	$A \Leftrightarrow B$
$t(Var)$	0	0	1
	0	1	0
	1	0	0
	1	1	1

Remarque: Maintenant il paraît raisonnable de donner des noms aux symboles ou aux signes introduits, qui signifient une certaine liaison. Par conséquent nous employons les notions suivantes:

Explication de la notion 5 (Symboles logiques) *:*
Nous appelons les symboles ou signes de liaison $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\dot{\vee}$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ *des* **symboles logiques**.

Et en outre:

Explication de la notion 6 (Fonctions logiques) *: Par les symboles logiques on applique une nouvelle valeur de vérité à un poids (valeurs de vérité) des variables propositionnelles ainsi liées, c'est la valeur de vérité de la liaison (connection). Une telle application s'appelle* **fonction logique** *ou* **binaire**.

3.7 Parenthèses

Nous considérons deux propositions composées $R \equiv A \wedge B$ et $S \equiv B \vee C$. Maintenant on peut supposer que l'expression $Z \equiv: A \wedge B \vee C$ n'est plus univoque. Z pourrait signifier:

$$Z \equiv R \vee C \equiv (A \wedge B) \vee C.$$

Mais il pourrait aussi signifier:

$$Z \equiv A \wedge S \equiv A \wedge (B \vee C).$$

C'est pourquoi nous posons maintenant le problème suivant:

Problème 3.1 *Est-ce qu'une proposition composée a toujours les mêmes valeurs de vérité, même si on déplace les parenthèses?*

Une comparaison à deux poids spécialement choisis pour les expressions susdites montre l'inévidence:

$$
\begin{array}{ccccc|ccccc}
(A & \wedge & B) & \vee & C & A & \wedge & (B & \vee & C) \\
\hline
0 & & 1 & & 1 & 0 & & 1 & & 1 \\
\searrow & & \swarrow & & \downarrow & \downarrow & & \searrow & & \swarrow \\
 & 0 & & & 1 & 0 & & & 1 & \\
 & \searrow & & & \swarrow & \searrow & & & \swarrow & \\
 & & & 1 & & & 0 & & & (\neq)
\end{array}
$$

Résultat: $(A \wedge B) \vee C$ n'a donc pas pour tous les poids possibles la même valeur de vérité comme $A \wedge (B \vee C)$. C'est pourquoi le théorème suivant est valable:

Théorème 3.1 (Parenthèses) *: Pour des propositions composées à plusieurs symboles logiques les parenthèses sont généralement nécessaires.*

Les parenthèses peuvent être donc omises seulement si l'évidence (univocité) ne se perd pas par cela. On connaît déjà le même problème de l'arithmétique avec les nombres. Rappelons–nous la règle là? – "Le point devant le trait!"— Par conséquent ne vaudrait–il pas la peine d'introduire aussi des règles de priorité? Pour faire cela nous définissons:

Définition 3.7 (Règles de priorité) *: Nous déclarons:*

$$
\begin{array}{cll}
\neg & \text{lie plus fortement que} & \wedge\ . \\
\wedge & \text{lie plus fortement que} & \vee\ . \\
\vee & \text{lie plus fortement que} & \Rightarrow . \\
\Rightarrow & \text{lie plus fortement que} & \Leftrightarrow .
\end{array}
$$

On remarque tout de suite que $\dot{\vee}$ manque dans cette définition. Ça ne fait rien. Nous omettons aussi les symboles logiques définis plus bas dans le texte pour ne pas surcharger la chose maintenant. Dans le cas échéant nous nous débrouillerons avec des parenthèses. La définition susdite suffira donc.
Maintenant on peut se poser encore une deuxième question: Que faire s'il y a dans une expression composée seulement un signe logique unique, mais plusieurs fois le même? Ainsi on peut se demander:

Problème 3.2 *Est-ce qu'une proposition composée telle que p.ex. $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ a toujours des valeurs de vérité égales même quand les parenthèses sont rangées de façons différentes?*

Comme en haut nous pouvons nier la question si nous trouvons un poids où on obtient des valeurs de vérité différentes si on pose les parenthèses différemment.
Exemple:

$$
\begin{array}{ccccc|ccccc}
(A & \Rightarrow & B) & \Rightarrow & C & A & \Rightarrow & (B & \Rightarrow & C) \\
\hline
0 & & 1 & & 0 & 0 & & 1 & & 0 \\
\searrow & & \swarrow & & \downarrow & \downarrow & & \searrow & & \swarrow \\
 & 1 & & & 0 & 0 & & & 0 & \\
 & \searrow & & & \swarrow & \searrow & & & \swarrow & \\
 & & & 0 & & & 1 & & & (\neq)
\end{array}
$$

Nous pouvons donc noter:

Théorème 3.2 (Parenthèses pour des symboles logiques différents) *: Généralement les parenthèses sont nécessaires dans les expressions de logique propositionnelle où un symbole logique unique apparaît à plusieurs positions dans l'expression.*

Par contre on peut contrôler la situation suivante à l'aide de tableaux de vérité:

Théorème 3.3 (Parenthèses et uniquement $\wedge$, $\vee$ ou $\Leftrightarrow$) *: Quant aux propositions composées par un seul symbole logique $\wedge$, $\vee$ or $\Leftrightarrow$, les parenthèses ne sont pas nécessaires.*

ça veut dire: $A \wedge B \wedge C$, $A \vee B \vee C$ ou $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C$ sont des expressions clairement déterminées. N'importe comme nous posons les parenthèses, les valeurs de vérité sont les mêmes à la fin.
Pour pouvoir pourtant simplifier en peu de plus l'orthographe dans ce qui suit, nous convenons l'*associativité de gauche*. Dans une expression cramponnée de gauche nous omettons simplement les parenthèses.
Exemple:

$$((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Rightarrow D \quad :\equiv \quad A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow D$$

Définition 3.8 (Associativité de gauche) *: Si dans une expression de logique propositionnelle non–univoque il manque les parenthèses, on dit que les parenthèses sont mises en commençant à gauche.*

Exemple:

1. $(\neg A) \vee (B \wedge C) \equiv \neg A \vee B \wedge C$
2. $(\neg A) \wedge (B \vee C) \equiv \neg A \wedge (B \vee C)$

La dernière parenthèse dans l'exemple 2 doit rester!

3.8 Formes propositionnelles

3.8.1 Définition de la notion "Forme propositionnelle"

Soient X_1, X_2, X_3 etc. des variables propositionnelles. Nous voulons maintenant expliquer la notion de *forme propositionnelle de façon récursive* comme il suit:

Définition 3.9 (Forme propositionnelle) *: Une expression*[1] *P s'appelle* **forme propositionnelle**, *s'il vaut:*

1: $P \equiv X_i, (i = 1,2,3,\ldots)$

2: $P \equiv P(X_1,X_2,\ldots) \equiv$ *liaison appropriée d'un nombre fini de variables propositionnelles par des symboles logiques et, il peut y avoir aussi des parenthèses.*

Ici nous entendons par "liaison raisonnable" que chaque parenthèse est fermée des deux côtés, que les symboles logiques sont toujours placés entre des expressions qui sont déjà reconnues comme formes propositionnelles, et que "$\neg$" apparaît toujours devant une forme propositionnelle reconnue de telle manière. Quant à cela naturellement au lieu de X_i on peut aussi rencontrer X, Y, Zetc., car il s'agit seulement de noms.

Exemple: $X, Y, \neg X, X_1 \wedge X_2, \neg X \vee \neg X$, $(X \vee (Y \wedge \neg Z) \Rightarrow (X \Rightarrow \neg Z))$ etc. .

A l'aide de *tableaux de valeurs de vérité* nous nous faisons un aperçu de tous les poids des variables d'une forme propositionnelle. Ainsi nous pouvons trouver de façon claire la valeur de vérité totale pour chaque poids. Nous formulons le problème conjoint:

Problème 3.3 (Tableau de valeurs de vérité) *: Comment est-ce qu'on réussit à se faire un aperçu de toutes les valeurs de vérité d'une forme propositionnelle au moyen d'un tableau de valeurs de vérité? Comment est-ce qu'on établit un tel tableau?*

Voici un exemple: Nous nous faisons un aperçu des valeurs de vérité de $\neg(X \wedge \neg Y) \Rightarrow Z$:

Tabelle 3.6: Valeurs de vérité de $\neg(X \wedge \neg Y) \Rightarrow Z$

1. P signifie "polynôme"

X	Y	Z	$\neg Y$	$X \wedge \neg Y$	$\neg(X \wedge \neg Y)$	$\neg(X \wedge \neg Y) \Rightarrow Z$
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1	1

Dans la dernière colonne, nous voyons les *valeurs de vérité totales*. On peut maintenant facilement reconnaître que par un poids des variables propositionnelles X, Y et Z, par des valeurs de vérité, la forme propositionnelle $\neg, X \wedge \neg Y, \Rightarrow Z$ devient une proposition de forme "forme devient vraie" (valeur 1) ou "forme devient fausse" (valeur 0). Généralement on peut constater:

Constatation: Une valeur de vérité totale d'une forme propositionnelle à un poids donné mène toujours à une *nouvelle proposition*: *"... la forme possède la valeur de vérité ... "*.
En outre le tableau de vérité montre aussi la *fonction de poids* donnée par la forme propositionnelle (aussi fonction de vérité, fonction binaire) c.–à.–d. le classement (application):

$$\{\text{Poids possibles }\} \mapsto \{0, 1\}.$$

Exercices concernant ce sujet p.ex. voir livre d'exercices *DIYMU* Kap. 2 (Bibl.: wirz).

3.8.2 Forme propositionnelle à exactement deux variables propositionnelles

Les formes propositionnelles à exactement deux variables propositionnelles consistent en un symbole logique à deux places qui lie deux parties qui à leur tour sont des formes propositionnelles spéciales. Une telle partie est ou une variable propositionnelle — ou une variable propositionnelle reliée par un symbole logique à une place, par exemple $\neg$. (Plus tard, quand les notions seront introduites, nous dirons "fonction à un argument".) On voit tout de suite qu'il existe *exactement* 4 *symboles logiques à une place*: (1) $\neg$, (2) *identiquement vrai* resp. w (le symbole logique qui assigne toujours à chaque variable la valeur "vrai" resp. 1), (3) *identiquement faux* resp. f (le symbole logique qui assigne toujours à chaque variable la valeur "faux" resp. 0) et (4) *neutre* resp. n (le symbole logique, qui laisse la variable comme elle est. Le tableau correspondant:

Tableau 3.7: Symboles logiques possibles à une place

X	*neutral* X	$\neg X$	w	f
0	0	1	1	0
1	1	0	1	0

On n'a pas d'autres possibilités de combinaison pour les valeurs de vérité. S'appuyant sur ce fait nous pouvons poser maintenant la question importante: Combien de possibilités est-ce qu'il y a pour établir une liaison entre deux variables propositionnelles? On a donc le problème suivant:

Problème 3.4 (Fonctions de poids) *: Fais–toi un aperçu de toutes les fonctions de poids d'une forme propositionnelle qui contient seulement* 2 *variables propositionnelles.*

Quant à cela nous faisons encore un tableau. D'abord nous appelons une liaison totale possible simplement f_i. Le nombre de fonctions possibles résulte du nombre possible de groupes à 4 aux éléments 0 et 1. Ceci est aussi le nombre des nombres binaires de 0000 jusqu'à 1111, c.–à.–d. dans le système décimal le nombre des nombres entiers de 0 jusqu'à $2^4 - 1$ (c.–à.–d. jusqu'à 15). Ça donne 16 possibilités. Pour les représenter toutes, nous choisissons une méthode d'énumération appuyée au système binaire:

Tableau 3.8: Symboles logiques possibles à deux places

X_1	X_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
		f	$\wedge$					$\dot{\vee}$	$\vee$	$\downarrow$	$\Leftrightarrow$				$\Rightarrow$	$\mid$	w

On reconnaît tout de suite: f_0 est la *liaison identiquement fausse*. N'importe quels poids nous prenons, le résultat est toujours faux. Conformément à cela, f_{15} est la *liaison identiquement vraie*. Nous reconnaissons f_1 comme "$\wedge$". f_2 n'a pas encore de nom. On peut interpréter f_2 comme $\neg(X_1 \Rightarrow X_2)$ ou bien comme $X_1 \wedge \neg X_2$. Aussi f_8 et f_{14} sont des liaisons importantes qui portent des noms:

Définition 3.10 (Liaison de Nicod, trait de Scheffer, W et F) *:*
f_0 s'appelle liaison **identiquement fausse** *F, f_{15} s'appelle* **identiquement vraie** *W. f_8 s'appelle liaison de* **Nicod** *($\downarrow$) et f_{14} est le trait de Scheffer ($|$) .*

Remarque: Dans *l'algèbre des circuits* la liaison de Nicod correspond au NOR et le trait de Scheffer au $NAND$. Le trait de Scheffer "$|$" s'écrit aussi de cette façon "$\uparrow$".

3.8.3 Négation double, règles de De Morgan

"Ne pas *ne pas dire la vérité*" signifie, du point de vu de notre savoir actuel "dire clairement la vérité". Nous rencontrons ici *la négation double* ("ne pas ... ne pas ...". Dans la logique propositionnelle on peut prouver par le moyen du tableau de vérité que cette négation double est une "affirmation". Il vaut le théorème:

Théorème 3.4 (Négation double) *:* $A \equiv \neg\neg A.$

Preuve: Nous prouvons la chose au moyen du tableau de vérité. Si les valeurs de vérité concordent ligne par ligne, la chose est attestée. Nous voyons tout de suite que la première et la troisième colonne concordent, le théorème ainsi est *vrai*:

Tableau 3.8: Négation double

A	$\neg A$	$\neg\neg A$
0	1	0
1	0	1

Maintenant si on examine des liaisons $\wedge$ – ainsi que $\vee$ niées, on trouve les règles de *De Morgan*:

Tableau 3.9: De Morgan

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$\neg(\neg A \wedge \neg B)$	$A \vee B$
0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1

Des deux dernières colonnes et à cause de la négation double on voit:

$$\neg(\neg A \wedge \neg B) \equiv A \vee B \equiv \neg\neg A \vee \neg\neg B.$$

On prouve également:

$$\neg(\neg A \vee \neg B) \equiv A \wedge B \equiv \neg\neg A \wedge \neg\neg B.$$

Si nous prenons au lieu de A donc $\neg X_1$ et au lieu de B donc $\neg X_2$, nous pouvons écrire à cause de la négation double:

Théorème 3.5 (De Morgan) *:*

1. $\neg(X_1 \wedge X_2) \equiv \neg X_1 \vee \neg X_2,$
2. $\neg(X_1 \vee X_2) \equiv \neg X_1 \wedge \neg X_2.$

3.8.4 Formes prop. à plusieurs var. prop. et des symboles logiques inconnus

On regarde le tableau 10 ci–dessus, on doit p.ex. se demander, si et comment f_{11} pourrait être exprimé par d'autres symboles logiques. Qu'une chose pareille est toujours possible, cela se laisse exprimer par le *lemme* suivant:

Lemme 3.1 (Réduction aux symboles logiques habituels) *: Chaque forme propositionnelle est représentable par une fonction de vérité $f(X_1,X_2,\ldots)$, c.–à.–d. par une* **forme remplaçante** *dans laquelle il n'apparaît que les trois symboles logiques $\neg$, $\wedge$ ainsi que $\vee$.*

Quant à la preuve: Nous pouvons accepter le théorème après avoir montré la méthode par laquelle on obtient la forme remplaçnte par déduction. Comme il n'existe aucune limite à l'application de cette méthode, ça doit fonctionner dans tous les cas. Nous le montrons par l'exemple de f_{11}:

Tableau 3.11: Examen de f_{11}

X_1	X_2	$f(X_1,X_2) = f_{11}$	$\neg X_1$	$\neg X_2$	$\neg X_1 \wedge \neg X_2$	$X_1 \wedge \neg X_2$	$X_1 \wedge X_2$	$(\neg X_1 \wedge \neg X_2) \vee (X_1 \wedge \neg X_2) \vee (X_1 \wedge X_2)$
0	0	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1	1

$f(X_1,X_2) = f_{11}$ est seulement vrai, si on a le cas des poids de la ligne 1 — ou ceux de la ligne 3 resp. 4. Sinon f_{11} est faux, car dans la dernière colonne, il faut avoir la valeur 1. Mais le poids de la ligne 1 apparaît, si X_1 possède la valeur 0 et X_2 aussi la valeur 0, c.–à.–d. si $\neg X_1$ possède la valeur 1 et $\neg X_2$ aussi la valeur 1. Correspondamment on a le poids de la ligne 3 si X_1 possède la valeur 1 et X_2 la valeur 0, c.–à.–d. si $\neg X_2$ possède la valeur 1. Egalement on obtient le poids de la ligne 4, si X_1 a la valeur 1 et X_2 aussi la valeur 1. C.–à.–d. $f(X_1,X_2) = f_{11}$ est vrai, si $\neg X_1$ possède la valeur 1 et $\neg X_2$ a aussi la valeur 1 — ou si X_1 possède la valeur 1 et $\neg X_2$ simultanément aussi la valeur 1 — ou si X_1 possède la valeur 1 et X_2 aussi la valeur 1. Sinon $f(X_1,X_2) = f_{11}$ est faux. On obtient exactement les mêmes valeurs de vérité, si on fait la liaison par $\vee$ ("ou") entre $\neg X_1 \wedge \neg X_2$ (vrai seulement dans le cas de la ligne 1), $X_1 \wedge \neg X_2$ (vrai seulement dans le cas de la ligne 3) et $X_1 \wedge X_2$ (vrai seulement dans le cas de la ligne 4), (voir dernière colonne). Par conséquent on voit qu'il vaut:

$$f(X_1,X_2) = f_{11} \equiv (\neg X_1 \wedge \neg X_2) \vee (X_1 \wedge \neg X_2) \vee (X_1 \wedge X_2).$$

Dans la dernière expression, on a seulement les symboles logiques $\neg$, $\wedge$ et $\vee$.
Cette expression n'est pas univoque! Car on peut argumenter aussi comme il suit:

$f(X_1,X_2) = f_{11}$ est faux, c.–à.–d. $\neg f(X_1,X_2) = \neg f_{11}$ est vrai, exactement quand on a le poids de la ligne. C'est donc le cas, si X_1 a la valeur 0 et X_2 la valeur 1, c.–à.–d. si $\neg X_1$ a la valeur 1 et X_2 a aussi la valeur 1. C'est alors exactement le cas, si $\neg X_1 \wedge X_2$ est vrai. Comme nous allons prouver plus tard, c'est exactement le cas, si $\neg(\neg X_1 \wedge X_2)$ est faux. $\neg(\neg X_1 \wedge X_2)$ et $f(X_1,X_2) = f_{11}$ sont donc faux en conformité. Par conséquent on obtient:

$$f(X_1,X_2) = f_{11} \equiv \neg(\neg X_1 \wedge X_2) \equiv X_1 \vee \neg X_2.$$

On obtient la dernière transformation d'après les *règles de De Morgan*, que nous prouverons plus tard. Nous retenons donc:

Corollaire 3.1 (Non–univocité de la représentation à l'aide de symboles logiques habituels) *La représentation d'une expression à l'aide des symboles logiques $\neg$, $\wedge$ ainsi que $\vee$ n'est pas univoque.*

Par conséquent nous pouvons utiliser la méthode suivante pour la construction d'une forme de remplacement qui ne possède que les symboles logiques $\neg$, $\wedge$ ainsi que $\vee$:

Méthode 3.1 (Construction d'une forme de remplacement) *: Nous prenons toutes les lignes dans lesquelles la forme propositionnelle envisagée a la valeur de vérité* 1 *et établissons une liaison* $\wedge$ *pour chacune de ces lignes. Pour les variables propositionnelles* X_i*, qui ont devant la valeur de vérité* 1*, nous écrivons* X_i*. Par contre pour les autres nous écrivons* $\neg X_i$*. Nous lions les expressions, ainsi obtenues pour les lignes, par* $\vee$*.*

Encore un exemple: Soit donné $g(X_1,X_2,X_3)$ par le tableau suivant. Construire une forme de remplacement par $\neg$ $\wedge$ et $\vee$!

Tableau 3.12: Forme de remplacement de $g(X_1,X_2,X_3)$

X_1	X_2	X_3	$g(X_1,X_2,X_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

D'après la méthode indiquée en haut nous pouvons lire:

$$g(X_1,X_2,X_3) \equiv \underbrace{(\neg X_1 \wedge \neg X_2 \wedge \neg X_3)}_{\text{De la ligne 1}} \vee \underbrace{(\neg X_1 \wedge X_2 \wedge X_3)}_{\text{De la ligne 2}} \vee (X_1 \wedge \neg X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge X_3).$$

3.9 Bases d'opérations logiques (de compositions)

Nous avons vu dans 3.8.4 que nous pouvons représenter une forme propositionnelle quelconque sans utiliser d'autres symboles logiques que $\neg$, $\wedge$ ainsi que $\vee$. Un tel ensemble de symboles logiques (comme en haut $\{\neg, \wedge, \vee\}$) s'appelle *base de compositions*. Généralement nous définissons:

Définition 3.11 (Base de compositions) *: Un ensemble de symboles logiques qui suffisent de représenter chaque fonction de vérité comme forme propositionnelle s'appelle* **base de compositions**.

Par 3.8.3 nous savons qu'il vaut:

1. $X_1 \vee X_2 \equiv \neg(\neg X_1 \wedge \neg X_2)$,
2. $X_1 \wedge X_2 \equiv \neg(\neg X_1 \vee \neg X_2)$.

Par conséquent nous pouvons remplacer $\vee$ par $\neg$, $\wedge$ et des parenthèses. Egalement nous pouvons échanger le symbole logique $\wedge$ par les symboles logiques $\neg$, $\vee$ ainsi que des parenthèses. Donc $\{\neg, \wedge\}$ ainsi que $\{\neg, \vee\}$ sont des bases de compositions. On peut vérifier au moyen de tableaux de vérité que le théorème suivant vaut:

Théorème 3.6 (Remplacement de la subjonction) *: Il vaut:*

$$X_1 \Rightarrow X_2 \equiv \neg(X_1 \wedge \neg X_2) \equiv \neg X_1 \vee X_2.$$

A cause de la négation double, on peut par conséquent toujours remplacer $\{\neg, \wedge\}$ et $\{\neg, \vee\}$ par $\{\neg, \Rightarrow\}$. C.–à..-d. il vaut le théorème:

Théorème 3.7 (Bases de compositions) *:* $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$ *et* $\{\neg, \Rightarrow\}$ *sont des bases de compositions.*

On peut être étonné de voir que si peu de symboles logiques suffisent pour représenter toutes les formes propositionnelles. Mais on peut encore aller plus loin. Nous définissons:

Définition 3.12 (Bases de compositions élémentaires) *: Un symbole logique forme une* **base de compositions élémentaire***, si on peut représenter toutes les formes propositionnelles à un nombre fini de variables propositionnelles par ce symbole seul et à l'aide de parenthèses.*

Il est intéressant que le théorème suivant vaut:

Théorème 3.8 (Représentation par des bases de liaisons élémentaires) *: $\{\uparrow\}$ et $\{\downarrow\}$ (le trait de Scheffer et la liaison de Nicod) sont les bases de compositions élémentaires uniques.*

Quant à la preuve: Le lemme suivant montre que $\{\uparrow\}$ et $\{\downarrow\}$ sont des bases de compositions élémentaires. (On prouve cela facilement par une vérification à l'aide de tableaux de vérité):

Lemme 3.2 (Possibilité de représentation par $\{\uparrow\}$ und $\{\downarrow\}$) *:*

$$\begin{array}{rcl} \neg A & \equiv & A \uparrow A \\ A \vee B & \equiv & A \uparrow A \uparrow (B \uparrow B) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \neg A & \equiv & A \downarrow A \\ A \wedge B & \equiv & A \downarrow A \downarrow (B \downarrow B) \end{array}$$

On peut démontrer qu'il n'y a pas d'autres bases de compositions élémentaires en plus. Quant à cela il faut montrer que ni $\{\uparrow\}$ ni $\{\downarrow\}$ ne peuvent être représentés par aucun troisième symbole logique. Démontrer cela prendrait trop de temps.

3.10 Tautologies, contradictions, équivalences, implications

Dans ce sous–chapitre, nous voulons étudier quelques *formes propositionnelles spéciales*. Nous commençons par la *tautologie*.

3.10.1 Tautologies

Nous définissons

Définition 3.13 (Tautologie) *: Une forme propositionnelle, qui est vraie à chaque poids, s'appelle* **tautologie** *(ou forme propositionnelle identiquement vraie ou généralement valable).*

Exemples:

Tableau 3.13: Les formes propositionnelles suivantes sont des tautologies:

1.1	$A \Rightarrow A$	1.2	$A \Rightarrow \neg\neg A$
2.1	$A \vee \neg A$	2.2	$\neg(A \wedge \neg A)$
3.1	$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$	3.2	$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
4.1	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg B \wedge \neg A$	4.2	$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg B \vee \neg A$
5.1	$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	5.2	$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
6.1	$A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$	6.2	$A \Leftrightarrow \neg(\neg A)$

On vérifie cette chose par le moyen du tableau de vérité. P.ex. pour 1.1 comme suit:

A	A	$A \Rightarrow A$
0	0	1
1	1	1

q. e. d.

Définition 3.14 (Contradiction) *: Une forme propositionnelle, qui est fausse à chaque poids, s'appelle* **contradiction***, ou bien proposition identiquement fausse.*

Exemples: Les formes propositionnelles suivantes sont des contradictions:

$$A \wedge \neg A \text{ sowie } (A \vee B) \wedge \neg A \wedge \neg B \text{ etc. }.$$

Vérification pour le premier exemple:

A	A	$A \Rightarrow A$	$\neg(A \Rightarrow A)$
0	0	1	0
1	1	1	0

q. e. d.

Une tautologie est toujours vraie, une contradiction est toujours fausse (également comme "$\neg$ une tautologie"). Par conséquent le théorème suivant vaut (c'est trivial):

Théorème 3.9 (Rapport entre tautologie et contradiction) *: $P(X_1,X_2,\ldots)$ est tautologie exactement quand $\neg P(X_1,X_2,\ldots)$ est contradiction.*

Lors d'une tautologie $P(X_1(X_2,\ldots)$ le poids ne joue pas un rôle. On peut placer n'importe quelles valeurs de vérité pour les X_i, la forme propositionnelle reste vraie. Si on remplace donc les variables propositionnelles X_i par de nouvelles formes propositionnelles $P_i(X_1,X_2,\ldots)$ et y applique comme poids des valeurs de vérité, on a comme résultats des poids des nouvelles formes propositionnelles P_i simplement un autre poids de la forme propositionnelle P d'origine qui est, comme on sait, une tautologie. Cela ne change en rien la tautologie, car celle-ci est toujours vraie. Par conséquent on peut donc noter le théorème suivant:

Théorème 3.10 (Remplacement d'une variable propositionnelle d'une tautologie) *:*

Hyp.: Soit $P(X_1,X_2,\ldots)$ tautologie ainsi que P_1,P_2,P_3 d. formes prop. quelc.
$(P_i \equiv P_i(X_1,X_2,\ldots)$.
Th.: $P(P_1,P_2,\ldots)$ est de nouveau tautologie.

Exemple: $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$ est tautologie. Donc
$((\underbrace{\neg A \wedge B}) \vee B) \Leftrightarrow (B \vee (\underbrace{\neg A \wedge B}))$ est aussi tautologie.

Ici A a été remplacé par $(\underbrace{\neg A \wedge B})$. La nouvelle expression reste une tautologie.

3.10.2 Equivalences

Définition 3.15 (Equivalence) *: Deux formes propositionnelles $P(X_1,\ldots,X_n)$ et $Q(X_1,\ldots,X_n)$ s'appellent* **équivalentes**, *si $P(X_1,\ldots,X_n) \Leftrightarrow Q(X_1,\ldots,X_n)$ est une tautologie.*

Si $P(X_1,\ldots,X_n)$ und $Q(X_1,\ldots,X_n)$ sont équivalentes, nous écrivons $P(X_1,\ldots,X_n) \equiv Q(X_1,\ldots,X_n)$. $P(X_1,\ldots,X_n) \equiv Q(X_1,\ldots,X_n)$ signifie donc que $P(X_1,\ldots,X_n) \Leftrightarrow Q(X_1,\ldots,X_n)$ sont toujours vrais. Ça veut dire que $P(X_1,\ldots,X_n)$ est vrai (ou faux) exactement quand $Q(X_1,\ldots,X_n)$ est vrai (ou faux).

3.10.3 Implication

Définition 3.16 (Implication) *: La forme propositionnelle $P(X_1,\ldots,X_n)$***implique** *la forme propositionnelle $Q(X_1,\ldots,X_n)$, si $P(X_1,\ldots,X_n) \Rightarrow Q(X_1,\ldots,X_n)$ est une tautologie.*

Exemples: 1) $A \Rightarrow A$ 3) $A \wedge B \Rightarrow A$
2) $A \Rightarrow A \vee B$ 3) $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$

Dans une implication $P \Rightarrow Q$ on ne peut ni échanger les formes propositionnelles A et B de façon quelconque ni y ajouter des $\neg$ comme on veut. Mais quand même de tels changements ont une signification pratique. Pour simplifier l'usage de la langue on a introduit par conséquent les noms suivants:

Définition 3.17 (Conversion, inversion, contraposition) *: Soit donné $P \Rightarrow Q$.*
L'expression $Q \Rightarrow P$ s'appelle **conversion** *de $P \Rightarrow Q$. L'expression $\neg P \Rightarrow \neg Q$ s'appelle* **inversion** *de $P \Rightarrow Q$. $\neg Q \Rightarrow \neg P$ s'appelle* **contraposition** *ou bien* **transposition** *de $P \Rightarrow Q$.*

Le théorème important, fréquemment utilisé dans la technique mathématique de la preuve, vaut:

Théorème 3.11 (Preuve indirecte) *:*

$$\neg Q \Rightarrow \neg P \qquad \equiv \qquad P \Rightarrow Q$$

On peut rapidement vérifier cette équivalence à l'aide d'un tableau de vérité. (C'est un bon exercice de le faire ....) Pour la technique mathématique de la preuve il est important de pouvoir vérifier $\neg Q \Rightarrow \neg P$ au lieu de prouver $P \Rightarrow Q$. Ça peut apporter des simplifications.

3.10.4 Equivalences importantes

Les lois suivantes jouent un rôle important lors de transformations logiques et quand il s'agit de prouver. On les vérifie le plus simplement à l'aide de tableaux de vérité. *Indication: On fait l'exercice soi–même ...*

(1)	Lois de la négation double	$\neg\neg A$	$\equiv$	A
(2)	Idempotence	$A \vee A$	$\equiv$	A
		$A \wedge A$	$\equiv$	A
(3)	Associativité	$A \vee (B \vee C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \vee C$
		$A \wedge (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \wedge B) \wedge C$
(4)	Commutativité	$A \vee B$	$\equiv$	$B \vee A$
		$A \wedge B$	$\equiv$	$B \wedge A$
(5)	Distributivité	$A \vee (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
		$A \wedge (B \vee C)$	$\equiv$	$A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
(6)	Elément neutre	$A \vee F$	$\equiv$	A
		$A \wedge W$	$\equiv$	A
(7)	Adjonction forcée	$A \vee W$	$\equiv$	W
	Conjonction forcée	$A \wedge F$	$\equiv$	F
(8)	Complementarité:			
	Troisième exclu	$A \vee \neg A$	$\equiv$	W
	Lois de la contradiction	$A \wedge \neg A$	$\equiv$	F
(9)	Dualité	$\neg W$	$\equiv$	F
		$\neg F$	$\equiv$	W
(10)	De Morgan	$\neg(A \vee B)$	$\equiv$	$\neg A \wedge \neg B$
		$\neg(A \wedge B)$	$\equiv$	$\neg A \vee \neg B$
(11)	Lois de l'absorption	$A \vee (A \wedge B)$	$\equiv$	A
		$A \wedge (A \vee B)$	$\equiv$	A
		$(A \wedge B) \vee \neg B$	$\equiv$	$A \vee \neg B$
		$(A \vee B) \wedge \neg B$	$\equiv$	$A \wedge \neg B$
(12)	Contraposition	$A \Rightarrow B$	$\equiv$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
(13)	Dualiser la contraposition	$A \Leftrightarrow W$	$\equiv$	$\neg A \Leftrightarrow F$
(14)	Remplacer la subjonction	$A \Rightarrow B$	$\equiv$	$\neg A \vee B$
		$A \Rightarrow B$	$\equiv$	$\neg(A \wedge \neg B)$
(15)	Remplacer la bijonction	$A \Leftrightarrow B$	$\equiv$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
(16)	Ex falso quodlibet	$F \Rightarrow A$	$\equiv$	W
(17)	Ex quodlibet verum	$A \Rightarrow \mathrm{W}$	$\equiv$	W
(18)	Conjonction affaiblie	$(A \wedge B) \Rightarrow A$	$\equiv$	W
(19)	Adjonction affaiblie	$A \Rightarrow (A \vee B)$	$\equiv$	W
(20)	Première partie niée	$\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	$\equiv$	W
(21)	Dernière partie niée	$B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$	$\equiv$	W
(22)	Conjonction implique disjonction	$(A \vee B) \Rightarrow (A \vee B)$	$\equiv$	W
(23)	Modus ponens	$(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B)$	$\equiv$	W
(24)	Modus tollens	$(\neg B \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow \neg A)$	$\equiv$	W
(25)	lois de la transitivité	$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$	$\equiv$	W
(26)	Distinction des cas	$((A \vee B) \wedge ((A \Rightarrow C)) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow C$	$\equiv$	W

3.11 Conclusions logiques

Ici, nous voulons gagner une vue partielle dans la *nature des conclusions logiques* ou des *preuves logiques* par une courte digression.

Soyent $P_1, P_2, \ldots, P_n$ et Q des formes propositionnelles. Souvent le problème suivant apparaît:

Problème 3.5 (Conclusions logiques) *:*
Il est essentiel de savoir, si Q est déduisible de $P_1,P_2,\ldots,P_n$.
Nous écrivons de façon symbolique: $P_1,P_2,\ldots,P_n \vdash Q$.

Pour pouvoir mieux traiter le problème, nous introduisons le langage suivant:

Explication de la notion 7 (Prémisses, conclusion) *: Dans le problème qu'on vient de mentionner, $P_1,P_2,\ldots,P_n$ s'appellent les* **prémisses** *(hypothèses), Q s'appelle la* **conclusion** *(thèse) et $P_1,P_2,\ldots,P_n \vdash Q$ s'appelle* **déduction logique**.

Dans la logique bivalente, une conclusion logique ou une déduction logique peuvent de nouveau être vraies ou fausses. Les conclusions fausses sont une contrariété qu'il faut éviter. Les conclusions vraies nous intéressent particulièrement. Par conséquent nous définissons:

Définition 3.18 (Déduction logique correcte) *: $P_1,P_2,\ldots,P_n \vdash Q$ s'appelle* **déduction (conclusion) logique correcte***, si $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \Rightarrow Q)$ est une tautologie.*

Ainsi dans une déduction logique et correcte, la conjonction des prémisses implique la conclusion.

Exemple: Nous voulons montrer que $A,A \Rightarrow B \vdash B$ est vrai, c.–à.–d. $A,A \Rightarrow B \vdash B$ est une déduction logique correcte. Nous devons enfin montrer que $(A \wedge A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ est une tautologie. Faisons–le à l'appui d'un tableau:

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \wedge (A \Rightarrow B)$	$(A \wedge A \Rightarrow B) \Rightarrow B$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

$(A \wedge A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ est donc vrai dans tous les cas possibles. L'expression examinée est donc une tautologie. Peut-être vous l'avez retenu − c'est le modus ponens.
La signification du modus ponens (règle de séparation) se trouve dans la conséquence suivante: Pour montrer qu'une proposition B est vraie, on peut aussi montrer qu'une autre proposition A quelconque ainsi que la subjonction $A \Rightarrow B$ sont vraies. On rencontre des telles situations dans un "théorème mathématique" . Car un tel théorème a souvent la structure abstraite suivante:

Théor.:	**Hypothèse:**	Propos. $a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n$	Bref:	**Thé.:**	**Hyp.:**	$a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n$
	Thèse:	Propos. b			**Thè.:**	b

On affirme donc que — si la condition (hypothèse) est vraie, l'affirmation (thèse) aussi est vraie (c.–à.–d. elle ne peut jamais être fausse). Si la condition par contre est fausse, personne ne s'intéresse sérieusement à l'affirmation. C.-.à.–d. elle peut être vraie ou fausse, une hypothèse fausse, qui n'arrive jamais, n'importe pas. Par conséquent pour prouver le théorème on doit prouver la subjonction $a \Rightarrow b$ comme vraie. Ici cette subjonction n'apparaît pas dans la signification d'une forme propositionnelle. Pour le lecteur du théorème mathématique elle est plutot une proposition ou bien une déclaration. Par conséquent dans le cas d'une preuve on doit seulement démontrer que le cas "$a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n$ vrai et b vrai" est vrai. Ici il faut donc déduire b de $a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n$ de la façon de la logique correcte.
Nous nous rendons compte de ce fait par l'exemple suivant:

Théorème 3.12 (Paradigme de la géométrie) [3]*:*
Hyp.: *Pour les droites g_i il vaut: $g_1 \| g_2$ (proposition a_1) et $g_1 \perp g_3$ (proposition a_2).*
Thè.: *Il vaut toujours encore $g_2 \perp g_3$ (proposition b).*

3. Un paradigme est un exemple dont on apprend.

D'autres déductions logiques:	(1)	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$	$\vdash$	$(A \Rightarrow C)$
	(2)	$(A \Rightarrow \neg B) \wedge B$	$\vdash$	$\neg A$
Paralogismes:	(1)	$(A \Rightarrow B) \wedge B$	$\vdash$	A
	(2)	$(A \Rightarrow B) \wedge \neg A$	$\vdash$	$\neg B$

Les paralogismes naissent quand on se laisse tromper par le "langage familier inexact et superficiel". Attention: Les paralogismes mènent à des fautes!
Indication: Contrôler si les paralogismes susdits sont faux, c'est un bon exercice.

3.12 La notation polonaise

3.12.1 Origine et sens

Au début, dans le contexte des examens théoriques, la question suivante est devenue actuelle: Est–ce qu'il existe une écriture unidimensionnelle ainsi qu'une façon de lire unidimensionelle – sans l'exigence *de parenthèses*? A l'aide d'une telle écriture et possibilité de lire unidimensionnelles on devrait pouvoir écrire et lire des formes propositionnelles p.ex. aussi par une machine. Une telle machine écrit ou lit seulement un signe à la fois. Après elle passe toujours dans la même direction au signe prochain, mais elle n'a cependant aucune possibilité de rétrograder le dispositif qui lit ou qui écrit. Une telle machine ne devrait pas retenir encore parallèlement une place à laquelle une parenthèse a été ouverte, qu'il faudra refermer plus tard. Ce principe est naturellement important aujourd'hui dans le contexte de la construction d'ordinateurs. Un exemple d'une telle machine abstraite est la *machine de Turing*, nommée d'après l'Anglais Turing (première moitié du 20ème siècle). Le Polonais J. Lukasiewicz a proposé une telle orthographe qui fonctionne: La *notation polonaise*. A l'aide de cette notation les parenthèses sont superflues.
Mais on reconnaît rapidement, que les parenthèses sont indispensables pour l'homme en particulier pour lire, autrement il est extrêmement difficile d'obtenir une vue d'ensemble précise. L'homme a une vue tridimensionnelle. Il ne fonctionne pas de façon unidimensionnelle comme une de ces machines qu'on vient de décrire.
En effet certains producteurs (en particulier de calculatrices) utilisent encore aujourd'hui le principe de l'orthographe polonaise sans parenthèses dans des circonstances diverses en forme modifiée. (Nous connaissons par exemple *la notation polonaise inverse* chez HP.)

3.12.2 Règles quant à la notation polonaise

Cette chose est expliquée ci–dessus par des exemples avec les symboles logiques les plus fréquents. Le principe ainsi expliqué peut être adapté sans peine aux autres symboles logiques.
Exemples:

$$\begin{array}{rcl} \neg A & \equiv & \neg A \\ A \wedge B & \equiv & \wedge AB \\ A \vee B & \equiv & \vee AB \\ A \Rightarrow B & \equiv & \Rightarrow AB \\ A \Leftrightarrow B & \equiv & \Leftrightarrow AB \end{array}$$

On en reconnaît le procédé suivant:

Méthode 3.2 (Notation polonaise) *: Un symbole logique, qui dans la notation normale est placé entre deux propositions ou formes propositionnelles, est écrit en tête dans la notation polonaise.*

Exemples:

$$\begin{array}{rcl} ((\neg A) \wedge (B \vee A)) & \equiv & \wedge \neg A \vee BA \\ A \Rightarrow ((\neg B) \Leftrightarrow (A \vee C)) & \equiv & \Rightarrow A \Leftrightarrow \neg B \vee AC \\ (A \vee B) \Rightarrow ((\neg C) \vee ((\neg B) \wedge C)) & \equiv & \Rightarrow \vee AB \vee \neg C \wedge \neg BC \end{array}$$

Comme le principe de placer en tête le symbole logique ne dépend pas du symbole logique, il vaut aussi pour le trait de Scheffer et aussi pour la liaison de Nicod. Ces deux symboles logiques forment les *bases de* *compositions élémentaires* uniques, c.–à.–d. chaque forme propositionnelle peut s'écrire seulement avec un de ces symboles. A l'aide de la notation polonaise, il est possible d'éviter les parenthèses. Par conséquent nous pouvons conclure:

Théorème 3.13 (Représentat. la plus élémentaire d'une forme propos. resp. d'une prop.) *: Chaque forme propositionnelle resp. chaque proposition peut s'écrire seulement à l'aide de $\uparrow$ et des variables propositionnelles resp. des propositions élémentaires. Egalement chaque forme propositionnelle resp. chaque proposition peut s'écrire seulement avec $\downarrow$ et des variables propositionnelles resp. des propositions élémentaires.*

La conséquence est que, à part les variables propositionnelles et les propositions élémentaires, un seul symbole logique suffit pour pouvoir écrire chaque expression de la logique propositionnelle.

Chapitre 4

Formes normales de la logique propositionnelle

4.1 Sujet, application pratique

Dans le dernier chapitre, nous avons étudié le problème suivant: Il était donné une forme propositionnelle. Pour cette forme propositionnelle, il fallait trouver tous les poids possibles. On devait donc trouver le tableau de vérité. Nous avons vu que des formes propositionnelles extérieurement différentes peuvent avoir le même tableau de vérité.
Mais dans la pratique, on a souvent le problème inverse: Soit donné un tableau de vérité. On devrait trouver une forme propositionnelle qui va avec ce tableau de vérité donné. *Des formes normales de la logique propositionnelle* sont des formes propositionnelles spéciales et composées, à l'aide desquelles on peut très vite trouver la solution d'un tel problème. C'est important pour la pratique.
Parfois on utilise les formes normales aussi ailleurs: Pour comparer deux formes propositionnelles, on peut recourir au tableau de vérité. Mais il y a encore une méthode. Pour les deux formes propositionnelles données (à comparer), on cherche un certain type de forme normale standardisé, la *forme normale canonique* , aussi *forme normale complète* . Si les deux formes normales canoniques sont identiques, horsmis l'ordre des termes, les deux formes propositionnelles données sont donc équivalentes.
On distingue deux types différents de formes normales de la logique propositionnelle:

1. *Forme normale conjonctive*
2. *Forme normale alternative*

Au lieu de la notion *forme normale alternative* on utilise aussi les notions de *forme normale alternante, forme normale disjonctive* ou *forme normale adjonctive.*

4.2 Définitions

Comme la logique, en tant que discipline indépendante, est une science relativement jeune, aucun usage unitaire ne s'est encore imposé dans la littérature mathématique concernant la logique. Le projet suivant suit la direction proposée par Asser (Bibl.: asser).

Soyent H_1, H_2, ..., H_n, ..., H_{n+m} des variables propositionnelles différentes en paires. ($n \geq 0$, $m \geq 0$, $m + n \geq 1$.) Sur cette base nous construisons la définition de *forme normale* comme il suit:

Définition 4.1 (Termes simples, Termes de conjonction et d'adjonction) *:*

1. *Un* **terme simple** *est une variable propositionnelle ou bien la négation d'une variable propositionnelle (terme de négation).*

2. *Un* **terme de conjonction** *est une conjonction de termes simples.*
   Terme de conjonction $:= H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \wedge \neg H_{n+1} \wedge \ldots \wedge \neg H_{n+m} = \bigwedge_{i=1}^{n} H_i \wedge \bigwedge_{j=n+1}^{n+m} \neg H_j$.
3. *Un* **terme d'adjonction** *est une adjonction de termes simples.*
   Terme d'adjonction $:= H_1 \vee H_2 \vee \ldots \vee H_n \vee H_{n+1} \vee \ldots \vee \neg H_{n+m} = \bigvee_{i=1}^{n} H_i \vee \bigvee_{j=n+1}^{n+m} \neg H_j$.
4. *En plus nous convenons qu'un terme de conjonction peut être dégénéré comme "terme de conjonction consistant en un élément unique". La même chose vaut pour le terme d'adjonction.*

Définition 4.2 (D. termes d. conj. et d'adj. qui cont. d'autres termes d. même genre) *:*

1. *Soyent* T_0, T_1, T_2 *des termes de conjonction. "*T_1 *est* **contenu dans** T_2*" signifie: Il existe (symbolquement* $\exists$*) un terme* T_0 *tel que* $T_1 \wedge T_0 \equiv T_2$.
2. *Soyent* R_0, R_1, R_2 *des termes adjonctifs (alternatifs). "*R_1 *est* **contenu dans** R_2 *signifie:*
   $\exists_{R_0}$ *tel que* $R_1 \wedge R_0 \equiv R_2$.

Définition 4.3 (Formes normales conjonctives et alternatives) *:*

1. *Soyent* $A_1, \ldots, A_k$ *des termes alternatifs. Ça signifie:*
   $K \equiv A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \equiv \bigwedge_{i=1}^{k} A_i$ **forme normale conjonctive** *(kNF).*
2. *Soyent* $K_1, \ldots, K_k$ *des termes conjonctifs. Ça signifie:*
   $A \equiv K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_k \equiv \bigvee_{i=1}^{k} K_i$ **forme normale adjonctive** *(aNF).*

Remarques:

1. Il y a des auteurs qui imposent en plus qu'à une kNF aucun des termes alternatifs K_i soit contenu dans un autre terme alternatif [5]. Egalement pour les termes de conjonction d'une aNF [5]. Au cas où un terme alternatif d'une kNF est contenu dans un autre tel terme, on peut omettre le plus long des deux termes. (Il vaut $(A_1 \vee A_2) \wedge A_1 \equiv A_1$). Egalement à une aNF, si un terme de conjonction est contenu dans un autre: On en peut omettre le plus court.
2. Comme on a convenu déjà à l'occasion des termes d'adjonciton et de conjonction nous convenons aussi ici qu'une aNF peut être dégénérée à une "aNF à un seul terme de conjonction unique". Le même vaut pour le kNF. Par conséquent un terme simple est surtout aussi une aNF ainsi qu'une kNF.

Exemples:

1. $A \wedge B$ est contenu dans $A \wedge B \wedge \neg C$, mais non dans $A \wedge \neg B$
2. A est aNF ainsi que kNF (cas dégénéré).
3. $A \wedge \neg B \wedge C$ est kNF (consistant en trois termes simples) ou aussi aNF (consistant en un seul terme de conjonciton).
4. $(A \wedge \neg B \wedge C) \vee B$ est aNF.
5. $(A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge C)$ est aNF.
6. $X \vee (A \wedge B(\vee C(\wedge D)))$ n'est pas une forme normale.
7. $A \vee (B \wedge C) \wedge (\neg C \vee D)$ n'est non plus une forme normale.

4.3 Le problème de l'existence

Quant à l'existence d'une kNF ou d' une aNF équivalente il vaut le théorème suivant:

Théorème 4.1 (Théorème d'existence) *: Pour chaque forme propositionnelle quelconque il existe une kNF ainsi qu'une aNF équivalente.*

5. P.ex. à Mendelson 8Bibl.: mendelson) l'auteur impose ceci, mais par contre p.ex. à Asser (Bibl.: asser) l'auteur ne l'impose pas. Les deux chemins sont possibles.

Remarque quant à la preuve:

1. $\{\neg, \vee, \wedge\}$ est une base de composition. Par conséquent on peut faire disparaître les autres symboles logiques ($\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, ...) en remplaçant des termes qui contiennent $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, ... un après l'autre par des termes équivalents et possibles $\neg, \vee, \wedge$.
2. On utilise les règles de De Morgan: $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B, \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$. Comme ça on peut supprimer des parenthèses et transporter le symbole logique $\neg$ devant les variables.
3. En plus on peut "déplacer" des parenthèses à l'aide de la loi distributive dans la position voulue (p.ex. en utilisant $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.)

Ainsi on réussit à faire disparaître des symboles logiques indésirables et de déplacer $\neg, \vee, \wedge$ ainsi que les parenthèses à la "place correcte".

Exemples:

1. A l'aide du tableau de vérité, on vérifie tout de suite:

2. $$A \Leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

$$\begin{aligned}
X : \equiv\ & (A \wedge \neg B) \Leftrightarrow (B \vee A) \\
\equiv\ & ((A \wedge \neg B) \wedge (B \vee A))) \vee (\neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg(B \vee A)) \\
\equiv\ & ((A \wedge \neg B \wedge B) \vee (A \wedge \neg B \wedge A)) \vee ((\neg A \vee \neg\neg B) \wedge (\neg B \wedge \neg A)) \\
\equiv\ & f \vee (A \wedge \neg B) \vee (\lfloor(\neg A \vee B) \wedge \neg A\rfloor \wedge \neg B) \\
\equiv\ & (A \wedge \neg B) \vee (\lfloor(\neg A \wedge \neg A) \vee (B \wedge \neg A)\rfloor \wedge \neg B) \\
\equiv\ & (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \vee (B \wedge \neg A) \wedge \neg B) \\
\equiv\ & (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg B).
\end{aligned}$$

La dernière expression est bien une aNF. On peut y placer $\neg B$ devant les parenthèses et reçoit donc:

$$X \equiv \neg B \vee (A \wedge \neg A) \equiv \neg B.$$

$\neg B$ est une aNF ainsi qu'une kNF.

4.4 Le problème de l'univocité

Justement nous avons vu que la forme propositionnelle $X :\equiv (A \wedge \neg B) \Leftrightarrow (B \vee A)$ est équivalente aux deux aNF $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ et $\neg B$. La représentation d'une forme propositionnelle par une aNF n'est pas claire (non univoque). La même chose vaut naturellement pour la kNF.
(Exemple: $(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg B) \equiv \neg B \wedge (A \vee \neg A) \equiv \neg B$.)
Il est maintenant concevable de chercher une kNF ou une aNF spéciale qui est **univoque** *jusqu'à l'ordre des termes*. Nous atteignons cela *en complétant les variables manquantes* dans chaque terme d'adjonction ou de conjonction. Nous pouvons produire ainsi des formes propositionnelles, dans lesquelles dans chaque terme d'adjonction ou de conjonction chaque variable apparaît exactement une fois. Ça se passe ainsi:
Soit p.ex. qu'il manque la variable X_k dans le terme de T_i.

1. Soit T_i d'abord un terme de conjonction d'une aNF. Alors nous élargissons T_i de la façon suivante:

$$T_i \equiv T_i \wedge w \equiv T_i \wedge (X_k \vee \neg X_k) \equiv (T_i \wedge X_k) \vee (T_i \wedge \neg X_k) \equiv T_{i_1} \vee T_{i_2}$$

Le terme T_i de l'aNF a été ainsi remplacé par une adjonction de deux termes de conjonction élargis, dans lesquels chaque fois il apparaît T_i, mais aussi X_k resp. $\neg X_k$. Le résultat est de nouveau une aNF.

2. Soit maintenant R_j un terme d'adjonction d'une kNF. Alors nous élargissons R_j de la façon suivante:

$$R_j \equiv R_j \vee f \equiv R_j \vee (X_k \wedge \neg X_k) \equiv (R_j \vee X_k) \wedge (R_j \vee \neg X_k) \equiv R_{j_1} \vee R_{j_2}$$

   Le terme R_j de la kNF a ainsi été remplacé par une conjonction de deux termes d'adjonction élargis, dans lesquels nous trouvons les R_j, mais aussi les X_k resp. les $\neg X_k$. Le résultat est de nouveau une kNF.

Comme $A \wedge A \equiv A$ ainsi que $A \vee A \equiv A$, on peut tracer les termes qui apparaissent plusieurs fois. On peut ainsi transformer chaque aNF resp. chaque kNF en une aNF resp. kNF, dans laquelle on trouve chaque variable dans chaque terme exactement une fois, ça veut dire dans aucun terme une telle variable est représentée plusieurs fois. Comme le nombre de variables est donc égal dans chaque terme, aucun terme n'est donc contenu dans un autre. Nous définissons maintenant:

Définition 4.4 (Forme normale canonique) *:*
Une aNF resp. une kNF dans laquelle dans chaque terme chaque variable apparaît exactement une seule fois, s'appelle **forme normale canonique***.*

On peut même ranger de façon univoque les formes normales canoniques par les lois commutatives pour $\wedge$ et $\vee$ d'après les principes suivants:

1. Range tous les termes selon les numéros de variables ascendants.
2. Remplace dans les termes d'adjonction resp. de conjonction $T_i$les termes simples par les chiffres 0 ou 1 d'après la règle suivante: Si le terme simple est une variable X_i, remplaçons–la par 0. Mais soit le cas que le terme simple est une variable niée $\neg X_i$, alors remplacçons–la par 1. Si on omet les symboles logiques dans l'expression ainsi obtenue, on obtient au lieu du terme T_i un nombre binaire. Ainsi chaque terme T_i correspond à exactement un nombre binaire. Maintenant on peut ordonner donc les termes selon la grandeur ascendante des nombres binaires.

Ainsi on obtient des *formes normales canoniquess ordonnées*. Pour celles-ci vaut évidemment le théorème suivant:

Satz 4.1 (Théorème d'univocité) *: Pour chaque forme propositionnelle il existe exactement une aNF ainsi qu'exactement une kNF canonique ordonnée.*

4.5 Le problème de représentation

En ce qui concerne les formes propositionnelles données, on peut *lire* leurs formes canoniques de façon très simple dans le tableau de vérité. En pratique souvent la forme propositionnelle n'est pas du tout connue, mais seulement le tableau de vérité. Le problème ainsi donné s'appelle *problème de représentation.* Les formes canoniques qu'on peut tout de suite lire sont des formes propositionnelles qui satisfont au tableau de vérité donné. En effet d'ordinaire on n'obtient pas les plus simples ou le plus brèves de toutes les formes propositionnelles possibles en considération. Trouver une forme aussi simple que possible, c'est le *problème de simplification.*
Nous voulons étudier le problème de représentation à l'appui d'un exemple. (Quant au problème de simplification il faut consulter l'*algèbre de Boole.*

P.ex. la *méthode de Karnaugh* est une méthode de simplification, qu'on peut utiliser pour certains symboles logiques, qui utilise les diagrammes d'Euler (pour des ensembles).)

Exemple: Soit donnée la forme propositionnelle $X \equiv (A \vee B) \Leftrightarrow \neg C$. On cherche l'aNF équivalente. D'abord nous établissons le tableau de vérité appartenant:

No. de la ligne	A	B	C	$X \equiv (A \vee B) \Leftrightarrow \neg C$
1	0	0	0	0
2	0	0	1	1
3	0	1	0	1
4	0	1	1	0
5	1	0	0	1
6	1	0	1	0
7	1	1	0	1
8	1	1	1	0

X est vrai exactement si nous avons un des poids qui est donné par les lignes 2, 3, 5 ou 7 du tableau de vérité. La ligne 2 par exemple s'applique, si A a la valeur de vérité 0 et B a la valeur de vérité 0 et C a la valeur de vérité 1. C.–à.–d. si $\neg A$ a la valeur de vérité 1 et $\neg B$ a la valeur de vérité 1 et C a la valeur de vérité 1. C'est le cas exactement si la forme $(\neg A \wedge \neg B \wedge C)$ a la valeur de vérité 1. (Pour tous les autres poids, la dernière forme propositionnelle a la valeur de vérité 0.) Par conséquent la ligne 2 est appliquable si $(\neg A \wedge \neg B \wedge C)$ est vrai. Ainsi la ligne 3 $(\neg A \wedge B \wedge \neg C)$ est vrai. La ligne 5 s'applique, si $(A \wedge \neg B \wedge \neg C)$ est vrai et la ligne 7 s'applique, si $(A \wedge B \wedge \neg C)$ est vrai. X est vrai, si nous avons un poids qui est donné par la ligne 2, la ligne 3, la 5 ou la ligne 7 qui sont des lignes vraies. (Pour les autres poids, X est faux.) C.–à.–d. X est vrai exactement si $(\neg A \wedge \neg B \wedge C)$ ou $(\neg A \wedge B \wedge \neg C)$ ou $(A \wedge \neg B \wedge \neg C)$ ou $(A \wedge B \wedge \neg C)$ sont vrais. X est donc vrai exactement si $(\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)$ est vrai. Pour les autres poids des variables A, B et C, X n'est pas vrai. Par conséquent on obtient:

$$X \equiv (\neg A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C).$$

Par conséquent nous avons *remplacé X par une aNF canonique,* car les termes de conjonction obtenus sont liés par $\vee$. Par la méthode d'obtenir la forme, celle–là est même ordonnée.

On peut donc retenir le procédé suivant: D'abord tracer les lignes du tableau de vérité, qui se terminent par 0. Dans les lignes qui restent, on remplace les valeurs de vérité 1 par la variable propositionnelle due à la colonne en question et les valeurs de vérité 0 par la négation de la variable propositionnelle due à cette colonne. Ensuite on lie ces termes simples obtenus par $\wedge$. Ainsi on obtient pour chaque ligne non–raturée un terme de conjonction. Après on lie ces termes de conjonction par $\vee$. Si on applique la même méthode aux lignes qui ont dans la dernière colonne la valeur de vérité 0, on obtient ainsi l'aNF: $Y \equiv (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C)$. Cette aNF Y est *fausse* exactement si X est vrai. Par conséquent $\neg Y$ est vrai exactement si X est vrai. Ainsi il vaut $\neg Y \equiv X$. Mais pour $\neg Y$ d'après les règles de De Morgan vaut l'équivalence $\neg((\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C)) \equiv (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$. Ceci est par contre la kNF canonique régulière.

On obtient ainsi la kNF canonique et ordonnée du tableau de vérité, si on applique la méthode décrite en haut aux lignes qui se terminent par 0 et si on place devant l'aNF ainsi obtenue le symbole logique $\neg$. D'après les règles de De Morgan, on obtient enfin la kNF qu'on cherche.

4.6 Journal de la logique

Le journal de la logique

Réclame: Oui à la demande pour plus de logique dans la cuisine!
Parti pour la protection de l'univers des idées • Nouveau: Grande lutte d'Astermix contre Idéefix!
La prévision météorologique: D'abord des nuages à la cuisine, après du foehn dans la salle de bains...

Dernières nouvelles à la page suivante!

Journal de la logique

Le paradoxe de l'exécution inattendue
(Abrégé d'après Martin Gartener)

Petite annonce : A recommander:
M. Gartener, Logique sous le gibet

Entre autres Gartener écrit: "Le jugement a été prononcé un samedi. 'L'exécution aura lieu à midi un des sept jours de la semaine prochaine', dit le juge au prisonnier. 'Mais vous ne saurez pas quel jour, jusqu'à ce qu'on vous préviendra le matin du jour de l'exécution.!

Le juge était connu comme personne qui tenait sa parole. L'accusé retourna accompagné par son avocat dans sa cellule. Quand les deux furent seuls, l'avocat souria et dit: 'Vous ne remarquez rien? Il est impossible que le jugement sout exécuté.'

'Je ne comprend pas cela', dit le prisonnier.

'Je vous l'explique. Il est tout à fait évident qu'on ne vous exécutera pas samedi prochain. Samedi est le dernier jour de la semaine. Vendredi après–midi vous seriez envore en vie et ainsi vous auriez la certitude absolue qu'on vous exécuterait samedi. Vous le sauriez avant qu'on vous le dise samedi matin. Cela contredirait l'arrêt du juge.' 'C'est vrai', dit le prisonnier.

'Samedi est donc exclu', continue l'avocat. 'Reste le vendredi comme dernier jour, où on pourrait vous exécuter. Mais vendredi ce n'est pas possible, parce que jeudi après–midi il ne reste plus que deux jours: à savoir vendredi et samedi. Comme le samedi n'entre pas en considération, ça devrait être le vendredi. Mais comme vous savez, cela serait aussi contraire à l'arrêt du juge. Ainsi le vendredi est aussi exclu et le jeudi est le dernier jour possible. Mais le jeudi est aussi exclu, parce que vous seriez encore en vie le mercredi après–midi et vous sauriez donc que le jeudi devrait être le jour de l'exécution!

'Maintenant je comprends', dit le condamné et se sentait déjà bien mieux. 'De cette façon je peux aussi tracer mardi et lundi. Il ne reste donc plus que demain, mais demain je ne peux pas être exécuté, parce que je le sais déjà aujourd'hui!'

Bref, l'arrêt du juge semble se contredire lui–même. Il n'y a pas de contradiction logique dans les deux conditions ajoutées au jugement. Malgré cela le jugement ne peut pas être exécuté évidemment — ou quand même? Pour éclaircir cela retournons dans la cellule chez le condamné. Il est convaincu, par une logique apparemment incontestable, qu'il ne pourra pas être exécuté sans que les conditions du jugement en soient blessées. A sa plus grande surprise, le bourreau arriva le jeudi matin. Il est clair qu'il ne s'y attendait pas. Ce qui surprend davantage: Le jugemant du juge est complètement correct. Le jugement peut être exécuté, exactement comme le juge l'avait déclaré." Est–ce que cet arrière–goût de la logique, qui est nié par le monde, ne fait pas apparaître le paradoxe d'une façon fascinante?

Appel à tous les étudiants intélligents!
Depuis la lecture de ce paradoxe de l'exécution inattendue, ing. dipl. ABC ne trouve plus la raison. On prétend que celle–ci s'est cachée derière la solution. C'est comment, la solution? Comminuquer à la réd., s.v.p.. La réd.

Chapitre 5

Limites de la logique propositionnelle, quantificateurs et perspectives

5.1 Limites de la logique propositionnelle

Dans 2.1.1 nous avons compris la notion de *”proposition”* comme *création linguistique*, qui exprime une *vérité* ou un *mensonge*. Mais dans la grammaire, on appelle des créations linguistiques qui expriment des vérités ou des mensonges des *phrases*. Exemples:

1. La phrase ”Jean n’est pas ici” est en ce moment ou vraie ou fausse. Voilà d’autres phrases:
2. ”Jean nourrit le cheval.”
3. ”Maintenant le soleil brille dehors.”
4. ”Aujourd’hui le soleil s’est levé deux fois à l’est.”
5. ”De nouveau notre CF n’a pas gagné le samedi dernier.”
6. ”Un et un est deux. ”
7. ”$1 + 1 = 2$.”
8. ”Dans la facture de l’entreprise Coupe–gorge un plus un font trois.”
9. ”De $a = 6$ on déduit $2\,a = 12$.”

Par contre des créations linguistiques comme ”hourra!”, ”Hi hi hi!”, ”Comment est-ce que j’arrive au parc le plus vite?”, ”Viens!”, ”Disparais!” ne sont pas des propositions. Il s’agit d’exclamations ou d’interrogations (questions). Egalement la création ”X conduit la voiture” est indéterminée, n’est donc pas une proposition.
Historiquement nous trouvons les racines de la proposition logique chez Aristote . Par conséquent nous les appelons *propositions d’Aristote* au lieu de parler simplement de propositions. Comme on peut facilement se rendre compte, des telles propositions sont des phrases simples , consistant en un sujet, un prédicat (verbe) et un objet. En plus, le sujet ou l’objet peuvent être élargis par un attribut ou le prédicat par une expression adverbiale. Nous trouvons aussi des telles phrases simples comme parties de phrases composées, de liaisons de phrases et de phrases complexes . Nous trouvons des détails dans chaque livre scolaire spécialisé en ce sujet sous le titre ”syntaxe ”. Cela dépasserait le cadre de la logique mathématique de répéter les notions de base de la grammaire ici. Qu’elles soyent supposées.
Regardons la phrase suivante: ”Jean nourrit le cheval.”

$$\overbrace{\text{Jean}}^{\text{Sujet}}\quad \underbrace{\overbrace{\text{nourrit}}^{\text{verbe}}\quad \overbrace{\text{le cheval.}}^{\text{Objet}}}_{\text{Expression prédicative}} \qquad\qquad \text{Ceci est une proposition.}$$

Si nous considérons par contre la phrase: "X nourrit le cheval", nous ne pouvons plus décider si ceci est maintenant vrai ou faux. Ici, une partie de la phrase est variable et indépendante: Pour X on peut mettre n'importe quel sujet. Si on remplace X par "Jean", la phrase ainsi obtenue est vraie dans notre contexte. Mais si on remplace X par "la locomotive à vapeur", la phrase ainsi obtenue est sûrement fausse. Comme X tient la place du sujet, on appelle X *"variable libre de sujet"* .

On trouve une situation semblable à "De $x = 5$ on déduit $2x = 10$", resp. à " $(x = 5) \Rightarrow (x = 10)$". $(x = 5)$ pris pour soi est une variable propositionnelle, car dans l'expression il se trouve la variable x. L'expression change en proposition, si on remplace x par une valeur. Si on met pour x la valeur 5, on obtient une proposition vraie. Si on met par contre pour x la valeur 6, on obtient une proposition fausse. La variable propositionnelle $X \equiv (x = 5)$ change donc dans l'expression $(x = 5) \Rightarrow (x = 10)$ en une variable de sujet, car elle appartient maintenant à la place du sujet. $\Rightarrow$ a la signification du verbe (du prédicat), $(x = 10)$ la signification d'une *variable d'objet.* Par l'introcuction d'un nombre à la place de x on obtient au lieu de $(x = 5) \Rightarrow (x = 10)$ une proposition composée, qui consiste en équations de nombres comme propositions partielles. Si par contre on ne touche pas le x, l'expression $(x = 5) \Rightarrow (x = 10)$ est aussi une proposition, mais qui n'est pas décomposable en des propositions partielles. On peut seulement la décomposer en deux variables propositionnelles et un symbole logique. Par contre la variable de nombres x, considérée toute seule, n'est pas une proposition; ici elle est seulement une partie d'une variable propositionnelle.
Quant aux exemples qu'on vient de discuter, on remarque qu'une proposition peut avoir une *structure interne.* Ainsi le sujet, le verbe (prédicat) et l'objet sont des parties d'une proposition qui peuvent être manipulées chacune individuellement, mais qui ne sont pas des propositions.

La logique propositionnelle seule ne fournit pas de règles pour une telle manipulation. On arrive ici ainsi aux limites de la logique propositionnelle: Avec la logique propositionnelle seule on ne peut jamais traiter tous les problèmes de la logique!

5.2 Quantificateurs

Considérons comme exemples les trois propositions suivantes:

(1)	A	$\equiv$	Tous les poissons vivent dans l'eau.	Symbol.:	(	Tous $\rangle$ poisson $\rangle$	prédicat(eau)	)
(2)	B	$\equiv$	La truite est un poisson.	–	(	Truite $\rangle$	prédicat(poisson)	)
(3)	C	$\equiv$	La truite vit dans l'eau.	–	(	Truite $\rangle$	prédicat(eau)	)

Il apparaît que (3) est né de parties de (1) et (2) par une nouvelle combinaison de parties. L'expression prédicative de (2) a été combinée avec le sujet de (1) pour obtenir (3). Pour la combinaison de telles parties de propositions à une nouvelle proposition, la logique propositionnelle n'offre pas de règles. $A \wedge B \vdash C$ ne peut donc pas être déduit par les règles de la logique propositionnelle, parce qu'ici la structure interne de la proposition est essentielle. Nous appelons la théorie qui rend compte de ce problème *la logique des prédicats.* On distingue même *différents niveaux de logique des prédicats (la logique des niveaux)* .
Dans la logique des prédicats on n'étudie pas seulement des propositions et des variables propositionnelles mais aussi des *sujets*, des *variables de sujets*, des *prédicats*, *des variables de prédicats* et aussi des *quantificateurs.* Les quantificateurs sont des signes logiques ou des mots qui expriment une *quantité*, contrairement à des propositions ou des variables propositionnelles, qui rendent une *qualité.* Comme les quantificateurs permettent une orthographe très compacte de propositions mathématiques, ils sont très souvent appliqués dans les mathématiques universitaires. Ça vaut en suite évidemment aussi pour les mathématiques d'ingénieur d'un niveau de haute école!

Deux quantificateurs sont importants pour nous: Le *quantificateur universel* et le *quantificateur d'existence.* On trouve les signes et les significations assortis dans le tableau suivant:

Nom	Symbole	Autre symbole	Signification
Quantificateur universel	$\forall$	$\bigwedge$	Pour tous
Quantificateur d'existence	$\exists$	$\bigvee$	Il existe

Les exemples suivants peuvent servir à une explication plus vaste. Soit $M := \{1,2,3,4\}$

1. $\forall_{x\in M} : x < 5$ signifie: $(1 < 5) \wedge (2 < 5) \wedge (3 < 5) \wedge (4 < 5)$.
2. $\exists_{x\in M} : x = 3$ signifie: $(1 = 3) \vee (2 = 3) \vee (3 = 3) \vee (4 = 3)$.

Comme dans le premier exemple tous les nombres de M sont plus petite que 5 et dans le deuxième exemple il existe un nombre de M qui satisfait l'équation $x = 3$ (il vaut $3 = 3$), nous avons des propositions vraies dans les deux cas. Ici x est une variable de sujet reliée au quantificateur dans les deux exemples. (Variable de sujet *liée*.)

5.3 Perspective: D'autres résultats de la logique

Nous voulons discuter encore quelques résultats qui ont une certaine importance en pratique, sans les prouver ici. Les preuves à cela sont relativement longues et demandent une portion d'expérience dans le raisonnement mathématique et logique.

Théorème 5.1 (Théorème d'intégralité) *: La logique propositionnelle est complète.*

Complète signifie ici que dans la logique propositionnelle chaque proposition vraie peut être déduite en un nombre fini d'étapes, c.–à.–d. à l'aide d'une chaîne *d'étapes de preuves* . On peut donc prouver ceci. "Q est vrai" signifie donc qu'il existe une preuve (c.-à.–d. une déduction logique et correcte) $w \vdash Q$.
Attention! Dans la logique des prédicats de niveau supérieur ce théorème ne vaut plus! ça signifie qu'il existe dans la logique des prédicats des propositions vraies (théorèmes), pour lesquelles il n'y a plus aucune chaîne d'étapes de preuves finie qui peut être exprimée à l'aide d'expressions du même niveau de la logique des prédicats. On peut donc prouver qu'il y a des théorèmes qui ne sont plus prouvables dans le cadre donné. C'est à dire que la quantité de théorèmes vrais est ainsi plus grande que la quantité de théorèmes déduisibles. Ce sont surtout les résultats de Gödel des années trente du vingtième siècle qui montrent ceci. Turing et d'autres ont aussi établi dans ce domaine des résultats qui influencent les effets quant au problème de la prévisibilité.
En plus vaut le théorème suivant:

Théorème 5.2 (Liberté de contradictions de la logique propositionnelle) *: La logique propositionnelle est exempte de contradictions.*

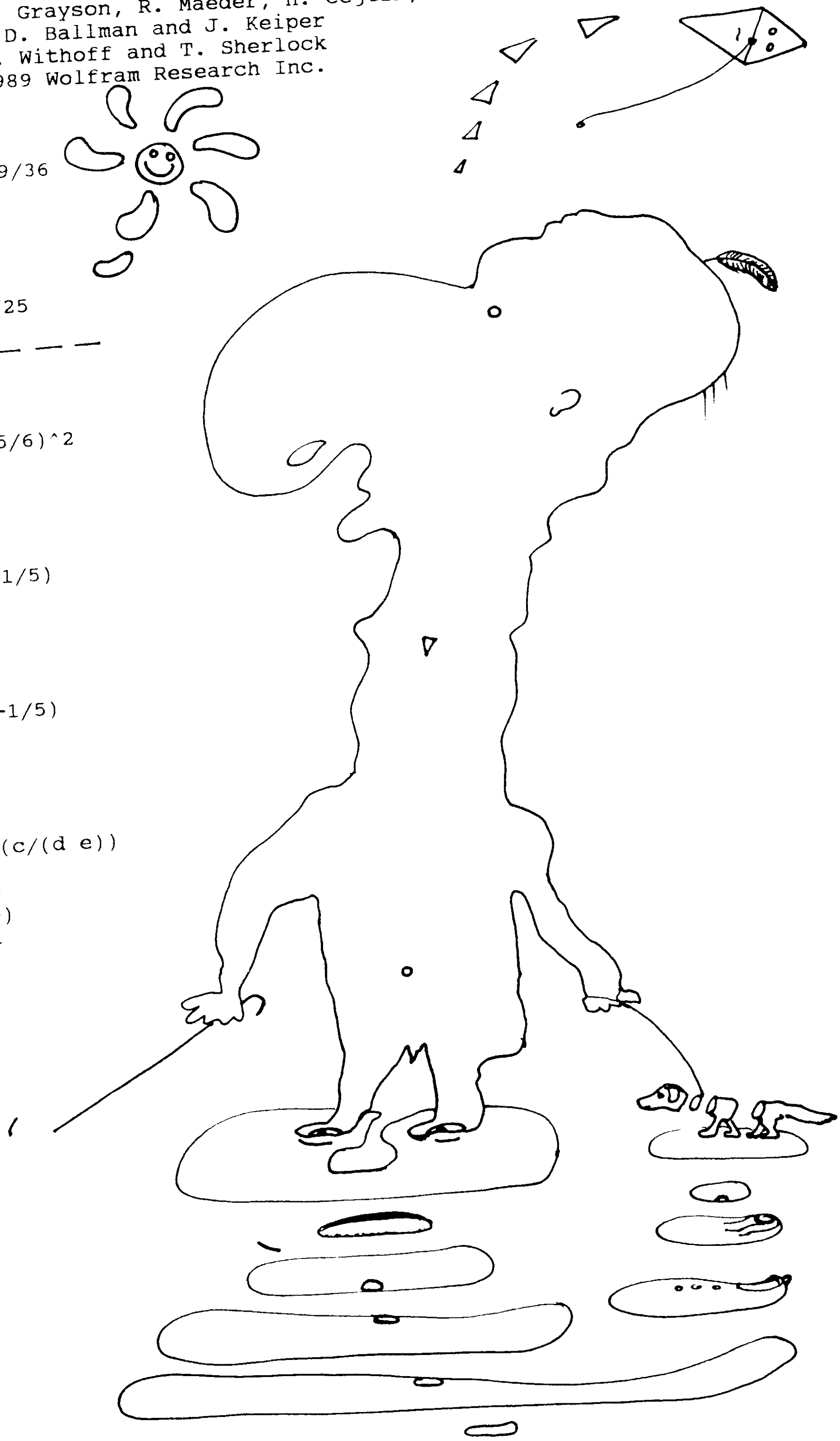
ça signifie qu'aucune contradiction ne peut naître dans la logique propositionnelle, que donc par exemple $P \wedge \neg P$ n'est pas déduisible, n'importe de quelle proposition ou forme propositionnelle P il s'agit. En d'autres mots: $w \not\vdash P \wedge \neg P$ ou bien $w \not\vdash f$.
Comme nous verrons postérieurement p.ex. dans *l'algèbre des circuits*, la logique propositionnelle suffit complètement pour le traitement par des machines (bit–machines, machines de von Neumann). Car tous les programmes tournent à l'aide de couplages du hardware donné. Et les couplages satisfont aux règles de l'algèbre des circuits électriques. C.–à.–d.: Ce qu'on peut faire sur les ordinateurs classiques est tout dans le cadre de la logique propositionnelle. D'autre part les problèmes dont la formulation n'est pas attribuable à la logique propositionnelle, qui ont vraiment besoin de la logique des prédicats, ne se laissent pas traiter à l'aide d'ordinateurs classiques (comme p.ex. des quantifications sur des ensembles infinis d'ordre supérieur). Egalement les problèmes où il s'agit purement du qualitatif, de choses qui de part leurs qualités

ne se laissent pas réduire à des quantités [1]. Cela cerne des problèmes des disciplines de la philosophie et de la science humaine. Il est justement implossible d'attribuer la logique des prédicats parfaitement aux machines et y compris par cela à l'algèbre des circuits électriques et à la logique propositionnelle, même si l'intelligence de ces machines est aussi artificielle qu'on aimerait. Sinon la logique propositionnelle suffirait pour toutes nos intentions. Un problème fondamental est bien qu'une machine finie aux algorithmes finis ne peut pas abstraire parmi les quantités ou ensembles infinis tel que l'homme, qui arrive à comprendre un processus infini comme objet actuel et peut donc travailler avec la notion qu'il en construit. L'homme a l'aptitude de l'abstraction dirigée vers le succès, il peut formuler des notions nouvelles, géniales, par un acte de la volonté. La machine par contre ne peut pas vouloir, elle peut seulement observer des directives (instructions), elle est toujours l'esclave d'un programme. Un autre problème fondamental naît maintenant aussi de la connaissance que les qualités et leurs relations ne se laissent pas toujours réduire à des quantités et leurs relations...

1. Le mouvement qui essaye de faire cette réduction quand même, dans l'ignorance entière des résultats de la logique, s'appelle *réductionnisme*

Index

```
thematica (MS-DOS 386/7) 1.2 (September 27, 1989) [With pre-loaded data]
 S. Wolfram, D. Grayson, R. Maeder, H. Cejtin,
 S. Omohundro, D. Ballman and J. Keiper
th I. Rivin, D. Withoff and T. Sherlock
pyright 1988,1989 Wolfram Research Inc.

Aufgabe 1 *

1[1]:= a=1/49-29/36

          1385
ut[1]= -(----)
          1764

n[2]:= b=1/9-1/25

        16
ut[2]= ---
       225

n[3]:= c=(1/7+5/6)^2

        1681
ut[3]= ----
        1764

In[4]:= d=(1/3+1/5)

         8
Out[4]= --
         15

In[5]:= e=(1/3-1/5)

         2
Out[5]= --
         15

In[6]:= (a/b)/(c/(d e))

           1385
Out[6]= -(----)
           1681
```



Bibliographie

[1] Asser. Einführung in die mathematische Logik *Teile 1, 2 und 3*. Verlag Harri Deutsch (Bibl.: asser)

[2] Church. Introduction to Mathematical Logic. Princeton University Press (Bibl.: church)

[3] Deller. Boolscha Algebra. Diesterweg (Bibl.: deller)

[4] Hermes. Einführung in die mathematische Logik. Teubner Verlag Stuttgart (Bibl.: hermes)

[5] Hilbert, Ackermann. Grundzüge der theoretischen Logik. Springer-Verlag (Grundlehren der math. Wiss. in Einzeldarst., Bd. 27) (Bibl.: hilbert)

[6] Jehle. Boolsche Algebra. Bayrischer Schulbuchverlag (Bibl.: jehle)

[7] Lipschutz. Finite Mathematik. Reihe SCHAUM, Mac Graw Hill (Bibl.: lipschutz)

[8] Mendelson. Boolscha Algebra und logische Schaltungen. Reihe SCHAUM, Mac Graw Hill (Bibl.: mendelson)

[9] Shoenfield. Mathematical Logic. Addison–Wesley Publishing Company (Bibl.: shoen)

[10] Tarski. Einführung in die mathematische Logik. Vandenhoeck & Ruprecht-Verlag (Bibl.: tarski)

[11] van Dahlen. Logic and Structure. Springer-Verlag (Universitätstext) (Bibl.: vandalen)

[12] Vom Autor. *DIYMU* (Do it yourself Mathematik Übungsbuch). Ingenieurschule Biel 1991 (Bibl.: wirz)

[13] Vom Autor. Mathematik für Ingenieure *Teil 1* Einführung. Ingenieurschule Biel 1993 (Bibl.: wirz1)