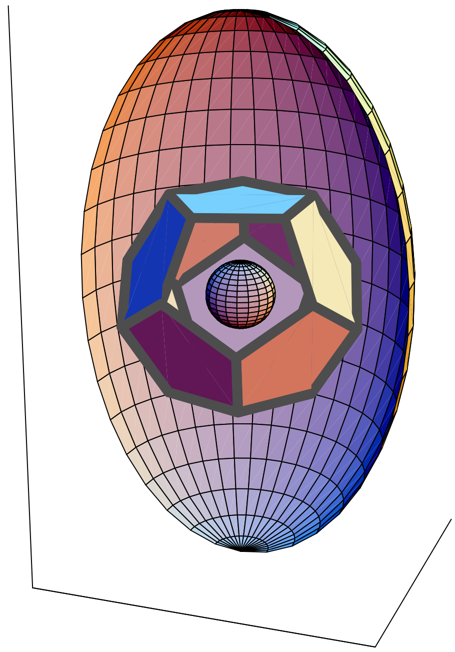
Mathematikkurs für Ing. ◇ Teil 3 ◇ Mengen, Relationen, Funktionen



von

Rolf Wirz

Ingenieurschule Biel (neu HTA Biel, BFH)

Nach den NeXT–Crash von 1999 restaurierte Ausgabe

V.1.2.1 d/f 24. Mai 2005 **Deutsche Version**

WIR/NeXT/93/02/03/05/LaTex/Teil3.tex

Teil 6 eines Repetitoriums und Textbuchs zur Begleitung und Ergänzung des Unterrichts.
Produziert mit LaTeX auf NeXT-Computer/ PCTeX WIN98.
Einige Graphiken sind auch mit *Mathematica* entstanden.

1999 hat der Autor einen Computer–Crash erlebt. Infolge des dadurch provozierten Systemwechsels haben einige Graphiken sehr gelitten. Sie werden neu erstellt, sobald die Zeit dafür vorhanden ist.

Man lernt nichts kennen als was man liebt, und je tiefer und vollständiger die Kenntnis werden soll, desto stärker, kräftiger und lebendiger muss die Liebe sein . . .

Goethe an Jacobi

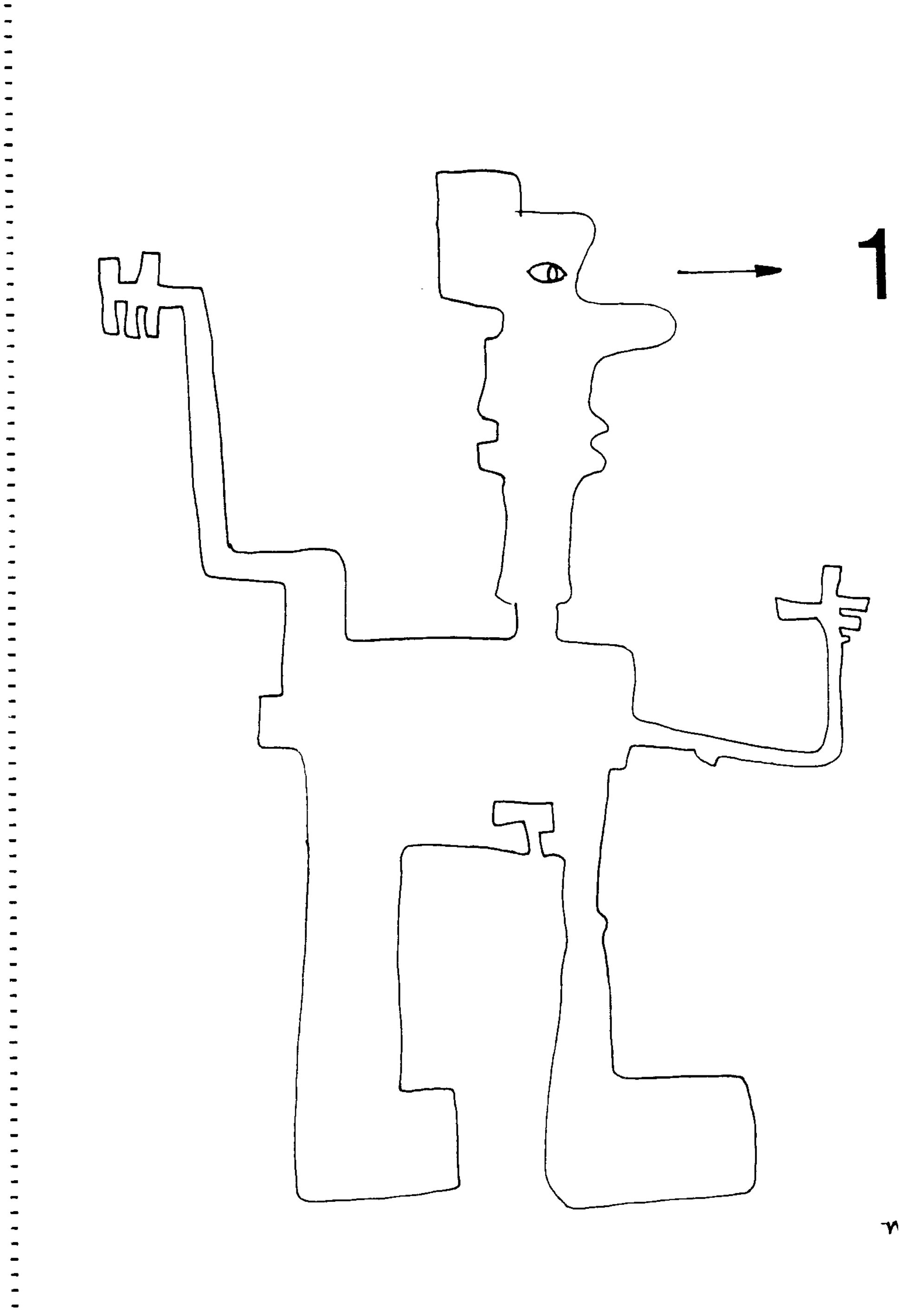
Adresse des Autors:

Rolf W. Wirz-Depierre
Prof. für Math.
Hochschule für Technik und Architektur, Berner Fachhochschule
Quellgasse – Rue de la source 21
Postfach – case postale 1180
CH-2501 Biel-Bienne
Tel. (..41) (0)32 266 111, neu 3216 111

Mengen, Relationen, Funktionen

Inhaltsverzeichnis

Abbildung 1: . . . weil leere Seiten so langweilig sind . . .



Man kann alles kaufen, nur die Einsicht nicht.

Kapitel 1

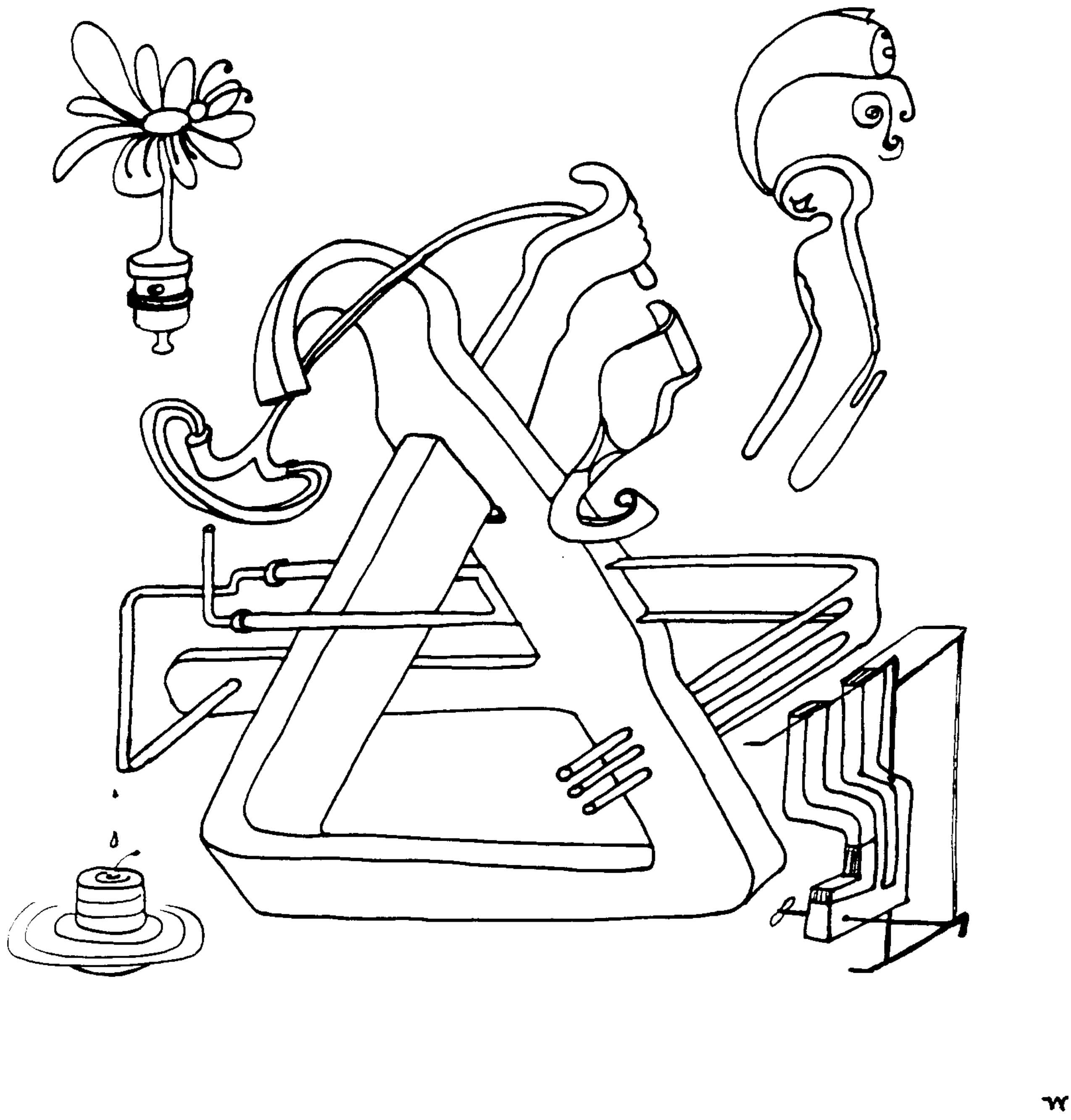
Mengen, Relationen, Funktionen

Liebe Leserin, lieber Leser,

Dieser Text ist in Skriptform abgefasst. Das bedeutet, dass er in äusserst knapper Fassung nur das wesentliche Skelett des zu lernenden Stoffes wiedergibt. Für weitere und ausführliche Erklärungen, Beispiele, viele Beweise und ergänzende Ausführungen ergeht daher an den Studenten der Rat, ein oder mehrere Lehrbücher beizuziehen. Studieren bedeutet ja zu einem wesentlichen Teil, sein Wissen selbständig mit Hilfe der Literatur zu erweitern, streckenweise sogar selbständig zu erarbeiten, zu festigen und anzuwenden. Ein Skript ist dabei nur ein Wegweiser und nie ein Lehrbuchersatz. Welche Lehrbücher jemand verwenden will, ist jedem freigestellt, denn die Neigungen und Lerngewohnheiten der Menschen sind genau so verschieden wie ihre Lieblingsessen, ihre Trinkgewohnheiten und ihr Lustgefühl beim Sport. In Teil 1, vom Autor (Bibl.: wirz) findet sich eine grosse Literaturliste. Speziell für den in diesem Teil dargestellten Stoff sei auf Ayres, Algebra (Bibl.: ayres) verwiesen. Übungen finden sich in *DIYMU , vom Autor (Bibl.: wirz1). Nun also los! Profitieren wir davon, dass die ins Ziel genommene Mathematik schon erfunden ist und nur noch verstanden und gelernt werden muss.*

Im Sommer 1996 — *Der Autor*

Abbildung 1.1: Ohne Worte . . .



Technische Anlage nach
O. Reutersvärd.
Perfekt ingenieuriert - einfach ingenial!

Kapitel 2

Einführung in die elementare Mengenlehre (Repetition)

2.1 Zu den Grundlagen

2.1.1 Einleitung

Zuerst werden wir hier kurz die sicher von der Schule her bekannte elementare Mengenlehre repetieren und die hier verwendete Begriffs– und Symbolsprache vorstellen. Mit Hilfe des Begriffs der Produktemenge *können wir dann den Begriff* Relation *erarbeiten und damit sauber die Begriffe* Abbildung *und* Funktion *samt den speziellen gebräuchlichen Ausprägungen allgemein und abstrakt einführen. Damit ist dann die Grundlage geschaffen für Dinge wie Funktionen, die den* $\mathbf{R}^n$ *in den* $\mathbf{R}^m$ *abbilden — oder z.B. für das Verständnis des Assoziativitätsgesetzes für allgemeine Abbildungen.*

2.1.2 Zum Mengenbegriff

Wir wählen hier einen naïven Zugang zur Mengenlehre, gehen somit nicht streng axiomatisch vor. Es ist uns nicht um Cantors Theorie der transfiniten Kardinalzahlen *gelegen. (Georg Cantor hat sich u.a. aus theologischen Erwägungen mit dem Problem des Unendlichen beschäftigt. Daraus ist die mathematische Mengenlehre geworden, in der es um „unendliche oder transfinite Zahlen" geht. Man muss dort diverse Stufen oder Typen von "unendlich" unterscheiden, mit denen man wie mit Zahlen rechnen kann. Das nützt man in der Non–Standard–Analysis aus.)*

Begriffserklärung 1 (Menge als Grundgebilde) :
Eine **Menge** *ist für uns ein von unserer Spracherfahrung her bekanntes Grundgebilde.*

Andere, nicht weiter definierte Grundgebilde kennen wir aus der Geometrie (z.B. der Punkt). Es wird hier nicht gesagt, was eine Menge exakt ist. Wir definieren die Menge vorerst nicht exakt, denn der Begriff ist genügend bekannt. Anschaulich denken wir bei der Menge an eine Zusammenfassung gewisser Individuen nach gewissen Zusammenfassungsregeln. Folgende intuitive Beschreibung einer Menge stammt von Cantor:

Begriffserklärung 2 (Cantor) *: Eine* **Menge** *ist eine wohldefinierte Ansammlung oder Auflistung von Objekten des Denkens. Diese Objekte heissen* **Elemente** *der Menge.*

Wir legen später fest, wann und wie eine Menge gegeben ist oder welche Beziehungen sie erfüllt (Klassifikation von Eigenschaften). Das genügt für unseren Bedarf.

Symbole 1 (Mengen, Elemente) :

1. *Mengen: M, A, B, C ... (Grossbuchstaben)*
2. *Elemente: a, b, c, e, p, q ... (Kleinbuchstaben)*

Die nun folgende Grundrelation wollen wir als Axiom[1] *akzeptieren:*

***Axiom 2.1 (Enthaltensein)** : Ein Element kann zu einer Menge gehören — oder nicht. Symbolisch: $p \in M$ (p ist Element von M) oder $\neg(p \in M)$, d.h. $p \notin M$ (p ist nicht Element von M)*

Das Axiom postuliert also für das Enthaltensein die zweiwertige Logik. Mehrdeutigkeit ist hier ausgeschlossen.

2.1.3 Zu den Möglichkeiten, eine bestimmte Menge anzugeben

Man kennt zwei Möglichkeiten, eine Menge anzugeben:

1. *Durch Aufzählen (Auflisten) der Elemente, z.B. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (abbrechend) oder $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ (nicht abbrechend).*
2. *Durch Angabe einer charakterisierenden Eigenschaft, z.B. $B = \{x \in \mathbf{N} \mid x < 6\}$*

In B ist $\mathbf{N}$ die Grundmenge (Fundamentalmenge, Universalmenge, die den Bezugsrahmen festlegt. $(x < 6)$ ist die definierende Eigenschaft.
*Von der Schule bekannte **Beispiele** sind: Lösungsmengen von Gleichungen, Punktmengen aus der Geometrie. (Z.B. eine Gerade kann analytisch aufgefasst werden als unendliche Punktmenge, im Gegensatz zur Geraden als Grundgebilde der Geometrie, also als Ding an sich.) Für uns wichtige Mengen sind die in der Analysis verwendeten Intervalle, z.B. das offene Intervall $(a,\ b)$ (vgl. Seite 11.) Gemäss den Gepflogenheiten in der Mathematik treffen wir die folgende Vereinbarung:*

***Vereinbarung 1 (Wiederholte Elemente)** : Es sei eine Menge durch Aufzählung gegeben. Kommt ein Element dann mehrmals vor, so darf man die Duplikate streichen.*

Beispiel: $\{1, 2, 3, 2, 4, 3, 1, 5, 2\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

***Vereinbarung 2 (Anordnung der Elemente)** : Bei einer Menge spielt die Anordnung der aufgezählten Elemente keine Rolle.*

2.1.4 Gleichheit von Menge

***Definition 2.1 (Gleichheit von Menge)** : Zwei Mengen heissen **gleich**, wenn sie dieselben Elemente enthalten. In logischen Symbolen:*

$$A = B :\Longleftrightarrow [\forall_{x \in A}(x \in A) \Rightarrow (x \in B) \wedge \forall_{y \in B}(y \in B) \Rightarrow (y \in A)]$$

ist wahr.

2.1.5 Leere Menge

***Definition 2.2 (Leere Menge)** : Eine Menge, die kein Element enthält, heisst **leere Menge** oder **Nullmenge**.*

***Symbole 2 (Leere Menge)** : $\{\}$ oder $\emptyset$.*

Beispiel: $\{x \mid x \neq x\} = \{\}$.

Noch eine witzige Geschichte. Sie soll sich im Ausland zugetragen haben. An der Bushaltstelle 1 stiegen 5 Studenten in einen leeren Bus. An der nächsten Haltstelle stiegen dann 6 Studenten aus. (Das ist kein Druckfehler...) An der nächsten Haltstelle stieg dann wieder einer ein. Dann war der Bus leer! — Warum ist die „Passagiermenge“ hier keine Menge?

[1] Irgendwo muss man auch in der Mathematik einmal beginnen. Ein **Axiom** ist eine grundlegende mathematische Aussage, d.h. ein Satz, der am Beginn steht. Es soll somit keine andern noch grundlegendere Sätze geben, aus denen ein Axiom hergeleitet werden kann.

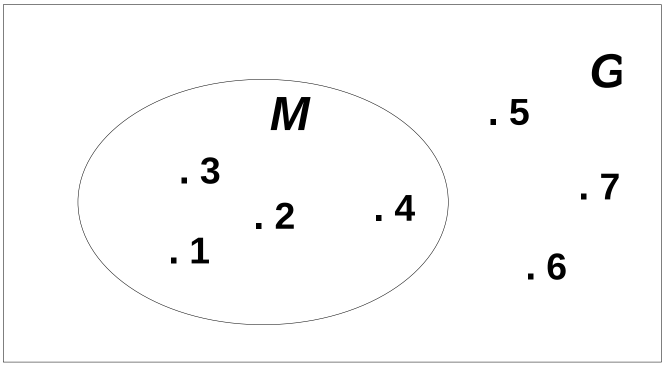
2.1.6 Antinomien

Antinomien sind widersprüchliche Mengenbildungen. Leider können solche in der naïven Mengenlehre entstehen. Doch im Schulalltag stellt das erfahrungsgemäss keine grosse Behinderung dar. Wir wollen dennoch kurz darauf eingehen.
Da wir die Grundbegriffe „Menge“ und „Element“ unterscheiden, gilt für eine Menge allgemein $M \not\in M$, d.h. es ist $\neg(M \in M)$. Man bilde nun $R = \{M \mid M \in R \Leftrightarrow M \not\in R\}$. Das ist Russels [2] Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten. Da die Menge R durch die Angabe der Eigenschaft ihrer Elemente gegeben ist, ist R eine Menge. Für Mengen gilt aber $M \not\in M$, d.h speziell für R gilt $R \not\in R$. Also gehört auch R zu den Elementen von R, denn die Eigenschaft $R \not\in R$ ist ja erfüllt. “R gehört zu R” bedeutet aber, dass $R \in R$ gilt, im Widerspruch zur Feststellung $R \not\in R$. Man hat also den Widerspruch, dass $R \not\in R \Leftrightarrow R \in R$ wahr sei, was aber der Widerspruchsfreiheit der Aussagenlogik widerspricht.
Heute kann man die Mengenlehre axiomatisch widerspruchsfrei aufbauen. Die Konstruktion erweist sich allerdings als sehr komplex. Die interessierten Studenten sind auf die Fachliteratur verwiesen (vgl. Bibl.: schmidt, potter).

2.1.7 Graphische Darstellung von Mengen

Zur Darstellung von Mengen verwenden wir Euler–Diagramme, früher auch als Venn–Diagramme[3] bezeichnet. Beispiel:

Abbildung 2.1: Euler–(Venn)–Diagramm



In 2.1 ist G die Grundmenge und M die betrachtete Menge. Z.B. gilt $1 \in M$ und $6 \not\in M$.

2.1.8 Endliche Mengen, Mächtigkeit

Definition 2.3 (Endliche Menge)** : Eine Menge heisst* **endlich, falls man ihre Elemente abschliessend aufzählen kann: $M = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$ mit $n \in \mathbf{N}$. Andernfalls heisst M unendlich.*

Die Menge aller Fliegen der Erde ist wohl endlich, obwohl niemand die momentane Anzahl Fliegen exakt kennt. Bekannte unendliche Mengen sind die Zahlenmengen $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}^+$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ (natürliche, ganze, rationale, positive rationale, reelle, komplexe Zahlen).

***Definition 2.4 (Mächtigkeit)** : Sei die Menge M endlich. Die Anzahl der Elemente von nennen wir die* **Mächtigkeit** *$|M|$ von M.*

[2] B. Russel, Mathematiker und Philosoph. Er übte Kritik an Cantors Mengenlehre.
[3] Man hat ende 20 Jhdt. entdeckt, dass Euler vor Venn solche Diagramme auch schon verwendet hat.

Bei unendlichen Mengen ist die Sache komplizierter. Zwar reden wir da von unendlicher Mächtigkeit ($|M| = \infty$), doch zeigt eben gerade die höhere Mengenlehre, dass man verschiedene Stufen von unendlich unterscheiden muss, um Widersprüche zu vermeiden. So kann man z.B. zeigen, dass gilt: $|N| = |Q| < |R|$. Dass man unendliche Bereiche als Dinge an sich begreifen und unterscheiden kann, siehen wir schon in der Geometrie. Wie erwähnt ist eine Gerade eine einerseits unendliche Punktmenge. Andererseits aber auch ein Ding an sich, z.B. ein blosses Element der Mengen aller Geraden, die eine Ebene bilden. Eine Ebene kann somit einerseits als Punktmenge, andererseits als Geradenmenge oder Figurenmenge – und drittens als Ding an sich verstanden werden.

2.1.9 Mengenbeziehungen: Definitionen

Teilmengen

Definition 2.5 (Teilmenge) *: A heisst* **Teilmenge** *von B ($A \subseteq B$) resp. B heisst* **Obermenge** *von A ($B \supseteq A$) wenn jedes Element von A auch in B enthalten ist: $\forall_{x \in A}\, x \in B$.*
Falls gilt: $(A \subseteq B) \wedge \exists_{x \in B} : x \notin A$, so heisst A echte Teilmenge von B.

Symbole 3 *Teilmengen]: Wir schreiben dann $A \subset B$ resp. $B \supset A$.*

Beispiel: *In Abb. 2.1 ist $M \subset G$.*

Satz 2.1 (Zu Teilmengen) *:*

1. $A \subset B \Leftrightarrow |A| < |B|$
2. $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C} \ldots$

Korollar 2.1 (Triviale Folgerungen) *: Folgende Beziehungen sind wahr:*

1. $(A = B) \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$
2. $A \subseteq B$ *(Reflexivität)*
3. $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow (A \subseteq C)$ *(Transitivität)*
4. $\forall_A : \{\} \subseteq A$ *(Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge.)*

Klassen von Mengen, Potenzmengen

Wie wir vorhin gesehen haben, kann man eine Gerade g der Euklidschen Geometrie als Grundgebilde, d.h. als Ding an sich auffassen. Andererseits ist dieselbe Gerade auch als unendliche Punktmenge γ denkbar. Weiter lässt sich eine Ebene Φ als unendliche Menge von Geraden deuten, die zusammen Φ ausmachen. Φ ist so gesehen eine unendliche Menge von Geraden γ_i, von denen wiederum jede aus unendlich vielen Punkten besteht. Φ ist somit eine unendliche Menge von unendlichen Mengen. Mengen von Mengen sind in gewissem Sinne „höhere Mengen“. Daher ist es üblich, für Mengen von Mengen ein andere Bezeichnung zu gebrauchen:

Begriffserklärung 3 (Klasse) *: Eine Menge von Mengen nennen wir* **Mengenfamilie** *oder* **Mengenklasse** *(kurz auch* **Klasse***. Statt „Teilmengen“ sagen wir „Teilklassen“.*

Beispiel: $\{\{2,3\},\{2\},\{4,5\}\}$ *ist eine solche Mengenklasse. Teilklassen sind* $\{\{2,3\},\{2\}\}$, $\{\{2\}\}$ *etc. .*

Definition 2.6 (Potenzmenge) *: Die* **Potenzmenge** *$\wp(M)$ einer Menge M ist die Menge oder Klasse aller Teilmengen von M.*

Beispiel: *Sei $M = \{a, b\}$. Dann ist $\wp(M) = \{\{\},\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$.*
Mit Hilfe der Kombinatorik ist es möglich, den folgenden allgemeinen Satz zu beweisen:

Satz 2.2 (Mächtigkeit der Potenzmenge) *:*

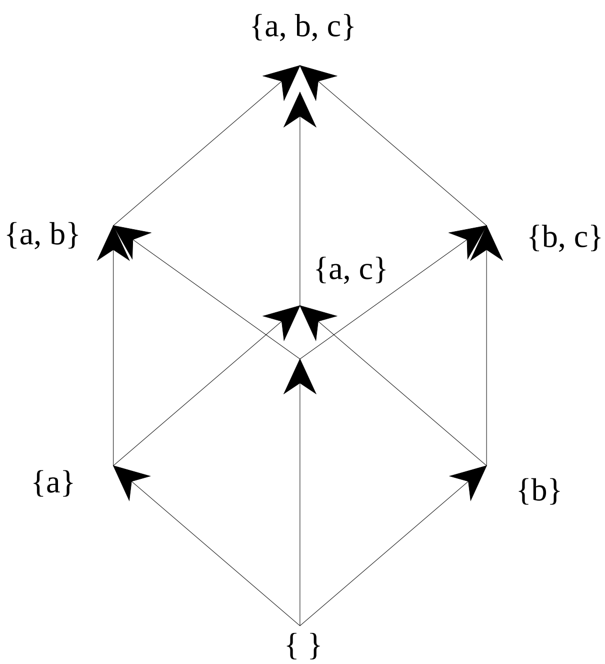
$$|M| = n \;\Rightarrow\; |\wp(M)| = 2^n = 2^{|M|}$$

Hasse-Diagramme

Hasse-Diagramme[4] *dienen dazu, eine graphische Übersicht über alle Elemente einer Potenzmenge zu geben.*

Beispiel: *Sei* $M = \{a, b, c\}$ *(vgl. Abb. 2.2).* M *hat 8 Teilmengen. Das Zeichen* $\subset$ *ist im Diagramm durch einen Pfeil ersetzt. Das Diagramm hat dann 12 Pfeile.*

Abbildung 2.2: Hasse–Diagramm



Mengenverknüpfungen

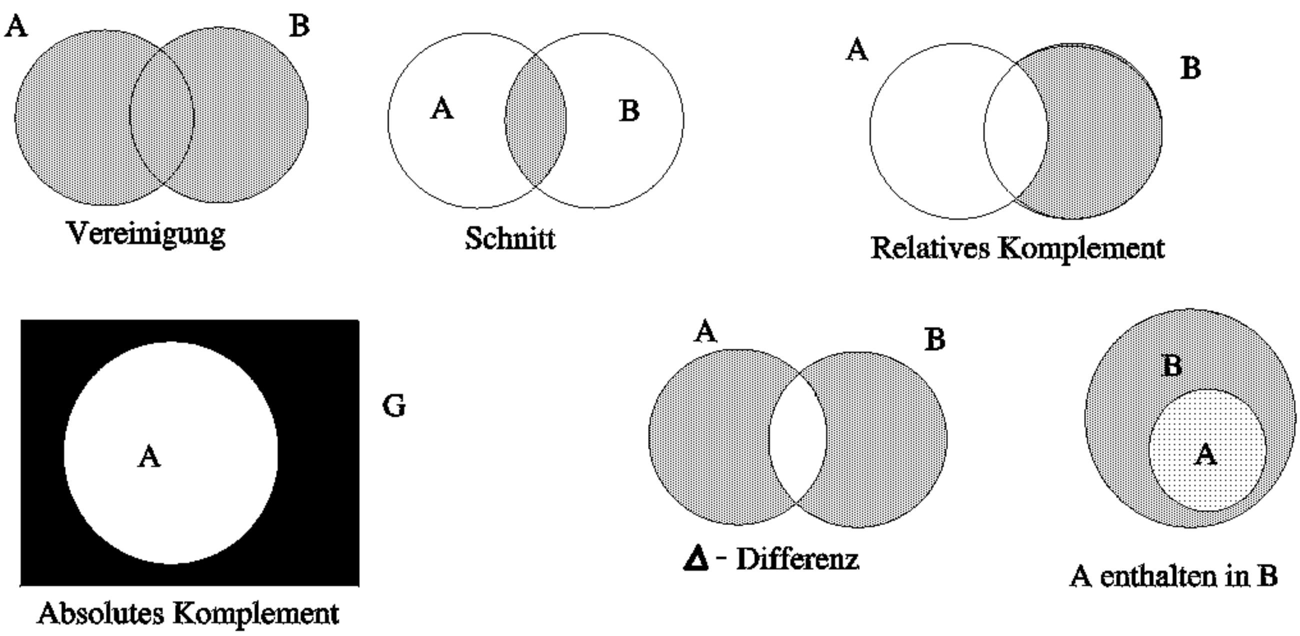
Mengenverknüpfungen sind sicher jedermann aus der Schule bekannt. Hier seien nur die abstrakten Definitionen wiedergegeben ((vgl. Abb. 2.3)):

Definition 2.7 (Mengenverknüpfungen) *: Sei* G = *Grundmenge.*

- **Vereinigungsmenge** *von* A *und* B*:* $A \cup B = \{x \in G | \, x \in A \, \vee \, x \in B\}$
- **Schnittmenge** *von* A *und* B*:* $A \cap B = \{x \in G | \, x \in A \, \wedge \, x \in B\}$
- A *und* B *heissen* **disjunkt**, *falls gilt:* $A \cap B = \{\}$
- **Differenz** *(relatives Kompliment) von* A *und* B*:* $A \setminus B = \{x \in A | \, x \notin B\}$
- **Komplement** *(absolutes Komplement) von* A*:* $\bar{A} = A^c = \{x \in G | \, x \notin A\}$
- **Symmetrische Differenz** *von* A *und* B*:* $A \bigtriangleup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

[4] Helmut Hasse war ein Mathematiker (Zahlentheoretiker) aus unserer Elterngeneration. Er lebte in Hamburg.

Abbildung 2.3: Mengen–Verknüpfungen



2.1.10 Gesetze der Mengenalgebra

Satz 2.3 (Mengenalgebra) : *Sei G die Grundmenge, A, B, C seien Mengen. Folgende Gesetze gelten:*

(1)	*Idempotenz*	$A \cup A$	$=$	A	$A \cap A$	$=$	A
(2)	*Assoziativität*	$(A \cup B) \cup C$	$=$	$A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C$	$=$	$A \cap (B \cap C)$
(3)	*Kommutativität*	$A \cup B$	$=$	$B \cup A$	$A \cap B$	$=$	$B \cap A$
(4)	*Distributivität*	$A \cup (B \cap C)$	$=$	$(A \cup B) \cap (A \cup C))$	$A \cap (B \cup C)$	$=$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
(5)	*Identitäten*	$A \cup \{\}$	$=$	A	$A \cap G$	$=$	A
		$A \cup G$	$=$	G	$A \cap \{\}$	$=$	$\{\}$
(6)	*Komplementgesetze*	$A \cup \bar{A}$	$=$	G	$A \cap \bar{A}$	$=$	$\{\}$
		$\bar{G}$	$=$	$\{\}$	$\overline{\{\}}$	$=$	G
		$\overline{(\bar{A})}$	$=$	A			
(7)	*De Morgan*	$\overline{(A \cup B)}$	$=$	$\bar{A} \cap \bar{B}$	$\overline{(A \cap B)}$	$=$	$\bar{A} \cup \bar{B}$

Als **Beispiel** *zeigen wir die Kommutativität: smallskip*
Beweis: *$A \cup B \ = \ \{x \in G | x \in A \vee x \in B\} = \{x \in G | x \in B \vee x \in A\} = B \cup A$. Dabei haben wir uns auf das Kommutativgesetz der Aussagenlogik abgestützt.*

Satz 2.4 (Zur Mächtigkeit) : *Folgende Gesetze gelten:*

$$
\begin{array}{lllllll}
(1) & A \cap B & = & \{\} & \Rightarrow & |A \cup B| & = & |A| + |B| \\
(2) & A \cap B & \neq & \{\} & \Rightarrow & |A \cup B| & = & |A| + |B| - |A \cap B|
\end{array}
$$

Vom letzten Bild aus Abb. 2.3 kann man ablesen:

Satz 2.5 (Zum Enthaltensein) *: Es gilt:*

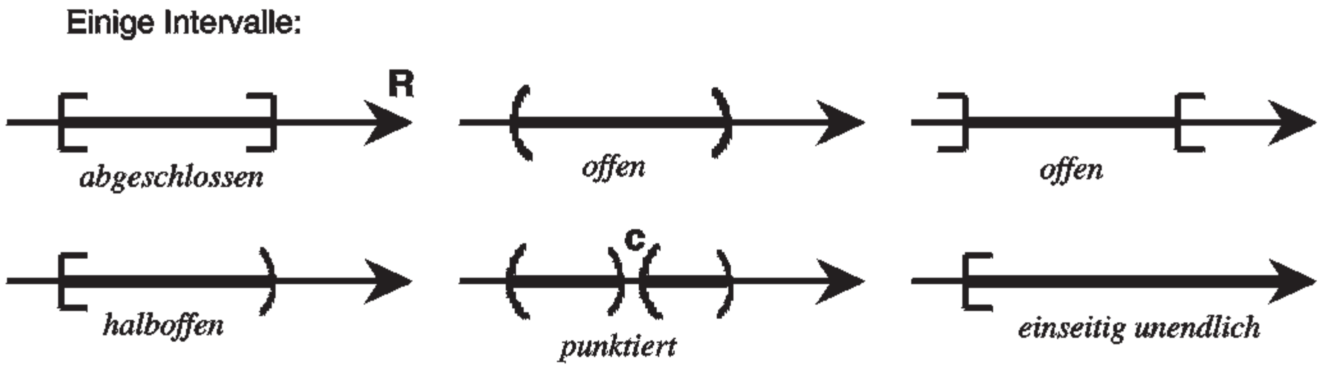
$$\begin{aligned} A \subseteq B \quad &\Longleftrightarrow \quad A \cap B = A \\ &\Longleftrightarrow \quad A \cup B = B \\ &\Longleftrightarrow \quad \bar{B} \subseteq \bar{A} \\ &\Longleftrightarrow \quad A \cap \bar{B} = \{\} \\ &\Longrightarrow \quad \bar{A} \cup B = G \end{aligned}$$

Hinweis: *Zur Übung überlege man sich die Beweise einiger der obigen Aussagen.*

2.1.11 Eine Anwendung in der Analysis: Intervalle

Intervalle sind spezielle Mengen. Es handelt sich dabei um Teilmengen der reellen Zahlen. In der Analysis trifft man solche Intervalle häufig als Lösungsmengen von Ungleichungen oder als Definitionsbereiche oder Wertebereiche von Funktionen.
Beispiele *von Intervalltypen:*

Abbildung 2.4: Intervalle



Definition 2.8 (Intervalle) *(vgl. Abb. 2.4):*

1. **Offenes Intervall**[5]*:* $I = (a,\ b) := \{x \in \mathbf{R} |\ a < x < b\}$.
2. **Abgeschlossenes Intervall***:* $\bar{I} = [a,\ b] := \{x \in \mathbf{R} |\ a \leq x \leq b\}$.
3. **Halboffene Intervalle***:* $I = (a,\ b] := \{x \in \mathbf{R} |\ a < x \leq b\}$, $\bar{I} = [a,\ b) := \{x \in \mathbf{R} |\ a \leq x < b\}$.
4. **punktiertes Intervall***:* $I(c) := \{x \in \mathbf{R} |\ x \in (a, b) \wedge x \neq c\}$. *Punktierte Intervalle heissen auch* **Umgebungen**
5. *Das* **beidseitig unendliche Intervall** *isr gleich* $\mathbf{R}$*:* $\mathbf{R} := \{x \in |\ -\infty < x < \infty\}$. [6]
6. **Einseitig unendliche Intervalle***:* $(a,\ \infty) := \{x \in \mathbf{R} | a < x\}$, $[a,\ \infty) := \{x \in \mathbf{R} | a \leq x\}$, $(\infty,\ b) := \{x \in \mathbf{R} | x < b\}$, $(\infty,\ b] := \{x \in \mathbf{R} | x \leq b\}$.

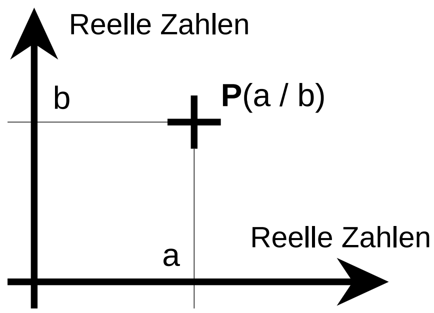
2.2 Produktmengen

2.2.1 Definitionen: Geordnete Paare und Produktmengen

Mit dem Zahlenstrahl, d.h. durch die Punkte auf einem geometrischen Strahl, stellen wir bekanntlich die Menge der reellen Zahlen dar. Welche entsprechende Menge aber stellen wir durch die Punkte **P** *der Ebene*

[5] Das offene Intervall wird manchmal auch als $]a, b[$ geschrieben.
[6] ∞ ist keine reelle Zahl. Man kann die reellen Zahlen aber um ∞ erweitern. Das bedingt aber weitere Kenntnisse.

Abbildung 2.5: Ein Punkt einer Ebene



(vgl. Abb. 2.5) dar? Im Folgenden wollen wir diese Menge konstruieren. Wir werden sie Produktmenge $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ *nennen. Dabei ist es wesentlich, dass man das erste Element* a *(1. Koordinate) in der Reihenfolge vom 2. Element* b *unterscheiden kann. Dazu brauchen wir den Begriff des geordneten Paares.*
Sei allgemein $a \in A$ *und* $b \in B$*. Ein geordnetes Paar* (a, b) *besteht aus zwei Elementen, wobei* a *als das erste und* b *als das zweite ausgezeichnet ist. Um die Reihenfolge der Elemente mit Hilfe der bisher erarbeiteten Grundlagen (Mengenlehre, Logik) exakt festzulegen, brauchen wir einen Trick. Mit einer Menge alleine kommen wir nicht weiter, denn die Reihenfolge der Elemente wird bei der Mengenbildung ja nicht berücksichtigt. In einer Menge geben wir an, welches das 1. Element ist (durch Angabe einer Menge mit einem Element) und welche beiden Elemente das Paar bilden (durch Angabe einer Menge mit zwei Elementen). Ausser der Mengenbildung haben wir dann dabei weiter nichts benutzt. Das geht so:*

Definition 2.9 (Geordnetes Paar) *:* $(a, b) \ = \ \{\{a\}, \{a, b\} =\}$ **geordnetes Paar**.

Ein geordnetes Paar ist demnach eine Menge von Mengen, d.h. eine Klasse.
Man kann einfach folgenden Satz beweisen (Übung):

Satz 2.6 (Gleichheit geordneter Paare) *:*

$$(a, b) \ = \ (c, d) \iff (a = c \ \wedge \ b = d)$$

Beispiele: $(1, 2) \neq (2, 1)$, $(3, 3) \neq \{3, 3\} \ = \ \{3\}$, $(5, 6) \ = \ (10, 12)$.

Nun können wir die Produktmenge als Menge von geordneten Paaren definieren. Seien dazu A *und* B *zwei gegebene Mengen:*

Definition 2.10 (Produktmenge) *:* **Produktmenge** $A \times B \ = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

Es ist daher:

$$A \times B \ = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\} \ = \ \{\{\{a\}, \{a, b\}\} \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

$A \times B$ *ist eine Menge von Mengen von Mengen, d.h. eine Familie von Klassen von Mengen. Das ist etwas Neues, wie wir es bisher noch nie angetroffen haben, eine neue Qualität also! Wir benützen weiter folgende Abkürzung:*

Begriffserklärung 4 (Zum Mengenprodukt) *: Statt* $A \times A$ *schreiben wir kurz* A^2*.*

Beispiele: *Sei* $A = \{1, 2\}$ *und* $B = \{a, b, c\}$*.*

$$\begin{array}{rcl} A^2 & = & \{\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 1\}, \{2, 2\}\} \\ A \times B & = & \{\{1, a\}, \{1, b\}, \{1, c\}, \{2, a\}, \{2, b\}, \{2, c\}\} \end{array}$$

Bemerkung: *Aus diesen Beispielen sieht man: Für $A \neq B$ ist $A \times B \neq B \times A$.*

Trivialerweise gilt:

Satz 2.7 (Mächtigkeit des Mengenprodukts) :

$$|A \times B| \; = \; |A| \; \cdot |B|$$

2.2.2 Verallgemeinerung auf mehrere Faktoren

Jetzt können wir induktiv[7] *geordnete n–Tupel und Produktmengen mit mehreren Faktoren definieren. Da $M \; = \; A \times B$ definiert und auch eine Menge ist, wird es möglich, $A \times B \times C$ wie folgt zu definieren: $A \times B \times C \; := \; M \times C \; = \; (A \times B) \times C$. Allgemein legen wir fest:*

Definition 2.11 (geordnete n–Tupel) :

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \;\; := \{\{(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})\}, \{(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n\}\}$$

Definition 2.12 (Produktmengen mit mehreren Faktoren) :

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \;\; := \;\; (A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{n-1}) \times A_n$$

Natürlich gilt wieder:

Satz 2.8 (Gleichheit geordneter Paare) :

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \;\; = \;\; (b_1, b_2, \ldots, b_n) \;\; \Longleftrightarrow \;\; (a_1 = b_1 \;\; \wedge \;\; a_2 = b_2 \wedge \ldots \wedge a_n = b_n)$$

2.2.3 Wahrheitsmengen

Sei P eine Aussageform und $M \; = \; \{0, 1\}$ (Menge der Wahrheitswerte). Wir definieren die Wahrheitsmenge $\tau(P)$[8]*. wie folgt:*

Definition 2.13 (Wahrheitsmenge) :

$$\tau(P) \;\; := \;\; \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M^n = \{0, 1\}^n \mid P \;\; \textit{ist wahr für die Belegung} \;\; (x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$$

Beispiel: $\tau((X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow Z)) \;\; = \;\; \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1), (0, 0, 0)\}$. *(Man prüfe das nach!)*

[7] Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion.
[8] τ steht für *„truth"*

Satz 2.9 (Über Wahrheitsmengen) *:*

1. $\tau(P_1 \wedge P_2) \;=\; \tau(P_1) \cap \tau(P_2)$
2. $\tau(P_1 \vee P_2) \;=\; \tau(P_1) \cup \tau(P_2)$
3. $\tau(\neg P) \;=\; \overline{\tau(P)}$
4. $(P \vdash Q) \iff (\tau(P) \subseteq \tau(Q))$ *ist Tautologie.*
5. *Im letzten Fall ist auch* $(P \implies Q)$ *Tautologie.*

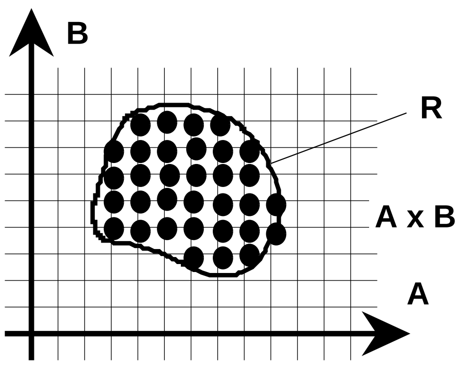
Kapitel 3

Relationen, Abblidungen und Funktionen

3.1 Der Begriff „Relation“

3.1.1 Definitionen

Abbildung 3.1: Relationsmenge



Definition 3.1 (Relationsmenge) *: Eine Teilmenge $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ heisst zweistellige* **Relationsmenge** *oder kurz* **Relation** *von A nach B.*

(Vgl. dazu Abb. 3.1.) Ist $(a, b) \in \mathcal{R} \subseteq A \times B$ so schreiben wir symbolisch:

Symbole 4 (Relation) *: $a \smile b \;:\Longleftrightarrow\; (a, b) \in \mathcal{R} \subseteq A \times B$.*

„$\smile$ “ ist ein frei erfundenes Symbol, das keine weitere konkrete Bedeutung hat. Falls wir konkrete bekannte Relationen betrachten, so ersetzen wir es durch das jeweile übliche Relationssymbol.

Sprechweise: *Falls $a \smile b$ gilt, so sagen wir „a steht in Relation zu b“.*

Es gilt somit $\mathcal{R} = \{(a, b) \mid a \smile b$ resp. $(a, b) \in \mathcal{R}\}$. $A \times B$ zerfällt daher in zwei Teilmengen: $A \times B = \mathcal{R} \cup \bar{\mathcal{R}}$. $\mathcal{R}$ ist die Menge der geordneten Paare, die zueinander in Relation stehen, $\bar{\mathcal{R}}$ die Menge *der geordneten Paare, die zueinander nicht in Relation stehen. Sind A und B endlich, so lässt sich die Relation wie in Abb 3.1 graphisch darstellen.*

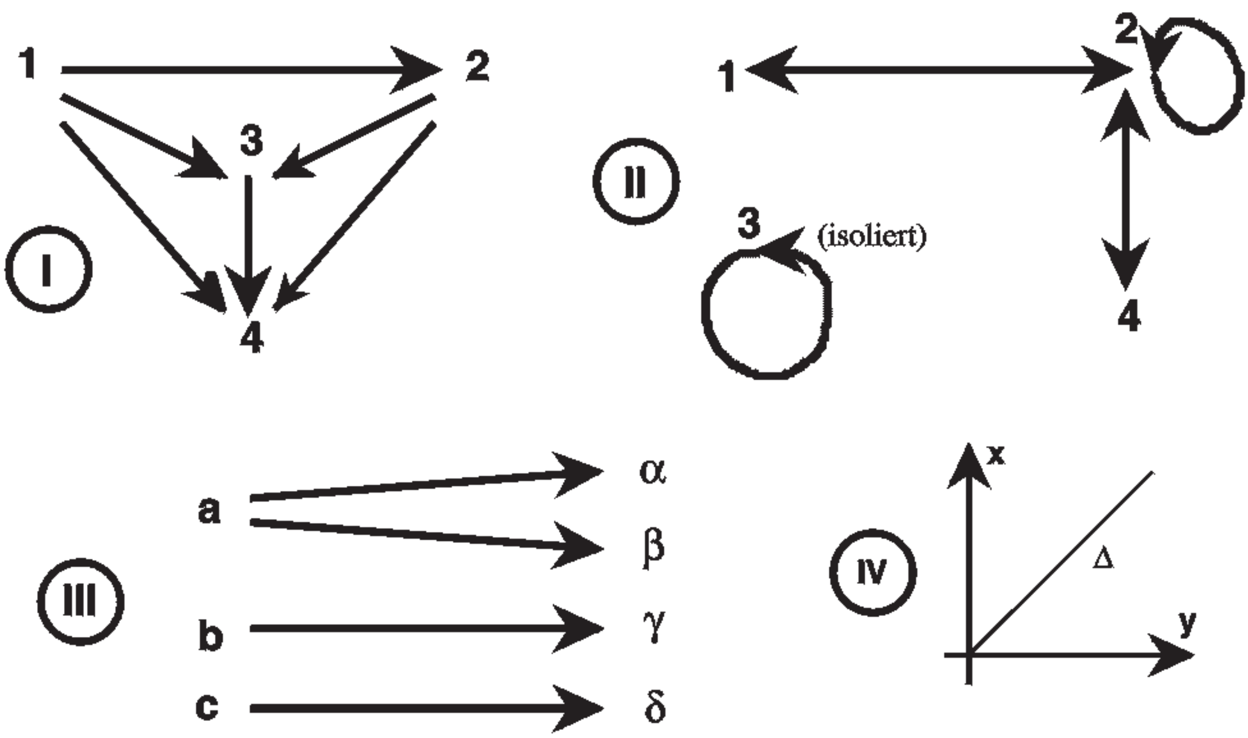
Beispiele:

1. $A \times B = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. $a \smile b :\Longleftrightarrow a < b$. *Somit ist* $\mathcal{R} = \{(a, b) \mid a < b\}$.
2. $A \times B = \Gamma \times \Gamma$, $\Gamma = \{$*Geraden einer Ebene*$\}$. $\mathcal{R} = \{(g_1, g_2) \in \{\Gamma \times \Gamma\} \mid g_1 \perp g_2\}$. *DAnnn ist:* $a \smile b :\Longleftrightarrow g_1 \perp g_2$. *($\perp$ bedeutet „senkrecht stehen“.)*

3.1.2 Darstellung durch Pfeildiagramme

Endliche Relationsmengen lassen sich übersichtlich durch Pfeildiagramme darstellen. Der Begriff ist selbsterklärend, wie die folgenden Beispiele zeigen:

Abbildung 3.2: Pfeildiagramme



Beispiele *(vgl. Abb. 3.2):*

1. $\mathcal{R} = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\} \subseteq \{1,2,3,4\} \times \{1,2,3,4\}\}$ *(Bild I)*
2. $\mathcal{R} = \{\{1,2\}, \{2,2\}, \{2,4\}, \{2,1\}, \{3,3\}, \{4,2\} \subseteq \{1,2,3,4\} \times \{1,2,3,4\}\}$ *(Bild II)*
3. $\mathcal{R} = \{\{a,\alpha\}, \{a,\beta\}, \{b,\gamma\}, \{c,\delta\} \subseteq \{a,b,c\} \times \{\alpha,\beta,\gamma\}\}$ *(Bild III)*

Die Zahl 3 in Bild II ist ein isoliertes Element: 3 ist nur in Relation zu sich selbst.

3.2 Spezielle Relationen in $A \times A$ oder $A \times B$

3.2.1 Diagonalrelation (Identitätsrelation)

Definition 3.2 (Diagonalrelation) *:*

$$\triangle_A \;:=\; \mathcal{R} = \{(a_1, a_2) \in A \times A \mid a_1 = a_2\} = \{(a_1, a_2) \mid a \in A\}$$

Die Diagonalrelation besteht somit ausschliesslich aus isolierten Elementen, die nur in Relation zu sich selbst stehen. Falls $A = \mathbf{R}$ ist (Bild IV, Abb. Abb. 3.2), so ist das Bild der Relationsmenge darstellbar als die Winkelhalbierende des I. Quadranten (bei einer Darstellung in einem kartesischen Koordinatensystem). Daher der Name Diagonalrelation. $\Delta = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = y\}$

3.2.2 Inverse Relation

Sei eine Relation $\mathcal{R} = \{(a, b) \mid a \smile b\}$ *gegeben.*

Definition 3.3 (Inverse Relation) *:* $\mathcal{R}^{-1} = \{(b, a) \mid a \smile b$ *resp.* $(a, b) \in \mathcal{R}\}$ *heisst* **inverse Relation** *zu* $\mathcal{R}$.

Beispiele:

1. $\mathcal{R} = \{\{a, 1\}, \{a, 2\}, \{c, 0\}\}$. *Dann ist* $\mathcal{R}^{-1} = \{\{1, a\}, \{2, a\}, \{0, c\}\}$.
2. $\mathcal{R} = \{$*(Mann, Frau)* $\mid$ *Mann verheiratet mit Frau*$\}$.
   $\mathcal{R}^{-1} = \{$*(Frau, Mann)* $\mid$ *Mann verheiratet mit Frau*$\}$.

Trivialerweise ist fogender Sachverhalt richtig:

Satz 3.1 (Zur inversen Relation) *:*

1. $\Delta^{-1} = \Delta$
2. $|\mathcal{R}^{-1}| = |\mathcal{R}|$. *(Die Mächtigkeit der Inversen ändert nicht.)*

3.2.3 Reflexive Relation

Sei $\mathcal{R} \subseteq A^2$.

Definition 3.4 (Reflexive Relation) *:* $\mathcal{R}$ *heisst* **reflexiv** $:\Longleftrightarrow \forall_{a \in A} : \; (a, a) \in \mathcal{R}$.

Jedes Element ist also mit sich selbst in Relation. (Vgl. Abb. 3.3.) Daher gilt die einfache Folgerung:

Satz 3.2 (Zur reflexiven Relation) *: Sei* $\mathcal{R}$ *reflexiv. Dann ist:*

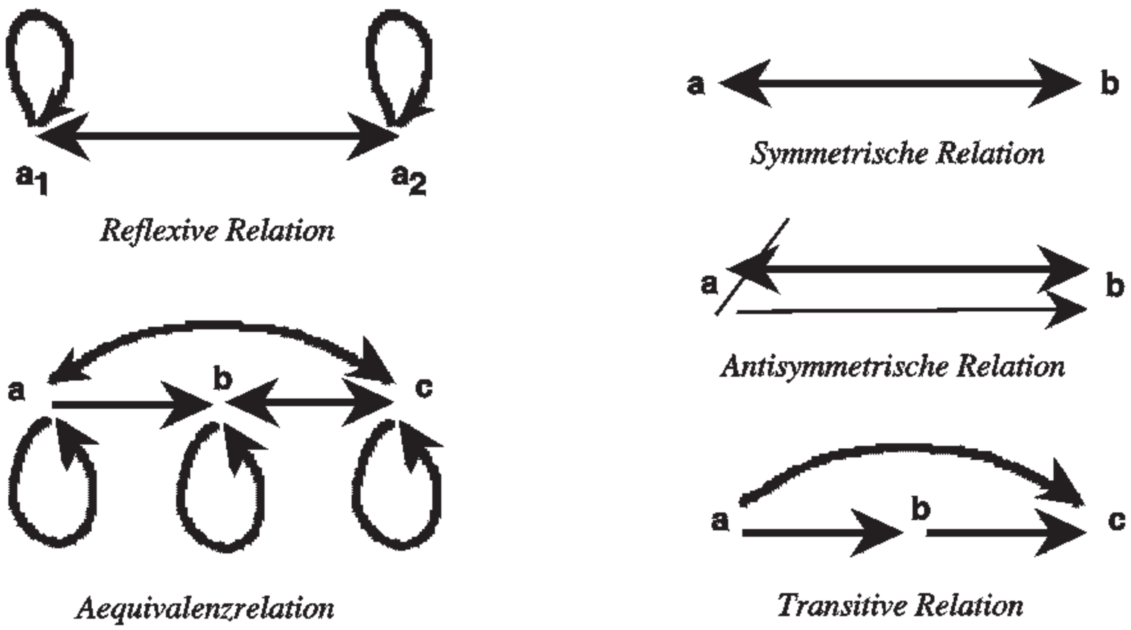
1. $A^2 \subseteq \mathcal{R}$
2. $\Delta_A \subseteq \mathcal{R}$

Beispiele *dazu:*

1. *Für geometrische Dreiecke: Sei* $Dreieck_1 \smile Dreieck_2 :\Longleftrightarrow Dreieck_1 \sim Dreieck_2$ *($\sim$ bedeutet hier „ähnlich“). $\sim$ ist natürlich reflexiv, da jedes Dreieck zu sich selbst ähnlich ist.*
2. *Ebenso ist es mit der Kongruenz von Dreiecken.*
3. *Ebenso für $\perp$ bei Geraden einer Ebene:* $g_1 \perp g_2 \Longrightarrow g_2 \perp g_1$.
4. *Für reelle Zahlen a, b:* $a \smile b :\Longleftrightarrow a < b$. *Daraus folgt aber $b \not< a$. Diese Relation ist nicht reflexiv. (Sie ist antireflexiv.)*

Definition 3.5 (Antieflexive Relation) *:* $\mathcal{R}$ *heisst* **antireflexiv** $:\Longleftrightarrow \forall_{a \in A} : \; (a, a) \notin \mathcal{R}$.

Abbildung 3.3: Diverse Relationen



3.2.4 Symmetrische Relation

Definition 3.6 (Symmetrische Relation) :
Eine Relation $\mathcal{R}$ heisst **symmetrisch**, *falls gilt:* $a \smile b \Longrightarrow b \smile a$.

Reflexive Relationen sind somit umkehrbar (vgl. Abb. 3.3). Alle Pfeile sind Doppelpfeile.

Beispiele:

1. *Die Ähnlichkeitsrelation bei geometrischen Dreiecken.*
2. *Kongruenzrelation bei geometrischen Dreiecken.*
3. *Die Diagonalrelation.*
4. $(a < b) \not\Longrightarrow (a < b)$. *Diese Relation ist antisymmetrisch. (Vgl. Abb. 3.3.)*

Definition 3.7 (Antisymmetrische Relation) :
Eine Relation $\mathcal{R}$ heisst **antisymmetrisch**, *falls gilt:* $a \smile b \Longrightarrow b \not\smile a$.

3.2.5 Transitive Relation

Definition 3.8 (Transitive Relation) :
Eine Relation $\mathcal{R}$ heisst **transitiv**, *falls gilt:* $:\Longleftrightarrow \ ((a \smile b) \wedge (b \smile c) \Longrightarrow a \smile c)$.

(Zur Transitiven Relation vgl. auch Abb. 3.3.)

Beispiele:

1. *Die Ähnlichkeitsrelation bei geometrischen Dreiecken ist transitiv.*

2. *Ebenso die Kongruenzrelation bei geometrischen Dreiecken.*
3. *Die Gleichheitsrelation bei Zahlen:* $a = b \wedge b = c \Longrightarrow a = c$.
4. *Die* $<$*–Relation bei Zahlen:* $a < b \wedge b < c \Longrightarrow a < c$.
5. *Die* $\perp$*–Relation bei Geraden einer Ebene ist nicht transitiv:* $g_1 \perp g_2 \wedge g_2 \perp g_3 \Longrightarrow g_1 \not\perp g_3$.

3.2.6 Äquivalenzrelation

Definition der Äquivalenzrelation

Sei $\mathcal{R} \subseteq A^2$*. Dann definieren wir (vgl. dazu auch Abb. 3.3.) :*

Definition 3.9 (Äquivalenzrelation) *:*
Eine Relation $\mathcal{R}$ *heisst* **Äquivalenzrelation***, falls* $\mathcal{R}$ *reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.*

Symbole 5 (Relation) *: Für die Äquivalenzrelation benützen wir das Symbol „*$\sim$*“.*

Beispiele: *Wegen den bisher betrachteten Beispielen wissen wir, dass folgende Relationen Äquivalenzrelationen sind: Ähnlichkeit geometrischer Figuren, Kongruenz geometrischer Figuren, Parallelität von Geraden, Ebenen oder Pfeilen, Gleichheit von Zahlen, Zugehörigkeit von Pfeilen zu einem geometrischen Vektor.*

Von den Vektoren her ist uns bekannt, dass „die Menge aller zu einem gegebenen Pfeil gleich langen, parallelen und gleichgerichteten Pfeile im Raum“einen geometrischen Vektor bilden. Durch die Kriterien „gleich lang, parallel und gleichgerichtet“ wird nun auf dem Mengenprodukt (Menge aller Pfeile) $\times$ *(Menge aller Pfeile) (*$A =$ *Menge aller Pfeile) eindeutig eine Teilmenge ausgesondert, d.h. eine Relation definiert:*

$$Pfeil_1 \smile Pfeil_2 \Longleftrightarrow \text{beide Pfleile gehören zum selben Vektor.}$$

Man sieht sofort ein, dass diese Relation reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, also eine Äquivalenzrelation stiftet. Die geordneten Paare der Relation bilden eine Mengenklasse. Bei den Elementen von A*, die zu einer Äquivalenzrelation gehören, spricht man daher von einer Äquivalenzklasse.*

Definition 3.10 (Äquivalenklasse) *:*
$[a] := \{x \in A \mid x \sim a\}$ *heisst* **Äquivalenklasse** *mit dem Repräsentanten* a*.*

$[a]$ *ist somit die „Menge aller zu* a *äquivalenten Elemente von* A*“. Es gilt natürlich* $[a] \subseteq A$*.*

Das Beispiel der Restklassen

Ein wichtiges **Beispiel** *einer Äquivalenzrelation ist durch die Restklassen in den ganzen Zahlen* Z *gegeben. Restklassen sind also Äquivalenklassen.*
Seien $a, b, c \in \mathbf{Z}$*. Wir definieren zuerst die Kongruenz in* $\mathbf{Z}$*:*

Definition 3.11 (Kongruenz „modulo“) *:* a *heisst* **kongruent** *zu* b **modulo** c *genau dann, wenn* a *und* b *bei der Division durch* c *denselben Divisionsrest haben.*

Symbole 6 (Kongruenz „modulo“) *: Für* a **kongruent** b **modulo** c *schreiben wir kürzer:*

$$a \equiv b \mod c \quad oder \quad a \equiv b(c)$$

Beispiele:

$$17 \equiv 12 \equiv 7 \equiv 2 \equiv -3 \equiv -8 \mod 5.$$

Arithmetisch kann man die Kongruenz auch wie folgt definieren:

Definition 3.12 (Andere Erklärung der Kongruenz) *:*

$$a \equiv b \mod c :\Longleftrightarrow \exists_{k\in\mathbf{Z}} : \; a = c \cdot k + b$$

Die durch die Kongruenz modulo einer ganzen Zahl gegebene Äquivalenzrelation teilt $\mathbf{Z}$ *in disjunkte Teilmengen auf, nämlich die Äquivalenzklassen. Diese nennen wir jetzt Restklassen.*

Definition 3.13 (Restklassen) *: Eine Restklasse in* $\mathbf{Z}$ *ist eine durch die Kongruenzrelation modulo einer Zahl gegebene Ähnlichkeitsklasse.*

Als **Beispiel** *wollen wir die Restklasen modulo 3 betrachten. Das sind diejenigen Teilmengen von* $\mathbf{Z}$*, deren Elemente bei der Division durch 3 jeweils denselben Rest lassen. Wir haben somit:*

Nullklasse:	$[0]_3 = \{x \in \mathbf{Z} \mid x \equiv 0 \mod 3\} = \{0, \pm 3, \pm 6, \ldots\}$
Einsklasse:	$[1]_3 = \{x \in \mathbf{Z} \mid x \equiv 1 \mod 3\} = \{1, 4, 7, \ldots, -2, -5, -8, \ldots\}$
Zweiklasse:	$[2]_3 = \{x \in \mathbf{Z} \mid x \equiv 2 \mod 3\} = \{2, 5, 8, \ldots, -1, -4, -7, \ldots\}$

Man sieht sofort, dass gilt:

$$[0]_3 \cup [1]_3 \cup [2]_3 = \mathbf{Z}, \qquad [0]_3 \cup [1]_3 = \{\} \qquad etc..$$

3.2.7 Die strenge Ordnungsrelation

Für zwei verschiedene reelle Zahlen a *und* b *gilt: Entweder ist* $a < b$ *oder es ist* $b < a$*. Dadurch ist auf* $\mathbf{R}^2$ *eine strenge Ordnungsrelation gegeben. Exakt definiert man die strenge Ordnungsrelation wie folgt:*

Definition 3.14 (Strenge Ordnungsrelation) *:*
Eine Relation, die antireflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist, heisst **strenge Ordnungsrelation***.*

Beispiele:

1. *Sei* $\mathbf{N}_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ *und* $M = \{\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3, \ldots\}$*. Dann ist durch* $\mathbf{N}_1 \subset \mathbf{N}_2 \subset \mathbf{N}_3 \subset \mathbf{N}_4 \subset \ldots$ *eine strenge Ordnungsrelation auf* M *gegeben.*

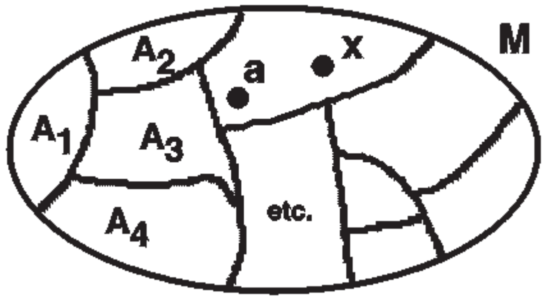
2. *In jeder nummerierten Menge kann man die Elemente nach ihren Nummern ordnen. Damit hat man eine strenge Ordnungsrelation.*

3.2.8 Partitionen und Quotientenmengen

Mit Hilfe des Mengenprodukts ist es möglich, auf abstrakte Art und Weise aus alten Mengen neue, grössere zu bilden. Eine weitere Möglichkeit zur Bildung neuer Mengen erschliesst sich durch die Quotiontenmengen. (Vgl. auch Lipschutz (Bibl.: lipschutz1 und lipschutz2).)
Um diese Möglichkeit zu studieren, wollen wir zuerst den Begriff Partition erklären. Zu diesem Zweck betrachten wir eine Menge M *und denken uns diese aufgeteilt in paarweise disjunkte Teilmengen* $A_1, A_2, A_3, \ldots$*. Dabei schränken wir uns für unsere Zwecke auf den einfachen Fall ein, wo die Anzahl dieser Teilmengen abzählbar*[1] *ist. Für eine solche Aufteilung in Teilmengen verwenden wir den Begriff Partition. Exakt:*

[1]Später wird gezeigt, dass nicht alle Mengen abzählbar sind. Ein Beispiel ist die Menge der reellen Zahlen.

Abbildung 3.4: Partitionen



Definition 3.15 (Partition) *:*
$P_M = \{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$ *heisst* **Partition** *von* $M :\Longleftrightarrow \; (M = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) \wedge (\forall_{i \neq j} : A_i \cap A_j = \{\})$.

Beispiel: *Wir betrachten* $M = \{a, b, c, d\}$. *Dann ist durch* $P_M = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}$ *eine Partition gegeben. Man merkt sofort, dass die Anzahl aller möglichen Partitionen von* M *mit der Mächtigkeit* $|M|$ *sehr rasch anwächst.*

Sei nun auf M *eine Partition* $P_M = \{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$ *gegeben. In einer beliebigen Teilmenge* A_i *wählen irgend ein Element* a_i *aus und halten es fest. Durch* $x \sim a_i \; :\Longleftrightarrow \; (a_i \in A_i \wedge x \in A_i)$ *ist damit eine Relation gegeben, denn wir haben damit geordnete Paare in* M^2. *Wegen der gemeinsamen Zugehörigkeit der Elemente* x *und* a_i *zu* A_i *ist diese Relation reflexiv, symmetrisch und transitiv. Es handelt sich also um eine Äquivalenzrelation.*
Wenn andererseits auf M *eine Äquivalenzrelation gegeben ist, so können wir irgend ein Element* $a_1 \in M$ *auswählen und damit die Menge* A_1 *aller zu* a_1 *äquivalenten Elemente bilden. Dann streichen wir die Elemente von* A_1 *aus* M *weg, wählen in der Restmenge ein Element* a_2 *und verfahren ebenso. Das führt zur Streichung der Menge* A_2 *aller zu* a_2 *äquivalenten Elemente. So fahren wir weiter. Die Mengen* A_i *sind nach Konstruktion disjunkt. Da mit jedem Element* a_i *eine Menge* A_i *gebildet werden kann, schöpft das Verfahren die ganze Menge* M *aus. Damit wissen wir:*

Satz 3.3 (Äquivalenzrelation und Partition) *:*
Eine Äquivalenzrelation erzeugt auf M *eine Partition und umgekehrt.*

Ein anschauliches **Beispiel** *liefert die Volksschule. Jeder Schüler einer solchen Schule genört zu genau einer Klasse. Die Schüler einer Klasse sind äquivalent bezüglich Notengebung, denn sie haben dieselben Lehrkräfte, also dieselben Bedingungen. Man hat somit eine Äquivalenzrelation. Und die Schule ist eindeutig in disjunkte Klassen aufgeteilt.*
Da es nicht mehr disjunkte Teilmengen als Elemente geben kann, gilt:

Satz 3.4 (Mächtigkeit einer Partition) *:*

$$|M| \geq |P_M|$$

Sei jetzt auf M *eine Äquivalenzrelation* $\mathcal{R} \subseteq M^2$ *gegeben. Damit existiert eine Partition* P_M. *Wir definieren:*

Definition 3.16 (Quotientenmenge) *: Die Partition* P_M *heisst* **Quotientenmenge nach** $\mathcal{R}$. *Symbolisch:* $P_M = M/\mathcal{R}$

Beispiele:

1. *Kongruenz modulo 3 in* $\mathbf{Z}$: $P_M = \{[0]_3, [1]_3, [2]_3\}$.

2. *Bei der Relation „gleich lang und gleich gerichtet“ bei geometrischen Pfeilen ist* $P_M = \{geometrischeVektoren\}$.

3. *Bei der Ähnlichkeitsrelation mit geometrischen Figuren ist* P_M *die Menge der geometrischen Formen.*

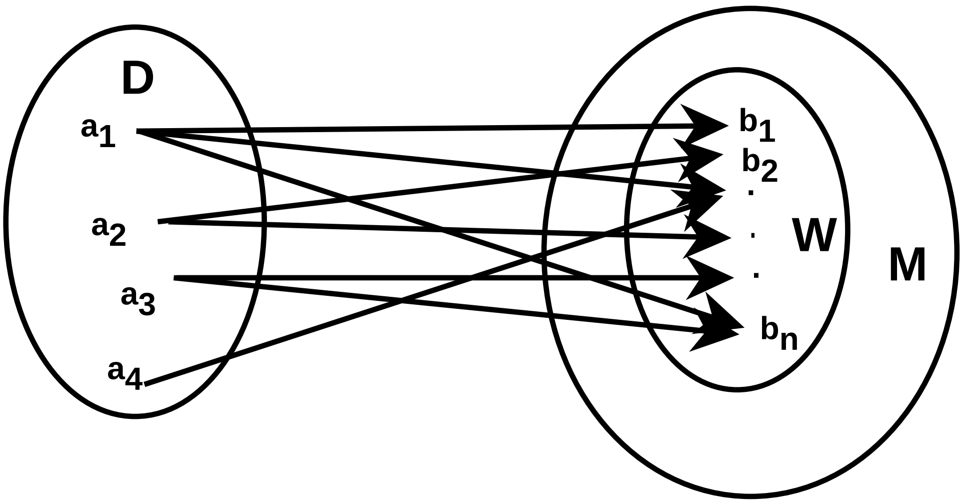
3.3 Abbildungen und Funktionen

3.3.1 Definitionen

Abbildungen

Definition 3.17 (Linkstotale Relation) *:*
Eine Relation $\mathcal{R} \subseteq D \times M$ *heisst* **linkstotal** $:\Longleftrightarrow \forall_{a\in D}\exists_{b\in M}\ (a,b) \in \mathcal{R}$

Abbildung 3.5: Linkstotale Relation



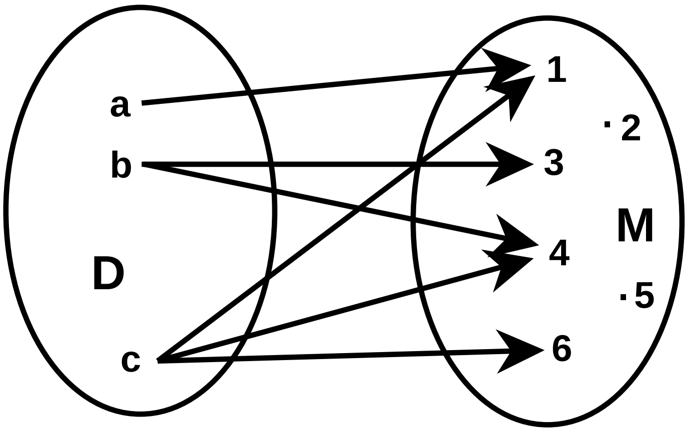
Zu jedem $a \in D$ *muss es also mindestens ein* b *geben (es können auch mehrere sein), so dass das geordnete Paar* (a, b) *zur Relationsmenge* $\mathcal{R}$ *gehört. Jedes* a *hat also ein Bild. Dabei ist* W *die Menge der Elemente* b*, die in der Relationsmenge jeweils in den geordneten Paaren an zweiter Stelle vorkommen. Nicht alle Elemente aus dem Vorrat* M *müssen vorkommen.* W *kann eine Teilmenge von* M *sein.* D *auf der linken Seite in Abb. 3.5 wird also total ausgeschöpft: „linkstotal“ also.*
Es gilt daher: $W = \{b_i \in M \mid \exists_{a_k\in D} :\ (a_k, b_i) \in \mathcal{R}\}$.
In der mathematischen Fachsprache sind im Zusammenhang mit Abbildungen mehrere Begriffe geläufig. Die wichtigsten sind nachstehend zusammengestell:

Definition 3.18 (Abbildung, Definitionsbereich, Wertebereich) *: Eine linkstotale Relation nennen wir* **Abbildung** $\mathcal{A}$. *Die Menge* D *(in der letzten Definition) heisst* **Definitionsbereich**, **Urbildbereich** *oder* **Argumentenbereich**. W *heisst* **Wertebereich** *(wenn es sich um Zahlen handelt),* **Bildbereich** *oder* **Zielbereich**. M *heisst* **Wertevorrat** *oder* **Bildvorrat**. *Ein Element aus dem Definitionbereich heisst* **Urbild** *oder* **Argument**. *Ein Element aus dem Bildbereich heisst* **Bild**, **Wert** *(wenn es sich um Zahlen handelt) oder* **Ziel**. *Eine Variable über dem Urbildbereich nennen wir auch* **unabhängige Variable**, *eine Variable über dem Bildbereich* **abhängige Variable**.

Durch eine linkstotale Relation (Abbildung) wird also einem Urbild immer ein Bild zugeordnet. Man spricht daher auch von einer Zuordnung. Die anvisierte Vorratsmenge M muss dabei aber nicht voll ausgenützt werden.

Symbole 7 (Abbildung) *: Bei einer Abbildung schreiben wir statt $(a,b) \in \mathcal{R}$ kurz $a \longmapsto b$.*

Abbildung 3.6: Relationsmenge und Abbildung



Beispiele:

1. *In Abb.3.6 ist die Abbildung $\mathcal{R} = \{(a,1),(b,3),(b,4),(c,1),(c,4),(c,6)\} \subset D \times M$ gezeigt.*
2. *Durch die Zuordnung $x \longmapsto x^2$ wird z.B. eine Abbildung definiert mit $D = \mathbf{R}$ und $M = \mathbf{R}$. Dann ist $W = \mathbf{R}_0^+$ (positive reelle Zahlen oder null). M kann aber auch auf $\mathbf{R}_0^+$ reduziert werden.*

Die Umkehrabbildungen

Wenn man die Elemente eines geordnetes Paares vertauscht, so entsteht ein neues geordnetes Paar: Die Menge der vertauschten Paare bilden auf natürliche Weise wiederum eine Relation. Wir nennen sie die Umkehrabbildung.

Definition 3.19 (Umkehrabbildung) *: Eine Abbildung $\mathcal{A}$ sei durch eine gegebene Relation $\mathcal{R}$ definiert: $\mathcal{A} = \mathcal{R} = \{(a,b) | a \in D \wedge b \in W \subseteq D \times W$. Dann heisst die Menge $\mathcal{A}^{-1} = \{(b,a) |\ a \in D \wedge b \in W\}$* **Umkehrabbildung** *zu $\mathcal{A}$.*

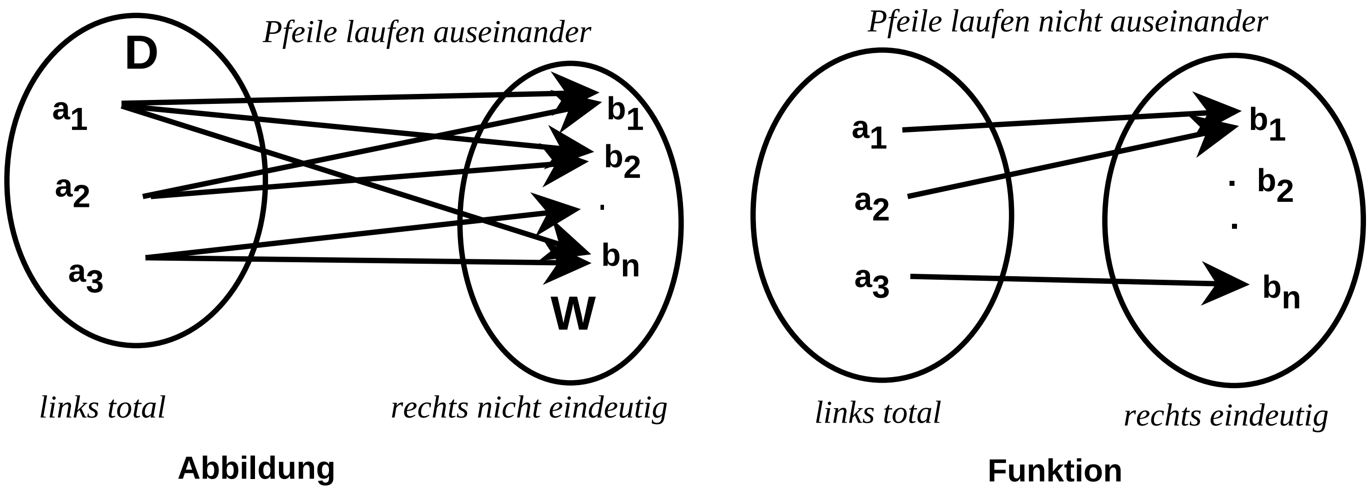
Es gilt daher: $\mathcal{A}^{-1} \subseteq W \times M$.

Funktionen

In der Praxis macht der Fall, wo einem Urbild mehrere Bilder zugeordnet werden können, vielfach keinen Sinn. Zu einer Auswahl von Messwerten von Strom und Spannung (Urbilder) möchte man einen eindeutigen Widerstand (Bild, Wert) berechnen können und nicht mehrere gleichzeitig geltende verschiedene Resultate akzeptieren. Für den Fall, wo die Bilder eindeutig sind, führen wir daher den Begriff Funktion ein. Dazu definieren wir die Rechtseindeutigkeit (vgl Abb. 3.7:

Definition 3.20 (Rechtseindeutigkeit) *:*
Gilt für eine Abbildung $(x \longmapsto y \wedge x \longmapsto z) \Longrightarrow y = z$, so nennen wir die Abbildung **rechtseindeutig**.

Abbildung 3.7: Relationsmenge und Funktion



Definition 3.21 (Funktion) *: Eine rechtseindeutige Abbildung heisst* **Funktion**.

Bei einer Funktion laufen also von einem Urbild nie zwei oder mehrere Pfeile weg. Ein Urbild hat immer nur ein einziges Bild. Sei bei einer Funktion die Relationsmenge $\mathcal{R} = \mathcal{F}$. Dann könne wir sagen: Zu jedem $a \in D$ gibt es genau ein $b \in W$, sodass $(a, b) \in \mathcal{F}$ gilt. Symbolisch:

$$\forall_{a\in D}\ \dot{\exists}_{b_i n W} : (a, b) \in \mathcal{F} \qquad \dot{\exists} \text{ heisst „es gibt genau ein"} \ldots$$

Diese Aussage ist normalerweise nicht umkehrbar, denn $\forall$ und $\exists$ dürfen nicht einfach vertauscht werden. Die Umkehrabbildung $\mathcal{F}^{-1}$ braucht daher nicht wieder eine Funktion zu sein.
Statt $(a, b) \in \mathcal{F}$ resp. $a \longmapsto b$ benützen wir künftig auch folgende symbolische Schreibweise:

Symbole 8 (Funktion) *: $f : a \longmapsto b = f(a)$, $a \overset{f}{\longmapsto} b = f(a)$ oder kurz $b = f(a)$ für die Elemente und $f : D \longmapsto W = f(D)$ für die Bereiche. Statt D resp. W schreiben wir auch D_f resp. W_f.*

Zur Sprechweise: *Wir sagen nun: „f ist die Funktions– oder Zuordnungsvorschrift, durch die dem Urbild a das Bild b zugeordnet wird."Für die Bildmenge gilt dann natürlich $W = f(D) = \{f(a)|a \in D\}$. Statt D resp. W schreiben wir dann auch D_f resp. W_f.*
In der mathematischen Alltagssprache ist es üblich, statt von der Funktionsvorschrift kürzer nur von der Funktion zu reden, was uns wenig stören wird. Achtung jedoch, was die Gleichheit von Funktionen betrifft: Die Definition des Funktionsbegriffes hat zur Konsequenz, dass zwei Funktionen genau dann gleich sind, wenn ihre Relationsmengen gleich sind.

Beispiele:

1. $f : x \longmapsto y = f(x) = x^2$, $\quad D_f = \mathbf{R}$, $W_f = \mathbf{R}_0^+$
2. $f : x \longmapsto y = f(x) = \frac{1}{x}$, $\quad D_f = \dot{\mathbf{R}}$[2], $W_f = \dot{\mathbf{R}}$
3. $f : x \longmapsto y = f(x) = 7$, $\quad D_f = \mathbf{R}$, $W_f = \{7\}$
4. $f : x \longmapsto y = f(x) = [x]$ (Gauss–Klammer–Funktion) [3], $\quad D_f = \mathbf{R}$, $W_f = \mathbf{Z}$

[2] $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \setminus \{0\}$
[3] $[x] = n$ für $x \in [n, n + 1\}, n \in \mathbf{Z}$

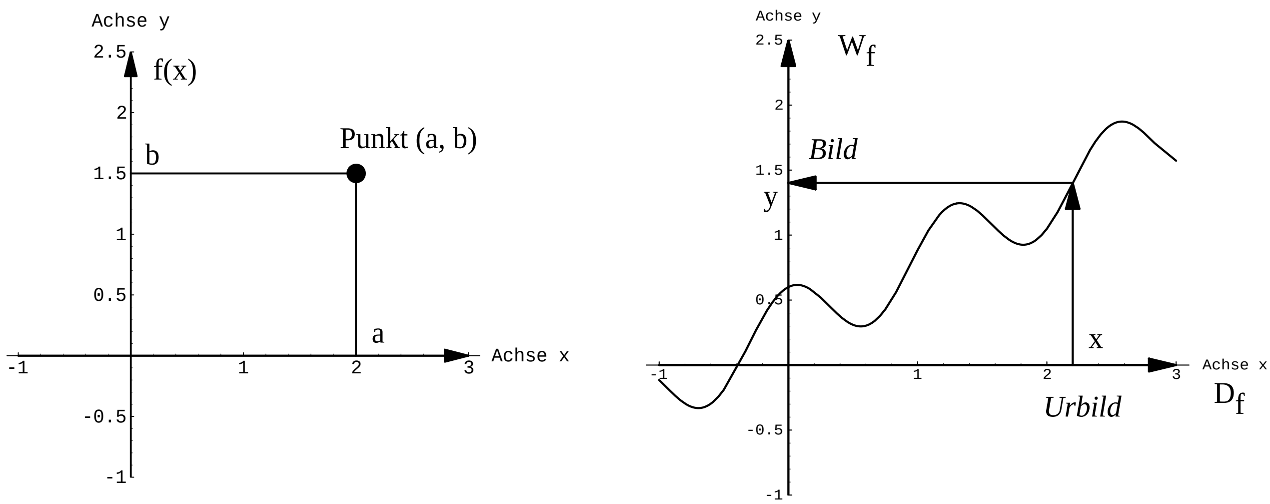
5. $f : x \longmapsto y = f(x) = \begin{cases} x & : \quad x \in \mathbf{Q} \\ 5 & : \quad x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$, $\qquad D_f = \mathbf{R}$, $W_f = \mathbf{Q}$

6. $f : x \longmapsto y = f(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x \in \mathbf{Q} \\ 1 & : \quad x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$ *(Kamm–Funktion)*[4], $\qquad D_f = \mathbf{R}$, $W_f = \{0, 1\}$

7. f : *geometrischer Pfeil* $\overrightarrow{PP'} \longmapsto$ *Vektor mit dem Repräsentanten* $\overrightarrow{PP'}$, $\quad D_f =$ *Menge der Pfeile*, $W_f =$ *Menge der Vektoren*

8. $f : P = (x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto \begin{pmatrix} \sin(x_1 \cdot x_2) \\ \cos(x_1 + x_3) \\ \tan(x_4) \end{pmatrix}$, $\qquad D_f = \mathbf{R}^4$, $W_f = \ldots$

Abbildung 3.8: Diagramme 1 (Graphen)



3.3.2 Funktionsgraphen

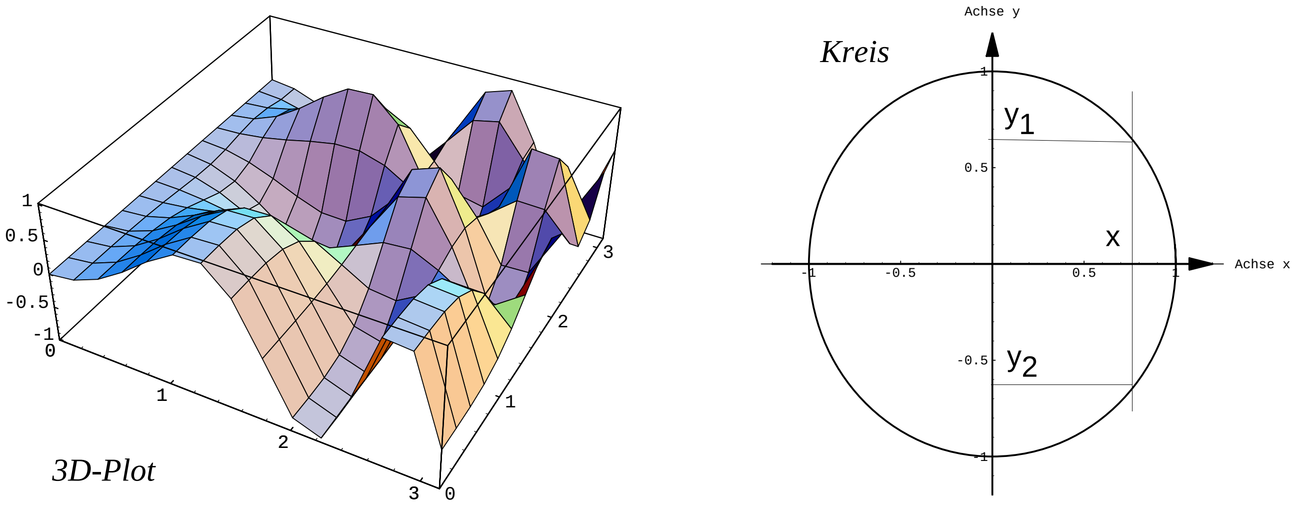
Wir betrachten eine gegebene Funktion $f : D_f \longmapsto W_f$. *Dabei setzen wir voraus, dass* D_f *und* W_f *geordnete Mengen*[5] *sind (Fall 1), was z.B. bei* $\mathbf{R}$ *zutrifft. Das bedeutet, dass* D_f *und* W_f *jeweils mittels einer skalierten Linie, z.B. durch einen Zahlenstrahl oder durch eine Koordinatenachse bildlich dargestellt werden kann. Abweichend davon wollen wir für* D_f *auch Produktmengen* $A \times B$ *mit geordneten Mengen* A *und* B *zulassen.* D_f *ist dann eine Menge von geordneten Paaren, die sich als Punkte einer Fläche, z.B. einer Ebene, darstellen lassen (Fall 2). In beiden Fälle ist es möglich, die geordneten Paare* (a, b) *der Funktionsmenge (Relationsmenge)* $\mathcal{F} = \{(a, b) | a = f(b) \text{ resp. } a \in D_f \wedge b \ inW_f\}$ *in einem ebenen oder räumlichen Koordinatensystem*[6] *darzustellen. Wir vereinbaren unter den obigen Voraussetzungen:*

Definition 3.22 (Funktionsgraph) *:*
Die Menge der geometrischen Punkte (a, b) *nennen wir* **Graphen** *der Funktion* f.

Zur bildlichen Darstellung des Graphen verwendet man meistens kartesische Koordinatensysteme. Im Falle 1 ist dann $a = x \in \mathbf{R}$ *und* $b = y \in \mathbf{R}$. *(Vgl. Abb. 3.8.) Da ein Graph oft aus unendlich vielen*

[4] unendlich dichter Kamm
[5] für zwei verschiedene Elemente ist eine strenge Ordnungsrelation erklärt
[6] Vgl. Mathematikkurs für Ingenieure, Teil 1 (Bibl.: wirz)

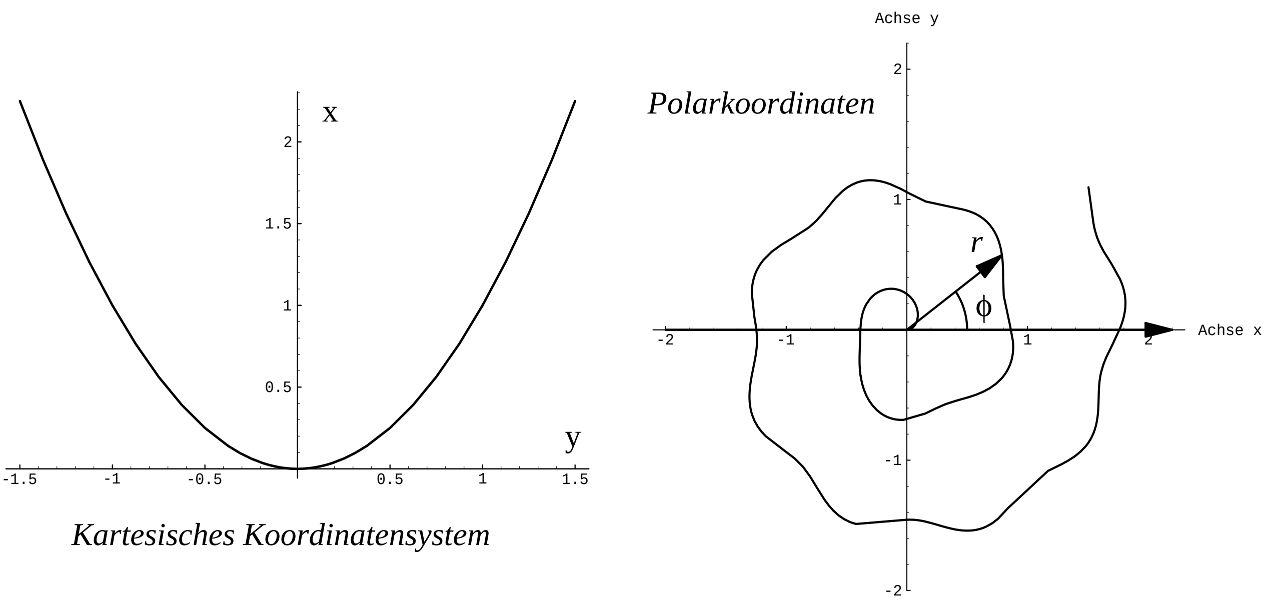
Abbildung 3.9: Diagramme 2 (Graphen)



Punkten besteht, ist es jeweils unmöglich, alle Punkte numerisch zu berechnen. Man behilft sich daher mit einer vernünftigen Auswahl, mit einer Wertetabelle.

Im Falle 2, wo a schon als Punkt einer Ebene interpretiert werden kann, ist $a = (x,\ y) \in \mathbf{R}^2$ und $b = z \in \mathbf{R}$. (Vgl. Abb. 3.9.)

Abbildung 3.10: Diagramme 3 (Graphen)



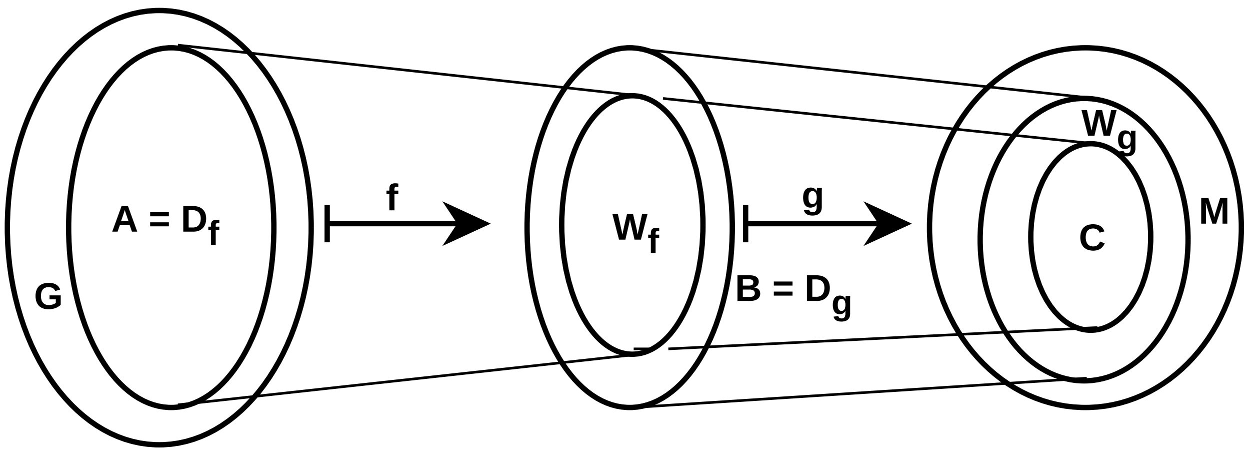
Beispiele *bekannter Funktionen:*

1. $f(x) = c = 3$: *Konstante Funktion*
2. $f(x) = ax + b$: *Lineare Funktion*
3. $f(x) = ax^2 + bx + c$: *Quadratische Funktion*
4. $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$: *Polynomfunktion*
5. $y = f(x)$ *mit* D_f = *diskrete Menge*[7]: *Diskrete Funktion*
6. $f(x) = \sin(x)$: *Trigonometrische Funktion etc.*
7. *Hingegen stellt der Kreis in Abb. 3.9 keine Funktion dar, da einem Wert x jeweils zwei Werte y_1 und y_2 zugeordnet werden.*

In Abb Abb. 3.10 sind die Graphen der Funktionen $f(x) = x^2$ (kartesische Koordinaten) und $r(\phi) = 1.8(\phi + 0.5\sin(0.4\phi^2))/13$ (Polarkoordinaten) wiedergegeben.

3.3.3 Zusammengesetzte (hintereinandergeschaltete) Funktionen

Abbildung 3.11: Hintereinandergeschaltete Funktionen



Wir betrachten eine Funktion f auf ihrem Definitionsbereich $A = D_f$. Der Wertebereich W_f von f sei eine Teilmenge der Menge B, auf der eine zweite Funktion g definiert ist: $B = D_g$. Der Wertegereich W_g von g ist umfasst daher den Wertebereich C der Restriktion[8] *von g auf W_f. (Vgl. Abb.3.11.)*
Wir können daher folgendes festhalten: Sei $c = g(b) \in W_g$ und $b = f(a) \in W_f$. Falls $W_f \subset D_g$ gilt, kann man auch $c = g(b) = g(f(a))$ bilden. Man hat daher eine neue, zusammengesetzte Funktion φ konstruiert, die a direkt in c (resp. die Menge A in die Menge C) abbildet:

$$\varphi : A \longmapsto C \quad \text{oder} \quad c = \varphi(a) = g(f(a)) \text{ oder}$$

$$\underbrace{a \overset{f}{\longmapsto} b \overset{g}{\longmapsto} c}_{\overset{\varphi}{\longmapsto}}$$

Da f und g linkstotal und rechtseindeutig sind, muss das auch für φ gelten, denn beim Zusammensetzen tritt weder rechts eine Mehrdeutigkeit auf noch wird links ein Element ausgelassen. Nun können wir die Operation $\circ$ (nacheinanderaufführen von Funktionen, auch Verknüpfen) definieren:

[7] abzählbare Menge von isolierten Punkten
[8] Einschränkung

Definition 3.23 (Operation $\circ$) *:*

$$\varphi(a) = g(f(a)) := (g \circ f)(a) \quad resp. \quad \varphi := g \circ f.$$

Beispiel: *Sei* $f(1) = c, \quad f(2) = a, \quad f(3) = a, \quad g(a) = \gamma, \quad g(b) = \beta, \quad g(c) = \alpha$. *Dann ist* $\varphi(1) = \alpha$, $\varphi(2) = \gamma$ *und* $\varphi(3) = \gamma$.

Beim folgenden Satz ist es nicht nötig, Funktionen zu verlangen. Der Sachverhalt gilt allgemein für Abbildungen:

Satz 3.5 (Assoziativität von Abbildungen) *:*
Vor.: $\varphi_1 = h \circ g$ *und* $\varphi_2 = g \circ f$ *seien definierte Abbildungen. Weiter seien die Ausdrücke* $(\varphi_1 \circ f)(x)$ *und* $(h \circ \varphi_2)(x)$ *für ein bestimmtes* $x \in D_f$ *bildbar.*
Beh.: *Es gilt das Assoziativgesetz:* $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Beweis: $x \in D_f$ *sei ein beliebiges Element, das die Voraussetzung erfüllt. Dann gilt:*

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (\varphi_1 \circ f)(x) = \varphi_1(f(x)) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) \quad \text{und}$$
$$(h \circ (g \circ f))(x) = (h \circ \varphi_2)(x) = h(\varphi_2(x)) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) \quad \text{und somit}$$
$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x) \forall_x, \quad \text{also} \quad (h \circ g) \circ f) = (h \circ (g \circ f)) \quad \text{q.e.d.}$$

Daher darf man beim Zusammensetzen von Abbildungen die Klammern weglassen.
Achtung: *Zwar gilt für das Hintereinanderausführen resp. Verknüpfen von Funktionen das Assoziativitätsgesetz, ein Kommutativitätsgesetz gilt aber nicht! Allgemein ist* $f \circ g \neq g \circ f$.
Z.B. ist $\sin(\sqrt{-\pi}) \neq \sqrt{\sin(-\pi)} = 0$

3.3.4 Funktionstypen, Umkehrfunktionen

Injektiv, surjektiv, bijektiv

Um das Problem der Umkehrbarkeit von Funktionen studieren zu können, müssen wir erst einige Begriffe einführen, mit denen wir die Funktionen klassifizieren können.

Definition 3.24 (Injektivität) *: Eine Funktion f heisst* **injektiv**, *falls gilt:* $f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b$.

In der Kontraposition heisst das: $a \neq b \Longrightarrow f(a) \neq f(b)$. *Eine Veranschaulichung zeigt Abb. 3.12.*

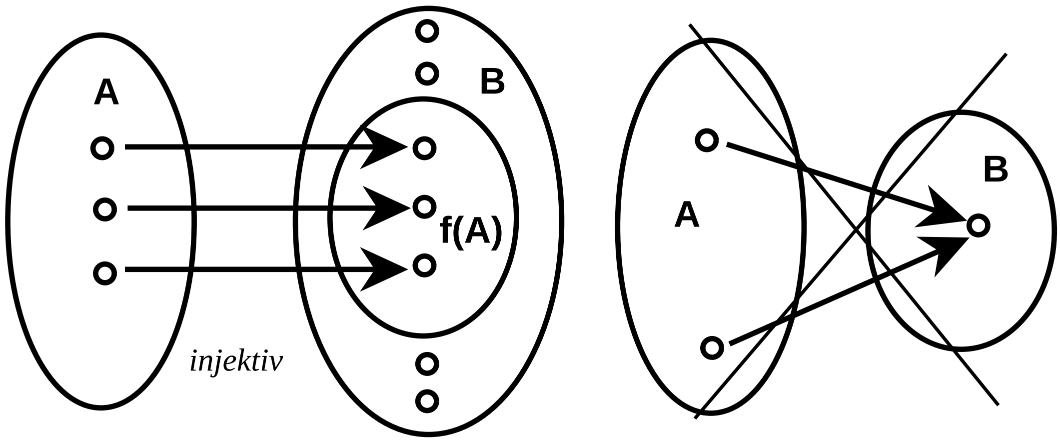
Definition 3.25 (Surjektivität) *: Eine Funktion f heisst* **surjektiv**, *falls gilt:* $f(A) = B$.

Im surjektiven Fall wird also der gesammte Wertevorrat ausgenützt. Jedes Element des Wertevorrats kommt auch als Bild vor. (Vgl Abb. 3.13.)

Definition 3.26 (Bijektivität) *: Eine Funktion f heisst* **bijektiv**, *wenn sie injektiv und surjektiv zugleich ist.*

Im surjektiven Fall wird der gesammte Wertevorrat ausgenützt und jedes Bild genau einmal angenommen. (Vgl Abb. 3.13.) Wie in Abb. 3.13 denken wir uns nun Urbilder und Bilder durch abstrakte Pfeile verbunden. Da nun bei einer Funktion jedes Bild geanu ein Urbild hat (Rechtseindeutigkeit) und in einer richtigen „abstrakten graphischen Darstellung“ bei jedem Element des Wertevorrates genau ein Pfeil endet, kommt jedes Element des Urbild– und des Bildbereiches genau an einem Anfangs– oder Endpunkt eines gedachten Pfeiles vor. Kehrt man jetzt sämtliche Pfeile um, so vertauschen sich Bilder und Urbilder. Die Umkehrabbildung ist daher wieder eine bijektive Funktion (linkstotal, rechtseindeutig, injektiv, surjektiv). Man spricht hier von einer ein–eindeutigen Zuordnung der Elemente. Daher gilt der Satz:

Abbildung 3.12: Injektiv



Satz 3.6 (Existenz der Umkehrfunktion) *:*
Vor.: *Sei $f : A \longmapsto B$ bijektiv.*
Beh.:

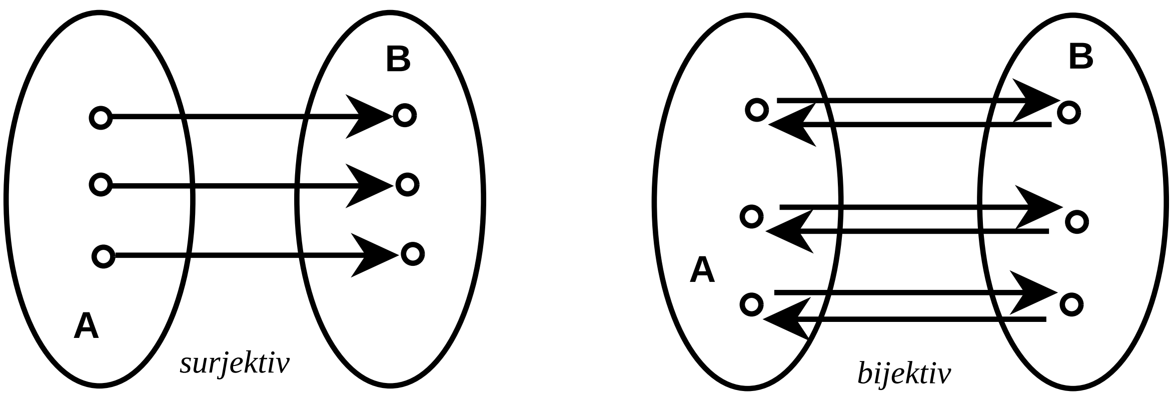
1. *f^{-1} ist wieder eine Funktion:* $\quad f^{-1} : B \longmapsto A$.
2. *f^{-1} ist auch bijektiv.*

Definition 3.27 (Umkehrfunktion) *: Ist f^{-1} wieder eine Funktion, so heisst sie* **Umkehrfunktion**.

Beispiel: *Die erste Figur in Abb. 3.10 zeigt den Graphen von $f(x) = x^2$. Auf $D_f = \mathbf{R}_0^+$ (nicht–negative reelle Zahlen) ist f ersichtlicherweise bijektiv. Wir kennen die Umkehrfunktion: $f^{-1}(x) = +\sqrt{x}$. Auf $D_f = \mathbf{R}$ jedoch ist f^{-1} nicht umkehrbar, da jedes Bild ausser 0 zwei Urbilder hat: Z.B. $(-1)^2 = 1^2 = 1$. Wenn $b = f(a)$ (d.h. $a \overset{f}{\longmapsto} b$) ist, so ist $f^{-1}(b) = a$, (d.h. $b \overset{f^{-1}}{\longmapsto} a$). Somit wird $f^{-1}(f(a)) = a$, $f(f^{-1}(b)) = b$ und weiter: $f(f^{-1}(f(a))) = f(a)$, $f^{-1}(f(f^{-1}(b))) = f^{-1}(b)$ etc.. Daher gilt:*

Satz 3.7 (Identische Abbildung) *:*

Abbildung 3.13: Bijektiv



Vor.: *Sei* $f : A \longmapsto B$ *bijektiv,* $a \in A$.
Beh.:

1. $(f^{-1} \circ f)(a) = a$, *d.h.* $(f^{-1} \circ f) = \triangle_{D_f}$
2. $(f \circ f^{-1})(b) = b$, *d.h.* $(f^{-1} \circ f) = \triangle_{W_f}$
3. $(f^{-1})^{-1} = f$

$\triangle_{D_f}$ *ist die Diagonalrelation oder identische Abbildung auf* D_f, $\triangle_{W_f}$ *ist die Diagonalrelation oder identische Abbildung*[9] *auf* W_f. *Für diese identischen Abbildungen gilt trivialerweise:*

Satz 3.8 (Identische Abbildung) *:*
Vor.: *Sei* f *eine beliebige Funktion*
Beh.: $\triangle_{W_f} \circ f = f = f \circ \triangle_{D_f}$

Falls eine andere Funktion g *ebenfalls* D_f *in* W_f *abbildet* ($D_f \xmapsto{g} W_f$), *so kann man die identische Abbildung auch mit* g *verknüpfen:*

Satz 3.9 (Identische Abbildung) *:*
Vor.: *Sei* g *eine Funktion mit* $D_f \xmapsto{g} W_f$.
Beh.: $\triangle_{W_f} \circ g = g = g \circ \triangle_{D_f}$

Wenn umgekehrt die beiden möglichen Verknüpfungen zweier Funktionen immer die identische Abbildung ergeben, so kann man auf die Existenz der Umkehrfunktionen, d. h. auf die Bijektivität schliessen:

Satz 3.10 (Existenz der Umkehrfunktionen) *:*
Vor.: *Seien* f *und* g *beliebige Funktion mit* $D_f \xmapsto{f} W_f$ *und* $W_f \xmapsto{g} D_f$. .
Dazu gelte: $g \circ f = \triangle_A$ *und* $f \circ g = \triangle_B$
Beh.:

1. f^{-1} *und* g^{-1} *existieren, d.h.* f *und* g *sind bijektiv.*
2. $f^{-1} = g$ *und* $g^{-1} = f$.

Der Beweis dieses Satzes sei dem Leser überlassen. Hinweis: Man zeige zuerst, dass g *eine Umkehrabbildung von* f *ist, was einfach geht. Dann muss man zwei Probleme lösen: Erstens ist zu zeigen, dass* f *injektiv ist. Am besten zeigt man das indirekt. Anschliessend ist zu zeigen, dass* f *surjektiv ist. Das geht ebenfalls indirekt. Dann hat man die Bijektivität von* f. *da der Satz symmetrisch in* f *und* g *ist, gilt das Bewiesene auch für* g. *Da* $g \circ f = \triangle_A$ *ist, folgt aus der Bijektivität* $f^{-1} = g$.

Bemerkung: *Im Fall wo für bijektive Funktion* f_1, f_2 *und* f_3 *gilt* $D_{f_1} = W_{f_1} = D_{f_2} = \ldots = W_{f_3} = M$, *sind die Gruppenaxiome erfüllt:*

1. $(f_3 \circ f_2) \circ f_1 = f_3 \circ (f_2 \circ f_1)$ *(Assoziativirät)*
2. $\triangle_M \circ f_i = f_i \circ \triangle_M$ *(neutrales Element)*
3. $f_i \circ f_i^{-1} = f_i^{-1} \circ f_i = \triangle_M$ *(inverses Element)*

Eine Gruppe ist eine algebraische Struktur[10]. *Gruppen trifft man überall in der Mathematik*[11] *Der Gruppenbegriff hat seine Wichtigkeit daher, weil eine Gruppe diejenige Struktur ist, in der man Gleichungen lösen kann.*

[9] *auch neutrale Abbildung*
[10] Algebraische Struktur: Menge, auf der Operationen erklärt sind
[11] Bei den Zahlen, Vektoren, bei geometrischen Operationen, bei den Matrizen etc..

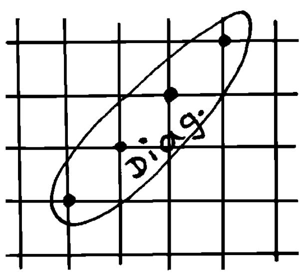
3.4 Anhang aus dem Algebrascript

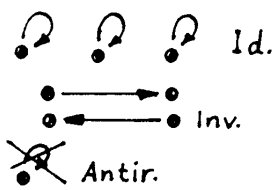
3.4.1 Spezielle Relationen

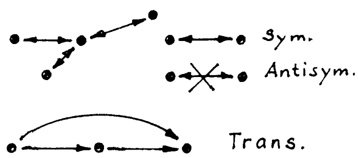
Die nachfolgenden Relationen sind durch die angegebenen logischen Aussagen definiert, die als wahr angenommen werden:

- $\oslash$ **Identitäts– oder Diagonalrelation:** $\mathcal{R} = \triangle_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$
- $\oslash$ **Inverse Relation:** $\mathcal{R}^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in \mathcal{R}\} \;\leadsto\; |\mathcal{R}^{-1}| = |\mathcal{R}|$
- $\oslash$ **Reflexive Relation:**
  $\triangle_A \subseteq \mathcal{R}, \quad \mathcal{R}$ *reflexiv* $\Leftrightarrow \forall_{a \in A} : (a, a) \in \mathcal{R} \subseteq A^2$
- $\oslash$ **Antireflexive Relation:** $\forall_{a \in A} : (a, a) \not\in \mathcal{R}$
- $\oslash$ **Symmetrische Relation:** $\forall_{(a,b) \in \mathcal{R}} : (a, b) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b, a) \in \mathcal{R}$
- $\oslash$ **Streng antisymmetrische Relation:**
  $\forall_{(a,b) \in \mathcal{R}} : (a, b) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b, a) \not\in \mathcal{R}$
- $\oslash$ **Milde antisymmetrische Relation:**
  $\forall_{(a,b) \in \mathcal{R}} : (a, b) \in \mathcal{R} \;\wedge\; (b, a) \in \mathcal{R} \Rightarrow a = b$
- $\oslash$ **Asymmetrische Relation:** $\forall_{(a,b) \in \mathcal{R}} : (a, b) \in \mathcal{R} \;\dot{\vee}\; (b, a) \in \mathcal{R}$
- $\oslash$ **Transitive Relation:** $\forall_{(a,b) \in \mathcal{R}} : ((a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, c) \in \mathcal{R}) \Rightarrow (a, c) \in \mathcal{R}$
- $\oslash$ **Äquivalenzrelation:**
  Reflexiv, symmetrisch und transitiv.

  $\leadsto$ *Führt zu Klasseneinteilung:* **Äquivalenzklassen** .
- $\oslash$ **Totale Relation:** $\forall_{(a,b) \in \mathcal{R}} : ((a, b) \in \mathcal{R} \;\vee\; (b, a) \in \mathcal{R})$
- $\oslash$ **Teilordnungsrelation:**
  Reflexiv, antisymmetrisch und transitiv.
- $\oslash$ **Ordnungsrelation (mild):**
  Reflexiv, antisymmetrisch, transitiv und total.
- $\oslash$ **Strikte Halbordnung:**
  Asymmetrisch und transitiv.
- $\oslash$ **Strenge Ordnungsrelation:**
  Antireflexiv, streng antisymmetrisch und transitiv.
- $\oslash$ **Lexikographische Ordnung:**
  Nach dem Ordnungsprinzip des Alphabeths.







Man sieht sofort:

Satz: **Vor.:**

$\mathcal{R}$ *streng antisymmetrisch und total*

Beh.:

$\mathcal{R}$ *asymmetrisch*

Satz: **Vor.:**

$\mathcal{R}$ *Teilordnung auf* M
$SR = \{(x, y) \in M \times M \mid ((x, y) \in \mathcal{R}) \ \wedge \ (x \neq y)\}$

Beh.:

SR *ist strikte Teilordnung (Halbordnung)*

Beweis:

$\mathcal{R}$ *Teilordnung* $\leadsto$ SR *antisymmetrisch*

Problem: SR *strikt? D.h.* SR *asymmetrisch, transitiv?*

Nach Definition von SR*:*

$SR = \{(x, y) \in M \times M \mid ((x, y) \in \mathcal{R}) \wedge (x \neq y)\} \leadsto ((x, y) \in SR \wedge (y, z) \in SR) \ \Rightarrow \ ((x \neq y) \wedge (y \neq z))$

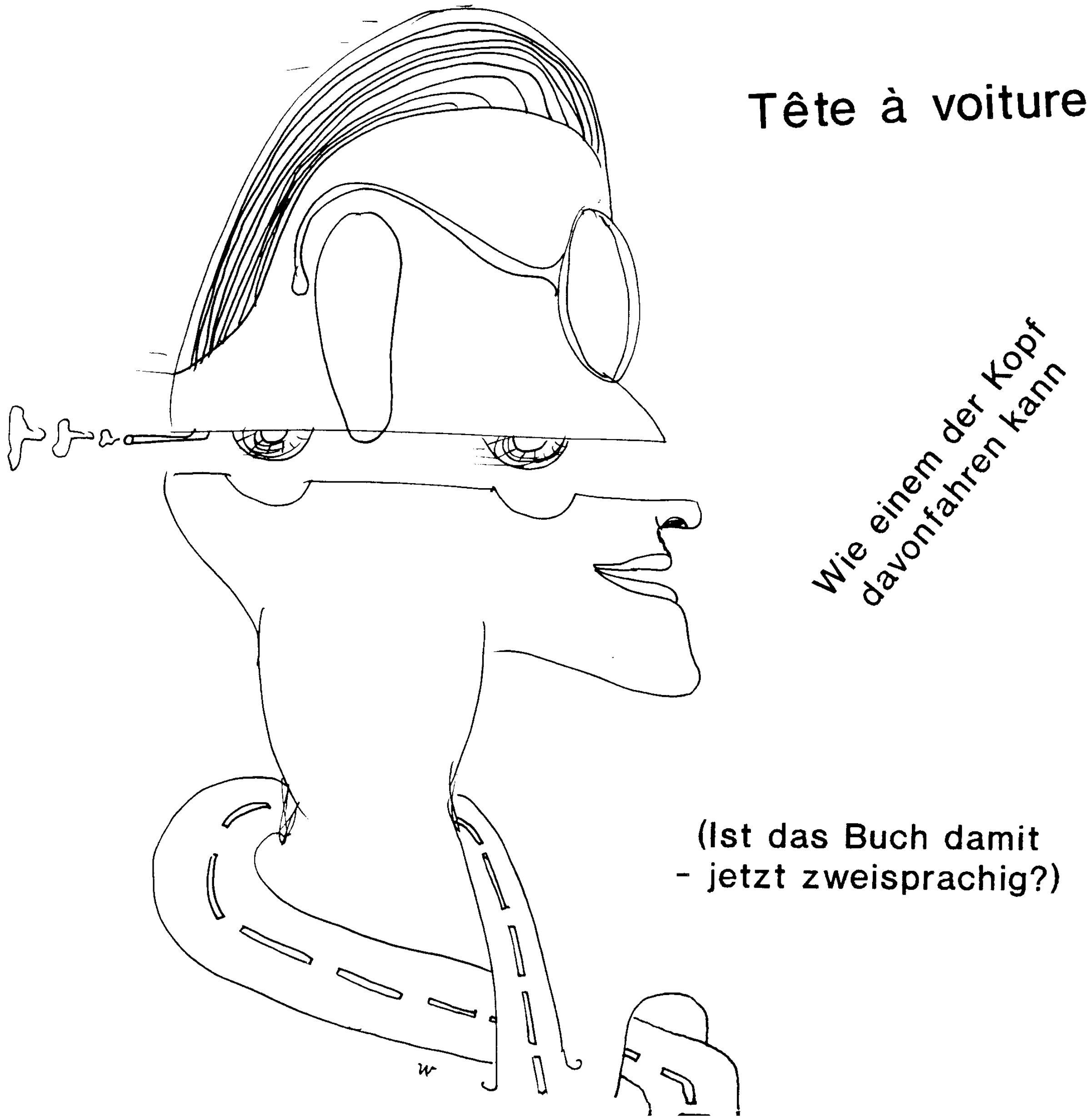
$\leadsto$ *Problem:* $(x \neq z)$? $(\leadsto \ (x, z) \in SR$?)

Sei $x = z \leadsto \ (SR \ni (x, y) = (z, y)) \ \wedge \ (SR \ni (y, z) = (y, x))$
$\Rightarrow \ ((x, y) \in SR \subseteq \mathcal{R}^2 \ \wedge \ (y, x) \in SR \subseteq \mathcal{R}^2) \ \Rightarrow \ x = y \ \Rightarrow \ y = x = z \ \Rightarrow \ ((x, y) \notin SR \ \wedge \ (y, z) \notin SR)$
$\leadsto$ *Widerspruch!* ☺

3.5 Übungen

Übungen finden sich in DIYMU (Bibl.: wirz1) sowie in der klassischen Schulbuchliteratur für Berufsschulen und die Gymnasialstufe. Achtung: Die Nummerierung der Kapitel im DIYMU ist unabhängig!

Abbildung 3.14: Ohne Titel


Tête à voiture
Wie einem der Kopf
davonfahren kann
(Ist das Buch damit
- jetzt zweisprachig?)

Abbildungsverzeichnis

Index

Literaturverzeichnis

[1] *Ayres. Algebra, Theorie und Anwendung. Reihe SCHAUM, Mac Graw Hill (Bibl.: ayres)*

[2] *Leupold u.a.. Mathematik, ein Studienbuch für Ingenieure. Fachbuchverlag Leipzig – Köln (Bibl.: leupold)*

[3] *Lipschutz. Finite Mathematik, Theorie und Anwendung. Reihe SCHAUM, Mac Graw Hill (Bibl.: lipschutz1)*

[4] *Lipschutz. Lineare Algebra, Theorie und Anwendung. Reihe SCHAUM, Mac Graw Hill (Bibl.: lipschutz2)*

[5] *Papula. Mathematik für Ingenieure Bd. 1, 2, 3. Vieweg-Verlag (Bibl.: papula)*

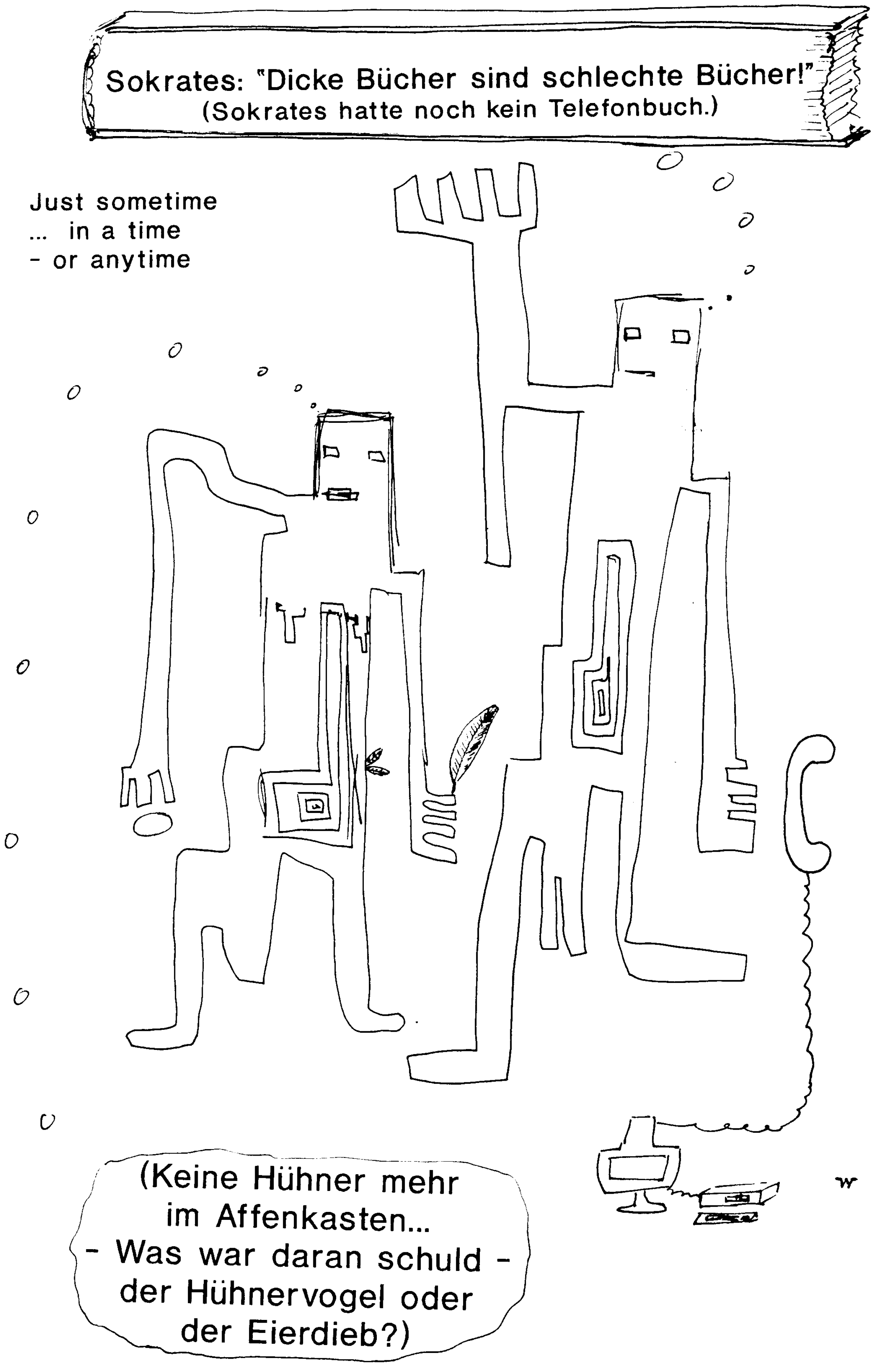
[6] *Potter. Mengentheorie. Spektrum–Verlag (Bibl.: potter)*

[7] *Schmidt. Mengenlehre. BI Mannheim (Bibl.: schmidt)*

[8] *Spiegel. Einführung in die höhere Mathematik, Theorie und Anwendung. Reihe SCHAUM, Mac Graw Hill (Bibl.: spiegel)*

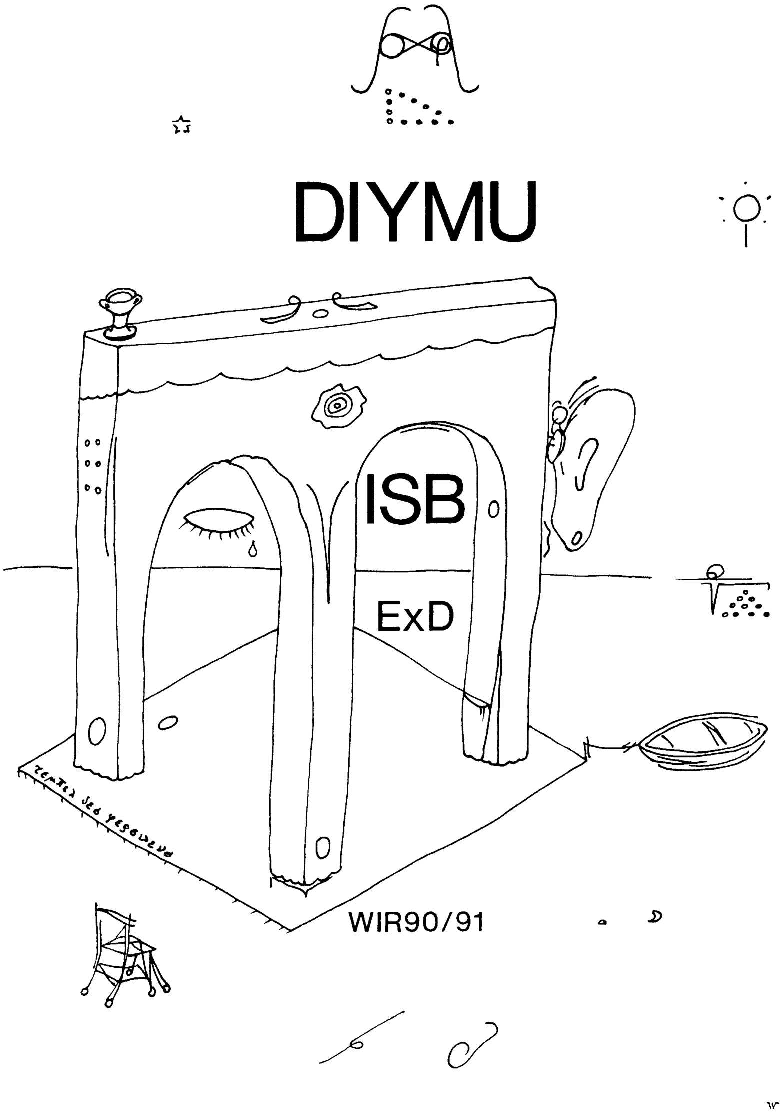
[9] *Vom Autor. Mathematik für Ingenieure Teil 1 (Bibl.: wirz)*

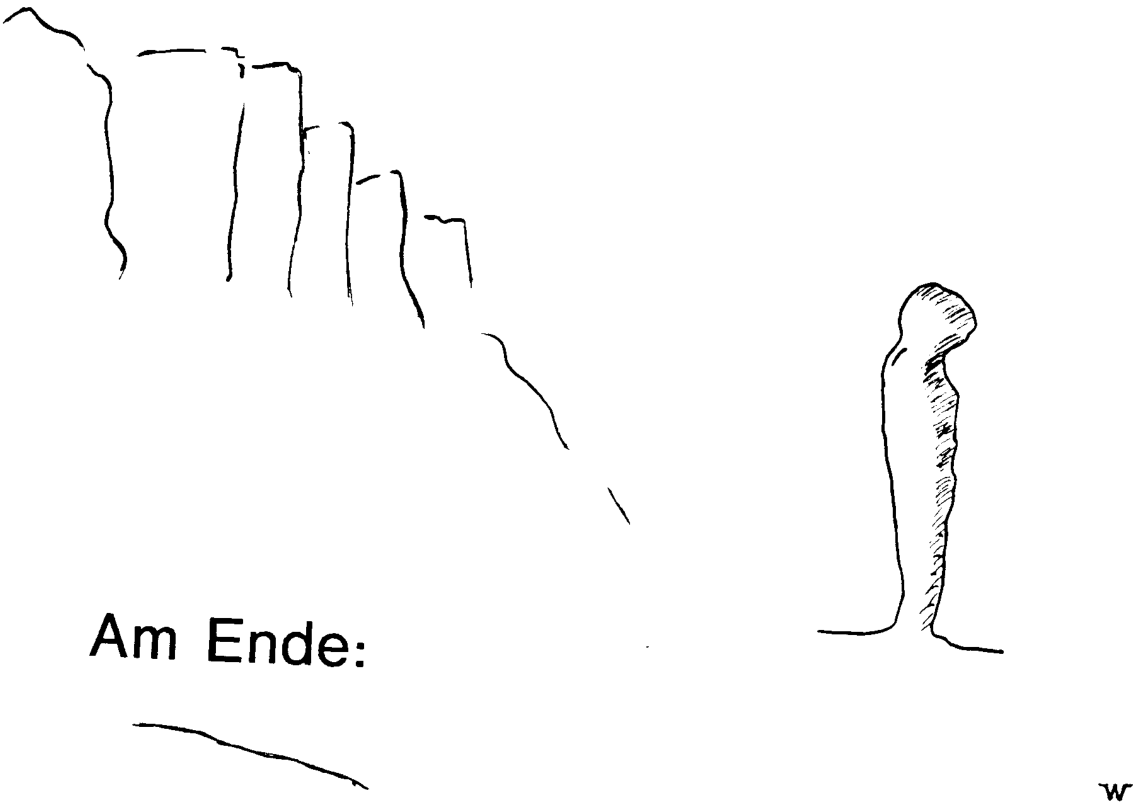
[10] *Vom Autor. DIYMU (Do it yourself Mathematik Übungsbuch). Ingenieurschule Biel 1991 (Bibl.: wirz1)*


Sokrates: "Dicke Bücher sind schlechte Bücher!"
(Sokrates hatte noch kein Telefonbuch.)
Just sometime
... in a time
- or anytime
(Keine Hühner mehr
im Affenkasten...
- Was war daran schuld -
der Hühnervogel oder
der Eierdieb?)
w

Anhang A

Aus dem DIYMU





Am Ende:

Noch eine archeologische Sensation! Halbewiger Student, stark erodiert, ca. 8000 Jahre alt, wurde am Rande einer langen, vorantiken Strasse entdeckt. Vermutlich ist er beim Rückblick auf die damals unlösbaren Probleme zur Säule erstarrt.
Wetter: IGH meldet Voraussage einer längeren Trockenperiode...

Wieso Sprüche klopfen, wenn wer sie auch werreissen kann?