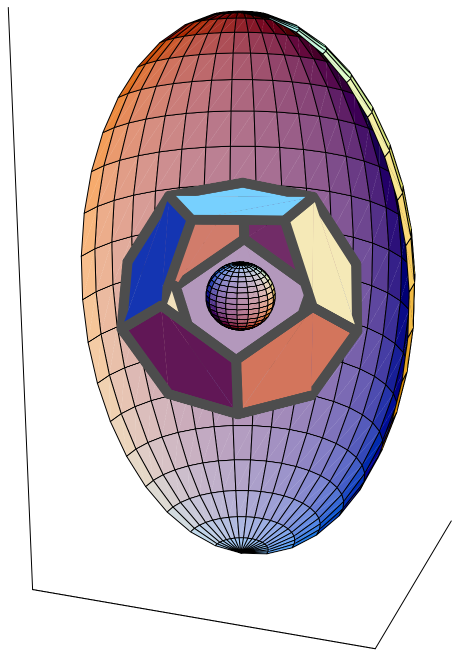
Mathematikkurs für Ingenieure
Teil 4 ◇ Einführung in die Boolsche Algebra



von

Rolf Wirz

Ingenieurschule Biel

Nach den NeXT–Crash von 1999 restaurierte Ausgabe vom 24. Mai 2005

WIR/NeXT/93/2005/LaTex/Teil4.tex

Teil 4 eines Repetitoriums und Textbuchs zur Begleitung und Ergänzung des Unterrichts.
Geplante Anzahl Teile: Noch offen.
Produziert mit LaTeX auf NeXT-Computer.
Einige Graphiken sind auch mit *Mathematica* entstanden.

1999 hat der Autor einen Computer–Crash erlebt. Infolge des dadurch provozierten Systemwechsels haben einige Graphiken sehr gelitten. Sie werden neu erstellt, sobald die Zeit dafür vorhanden ist.

Du gleichst dem Geist, den du begreifst ...

Der Erdgeist in Goethes Faust

Adresse des Autors:

Rolf W. Wirz-Depierre
Prof. für Math.
Ingenieurschule Biel (HTL) *(Ingenieurschule des Kt. Bern, Fachhochschule geplant ab 1997)*
Quellgasse 21
Postfach 1180
CH-2501 Biel-Bienne
Tel. (..41) (0)32 266 111, neu 3216 111

Einführung in die Boolsche Algebra

Inhaltsverzeichnis

Abbildung 1: Ohne Titel

Das Genie beherrscht das Chaos!

(Zum Colorieren während langweiligen Momenten)

Platz für eigene Ideen:

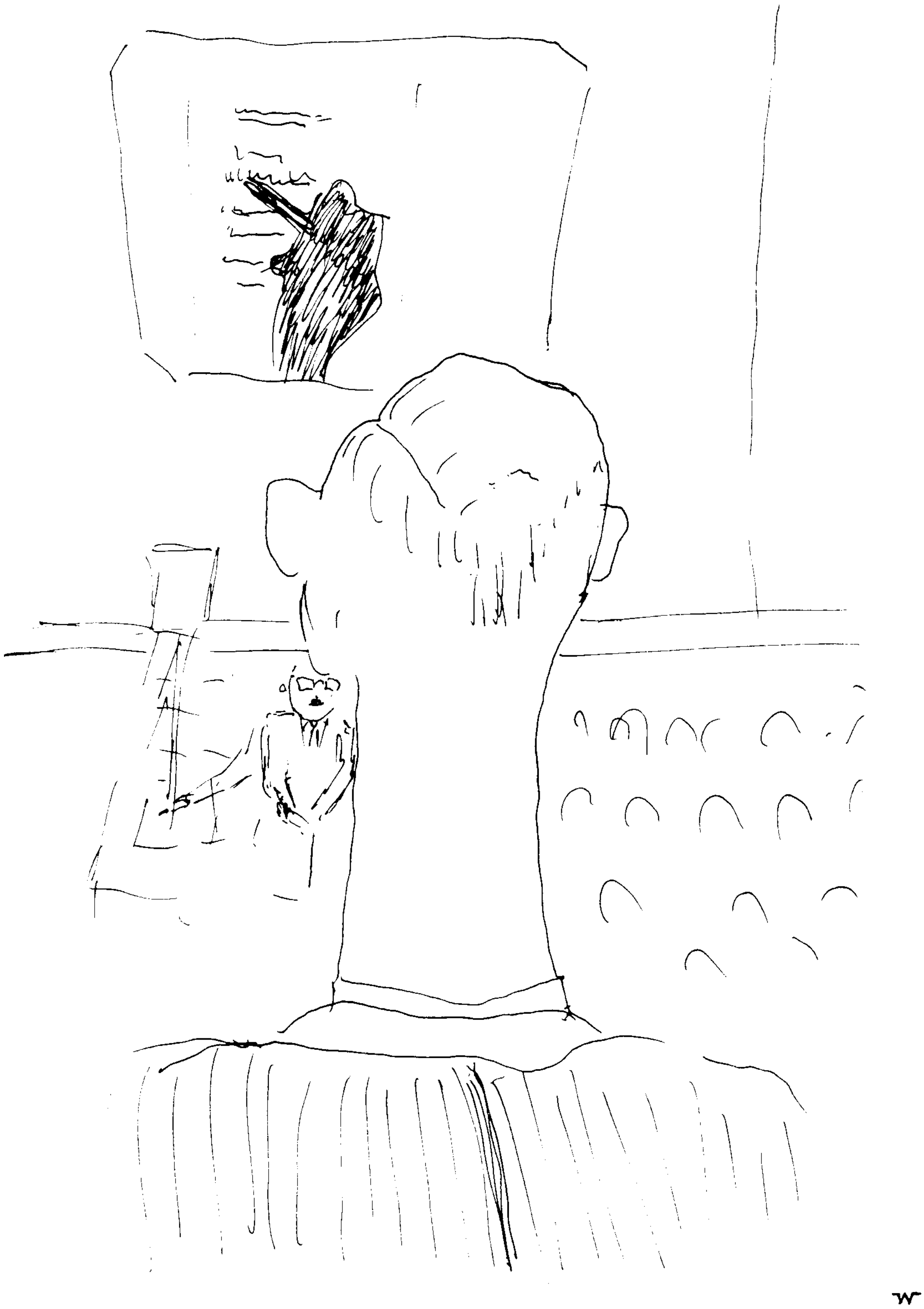
Vorwort

Liebe Leserin, lieber Leser,

Das Thema *Boolsche Algebra* gehört zu den klassischen Wissensgebieten für Elektroingenieure und Informatiker. Für einigen Elektroberufe ist es auch ein wesentlicher Bestandteil der Berufsbildung.
Hier soll das Theme jedoch nicht nur vom praktischen Standpunkt der Schaltalgebra her beleuchtet werden. Es geht uns vielmehr darum, das Gebiet vom Hintergrund der Mathematik her zu betrachten, um damit diejenigen theoretischen Kenntnisse zu vermitteln, die an einer Hochschule zu verlangen sind. Dabei geht es nicht so sehr ums Detail. Wichtiger sind die Zusammenhänge und der Überblick. Nur so kann ein Verständnis dafür wachsen, dass z.B. die Schaltalgebra nur ein Spezialfall unter vielen einer Boolschen Algebra ist.
Dieser Text ist in Skriptform abgefasst. Das bedeutet, dass er in äusserst knapper Fassung nur das wesentliche Skelett des zu lernenden Stoffes wiedergibt. Für weitere und ausführliche Erklärungen, Beispiele, exakte Beweise und ausgeschmücktere Ausführungen ergeht daher an den Studenten der Rat, ein oder mehrere Lehrbücher beizuziehen. Studieren bedeutet zu einem wesentlichen Teil, sein Wissen selbständig mit Hilfe der Literatur zu erweitern, streckenweise sogar selbständig zu erarbeiten, zu festigen und anzuwenden. Ein Skript ist dabei nur ein Wegweiser – und nie ein Lehrbuchersatz. Welche Lehrbücher jemand verwenden will, bleibt seinem eigenen Gutdünken überlassen . Das Thema Boolsche Algebra findet sich in vielen Unterrichtswerken dargestellt. Beispiele enthalten Deller (Bibl.: deller), Mendelson (Bibl.: mendelson), Dörfler, Peschek (Bibl.: dorflerPeschek), Brenner, Lesky, Band 1 (Bibl.: brennerlesky) .

Im Sommer 1996 — Der Autor

Abbildung 2: Ohne Worte...



Herausragender Student

Kapitel 1

Einführung in die Boolsche Algebra

1.1 Einleitung

1.1.1 Ein Vergleich zwischen Aussagenlogik und Mengenalgebra

Beim Aufbau der Mengenlehre[1] ist offenbar geworden, dass in der Mengenalgebra Gesetze gelten, zu denen es in der Ausagenlogik entsprechende Gesetze gibt. Z.B. ist das Kommutativitätsgesetz bei der Bildung der Schnittmenge ($A \cap B = B \cap A$) auf das Kommutativgesetz für den Junktor $\wedge$ in der Aussagenlogik abgestützt worden $X \wedge Y \equiv Y \wedge X$. Offenbar gibt es formale Gemeinsamkeiten und ebenso Unterschiede zwischen der Aussagenlogik und der Mengenalgebra. In der Folgenden Tabelle stellen wir jeweils entsprechende Objekte aus den beiden Theorien gegenüber. Das bietet eine Grundlage, bezüglich der die beiden Seiten verglichen werden können.

Aussagenlogik		Mengenlehre	
Sprachelemente und syntaktisches Vokabular		Elemente	
Aussagen		Mengen	
Aussagenvariablen		Mengenvariablen	
Zuordnung Variable $\mapsto$ Wahrheitswert		Zuordnung Menge $\mapsto$ Mächtigkeit	
Junktoren $\neg, \wedge, \vee \ldots$		Operationen $^{-}, \cup, \cap \ldots$	
Gesetze:	Kommutativität	Duale Gesetze:	Kommutativität
	Distributivität		Distributivität
	$\vdots$		$\vdots$

Offenbar gibt es zwischen den Begriffen links und denen rechts eine Entsprechung. Diejenigen Leser, die schon etwas Schaltalgebra kennen, wissen, dass man genauso diese der Aussagenlogik oder der Mengenalgebra gegenüberstellen kann. Damit taucht die Frage auf, ob es hinter der Aussagenlogik, der Mengenalgebra und andern solchen Disziplinen nicht eine gemeinsame *abstrakte algebraische Struktur*[2] (oder *Verknüpfungsgebilde*) gibt. Eine solche gibt es tatsächlich. Um den Rahmen für das Studium einer solchen Struktur zu schaffen, bedarf es aber etwas Vorarbeit. Dazu müssen wir uns vorerst über das Wesen und den abstrakten Aufbau der Mathematik unterhalten.

1.1.2 Aufbaumethodik und Problemkreise

Aufbaumethodik, mathematische Struktur

In einem wesentlichen Teil der Mathematik richtet man heute das Interesse auf die oben erwähnten *mathematischen Strukturen*. Solche Strukturen sind grundlegend, denn die Sätze, die in ihnen gelten,

[1] Vgl. Teil 3

[2] Eine algebraische Struktur ist eine Menge, auf der Operationen definiert sind.

gelten dann auch in allen speziellen Interpretationen solcher Strukturen. Man braucht die Beweise dann nur einmal abstrakt zu führen, was Aufwand spart. Ein einfachstes Beispiel dazu: Wenn man einmal weiss, dass $2 + 2 = 4$ ist, so muss man ihm nicht mehr beweisen, dass $2\,\mathrm{kg} + 2\,\mathrm{kg} = 4\,\mathrm{kg}$ oder $2\,\mathrm{m} +\ \mathrm{m}2 = 4\,\mathrm{m}$ ist. Der Beweis für den abstrakten Fall genügt. Die Interpretation von 2 spielt keine Rolle.
Ein anderes Beispiel: In Teil 3 haben wir den Begriff *Äquivalenzrelation* kennengelernt. Wir wissen: Sobald man eine Äquivalenzrelation hat, kann man Äquivalenzklassen bilden. Ob man eine Relation zwischen geometrischen Pfeilen oder zwischen ganzen Zahlen betrachtet, ist egal. Beide Male entstehen Äquivalenzklassen: Einmal z.B. Vektoren, das andere Mal z.B. Restklassen.
In der Mathematik studiert man nun viel allgemeiner *mathematische Systeme*, die man mit Hilfe der Regeln der Logik aufbaut. Diese bestehen aus folgenden Komponenten:

Mathematische Systeme:

- *Grundbegriffe* und dazwischen *Grundrelationen*.
- *Axiome:* Axiome sind grundlegende Sätze (Aussagen), die für den Aufbau der Theorie als wahr angenommen werden. Die Theorie ist dann nur richtig, wenn die Axiome erfüllt sind. Z.B. das in der Euklidschen Geometrie gültige Parallelenaxiom ist in einer Nichteuklidschen Geometrie, z.B. in der Kugelgeometrie oder in der hyperbolischen Geometrie ungültig. Vgl. z.B. Grosses Handbuch der Mathematik (Bibl.: gellert).
- *Ein Deduktionsgerüst* oder Ableitungsgerüst. Ein solches Gerüst besteht aus Definitionsverfahren (Regeln, die beim Definieren zu befolgen sind), logischen Schlussregeln (vgl. z.B. Aussagenlogik) und Beweismethoden.
- Die *Theorie*, d.h. die Menge der abgeleiteten Sätze.

Die mathematische Aufbaumethode führt also von akzeptierten Grundgebilden, Regeln, Axiomen und gesicherten Begriffe mittels der Logik zur Theorie. Ein mathematisches System lässt meist spezielle Interpretationen zu. Eine solche Interpretation nennen wir *Modell des Systems*.
Z.B. sind die ganzen Zahlen mit der Addition ein spezielles Modelle einer kommutativen Gruppe[3]. Ebenso die Drehungen von geometrischen Figuren einer Ebene um einen Punkt P. Später werden wir auch zeigen, dass gewisse Teile der Aussagenlogik, der Mengenalgebra und die Schaltalgebra spezielle Modelle einer gewissen *Boolschen Algebra* sind.

Problemkreise in einem mathematischen System

Wegen den gemachten Erfahrungen beschäftigt sich die Mathematik immer wieder mit den nachfolgend beschriebenen wichtigen Problemkreisen:

Problemkreise in einem mathematischen System:

1. Die *Widerspruchsfreiheit* des Axiomensystems: Man würde es nicht akzeptieren, wenn eine falsche Aussage hergeleitet, d.h. bewiesen werden könnte. In der Mathematik will man sicher sein, dass die hergeleiteten Aussagen stimmen. Die Wiederspruchsfreiheit muss also bewiesen werden.
2. Die *Vollständigkeit* eines Axiomensystems bezüzglich einem gegebenen Modell: Lässt sich jeder vermutete Satz aus dem Axiomensystem deduzieren?.
3. Die *Unabhängigkeit der Axiome*: Folgt nicht schon ein Axiom aus den andern Axiomen? Aus ästethischen und ökonomischen Gründen möchte man unnötigen Ballast abwerfen.
4. Die *Ableitung der Theorie*: Wie finde ich die wesendlichen, erkenntnisbringenden Sätze?

Diese Probleme zu lösen, ist Aufgabe der Mathematiker. Die Anwendung der gefundenen und so gesicherten Theorie geht auch den Ingenieur und den Naturwissenschaftler etwas an. Wenn wir im Folgenden nun ein Axiomensystem betrachten, können wir davon ausgehen, dass die Mathematiker dazu obige Probleme $1 - 3$ gelöst haben.

[3] Der Gruppenbegriff ist in Teil 3 erklärt worden.

1.2 Verbände oder Gitter

Ein *Verband* ist eine spezielle algebraische Struktur. Um ihn zu definieren, führen wir die folgenden Symbole ein:

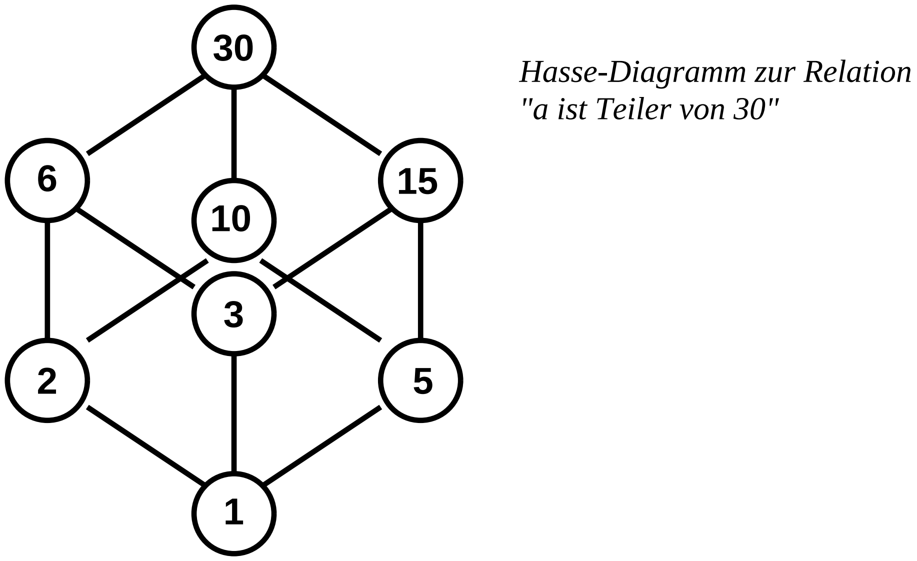
Symbole 1 (Verbandsoperationen) *:* $\sqcup$ *und* $\sqcap$ *seien irgendwelche zweistelligen Verknüpfungen.*

(Beispiele von zweistelligen Verknüpfungen sind $\cup$, $\cap$, $+$, $-$, $\wedge$, $\vee$, $\times$ etc.)
Sei Weiter $\mathcal{V}$ eine gegebene Menge.

Definition 1.1 (Verband) *:*
$(\mathcal{V}, \sqcap, \sqcup)$ *heisst genau dann* **Verband***, wenn für alle* $a, b, c \in \mathcal{V}$ *die folgenden* **Axiome** *erfüllt sind:*

(1)	*Kommutativgesetze*	$a \sqcap b$	$=$	$b \sqcap a$	*und dual dazu:*	$a \sqcup b$	$=$	$b \sqcup a$
(2)	*Assoziativgesetze*	$(a \sqcap b) \sqcap c$	$=$	$a \sqcap (b \sqcap c)$	*und dual dazu:*	$(a \sqcup b) \sqcup c$	$=$	$a \sqcup (b \sqcup c)$
(3)	*Absorptionsgesetze*	$a \sqcap (a \sqcup b)$	$=$	a	*und dual dazu:*	$a \sqcup (a \sqcap b)$	$=$	a

Abbildung 1.1: Hasse–Diagramm



Beispiele:

1. $(\mathcal{V}, \sqcap, \sqcup) = (\wp(M), \cap, \cup)$. (Mengenlehre: Potenzmenge)

2. $(\mathcal{V}, \sqcap, \sqcup) = \{w, f\}, \wedge, \vee)$. (Verknüpfung wahrer oder falscher Aussagen)

3. $(\mathcal{V}, \sqcap, \sqcup) = (V_k, \mathrm{ggT}, \mathrm{kgV})$. (Dabei ist $V_k = \{n \in \mathbf{N} \mid n|k, k \in \mathbf{N}\})$[4] und $(a \sqcap b) = \mathrm{ggT}(a, b), (a \sqcup b) = \mathrm{kgV}(a, b)$.[5] Dieser Verband heisst *Teilerverband.*

4. Der Untergruppenverband: Sei $\mathcal{V} = \{$Untergruppen einer Gruppe G und $\sqcap$ das Zeichen für die Bildung einer gemeinsamen Untergruppe, $\sqcup$ dasjenige für die Bildung einer gemeinsamen Obergruppe.[6]

In Abb. 1.1 kann man für Beispiel 3 rasch nachprüfen, dass die Verbandsaxiome erfüllt sind. Wenn bei einer Zahl weiter unten die Linien von zweien Zahlen weiter oben her zusammenlaufen, so steht unten der ggT der Zahlen weiter oben. Laufen umgekehrt zwei Linien bei einer Zahl weiter oben zusammen, so steht weiter oben das kgV der beiden Zahlen weiter unten.

[4] $n|k$ heisst „n teilt k“.
[5] ggT ist der grösste gemeinsame Teiler, kgV das kleinste gemeinsame Vielfache.
[6] Eine Untergruppe entsteht durch eine Teilmenge der Gruppenelemente, die wiederum Gruppe ist.

1.3 Boolsche Verbände oder Boolsche Algebren

Definition 1.2 (Distributiver Verband) *:*
Ein Verband $(\mathcal{V}, \sqcap, \sqcup)$ *heisst genau dann* **distributiv**, *wenn für alle* $a, b, c \in \mathcal{V}$ *zusätzlich die folgenden Distributivgesetze (***Axiome***) erfüllt sind:*

(4) $a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c)$ *und dual dazu:* $a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$

Beispiele: Man prüft sofort nach, dass es sich in obigen Beispielen 1 bis 3 um distributive Verbände handelt.

Definition 1.3 (Boolscher Verband) *: Ein Verband* $(\mathcal{V}, \sqcap, \sqcup)$ *heisst genau dann* **komplementär** *(***Boolscher**[7] **Verband**, **Boolsche Algebra***), wenn zusätzlich die folgenden* **Axiome** *erfüllt sind:*

(5)	*a)*	$\exists_{\text{neutrales Element } \mathbf{e} \text{ für } \sqcap} : \forall_{a\in\mathcal{V}}$	$a \sqcap e = a$	*(e:* **Einselement***).*
	b)	$\exists_{\text{neutrales Element } \mathbf{n} \text{ für } \sqcup} : \forall_{a\in\mathcal{V}}$	$a \sqcup n = a$	*(n:* **Nullelement***).*
(6)		$\forall_{a\in\mathcal{V}} \dot{\exists}_{\text{inverses Element } \bar{\mathbf{a}}} :$	*a)* $a \sqcap \bar{a} = n$	
			b) $a \sqcup \bar{a} = e$	

Das zu a *inverse Element* $\bar{a}$ *heisst auch* **Komplement** *von* a.

Wegen dem Komplement schreiben wir statt $(\mathcal{V}, \sqcap, \sqcup)$ nun $(\mathcal{V}, \sqcap, \sqcup, \bar{\ })$.

Beispiele:

1. Der Mengenverband $(\wp(M), \cap, \cup, \bar{\ })$ ist ein Boolscher Verband. Wir setzen: $M = e$ und $\{\} = n$. Dann ist:

$$A \cap \bar{A} = \{\} \qquad A \cap M = A$$
$$A \cup \bar{A} = M \qquad A \cup \{\} = A$$

2. Der Teilerverband $(V_k$, ggT, kgV$)$ ist ein Boolscher Verband, falls k keine mehrfachen Primfaktoren enthält.

1.4 Schaltalgebra

Bei elektrischen Schaltern unterscheiden wir zwei mögliche Zustände:

- Schalter geschlossen: Strom kann fliessen (**Leitwert**[8] $= L$)
- Schalter offen: Strom kann nicht fliessen (**Leitwert** $= \emptyset$).

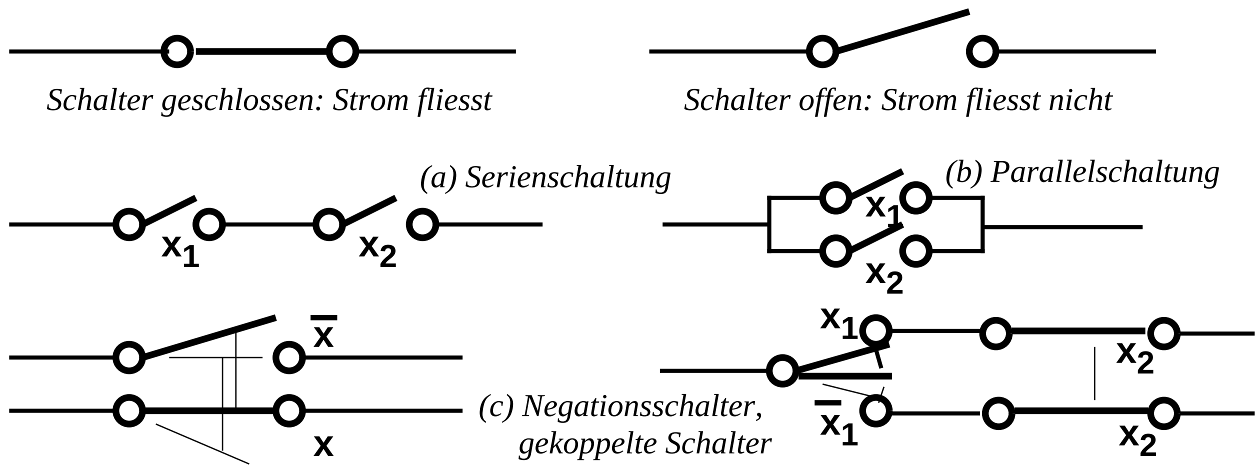
Vgl. dazu Abb 1.2, Schalterdarstellung[9]. (Interessant sind nun die Kombinationen von Schaltern, die ebenfalls in Abb 1.2 gezeigt sind.
Für den jeweiligen Leitwert eines Schalters benutzen wir die Variable x resp. x_i, und für die Darstellung des Gesamtleitwerts x einer Schaltung durch die Leitwerte x_i der einzelnen Schalter benützen wir die folgende symbolische Schreibweise:

Symbole 2 *:*

Serieschaltung:	$x = x_1 \cdot c_2$
Parallelschaltung:	$x = x_1 + c_2$
Negationsschalter:	$\bar{x} = L$ *genau dann wenn* $x = \emptyset$.
Gekoppelte Schalter:	$x_1 = L$ *genau dann wenn* $x_2 = L$.

[7] Zu Ehren von George Boole (1815 – 1864), der eine solche Struktur bei der Untersuchung der Gesetze der Logik fand.
[8] Vgl. Physik.
[9] Was die in der Elektronik üblichen Gatterdarstellung *(Gates, logische Gatter)* betrifft, sei auf die Fachliteratur in der Elektronik verwiesen.

Abbildung 1.2: Schalter und einfache Kombinationen



Diese Verknüpfpungszeichen benennen wir wie in der Zahlenalgebra resp. der Mengenlehre mit *mal* (Produkt), *plus* (Summe) und *Komplement* (Technik: Negationsschalter, vgl.[10], [11]).
Die Leitwerte der Verknüpfungen definieren wir der physikalischen Realität entsprechend durch folgende zutreffenden Aussagen:

Definition 1.4 (Verknüpfungen von Leitwertvariablen) *:*

1. $x = x_1 \cdot x_2 = L \;:\Longleftrightarrow\; x_1 = L \wedge x_2 = L$
2. $x = x_1 + x_2 = \emptyset \;:\Longleftrightarrow\; x_1 = \emptyset \wedge x_2 = \emptyset$
3. $\bar{x} = L \;:\Longleftrightarrow\; x = \emptyset$

Da die Variablen die beiden Werte $\emptyset$ und L annehmen können, gelten die Verknüpfungen natürlich auch für die Werte. Das Produkt und die Summe folgen somit den gleichen Gesetzen wie sie bei $\wedge$ und $\vee$ in der Aussagenlogik bestehen. Daher haben wir die folgenden Verknüpfungstabellen:

Var	x_1	x_2	$x_1 \cdot x_2$
$t(Var)$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
	$\emptyset$	L	$\emptyset$
	L	$\emptyset$	$\emptyset$
	L	L	L

Var	x_1	x_2	$x_1 + x_2$
$t(Var)$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
	$\emptyset$	L	L
	L	$\emptyset$	L
	L	L	L

Für das Komplement folgt trivialerweise der Satz:

Satz 1.1 (Komplemente der Leitwerte) *:* $\bar{L} = \emptyset \qquad \bar{\emptyset} = L$

Jetzt sind wir soweit, dass wir die *mathematische Definition der Schaltalgebra* geben können:

Definition 1.5 (Schaltalgebra) *:*
Die algebraische Struktur $(\{\emptyset, L\}, +, \cdot, \,^{-})$ *heisst* **Schaltalgebra**.

[10] Ein Schalter 1 ist Negationsschalter eines Schalters 2, falls Schalter 1 immer genau dann offen ist, wenn Schalter 2 geschlossen ist.

[11] Ein Schalter 1 ist gekoppelt mit einem Schalters 2, falls Schalter 1 immer genau dann offen ist, wenn Schalter 2 offen ist.

Es gilt der Satz:

Satz 1.2 (Schaltalgebra als Boolscher Verband) *: Die Schaltalgebra ist eine Boolsche Algebra oder ein Boolscher Verband.*

Aus den eben dargelegten Tabellen und dem Satz über die Komplemente der Leitwerte ist ersichtlich, dass formal in der Schaltalgebra dieselben Gesetze gelten wie in der Aussagenlogik bei $\wedge$, $\vee$ und $\neg$. Daher sind die Axiome einer Boolschen Algebra erfüllt: Sie sind von der Aussagenlogik her übertragbar – oder formal genau gleich beweisbar wie dort.

1.5 Der Satz von Stone

Zwei algebraische Strukturen $(\mathcal{V}, \circ, \diamond, \bullet, \ldots)$ und $(\tilde{\mathcal{V}}, \tilde{\circ}, \tilde{\diamond}, \tilde{\bullet}, \ldots)$ nennen wir *isomorph*, wenn sich die Elemente der beiden Mengen $\mathcal{V}, \tilde{\mathcal{V}}$ gegenseitig (d.h. bijektiv) entsprechen und entsprechende Operationen (z.B. $\circ$ und $\tilde{\circ}$ zu sich entsprechenden Resultaten führen. Die bijektive Zuordnung der Elemente wird also durch die Operationen nicht gestört. Die durch die bijektive Zuordnung gegebene Funktion φ nennen wir daher *strukturerhaltend*. Symbolisch schreiben wir für isomorphe Strukturen:

Symbole 3 (Isomorphe algebraische Strukturen) *:*

$$(\mathcal{V}, \circ, \diamond, \bullet, \ldots) \cong (\tilde{\mathcal{V}}, \tilde{\circ}, \tilde{\diamond}, \tilde{\bullet}, \ldots)$$

Formal definieren wir die Isomorphie so:

Definition 1.6 (Isomorphe algebraische Strukturen) *:*
Die algebraische Struktur $(\mathcal{V}, \circ_1, \circ_2, \circ_3, \ldots)$ heisst **isomorph** *zur algebraischen Struktur $(\tilde{\mathcal{V}}, \tilde{\circ}_1, \tilde{\circ}_2, \tilde{\circ}_3, \ldots)$, falls es eine bijektive Funktion $\varphi : \mathcal{V} \longmapsto \tilde{\mathcal{V}}$ gibt, für die bei allen Operationen $\circ_i$ gilt: $\varphi(a \circ_i b) = \varphi(a) \, \tilde{\circ}_i \, \varphi(b)$ bei beliebigen Elementen a und $b \in \mathcal{V}$.*

Die Isomorphie stiftet daher eine Relation „auf einer Menge von algebraischen Strukturen S“. (D.h. sie definiert eine Teilmenge von $S \times S$). Trivialerweise gilt der Satz:

Satz 1.3 (Isomorphieklassen) *: Die Isomorphierelation ist eine Äquivalenzrelation.*

Daraus folgt, dass die algebraischen Strukturen in *Isomorphieklassen* (Äquivalenzklassen) zerfallen. Weiter sagen wir:

Definition 1.7 (Endlicher Boolscher Verband) *:*
Ein Boolscher Verband $(\mathcal{V}, \sqcap, \sqcup, \ ^{-})$ heisst **endlich***, wenn die Menge $\mathcal{V}$ endlich ist.*

Satz 1.4 (von Stone) *: Jeder endliche Boolsche Verband $(\mathcal{V}, \sqcap, \sqcup, \ ^{-})$ ist isomorph zu einem Mengenverband $(\wp(M), \cap, \cup, \ ^{-})$.*

Die *Konsequenz dieses Satzes* ist überwältigend: Da sich bei isomorphen algebraischen Strukturen die Elemente und die Resultate der Operationen paarweise entsprechen, braucht man nur einen Vertreter einer Isomorphieklasse zu kennen, damit man weiss, wie sich alle andern Klassenmitglieder bei den Operationen verhalten. Man merke sich:

(Merke!) Wenn man die Mengenverbände $(\wp(M), \cap, \cup, \ ^{-})$ kennt, kennt man formal alle endlichen Boolschen Verbände. Speziell ist dann $|\mathcal{V}| = |\wp(M)| = 2^{|M|}$. (Die letzte Gleichung ist in der Kombinatorik bewiesen worden.) Somit wissen wir:

Satz 1.5 (Anzahl Elemente bei einem Boolschen Verband) *: Die Anzahl Elemente der Menge $\mathcal{V}$ in einem Boolschen Verband $(\mathcal{V}, \sqcap, \sqcup, \ ^{-})$ ist immer eine Zweierpotenz.*

Es gibt daher keinen Boolschen Verband mit 3, 5, 6, oder z.B. mit 17 Elementen! Und weiter folgt sofort speziell für die Schaltalgebra:

Korollar 1.1 (Isomorphie der Schaltalgebra) *: Die Schaltalgebra* $(\{\emptyset, L\}, +, \cdot, \ ^{-})$ *ist isomorph zur Mengenalgebra* $(\{\{\{\}\}, \{\}\}, \cup, \cap, \ ^{-})$ [12] *oder zu* $(\{w, f\}, \vee, \wedge, \neg)$ *(Aussagenlogik) oder zum Teilerverband mit* V_k *mit* $k = 2$.

Der Beweis des Satzes von Stone ist eine Angelegenheit von mehreren Seiten, da verschiedene Details konsequent durchgeprüft werden müssen. Eine Darstellung findet sich in Boolsche Algebra (Bibl.: deller).

Konsequenz: Wegen der Isomorphie kann man die Schaltalgebra z.B. in die Mengenlehre übersetzen und die dort zur Verfügung stehenden Techniken nutzen. Gewinnbringend wird das bekanntlich bei der Technik mit den *Karnaugh–Diagrammen* angewandt, indem man Schaltausdrücke in die Mengenlehre übersetzt und dort mit Mengendiagrammen arbeitet.

1.6 Algebra mit Boolschen Ausdrücken

1.6.1 Rechengesetze in der Schaltalgebra

Da die Schaltalgebra ein Boolscher Verband ist, können wir die Verbandsaxiome auch in der Sprache der Schaltalgebra schreiben. $\sqcap$ wird dort zu $\cdot$ und $\sqcup$ wird zu $+$. Man kann aber auch von den so erhaltenen Gesetze ausgehen, sie also an den Beginn stellen und damit die Schaltalgebra axiomatisch einführen. Das ergibt das folgende Axiomensystem:

Axiom 1.1 (Verbandsaxiome in der Sprache der Schaltalgebra) *: Für alle* a, b *und* $c \in \{\emptyset, L\}$ *gilt:*

(A1)	$a \cdot b$	$=$	$b \cdot a$	*(A1')*	$a + b$	$=$	$b + a$
(A2)	$(a \cdot b) \cdot c$	$=$	$a \cdot (b \cdot c)$	*(A2')*	$(a + b) + c$	$=$	$a + (b + c)$
(A3)	$a \cdot (a + b)$	$=$	a	*(A3')*	$a + (a \cdot b)$	$=$	a
(A4)	$a \cdot (b + c)$	$=$	$(a \cdot b) + (a \cdot c)$	*(A4')*	$a + (b \cdot c)$	$=$	$(a + b) \cdot (a + c)$
(A5)	$a \cdot L$	$=$	a	*(A5')*	$a + \emptyset$	$=$	a
(A6)	$\forall_a \dot{\exists}_{\bar{a}} : a \cdot \bar{a}$	$=$	$\emptyset$	*(A6')*	$\forall_a \dot{\exists}_{\bar{a}} : a + \bar{a}$	$=$	L

Bemerkungen:

- Statt $a \cdot b$ benützen wir wie in der Zahlenalgebra die **Kurzschreibweise** $a\,b$.
- Wegen der Isomorphie zur Aussagenlogik ist das Axiomensystem für Boolsche Algebren widerspruchsfrei, denn die Aussagenlogik ist widerspruchsfrei. Jedoch ist es nicht minimal. (Z.B. lassen sich die Axiome (A2), (A2'),(A3) und (A3') aus den restlichen herleiten.)

Auf der Basis dieser Axiome kann man die folgenden Rechenregeln beweisen:

Satz 1.6 (Rechenregeln für die Schaltalgebra) *:*

(1)	$a\,a$	$=$	a	*(1')*	$a + a$	$=$	a
(2)	a	$=$	$\bar{\bar{a}}$				
(3)	$a\,\emptyset$	$=$	$\emptyset$	*(3')*	$a + L$	$=$	L
(4)	$\bar{\emptyset}$	$=$	L	*(4')*	$\bar{L}$	$=$	$\emptyset$
(5)	$\overline{a\,b}$	$=$	$\bar{a} + \bar{b}$	*(5')*	$\overline{a + b}$	$=$	$\bar{a}\bar{b}$

Beispiele von Beweisen:

Zu (1): $a\,a = a(a + \emptyset) = a$ (mit Hilfe des Absorptionsgesetzes sowie (5')).
Zu (2): Es ist $\bar{a} \cdot \bar{\bar{a}} = \emptyset$ und $\bar{a} \cdot a = a \cdot \bar{a} = \emptyset$ (Kommutativität, (6)). Daraus folgt: $a = \bar{\bar{a}}$, da nach (6) das Inverse eindeutig ist.
Zu (3): $a \cdot \emptyset = \emptyset \cdot a = \emptyset \cdot (a + \emptyset) = \emptyset \cdot (\emptyset + a) = \emptyset$ (Kommutativität, (5'), Absorptionsgesetz).

[12] $\{\{\{\}\}, \{\}\}$ ist ein Beispiel einer Menge mit zwei Elementen.

Zu (4): $\emptyset+\bar{\emptyset}=L$ (nach (6')) und $\emptyset+L=L$ (Kommutativität und (5')). Daraus folgt $\bar{\emptyset}=L$ wieder wegen der Eindeutigkeit des Inversen.
Zu (5): Wegen der Kommutativität, Distributivität, Assoziativität, (3) und (5') ist: $(a+b)\bar{a}\,\bar{b}=a\,\bar{a}\,\bar{b}+b\,\bar{a}\,\bar{b}=\emptyset\,\bar{b}+\emptyset\,\bar{a}=\emptyset+\emptyset=\emptyset$. Wegen der Kommutativität und der Eindeutigkeit des Inversen ist daher $\bar{a}\,\bar{b}$ das Inverse von $(a+b)$, d.h. $\overline{a+b}=\bar{a}\bar{b}$.
Wie man hier ersieht, können die behaupteten Aussagen alleine mit Hilfe der durch die Axiome gegebenen Rechenregeln nachgerechnet werden. Mehr steckt nicht dahinter.

Beispiele von Termumformungen

Nachstehend sind einige Beispiele von Termumformungen gegeben, bei denen nur obige Axiome und Rechenregeln sowie die Resultate schon gerechneter Beispiele verwendet werden. Der Leser möge zur Übung selbst herausfinden, welche Regeln beim jeweiligen Rechenschritt verwendet werden:
Beispiele:

1. $x_1x_2+x_3x_4=(x_1x_2+x_3)(x_1x_2+x_4)=(x_3+x_1x_2)(x_4+x_1x_2)=(x_3+x_1)(x_3+x_2)(x_4+x_1)(x_4+x_2)=(x_1+x_3)(x_1+x_4)(x_2+x_3)(x_2+x_4)$
2. $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=x_2(x_1+x_3)x_3x_1=(x_2+x_3)(x_2+x_1)((x_1+x_3)+x_3)((x_1+x_3)+x_1)=(x_2+x_3)(x_2+x_1)(x_1+x_3)(x_1+x_3)=(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)$
3. $x_1(\bar{x}_1+x_2)+x_2(x_2+x_3)+x_2=x_1\bar{x}_1+x_1x_2+x_2+x_2=\emptyset+x_2x_1+x_2=x_2x_1+x_2=x_2$
4. $x_1+\bar{x}_1+x_2=(x_1\bar{x}_1)(x_1+x_2)=x_1+x_2$ (*)
5. $(x_1+x_2)(x_1+\bar{x}_2)(\bar{x}_1+x_2)(\bar{x}_1+\bar{x}_2)=(x_1+x_2\bar{x}_2)(\bar{x}_1+x_2\bar{x}_2)=(x_1+\emptyset)(\bar{x}_1+\emptyset)=x_1\bar{x}_1=\emptyset$
6. $x_1x_2x_3+x_1+\bar{x}_2x_3+x_1x_2x_3\bar{x}_3=x_1x_3(x_2+\bar{x}_2)+\emptyset=x_1x_3L=x_1x_3$
7. $\overline{x_1+x_2+x_3}=\overline{(x_1+x_2)+x_3}=\overline{(x_1+x_2)}\bar{x}_3=\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$
8. $\overline{x_1x_2x_3}=\overline{(x_1x_2)}+\bar{x}_3=(\bar{x}_1+\bar{x}_2)+\bar{x}_3=\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3$
9. $x_1x_2x_3+\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3=x_1x_2x_3+\overline{x_1x_2x_3}=L$
10. $\overline{x_1x_2+x_1\bar{x}_2+\bar{x}_1\bar{x}_2}=\overline{x_1(x_2+\bar{x}_2)+\bar{x}_1\bar{x}_2}=\overline{x_1L+\bar{x}_1\bar{x}_2}=\overline{x_1+\bar{x}_1\bar{x}_2}=\overline{x_1+\bar{x}_2}=\bar{x}_1\overline{\bar{x}_2}=\bar{x}_1x_2$ (unter Benutzung von (*)).

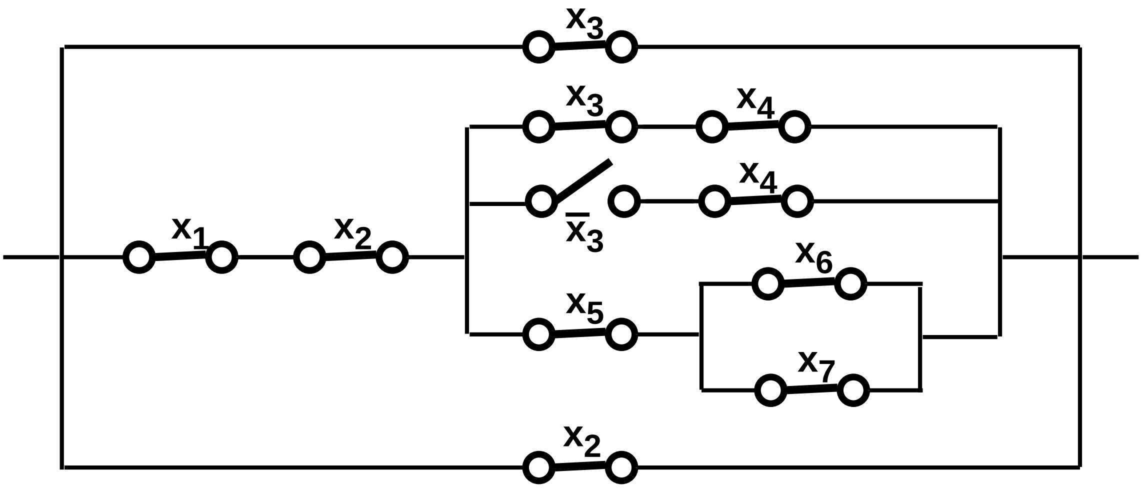
1.6.2 Behandlung von Schaltungen mit Boolscher Algebra

1.6.3 Algebraischer Ausdruck einer Schaltung

Da Summe, Produkt und Komplement in der physikalischen Realität ihre eindeutige Entsprechung haben (Parallelschaltung, Serieschaltung und Negationsschalter), gehört zu einer Schalterdarstellung (resp. zu einer Gatterdarstellung, vgl. Lit.) eindeutig ein algebraischer Ausdruck $f(x_1,x_2,\ldots)$, in dem die Reihenfolge berücksichtigt ist. Ein solcher Ausdruck definiert natürlich dann jeweils eine Funktion mit den unabhängigen Variablen $x_1,x_2,\ldots$.
Beispiele:

1. Schalterdarstellung, Beispiel 1 (vgl. Abb. 1.3):
   $f(x_1,x_2,\ldots,x_7)=x_3+x_1x_2(x_3x_4+\bar{x}_3x_4+(x_5(x_6+x_7)))+x_2.$
2. Schalterdarstellung, Beispiel 2 (vgl. Abb. 1.4):
   $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3)(\bar{x}_1+x_2)(x_1x_3+\bar{x}_1x_2)(\bar{x}_2+\bar{x}_3).$
3. Schalterdarstellung, Beispiel 3 (vgl. Abb. 1.5):
   $f(x_1,x_2,\ldots x_5)=x_1(x_2+x_5(x_4+\bar{x}_2))+x_3(x_5x_2+x_4+\bar{x}_2).$

Abbildung 1.3: Schalterdarstellung, Beispiel 1



Wie wir bei den Beispielen von Termumformungen gesehen haben (vgl. 1.6.1), ist die Darstellung eines Terms nicht eindeutig, denn man kann einen Term ja umformen. Zu einer Schaltung gibt es daher immer je nach den Umformungsmöglichkeiten des Terms äquivalente[13] Schaltungen, die dasselbe physikalische Resultat ergeben.

Resultat: Zu einer elektrischen Schaltung gehört ein algebraischer Ausdruck und umgekehrt. Der algebraische Ausdruck kann mit Hilfe der Regeln für die Termumformungen äquivalent umgestaltet werden. Die zugehörige neue Schaltung macht dann dasselbe wie die alte.

1.6.4 Das Darstellungsproblem

In der Praxis taucht folgendes Problem auf (vgl. Abb. 1.6):

Problem 1.1 (Darstellungsproblem) :

Gegeben: *Zustände von Schaltern (Eingänge sowie Gesamtzustand), z.B. in einer Wertetabelle.*
Gesucht: *Die Schaltung, z.B. in Form eines algebraischen Ausdrucks.*

Beispiel:

[13] Wir nennen zwei Schaltungen **äquivalent**, wenn sich ihre algebraischen Ausdrücke ineinander umformen lassen.

Abbildung 1.4: Schalterdarstellung, Beispiel 2

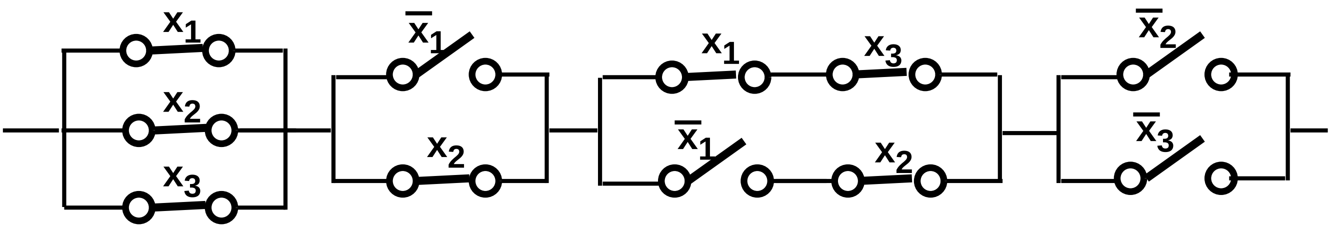
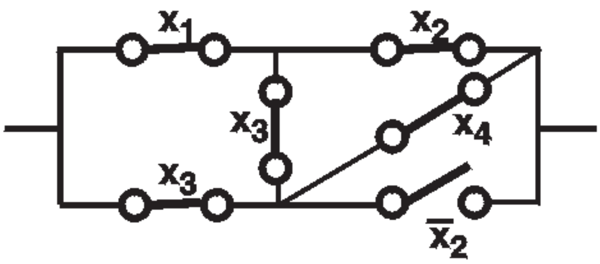


Abbildung 1.5: Schalterdarstellung, Beispiel 3



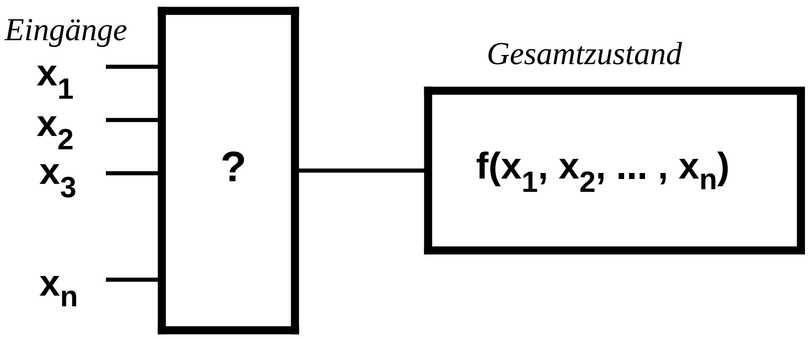
x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
L	L	L	L
L	∅	L	L
L	L	∅	∅
∅	L	L	∅
∅	L	∅	∅
∅	∅	1	frei
L	∅	∅	wählbar
∅	∅	∅	

Um den zugehörigen algebraischen Ausdruck zu finden, können wir die Isomorphie der Schaltalgebra zum entsprechenden Teil der Aussagenlogik ausnützen. Dort haben wir gelernt, zu einer Wertetabelle z.B. die zugehörige *vollständige* oder *kanonische alternative Normalform (ANF)* zu finden. In unserem Beispiel wäre diese ANF $(X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge \neg X_2 \wedge X_3)$. Da einige Werte rechts in der Tabelle frei wählbar sind, wählen wir diese Werte so, dass die Länge des entstehenden Ausdrucks möglichst klein wird.
In die Schaltalgebra übersetzt erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1 x_2 x_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3 \\ &= x_1 x_3 (x_2 + \bar{x}_2) \\ &= x_1 x_3 \end{aligned}$$

Die Umformung zeigt, dass schliesslich die Schaltung mit Hilfe von nur zwei Schaltern realisiert werden kann. Mit weniger geht es nicht. Andererseits hätte man aber auch mit der *KNF* arbeiten können. Was allgemein besser ist, muss die Praxis zeigen. Wir gelangen so zu folgendem Problem:

Abbildung 1.6: Schalterdarstellung, Beispiel 3



1.6.5 Das Minimalisierungsproblem

Problemstellung

Eine verständliche ökonomische Forderung verlangt die Reduzierung der Anzahl Schalter soweit es geht. Schaltungen werden so einfacher, billiger. Für uns entsteht das folgende Problem:

Problem 1.2 (Minimalisierungsproblem) *:*
Gegeben: *Eine Schaltung in Form eines algebraischen Ausdrucks.*
Gesucht: *Die oder eine äquivalente Schaltung mit der minimalen Anzahl Schaltern.*

Es sind mehrere verschiedene Methoden bekannt, die zur Lösung des Problems dienen. In der angegebenen Literatur (z.B. Boolsche Algebra und logische Schaltungen (Bibl.: mendelson)) finden wir:

1. Rechnen mit Hilfe der bekannten Rechengesetze (nicht sehr effizient)
2. *Karnaugh–Methode* (wird weiter unten vorgestellt)
3. Methode von *Quine – Mc Cluskey*
4. *Konsensmethode*

Da die Anzahl Schalter sich algebraisch in der „Länge der Terme“ wiederspiegelt, wird es zum Verständnis der in der Literatur besprochenen Methoden notwendig, diese Termlänge mathematisch irgendwie auszudrücken. Das führ auf den Begriff der *Minimalform*.

Minimalformen

Statt Ausdrücke der Schaltalgebra betrachten wir für den Moment die entsprechenden Ausdrücke der Aussagenlogik, denn für diese haben wir schon früher eine Terminelogie aufgebaut.
Sei somit Φ eine ANF: $\Phi = \Phi_1 \vee \Phi_2 \vee \ldots \vee \Phi_k$, wobei die Φ_i Konjunktionsterme sind.
Sei l_Φ die Anzahl der in Φ vorkommenden verschiedenen Variablen (ohne die Negation $\neg$), d_Φ sei die Anzahl der Adjunktionsglieder.
Wenn wir zwei Terme mit gleichvielen verschiedenen Variablen haben, so nennen wir denjenigen Term den kleineren (kürzeren), der weniger Adjunktionsglieder aufweist. Allgemeiner definieren wir:

Definition 1.8 (kleinerer oder kürzerer Term) *:*
Φ *heisst* **kleiner** *(***kürzer***) als* Ψ $(\Phi < \Psi)$ *:* $\Longleftrightarrow l_\Phi \leq l_\Psi \wedge d_\Phi \leq d_\Psi$*, wobei mindestens einmal '$<$' stehen muss.*

Definition 1.9 (Minimalform) *: Die zu Φ kleinste mögliche ANF heisst* **adjunktive Minimalform** *(AMF). Entsprechend zur KNF die* **konjunktive Minimalform** *(KMF).*

Bemerkung: Später werden wir in Beispielen sehen, dass eine AMF (KMF) nicht eindeutig zu sein braucht.

Sei nun A eine Aussageform und K ein Konjunktionsterm. Wir sagen:

Definition 1.10 (Primimplikant) *:*
K heisst **Primimplikant** *von A* $\Longleftrightarrow$ *1. $K \Rightarrow A$ ist Tautologie. 2. $K_1 \Rightarrow A$ ist für $K_1 < K$ nicht mehr Tautologie.*

Es gilt der folgende Satz:

Satz 1.7 (Über Primimplikanten) *:*
Eine AMF von A ist eine Adjunktion von Primimplikanten von A.

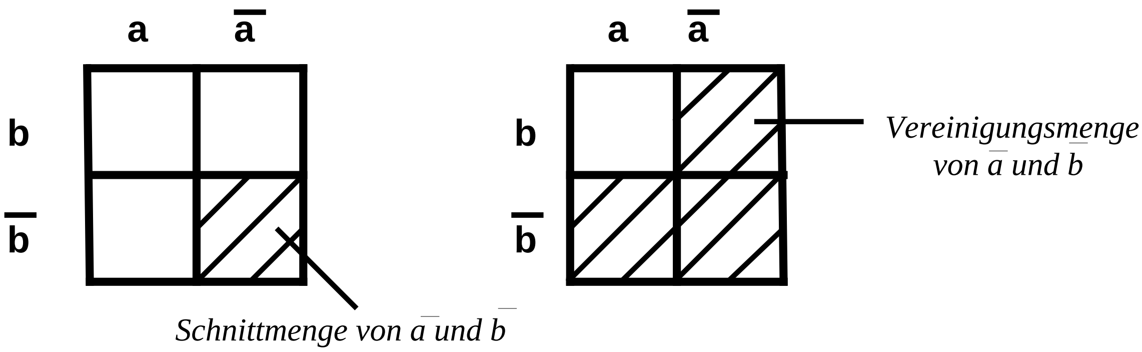
Für den Beweis sei auf die Literatur (z.B. Bibl.: mendelson) verwiesen.

Konsequenz: Das Auffinden der ANF bedeutet algebraisch das Auffinden der Primimplikanten. Das lässt sich methodisch ausbauen und anwenden. Für unsere Belang wollen wir uns aber hier vor allem einer einzigen einfachen Methode zuwenden, die nicht algebraisch funktioniert, sondern sich der Mengendiagramme bedient: die *Karnaugh–Methode*.

1.6.6 Die Karnaugh–Methode

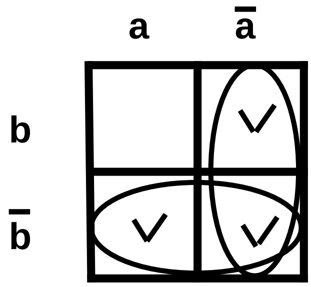
Mit 2 Variablen

Abbildung 1.7: Darstellung von Termen der Schaltalgebra durch Mengendiagramme



In 1.5 haben wir gesehen, dass die Schaltalgebra $(\{\emptyset, L\}, +, \cdot, ^{-})$ isomorph ist zur Mengenalgebra $(\{\{\{\}\}, \{\}\}, \cup, \cap, ^{-})$ ist – oder auch zu $(\{\{1\}, \{\}\}, \cup, \cap, ^{-})$. Das erlaubt uns, statt $\cdot$ und $+$ neu $\cap$ und $\cup$ zu verwenden und Schnitt– sowie Vereinigungsmengen graphisch zu ermitteln, vgl. Abb1.7.
Beispiel: Statt $a\,\bar{b} + \bar{a}\,b + \bar{a}\,\bar{b}$ studieren wir den entsprechenden Ausdruck $a \cap \bar{b} \cup \bar{a} \cap b \cup \bar{a} \cap \bar{b}$, wobei a und b jetzt als Mengen zu interpretieren sind. Graphisch stellen wir der Einfachheit halber die Schnitt– und Vereinigungsmengen durch Quadrate oder Rechtecke dar (vgl. dazu Abb1.8).

Abbildung 1.8: Beispiel mit zwei Variablen



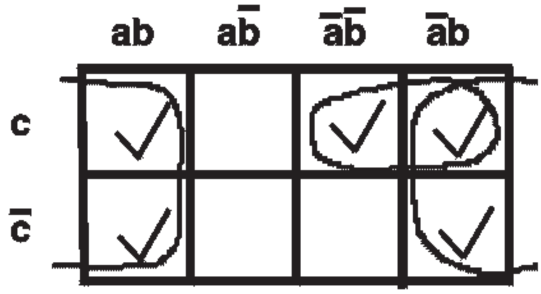
a und $\bar{a}$ werden im Beispiel durch hohe Rechtecke dargestellt, b und $\bar{b}$ liegende Rechtecke. Die Quadrate symbolisieren die Schnittmenten $a \cap \bar{b}$, $\bar{a} \cap b$, $\bar{a} \cap \bar{b}$. Diese Schnittmengen markieren wir je mit einem Haken ($\surd$). Aus der Skizze ist jetzt ersichtlich, dass die Vereinigung dieser Schnittmengen ja gerade gleich $\bar{a} \cup \bar{b}$ ist. Somit gilt:

$$a\,\bar{b} + \bar{a}\,b + \bar{a}\,\bar{b} = \bar{a} + \bar{b}$$

Mengentheoretisch gedeutet ist $\bar{a}+\bar{b}$ die Vereinigung (Symbol $+$) der beiden in der Darstellung umrandeten Vereinigungsmengen.

Mit 3 Variablen

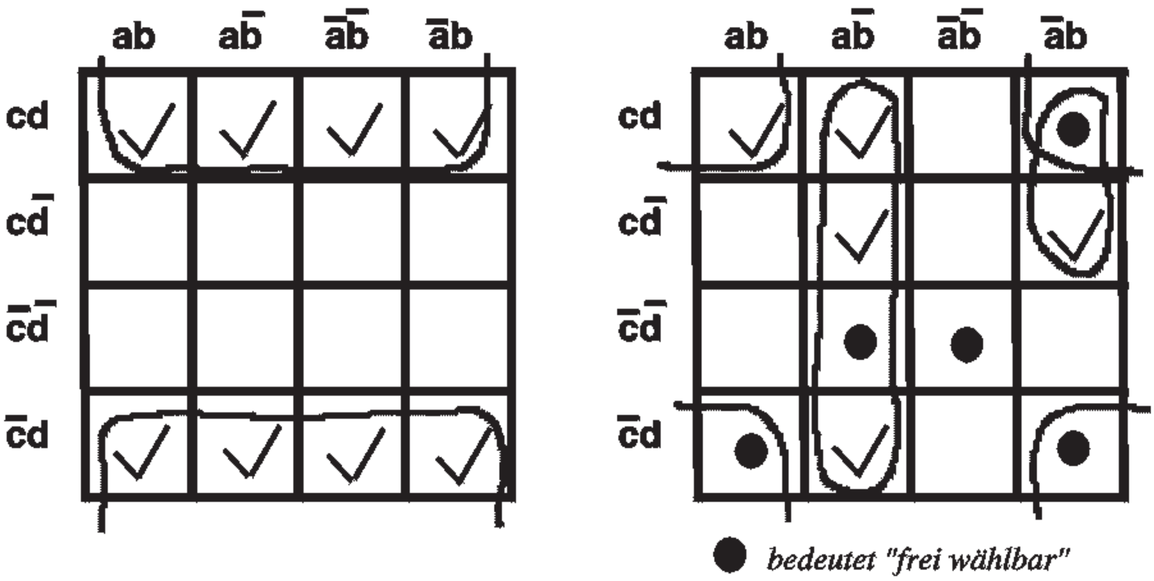
Abbildung 1.9: Beispiel mit drei Variablen



In Abb1.9 ist das Beispiel $a\,b\,c+\bar{a}\,b\,c+a\,b\,\bar{c}+\bar{a}\,b\,\bar{c}+\bar{a}\,\bar{b}\,c=b+\bar{a}\,c$ dargestellt.

Mit 4 Variablen

Abbildung 1.10: Beispiel mit vier Variablen



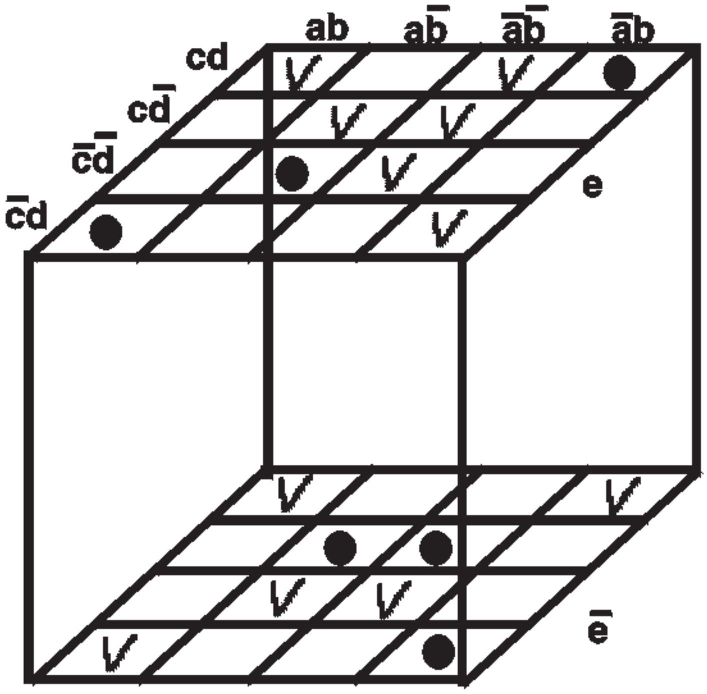
In Abb1.10 links im Bild ist das Beispiel $a\,b\,c\,d+a\,\bar{b}\,c\,d+\bar{a}\,\bar{b}\,c\,d+\bar{a}\,b\,c\,d+a\,b\,\bar{c}\,d+a\,\bar{b}\,\bar{c}\,d+\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\,d+\bar{a}\,b\,\bar{c}\,d=d$ dargestellt.

Rechts im Bild steht ein Beispiel, in dem man einige Summanden (alles Produkte) *frei wählen* kann. Sie sind durch einen fetten Punkt markiert. Falls es nützlich erscheint, mag man sie benützen, andernfalls lässt man es bleiben. Das Beispiel hier zeigt $a\,b\,c\,d+a\,\bar{b}\,c\,d+a\,\bar{b}\,c\,\bar{d}+\bar{a}\,b\,c\,\bar{d}+a\,\bar{b}\,\bar{c}\,d$ mit den frei wählbaren Beiträgen $\bar{a}\,b\,c\,d$, $a\,\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d}$, $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d}$, $a\,b\,\bar{c}\,d$, $\bar{a}\,b\,\bar{c}\,d$. Die Minimalformen lauten: $a\,\bar{b}+b\,d+\bar{a}\,b\,c$ (vgl. Abbildung) und $a\,\bar{b} + a\,d + \bar{a}\,b\,c$. Dies ist ein *Beispiel für den Fall*, wo die *Minimalform nicht eindeutig* ist.

Merke: Eine Minimalform braucht nicht eindeutig zu sein.

Mit 5 Variablen

Abbildung 1.11: Beispiel mit fünf Variablen



In Abb1.11 finden wir das Beispiel $a\,b\,c\,d\,e + \bar{a}\,\bar{b}\,c\,d\,e + a\,\bar{b}\,c\,\bar{d}\,e + \bar{a}\,\bar{b}\,c\,\bar{d}\,e + \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d}\,e + \bar{a}\,b\,\bar{c}\,d\,e + a\,b\,c\,d\,\bar{e} + \bar{a}\,b\,c\,d\,\bar{e} + a\,\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d}\,\bar{e} + \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d}\,\bar{e} + a\,b\,\bar{c}\,d\,\bar{e}$. Frei wählbar sind die Beiträge $\bar{a}\,b\,c\,d\,e$, $a\,\bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d}\,e$, $a\,b\,\bar{c}\,d\,e$, $a\,\bar{b}\,c\,\bar{d}\,\bar{e}$, $\bar{a}\,\bar{b}\,c\,\bar{d}\,\bar{e}$, $\bar{a}\,b\,\bar{c}\,d\,\bar{e}$. Die Resultate der Vereinfachung sind $b\,d + \bar{b}\,\bar{d} + \bar{a}\,\bar{b}\,c\,e$ und $b\,d + \bar{b}\,\bar{d} + \bar{a}\,c\,d\,e$ (keine Eindeutigkeit).

1.6.7 Bermerkungen zu den andern Methoden

Quine – Mc Cluskey (vgl. Lit. Bibl.: mendelson):
Diese Methode funktioniert ähnlich wie die Karnaugh–Methode. Man arbeitet jedoch mit Tabellen statt mit Diagrammen.

Konsens–Methode (vgl. Lit. Bibl.: mendelson):
Seien Ψ_1 und Ψ_2 Konjunktionsterme und ρ eine Variable, die nicht negiert in Ψ_1 vorkommt, während $\neg\rho$ in Ψ_2 vorkommt. Aus $\Psi_1 \wedge \Psi_2$ bilde man jetzt Φ durch Weglassung von ρ und $\neg\rho$. Man definiert dann:

Definition 1.11 (Konsens) *:*
Der damit entstehende Ausdruck Φ heisst **Konsens** *von Ψ_1 und Ψ_2.*

Man kann dann den folgenden Satz beweisen:

Satz 1.8 (Zum Konsens) *:*

1. $(\Phi \Longrightarrow \Psi_1 \vee \Psi_2)$ *ist Tautologie.*
2. $\Psi_1 \vee \Psi_2 \equiv \Psi_1 \vee \Psi_2 \vee \Phi$.

Vorgehen bei der Konsens–Methode:

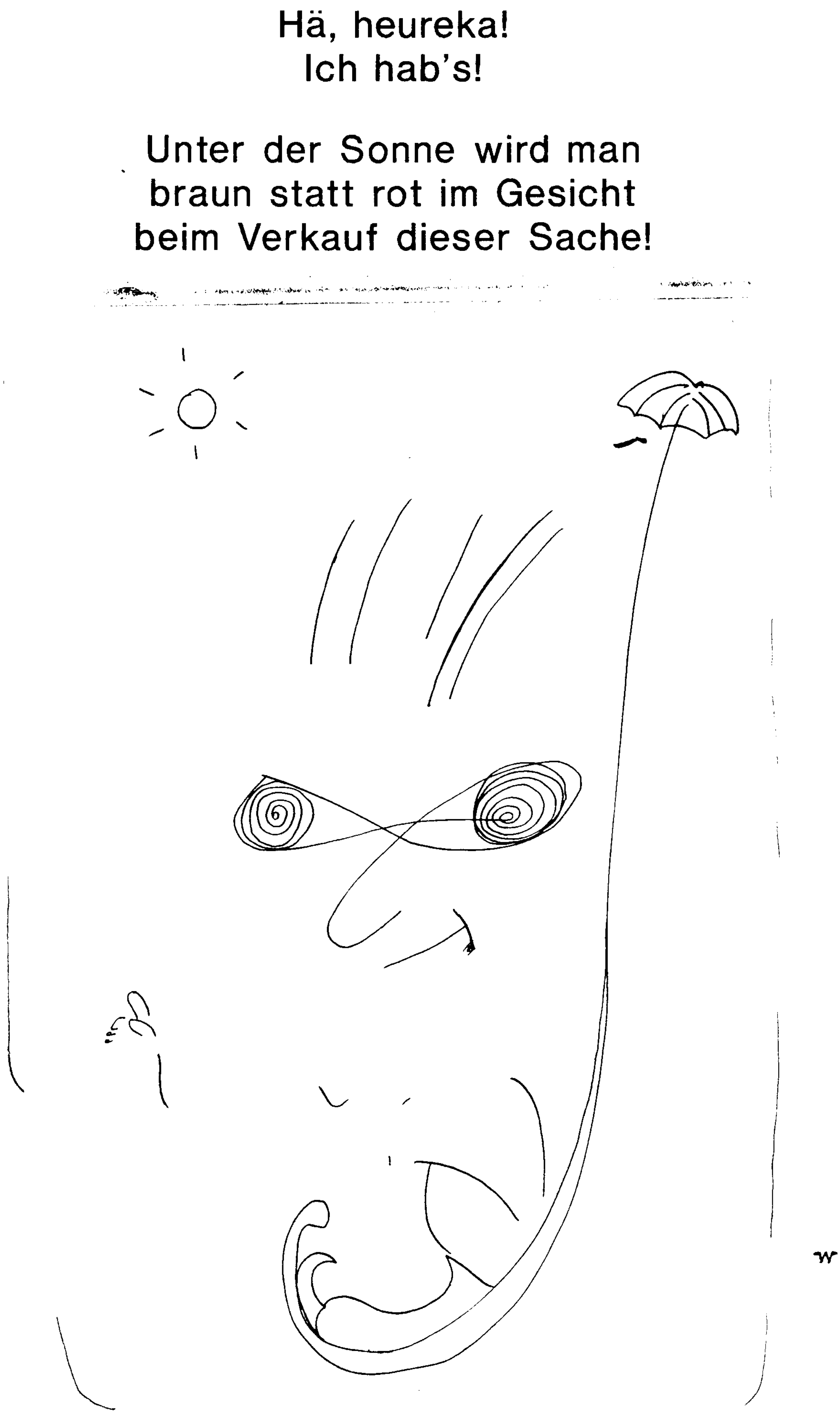
1. Wir gehen von einer ANF aus. Streiche die Adjunktionsglieder (Konjunktionsterme), die andere enthalten (Oberterme werden hier impliziert).
2. Konsens–Bildung.
3. Repetiere dieses Verfahren, bis ein Stillstand erreicht ist. Das Resultat ist dann eine Adjunktion von Primimplikanten.

Diese Bemerkungen sind nur ein sehr kurzer Ausblick. Eine weiterführende Behandlung der Sache würde unseren Rahmen hier sprengen. Für die Befriedigung eines allfälligen jetzt erwachsenen Erklärungsbedarfs zu diesem Thema sei auf die einschlägige Literatur verwiesen.

1.7 Übungen

Übungen finden sich in *DIYMU* (Bibl.: wirz1) sowie in der klassischen Schulbuchliteratur für Berufsschulen und die Gymnasialstufe. Achtung: Die Nummerierung der Kapitel im *DIYMU* ist unabhängig!

Abbildung 1.12: Ohne Titel



Index

Abbildung 1.13: Ohne Titel

Literaturverzeichnis

[1] Brenner, Lesky. Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. AULA-Verlag Wiesbaden (Bibl: brennerlesky)

[2] Deller. Boolsche Algebra. Diesterweg Salle (Bibl: deller)

[3] Dörfler, Peschek. Einführung in die Mathematik für Informatiker. Hanser Verlag München, Wien (Bibl: dorflerPeschek)

[4] Gellert, Küstner, Hellwich, Kästner. Grosses Handbuch der Mathematik. Buch und Zeit Verlagsges. m.b.H. Köln (Bibl: gellert)

[5] Jehle. Boolsche Algebra. bsv, Bayrischer Schulbuchverlag (Bibl: jehle)

[6] Mendelson. Boolsche Algebra und logische Schaltungen, Theorie und Anwendung. Reihe SCHAUM, Mac Graw Hill (Bibl: mendelson)

[7] Vom Autor. Mathematik für Ingenieure *Teile 1 ff* (Bibl: wirz)

[8] Vom Autor. *DIYMU* (Do it yourself Mathematik Übungsbuch). Ingenieurschule Biel 1991 (Bibl: wirz1)

Abbildung 1.14: Ohne Titel

Anhang A

Aus dem DIYMU

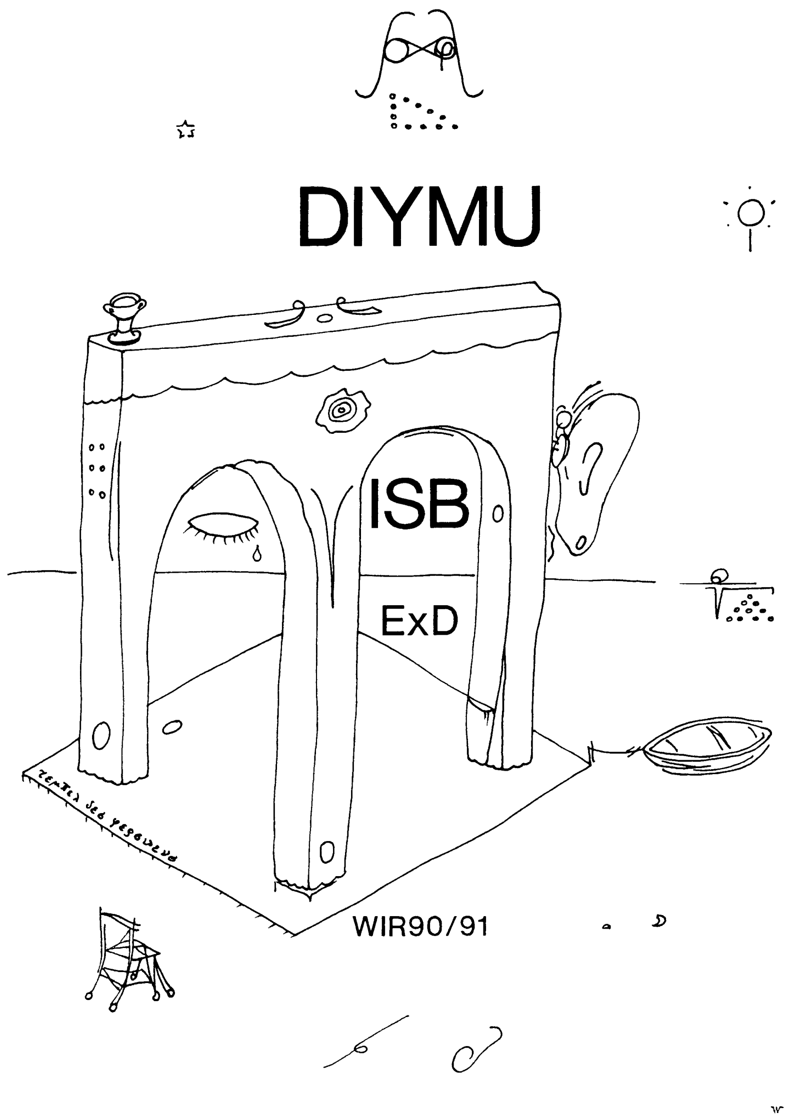
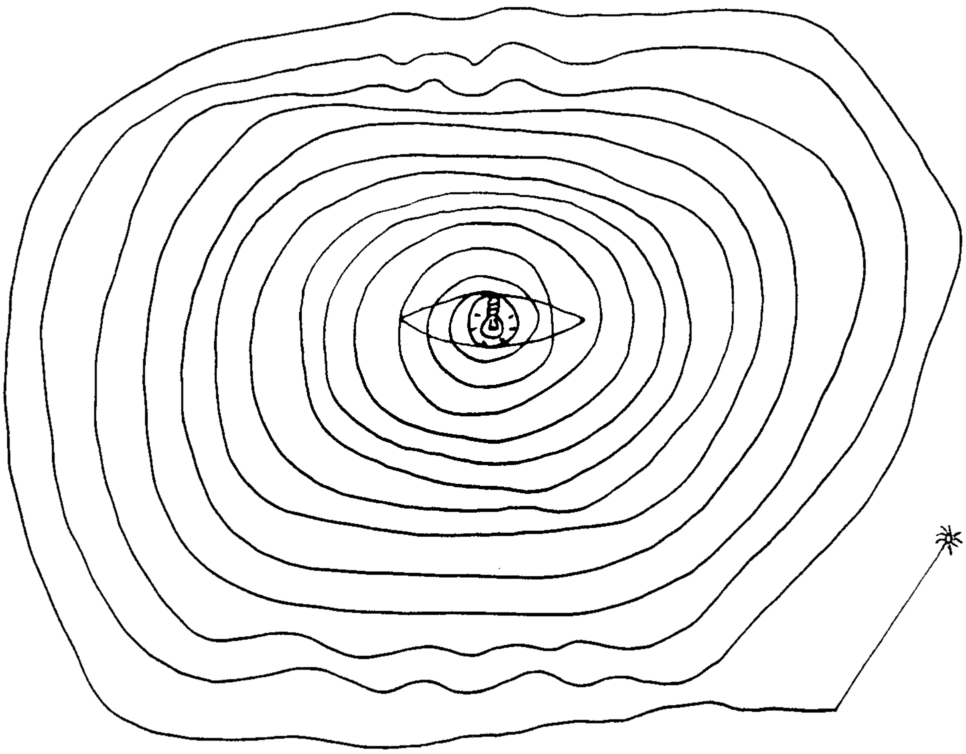


Abbildung A.1: Ohne Titel



Der Lichtblick am Ende des Tunnels