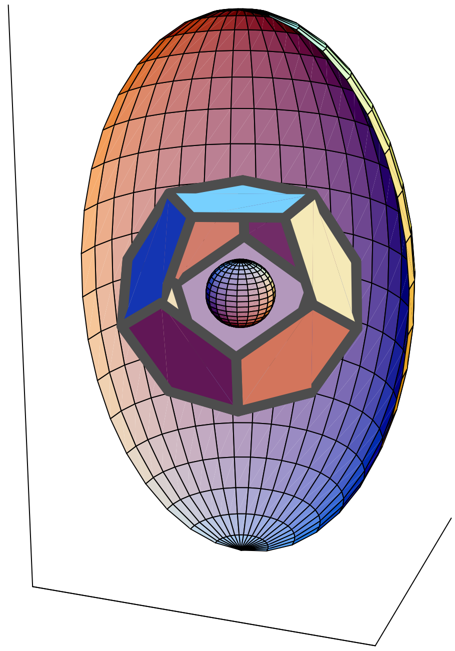
Cours en mathématiques pour ingénieurs ◇ partie 6 ◇ analyse combinatoire



de

Rolf Wirz

Ecole d'ingénieurs Bienne

Edition restaurée après le NeXT–Crash de 1999

V.1.2.1 d/f 25 mai 2005 V.1.2.1 d/f

WIR/NeXT/93/01/05/LaTex/Teil6.tex

Partie 6 d'un cours de répétition et livret, accompagnement et complément des leçons.
Produit avec LaTeX sur NeXT-Computer/ PCTeX WIN98.

Quelques graphismes ont été produits avec Mathematica. 1999, l'auteur a subi un crash d'ordinateur. A la suite du changement de système provoqué par cela, quelques graphismes ont été altérés passablement. Ils seront aménagés de nouveau dès qu'il y aura assez de temps à disposition pour cela.

La chance aide parfois, mais le travail aide toujours . . .

Sagesse de l'Inde

Adresse de l'auteur:

Rolf W. Wirz-Depierre
Prof. für Math.

Ecole d'ingénieurs de Bienne, haute école spécialisée bernoise
Quellgasse – Rue de la source 21
Postfach – case postale 1180
CH-2501 Biel-Bienne
Tel. (..41) (0)32 266 111, neu 3216 111

Kombinatorik: Probleme mit ganzen Zahlen — Analyse combinatoire: Problèmes concernant les nombres entiers

Abbildung 1: . . . Wie ordne ich das Chaos? . . . • *Comment mettre de l'ordre dans le chaos?* . . .

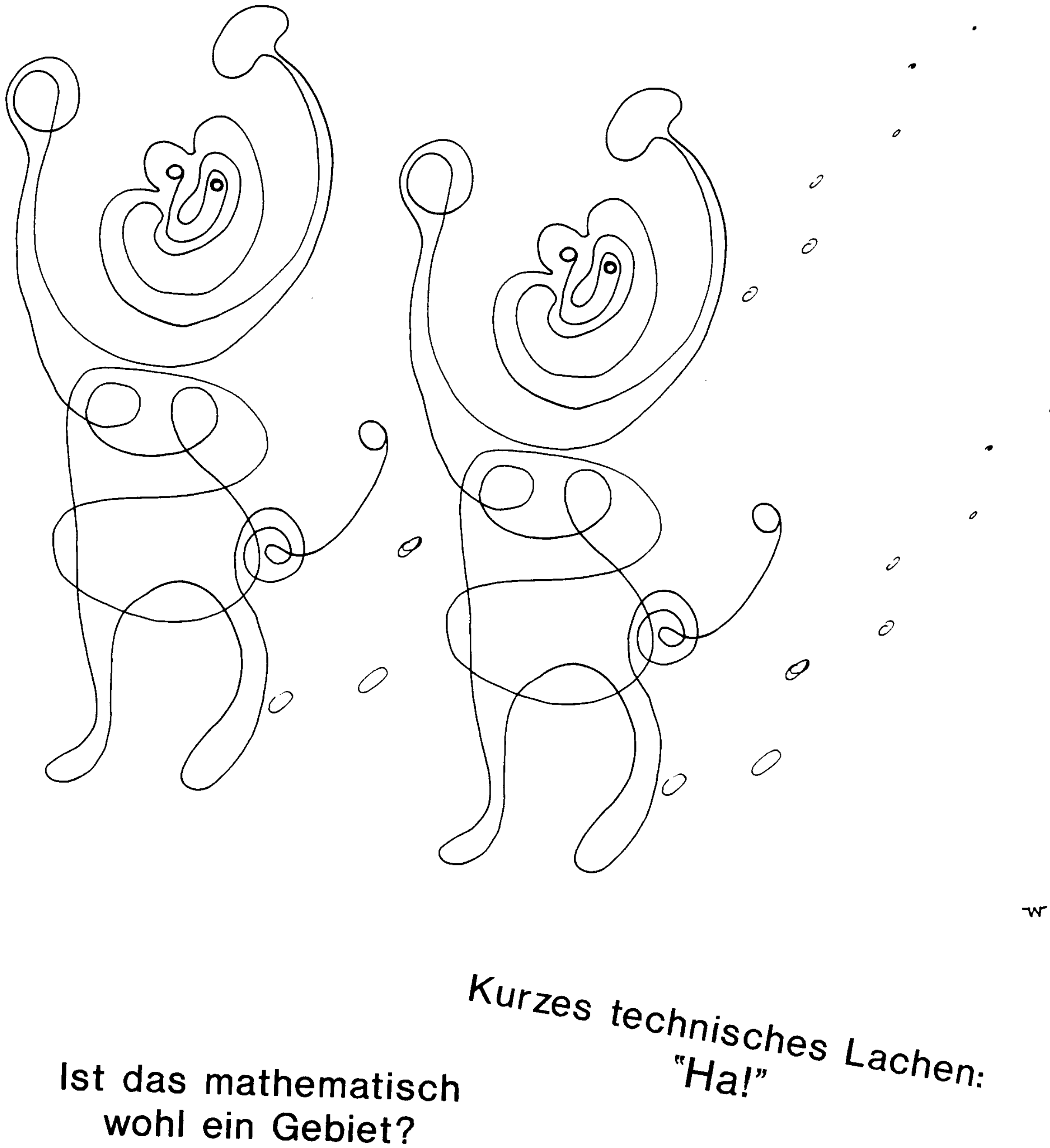
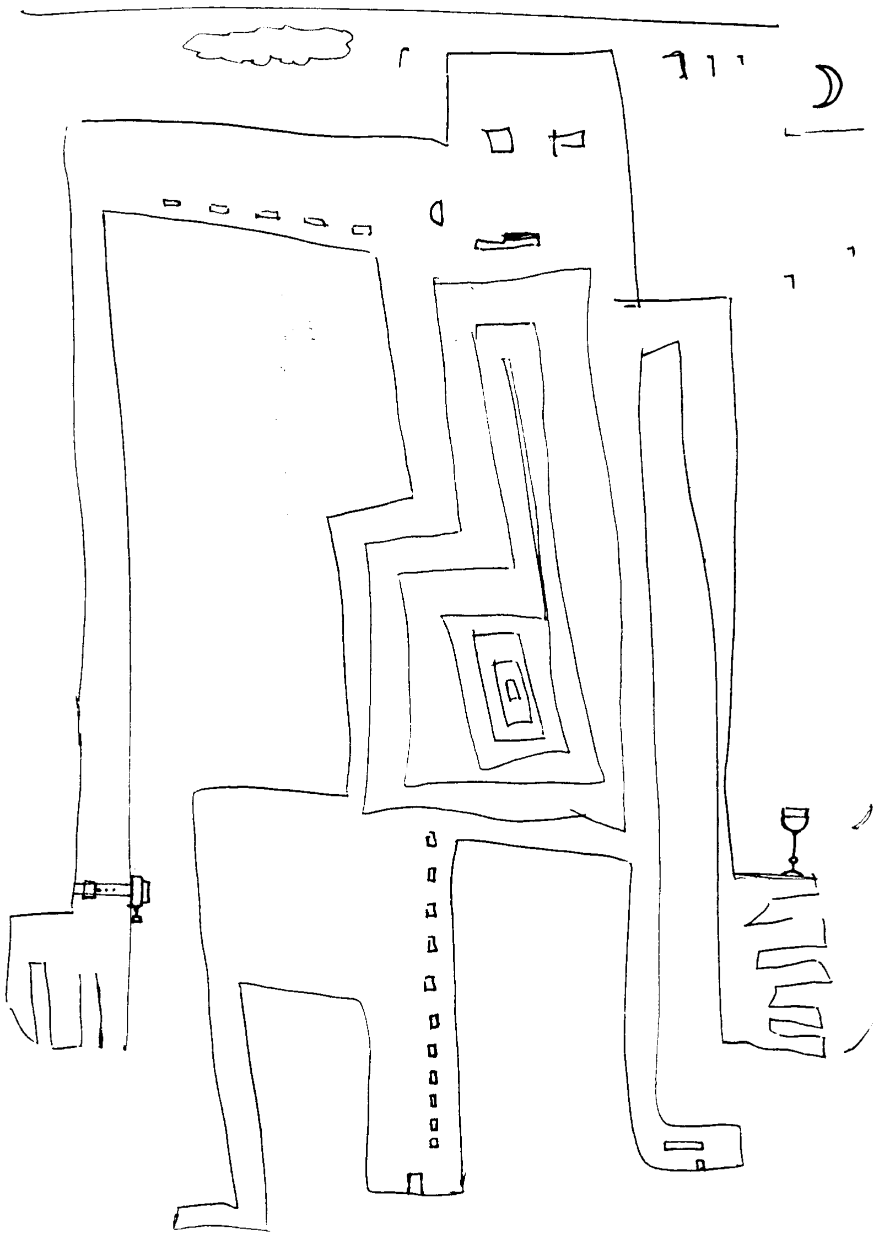


Table des matières

Abbildung 2: … weil leere Seiten so langweilig sind … • *Parce que les pages vides sont si ennuyeuses*

"Auf das nächste Mal Seite 54 lesen!"
– "Aus welchem Buch bitte?"
"Das Buch? Ah! – Den Titel hab ich vergessen. Doch Sie werden das Buch bestimmt selber finden können. Ich weiss nur noch, dass es 1962 in Wien erschienen ist."



w

Mitternachtstanz des Wolkenkratzermenschen

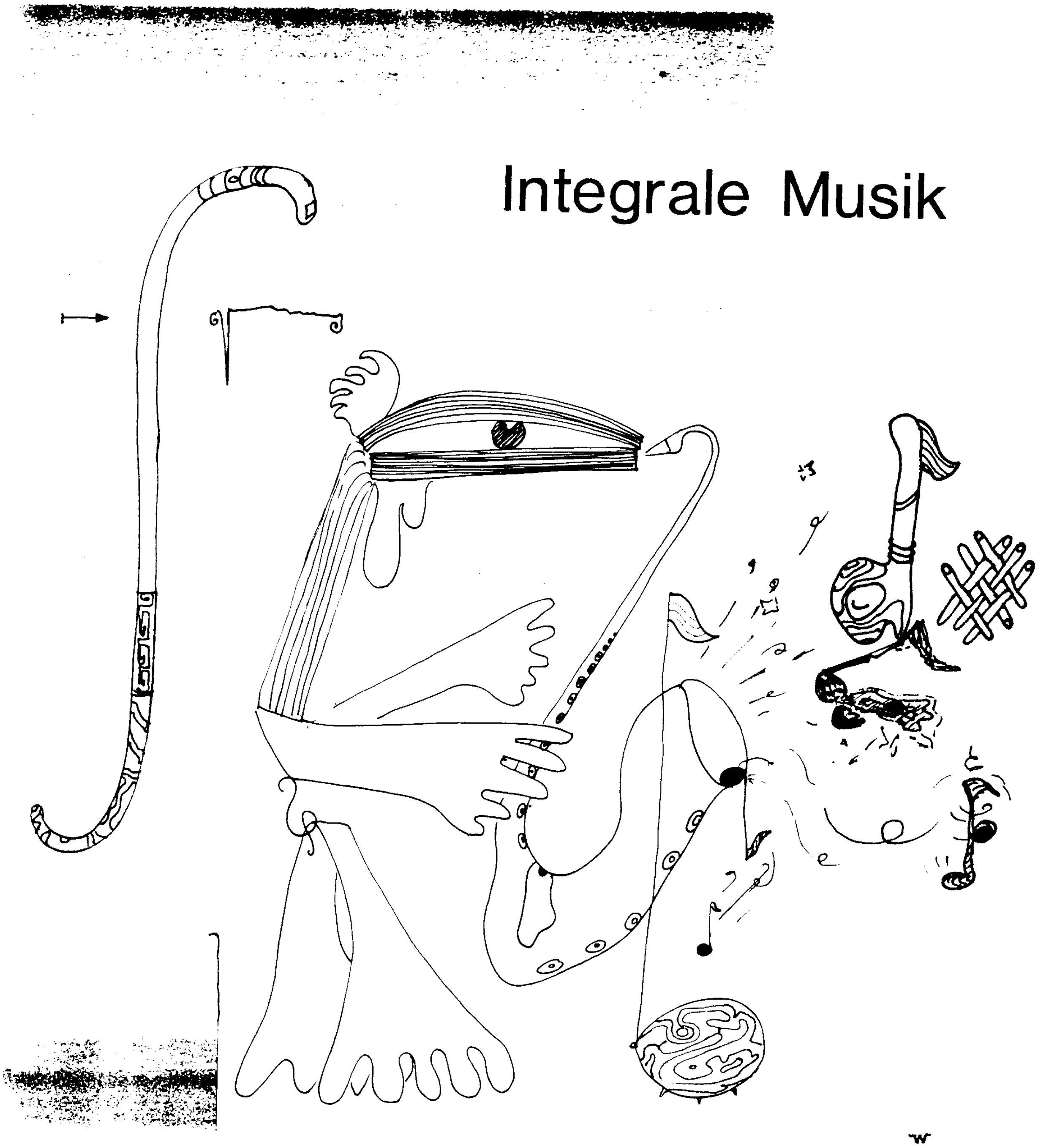
Vorwort

Chère lectrice, cher lecteur,

L'analyse combinatoire fait partie du programme du gymnase classique. Dans les écoles qui préparent à la maturité professionelle, il devrait être traité également. Mais quoi, si un étudiant n'a jamais eu contact avec cette matière pour n'importe quelle raison — ou s'il l'a oubliée? Alors il faut l'élaborer ou répéter. Par conséquent ce texte est conçu comme cours de répétition et comme perfectionnement.
L'importance de l'analyse combinatoire est incontestée. Elle est un outil pour la solution de problèmes qui nous surprennent parfois. Elle est la base pour le "calcul des probabilités et la statistique".
Ce texte est écrit en forme de script. Ça signifie qu'il représente une forme très abrégée de la manière à apprendre. Pour des explications plus vastes et détaillées, exemples, preuves exactes et suppléments, on conseille l'étudiant de consulter plusieurs livres de cours. Etudier signifié en grande partie d'élargir soi–même son savoir à l'aide de la littérature et acquérir de la matière, de l'approfondir et de l'utiliser. Pour cela, un script est seulement un indicateur d'itinéraire et ne remplace jamais un livre de cours. Chacun est libre de choisir ses livres de cours. On trouve le sujet de l'analyse combinatoire pratiquement dans toutes les oeuvres de mathématiques pour le gymnase classique. Concernant le niveau des hautes écoles professoinelles le lecteur est renvoyé à des ouvrages tels que Brenner, Lesky, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 1 (Bibl.: brennerlesky).

Dans l'été 1996 L'auteur

Abbildung 3: ... ohne Worte ... • *sans mots ldots*



Chapitre 1

Analyse combinatoire

1.1 Introduction

1.1.1 Problème

Dans l'analyse combinatiore, nous traitons les 6 types de problèmes des nombres cardinaux classiques. Il s'agit des catégories suivantes de questions: Nous demandons le nombre des possibilités de pouvoir choisir des éléments dans un ensemble fini M d'après une prescription donnée, et eventuellement aussi de les ordonner ou de diviser l'ensemble en classes. Dans certains cas les éléments peuvent être répétés — ou bien non répétés. Comme le résultat y est chaque fois un nombre naturel, nous parlons de **fonctions dans les nombres cartinaux** $M \longmapsto y$.

1.1.2 Factorielles

Dans l'analyse combinatiore, la notion des factorielles joue un grand rôle. On définit les factorielles[1] par la relation de récurrence suivante:

Définition 1.1 (Factorielle:)

$$\begin{array}{ll} f(0) = 0! := 1 & \textit{(Ancrage)} \\ f(n) = n! := n \cdot (n-1)! & \textit{(Hérédité)} \end{array}$$

Remarques:

1. Il vaut donc: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \prod_{k=1}^{n} k$. (Voir([2]).)
   Il vaut donc: $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$ etc..

2. La notion de *récurrence* est très répandue aujourd'hui dans l'informatique. On entend par cette notion la définition d'une fonction ou une méthode par elle-même, voir aussi par exemple (Bibl.: Claus, Schwill (Bibl.: clausschwill)). Mais il ne faut pas confondre la notion de la *récurrence* qui cependant est utilisée ici dans un sens simple avec les notions *récurrence commune*,*récurrence primitive*, *fonciton de récurrence* (dans la théorie des nombres) et *relation de récurrence* (dans des sens différents dans la logique et la théorie des ensembles) qui sont un peu difficiles et usuelle dans les mathématiques. Voir aussi Fachlexikon *a b c* (Bibl.: abc), Iyanaga, Kawada (Bibl.: iyanagakawada) et Meschkowski (Bibl.: meschkowski)

[1] D'après le schéma de l'induction complète, voir le sujet des nombres naturels, axiome d'induction, un des axiomes du système de Peano.

[2] $\prod$ signifie *"produit"*.

Nous retenons:

Définition 1.2 (Récurrence (informatique))

Sous **récurrence** *nous entendons la définition d'une fonction ou d'une méthode par elle-même.*

De la définition de $n!$ on conclut: $f(n) = n \cdot f(n-1)$. La fonction à la place n est donc définie par la fonction à la place $n-1$ (ainsi par elle-même).
Les valeurs $f(n) = n!$ augmentent très vite. Par exemple il vaut:

$$40! = 815915283247897734345611269596115894272000000000 \approx 8.15915\,10^{47}.$$

Un programme simple sur un ordinateur peut donc très vite causer des problèmes. Voici une formule de *Stirling* très utile (sans la preuve):

Théorème 1.1 (Formule de Stirling:)

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$$

Ici e est le nombre de Euler: $e \approx 2.71828182845904523536028747135$ (à 30 places)

1.2 Problèmes d'arrangement

1.2.1 Permutations sans répétition

Paradigme (Exemple d'un problème pratique)[3]

Problème 1.1 (Possibilités de s'asseoir:)

Situation:

Dans une salle de classe il ne se trouve rien à l'exception de 26 chaises numérotées. Les numéros vont de 1 à 26. On vient d'enlever pupitres, bancs et tables. 26 étudiants attendent devant la porte. Pour pouvoir mieux distinguer les étudiants et pour mieux pouvoir les appeler, chaque étudiant reçoit un numéro différent de 1 à 26 avec lequel il est donc appelé.

Question:

De combien de manières différentes est-ce qu'on peut mettre les 26 étudiants sur les 26 chaises, c.-à.-d. combien est–ce que de répartitions des places existent?

Solution:

- L'étudiant no. 1 entre. Il trouve 26 chaises libres. Par conséquent il a 26 possibilités de s'asseoir.

- L'étudiant no. 2 entre. L'étudiant no. 1 est assis sur une chaise quelconque. L'étudiant Nr. 2 trouve encore 25 chaises libres. Par conséquent il a seulement 25 possibilités de s'asseoir. Mais il a ces 25 possibilités de s'asseoir pour chaque position de l'étudiant no. 1, qui pouvait se placer sur 26 sièges différents. A la première possibilité utilisée par l'étudiant no. 1, l'étudiant no. 2 a maintenant 25 possibilités, pour la deuxième possibilité de l'étudiant no. 1, l'étudiant no. 2 a aussi 25 possibilités, etc, pour la dernière possibilité de l'étudiant no. 1, l'étudiant no. 2 a de nouveau 25 possibilités. En tout les deux ont ainsi $26 \cdot 25$ possibilités. Les nombres des possibilités se multiplient!

[3] Un paradigme est un exemple démonstratif

- L'étudiant no. 3 entre. Les étudiants no. 1 et no. 2 sont déjà assis. L'étudiant Nr. 3 ne trouve que 24 chaises libres. Il a par conséquent pour chacune des $26 \cdot 25$ possibilités des premiers deux étudiants encore 24 possibilités. En tout les trois ont ainsi $26 \cdot 25 \cdot 24$ possibilités, parce que les nombres des possibilités se multiplient.

- Ainsi on avance. Finalement l'étudiant no. 25 entre. Pour chaque façon de se placer des étudiants qui sont déjà là il a encore 2 sièges de libres et par conséquent 2 possibilités de se placer. Totalement les 25 premiers étudiants ont ainsi $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2$ possibilités de se placer.

- Enfin le dernier étudiant, numéro 26, entre. Pour chaque façon de se placer des autres étudiants il ne lui reste qu'une chaise de libre, il n'a donc qu'une seule possibilité de se placer. Totalement les 26 étudiants ont par conséquent $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 26!$ possibilités de se placer.

Remarque:
Si dans un ensemble chaque élément (individu) porte un nom distinctif, on peut ranger les éléments "d'après les noms", c.-à.-d. de façon alphabétique, comme dans un lexique: A... vient aevant B...etc, Aa... aevant Ab...etc.. Dans un tel cas on parle d'une disposition lexicographique.

A réfléchir:

Si la classe est capable d'exécuter un changement de place en 10 secondes, elle nécessite $10 \cdot 26!$ secondes pour tous les changements de place. Ça nous fait $\frac{10 \cdot 26!}{60 \cdot 60 \cdot\ 24 \cdot 365}$ ans $= 1.278310^{20}$ ans. Comparaison: L'âge de l'univers d'après la théorie du big bang est actuellement estimée à env. 1 à 2 fois 10^{10} ans[4]. Pour réaliser toutes les répartitions des places sans pauses, il faudrait donc 10^{10} fois l'âge de l'univers!

Généralisation du problème:

Au lieu de résoudre le problème avec 26 étudiants on peut le résoudre généralement avec n étudiants. Dans l'argumentation il faut alors remplacer 26 par n, 25 par $n-1$ etc.. Finalement on obtient totalement $(n!)$ possibilités de mettre n étudiants sur n places.

Le problème abstrait

Soit donné un ensemble $\mathcal{M}_n$ avec n éléments, qui sont énumérotés par les numéros de 1 jusqu'à n. $\mathcal{M}_n$ correspond à un ensemble d'étudiants dans l'exemple antérieur. On a ainsi un rapport bijectif des éléments numérotés n_k à un sous–ensemble $\mathbf{N}_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ des nombres naturels. (On a ainsi une fonction bijektive.) Comme le rapport est biunivoque, nous pouvons remplacer les n_k chaque fois par k, sans transformer le problème: $\mathcal{M} = \mathbf{N}_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Maintenant on cherche le nombre des possibilités d'appliquer l'ensemble $\mathbf{N}_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ sur lui-même, c.-à.-d. dans le problème susdit appliquer l'ensemble des numéros des étudiants $\mathbf{N}_n$ à l'ensemble des numéros des chaises $\mathbf{N}_n$.

Soit $\sigma(k)$ l'image (en haut le numéro des chaises) à une telle application (dans le problème susdit à une possibilité de s'asseoir) de k (en haut k correspond au numéro de l'étudiant. Alors par une telle application, on applique σ (en haut l'ensemble des étudiants) à l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ (en haut les chaises). Si on écrit les images $\sigma(k)$ sous les originaux k, ainsi l'ensemble de relation défini par σ apparaît

[4] Les experts se disputent en effet au sujet de cette valeur. Elle est corrigée couramment d'après l'état des connaissances.

dans la forme suivante:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Ainsi un sous-ensemble de $\mathbf{N}_n \times \mathbf{N}_n$ est donné pour lequel le rapport de "fonction σ" est valable.

Par conséquent, par le schéma suivant, une nouvelle disposition $\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \dots, \sigma(n)$ des éléments $1, 2, 3, \dots, n$ est définie.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Nous disons:

Définition 1.3 (Permutation:)

La disposition $\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \dots, \sigma(n)$ des éléments de $\mathbf{N}_n$ s'appelle **permutation** *$\mathcal{P}$ de la disposition $(1, 2, 3, \dots, n)$ de ces éléments.*

Pour donner une permutation, nous pouvons aussi écrire:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Les collonnes se présentent dans un ordre quelconque.

Exemple Par la disposition suivante, une telle permutation est donnée:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1 est appliqué sur 4, 2 sur 1 etc.. Maintenant nous pouvons poser notre problème avec les étudiants et les chaises de façon abstraite et générale:

Problème 1.2
Permutations sans répétitions:

Question: *Combien de permutations $\mathcal{P}$ des numéros $1, 2, \dots, n$ existent–ils?*

Autrement: Combien de possibilités de dispositions des nombres $1, 2, \dots, n$ dans un rang existent–elles?

Autrement encore: Combien de fonctions bijektives $\mathbf{N}_n \longmapsto \mathbf{N}_n$ existent–elles?

Symboles 1 *:* $P(n)$

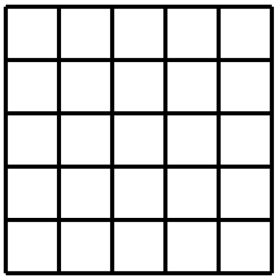
Soit $P(n)$ = nombre des permutations des éléments de M_n des nombres naturels de 1 jusqu'à n.

Nous savons:

Théorème 1.2
Les permutations sans répétition:

$$P(n) = n!$$

Abbildung 1.1: Teilflächen, verschieden zu färben . . . • *Surfaces partielles, à colorer de manière différente. . .*



Exemple:
Combien de possibilités est-ce qu'il y a de colorer les différentes surfaces montrées dans 1.1 avec des couleurs différentes? – À une coloration, 25 couleurs différentes sont adjointes aux 25 surfaces différentes. Au lieu de surfaces et couleurs, on peut aussi considérer seulement les numéros de 1 jusqu'à 25. On a ainsi une application bijektive d'un ensemble $\mathcal{M}_{25}$ ou de $\mathcal{M}_{25}$ sur soi–même. On cherche donc $P(25) =$ nombre de permutations de $1, 2, 3, \ldots, 25$. Ça donne $25! \approx 1.55112 \cdot 10^{25}$. Combien de temps est–ce qu'il faudrait probablement pour exécuter toutes les possibilités?

1.2.2 Permutations avec répétition

Paradigme

Problème 1.3
Possibilités d'échange de lettres:

Situation: *Un chef de personnel a écrit 20 lettres différentes. Il y a 7 copies identiques d'une lettre d'information pour un groupe de collaborateurs et 13 lettres concernant des réponses adressées d'autres collaborateurs concernant des questions de salaire. Les 20 enveloppes sont aussi prêtes.*

Question:
Combien de possibilités d'envoyer les lettres est-ce que la secrétaire a, de façon que pour elle des problèmes pourraient se poser?

Solution:
Die Anzahl unerwünschter Möglichkeiten ist somit $X-1 = \frac{20!}{7!} - 1 = 482718652416000 - 1 \approx 4.82719\,10^{14}$.

Si toutes les lettres étaient différentes, elle auraient 20! possibilités de mettre les lettres dans les enveloppes. Comme une seule possibilité peut être acceptée, les $(20! - 1)$ autres possibilités causent des problèmes.
Si 7 lettres sont maintenant les mêmes, ces 7 lettres peuvent être échangées entre elles sans qu'il y ait de problèmes. Cela on peut le faire de 7! manières différentes. Si maintenant X est le nombre de possibilités de placer les 13 lettres différentes dans le 20 enveloppes, pour chacune des X possibilités des lettres différentes les lettres identiques qui restent peuvent être échangées entre elles de $Y = 7!$ manières différentes sans qu'il se passe quelque chose d'embêtant. Comme c'est le cas pour chacune des X possibilités, les nombres des possibilités se multiplient au nombre total des possibilités. On n'a pas d'autres possibilités d'échange que celle qui sont mentionnées ici. Par conséquent il vaut: $20! = X \cdot Y = X \cdot 7!$ et par conséquent $X = \frac{20!}{7!}$.
Le nombre de possibilités indésirables est par conséquent $X - 1 = \frac{20!}{7!} - 1 = 482718652416000 - 1 \approx$

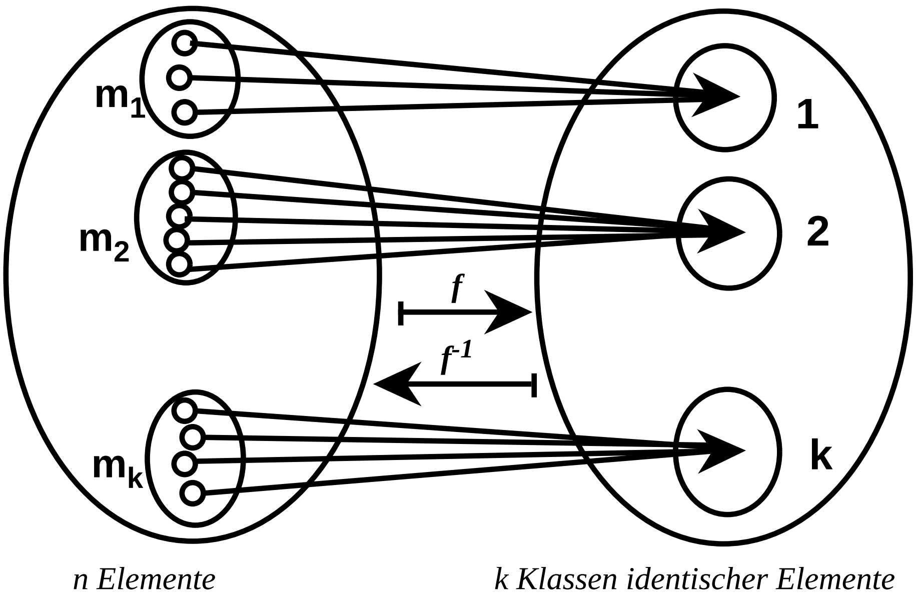
$4.82719\,10^{14}$.

Généralisation du problème:

Nous partons encore de 20 lettres dont 7 sont les mêmes qui sont proupées dans une *classe* 1. En plus on a une lettre spéciale, pour laquelle on trouve deux autres identiques. Ces 3 soient réunies dans une *classe* 2. Nous trouvons encore 4 identiques qui sont réunies dans une *classe* 3. Soit maintenant Y_i le nombre des possibilités d'échange des lettres entre elles dans la *classe* i et X comme en haut le nombre des possibilités d'échange des lettres inégales et restantes. Alors il vaut par la même raison comme en haut:

$$20! = X \cdot Y_1! \cdot Y_2! \cdot Y_3! = X \cdot 7! \cdot 3! \cdot 4!, \qquad \text{donc}$$
$$X = \frac{20!}{7! \cdot 3! \cdot 4!}$$

Abbildung 1.2: Anzahl möglicher Umkehrabbildungen f^{-1}? • *Possibilités d'applications inverses* f^{-1}?



Esquisse: n éléments $\longmapsto$ n classes d'éléments identiques

Ça nous mène au problème général:

Donné:

Totalement n lettres, n enceloppes dont on a k classes de lettres identiques entre elles:
$Classe_1$: m_1 lettres identiques du type 1,
$Classe_2$: m_1 lettres identiques du type 2,
$\vdots$ $\vdots$
$Classe_k$: m_k lettres identiques du type k

Trouver:

Nombre de possibilités $P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k)$, de mettre les lettres dans les enveloppes.

Symboles 2 *: $P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k)$*

$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ = nombre de possibilités, de placer les n objets qu'on vient de décrire (ici des lettres parmi lesquelles on trouve k classes avec n_j objets identiques entre eux) sur n places (ici des enveloppes).

Définition 1.4 (Permut. avec répétitions:)
Soit donné un ensemble $\mathcal{M}_n$ avec n éléments. Dans cet ensemble on trouve k classes avec n_i éléments identiques (par classe i). A une énumération des éléments, tous les éléments d'une classe reçoivent le même numéro. Nous appelons une permutation des éléments de $\mathcal{M}_n$ **une permutation avec répétitions***.*

Maintenant nous savons:

Théorème 1.3 (Permut. avec répétition:) *:*
Nombre de permutations avec répétitionss:

$$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot m_k!}$$

Le problème abstrait

Donné:

Un ensemble avec n éléments, par exemple $\mathbf{R}_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ ainsi qu'un ensemble avec k éléments, z.B. $\mathbf{R}_k = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$. Puis on considère les fonctions possibles $f: \mathbf{R}_n \longmapsto \mathbf{R}_k$ (un exemple est représenté dans image 1.2).

Trouver:

Nombre d'applications inverses possibles $f^{-1}: \mathbf{R}_k \longmapsto \mathbf{R}_n$. Pour cela le premier élément (1 à droite dans l'image) est appliqué m_1 fois, le deuxième élément (2 à droite dans l'image) m_1 fois etc..

Les k classes d'éléments identiques (lettres identiques dans le paradigme) sont ainsi appliquées sur les n éléments différents (enveloppes dans le paradigme). Le nombre qu'on cherche est donc $P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k)$.

Exemple:
De combien de manières différentes est-ce qu'on peut former dans une classe de 26 étudiants 5 groupes de travail avec 4, 5, 5, 6 et 6 étudiants? La solution est:

$$P_{26}(4, 5, 5, 6, 6) = \frac{26!}{4! \cdot 5!^2 \cdot 6!^2} = 2251024905729600 \approx 2.25102\,10^{15}$$

1.3 Problèmes de sélection avec et sans rangement

1.3.1 Les questions

Combinaisons

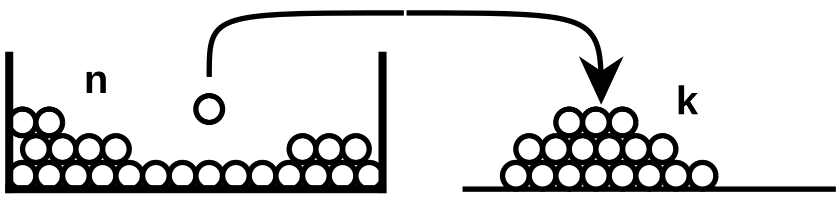
Problème 1.4 (Problème de sélection:)
Donné:

Une caisse qui contient n objets bien distincts, par exemple des boules de différents couleurs. Dans la caisse, on choisit k objets de manière quelconque et on les accumule à côté. (Voir fig. 1.3.)

Question:

De combien de manières différentes peut–on former le tas à côté?

Abbildung 1.3: Auswahlproblem, Kombinationen • *Problème de sélection, combinaisons*



La disposition des objets ne joue bien entendu aucun rôle à la disposition des objets resp. des boules. Il est possible de poser ce problème tout de suite abstraitement sans beaucoup de dépense de travail de cerveau. Les boules dans la caisse forment un ensemble $\mathcal{M}_n$, par exemple $\mathcal{M}_n = \mathbf{N}_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. On choisit un sous-ensemble $\mathcal{M}_k \subseteq \mathcal{M}_n$, z.B. $\mathbf{N}_k = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$, $k \leq n$. Ce sous-ensemble forme le tas d'à côté.

Définition 1.5
Combinaison sans répétition

Un tel choix de k éléments dans $\mathcal{M}_n$ s'appelle **combinaison d'ordre k sans répétition** *pour n éléments, brièvement: Combinaison d'ordre k.*

Symboles 3 (Nombre de combinaisons:)

$C(k, n) =$ *nombre de combinaisons d'ordre k pour n éléments.*

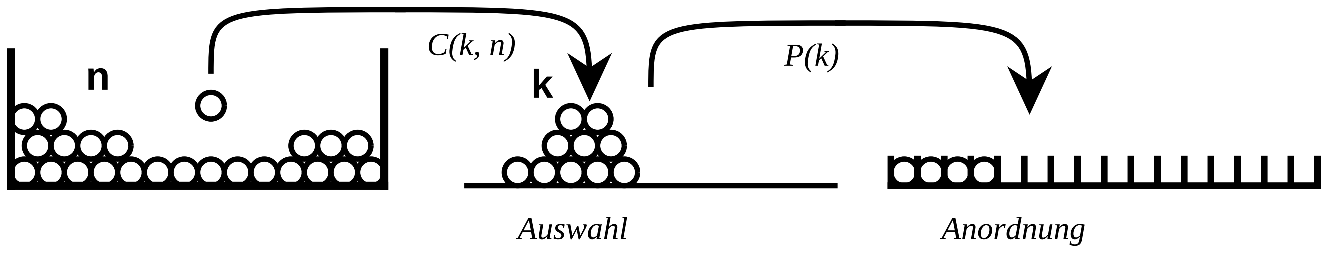
Problème abstrait (combinaisons sans répétition):

Donné: Un ensemble $\mathcal{M}_n$ à n éléments.

Question: $C(k, n) =$? C.-à.-d. combien de sous-ensembles peut–on former avec exactement k éléments?

Arrangements

Abbildung 1.4: Relationsmenge, Abbildung • *Ensemble de relations et d'applications (choix, disposition)*



Dans la fig. 1.4 le choix (combinaison) est encore arrangé. On peut distinguer deux combinaisons de ce genre avec les mêmes éléments, mais de dispositions différentes. On définit par conséquent:

Définition 1.6
Arrangement sans répétition:

Si les éléments choisis dans $\mathcal{M}_n$ sont encore arrangés, on parle d'un **arrangement d'ordre k sans répétition** *pour n éléments. Brièvement: Arrangement d'ordre k.*

Symboles 4 (Nombre d'arrangements:)

$V(k, n) =$ *nombre d'arrangements d'ordre k pour n éléments.*

Exemple

Soient donnés les éléments a, b et c. Trouver toutes les combinaisons et toutes les arrangements d'ordre 2.

Solution:

Combinaisons:	$a\ b$	$a\ c$	$b\ c$:	3 pièces
Arrangements:	$a\ b$	$a\ c$	$b\ c$	
	$b\ a$	$c\ a$	$c\ b$:	6 pièces

Répétitions

Si on remplace dans l'ensemble de réserve $\mathcal{M}_n$ chacun des éléments e_i par un ensemble E_i avec les mêmes éléments, qui ne se distinguent que par un *indice interne* (par exemple $E_i = \{e_{i1}, e_{i2}, e_{i3}, \ldots\}$), ainsi il devient possible de choisir un élément e_i plusieurs fois. L'indice interne peut être omis après le choix[5]. Nous obtenons le même effet si nous mettons en réserve une copie identique de cet élément après le choix de l'élément. Nous nous imaginons donc qu'un élément e_i se duplique lors de son choix, et, que malgré qu'on ait choisi et enlevé l'élément, l'ensemble $\mathcal{M}_n$ reste inchangé. Un élément est donc fourni tout de suite dans $\mathcal{M}_n$ lors qu'on l'a choisi et enlevé de $\mathcal{M}_n$. On peut comparer cela à la situation dans un supermarché où les marchandises sont remplacées sur les étagères au fur et à mesure qu'elles sont vendues. S'il est possible aussi souvent qu'on veut de remplir, copier ou remettre les éléments, nous disons que les éléments dans $\mathcal{M}_n$ sont *répétitivement sélectionnables*. Nous définissons maintenant:

Définition 1.7
Combinaison et arrangement avec répétition:

Si à la formation d'une combinaison ou d'un arrangement les éléments de $\mathcal{M}_n$ sont sélectionnables de façon répétitive, nous parlons d'une combinaison ou d'un arrangement **avec répétition**.

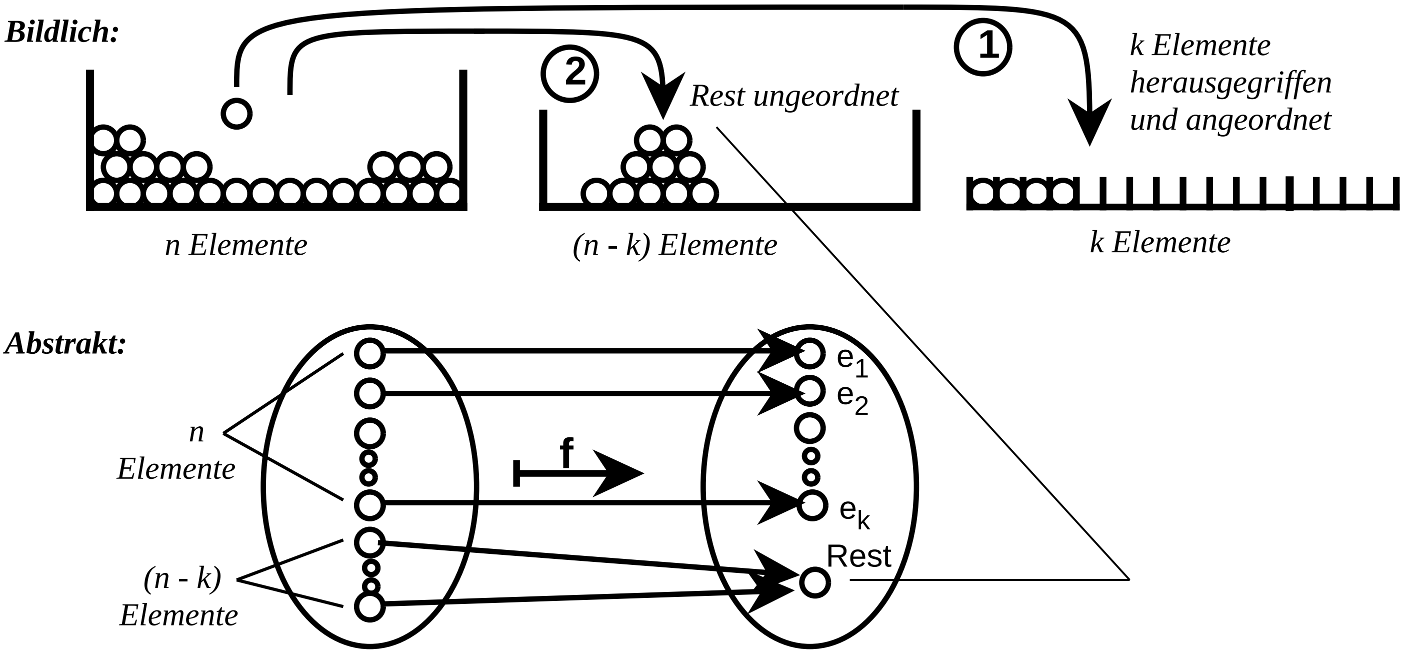
Nous commençons maintenant avec l'arrangement sans répétition:

1.3.2 Arrangement sans répétition

Dans n éléments on choisit k éléments qui sont disposés immédiatement, sans répétition d'éléments, à

[5] L'indice interne n'est utilisé que pour former l'ensemble d'éléments identiques E_i, qui sont nécessaires pour rendre possible un choix répété d'éléments identiques.

Abbildung 1.5: Variationen ohne Wiederholung • *Arrangement sans répétition (image — abstrait, éléments, reste)*



l'instar de fig. 1.5. Là par exemple l'élément e_1 est mis sur la place 1, e_2 sur la place 2 etc.. Ensuite on s'imagine que tous les $(n-k)$ éléments non–choisis, donc le reste, sont mis dans une caisse à part resp. sur un tas. Cette opération ne change pas le nombre de possibilités de choix, le nombre de possibilités de disposition des premiers k éléments , car cette formation de tas est une action unique et indépendante qui ne contribue rien à l'opération. Dans cette caisse de restes à part, la disposition des éléments ne joue pas de rôle. On ne distingue donc pas ces éléments, c'est égal comme ils sont disposés. Par conséquent ils forment une classe d'éléments non–distingués et donc une classe d'éléments égaux qui sont disposés d'une seule manière (parce qu'ils comptent comme non–distinctifs). Par conséquent on a le problème suivant: On a n éléments, k sont distinctifs et $n-k$ sont égaux. Ces éléments sont à arranger. Ou bien abstraitement: On cherche le nombre des fonctions inverses possibles f^{-1} (voir fig. 1.5). Ce problème a été résolu déjà à l'occasion des permutations avec répétition: Le nombre est $P_n(n-k) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Théorème 1.4 (Arrangements sans répédition:)

$$V(k,n) = P_n(n-k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Exemple:

De combien de manières est-ce qu'on peut distribuer 20 jobs de vacances différents et disponibles à 26 étudiants différents qui veulent avoir tous un semblable travail, si ces jobs ne sont pas divisibles dans des job partiels?
Il s'agit du choix de 20 sur 26 avec un classement des étudiants non distinctifs, c.-à.-d. un arrangement. La solution est par conséquent:

$$V(20,26) = \frac{26!}{(26-20)!} = \frac{26!}{(6)!} = 672152435211009392640000000 \approx 6.72152\,10^{25}$$

Un cas spécial: $V(n,n) = P_n(n-n) = P_n(0) = P(n)$
$\rightsquigarrow$ Permutation sans répétition!

1.3.3 Combinaison sans répétition

La formule

A la page **??** nous avons vu qu'à une sélection d'un sous-ensemble de mêmes éléments le nombre des possibilités se comporte de façon multiplikative. On y a trouvé: $20! = X \cdot Y = X \cdot 7!$. Nous trouvons la même situation au passage des combinaisons à l'arrangement: Un arrangement (k éléments de n éléments) peut être obtenu d'une combinaison par la disposition des k éléments choisis. On y a $P(k) = k!$ possibilités. Il vaut donc:

Lemme 1.1 (Arrangements et combinaison:)

$$V(k,n) = C(k,n) \cdot P(k),\ also\ \frac{n!}{(n-k)!} = C(k,n) \cdot k!$$

Il en suit:

Théorème 1.5 (Combinaison sans répétition:)

$$C(k,n) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}$$

L'exemple du jeu de loto "6 de 45":

De combien de manières différentes est-ce qu'on peut choisir 6 nombres différents dans les 45 premiers nombres naturels? Ici, il s'agit d'une question typique concernant le nombre des combinaisons $C(6,45)$. Celle-ci est égale à:

$$\frac{45!}{6! \cdot (45-6)!} = \frac{45!}{6! \cdot (39)!} = 8145060 \approx 8.14506\, 10^6$$

Coéfficients binomiaux

Si on multiplie le binôme $(a+b)^n = \overbrace{(a+b) \cdot (a+b) \cdot \ldots \cdot (a+b)}_{n \text{ facteurs}}$ d'après les règles de la loi distributive, on n'obtient que des termes additionnels de la forme $m_k \cdot a^k \cdot b^{n-k}$ avec $0 \leq k \leq n$ et $m, k, n \in \mathbf{N}_0$. A la multiplication on prend selon le rang de chaque facteur $(a+b)$ un des termes additionnels a ou b et on les multiplie en obtenant un produit $a^k \cdot b^{n-k}$. Si on prend dans chaque terme additionel a et jamais b, on obtient $a^n \cdot b^0$. Si on prend a dans j termes additionnels et b dans $n-j$ termes additionnels, on obtient $a^j \cdot b^{(n-j)}$. A cette occasion il existe plusieurs possibilités de choisir le a ou le b. Par exemple on peut choisir a dans le premier facteur, b dans le deuxième facteur, de nouveau a dans le troisième facteur etc., mais on peut aussi choisir d'abord b, après a et alors encore une fois a etc... m_k est le nombre des possibilités de choisir a dans exactement k facteurs $(a+b)$ et b dans exactement $n-k$ facteurs. Il vaut donc:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} m_k \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

Quelle est maintenant la grandeur de m_k?– Ici, il s'agit d'un problème de choix: De combien de manières différentes est-ce qu'on peut choisir entre les n facteurs $(a+b)$ k facteurs et y prendre la partie a (et par conséquent prendre dans les $n-k$ facteurs restants chaque fois la partie b)? Cette question est équivalente à la question plus simple: De combien de manières différentes est-ce qu'on peut maintenant choisir entre n éléments (facteurs $(a+b)$) k éléments? La réponse est maintenant très simple: $m_k = C(k,n)$. m_k porte un nom:

Définition 1.8 (Coéfficient binomial:) *:*
m_k s'appelle **Coéfficient binomial**.

Symboles 5 (Coéfficient binomial:) $m_k := \binom{n}{k}$

Nous savons maintenant:

Théorème 1.6 (Théorème binomial:)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} m_k \cdot a^k \cdot b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

On peut lire les coéfficients binomiaux dans le triangle de Pascal:
Triangle de Pascal:

$n = 0 \ldots$					1				
$n = 1 \ldots$				1		1			
$n = 2 \ldots$			1		2		1		
$n = 3 \ldots$		1		3		3		1	
$n = 4 \ldots$	1		4		6		4		1
etc. ...					...				

La position verticale est n, la position horizontale k. Le numérotage commence chaque fois par 0. Ainsi on peut lire par exemple: c$\binom{4}{1} = 4$ und $\binom{4}{2} = 6$.

Pour les coéfficients binomiaux, on peut prouver à l'aide de $\binom{n}{k} = C(k,n) = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$ ainsi qu'avec le principe de l'induction complète[6] facilement les lois suivantes:

Théorème 1.7
Quelques qualités des coéfficienta binomiaux:

1)	$\binom{n}{k}$	$=$	$\binom{n}{n-k}$	*2)*	$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$	$=$	$\binom{n}{k}$
3)	2^n	$=$	$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$	*4)*	$\sum_{k=0}^{r} \binom{p}{k} \cdot \binom{q}{r-k}$	$=$	$\binom{p+q}{r}$
5)	$\sum_{s=0}^{n-1} \binom{k+s}{k}$	$=$	$\binom{n+k}{k+1}$	*6)*	$\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}^2$	$=$	$\binom{2p}{p}$

Par exemple la formule $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ est obtenue par $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ à l'aide du théorème binomial.

1.3.4 Arrangement avec répétition

La formule

L'arrangement avec répétition a été expliqué à la page 11. La formule pour le nombre d'arrangements avec répétition par contre doit encore être élaborée. Pour cela ous utilisons le symbole suivant:

Symboles 6 *:* $\bar{V}(k,n)$

$\bar{V}(k,n)$ = nombre d'arrangements avec répétition pour un choix de k éléments dans une réserve avec n éléments différents, qui tous peuvent être répétés.

[6] Voir théorie des nombres

Déduction de la formule:

Nous considérons les k places numérotés sur lesquelles les éléments à choisir sont ordonnés (voir fig. 1.5 en haut à gauche dans l'image). Comme nous pouvons choisir chacun des n éléments dans la réserve, on a n possibilités d'occuper la 1ère place. Pour la 2ème place on a de nouveau n éléments dans la réserve à disposition pour le choix; à cause de la possibilité de répétition chaque élément existe toujours et peut être choisi: Pour chacune des n possibilités pour la 1ère place on a n possibilités pour la 2ème place, totalement donc $n \cdot n = n^2$ possibilités. Également pour la 3ème place: Pour chacun des n^2 possibilités pour les places 1 et 2 on a n possibilités pour la 3ème place, totalement donc $n^2 \cdot n = n^3$ possibilités. On continue ainsi: Pour l'occupation des premières 4 places on a n^4 possibilités , pour l'occupation des premières 5 places n^5 possibilités et finalement pour l'occupation des premières k places on a n^k possibilités. Par conséquent nous avons le théorème:

Théorème 1.8 (Arrangement avec répétitions:)

$$\bar{V}(k, n) = n^k$$

Exemple:

De combien de possibilités différentes est-ce que 26 étudiants (qu'on peut distinguer) peuvent s'inscrire dans 12 cours différents, si chaque cours offre 26 places, c.à.d. s'il n'y a pas de limites aux places?

Solution:

Le premier étudiant a 12 possibilités de s'inscrire dans un cours. Pour chacune de ces possibilités du premier étudiant le deuxième a aussi 12 possibilités de s'inscrire dans un cours. Les deux ensemble ont 12^2 possibilités. Pour le troisième, quatrième etc. étudiant ça fonctionne aussi d'après le même schéma: Chacun a les 12 possibilités, et les possibilités se multiplient. Il s'agit d'un arrangement avec répétitions. Totalement il y a $\bar{V}(k, n) = \bar{V}(26, 12) = 12^{26} = 11447545997288281555215581184 \approx 1.14475\, 10^{28}$ possibilités.

A retenir: Par cet exemple, on voit que k peut être plus grand que n: $k > n$.

Application: Puissance de l'ensemble de parties

L'ensemble de parties est comme chacun sait l'ensemble de tous les sous-ensembles.

Problème 1.5
La puissance de l'ensemble de parties
Donné:

Un ensemble $\mathcal{M}$ à n éléments.

Question:

Combien d'ensembles partiels $\mathcal{M}$ a–t–il?

Solution:

$\binom{n}{k} = C(k, n)$ est comme chacun sait le sous-ensembles avec k éléments, car ici, il s'agit d'un problème de choix typique. Maintenant on peut choisir un ou plusieurs sous-ensembles avec 0 (quantité vide), 1, 2, ..., n éléments. Totalement on a donc:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^k \cdot 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$$

Théorème 1.9 *:*
Puissance de l'ensemble de parties

L'ensemble de parties d'un ensemble qui contient n éléments possède 2^n éléments.

Donc un ensemble avec n éléments contient exactement 2^n sous-ensembles.

1.3.5 Combinaison avec répétition

Ici il faut choisir k éléments dans un ensemble avec n éléments. Chaque élément choisi se duplique dans l'ensemble de façon que l'ensemble reste toujours le même malgré le choix. Quel est le nombre des options quant au choix?

Pour le calcul de ce nombre, il n'est pas essentiel si l'ensemble $\mathcal{M}_n$ consiste en boules, en billets de lotterie ou en nombres, c.-à.-d. quelle est la nature des éléments. Nous pouvons supposer par conséquent qu'il s'agit de nombres naturels de 1 jusqu'à n: $\mathcal{M}_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Si nous choisissons maintenant k éléments (c.-à.-d. des nombres), nous voulons les ranger l'un à côté de l'autre au lieu de les "mettre sur un tas". Nous parlons ici du rangement standard (configuration). Nous presentons donc un tel choix $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ toujours dans une disposition $e_1 \le e_2 \le \ldots \le e_k$. Par cela le nombre des options ne change pas.

Comment résoudre le problème des répétitions? L'idée de choisir parmi $k \cdot n$ éléments ne mène à aucun résultat parce que les éléments d'un ensemble de choix peuvent être obtenus de façon différente ce qui augmente faussement le nombre des possibilités de chois. Donc ça ne va pas de cette manière. Pour venir à bout de la chose on doit aller chercher plus loin:

A cette intention nous introduisons $k-1$ nouveaux éléments $J_1, J_2, \ldots, J_{k-1}$, les incluons dans l'ensemble $\mathcal{M}_n$. Ainsi nous recevons un nouveau ensemble $\mathcal{M}_n^{k-1} = \{1, 2, 3, \ldots, n, J_1, J_2, \ldots, J_{k-1}\}$ à $n + k - 1$ éléments. La disposition standard nouvellement valable correspond à l'énumération des éléments donnée ici: Les J_i sont ajoutés derrière d'après les numéros. Pour les éléments J_i l'interprétation suivante est valable: J_i est une prescription ou fonction qui opère sur les dispositions standard choisies, dans lesquelles on les trouve elles–mêmes. La prescription donnée par J_i dit: Remplacer le symbole J_i dans une disposition standard choisie par l'élément e_i du même choix après avoir remplacé tous les J_p par $p < i$. Si on effectue tous ces remplacements, on obtient d'un choix primaire la disposition finale standard. Comme il faut choisir k éléments et comme il n'existent que $k - 1$ éléments J_i, dans un choix standard on trouve toujours au moins un élément $e_j \in \mathcal{M}_n$, dans notre cas un des nombres naturels $1, 2, 3, \ldots, n$. J_i effectue par conséquent toujours un remplacement par un élément qui es situé plus à l'avant dans la disposition standard, donc une duplicata. Comme chaque élément peut être choisi une fois ainsi et après peut être dupliqué par un J_i au maximum $k - 1$ fois, il existe la possibilité que chaque élément de $\mathcal{M}_n$ peut se trouver donc k fois dans la disposition standard finale. De cette façon peuvent être obtenues toutes les combinaisons avec répétition.

Exemple:

Soit donné $\mathcal{M}_7 = \{1, 2, 3, \ldots, 7\}$. Dans cet ensemble il faut choisir 5 éléments avec répétitions. Il vaut donc: $\mathcal{M}_7^{5-1} = \mathcal{M}_7^4 = \{1, 2, 3, \ldots, 7, J_1, J_2, J_3, J_4\}$.

Si on choisit par exemple $(1, 5, 7, J_1, J_4)$ (dans la disposition standard), il faut remplacer comme suit: D'abord $J_1 \mapsto 1$ (l'indice 1 est plus petit que l'indice 4). Ça donne $(1, 5, 7, 1, J_4)$ dans la disposition non–standard et $(1, 1, 5, 7, J_4)$ dans la nouvelle disposition standard. Alors on remplace $J_4 \mapsto 7$ ce qui mène à la disposition standard $(1, 1, 5, 7, 7)$.

Semblablement le choix $(4, J_1, J_2, J_3, J_4)$ mène à la disposition standard $(4, 4, 4, 4, 4)$ après tous les remplacements.

Au choix de 6 éléments dans $\mathcal{M}_8$ le choix primaire mène à la disposition standard finale $(2, 3, 7, 8, J_2, J_4)$.

Ces exemples montrent qu'un choix primaire correspond clairement à une disposition standard finale. Le nombre des dispositions primaires et sélectionnables est égal au nombre des dispositions standard finales, dans lesquelles tous les éléments figurent répétés jusqu' à k fois. Pour trouver $\bar{C}(k, n)$, on doit donc trouver le nombre des dispositions standard primaires sélectionnables. Là, k éléments sont choisis entre $n+k-1$ éléments $1, 2, 3, \ldots, n, J_1, J_2, \ldots, J_{k-1}$. Par conséquent on trouve $\bar{C}(k, n) = C(k, n+k-1)$. On a donc:

Théorème 1.10
Combinaisons avec répétitions:

$$\bar{C}(k, n) = C(k, n+k-1) = \binom{n+k-1}{k}$$

Exemple

Un chef de rayon dirige 19 ingénieurs desquels chacun est capable d'avoir la responsabilité pour un projet. 8 nouveaux projets sont à faire (en suspens), qui doivent être traités vraisemblablement l'un après l'autre. Combien de possibilités s'offrent au chef de rayon de nommer des responsables pour les projets, si on peut tirer en considération dans le cas extrême, que le même ingénieur assume (dirige) tous les 8 projets?

Ici, il s'agit d'une combinaison avec répétitions. Dans un ensemble de 19 ingénieurs, 8 responsables sont choisis de façon que chacun peut être nommé plusieurs fois. Il est donc:

$$\bar{C}(8, 19) = \binom{19+8-1}{8} = \binom{26}{8} = \frac{26!}{8! \cdot (26-8)!} = \frac{26!}{8! \cdot 18!} = 1562275 \approx 1.56228\, 10^6.$$

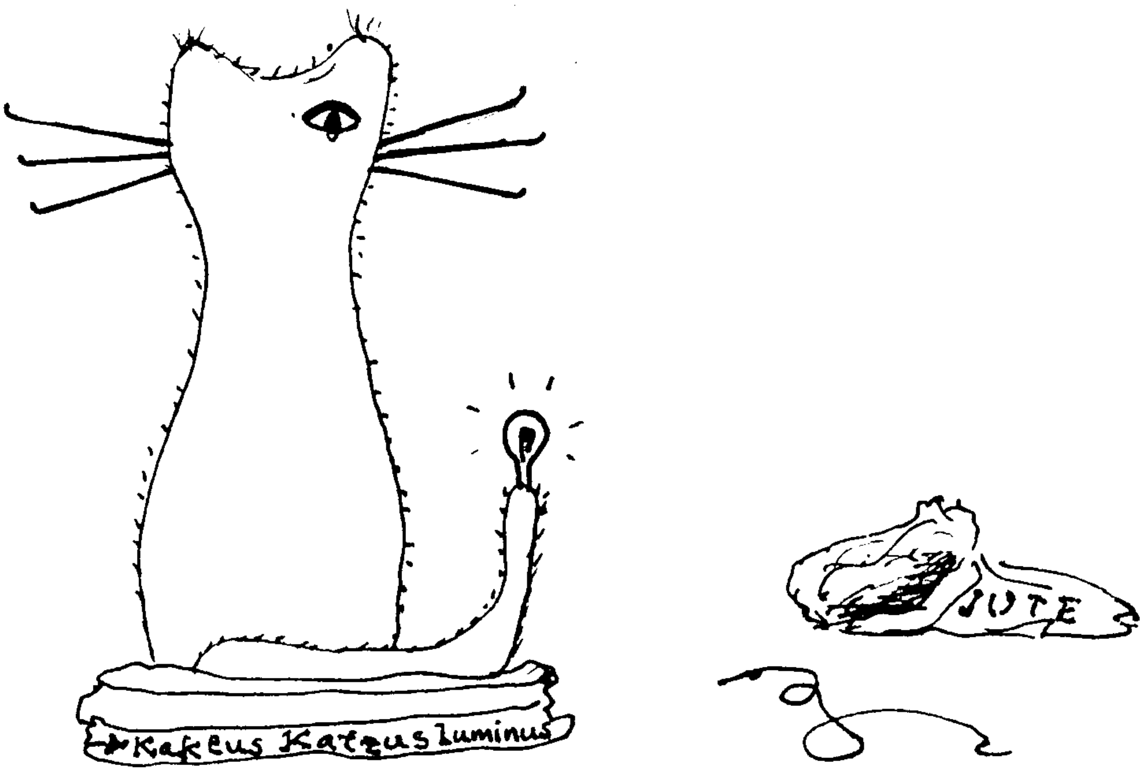
1.4 Exercices

On trouve des exercices dans *DIYMU*, (Bibl.: wirz1) ainsi que dans la littérature scolaire classique pour le niveau gymnasial ou spécialement aussi dans les manuels du calcul des probabilités et statistiques.

Index

(Provisoirement seulement la version allemande disponible)

Abbildung 1.6: … Kaktus Katzus • *Sans possibilité de traduction …*



Literaturverzeichnis

[1] Fachlexikon *a b c*. Verlag Harri Deutsch Bibliographisches Institut Mannheim, Wien, Zürich. Dudenverlag (Bibl.: abc)

[2] Brenner, Lesky. Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. AULA-Verlag Wiesbaden (Bibl.: brennerlesky)

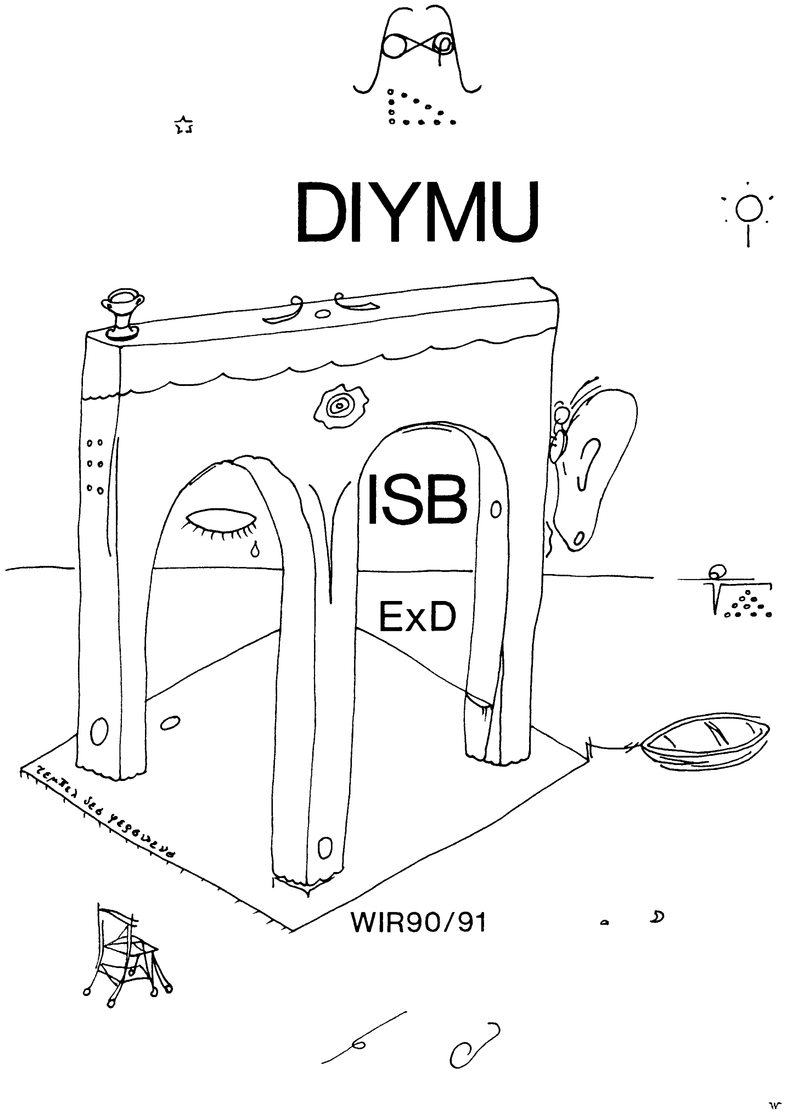
[3] Claus, Schwill. Schüler–Duden, Die Informatik. Bibliographisches Institut Mannheim, Wien, Zürich. Dudenverlag (Bibl.: clausschwill)

[4] Iyanaga, Kawada. Encyclopedic Dictionary of Mathematics. MIT Press, Cambridge Mass., London GB (Bibl.: iyanagakawada)

[5] Meschkowski. Mathematisches Begriffswörterbuch. BI Hochschultaschenbücher. Bibliographisches Institut Mannheim (Bibl.: meschkowski)

[6] Vom Autor. Mathematik für Ingenieure *Teile 1 ff* (Bibl.: wirz)

[7] Vom Autor. *DIYMU* (Do it yourself Mathematik Übungsbuch). Ingenieurschule Biel 1991 (Bibl.: wirz1)


DIYMU
ISB
ExD
WIR90/91