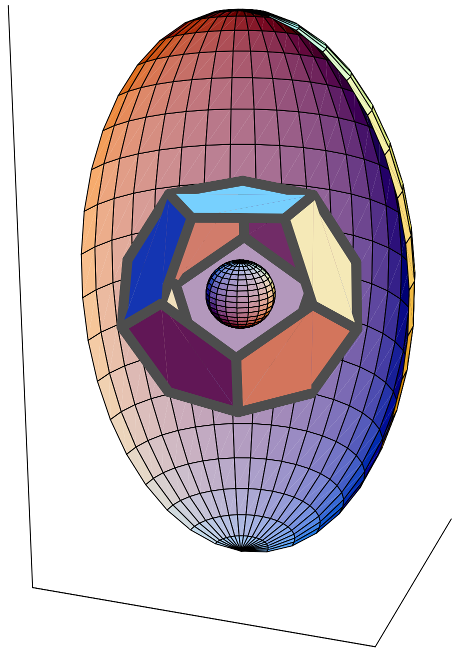
Script ◇ Math ◇ Ing
◇ Anhang Fehlerrechnung ◇
kurz & bündig ◇



Scripta bilingua

von

Rolf Wirz

BFH Departemente AHB und TI

V.1.1.1 / 14. März 2007 **Deutsche Version!**

Produziert mit LaTeX auf NeXT-Computer/ PCTeX WIN98.

Der Mensch hat dreierlei Wege, um zu lernen:
Erstens durch Nachdenken, das ist der edelste;
zweitens durch Nachahmen, das ist der leichteste;
drittens durch Erfahrung, das ist der bitterste.

(Konfuzius)

Adresse des Autors:

Rolf W. Wirz-Depierre
Prof. für Math.
Berner Fachhochschule/ Departemente AHB und TI
Pestalozzistrasse 20
3400 Burgdorf/BE
Tel. (..41) (0)34 426 41 41, direkt (0)34 426 42 30

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Anhang Fehlerrechnung

1.1 Fehlerrechnung

1.1.1 Fehlerfortpflanzungsgesetz

Auszug aus dem Skript Statistik mit Bezug auf das Skript Analysis (dort wird das folgende Fehlerfortpflanzungsgesetz hergeleitet):

Situation: Gemessen werden die Werte $x_{1_0}, x_{2_0}, \ldots, x_{n_0}$ der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Bei kontinuierlichen Messwerten gibt es immer Ableseungenauigkeiten, die aber abschätzbar sind. Diese zugehörigen „Messfehler" betragen $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$. Die „exakten Werte" $x_k^*,\ k = 1, \ldots, n$ liegen daher in den Intervallen $[x_{k_0} - \Delta x_k, x_{k_0} + \Delta x_k]$. Zudem sei eine Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gegeben, mit deren Hilfe eine weitere Grösse berechnet werden muss.

Problem: In welchem Intervall liegt der „wahre" Wert $f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$?

Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{x_0} = \begin{pmatrix} x_{1_0} \\ \vdots \\ x_{n_0} \end{pmatrix}$, $f(\vec{x}) := f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $D_k \geq |\Delta x_k|$ (D_k ist eine bezifferbare Schranke.)

Aus der Theorie des **totalen Differentials** weiss man:

$$\Delta f = f(\vec{x_0} + \Delta\vec{x}) - f(\vec{x_0}) = \Delta x_1\, f'_{x_1}(\vec{x_0}) + \ldots + \Delta x_n\, f'_{x_n}(\vec{x_0}) + O[2]$$

(O: Glieder höherer Ordnung)

$$\rightsquigarrow\ \Delta f \approx \Delta x_1\, f'_{x_1}(\vec{x_0}) + \ldots + \Delta x_n\, f'_{x_n}(\vec{x_0})$$

$$\rightsquigarrow\ |\Delta f| \leq |\Delta x_1|\, |f'_{x_1}(\vec{x_0})| + \ldots + |\Delta x_n|\, |f'_{x_n}(\vec{x_0})| \leq D_1\, |f'_{x_1}(\vec{x_0})| + \ldots + D_n\, |f'_{x_n}(\vec{x_0})| := \Delta f_{max}$$

Satz:

Vor.:

Messsituation wie oben beschrieben ,
$f \in \mathcal{D}^{(1)}$

Beh.:

$$|\Delta f| \leq D_1\, |f'_{x_1}(\vec{x_0})| + \ldots + D_n\, |f'_{x_n}(\vec{x_0})| := \Delta f_{max}$$

Konsequenz:

$f(\vec{x}^*) = f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \in [f(\vec{x}_0) - \Delta f_{max}, f(\vec{x}_0) - \Delta f_{max}]$

Definition: $|\Delta f|$ heisst **absoluter Fehler** ,
$|\dfrac{\Delta f}{f(\vec{x}_0)}|$ heisst **relativer Fehler** .

1. Beispiel: 1: $f(x,y) = x \pm y \;\Rightarrow\; \Delta f_{max} = D_x\,|1| + D_y\,|\pm 1| = D_x + D_y$

2. Beispiel: 2: $f(x,y) = x \cdot y \;\Rightarrow\; \Delta f_{max} = D_x\,|y_0| + D_y\,|x_0|$

3. Beispiel: 3: $f(x,y) = \dfrac{x}{y} \;\Rightarrow\; \Delta f_{max} = D_x\,|\dfrac{1}{y_0}| + D_y\,|\dfrac{x_0}{y_0^2}|$

4. Beispiel: 4: $f(x,y) = x^y \;\Rightarrow\; \Delta f_{max} = D_x\,|x_0^{y_0-1}| + D_y\,|x_0^{y_0}\,ln(x_0)|$

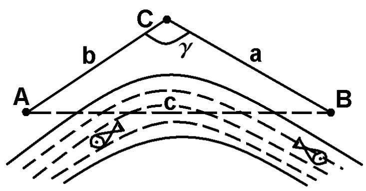
5. Beispiel: 5:

$f(x) = x^2 - 2x + 4 - \sin(x) + ln(x) \;\Rightarrow\; \Delta f_{max} = D_x\,|2\,x_0 - 2 - \cos(x_0) + \dfrac{1}{x}|$

Bemerkung: Diese Beispiele zeigen, dass die oft geäusserte Meinung, es genüge mit den extremen Werten zu rechnen, wohl äusserst falsch sein muss.

6. Beispiel: 6:

Messwerte:
$a = 364.76 \pm 0.05m$
$b = 402.35 \pm 0.05m$
$\gamma \,\hat{=}\, 68^o 14' \pm 4'$
$\leadsto\; \gamma \approx 1.1909 \pm 0.002$
$c = ?$



$\leadsto\; c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos(\gamma)} \approx 431.38$

$\Rightarrow\; \Delta c_{max} = D_a \cdot |\dfrac{\partial c}{\partial a}| + D_b \cdot |\dfrac{\partial c}{\partial b}| + D_\gamma \cdot |\dfrac{\partial c}{\partial \gamma}| =$

$= 0.05 \cdot |\dfrac{2\,a - 2\,b\,\cos(\gamma)}{2\,\sqrt{a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos(\gamma)}}| + 0.05 \cdot |\dfrac{2\,b - 2\,a\,\cos(\gamma)}{2\,\sqrt{a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos(\gamma)}}| + 0.002 \cdot |\dfrac{2\,a\,b\,\sin(\gamma)}{2\,\sqrt{a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos(\gamma)}}|$

$\approx 0.02498 + 0.03096 + \underbrace{0.36762}_{!!!} \approx 0.424 \quad \Rightarrow\; c \pm \Delta c_{max} = 431.38 \pm 0.424$

Bemerkung: Hier stellt man fest, dass der Hauptanteil des Fehlers von der Ungenauigkeit des Winkels γ stammt.

Problem: Berechne die Fehler der Winkel α und β im obigen Dreieck.

1.1.2 Fehler von statistischen Kenngrössen

Fehler des Mittelwerts

Gegeben seien die Daten

$$\{a_1 \pm \Delta a_1, a_2 \pm \Delta a_2, \ldots, a_n \pm \Delta a_n\}$$

Der Mittelwert $\bar{a}$ berechnet sich dann zu $\bar{a} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$.

Dann wird der Fehler $\Delta\bar{a}$ des Mittelwerts

$$\Delta\bar{a}_{max} = |\Delta a_1|\,|(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k)'_{a_1}| + \ldots + |\Delta a_n|\,|(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_n)'_{a_n}| = |\Delta a_1|\,|\frac{1}{n}\cdot 1| + \ldots + |\Delta a_n|\,|\frac{1}{n}\cdot 1| = \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}|\Delta a_k|$$

Satz: Der maximale Fehler des Mittelwerts ist der Mittelwert der Beträge der Einzelfehler.

Fehler der Standardabweichung

Für die Standardabweichung gilt: $s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{k=1}^{n}(a_k-\bar{a})^2} = (\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{k=1}^{n}(a_k-\bar{a})^2)^{\frac{1}{2}}$

Nun wird der Fehler $\Delta\bar{s}$ der Standardabweichung $\Delta\bar{s}_{max} =$

$$|\Delta a_1|\,|((\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(a_k-\bar{a})^2)^{\frac{1}{2}})'_{a_1}| + \ldots + |\Delta a_n|\,|((\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(a_k-\bar{a})^2)^{\frac{1}{2}})'_{a_n}| +$$

$$|\Delta\bar{a}|\,|((\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(a_k-\bar{a})^2)^{\frac{1}{2}})'_{\bar{a}}|$$

$$((\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(a_k-\bar{a})^2)^{\frac{1}{2}})'_{a_k} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-\bar{a})^2}}\cdot\frac{2}{n-1}\cdot(a_k-\bar{a}) = \frac{1}{\sqrt{(n-1)\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-\bar{a})^2}}\cdot(a_k-\bar{a}),$$

$$((\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(a_k-\bar{a})^2)^{\frac{1}{2}})'_{\bar{a}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-\bar{a})^2}}\cdot\frac{-2}{n-1}\cdot\sum_{j=1}^{n}(a_j-\bar{a}) =$$

$$\frac{-1}{\sqrt{(n-1)\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-\bar{a})^2}}\cdot\sum_{j=1}^{n}(a_j-\bar{a})$$

$$\Rightarrow\ \Delta\bar{s}_{max} = \frac{1}{\sqrt{(n-1)\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-\bar{a})^2}}\cdot(\sum_{k=1}^{n}|a_k-\bar{a}|\cdot|\Delta a_k| + \underbrace{|\sum_{k=1}^{n}(a_k-\bar{a})|}_{=0}\cdot|\Delta\bar{a}\,|)\ \text{ wegen}$$

$$|\sum_{k=1}^{n}(a_k-\bar{a})| = |(\sum_{k=1}^{n}a_k) - (\sum_{k=1}^{n}\bar{a})| = n\cdot\bar{a} - n\cdot\bar{a} = 0.$$

Daraus folgt:

Satz:

$$\Delta\bar{s}_{max} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k - \bar{a}| \cdot |\Delta a_k|}{\sqrt{(n-1)\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-\bar{a})^2}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k - \bar{a}| \cdot |\Delta a_k|}{(n-1)\cdot s}$$

Hinweis: Die obigen Summen von Produkten lassen sich auch elegant mit Hilfe von Skalarprodukten schreiben. Die Ausführung sei dem Leser überlassen. Ebenso die Herleitung weiterer solcher Formeln.

Bsp.: Gegeben sind 8 Messwerte (Zugversuch Holz, Fichte)

$$a_k \in fichte = \{95.53, 81.93, 83.57, 54.82, 73.83, 58.48, 59.15, 83.29\}$$

mit je einem Fehler von $\Delta a_k = 0.01$.
Wie gross ist der Fehler des Mittelwerts $\bar{a}$ und der Standardabweichung s?

Für die Berechnung des Fehlers des Mittelwerts $\Delta\bar{a}_{max}$ ist der Mittelwert selbst nicht wesentlich. Da alle Δa_k gleich sind, erhält man:

$$\Delta\bar{a}_{max} = \frac{1}{n}\cdot(n\cdot\Delta a_k) = \frac{1}{8}\cdot(8\cdot\Delta a_k) = \Delta a_k = 0.01.$$

Weiter gilt hier bei $s = 14.8004$:

$$\Delta\bar{s}_{max} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{8} |a_k - \bar{a}| \cdot |\Delta a_k|}{(n-1)\cdot s} = \left[\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} |(fichte[[k]] - Mean[fichte])\Delta a_k|}{(n-1)StandardDeviation[fichte]}\right] = 0.0946403$$

Übungen

Nach mündlicher Anleitung.