Test in Analysis ◇ Examen en analyse ◇ Type I1 ◇ II / 3 02/03

Probl. 1 **(12 Punkte)**

$f(x) = e^x - \frac{1}{5}$, Startwert $x_1 = -2$, Intervall $\bar{I} = [a, b] = [-2, -1]$,
$\rightsquigarrow$ Nullstelle $f(x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = ?$

Führe mit den folgenden Methoden je 4 Iterationsschritte durch, d.h. berechne jedesmal x_0. Ordne danach die Resultate nach ihrer Genauigkeit und entscheide heuristisch, ob alle Verfahren hier funktionieren.

(a) Intervalleingrenzung (Gabelungsmethode)
(b) Newton–Algorithmus (Tangentenmethode)
(c) Sekantenverfahren (Regula falsi)
(d) Fixpunktmehtode

Probl. 2 **(30 Punkte)**

Berechne $y = f(x) = \sin(x)$ exakt für die 5 Werte $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow (x_1; y_1), (x_5; y_5)$.
Diese Werte dienen als Stützstellen für die folgenden Arbeiten:

(a)
   i. Berechne das Interpolationspolynom $p(x)$ mit den niedrigsten möglichen Grad durch die berechneten Stützstellen. Numerische Werte für die Koeffizienten genügen.
   ii. Berechne $\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx - \int_0^{\pi/2} p(x)\,dx$.
   iii. Berechne $\int_0^{\pi/2} (f(x) - p(x))^2\,dx$ numerisch.
   iv. Mache eine Skizze von f und p in einem Diagramm und *beurteile* das letzte Resultat.

(b)
   i. Approximiere f zwischen x_1 und x_5 durch zwei Parabelbögen $\rightsquigarrow p_1(x)$ und $p_2(x)$. Die beiden Parabelbögen machen zusammen die Funktion $h(x)$ aus.
   ii. Berechne $\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx - \int_0^{\pi/2} h(x)\,dx$ numerisch.
   iii. Mache eine Skizze von f und h in einem Diagramm und *beurteile* auf der Grundlage der Berechnungen und Skizzen, ob p oder h eine bessere Approximation ist.

(c)
   i. Approximiere f zwischen x_1 und x_5 durch ein Spline $s(x)$ mit Hilfe von Hermite-Polynomen. (Benutze dabei die bekannten Funktionswerte und Ableitungen von f in $x = 0$ und $x = \pi/2$.)
   ii. Berechne $\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx - \int_0^{\pi/2} s(x)\,dx$ numerisch.

iii. Mache eine Skizze von f und s in einem Diagramm und *beurteile* auf der Grundlage der Berechnungen und Skizzen, ob s eine bessere Approximation ist als p oder h.

Probl. 3 **(6 Punkte)**

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} (k-2)\cdot(k^2-1)$$

Berechne mit Hilfe der Methode der Summen und Differenzenfolgen eine geschlossene Formel für s_n. Berechne mit dieser Formel s_{100} exakt.

Probl. 4 **(12 Punkte)**

Beurteile die Konvergenz der nachfolgenden Reihen (Begründung ob konvergent? — absolut konvergent? — eventuell gleichmässig konvergent?):

(a)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-4)\cdot(k-5)}$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3\,k^2-2\,k+1}{2\,k^{3.5}-2\,k+2}$$

(c)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(x+k\,\pi)-\cos(x+k\,\pi)}{k}$$

• *Texte français voir feuille spéciale!*

Viel Glück! • *Bonne chance!*

WIR