

Übungen in Analysis ◇ Exercices en Analyse ◇ T. I1 ◇ II / 15

Probl. 1 Entwickle $\ln(x)$ in eine Potenzreihe:

- *Calculer la série de puissances de $\ln(x)$:*

$$p_1(x) = \frac{f(x_0)^{(0)}}{0!} (x-x_0)^0 + \frac{f(x_0)^{(1)}}{1!} (x-x_0)^1 + \frac{f(x_0)^{(2)}}{2!} (x-x_0)^2 + \dots + \frac{f(x_0)^{(n)}}{n!} (x-x_0)^n + O[x-x_0]^{n+1}$$

$$f(x) = \ln(x), \quad x_0 = 1$$

(a) $a_n(x) = ?$

(b) Quotientenkriterium: • *Critère de d'Alembert:*

$$q(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} < 1 \quad (\text{für die Konvergenz}) \quad \bullet \quad (\text{pour la convergence})$$

Grenzfall: $q(x) = 1$ • *Cas limite: $q(x) = 1$*

$\leadsto$ Berechne daraus $x_{\min}$ und $x_{\max}$. Calculer de cette formule $x_{\min}$ et $x_{\max}$.

$\leadsto$ Konvergenzradius r_∞ : • *Rayon de convergence r_∞ :*

$$I = (x_{\min}, x_{\max}), \quad r_\infty := \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}$$

Probl. 2 Entwickle e^{x^2} in eine Potenzreihe:

- *Calculer la série de puissances de e^{x^2} :*

$$p_1(x) = \frac{f(x_0)^{(0)}}{0!} (x-x_0)^0 + \frac{f(x_0)^{(1)}}{1!} (x-x_0)^1 + \frac{f(x_0)^{(2)}}{2!} (x-x_0)^2 + \dots + \frac{f(x_0)^{(n)}}{n!} (x-x_0)^n + O[x-x_0]^{n+1}$$

$$f(x) = e^{x^2}, \quad x_0 = 0$$

Idee: Verwende die Potenzreihenentwicklung von e^x . Ersetze darin x durch x^2 .

- *Idée: Utiliser la série de puissances de e^x . Y remplacer x par x^2 .*

(a) $a_n(x) = ?$

(b) Quotientenkriterium: • *Critère de d'Alembert:*

$$q(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} < 1 \quad (\text{für die Konvergenz}) \quad \bullet \quad (\text{pour la convergence})$$

Grenzfall: $q(x) = 1$ • *Cas limite: $q(x) = 1$*

$\leadsto$ Berechne daraus $x_{\min}$ und $x_{\max}$. Calculer de cette formule $x_{\min}$ et $x_{\max}$.

$\leadsto$ Konvergenzradius r_∞ : • *Rayon de convergence* r_∞ :

$$I = (x_{\min}, x_{\max}), \quad r_\infty := \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}$$

- (c) Von $f(x) = e^{x^2}$ ist keine elementare Stammfunktion bekannt. Berechne die Potenzreihe der Stammfunktion $F(x)$ durch Integration der Potenzreihe von e^{x^2} .
- *On ne connaît pas une fonction antiderivée de $f(x) = e^{x^2}$. Calculer la série de puissances $F(x)$ par intégration de la série de puissances de e^{x^2} .*
- (d) Berechne mit Hilfe der ersten 4 Summanden der Potenzreihe eine Approximationsformel für $\int_0^1 e^{x^2} dx$.
- *Calculer à l'aide des premiers 4 termes de la somme (de la série de puissances) une formule d'approximation de $\int_0^1 e^{x^2} dx$.*
- (e) Berechne eine Schranke für den Fehler der Approximation bei $n = 3$ (4 Glieder) nach der Formel von Lagrange (vgl. Script Seite 176, $h \leq 1$, $\mu = 1$).
- *Calculer une limite pour l'erreur de l'approximation pour $n = 3$ (4 termes) d'après la formule de lagrange (voir script page 176, $h \leq 1$, $\mu = 1$).*

Probl. 3 Studiere die Beispiele im Script Seite 177 und folgende Seiten.

- *Etudier les exemples dans le script aux pages 177 et aux pages suivantes.*