Vordiplom 1, Analysis, 2001

Klasse E1a - Elektrotechnik

Mathematik

Zeit inkl. Pause:
08.00 – 11.00
(180 Minuten)

WIR01/302/21/Mo 10.9.01/0800

Bedingungen:

- Alle Probleme sind selbständig zu lösen. Unehrenhaftes Verhalten hat einen sofortigen Ausschluss von der Prüfung zur Folge.
- Für die Schrift ist dokumentechtes Schreibgerät zu verwenden. Bleistift wird nur bei allfälligen Zeichnungen und Skizzen akzeptiert.
- Es wird eine saubere und klare Darstellung des Lösungsweges mit Angabe von Ideen und Zwischenresultaten verlangt. Resultate ohne Herleitung werden nicht akzeptiert.
- Bei Verwendung von Dezimalbrüchen darf die Abweichung der Schlussresultate vom exakten Resultat nicht mehr als 0.1% betragen.
- Physikalische Einheiten dürfen generell weggelassen werden, sofern nicht anders vermerkt.
- Resultate sind doppelt zu unterstreichen.
- Ungültige Teile sind sauber durchzustreichen.
- Pro Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Die Rückseiten der Schreibblätter müssen leer bleiben. Sie werden vielleicht nicht korrigiert!
- **Erlaubte Hilfsmittel:** Kursunterlagen (Kurzfassung), Formelbücher, Taschenrechner, Schreibpapier und Schreibzeug.
- **Punkte:** Pro Aufgabe sind 12 Punkte möglich, wenn nicht anders vermerkt.
- Ziel: Wenn an einer vollen Prüfung mehr als 6 Aufgaben gegeben sind, können 6 Aufgaben ausgewählt werden, die dann gelöst werden sollten.

Berner Fachhochschule, Hochschule für Technik und Architektur Biel, 10. September 2001

Vordiplomprüfung 1 in Analysis 2001

Klasse E1a

Viel Glück !

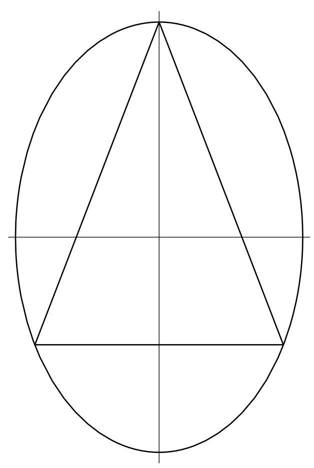
Aufgabe 1 **(12 Punkte)**

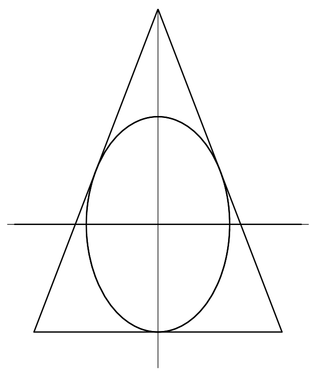
Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $s = 12$ und der Höhe $h = 18$.

(a) Um dieses Dreieck soll zuerst eine Ellipse mit den Halbachsen a und b so gelegt werden, dass die Basis des Dreiecks parallel zur kleineren Achse zu liegen kommt. a und b sollen so gewählt werden, dass der Flächeninhalt A_1 der Ellipse minimal wird. Berechnen Sie dieses A_1.

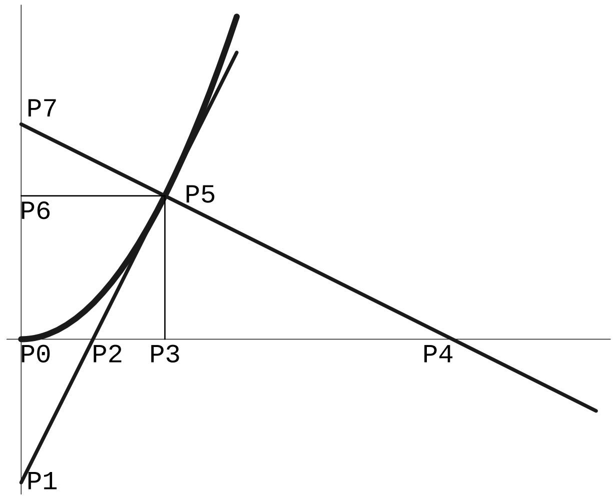
(b) Anschliessend soll in das Dreieck eine Ellipse mit den Halbachsen c und d so eingeschrieben werden, dass wieder die Basis parallel zur kleineren Achse ist und dass der Flächeninhalt A_2 maximal wird. Berechnen Sie A_2.

(c) Wie gross ist $A_1 : A_2$?





Aufgabe 2



Die Skizze zeigt eine Funktion $f(x) = a\,x^n,\;\; n \in \mathbb{N},\;\; x \geq 0$. In $P_5(x_0, y = a\,x_0^n)$ sind die Tangente und die Normale gegeben. Die damit entstehenden Punkte $P_0 \ldots P_7$ definieren Dreiecksflächen resp. Flächen, deren eine Begrenzungslinie der „Parabelbogen" ist.
Die Flächen werden wie folgt benannt (mache eine Skizze!):
$(P_0P_5P_6P_0) \rightsquigarrow\;\; A_1$, $\quad(P_0P_3P_5P_0) \rightsquigarrow\;\; A_2$, $\quad(P_0P_1P_2P_0) \rightsquigarrow\;\; A_3$,
$(P_2P_3P_5P_2) \rightsquigarrow\;\; A_4$, $\quad(P_6P_5P_7P_6) \rightsquigarrow\;\; A_5$, $\quad(P_3P_4P_5P_3) \rightsquigarrow\;\; A_6$.

Berechnen Sie die folgenden Verhältnisse der Flächeninhalte. Untersuchen Sie wie n gewählt werden muss, damit das jeweilige Verhältnis unabhängig ist von x_0. Untersuchen Sie auch den Einfluss von a.

(a) $A_1 : A_2$

(b) $A_4 : A_2$

(c) $A_4 : A_3$

(d) $A_4 : A_5$

(e) $A_4 : A_6$

(f) $(A_4 \cdot A_4) : (A_5 \cdot A_6)$

Aufgabe 3 **(12 Punkte)**

Zur Funktion $p(x) = -x + 1$ suchen wir über dem Intervall $[0, 1]$ eine andere Funktion $f(x) = \cos(\omega\, x) + h$ derart, dass $\int\limits_0^1 (f(x) - p(x))^2\, dx$ minimal ist und $\omega \in [0, \frac{\pi}{2}]$ gilt.

(a) Berechnen Sie das Integral von Hand

(b) Berechnen Sie h und ω. (Eine numerische Näherung genügt.)

(c) Skizzieren Sie die Graphen von $p(x)$ und der gefundenen Funktion $f(x)$ im selben Diagramm.

Aufgabe 4 **(12 Punkte)**

Ein ebener Kreiszylinder mit dem Radius $R = 4$ ist derart in ein Koordinatensystem einer „Lehren–Bohrmaschine" gestellt, dass die z–Achse die Zylinderachse ist. Die ebene

Grundfläche befindet sich auf der Höhe $z = -5$ und die ebene Deckfläche auf der Höhe $z = 5$.
Der in der Bohrmaschine eingespannte Bohrer hat einen Durchmesser von $d = 2$. Seine Achse ist parallel zur y–Achse und hat von der Zylinderachse einen senkrechten Abstand von $a = 2$. (Aus der Situation folgt, dass dieser Abstand a exakt in x–Richtung gemessen ist.) Es gilt $z = 2$.

(a) Machen Sie sich eine räumliche Skizze von der Situation.

(b) Berechnen Sie approximativ das Volumen des entstehenden Abfalls beim Ausbohren des Loches. Wieviel Prozent des ursprünglichen Volumens wird Abfall?

Aufgabe 5 **(12 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = z := x^4 + y^2$. Durch $|grad(f)| = 1$ wird in der Grundebene eine Kurve C definiert.

(a) Berechnen Sie die Kurve C als Vektorfunktion und skizzieren Sie C. Skizzieren Sie auch $z = f(x, y)$ resp. $\{(x, y, z) \mid z = f(x, y) \ \wedge \ (x, y) \in C\}$ für $x \geq 0, \ y \geq 0$.

(b) Bestimmen Sie C für $x \geq 0, \ y \geq 0$ als Funktion $y = h(x)$ und ermitteln Sie dort den Definitionsbereich von h.

(c) Berechne Sie die Extremalstellen von $z = f(x, y)$ für $(x, y) \in C$ resp. $y = h(x)$ mit Hilfe der Methode von Lagrange.

Aufgabe 6 **(12 Punkte)**

Gegeben sind die Funktionen $g(z) = \dfrac{1}{a + z}$ und $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$. Um $f(x)$ rasch von Hand in eine Potenzreihe zu entwickeln und dabei die infolge der Quotientenregel anfallenden grossen Ausdrücke für die Koeffizienten zu vermeiden, gehen wir wie folgt vor:
Entwickelt man $g(z)$ sowie e^x in eine Potenzreihe, so findet man:

$$g(z) = \frac{1}{a} - \frac{z}{a^2} + \frac{z^2}{a^3} - \frac{z^3}{a^4} + \frac{z^4}{a^5} - \frac{z^5}{a^6} + \frac{z^6}{a^7} - \frac{z^7}{a^8} + \frac{z^8}{a^9} - \frac{z^9}{a^{10}} + \frac{z^{10}}{a^{11}} + \ldots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^8}{40320} + \frac{x^9}{362880} + \frac{x^{10}}{3628800} + \ldots$$

Setzt man nun $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} = \dfrac{x}{(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \ldots) - 1} = \dfrac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \frac{x^5}{720} + \ldots} = \dfrac{1}{1 + z}$,
so ist $a = 1$ und $z = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \frac{x^5}{720} + \ldots$

(a) Berechnen Sie *von Hand* die ersten vier Koeffizienten B_k in der Potenzreihenentwicklung von
$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \frac{x^5}{720} + \ldots} := B_0 + \frac{B_1}{1!}\,x + \frac{B_2}{2!}\,x^2 + \ldots$$

der Reihe nach aus der Gleichung

$$1 = (1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \ldots) \cdot (B_0 + \frac{B_1}{1!}\,x + \frac{B_2}{2!}\,x^2 + \ldots).$$

Bemerkung: Die Zahlen B_k heissen **Bernoullische Zahlen.**

(b) Berechnen Sie damit eine Näherungsformel für $\int\limits_0^{x^n} \frac{t}{e^t - 1}\,dt, \qquad (x^n \leq 1).$

(c) Berechnen Sie den Konvergenzradius von $g(z)$ sowie von e^x. Was lässt sich daraus für den Konvergenzradius von $f(x)$ folgern?
Hinweis: $g(z)$ hat mit einer geometrischen Reihe zu tun!

Aufgabe 7 **(12 Punkte)**

Ein vollkommen biegsamer, schwerer und an zwei Punkten aufgehängter Faden, der sich im Gleichgewicht befindet, nimmt die Form einer Kettenlinie an, welche durch die Funktion $f(x) = a \cosh(\frac{x}{a})$ beschrieben wird. Sei $P(x) := (x, f(x))$ und $a = 2$.

(a) Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$ für $x \in [-1, 1]$.

(b) Berechnen Sie den Krümmungsradius der Kurve für $x = 0$ und für $x = 1$.

(c) Berechnen Sie den Krümmungsmittelpunkt M für $x = 1$. Zeichnen Sie M in den Graphen ein. (M liegt auf der Normalen n zur Tangente t. Die Normale schneidet die x–Achse in S)

(d) Berechnen Sie für $x = 1$ die Streckenlängen $|\overline{MP}|$ und $|\overline{PS}|$. Ist zum Resultat etwas zu bemerken?

— ENDE —